 ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2009. Том 11, N 2. С. 3 – 15

УДК 532.543

РАСЧЕТ ПОЛЕЙ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ВНЕЗАПНЫМ ОДНОСТОРОННИМ СУЖЕНИЕМ

Е. В. БРУЯЦКИЙ, А. Г. КОСТИН

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 18.12.2008

Используя полные нестационарные уравнения Навье-Стокса в переменных скорость-давление, численно решается задача о движении жидкости в плоском канале с внезапным односторонним сужением. Для решения применяется метод конечных разностей с использованием разнесенной сетки. Полученный универсальный дискретный аналог исходных уравнений решается итерационным методом на установление. Исследованы особенности структуры течения в области участка внезапного одностороннего сужения поперечного сечения канала. Определены поля скоростей, давления и протяженности зоны подпора течения перед уступом в зависимости от числа Рейнольдса и параметра сужения.

Використовуючи повні нестаціонарні рівняння Нав'є-Стокса у змінних швидкість-тиск, чисельно вирішується задача про рух рідини у плоскому каналі з раптовим одностороннім звуженням. Для вирішення застосовується метод кінцевих відмінностей з використанням рознесеної сітки. Одержаний універсальний дискретний аналог вихідних рівнянь вирішується ітераційним методом на встановлення. Досліджені особливості структури течії в області ділянки раптового одностороннього звуження поперечного перерізу каналу. Визначені поля швидкостей, тиску і тривалості зони підпору течії перед уступом у залежності від числа Рейнольдса і параметру звуження.

Using full nonstationary Navier-Stokes equations in velocity-pressure variables, a problem is being solved on fluid motion in a flat channel with a sudden one-side contraction. For that, the finite difference method is used with a diversed grid. The obtained universal discrete analogue of initial equations is being solved using the iteration method for identification. Peculiarities of flow structure are analyzed in a section of sudden one-side contraction of the channel cross-section. There are determined fields of velocity, pressure and the pressure zone extension of the flow in front of the step depending on Reynolds numbers and a contraction parameter.

ВВЕДЕНИЕ

Течение вязкой жидкости в канале с внезапным сужением его поперечного сечения в виде уступа встречается во многих технических устройствах и аппаратах. Наличие такой геометрической неоднородности на стенке канала существенно влияет на кинематическую структуру потока, процессы теплообмена и уровень акустических шумов гидродинамического происхождения. Поэтому разработка методов расчета таких течений представляет большой практический интерес. Особенность и сложность расчета таких течений связана с образованием перед уступом специфической области подпора, которую часто называют застойной зоной.

Для понимания механизмов вихреобразования в сложных потоках жидкости, включая области внезапного сужения канала, необходимо уметь предсказывать поля скорости и давления. Поэтому структура таких течений и протяженность зоны подпора изучались теоретически и экспериментально как для ламинарных, так и для турбулентных режимов течения [1].

При теоретическом исследовании таких течений важную роль играет учет переменности давления в области участка сужения канала. Поэтому для их изучения нужно использовать полные уравнения Навье-Стокса. Сложность их решения хорошо известна. Одна из них в случае несжимаемой жидкости связана с трудностью расчета давления, так как оно не является основной переменной в исходных уравнениях. В силу этого многие исследователи при математическом моделировании используют уравнения Навье-Стокса, записанные в переменных функция тока–вихрь, а не в физических переменных скорость–давление. Преимущество такого подхода состоит в возможности исключения давления из системы исходных уравнений. Но наряду с этим преимуществом возникает и трудность, связанная с постановкой граничных условий для вихря скорости на твердой стенке. Кроме того, при таком подходе отсутствует возможность его обобщения на трехмерные и турбулентные режимы течения. Поэтому использование уравнений Навье-Стокса в физических переменных скорость-давление является более предпочтительным. Однако этот путь связан с трудностью не только расчета поля давления, но и его согласования с полем скорости.

В настоящее время для численного решения нелинейных уравнений Навье-Стокса существуют и используются несколько десятков разновидностей разностных схем. Недавно в нашей рабо-

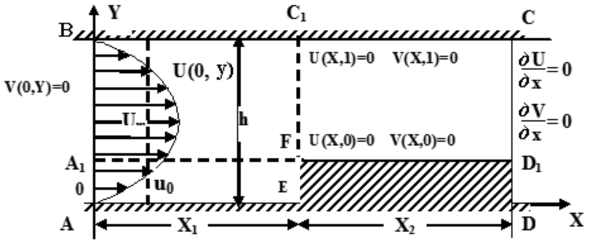


Рис. 1. Физическая схема рассматриваемого течения в плоском канале с внезапным односторонним сужением

те [2] предложен эффективный метод численного интегрирования полной системы нестационарных уравнений Навье-Стокса в физических переменных скорость–давление. Общий принцип решения использует метод конечных разностей и разнесенную сетку подобно изветному "MAC"методу Ф.Х. Харлоу [3] и модифицированному алгоритму "SIMPLE"С.В. Патанкара и П.В. Сполдинга [4]. Основу нашего метода составляет полученный универсальный дискретный аналог уравнений Навье-Стокса [2].

Цель данной работы состоит в применении этого метода для решения задачи о движении несжимаемой жидкости в плоском канале с односторонним внезапным сужением его поперечного сечения. Хотя расчет чисто ламинарного течения может иметь ограниченную область прямого практического использования, однако он позволяет совершенствовать численные схемы расчета, которые затем обобщаются на расчеты турбулентных режимов течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу о двумерном течении несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным сужением его поперечного сечения в виде уступа. Физическая схема рассматриваемого течения, конфигурация расчетной области D_1FEA и система декартовых координат показаны на рис. 1.

Течение жидкости происходит слева направо. Левая AB и правая CD_1 границы расчетной области считаются достаточно удаленными от сечения с внезапным сужением C_1FE, чтобы на них можно было принять условия, соответствующие невозмущенному потоку. Внутри плоскопараллельного канала течет жидкость с постоянными свойствами. Течение является ламинарным. Ширина канала в левом входном сечении AB имеет размер h, а в правом выходном сечении CD_1 – размер h_1. Высота уступа FE равна $b = h - h_1$. Предполагается, что во входном сечении канала AB выполняется условие полностью развитого течения и горизонтальная скорость U имеет параболический профиль Пуазейля в виде

$$U(Y)|_{AB} = 6(1 - Y)Y, \qquad (1)$$

а вертикальная скорость V в этом сечении равна нулю. Длина расчетной области $L = X_1 + X_2$, где X_1 – длина области перед уступом; X_2 – длина области над уступом.

Характерной особенностью течения в каналах является то, что движение жидкости происходит под действием продольного перепада давления. Однако заданной величиной в рассматриваемой задаче следует принять не перепад давления, а расход жидкости $Q = u_0 \cdot h$ через поперечное сечение канала AB. При такой постановке задачи число Рейнольдса $Re = u_0 \cdot h/\nu$ задается, а давление определяется в процессе решения задачи.

