

УДК 532.59

НАВЕДЕНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ, ОБУМОВЛЕНЕ ВЕРТИКАЛЬНИМ РУХОМ ВИХРОВОЇ ПАРИ У СТРАТИФІКОВАНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

О. Г. СТЕЦЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 22.09.2009

Розв'язана лінійна задача про збурення магнітного поля Землі, обумовлене полем швидкості морського середовища від внутрішніх хвиль, які утворюються при вертикальному русі двовимірної вихрової пари. Розв'язок задачі одержано у вигляді квадратур. Виявлені особливості формування збуреного магнітного поля в залежності від характеру руху та характеристик вихрової пари і стратифікованого середовища.

Решена линейная задача о возмущении магнитного поля Земли, обусловленного полем скорости морской среды от внутренних волн, образующихся при вертикальном движении двухмерной вихровой пары. Решение задачи получено в виде квадратур. Выявлены особенности формирования возмущенного магнитного поля в зависимости от характера движения и характеристик вихровой пары и стратификации.

A linear problem relating to a disturbed magnetic field of the Earth, the said magnetic field being determined by the velocity field of the marine environment generated by the internal waves which are resulted from a vertical movement of the two-dimensional vortex pair, is solved. A solution for this problem is obtained in the form quadratures. The peculiarities of forming a disturbed magnetic field depending on the movement behaviour and on the characteristics of the vortex pair and on the stratification of the medium were found.

ВСТУП

На магнітне поле (геомагнітну індукцію) Землі постійно діє велика кількість збурюючих факторів як космічного, так і земного походження. До останніх належать явища аерогідродинамічної природи, які викликають рух водного чи повітряного середовища. Особливий інтерес в цьому ряду представляють гідродинамічні процеси, які мають детермінований характер, що робить можливим прогнозування та моніторинг структури і енергетики наведених ними збурень магнітного поля.

В даній роботі в лінійній постановці розв'язана задача визначення наведеного магнітного поля, обумовленого полем швидкості внутрішніх хвиль, яке генерується при вертикальному русі двовимірної вихрової пари (ВП) в неперервно стратифікованому середовищі. Така пара може бути утворена, наприклад, системою двох підводних крил скінченного розмаху. В процесі свого саморуху в такому середовищі (підйому або опускання в залежності від напрямків обертання середовища навколо центрів вихорів) протягом деякого скінченного інтервалу часу ВП генерує поле внутрішніх хвиль (ВХ).

Дослідження руху двовимірних точкових вихорів у стратифікованих середовищах донині обмежувалось, головним чином, стаціонарними режимами (рівномірний горизонтальний рух) для шаруватих схем стратифікації (див. бібліографію в

[1]). Для неперервно стратифікованих середовищ перше дослідження було виконано для стаціонарного руху в необмеженій лінійно стратифікованій рідині [2], де методом асимптотичного зрощування вдалося побудувати розв'язок відповідної лінійної задачі. Подальший розвиток досліджень у цьому напрямку пов'язаний з роботами, виконаними в ІГМ НАНУ. В роботі [3] вперше одержано лінійне рівняння, яке описує збурення середовища при стаціонарному русі точкового вихора у довільному стійко стратифікованому середовищі і містить у собі характеристики вихора. Проведені дослідження для декількох схем стратифікації, зокрема і для схеми [4], для якої виконана дана робота.

Задача, яка розв'язується тут, є нестационарною, причому при визначенні динаміки руху самої ВП, в силу їхньої важливості, враховуються в'язкість середовища і наявність у ньому дрібномасштабної турбулентності. Характер цього впливу розглянуто в роботах [5–7]. В роботі [7] запропоновано простий наближений вираз, який описує зміну в часі величини інтенсивності точкового вихора $\Gamma(t)$, обумовлену впливом в'язкості і турбулентності середовища. Необхідність враховування цих факторів обумовлена масштабом ВП (метри) та присутністю турбулізації самого середовища в її околі:

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu_T t}\right) \right] \exp\left(-c_* \frac{qt}{2a}\right),$$

де Γ_0 – інтенсивність вихора в початковий момент;

ν_T – турбулентна в'язкість середовища; q – середньоквадратичне значення пульсацій швидкості в ньому; c_* – експериментальна стала; r – радіус-вектор точки з координатами x, z відносно центра вихора з координатами x_0, z_0 ; $2a$ – віддаль між центрами вихорів, яка в присутності границь середовища також змінюється в часі.

В силу наявності стратифікації величина інтенсивності вихорів, а отже, і швидкість руху вихрової пари буде додатково зменшуватись за рахунок витрат енергії на випромінювання внутрішніх хвиль і на виконання роботи по переміщенню “атмосфери” ВП – внутрішньої області навколо вихорів, в якій всі лінії течії є замкнутими, а вся рідина, яка там знаходиться, переноситься разом з вихорами [8]. Оскільки густина середовища всередині атмосфери відповідає густині на горизонті її утворення, то при її подальшому русі, незалежно від напрямку вгору чи вниз, на неї діятиме сила плавучості, направлена протижно напрямку її руху. В силу названих причин вертикальний рух ВП в реальному середовищі, тим більше у стратифікованому, завжди має обмежений шлях свого руху.

Виконані в даній роботі дослідження відповідно до особливостей фізики розглянутого процесу містять три характерні етапи. На першому з них вивчена динаміка руху вихрової пари в необмеженому лінійно стратифікованому середовищі. На другому етапі в рамках спрощеної моделі характеру руху ВП розв'язана нестационарна лінійна задача про генерацію поля внутрішніх хвиль у шарі скінченої товщини L з лінійною стратифікацією в процесі вертикального руху двовимірної ВП протягом заданого інтервалу часу та визначено утворене при цьому швидкісне поле. На третьому етапі розв'язана лінійна задача знаходження наведеного магнітного поля Землі, обумовленого швидкісним полем ВХ від ВП. На підставі виконаних чисельних експериментів виявлені особливості формування збуреного магнітного поля в залежності від характеру руху та характеристик ВП і стратифікації середовища.

1. ДИНАМІКА САМОРОХУ ВИХРОВОЇ ПАРИ

Відомо [9], що при рівномірному русі крила (або системи двох крил) скінченого розмаху на деякій відстані за ними в результаті взаємодії системи збігаючих вільних вихорів утворюються два поздовжніх вихрових жгуту з протилежним напрямком обертання в них. Якщо кожен з цих жгутів замінити точковим вихором з відповідною інтенсивністю, то з певною мірою наближення такий вихровий

слід представляється утворенням вихрової пари. Коли таке джерело породження (воно може мати і іншу природу) вихрової пари рухається рівномірно з достатньо великою швидкістю U вздовж горизонтальної вісі, то позаду нього в деякій умовній точці на віддалі $5 \div 10$ характерних розмірів цього джерела структура двох поздовжніх вихорів набуває двовимірного характеру в площині, перпендикулярній вісі руху джерела, після чого рух утвореної ВП з достатньо високою точністю є відповідним руху двовимірної ВП. У просторовій рухомій системі координат, пов'язаній з джерелом ВП, початок якої знаходиться на вільній поверхні, віссю x , яка направлена протилежно вектору швидкості руху джерела породження ВП і віссю z , направленою вгору, ця умовна точка також рухається зі швидкістю U , перебуваючи на деякому горизонті з координатою $z = -h$, яка близька до координати горизонту руху джерела. Для розв'язання задачі генерації внутрішніх хвиль саме цю умовну точку зручно задавати як джерело породження двовимірної ВП. Тоді відповідна задача ВХ розглядається у двовимірній нестационарній постановці в площині yoz , перпендикулярній вісі руху джерела x . В ній у початковий момент часу $t = 0$ на горизонті $z = -h$ в точках з координатами $y = -a$ та $y = a$ задаються згенеровані вихори з рівними інтенсивностями Γ_0 , але протилежних знаків. Це відповідає утворенню вихрової пари з початковою швидкістю $\Gamma_0/4\pi a$, направленою вгору або вниз. Якщо правий вихор має від'ємну циркуляцію (рух навколо центра відбувається в напрямку годинникової стрілки), а лівий – додатну циркуляцію (рух навколо центра вихора відбувається в протилежному напрямку), вихрова пара рухається вгору.

Надалі приймається, що рух ВП відбувається достатньо далеко від границь середовища, так що їхнім впливом на динаміку руху атмосфери ВП можна знехтувати. Отже, для визначення характеру динаміки руху ВП розглядається її вертикальний рух у необмеженому лінійно стратифікованому середовищі в умовах наявності впливу в'язкості та дрібномасштабної турбулентності. В роботі [10] показано, що для випадку необмеженого ідеального середовища в залежності від швидкості руху ВП V_H можливі два варіанти утворення її атмосфери. Якщо виконується умова $\Gamma/\pi V_H > a$, то має місце одна спільна атмосфера такої пари вихорів. За виконання умови $\Gamma/\pi V_H < a$ реалізуються дві окремі атмосфери для кожного з вихорів. Неважко переконатись, що у випадку саморуху в такому середовищі, коли швидкість ВП складає величину $V_H = \Gamma/4\pi a$, завжди виконується умо-

ва, відповідна існуванню однієї спільної атмосфери. Враховуючи факт зменшення швидкості руху ВП за рахунок наявності в'язкості і стратифікації, в таких середовищах при виконанні останньої умови тим ймовірніше матиме місце одна спільна атмосфера.