Для описания движения жидкости используются нестационарные уравнения Навье-Стокса без каких-либо упрощающих предположений. При введении безразмерных величин за масштаб длины принимается ширина канала h, за масштаб скорости принята среднерасходная скорость в канале $u_0 = Q/h$, за масштаб времени принята величина $t_0 = h/u_0$, а за масштаб давления принят скоростной напор $p_0 = \rho_0 u_0^2$. В безразмерных величинах V_i, P, X_i система нестационарных уравнений Навье-Стокса с постоянными плотностью ρ_0 и кинематической вязкостью. ν в консервативной тензорной форме в прямоугольной декартовой системе координат записывается в виде

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial X_k}\left[-V_i V_k + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial V_i}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k}{\partial X_i}\right)\right], \qquad (2)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial X_k} = 0.$$

Здесь по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование. Такая компактная запись исходных уравнений позволяет изучать и трехмерные течения. Для рассматриваемой двумерной задачи $i, k = 1, 2$; $X_1 = X$; $X_2 = Y$; $V_1 = U$; $V_2 = V$. При этом $U = u/u_0$; $V = = v/u_0$; $X = x/h$; $Y = y/h$; $\tau = tu_0/h$; $P = = p/\rho_0 u_0^2$. Здесь U и V – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости соответственно.

Для завершения постановки задачи необходимо задать начальные и краевые условия на всех границах расчетной области ABD_1FE. Предполагается, что в начальный момент времени в расчетной области ABC_1 горизонтальная скорость U имеет параболический профиль Пуазейля в форме (1), а вертикальная скорость V и давление P равны нулю. В области над уступом FC_1CD_1 горизонтальная скорость имеет также параболический профиль, который зависит от параметра B и в соответствии с условием сохранения расхода описывается следующим выражением:

$$U = 6\big[Y(1+B) - Y^2 - B\big]/(1-B^3).$$

Вертикальная скорость V и давление P в этой области в начальный момент времени принимаются равными нулю. Граничные условия для скорости на входе уже рассматривались выше. На всех неподвижных твердых стенках выполняются очевидные граничные условия прилипания $U| = 0$ и непротекания $V| = 0$, где – твердая граница. В выходном сечении канала CD_1 для горизонтальной и вертикальной скоростей выполняются стандартные "мягкие"условия Неймана.

Таким образом, решение системы уравнений (2) будем искать в области $0 \le X \le L,\ 0 \le Y \le 1$ с начальными и граничными условиями в виде:

начальные условия:

$$U(X,Y,0) = 6(1-Y)Y, \quad (0 \le \ < {}_1);$$

$$U(X,Y,0) = \frac{6[Y(1+B) - Y^2 - B]}{(1-B^3)} \quad ({}_1 \le \ < {}_2);$$

$$V(X,Y,0) = 0, \quad P(X,Y,0) = 0 \quad (0 \le \ < ({}_1 + {}_2);$$

граничные условия:

$$U|_{AB} = 6(1-Y)Y; \quad U|_{BC} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial x}|_{CD_1} = 0;$$
$$U|_{D_1F} = 0; \quad U|_{FE} = 0; \quad U|_{EA} = 0;$$
$$V|_{AB} = 0; \quad V|_{BC} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial x}|_{CD_1} = 0; \qquad (3)$$
$$V|_{D_1F} = 0; \quad V|_{FE} = 0; \quad V|_{EA} = 0.$$

Основные параметры задачи – число Рейнольдса и геометрическая высота уступа $B = b/h$. Следует подчеркнуть, что давление P в рассматриваемой системе уравнений не является основной переменной ни в одном из этих уравнений. При нашем подходе необходимое уравнение для определения давления выводится из уравнения неразрывности в виде уравнения типа Пуассона. При этом необходимые для его решения значения давления в граничных узлах определяются с помощью уравнений движения в комбинации с граничными условиями для компонентов скорости [5]. В процессе решения задачи требуется определить поля скорости и давления в расчетной области и оценить влияние числа Рейнольдса и геометрического размера уступа B на структуру течения в канале и протяженность зоны подпора, которая образуется перед уступом. Стационарное течение в канале характеризуется тем, что искомые переменные U, V, P не зависят от времени.

2. РАЗНОСТНАЯ СЕТКА

Общий принцип используемого метода решения уравнений Навье-Стокса рассмотрен в нашей работе [2]. Решение системы исходных нестационарных уравнений (2) выполняется методом конечных разностей на установление. Из-за сложностей согласования полей скорости и давления для дискретизации уравнений движения в X, Y направлениях и уравнения неразрывности использовалась сетка с разнесенной структурой расположения сеточных узлов для зависимых переменных. Это означает, что компоненты скоростей и давления определяются в различных узлах. Такой подход аналогичен методам MAC [3], SIMPLE [4] и дает определенные преимущества при расчете поля давления [5]. Конечно-рзностные аппроксимации рассматриваемых уравнений строятся на пятиточечном шаблоне в соответствии с известной схемой "крест"[6].

Локальная геометрия расположения узлов сетки показана на рис. 1 нашей работы [2]. Сеточные функции давления P расположены в узлах основной сетки $S_0(j,i,n)$. Сеточные функции компонентов скоростей U и V определены в узлах вспомогательных полуцелых сеток $S_1(j+1/2,i,n)$ и $S_2(j,i+1/2,n)$ соответственно:

$$S_1(X_{j+1/2}, Y_i\tau^n), \quad X_{j+1/2} = (j+1/2)\cdot\Delta x,$$
$$Y_i = i\cdot\Delta y, \tau^n = n\cdot\Delta\tau,$$
$$S_2(X_j, Y_{i+1/2}, \tau^n), \quad X_j = j\cdot\Delta x,$$
$$Y_{i+1/2} = (i+1/2)\cdot\Delta y, \tau^n = n\cdot\Delta\tau.$$

Шаги сеток hx_j и hy_i могут быть как равномерными, так и переменными в обоих направлениях:

$$\Delta x = 0,5(hx_j + hx_{j+1}), \quad \Delta y = 0,5(hy_j + hy_{j+1}).$$

В соответствии с выбранным сеточным шаблоном вводятся следующие компактные обозначения:

$$P(X_i, Y_i, \tau^n) = P^n_{j,i},$$
$$U((j+1/2)\cdot\Delta x, i\cdot\Delta y, n\cdot\Delta\tau) = U^n_{j+1/2,i},$$
$$V(j\cdot\Delta x, (i+1/2)\cdot\Delta y, n\cdot\Delta\tau) = V^n_{j,i+1/2,}.$$

3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Для конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений движения и неразрывности используются неявный метод и обычные схемы первого порядка точности для производных по времени и второго порядка точности для производных по пространству. При этом диффузионные слагаемые аппроксимируются по схеме с центральными разностями, а для конвективных слагаемых используются схемы с односторонними разностями "против потока". Особенностью дискретизации является то, что конечно-разностная аппроксимация центрируется в соответствии с выбранным шаблоном. При этом сеточные индексы для зависимых переменных оказываются сдвинутыми.