З певною долею наближеності можна припустити, що площа утвореної в початковий момент атмосфери така сама, як і для випадку ідеального середовища, коли тілом саморухомої ВП є овоїд з піввісями $1.72a$ і $2.09a$ вздовж осей oy і oz відповідно і з площею поперечного перерізу $S = 1.61a^2$ [11]. На одиницю довжини такого тіла, маса якого складає величину

$$m_a = \rho_s(-h)S,$$

де $\rho_s(z)$ – густина незбуреного середовища, незалежно від напрямку вертикального руху, діє сила плавучості

$$F_{\Pi} = -gS\{\rho_s(-h) - \rho_s[z(t)]\}.$$

Для лінійно стратифікованого середовища з

$$\rho_s(z) = \rho_{s0}(1 - \beta z), \quad \beta > 0, \quad (1)$$

$$F_{\Pi} = -gS\rho_{s0}(z + h). \quad (2)$$

Зменшення швидкості руху атмосфери ВП за рахунок в'язкості і турбулентності еквівалентне дії на неї додаткової сили опору, яка, враховуючи характер впливу названих факторів на величину інтенсивності вихорів, представляється у вигляді

$$F_T = \frac{m_a \Gamma_0}{4\pi a} \frac{d}{dt} \left[\exp(-b_* t) \left(1 - \exp\left(-\frac{d_*}{t}\right) \right) \right], \quad (3)$$

де

$$b_* = \frac{c_* q_T}{2a}, \quad d_* = \frac{r}{4\nu_T}.$$

Величину сили, обумовленої наявністю прилученої маси при нестационарному русі атмосфери ВП, можна визначити наближено, замінивши овальну форму атмосфери на форму еліпса з тими самими вісями $2.09a$ і $1.79a$. Оскільки в даній схемі руху швидкість ВП перпендикулярна більшій вісі еліпса, то величина прилученої маси визначається виразом [12]

$$m_{\Pi} = \frac{1}{4}\pi\rho_s(z)(2.09a)^2 = 3.53\rho_s(z)a^2.$$

Відповідна складова сили представляється як

$$F_{\Pi m} = -m_{\Pi} \frac{dV_{\Pi}}{dt}, \quad (4)$$

де швидкість руху ВП V_{Π} визначається в кожний момент часу подібно до випадку ідеального середовища, але зі змінною інтенсивністю вихора $\Gamma(t)$:

$$V_{\Pi} = \frac{\Gamma(t)}{4\pi a}.$$

Рівняння руху тіла атмосфери ВП під дією визначених вище сил (1)–(4) має вигляд

$$m_a \frac{dV_{\Pi}}{dt} = F_{\Pi} + F_T - m_{\Pi} \frac{dV}{dt}. \quad (5)$$

Якщо у виразі (3) величину Γ_0 замінити на $\Gamma_s(t)$ так, що ця величина враховує вплив стратифікації на величину інтенсивності вихора (при цьому $\Gamma_s(0) = \Gamma_0$), то рівняння (5) після обезрозмірювання, коли в якості масштабу довжини береться товщина шару L , масштабу часу – L/U , масштабу швидкості – U , масштабу густини – $\rho_s(0)$, масштабу циркуляції – UL і звичного позначення $V_{\Pi} = dz/dt$, набуває вигляду

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{0.0814}{a} \left[\exp(-b_* t) \left(1 - \exp\left(-\frac{d_*}{t}\right) \right) \right] \frac{d\Gamma_s}{dt} + 1.0227\beta\lambda(z + h) = 0 \quad (6)$$

з початковими умовами

$$z(0) = -h, \quad (7)$$

$$\frac{dz}{dt}(0) = \frac{\Gamma_0}{4\pi a}. \quad (8)$$

Тут $\lambda = gL/U^2$.

Для визначення характеру зміни $\Gamma_s(t)$ під дією стратифікації використовується умова зменшення інтенсивності вихорів за рахунок переходу кінетичної енергії руху всередині ВП E_k в потенціальну енергію атмосфери E_{Π} . У відповідності до цього

$$\frac{dE_k}{dt} = -\frac{dE_{\Pi}}{dt}. \quad (9)$$

За величину кінетичної енергії ВП E_k приймається величина енергії потенціального руху всередині її атмосфери. Якщо для виконання умови скінченності цієї величини вибрати радіусами ядер вихорів r_0 , то в роботі [13] одержано для неї такий вираз:

$$E_k = \frac{1}{2\pi}\rho_s(-h)\Gamma_s^2 \left(\ln \frac{2a}{h} + 0.726 + \frac{r_0^2}{4a^2} \right).$$

Величина потенціальної енергії E_{Π} для лінійного профілю стратифікації представляється у вигляді

$$E_{\Pi} = gS \int_{-h}^z [\rho_s(-h) - \rho_s(z)] dz =$$

$$= \frac{1}{2} \rho_s(0) g \beta S (z+h)^2.$$

Як раніше відзначалось, при русі ВП мають місце втрати E_k на генерацію внутрішніх хвиль, але тут вони не враховуються з огляду на їхню відносну малість.

Підстановка виразів для E_k і E_{Π} у співвідношення (9) і аналогічний раніше виконаним перехід до безрозмірних змінних приводить до диференціального рівняння, яке описує характер зміни $\Gamma_s(t)$ під дією стратифікації:

$$\frac{d\Gamma_s^2}{dt} + \mu_* \frac{d}{dt} (z+h)^2 = 0, \quad (10)$$

де

$$\mu_* = \frac{\beta g S}{2U^2 b}, \quad b = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{2a}{r_0} + 0.726 + \frac{r_0^2}{4a^2} \right).$$

Рівняння (10) має простий розв'язок:

$$\Gamma_s(t) = [\Gamma_0^2 - \mu_*(z+h)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Підстановка цього виразу у рівняння (5) дає рівняння, яке визначає динаміку вертикального руху ВП вгору з урахуванням всіх вказаних раніше факторів:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{0.0814}{a} \frac{d}{dt} \left\{ [\Gamma_0^2 - \mu_*(z+h)^2]^{\frac{1}{2}} \right\} \times \\ \times \left[\exp(-b_* t) \left(1 - \exp\left(-\frac{d_*}{t}\right) \right) \right] + \\ + 1.0227 \beta \lambda (z+h) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

з початковими умовами, які співпадають з (7), (8).

Для розв'язання задачі генерації внутрішніх хвиль з метою спрощення постановки задачі рух ВП у відповідності до розв'язку рівняння (11) можна замінити рівномірним рухом ВП протягом періоду її підйому до моменту t_m , коли градієнт швидкості руху атмосфери ВП починає різко зменшуватись. Таке обмеження обумовлене тим, що після цього можлива поява так званої нестійкості Кроу з переплетенням вісей вихорів [14]. Величина середньої швидкості руху знаходиться як

$$V_{\text{nc}} = \frac{z_m + h}{t_m},$$

де z_m – координата центру атмосфери в момент $t = t_m$.

Середнє значення інтенсивності вихорів визначається з виразу

$$\Gamma_c^2 = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} \Gamma^2(t) dt,$$

де

$$\begin{aligned} \Gamma(t) = [\Gamma_0^2 - \mu_*(z+h)^2]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp(-b_* t) \left(1 - \exp\left(-\frac{d_*}{t}\right) \right), \end{aligned}$$

що визначає рівнозначні затрати енергії для обох схем руху (реальної та апроксимаційної) протягом одного і того самого інтервалу часу. Вплив такого роду апроксимації на картину ВХ проявляється лише в ближній зоні в околі ВП, бо на загальну картину поля ВХ цей вплив має місце лише в області височастотних гармонік. Дослідження в цьому напрямку для областей перемішаної рідини [15] показали саме такий характер цього впливу на поле внутрішніх хвиль.

2. ВНУТРІШНІ ХВИЛІ, ПОРОДЖЕНІ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМУ РУСІ ВИХРОВОЇ ПАРИ

2.1. Математичне формулювання задачі

В цілому, картина внутрішніх хвиль, згенерованих рухом ВП, має просторовий характер, оскільки область, яка їх містить, у площині xoz має вигляд клина, половина кута якого γ визначається з виразу

$$\gamma = \arctg \frac{c_{qm}}{U},$$

де c_{qm} – максимальна групово швидкість поширення утворених ВХ. Оскільки для реальних середовищ величини c_{qm} складають величину порядку см/с ÷ десятки см/с, а рух джерела розглядається зі швидкостями $U \gg c_{qm}$, то $\gamma \ll 1$. Тоді в площині yoz , перпендикулярній до вісі руху джерела збурення, рух середовища з достатньо високою точністю має локальнодвовимірний характер і задача генерації ВХ таким стаціонарно рухомим джерелом у рухомій системі координат, пов'язаній з цим джерелом, може розглядатися як нестационарна в нерухомій системі координат у площині yoz .

В нерухомій системі координат, вибраній так, як в розділі 1, використовується нестационарна система рівнянь руху стратифікованого середовища в наближенні Бусинеска (спрощена схема) [16]:

$$\begin{aligned} \rho_{s0} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \rho_{s0} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} + g\rho &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{d\rho_s}{dz} w &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Тут v і w – складові збуреної швидкості в напрямку осей oy і oz відповідно; p і ρ – збурені тиск і густина; g – прискорення сили тяжіння.