Подстановка конечно-разностных формул в исходную систему уравнений движения позволяет записать их дискретные аналоги для X и Y направлений. Эти уравнения, после соответствующей групировки слагаемых, дополненные уравнением неразрывности, имеют следующий конечно-разностный вид:

$$\begin{gathered} d^U_{j+1/2,i}U^{n+1}_{j+1/2,i} + c^U_1 U^{n+1}_{j+3/2,i} + c^U_0 U^{n+1}_{j-1/2,i} + \\ +b^U_1 U^{n+1}_{j+1/2,i+1} + b^U_0 U^{n+1}_{j+1/2,i-1} = \\ = -\Delta y(P^{n+1}_{j+1,i} - P^{n+1}_{j,i}) + f^U, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} d^V_{j,i+1/2}V^{n+1}_{j,i+1/2} + c^V_1 V^{n+1}_{j,i+3/2} + c^V_0 V^{n+1}_{j,i-1/2} + \\ +b^V_1 V^{n+1}_{j+1,i+1/2} + b^V_0 V^{n+1}_{j-1,i+1/2} = \\ = -\Delta x(P^{n+1}_{j,i+1} - P^{n+1}_{j,i}) + f^V, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\frac{U^{n+1}_{j+1/2,i} - U^{n+1}_{j-1/2,i}}{\Delta x} + \frac{V^{n+1}_{j,i+1/2} - V^{n+1}_{j,i-1/2}}{\Delta y} = 0, \tag{6}$$

где коэффициенты дискретизации $d_{j+1/2,i}, d_{j,i+1/2}, c_1, c_0, b_1, b_0$ и свободные члены f с верхними индексами U, V являются известными величинами по данным с предыдущего шага и находятся по определенным алгебраическим формулам.

Хотя полученная система уравнений (4)-(6) – основная, однако она пока незамкнута, так как содержит неизвестное давление.

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ

В данной работе в качестве вычислительной схемы для определения давления будем следовать известной процедуре SIMPLE[4] и преобразуем уравнения (4) и (5) к следующему виду:

$$\begin{gathered} d^U_{j+1/2,i}U^{n+1}_{j+1/2,i} = \\ = -\Delta y\big(P^{n+1}_{j+1,i} - P^{n+1}_{j,i}\big) + G^U_{j+1/2,i}; \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} d^V_{j,i+1/2}V^{n+1}_{j,i+1/2} = \\ = -\Delta x\big(P^{n+1}_{j,i+1} - P^{n+1}_{j,i}\big) + G^V_{j,i+1/2}, \end{gathered} \tag{8}$$

где выражения $G^U_{j+1/2,i}$ и $G^V_{j,i-1/2}$ известны, так как они зависят от скоростей с предыдущего шага n. Далее для получения необходимого уравнения для давления на $(n+1)$ шаге используем уравнение неразрывности (6). Учитывая его структуру, предварительно в выражениях (7) и (8) для скоростей, понизим индексы j и i на единицу соответственно. Тогда получим необходимые выражения для соответствующих компонентов скоростей в виде:

$$U^{n+1}_{j-1/2,i} = \frac{\Big[-\Delta y\big(P^{n+1}_{j,i} - P^{n+1}_{j-1,i}\big) + G^U_{j-1/2,i}\Big]}{d^U_{j-1/2,i}}, \tag{9}$$

$$V^{n+1}_{j,i-1/2} = \frac{\Big[-\Delta x\big(P^{n+1}_{j,i} - P^{n+1}_{j,i-1}\big) + G^V_{j,i-1/2}\Big]}{d^V_{j,i-1/2}}. \tag{10}$$

Подставляя значения соответствующих компонентов скорости в уравнение неразрывности (6), получим выражение, в котором неизвестными величинами являются лишь сеточные функции давления в узле с номером (j,i) и окружающих его соседних узлах. Выполнив простые преобразования, после группировки соответствующих слагаемых получим следующий конечно-разностный аналог для вычисления сеточных функций давления:

$$\begin{gathered} d^P_{j,i}P^{n+1}_{j,i} + c^P_1 P^{n+1}_{j+1,i} + c^P_0 P^{n+1}_{j-1,i} + \\ +b^P_1 P^{n+1}_{j,i+1} + b^P_0 P^{n+1}_{j,i-1} = f^P, \end{gathered} \tag{11}$$

где свободный член f^P известен, а коэффициенты дискретизации $d^P_{j,i}, c^P_1, c^P_0, b^P_1, b^P_0$ определены соотношениями:

$$c^P_1 = -\frac{hy1}{hx1}\frac{1}{d^U_{j+1/2,i}}; \quad c^P_0 = -\frac{hy1}{hx1}\frac{1}{d^U_{j-1/2,i}};$$

$$b_1^P = -\frac{hx1}{hy1}\frac{1}{d^V_{j,i+1/2}}; \quad b_0^P = -\frac{hx1}{hy1}\frac{1}{d^V_{j,i-1/2}}; \quad (12)$$

$$d^P_{j,i} = -c_1^P - c_0^P - b_1^P - b_0^P,$$

$$hx1 = (hx_j + hx_{j+1}), \quad hy1 = (hy_j + hy_{j+1}).$$

Полученное разностное уравнение для давления (11) является замаскированным уравнением Пуассона и представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Используя уравнения (7) и (8), выпишем выражения для компонентов скорости на $(n+1)$ шаге, явно связывающие их с давлением, в следующем окончательном виде:

$$U^{n+1}_{j+1/2,i} = \frac{\left[\Delta y\left(P^{n+1}_{j,i} - P^{n+1}_{j+1,i}\right) + G^U_{j+1/2,i}\right]}{d^U_{j+1/2,i}}; \quad (13)$$

$$V^{n+1}_{j,i+1/2} = \frac{\left[\Delta x\left(P^{n+1}_{j,i} - P^{n+1}_{j,i+1}\right) + G^V_{j,i+1/2}\right]}{d^V_{j,i+1/2}}. \quad (14)$$

Система уравнений (11), (13), (14) связывает давление со скоростями на $(n+1)$ шаге по времени и является фундаментальным результатом, представляющим универсальный дискретный аналог системы общих уравнений движения несжимаемой жидкости. Совершенно очевидно, что решение рассматриваемых систем алгебраических уравнений значительно проще, чем исходных интегральных или дифференциальных уравнений. Отметим, что уравнение Пуассона для давления фактически заменяет уравнение неразрывности и система уравнений оказывается замкнутой.

Хотя общее число уравнений, подлежащих решению, значительно возросло, но на современном этапе развития вычислительной техники это уже не принципиально, так как для решения таких систем алгебраических уравнений разработаны эффективные итерационные методы.

5. ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ

Важной особенностью полученного стационарного разностного уравнения для давления (11) является то, что благодаря использованию разнесенных сеток граничные условия для его решения могут быть определены из уравнений движения (13) и (14) в комбинации с граничными условиями для компонентов скоростей [5]. В настоящем методе компоненты скорости и давления расщеплены так, что на любом этапе расчета решаются уравнения относительно одной зависимой переменной. Это упрощает применение стандартных методов решения систем линейных алгебраических уравнений полученного вида.

В нашем случае эффективным способом решения рассматриваемого двумерного разностного уравнения второго порядка для давления является его редукция к двум одномерным системам уравнений второго порядка с трехдиагональными матрицами, которые решаются методом "прогонки" [6]. В зарубежной литературе его часто называют алгоритмом Томаса [7].

В данном методе расчеты проводятся для двух основных физических переменных – скорости, давления. Итерационный вычислительный процесс состоит из шагов по времени. Уравнение для давления решается на каждом временном шаге. В начале каждого временного цикла предполагаются известными поля скорости и давления. Вычислительная процедура расчета каждого шага по времени разбивается на три этапа и выполняется в следующей последовательности. На первом этапе при заданных на предыдущем временном шаге значениях $U^n_{j+1/2,i}$ и $V^n_{j,i+1/2}$ по соответствующим алгебраическим формулам рассчитываются коэффициенты дискретизации $G^U_{j+1/2,i}(U^n,V^n)$, $G^V_{j+1/2,i}(U^n,V^n)$, $d^U_{j+1/2,i}(U^n,V^n)$, $d^V_{j,i+1/2}(U^n,V^n)$, $d^P_{j,i}$, c_1^P, c_0^P, b_1^P, b_0^P, включая свободный член $f^p(j,i)$. На втором этапе, зная коэффициенты уравнения Пуассона, путем его решения находится поле давления $P^{n+1}_{j,i}$. Далее, на третьем этапе, зная коэффициенты дискретизации и поле давления $P^{n+1}_{j,i}$, по уравнениям (13), (14), рассчитываются поля скорости $U^{n+1}_{j+1/2,i} V^{n+1}_{j,i+1/2}$ на $(n+1)$ шаге. На этом первый временной цикл заканчивается, и далее он повторяется. Задача решается на установление. Критерием окончания решения служит заданный временной интервал или условие, когда максимальная разность между значениями искомых переменных на предыдущем и следующем временном шаге не превышает заданную величину ошибки ε.

Используемая конечно-разностная схема аппроксимирует рассматриваемые уравнения с первым порядком точности по времени и со вторым порядком точности по пространственным переменным $O(\Delta\tau, h^2)$ и можно показать, что она устойчива [8]. На каждом шаге по времени контролируется сходимость расчетов как основных уравнений, так и граничных условий. Алгоритм решения на установление позволяет получить как стационарное решение, так и исследовать эволюцию течений во времени.

Важным моментом расчетов является переход в граничных условиях для U и V к конечным разностям и контроль за выполнением уравнения неразрывности. Описанный алгоритм решения системы двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса реализован в виде компьютерной программы UDAMEL (Universal Discrete Analogue Momentum Equation Liquid), которая позволяет решать эволюционную задачу гидродинамики ламинарных течений.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Решение задачи начинается с удовлетворения начальных условий для скорости и давления. Далее итерационным методом решается система алгебраических уравнений до получения сходящегося решения. Некоторые результаты расчетов кинематической структуры течения в плоском канале с внезапным сужением представлены ниже на соответствующих рисунках. Основные численные расчеты были проведены для высоты уступа B=0.4 при пяти различных числах Рейнольдса (Re =100, 400, 600, 800, 1000) на равномерных сетках с шагами по X и Y, равными 0.02. Шаг по времени и длина расчетной области варьировались в зависимости от числа Рейнольдса. Естественно, были выполнены расчеты и для других значений параметра B, но здесь они не обсуждаются вследствие ограниченности объема статьи.

На рис. 2 приведены результаты расчетов в виде векторного поля скоростей в расчетной области канала с высотой уступа B=0.4 при пяти числах Рейнольдса. Наглядно видно изменение картин векторного поля скоростей в зависимости от числа Рейнольдса при заданном параметре сужения канала, а также то, что при Re=100 в области перед уступом вихреобразование только зарождается.

С ростом числа Рейнольдса кинематическая структура потока в этой области изменяется и при Re=400 появляются четкие признаки зарождения вихря в угловой области с направлением вращения по часовой стрелке. При числах Re=800 и Re = 1000 в угловой области четко наблюдаются малые вихри с тем же направлением вращения жидкости.

Кроме того, видно, что в ближней области над угловой точкой уступа проявляются эффекты зарождения отрыва потока.

С целью полноты представления картины скоростного поля в канале с внезапным сужением на рис. 3 приведены расчетные профили горизонтальной скорости $U(Y)$в различных сечениях канала по оси при пяти числах Рейнольдса. Расчеты показывают, что при рассмотренных умеренных числах Рейнольдса течение остается установившимся в предположении, что входной профиль скорости является параболическим.

Наряду с векторным полем скоростей на рис. 4 приведены данные расчетов в виде изолиний равных скоростей при B=0.4 для пяти различных чисел Рейнольдса.

Их расположение, подобно функции тока, наглядно показывает особенности движения жидкости в канале с внезапным односторонним сужением. Нетрудно видеть, что при числах Re $<$ 400 вязкие эффекты являются преобладающими и скоростная структура течения во всей расчетной области безвихревая и определяется параболическим профилем продольной скорости.

Начиная с Re$\geq$ 400, непосредственно перед уступом в угловой области проявляются эффекты зарождения вихревых образований. Их наличие и формирует "застойную зону"перед уступом. На рис. 4 легко видеть, что линия, отделяющая зону подпора от основного потока, носит вогнутый характер, а значение координаты "замыкания"этой линии на вертикальную стенку уступа зависит от числа Рейнольдса. Численные расчеты показали, что с ростом числа Рейнольдса горизонтальный размер этой зоны увеличивается, но он небольшой и при Re=1000 составляет 1.025 от высоты уступа.

На рис. 5 приведена расчетная зависимость длины зоны подпора $X_P = x_P/h$ и $L_P = X_P/B$ в зависимости от числа Рейнольдса при B=0.4. В качестве критерия определения координаты X_P принималось то значение координаты X, при котором ближайшее к нижней стенке AE значение $U(Y)$ меняло свой знак.

В целом полученные результаты расчетов полей скорости в области внезапного сужения поперечного сечения плоского канала хорошо согласуются с известными представлениями картины течения, наблюдаемой в физических и численных экспериментах [1]. Однако, наряду с этим на верхней стенке уступа FD_1 вблизи угла наблюдается ускорение потока, которое стимулирует процесс зарождения отрыва потока, но при числах Re$\leq$ 1000 он еще не происходит.

Использование в данной работе универсального дискретного аналога системы уравнений Навье-Стокса в переменных скорость–давление позволяет, в отличие от предшествующих работ этого направления, рассчитать значения полей давления.