Ця система після введення функції течії $\psi(x, y, z)$ такої, що

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

зводиться до рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (12)$$

де Δ – двовимірний оператор Лапласа; N – частота Брента-Вайсяля середовища. Для випадку лінійної стратифікації (1) $N^2 = \beta g$. Щоб одержати рівняння, яке описує збурений рух середовища, викликаний нестационарним рухом точкового вихора, використовується підхід граничного переходу до однорідного середовища, аналогічний застосованому в [3] для стаціонарної задачі. При $N \rightarrow 0$ рівняння трансформується до вигляду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi = 0.$$

Але в однорідному середовищі для двовимірного точкового вихора постійної інтенсивності Γ_0 , розміщеного в точці з координатами (y_0, z_0) , рівняння, яке описує збурений рух середовища, є

$$\Delta \psi = -\Gamma_0 \delta(y - y_0) \delta(z - z_0),$$

де $\delta(y)$, $\delta(z)$ – дельта-функції Дірака.

Якщо вихор рухається нестационарно вздовж деякої траєкторії $y = y(t)$, $z = z(t)$, то відповідне рівняння має вигляд

$$\Delta \psi = -\Gamma(t) \delta[y - y_0(t)] \delta[z - z_0(t)]. \quad (13)$$

Тоді з цього рівняння і (12) випливає загальний вигляд лінійного рівняння для функції течії збуреного руху стратифікованого середовища, викликаного нестационарним рухом точкового вихора:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + N^2 \frac{d^2 \psi}{dy^2} = \\ & = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \Gamma(t) \delta[y - y_0(t)] \delta[z - z_0(t)] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

У відповідності до прийнятої схеми, в процесі руху вихрової пари інтенсивність вихорів Γ_c , швидкість їхнього підйому V_c і віддаль між ними

2а вважаються незмінними, а рух ВП відбувається протягом інтервалу часу $\Delta t = t_m$. Тоді характер траєкторії руху ВП та зміна в часі інтенсивності вихорів у вибраній системі координат будуть

$$\begin{aligned} y_{01} &= a, \\ y_{02} &= -a, \\ z_0 &= [-h + V_c t], \\ \Gamma(t) &= \Gamma_c [H(t) - H(t - t_m)]. \end{aligned}$$

Тут V_{nc} – розмірна величина; $H(t)$ – одинична функція Хевісайда.

Безрозмірна форма рівняння (14) для такої схеми руху ВП, якщо вибрати масштаби: довжини – товщина шару середовища L , часу – N^{-1} , функції течії – $L^2 N$ для стратифікації, відповідний незбуреному розподілу густини (1), має вигляд (в тих же позначеннях для y, z, t, ψ)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Gamma_c [\delta(y - a) - \delta(y + a)] \times \\ & \times \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ [H(t) - H(t - t_{mw})] \delta(z + h - V_c t) \right\}, \end{aligned}$$

де $t_{mw} = Fr^{-1} t_m$; $Fr = U/LN$ – густинне число Фруда. Враховуючи властивості дельта-функцій [17], це рівняння представляється як

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = s \Gamma_c [\delta(y - a) - \delta(y + a)] \times \\ & \times \left\{ H[s(z + h)] - H[s(z - z_m)] \right\} \times \\ & \times \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \delta[t - s(z + h)] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут $s = V_{nc}^{-1}$.

Граничні умови для ψ приймаються у вигляді умови “твердої кришки” на вільній поверхні та умови непроникності на дні:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{і} \quad z = -1. \quad (16)$$

2.2. Метод інтегральних перетворень

Розв’язок для $\psi(y, z, t)$ знаходиться у вигляді інтегрального представлення Фур’є з використанням умови “причинності”, тобто відсутності збурень при $t < 0$:

$$\begin{aligned} & \psi(y, z, t) = \\ & = \frac{s \Gamma_c}{4\pi^2} Re \int_{-\infty + i\epsilon}^{\infty + i\epsilon} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_2 y} \bar{\psi}(k_2, z, \omega) dk_2, \end{aligned} \quad (17)$$

де ϵ – як завгодно мала додатня величина.

Підстановка представлення (17) у рівняння (15) та умови (16) дає для визначення функції-образу $\bar{\psi}(k_2, z, \omega)$ наступну задачу – звичайне диференціальне рівняння

$$\bar{\psi}'' + k^2 \left(\frac{1}{\omega^2} - 1 \right) \bar{\psi} = (e^{ik_2a} - e^{-ik_2a}) \times \left\{ H[s(z+h)] - H[s(z-z_m)] \right\} e^{is(z+h)} \quad (18)$$

з граничними умовами

$$\bar{\psi} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{і} \quad z = -1. \quad (19)$$

Розв'язок рівняння (18) зручно знайти з використанням методу варіації сталих для знаходження частинного розв'язку. В результаті одержується для $t > t_m$, що і представляє практичний інтерес, наступний розв'язок для $\bar{\psi}(k_2, z, \omega)$:

$$\bar{\psi}(k_2, z, \omega) = \bar{\psi}_1(k_2, z, \omega) + \bar{\psi}_2(k_2, z, \omega),$$

де

$$\bar{\psi}_1 = - \frac{(e^{ik_2a} - e^{-ik_2a}) [e^{is(z_m+h)\omega} - 1]}{(M^2 - s^2\omega^2) (e^{iM} - e^{-iM})} \times \left[e^{iM(z+1)} - e^{-iM(z+1)} \right],$$

$$\bar{\psi}_2(k_2, z, \omega) = (\bar{\psi}^* - 1) \frac{e^{ik_2a} - e^{-ik_2a}}{M^2 - s^2\omega^2},$$

де

$$\bar{\psi}^*(k_2, z, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad z < -h, \\ e^{is(z+h)\omega} & \text{при} \quad -h \leq z \leq z_m, \\ e^{is(z_m+h)\omega} & \text{при} \quad z_m < z \leq 0, \end{cases}$$

і

$$M = \frac{k_2 (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega}.$$

Інтегрування в (17) зручно виконувати спочатку у k_2 – площині, де підінтегральна функція задовольняє умовам леми Жордана і має прості полюси в точках, де мають місце рівності

$$e^{iM} - e^{-iM} = 0, \quad (20)$$

$$M^2 - s^2\omega^2 = 0. \quad (21)$$

Розв'язок рівняння (20) дає полюси, що визначають модову структуру поля внутрішніх хвиль:

$$\zeta_n = \pm \frac{\pi n \omega}{(1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

а рівняння (21) дає полюси, які при наявності вільної поверхні визначають поверхневі хвилі:

$$\zeta^1 = \pm \frac{s\omega^2}{(1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Оскільки в ω -площині інтегрування виконується вздовж прямої, зміщеної на величину $i\epsilon$ від дійсної вісі ω , в k_2 -площині полюси будуть також зміщеними з дійсної вісі k_2 . Якщо у розв'язки для ζ_n і ζ^1 підставити замість ω величину $\omega = \omega_r + i\epsilon$, то з точністю до ϵ^2

$$\zeta_n = \pm \left[\zeta_{nr} + i\epsilon \frac{\zeta_{nr}}{\omega_r (1 - \omega_r^2)} \right],$$

$$\zeta^1 = \pm \left[\zeta_r^1 + i\epsilon \frac{\zeta_r^1}{\omega_r (1 - \omega_r^2)} \right],$$

де

$$\zeta_{nr} = \pm \frac{\pi n \omega_r}{(1 - \omega_r^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \zeta_r^1 = \pm \frac{s\omega_r^2}{(1 - \omega_r^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Використання теореми Коші для замкнутого контура, що складається з дійсної вісі k_2 -площини і кола нескінченного радіуса, приводить до такого результату для функції-образу:

$$\tilde{\psi}(y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(k_2, z, \omega) e^{ik_2 y} dk_2,$$

$$\tilde{\psi}(y, z, \omega) = \tilde{\psi}_{11} + \tilde{\psi}_{12} + \tilde{\psi}_2, \quad (22)$$

де в області $|y| > a$

$$\tilde{\psi}_{11}(y, z, \omega) = -2\pi i \omega \text{Sign}(y) \left[e^{is(z_m+h)\omega} - 1 \right] \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n z) [e^{i\zeta_{nr}(|y|+a)} - e^{i\zeta_{nr}(|y|-a)}]}{(1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} (\pi^2 n^2 - s^2 \omega^2)},$$

$$\tilde{\psi}_{12}(y, z, \omega) = - \frac{\pi i \text{Sign}(y) [e^{is(z_m+h)\omega} - 1]}{s \sin(s\omega) (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \times \sin[s\omega(z+1)] \left[e^{i\zeta_r^1(|y|+a)} - e^{i\zeta_r^1(|y|-a)} \right],$$

$$\tilde{\psi}_2(y, z, \omega) = \frac{\pi i \text{Sign}(y) [e^{i\zeta_r^1(|y|+a)} - e^{i\zeta_r^1(|y|-a)}]}{s (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}}$$

і в області $|y| < a$

$$\tilde{\psi}_{11}(y, z, \omega) = -2\pi i \omega \left[e^{is(z_m+h)\omega} - 1 \right] \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n z) [e^{i\zeta_{nr}(y+a)} - e^{-i\zeta_{nr}(y-a)}]}{(1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} (\pi^2 n^2 - s^2 \omega^2)},$$

$$\tilde{\psi}_{12}(y, z, \omega) = - \frac{\pi i [e^{is(z_m+h)\omega} - 1]}{s \sin(s\omega) (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \times \sin[s\omega(z+1)] \left[e^{i\zeta_r^{(1)}(y+a)} - e^{i\zeta_r^{(1)}(y-a)} \right],$$

$$\tilde{\psi}_2(y, z, \omega) = \frac{\pi i [e^{i\zeta_r^{(1)}(y+a)} - e^{-i\zeta_r^{(1)}(y-a)}]}{s (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Тут $Sign(y)$ – знакова функція.