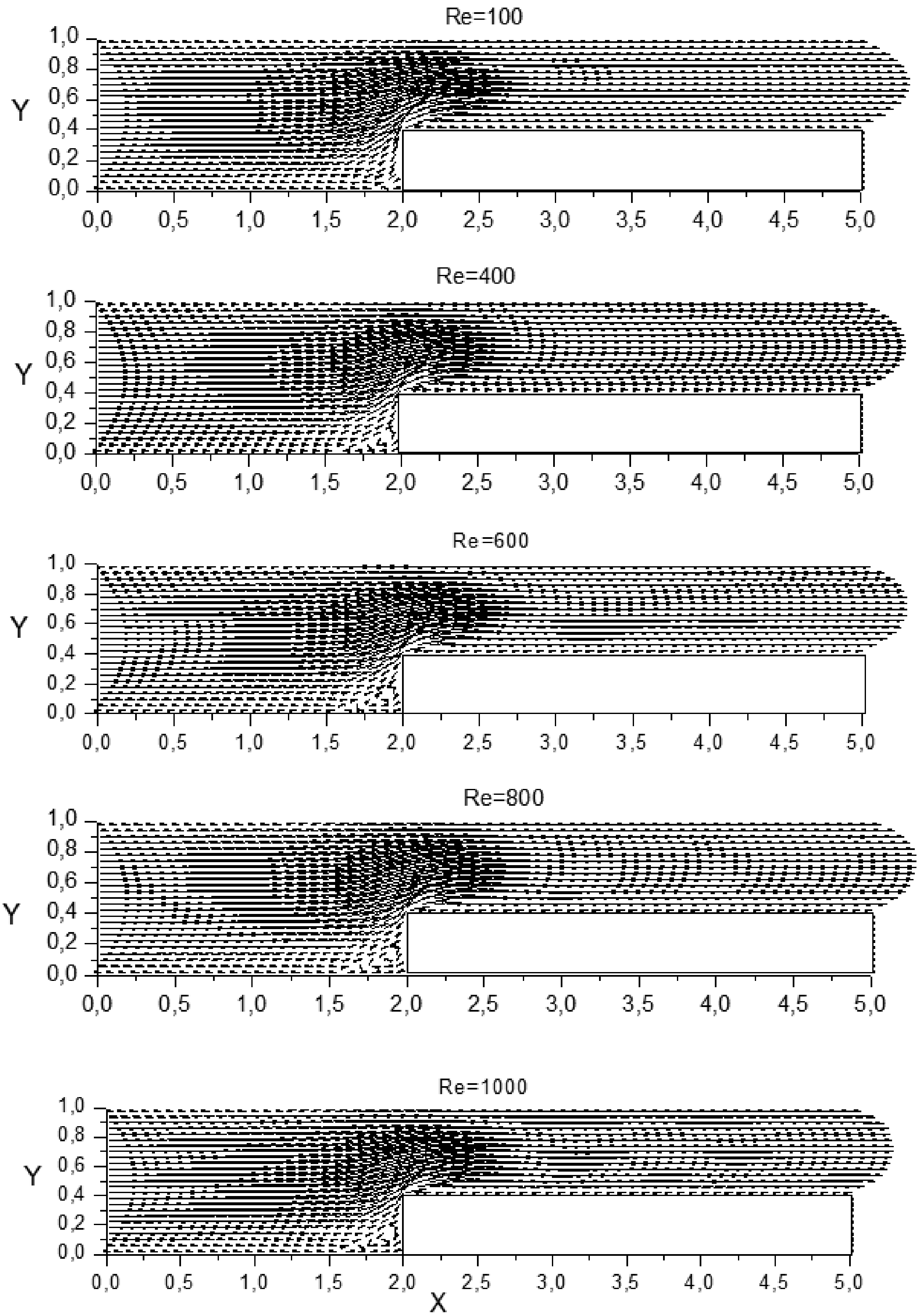


Рис. 2. Расчетное векторное поле скоростей в плоском внезапно сужающемся канале (B=0.4) при Re =100, 400, 600, 800, 1000

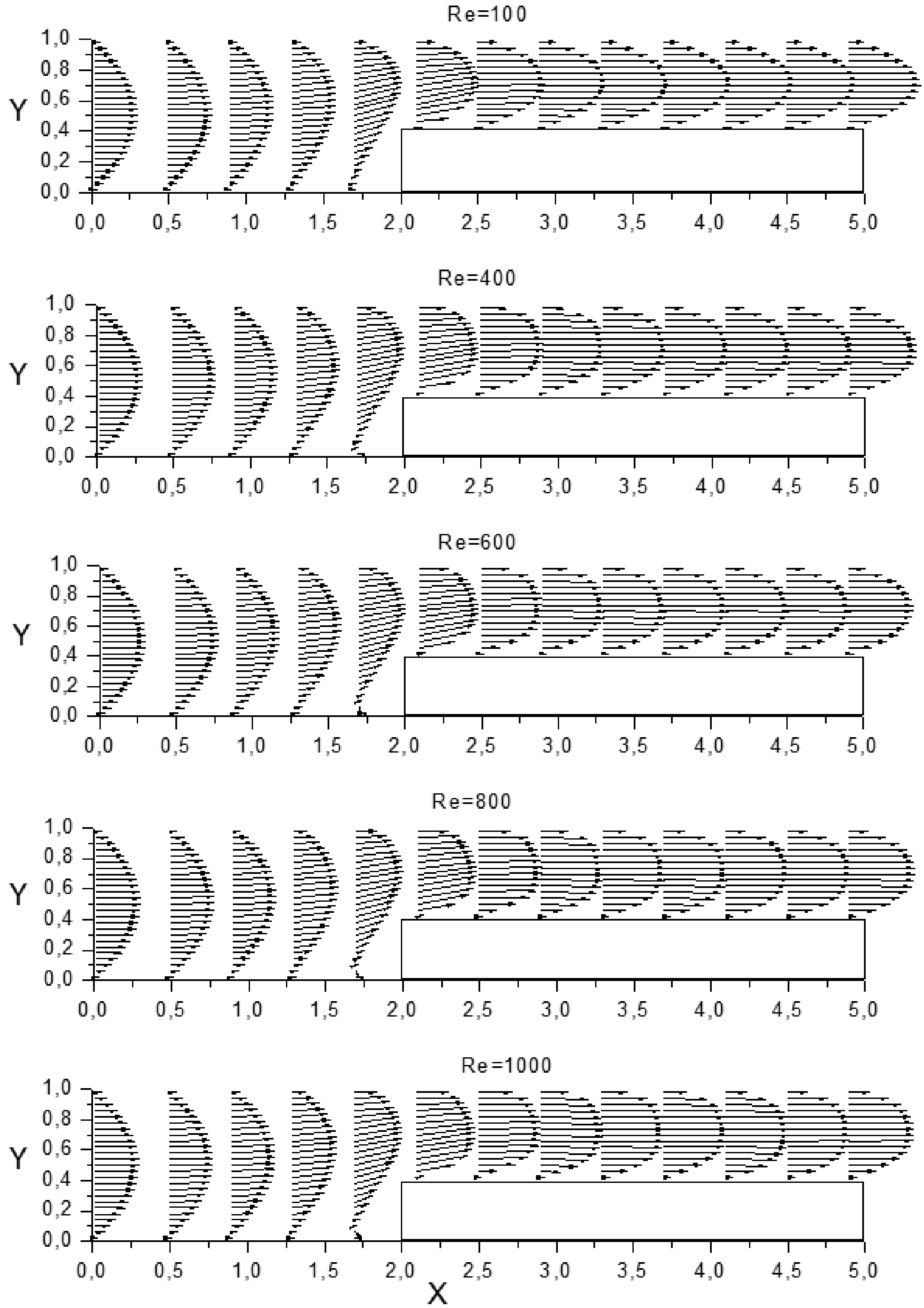


Рис. 3. Расчетные профиля горизонтальных скоростей в различных сечениях оси в плоском внезапно сужающемся канале (B=0.4) при Re =100, 400, 600, 800, 1000

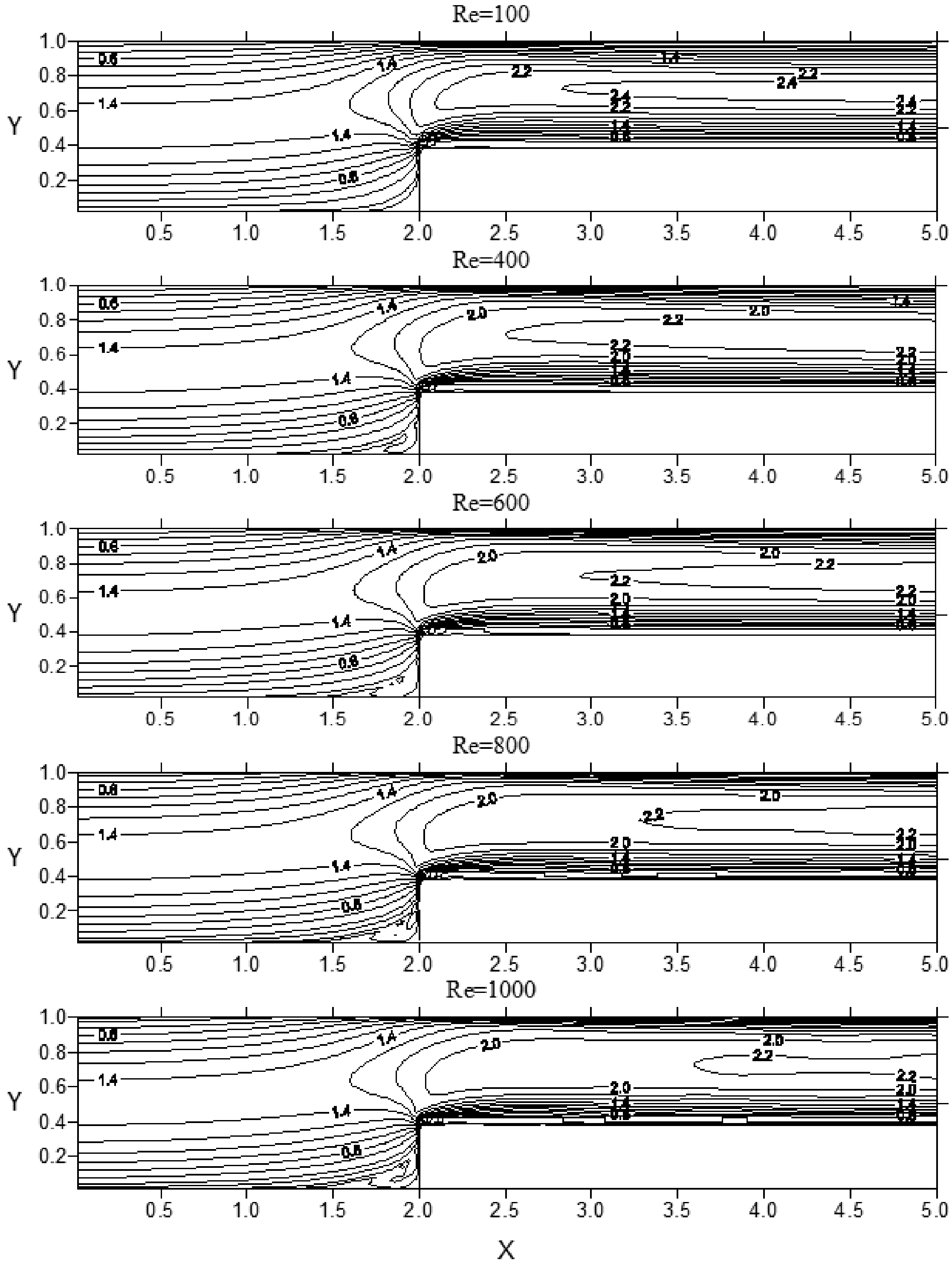
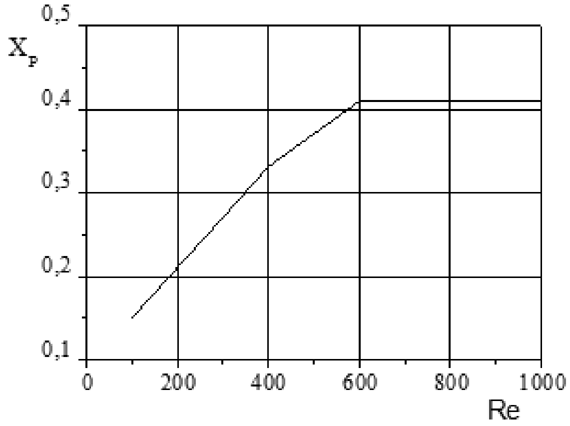


Рис. 4. Расчетные изолинии равных скоростей в плоском внезапно сужающемся канале (B=0.4) при Re=100, 400, 600, 800, 1000



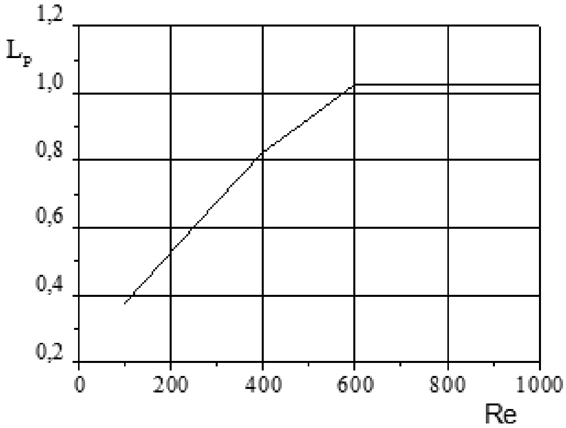


Рис. 5. Расчетная зависимость длины зоны подпора $X_P = x_P/h$ и $L_P = X_P/B$ в плоском канале с внезапным сужением в зависимости от числа Рейнольдса при B=0.4

Результаты расчетов, относящиеся к распределению поля давления, представлены на рис 6–9.