В ω -площині функції $\tilde{\psi}_{11}$, $\tilde{\psi}_{12}$ і $\tilde{\psi}_2$ також задовольняють умовам леми Жордана, тому для інтегрування в цій площині також використовується апарат теорії лишків. Функції $\tilde{\psi}_{11}$ і $\tilde{\psi}_{12}$ мають тут особливості при $\omega = 1$ і $\omega = -1$, які одночасно є точками розгалуження і суттєво особливими точками, та при $\omega_{1n} = \pi n/s$ і $\omega_{2n} = -\pi n/s$, які є простими полюсами і в залежності від величини s та значення n , можуть знаходитись як всередині інтервала $|\omega|$, так і зовні його. Функція $\tilde{\psi}_2$ має особливості лише при $\omega = 1$ та $\omega = -1$. Процедура знаходження розв'язку інтегруванням по замкнутому контуру в ω -площині аналогічна попередній в k_2 -площині, тут лише додається ще інтегрування по берегах розрізу між точками розгалуження, виконаного вздовж дійсної вісі ω -площини. Вибір значень радикала $\sqrt{1-\omega^2}$ на берегах розрізу виконується із необхідності виконання умов затухання збурень при $|y| \rightarrow \infty$. Відповідний аналіз показує, що для цього мають бути однаковими знаки ω_r та $\sqrt{1-\omega^2}$ і для $y > 0$ треба покласти на верхньому березі розрізу аргумент $\sqrt{1-\omega^2} = 0$, а на нижньому – аргумент $\sqrt{1-\omega^2} = \pi$. Для $y < 0$ необхідно зробити відповідно навпаки.

При обході особливостей $\omega = 1$ і $\omega = -1$ по колам нескінченно малого радіуса $r \rightarrow 0$ вклад у розв'язок для всіх його складових при $r \rightarrow 0$ прямує до нуля як $r^{\frac{1}{2}} \exp(ipny/r^{\frac{1}{2}})$ або $r^{\frac{1}{2}} \exp(isy/r^{\frac{1}{2}})$.

Вклад у розв'язок задачі від полюсів $\omega_n = \pm \frac{\pi n}{s}$ визначається по різному для випадків $|\omega_n| < 1$ і $|\omega_n| > 1$. Якщо $|\omega_n| = 1$, то, як вже показано, вкладу у розв'язок немає. Якщо $|\omega_n| < 1$, то полюси знаходяться на лінії розрізу, так що їх обхід на різних берегах здійснюється з різними аргументами $\sqrt{1-\omega^2}$. Якщо $|\omega_n| > 1$, то вклад від цих полюсів знаходиться простим знаходженням відповідних лишків. Виконання відповідних операцій показало, що вклади у розв'язок від полюсів при $|\omega_n| < 1$ є чисто уявними, а при $|\omega_n| > 1$ дають зростаючі по y розв'язки характеру $\sim e^{ay}$, що протирічить фізиці явища. Оскільки цей розв'язок задовольняє однорідній частині рівняння (15), його можна просто відняти, тобто опустити.

Обчислення інтегралів вздовж розрізу між $\omega = -1$ та $\omega = 1$ виявило, що вклад у розв'язок дає лише складова ψ_{11} , яка обумовлена наявністю внутрішніх хвиль. Відсутність вкладу у розв'язок від складових ψ_{12} та ψ_2 обумовлена граничною умовою в наближенні “твердої кришки”, що відповідає відсутності поверхневих хвиль. Таким чином, вклад від ψ_{11} і є розв'язком для $\psi(y, z, t)$.

Для всієї області він представляється квадратурним виразом

$$\psi(y, z, t) = -\frac{4\Gamma_{cs}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n z) \times \\ \times \int_0^1 \frac{\omega}{(1-\omega^2)^{\frac{1}{2}} (\pi^2 n^2 - s^2 \omega^2)} \sin \left[\frac{\pi n \omega a}{(1-\omega^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \times \\ \times \sin \left[\frac{\pi n \omega y}{(1-\omega^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \left\{ \sin[\omega(t - t_{mw})] - \sin(\omega t) \right\} d\omega, \quad (23)$$

де $t_m = s(z_m + h)$.

В (23) в околі особливостей, де $\pi^2 n^2 - s^2 \omega^2 = 0$, інтеграл обчислюється у розумінні головного значення.

3. ЗБУРЕННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ВІД РУХУ ВИХРОВОЇ ПАРИ

В попередньому розділі знайдено поле внутрішніх хвиль, яке утворюється вертикальним рухом вихрової пари протягом заданого інтервалу часу в шарі скінченної товщини лінійно стратифікованої рідини. Їм відповідне поле швидкості, яке у нерухомій системі координат представляється як $\vec{V}(t, y, z) = 0\vec{i} + v(t, y, z)\vec{j} + w(t, y, z)\vec{k}$, а в рухомій системі координат, пов'язаній з джерелом збурення, відповідно виражається як $\vec{V}\left(\frac{x}{U}, y, z\right) = (0\vec{i}) + v\left(\frac{x}{U}, y, z\right)\vec{j} + w\left(\frac{x}{U}, z\right)\vec{k}$. Це поле обумовлює утворення додаткового магнітного поля $\vec{B} = \mu\vec{H}$ відносно геомагнітної індукції Землі \vec{B}_E . Нижче розв'язується лінійна задача визначення такого наведеного магнітного поля. Схема руху джерела збурень і система координат – така сама, як у задачі про внутрішні хвилі.

3.1. Математичне формулювання задачі

Величина геомагнітної індукції Землі \vec{B}_E приймається постійною, яка виражається через власну магнітуду F , кут α між віссю руху джерела ВП і напрямком магнітної півночі та кут заглиблення I . Якщо позначити $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ як одиничні вектори вздовж осей ox, oy, oz відповідно, то у вибраній системі координат

$$\vec{B}_E = F \left(\vec{i} \cos I \cos \alpha + \vec{j} \cos I \sin \alpha - \vec{k} \sin I \right). \quad (24)$$

Індуковане магнітне поле \vec{H} , в свою чергу, є причиною утворення наведеного електричного поля

\vec{E} , яке визначається для морської води як

$$\vec{E} = \vec{V} \times (\mu \vec{H} + \vec{B}_E),$$

де μ – магнітна проникність води, а знак \times означає операцію векторного добутку.

Надалі, в силу того, що $\mu \vec{H} \ll \vec{B}_E$, можна використовувати наближену апроксимацію

$$\vec{E} = \vec{V} \times \vec{B}_E.$$

На підставі такого спрощення і представлення для \vec{E} через \vec{H} із рівнянь Максвелла в [19] одержано наступне лінійне рівняння для наведеного магнітного поля $\vec{H}(x, y, z, t)$:

$$-\nabla^2 \vec{H} = \sigma_0 \left[-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}_E) - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \right],$$

де σ_0 – електрична провідність морської води; ϵ – діелектрична провідність; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – трьохвимірний лапласіан; $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$.

В силу малості складової $\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$ в цьому рівнянні нею можна знехтувати і надалі для визначення наведеного магнітного поля використувати рівняння

$$\nabla^2 \vec{H} = \sigma_0 \left[\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}_E) \right].$$

В безрозмірній формі, де прийнято в якості масштабу довжини – L , масштабу швидкості – U , масштабу часу – L/U , масштабу $\vec{H} - \mu^{-1} |\vec{B}_E|$, масштабу \vec{B}_E – його модуль $|\vec{B}_E|$, це рівняння набирає вигляду

$$\nabla^2 \vec{H} = \sigma_\mu \left[\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}_E) \right], \quad (25)$$

де $\sigma_\mu = LU\sigma_0\mu = \text{Re}_\mu$ – магнітне число Рейнольдса.

Функція $\vec{H}(x, y, z, t)$ задовольняє також умову бездивігентності:

$$\vec{\nabla} \vec{H} = 0. \quad (26)$$

Структура шуканого розв'язку для \vec{H} вибирається на підставі характеру представлення генерованого вихровою парою поля швидкості внутрішніх хвиль \vec{V} . Як випливає із результатів попереднього розділу, це поле у прийнятому наближенні має дві компоненти – в напрямку осей oy і oz . Таким самим буде і наведене магнітне поле $H(y, z, t)$.

Для підстановки у рівняння (25) поля \vec{V} , його необхідно виразити у безрозмірному вигляді з використанням масштабів обезрозмірювання даного розділу. Це зручно зробити, замінивши у (23) $\psi(y, z, t)$ на $\psi_1 = \text{Fr}^{-1} \psi(y, z, t \text{Fr})$, не змінюючи в іншому структури підінтегрального виразу. Тоді, враховуючи, що при заміні масштабів обезрозмірювання з розділу 2 на масштаби з даного розділу відбувається заміна Γ_c на $\Gamma_{c1} = \Gamma_c \text{Fr}$ і s на $s_1 = s \text{Fr}^{-1}$, так що $\Gamma_c s = \Gamma_{c1} s_1$, відповідне представлення розв'язку (23) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1(y, z, t) &= \frac{4\Gamma_{c1}s_1}{\pi \text{Fr}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n z) \times \\ &\times \int_0^1 \frac{\omega}{(1-\omega^2)^{\frac{1}{2}} (\pi^2 n^2 - s_1^2 \omega^2)} \sin(\zeta_n a) \times \\ &\times \sin(\zeta_n y) \{ \sin[\omega \text{Fr}(t - t_{mw})] - \sin(\omega \text{Fr} t) \} d\omega. \end{aligned}$$