В качестве первого примера на рис. 6 приведены результаты расчетов поля давления в виде изолиний коэффициента давления C_P

$$C_P = \frac{p - p_1}{\rho u_0^2/2}$$

для высоты уступа B=0.4 при пяти различных числах Рейнольдса (Re =100, 400, 600, 800, 1000). Здесь p_1 – характерное давление в середине входного сечения канала. Из рисунка видно, что для Re≥ 400 при ламинарном режиме обтекания уступа, обращенного навстречу потоку, вниз по потоку на достаточном удалении от сечения с сужением имеются области с постоянным давлением по вертикали. На участке вблизи внешнего угла уступа существует область, где изолинии давления носят сложный веерный характер, а угол уступа является как бы источником возмущения поля давления. Эта картина имеет место при различных числах Рейнольдса. Таким образом, из расчетов следует, что при умеренных числах Рейнольдса (Re≤ 1000) установление течения в зоне подпора перед уступом происходит монотонно. Набегающий на вертикальную стенку поток создает на ней повышенное давление, которое затем распространяется навстречу потоку и формирует его структуру в зоне подпора.

Обратимся теперь к рассмотрению результатов расчета локальных значений давления на трех характерных границах расчетной области. Сюда относится участок верхней стенки канала C_1C, давление вдоль оси X на высоте уступа (Y = 0.4), то есть в сечении A_1FD_1, и давление вдоль вертикальной стенки уступа, то есть в сечении $C_1FE(X = 2)$.

Характер изменения давления вдоль вертикальной стенки уступа ($0 \leq Y \leq 0.4$) при различных числах Re и $B = 0.4$ приведен на рис. 7. Как и следовало ожидать, на этом участке давление вблизи нижней стенки канала сначала постоянно, а затем по мере приближения значений Y к координате $Y = 0.4$ давление резко уменьшается. В целом давление в зоне подпора несколько выше, чем в основном потоке канала на этой вертикали. На участке течения в канале в вертикальном сечении C_1F давление вблизи верхней стенки канала тоже сначала постоянно, а затем по мере приближения к уступу ($Y = 0.4$) плавно уменьшается и сравнивается с локальным давлением в зоне подпора в этой точке. Нетрудно заметить, что характер распределения давления по вертикали в сечении $X = 2$, приведенный на рис. 7, при различных числах Рейнольдса одинаков, но отличается величиной коэффициента давления.

На рис. 8 представлено расчетное распределение давления вдоль оси X на верхней стенке канала C_1C при $B = 0.4$ для четырех значений числа Рейнольдса. Как видно из рисунка, вначале ($X \leq 2$) давление монотонно убывает подобно давлению в прямолинейном канале без уступа, однако в области расположения уступа, в силу сохранения расхода, поток ускоряется и давление падает интенсивнее в зависимости от параметров B и Re, а затем, по мере удаления от сечения с уступом, давление снова падает монотонно.

На рис. 9 приведены кривые, которые соответствуют расчетному распределению коэффициента давления C_p вдоль оси X на высоте уступа ($Y = 0.4$), то есть в сечении A_1FD_1.

Расчеты показывают, что сначала на участке

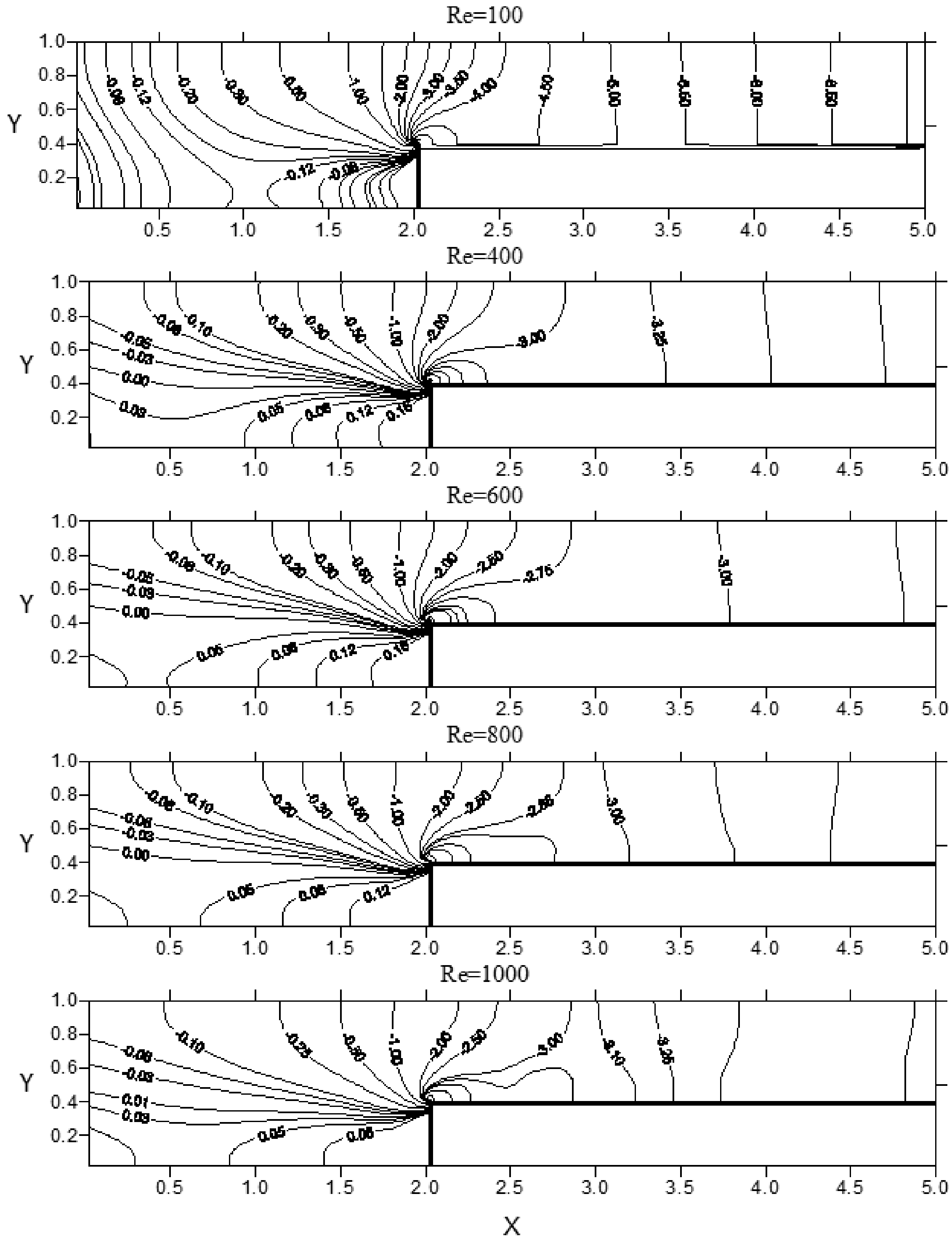


Рис. 6. Расчетное поле давления в виде изолиний коэффициентов в плоском внезапно сужающемся канале (B=0.4) при Re=100, 400, 600, 800, 1000