Тут використано позначення з попереднього розділу

$$\zeta_n = \frac{\pi n \omega}{(1-\omega^2)^{\frac{1}{2}}},$$

але вже для дійсних значень ω (без індекса "r"). Враховуючи вираз для t_{mw} через t_m , для даного розв'язку одержується таке представлення індукованого ВХ від ВП поля швидкості:

$$\vec{V}(y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \int_0^1 G_n(\omega) (\vec{j} V_y + \vec{k} \zeta_n V_z) d\omega, \quad (27)$$

де

$$\begin{aligned} V_y &= \pi n (v_1 e^{if_1} + v_2 e^{-if_1} + v_3 e^{if_2} + v_4 e^{-if_2}), \\ V_z &= w_1 e^{if_1} + w_2 e^{-if_1} + w_3 e^{if_2} + w_4 e^{-if_2}, \\ f_1 &= \zeta_n y + \omega \text{Fr} t, \\ f_2 &= \zeta_n y - \omega \text{Fr} t, \end{aligned}$$

$$G_n = -\frac{\Gamma_{c1}s_1\omega \sin(\zeta_n a)}{2\pi \text{Fr} (1-\omega^2) (\pi^2 n^2 - s_1^2 \omega^2)},$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{1r} + i v_{1i}, \\ v_{1r} &= -\cos(\pi n z + t_m \omega) - \cos(\pi n z - t_m \omega) + \\ &+ 2 \cos(\pi n z)], \\ v_{1i} &= \sin(\pi n z + t_m \omega) - \sin(\pi n z - t_m \omega), \\ v_2 &= \bar{v}_1, \\ v_3 &= -\bar{v}_1, \\ v_4 &= -v_1, \\ w_1 &= w_{1r} + i w_{1i}, \\ w_{1r} &= -\cos(\pi n z + t_m \omega) + \cos(\pi n z - t_m \omega), \\ w_{1i} &= \sin(\pi n z + t_m \omega) + \sin(\pi n z - t_m \omega) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2 \sin(\pi n z), \\ & w_2 = \bar{w}_1, \\ & w_3 = \bar{w}_1, \\ & w_4 = w_1. \end{aligned}$$

для $m = 1, 3$ і

$$\vec{M}_m(y, z, \omega) = \sigma_\mu \left[i\zeta_n \left(\vec{B}_E \vec{j} \right) \vec{V}_m - \left(\vec{B}_E \vec{k} \right) \frac{\partial \vec{V}_m}{\partial z} \right]$$

для $m = 2, 4$.

в) в області $z < -1$ значення δ приймається таким самим, як в області водного середовища, а $M_m = 0$.

У виразах для v_m і w_m риски зверху означають комплексну спряженість відповідної функції.

Виходячи з рівняння (25) та представлення (27), розв'язок для $\vec{H}(y, z, t) = \vec{j}H_y(y, z, t) + \vec{k}H_z(y, z, t)$ зручно знаходити у вигляді

$$\vec{H}(y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \int_0^1 G_n(\omega) (\vec{j}H_y + \vec{k}\zeta_n H_z), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} H_y &= h_{1y}e^{if_1} + h_{2y}e^{-if_1} + h_{3y}e^{if_2} + h_{4y}e^{-if_2}, \\ H_z &= h_{1z}e^{if_1} + h_{2z}e^{-if_1} + h_{3z}e^{if_2} + h_{4z}e^{-if_2}, \end{aligned}$$

де h_{my} і h_{mz} ($m = 1, 2, 3, 4$) – комплексні величини. Підстановка представлень (27), (28) у рівняння (25) приводить до звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій

$$\vec{h}_m = \vec{j}h_{my}(y, z, \omega) + \vec{k}h_{mz}(y, z, \omega)$$

для кожної моди внутрішніх хвиль з номером n :

$$\frac{d^2 \vec{h}_m}{dz^2} - \delta^2 \vec{h}_m = \vec{M}_m, \quad (29)$$

де

а) в області $z > 0$:

$$\begin{aligned} \delta &= \zeta_n, \\ \vec{M}_m &= 0. \end{aligned}$$

б) в області $-1 \leq z \leq 0$:

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \zeta_n^2 + i\epsilon_\mu \omega \text{Fr} \quad \text{для } m = 1, 4, \\ \delta^2 &= \zeta_n^2 - i\epsilon_\mu \omega \text{Fr} \quad \text{для } m = 2, 3, \end{aligned}$$

а \vec{M}_m , враховуючи вид представлення (28), умову нестисливості

$$\vec{\nabla} \vec{V} = 0$$

та наявність зв'язку між \vec{B}_E та \vec{V} [19]

$$\vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}_E) = (\vec{B}_E \vec{\nabla}) \vec{V} - \vec{B}_E (\vec{\nabla} \vec{V}),$$

набирає вигляду

$$\vec{M}_m(y, z, \omega) = \sigma_\mu \left[-i\zeta_n \left(\vec{B}_E \vec{j} \right) \vec{V}_m - \left(\vec{B}_E \vec{k} \right) \frac{\partial \vec{V}_m}{\partial z} \right]$$

Отже, двовимірне поле швидкості середовища породжує наведене двовимірне магнітне поле $\vec{H}(y, z, t) = \vec{j}h_y(y, z, t) + \vec{k}h_z(y, z, t)$.

Граничні умови для \vec{h}_m виражають умови неперервності для h_m на границях рідкого середовища при $z = 0$ та $z = -1$:

$$\vec{h}_m(+0) = \vec{h}_m(-0), \vec{h}_m(-1+0) = \vec{h}_m(-1-0). \quad (30)$$

Виконання умови бездивіргентності (26) приводить до наступних співвідношень для \vec{h}_m :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\vec{h}_m \vec{k} \right) = -i \left(\vec{h}_m \vec{j} \right) \quad \text{для } m = 1, 3. \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\vec{h}_m \vec{j} \right) = i \left(\vec{h}_m \vec{k} \right) \quad \text{для } m = 2, 4. \quad (32)$$

Надалі для зручності буде використовуватись позначення

$$\vec{B}_{Ey} \vec{j} = B_{Ey}, \quad \vec{B}_E \vec{k} = B_{Ez}.$$

3.2. Розв'язання рівняння для $\vec{h}_m(y, z, \omega)$

Розв'язок рівняння (29) має вигляд

$$\vec{h}_m = \vec{C}_m^{(1)} e^{-\zeta_n z} \quad (33)$$

для $z > 0$,

$$\vec{h}_m = \vec{C}_m^2 e^{\delta z} + \vec{C}_m^3 e^{-\delta z} + \vec{h}_{m*}, \quad (34)$$

для $-1 < z < 0$ і

$$\vec{h}_m = \vec{C}_m^4 e^{\delta z} \quad (35)$$

для $-1 < z < 0$. Тут \vec{C}_m^i – сталі інтегрування, а $\vec{h}_{m*}(y, z, \omega)$ – частинний розв'язок рівняння (29). Для виконання умов затухання розв'язку при $z \rightarrow -\infty$ величина δ вибирається так, щоб її дійсна частина була додатньою.

Зважаючи на характер поля швидкості $\vec{V}(y, z, t)$, вираз для \vec{M}_m можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_\mu^{-1} \vec{M}_m &= \vec{a}_{m1} \cos(\pi n z + \omega t_m) + \\ &+ \vec{a}_{m2} \cos(\pi n z - \omega t_m) + \vec{a}_{m3} \sin(\pi n z + \omega t_m) + \\ &+ \vec{a}_{m4} \sin(\pi n z - \omega t_m) + \vec{a}_{m5} \cos(\pi n z) + \\ &+ \vec{a}_{m6} \sin(\pi n z), \quad (36) \end{aligned}$$

де величини a_{mi} визначаються як

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_{11} &= i \left(a_{11y} \vec{j} + a_{11z} \vec{k} \right), \\
 a_{11y} &= \pi n \zeta_n B_{Ey} - (\pi n)^2 B_{Ez}, \\
 a_{11z} &= \zeta_n B_{Ey} - \pi n B_{Ez}, \\
 \vec{a}_{12} &= i \left(a_{12y} \vec{j} + a_{12z} \vec{k} \right), \\
 a_{12y} &= \pi n \zeta_n B_{Ey} + (\pi n)^2 B_{Ez}, \\
 a_{12z} &= -\zeta_n B_{Ey} - \pi n B_{Ez}, \\
 \vec{a}_{13} &= a_{11y} \vec{j} + a_{11z} \vec{k}, \\
 \vec{a}_{14} &= -a_{12y} \vec{j} - a_{12z} \vec{k}, \\
 \vec{a}_{15} &= 2i \left(-\pi n B_{Ey} \vec{j} + \pi n B_{Ez} \vec{k} \right), \\
 \vec{a}_{16} &= 2(\pi n)^2 B_{Ez} \vec{j} - 2\zeta_n B_{Ey} \vec{k}, \\
 \vec{a}_{21} &= -\vec{a}_{11}, \\
 \vec{a}_{22} &= -\vec{a}_{12}, \\
 \vec{a}_{23} &= -i\vec{a}_{11}, \\
 \vec{a}_{24} &= i\vec{a}_{12}, \\
 \vec{a}_{25} &= -\vec{a}_{15}, \\
 \vec{a}_{26} &= \vec{a}_{16}, \\
 \vec{a}_{31} &= -\vec{a}_{12}, \\
 \vec{a}_{32} &= -\vec{a}_{11}, \\
 \vec{a}_{33} &= -\vec{a}_{14}, \\
 \vec{a}_{34} &= -\vec{a}_{13}, \\
 \vec{a}_{35} &= -\vec{a}_{15}, \\
 \vec{a}_{36} &= -\vec{a}_{16}, \\
 \vec{a}_{41} &= \vec{a}_{12}, \\
 \vec{a}_{42} &= \vec{a}_{11}, \\
 \vec{a}_{43} &= -\vec{a}_{14}, \\
 \vec{a}_{44} &= -\vec{a}_{13}, \\
 \vec{a}_{45} &= \vec{a}_{15}, \\
 \vec{a}_{46} &= -\vec{a}_{16}.
 \end{aligned}$$

Частинний розв'язок рівняння (29) з правою частиною \vec{M}_m з (36) в області $-1 \leq z \leq 0$ одержується у вигляді

$$\vec{h}_{m*}(z) = -\frac{\vec{M}_m}{[\delta^2 + (\pi n)^2]}. \quad (37)$$

Безпосередня перевірка показує, що частинний розв'язок (37) задовольняє умовам бездивергентності (31), (32).

Для визначення чотирьох сталих інтегрування C_m^i ($i = 1, 2, 3, 4$) використовуються граничні умови (30) та умови бездивергентності (31), (32). В результаті знайдені такі вирази для C_m^i та їхніх

складових, які визначають шукані розв'язки для $\vec{h}_m(y, z, \omega)$:

$$\begin{aligned}
 C_{my}^{(1)} &= C_{my}^{(2)} + C_{my}^{(3)} + h_{m*y}^{(0)}, \\
 C_{mz}^{(1)} &= C_{mz}^{(2)} + C_{mz}^{(3)} + h_{m*z}^{(0)}, \\
 C_{my}^{(4)} &= C_{my}^{(2)} + C_{my}^{(3)} e^{2\delta} + e^\delta h_{m*y}^{(1)}, \\
 C_{mz}^{(4)} &= C_{mz}^{(2)} + C_{mz}^{(3)} e^{2\delta} + e^\delta h_{m*z}^{(1)}, \\
 h_{m*y}^{(0)} &= h_{m*y}(0), \\
 h_{m*z}^{(0)} &= h_{m*z}(0), \\
 h_{m*y}^{(1)} &= h_{m*y}(-1), \\
 h_{m*z}^{(1)} &= h_{m*z}(-1), \\
 C_{1y}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left(h_{1*y}^{(0)} + i\delta h_{1*z}^{(0)} \right), \\
 C_{1z}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left(h_{1*z}^{(0)} - \frac{i}{\delta} h_{1*y}^{(0)} \right), \\
 C_{1y}^{(3)} &= -\frac{1}{2} e^{-\delta} \left(h_{1*y}^{(1)} - i\delta h_{1*z}^{(1)} \right), \\
 C_{1z}^{(3)} &= -\frac{1}{2} e^{-\delta} \left(h_{1*z}^{(1)} + \frac{i}{\delta} h_{1*y}^{(1)} \right), \\
 C_{2y}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left(h_{2*y}^{(0)} - i\delta h_{2*z}^{(0)} \right), \\
 C_{2z}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left(h_{2*z}^{(0)} + \frac{i}{\delta} h_{2*y}^{(0)} \right), \\
 C_{2y}^{(3)} &= -\frac{1}{2} e^{-\delta} \left(h_{2*y}^{(1)} - i\delta h_{2*z}^{(1)} \right), \\
 C_{2z}^{(3)} &= -\frac{1}{2} e^{-\delta} \left(h_{2*z}^{(1)} - \frac{i}{\delta} h_{2*y}^{(1)} \right), \\
 C_{3y}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left(h_{3*y}^{(0)} + i\delta h_{3*z}^{(0)} \right), \\
 C_{3z}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left(h_{3*z}^{(0)} - \frac{i}{\delta} h_{3*y}^{(0)} \right), \\
 C_{3y}^{(3)} &= -\frac{1}{2} e^{-\delta} \left(h_{3*y}^{(1)} - i\delta h_{3*z}^{(1)} \right), \\
 C_{3z}^{(3)} &= -\frac{1}{2} e^{-\delta} \left(h_{3*z}^{(1)} + \frac{i}{\delta} h_{3*y}^{(1)} \right), \\
 C_{4y}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left(h_{4*y}^{(0)} - i\delta h_{4*z}^{(0)} \right), \\
 C_{4z}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left(h_{4*z}^{(0)} + \frac{i}{\delta} h_{4*y}^{(0)} \right), \\
 C_{4y}^{(3)} &= -\frac{1}{2} e^{-\delta} \left(h_{4*y}^{(1)} + i\delta h_{4*z}^{(1)} \right), \\
 C_{4z}^{(3)} &= -\frac{1}{2} e^{-\delta} \left(h_{4*z}^{(1)} - \frac{i}{\delta} h_{4*y}^{(1)} \right).
 \end{aligned}$$

Виділення у (28) дійсної частини з використанням одержаного розв'язку (33)–(35) дає шуканий розв'язок для наведеного магнітного поля.

3.3. Наближений розв’язок для наведеного магнітного поля

Отримання точного розв’язку (28) для $H(y, z, t)$ пов’язане з обчисленням інтегралів для швидкоосцилюючих функцій, що ускладнює обчислювальну процедуру. Однак для великих значень $Fr t$ інтеграл в (28) можна легко обрахувати наближено, використавши для цього відомий метод стаціонарної фази. Для великих $Fr t$ вклад у розв’язок (28) для області $y > 0$ дають складові з h_3 і h_4 , а в області $y < 0$ – відповідно складові з h_1 і h_2 . Відповідно до методу стаціонарної фази управляючими функціями розв’язку (28) є

$$\begin{aligned} \chi &= \zeta_n \xi - \omega && \text{в області } y > 0, \\ \chi &= \zeta_n \xi + \omega && \text{в області } y < 0, \end{aligned}$$

де

$$\xi = \frac{y}{Fr t}.$$

Розв’язком рівняння стаціонарних точок

$$\frac{d\chi}{d\omega} = 0$$

для n -ої моди є

$$\omega_n = \left[1 - (\pi n \xi)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

а відповідне цій частоті хвильове число для всіх y представляється виразом

$$\zeta_n = (\pi n)^{\frac{2}{3}} |\xi|^{-\frac{1}{3}} \left[1 - (\pi n \xi)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Фазова і групова швидкості для відповідних мод

$$c_{n\phi} = \frac{\omega_n}{\zeta_n},$$

$$c_{ng} = \frac{d\omega}{d\xi} = \xi.$$

Як видно з виразу для стаціонарних точок, вони дійсні лише при $|\xi| \leq 1/\pi n$, що і визначає границі області поширення збурень для n -ої моди, при цьому величина c_{ng} визначає швидкість руху її переднього фронту.

Застосування формули методу стаціонарної фази [18] після ряду спрощуючих операцій приводить до наступного представлення наближеного розв’язку задачі для горизонтальної H_y та вертикальної H_z компонент наведеного магнітного поля:

а) в області $y > 0$

$$H_y = \frac{\epsilon_\mu}{(3t)^{\frac{1}{2}} (Fr)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} G_{n1} h_{y+}, \quad (38)$$

$$H_z = \frac{\epsilon_\mu}{(3t)^{\frac{1}{2}} (Fr)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n G_{n1} h_{z+}, \quad (39)$$

б) в області $y < 0$

$$H_y = \frac{\sigma_\mu}{(3t)^{\frac{1}{2}} (Fr)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} G_{n1} h_{y-}, \quad (40)$$

$$H_z = \frac{\sigma_\mu}{(3t)^{\frac{1}{2}} (Fr)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n G_{n1} h_{z-}, \quad (41)$$

де

$$\begin{aligned} h_{y+} &= (h_{3yr} + h_{4yr}) \cos \left(t Fr \omega_n^3 - \frac{\pi}{4} \right) + \\ &+ (h_{3yi} - h_{4yi}) \sin \left(t Fr \omega_n^3 - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{z+} &= (h_{3zr} + h_{4zr}) \cos \left(t Fr \omega_n^3 - \frac{\pi}{4} \right) + \\ &+ (h_{3zi} - h_{4zi}) \sin \left(t Fr \omega_n^3 - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{y-} &= (h_{2yr} + h_{1yr}) \cos \left(t Fr \omega_n^3 - \frac{\pi}{4} \right) - \\ &- (h_{1yi} - h_{2yi}) \sin \left(t Fr \omega_n^3 - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{z-} &= (h_{1zr} + h_{2zr}) \cos \left(t Fr \omega_n^3 - \frac{\pi}{4} \right) - \\ &- (h_{1zi} - h_{2zi}) \sin \left(t Fr \omega_n^3 - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

$$G_{n1} = - \frac{\Gamma_1 s_1 \omega_n^{\frac{1}{2}} \sin(\zeta_n a)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} (\pi n |\xi|)^{\frac{1}{2}} (\pi^2 n^2 - s^2 \omega^2 Fr^{-2})}.$$

Тут індекси r і i , як звично, відносяться до дійсних і уявних значень відповідних функцій.

Представлені у розв’язку вирази h_{myr} , h_{myi} , h_{mzr} і h_{mzi} , де $m = 1, 2, 3, 4$, а індекси r і i відносяться до дійсних і уявних величин відповідно, тут не наведені в силу їхньої громіздкості.