A_1F давление остается постоянным при всех четырех числах Рейнольдса. Далее при приближении к угловой верхней точке уступа, в силу уменьшения поперечного сечения канала и ускорения

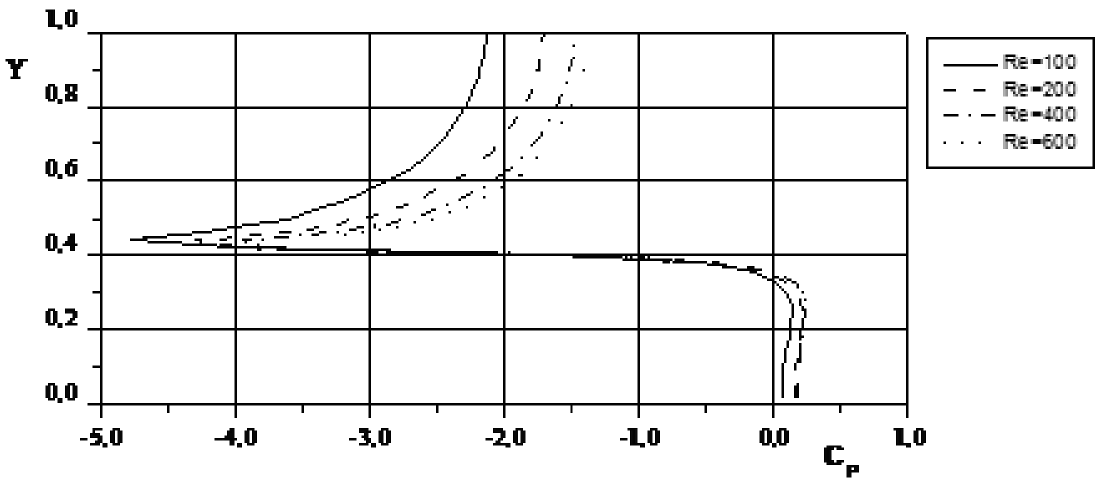


Рис. 7. Распределение коэффициента давления $_p$ по оси Y в сечении внезапного сужающегося канала EFC_1 при Re=100, 200, 400, 600 и B=0.4

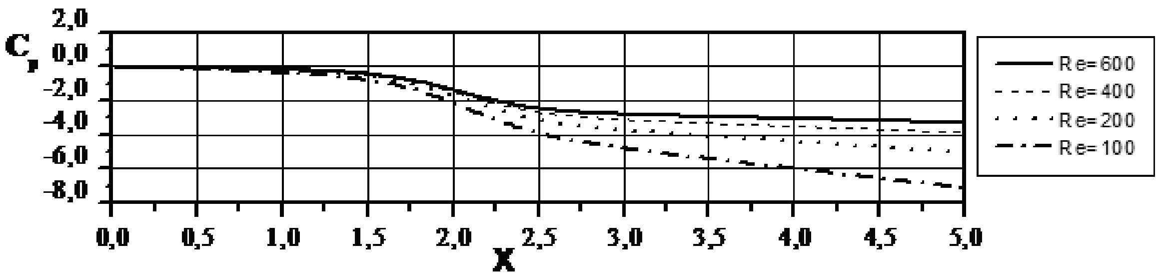


Рис. 8. Распределение коэффициента давления С по оси на верхней стенке C_1C внезапно сужающегося канала для Re=100, 200, 400, 600 при B=0.4

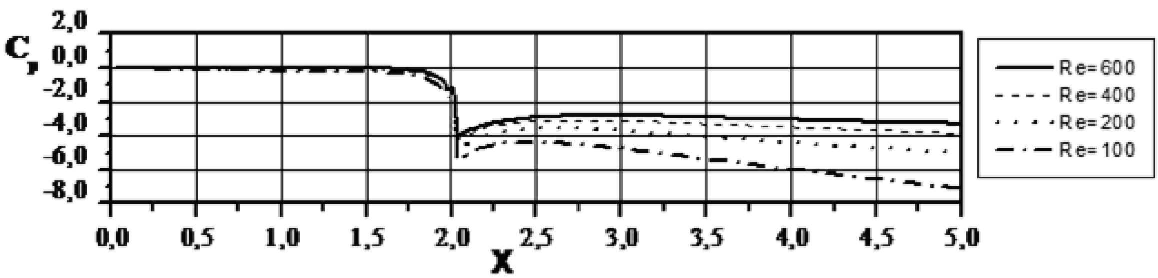


Рис. 9. Распределение коэффициента давления вдоль оси на высоте уступа (Y=0.4) в канале с внезапным сужением для Re=100, 200, 400, 600 при B=0.4

потока, давление при всех четырех числах Рейнольдса резко падает, а затем снова незначительно повышается и далее плавно переходит к монотонному падению, соответствующему характеру течения в плоском канале без уступа. Общий анализ расчетных кривых показывает, что изменение давления на участке A_1F практически не звисит от числа Рейнольдса, а на участке FD_1 такая зависимость наблюдается.

ВЫВОДЫ

С помощью универсального дискретного аналога системы нестационарных уравнений Навье-Стокса численно исследованы особенности течения в плоском канале с внезапным сужением для высоты уступа B=0.4 при малых и умеренных числах Рейнольдса. Основные результаты систематических расчетов детальной структуры полей скорости и давления в зоне внезапного сужения канала широко представлены в графическом виде. Построена зависимость протяженности зоны подпора потока перед уступом при различных числах Рейнольдса. Показано, что используемый универсальный дискретный аналог уравнений ламинарных течений обеспечивает высокое качество моделирования сложных течений с вихреобразованием и является эффективным инструментом для расчетов сложных течений.

1. *Чжен П.* Отрывные течения.– М.: Мир, 1972-1973. – Т. 1.– с.300; Т. 2. – с. 280; Т. 3.– с. 354.
2. *Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И., Розумнюк Н.В.* Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление // Прикладна гідромеханіка.– 2008.– 10(82).– Р. N2.13-23
3. *Харлоу Ф.Х.* Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики; Вычислительные методы в гидродинамике.– М.: Мир, 1967.– 316–342 с.
4. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.– М.: Энергоатомиздат, 1984.– 152 с.
5. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей.– М.: Мир, 1991.– 1.-501с.; 2.-552 с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем.– М.: Наука, 1977.– 656 с.
7. *Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен.– М.: Мир, 1990.– Т. 1.– с. 384; Т. 2.– с. 392.
8. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред, 2-е изд., перераб. и доп..– М.: Физматлит, 1994.– 448 с.