3.4. Результати чисельних експериментів

Для ілюстрації одержаних результатів були проведені розрахунки наведеного магнітного поля при русі джерела породження вихрової пари на глибині $h = 0, 4L$ для таких параметрів руху: $L = 500$ м, $U = 5/52$ м/с, $\Gamma_0 = 4$ м²с⁻¹, $\beta = 10^{-4}$ м⁻¹, $\nu_T = 10^{-4}$ м² с⁻¹, $2a = 12$ м, $I = \pi/3$. Для α задавалось два значення: $\alpha = 0$ і $\alpha = \pi/2$. Відповідні безрозмірні параметри задачі такі:

$$\begin{aligned} h &= 0.4, & \beta &= 0.05, \\ \lambda &= 161, & a &= 0.012, & d_* &= 1.44, \\ b_* &= 0.5, & \mu_* &= 0.342 \cdot 10^{-2}, \\ Fr &= 0.349, & \Gamma_0 &= 0.145 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Величина σ_μ визначається характером стратифікації водного середовища. В силу модельного ха-

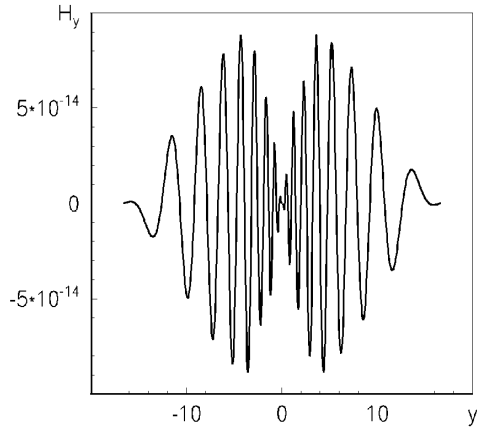


Рис. 1. Картина наведеного магнітного поля для горизонтальної складової при $z = 0.5$, $t = 150$ і $\gamma = 0$

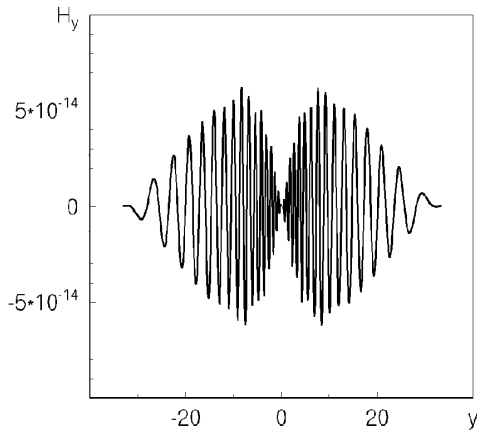


Рис. 2. Картина наведеного магнітного поля для горизонтальної складової при $z = 0.5$, $t = 350$ і $\gamma = 0$

рактору даної задачі розрахунки проведені для характерного значення $\sigma_{mu} = 0.001$.

Для заданих початкових умов Γ_0 і a була розрахована динаміка підйому ВП. За величину критичного значення $\Gamma(t)$, після якого приймалась можливою поява нестійкості Кроу, взято значення $\Gamma(t)$ при такому значенні $t = t_m$, що при $t > t_m$ різко зменшувався градієнт швидкості підйому ВП, так що вона майже зупинялася. В розглянутому варіанті було відповідно одержано $t_m = 3.86$, $z_m = -0.397$, $\Gamma_c = 0.846 \cdot 10^{-3}$, $s_1 = 1.287 \cdot 10^3$ і, відповідно, $s = 3.688 \cdot 10^3$.

Розрахунки наведеного магнітного поля виконані для декількох горизонтів у повітрі та у водному середовищі для двох моментів часу $t = 150$ і $t = 350$. Їхні результати представлені на рис. 1–8. На рис. 1 і 2 наведена картина горизонтальної складової збуреного магнітного поля у повітрі

на горизонті $z = 0.5$ при $\alpha = 150$ для $t = 150$ і $t = 350$ відповідно. Як видно, в цьому випадку для H_y має місце антисиметрія у розподілі амплітуд вздовж вісі y відносно вісі z , що і має бути при $\alpha = 0$, оскільки збурення для H_y викликані складовою швидкості V_y , яка тут антисиметрична відносно напрямку магнітної півночі. Хвильова картина для вертикальної складової H_z за картиною розподілу амплітуд і їх величиною майже така сама, як і для H_y і відрізняється, головним чином тим, що має симетричний вигляд в розподілі вздовж вісі y відносно вісі z . Зі збільшенням t , як це видно з рис.2, амплітуди хвильової картини зменшуються. Як впливає з розв'язків (38)–(41),

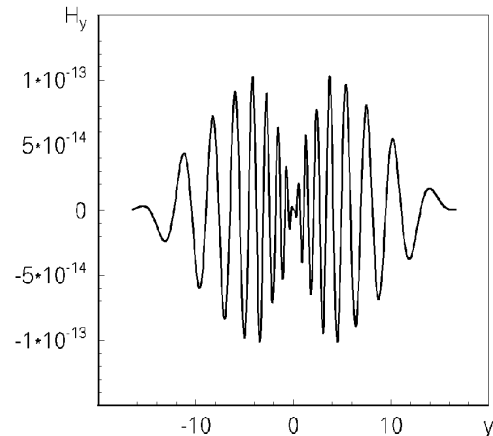


Рис. 3. Картина наведеного магнітного поля для горизонтальної складової при $z = 0.5$, $t = 150$ і $\gamma = \pi/2$

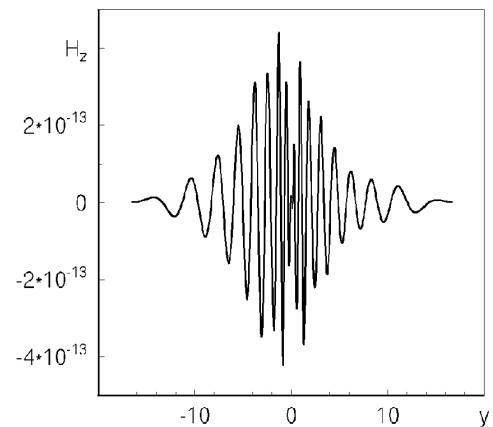


Рис. 4. Картина наведеного магнітного поля для вертикальної складової при $z = 0.5$, $t = 150$ і $\gamma = \pi/2$

характер затухання цього процесу відбувається як

$t^{-1/2}$. При цьому в збуреному полі зростає його поперечний розмір та кількість хвильових гармонік, які там знаходяться. При віддаленні від водного шару інтенсивність наведеного магнітного поля зменшується по експоненційному закону відповідно до (33). Як показують розрахунки, для різних значень z амплітуди H_y і H_z у повітрі при $\gamma = 0$ приблизно однакові. Співвідношення між максимальними амплітудами і сам характер наведеного магнітного поля помітно змінюється при зростанні кута α . З рис. 3 і 4, де наведені розрахунки і для вертикальної складової H_z , видно, що при $\alpha = \pi/2$ для того ж горизонту і часу, що і на рис.1, де $\alpha = 0$, амплітудні картини H_y і H_z не лише втрачають свою антисиметрію та симетрію відповідно, але максимальні амплітуди H_z при цьому суттєво перевищують відповідні значення H_y . Причиною цього є те, що максимальні значення H_y зі збільшенням α зростають мало. Отже, зміна кута α впливає на вертикальну складову збуреного магнітного поля значно більш суттєво, змінюючи не лише симетрію хвильової збуреної картини, але істотно і її максимальні значення амплітуд. Розра-

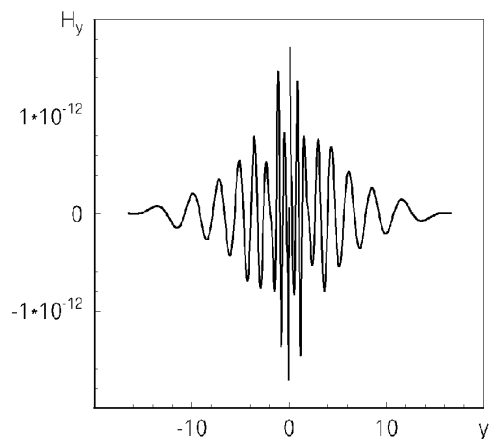


Рис. 5. Картина наведеного магнітного поля для горизонтальної складової при $z = -0.3$, $t = 150$ і $\gamma = 0$

хунки, виконані для області водного середовища, показують, що там мають місце ті самі закономірності зміни наведеного магнітного поля в залежності від зміни z , α і t , що і у повітрі, але енергетика H_y і H_z при цьому суттєво (для $z = 0.5$ більш ніж на порядок, а зі збільшенням відстані від водного шару ще більше) перевищує відповідні значення для повітряного простору. Про це свідчать результати, наведені на рис. 5 – 8. Справді, як впливає з рис. 5 – 6, при $\alpha = 0$ має місце антисиметрія в розподілі H_y і симетрія в розподілі H_z при їх приблизно однакових значеннях максимальних амплітуд.

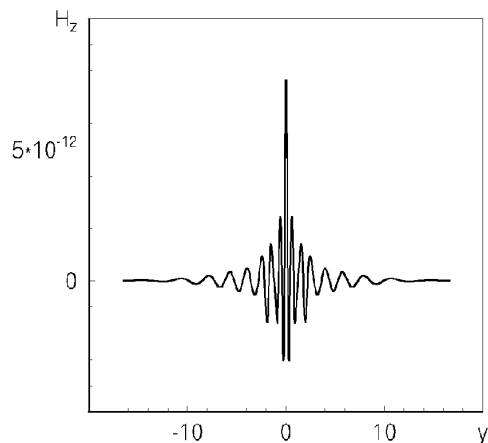


Рис. 6. Картина наведеного магнітного поля для вертикальної складової при $z = -0.3$, $t = 150$ і $\gamma = 0$

Але амплітуди наведеного магнітного поля значно більші, ніж на рис. 1 – 4. З рис. 7 і 8 видно характер зміни збуреного магнітного поля зі зміною величини кута α до значення $\pi/2$ порівняно з ситуацією, наведеною на рис. 5 і 6 для $\alpha = 0$.

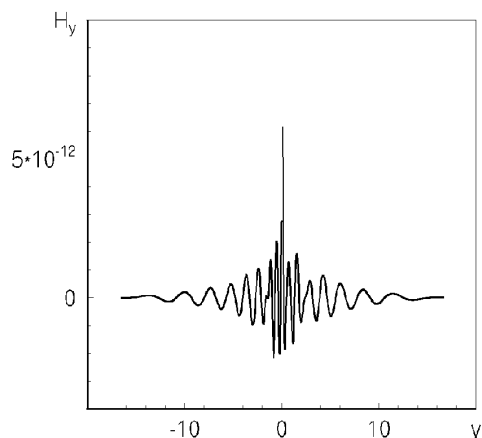


Рис. 7. Картина наведеного магнітного поля для горизонтальної складової при $z = -0.3$, $t = 150$ і $\gamma = \pi/2$

Порівняння картин наведеного магнітного поля для водного шару і повітряного простору показує також, що для водного шару, на відміну від повітряного простору, характерним є можливість знаходження найбільш енергетичної області ближче до вісі руху джерела збурення ВП, що відповідає меншій швидкості поширення збуреного магнітного поля. В проведених розрахунках для $z = 0$ це особливо помітно для вертикальної складової H_z . Причиною такої особливості є модова структура

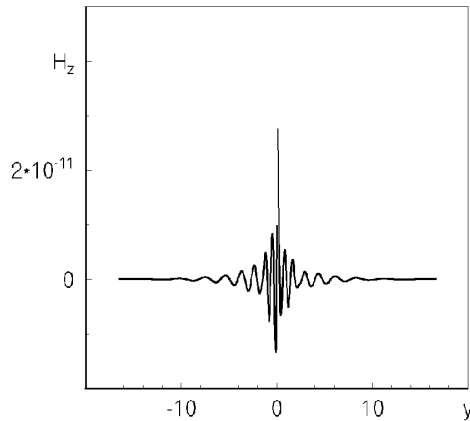


Рис. 8. Картина наведеного магнітного поля для вертикальної складової при $z = -0.3$, $t = 150$ і $\gamma = \pi/2$

поля внутрішніх хвиль у шарі скінченої товщини, в результаті чого, в залежності від горизонту руху джерела породження вихрової пари, енергія згенерованих при цьому внутрішніх хвиль може зосереджуватись в певних модах вищого порядку. Швидкість поширення цих мод ВХ менша від швидкості поширення старшої (першої) моди, тому на фоні загальної області поширення ВХ вклад таких енергонесучих хвиль буде помітним у зоні наведеного магнітного поля ближче до вісі руху джерела породження ВП. На підставі одержаного розв'язку в локальнодвовимірній нестационарній постановці в нерухомій системі координат легко одержати стаціонарний просторовий трьохвимірний розв'язок задачі в рухомій системі координат, пов'язаній з джерелом породження вихрової пари. Для цього (в безрозмірній формі розв'язку) необхідно виконати просту заміну

$$t = x.$$

ЗАКЛЮЧЕННЯ

Виконані дослідження дозволяють оцінити енергетику та характер збурень магнітного поля Землі, викликаних одним із механізмів гідродинамічної природи, а саме полем швидкості від внутрішніх хвиль, які генеруються вихровою парою, що породжується при рівномірному горизонтальному русі джерела генерації цієї пари в умовах стратифікованого морського середовища. Таким джерелом може бути, наприклад, підводне крило або система двох таких крил скінченого розмаху. За ними при достатньо великій швидкості їхнього руху утворюється система двох вихрових жгутів з

вісями, паралельними вісі руху джерела і протилежними напрямками обертання, що з достатньою мірою точності відповідає утворенню двовимірної вихрової пари.

В результаті виконаних досліджень розв'язана відповідним чином сформульована задача, яка включає в себе три характерні етапи – вивчення динаміки вертикального руху двовимірної вихрової пари в площині, перпендикулярній вісі руху джерела, задачу генерації поля внутрішніх хвиль у шарі скінченої товщини середовища з лінійною стратифікацією при під'юмі вихрової пари і, накінець, лінійну задачу генерації збуреного магнітного поля полем швидкості середовища, наведеним цією вихровою парою. Побудована модель динаміки нестационарного руху вихрової пари у в'язкому стратифікованому середовищі з наявністю в ньому дрібномасштабної турбулентності, яка враховує також ефекти плавучості і наявності прилучених мас. В лінійній постановці розроблена локально двовимірною моделлю генерації внутрішніх хвиль, породжених вертикальним рухом вихрової пари у водному шарі скінченої товщини. В рамках цієї моделі вперше одержано рівняння нестационарного руху точкового вихора, яке в явній формі містить його характеристики.

З використанням цих моделей одержано наближений розв'язок задачі динаміки руху ВП та точні розв'язки у вигляді квадратур для лінійних задач генерації ВХ та знаходження обумовленого ними наведеного магнітного поля Землі. Для великих значень часу з використанням методу стаціонарної фази одержано наближений аналітичний розв'язок задачі.

Локально двовимірною задачею індукції магнітного поля Землі внутрішніми хвилями, які генеруються вертикальним рухом двовимірної вихрової пари у водному шарі, дозволяє побудувати просторову картину цього збуреного поля як в рухомій (пов'язаній з джерелом породження ВП), так і в нерухомій системах координат. Аналіз полів наведеного магнітного поля Землі, спричиненого цим рухом, показує як його надзвичайну малість порівняно з магнітним полем Землі, так і чітко детермінований характер його структури і характеру еволюції в часі. Так, енергетика цього поля у водному шарі на порядки перевищує його значення у повітряному просторі. Структура збурень визначається структурою поля внутрішніх хвиль та величиною кута α між віссю руху джерела породження ВП і напрямком магнітної півночі Землі. Для $\alpha = 0$ характерними є антисиметрія по y відносно вісі руху джерела для горизонтальної складової наведеного магнітного поля і симетрія

для вертикальної складової. Зі збільшенням величини α картина $\vec{H}(y, z, t)$ стає несиметричною, а амплітуди H_y і H_z зростають, причому зростання H_y незначне, а H_z суттєве. В результаті цього при $\alpha = \pi/2$ амплітуди H_z в декілька разів більші від амплітуд H_y . У водному шарі, в залежності від горизонту руху джерела породження ВП, можливі ситуації, коли енергомістка частина збуреного спектра $\vec{H}(y, z, t)$ знаходиться в ближній до вісі руху зоні.

З виконаного дослідження випливає, що рухоме джерело породження вихрової пари може бути причиною утворення специфічного наведеного магнітного поля Землі, дослідження якого представляє інтерес як такого, що спричинений одним із механізмів гідродинамічної природи з детермінованим характером і який може бути використаний при моніторингу збурень магнітного поля в районі морської поверхні.

1. Горлов С.И. Решение линейных задач о равномерном движении вихреисточника в многослойной жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1995.– № 31.– С. 127–132.
2. Janowitz G.S. Line singularities in inbounded stratified fluid // J.Fluid Mech.– 1974.– 66, 3.– Р. 455–464.
3. Стеценко О.Г. Лінійна задача про стаціонарний рух вихора у стратифікованому середовищі // Прикл. гідромеханіка.– 2004.– 6(78), №1.– С. 62–68.
4. Стеценко О.Г. Стаціонарний рух точкового вихора в шарі скінченої товщини стратифікованого середовища, обмеженого твердими границями // Прикл. гідромеханіка.– 2010.– 12(84), №1.– С. 68–75.
5. Holzäpfel F., Gerz T., Bauman R. The turbulent decay of trailing vortex pairs in stably stratified environments // Sci.Technol.– 2001.– №5.– Р. 95–108.
6. Wittenbeck P., Moore K.J. The rising vortex : A source for NA-ASW// 1993.–118 с.
7. Белоцерковский А.С., Гиневский А.С. Численное моделирование дальнего вихревого следа самолета на взлетно-посадочных режимах // ДРАН.– 2001.– 380, №6.– С. 761–764.
8. Thomson V. On the vortex atoms // Phil.Mag.ser.4.– 1867.– 33, №226.– Р. 511–512.
9. Повх И.Л. Тухническая гидромеханика.– Л.: Машиностроение, 1969.– 524 с.
10. Беляев С.Т., Краснов Ю.К. О собственной массе сингулярной вихревой пары // ДАН СССР.– 1989.– 306, №3.– С. 566–570.
11. Hicks V.M. The mass carried forward by a vortex // Phil. Mag. ser.6.– 1919.– 38, №287.– Р. 597–612.
12. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1973.– 289 с.
13. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур.– К.: Наукова думка, 1993.– 289 с.
14. Widnall S.E. The structure and dynamics of vortex filaments // Ann.Rev. of Fl. Mech.– 1975.– 7.– Р. 141–166.
15. Никишов В.И., Стеценко А.Г. Влияние формы коллапсирующего “пятна” и границ жидкости на образование внутренних волн в стратифицированной среде // Прикл. мех.– 1982.– 18, №7.– С. 90–97.
16. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях М.:Мир.– 1977.–431 с.
17. Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1966.– 367 с.
18. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики, вып. 3.– М.: Мир, 1970.– 343 с.
19. Mandurasingh D., Tuck E.O. The induced Electromagnetic Field Associated with Submerged Moving Bodies in an Unstratified Conducting Fluid // Jour. of Ocea. Eng.– 1994.– 19, №2.– Р. 193–199.