ISSN 1561 -9087 Прикладна гiдромеханiка. 2009. Том 11, N 1. С. 73 – 76

УДК 533.6.013.42

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В МОРЕ, ПОКРЫТОМ СПЛОШНЫМ ЛЬДОМ

В. В. ЯКОВЛЕВ, Т. Б. ГОНЧАРЕНКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 17.08.2008

Получено обобщенное уравнение типа Кадомцева-Петвиашвили, моделирующее распространение длинных нелинейных изгибно-гравитационных волн в море, покрытом сплошным льдом. Уравнение получено с учетом геометрически нелинейного прогиба тонкой пластины, которая моделирует сплошной лед, что не может не повлиять на область существования решений уравнения.

Отримано узагальнене рiвняння типу Кадомцева-Петвиашвiлi, яке моделює розповсюдження довгих нелiнiйних згинно-гравiтацiйних хвиль у морi, вкритому суцiльною кригою. Рiвняння отримано з урахуванням геометрично нелiнiйного прогину тонкої пластини, яка моделює суцiльну кригу, що не може не вплинути на область iснування розв'язкiв рiвняння.

The general Kadomtsev-Petviashvily-type equation describing propagation of long non-linear flexible-gravitational waves in the sea, covered with ice, has been developed. The equation has been constructed with the taking into account the geometrically-nonlinear flexion of the thin plate, wich simulates the ice cover. It must influence the intervals where the equation solution exists.

ВВЕДЕНИЕ

Для исследования трансформации длинных поверхностных гравитационных волн в жидкости используются нелинейные и нелинейно-дисперсионные модели. Нелинейные изгибно-гравитационные волны представляют собой комбинацию изгибной волны в ледяной пластине, плавающей на поверхности жидкости, и гравитационной волны. Существование этих волн обусловлено уравновешиванием давления жидкости, с одной стороны, и сил инерции массы льда и упругости пластины, с другой.

В работе [1] получено обобщенное уравнение Кортевега-де-Вриза и построено его точное решение, описывающее распространение длинных нелинейных изгибно-гравитационных волн. Это решение имеет структуру солитона с отрицательной амплитудой. Очевидно, что в общем случае солитоноподобные решения зависят не только от одной координаты. Известной моделью, в рамках которой описывается подобное двумерное решение, является уравнение Кадомцева–Петвиашвили. В данной работе, основываясь на результатах [2], приводится вывод обобщенного уравнения типа Кадомцева–Петвиашвили (КП), описывающего распространение двумерных изгибно-гравитационных волн в море, покрытом сплошным льдом. Для построения уравнения используется метод, известный давно и применяемый в той или иной форме для получения подобных моделей вплоть до последнего времени [3, 4]. С точки зрения авторов, данная форма метода построения уравнения более соответствует физике рассматриваемого явления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача о гидроупругих колебаниях системы "упругая пластина–идеальная несжимаемая жидкость" сводится к уравнению Лапласа относительно потенциала скоростей:

$$\beta\nabla^2\varphi + \varphi_{zz} = 0, \tag{1}$$

с соответствующими граничными условиями на дне

$$\varphi_z + \beta\left(\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}H\right) = 0 \tag{2}$$

и на поверхности раздела лед–вода

$$\zeta_t + \alpha\left[\zeta_x\varphi_x + \zeta_y\varphi_y\right] - \frac{1}{\beta}\varphi_z = 0, \tag{3}$$

$$\zeta + \varphi_t + \frac{1}{2}\alpha\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\varphi_z^2 + \gamma\zeta_{tt} + \delta\nabla^4\zeta - \frac{\tau}{H^{\frac{3}{2}}}L\left(\zeta,\Phi\right) = 0, \tag{4}$$

где

$$L(\zeta,\Phi)=\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+$$

$$+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}, \qquad (5)$$

компоненты тензора напряжений

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\sigma_x,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\sigma_y,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=-\tau.$$

Кроме того, в постановку задачи входит также соотношение

$$\nabla^4\Phi=L(\eta,\eta), \qquad (6)$$

где

$$L(\eta,\eta)=\eta_{xx}\eta_{yy}-\eta_{xy}^2.$$

Подстрочные индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным. Безразмерные переменные введены следующим образом:

$$(x^*,y^*)=(x,y)/\lambda,$$

$$(z^*,d^*,h_1^*)=(z,d,h_1)/H,$$

$$\zeta^*=\zeta/A, \quad D^*=D/gH\rho_0,$$

$$t^*=t\sqrt{gH}/\lambda,$$

$$\rho_i^*=\rho_i/\rho_2, i=1,2;$$

$$\varphi^*=\varphi\sqrt{gH}/g\lambda A,$$

$$\alpha=\frac{A}{H};\;\; \beta=\left(\frac{H}{\lambda}\right)^2; \qquad (7)$$

$$\gamma=\beta\rho_1 h_1/\rho_2 H;$$

$$\delta=\beta D/\left(\rho_2 g H^2\lambda^2\right);$$

$$E^*=\beta E/\left(1-\nu^2\right)\rho_2 g\lambda;$$

где ρ_1,h_1,D,E – соответственно плотность, толщина, цилиндрическая жесткость и модуль упругости пластины; $\zeta(x,y,t)$ – прогиб пластины; A,λ – амплитуда и длина волны; H,ρ_2 – характерная глубина жидкости и ее плотность.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

Построим длинноволновое приближение системы уравнений (1)-(6) с помощью разложения по малому параметру:

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n(z+H)^n f^n(x,y,t). \qquad (8)$$

Подставляя этот ряд в граничное условие на дне и приравнивая слагаемые при одинаковых степенях параметра β, получим соотношение

$$f^1=-\vec\nabla f^0\cdot\vec\nabla H+$$

$$+\beta\left(\vec\nabla H\cdot\vec\nabla H\right)\left(\vec\nabla f^0\cdot\vec\nabla H\right). \qquad (9)$$

Подстановка ряда (8) в уравнение Лапласа (1) приводит к соотношениям для $f^n, n=1,2,3,4$, таким, что все f^n можно выразить через f^0. Используем эти соотношения в граничных условиях на поверхности раздела лед-вода, предполагая, что α и β – величины одного порядка малости. Подставляя их в граничное условие (3), с учетом только слагаемых порядка α и β получим $\left(f^0=f\right)$:

$$\zeta_t+\vec\nabla\cdot\left[(H+\alpha\zeta)\vec\nabla f\right]-$$

$$-\beta\left(\vec\nabla f\cdot\vec\nabla H\right)\left(\vec\nabla H\vec\nabla H\right)-$$

$$-\beta H\vec\nabla H\cdot\vec\nabla\left(\vec\nabla f\cdot\vec\nabla H\right)-$$

$$-\frac{\beta}{2}H^2\vec\nabla H\cdot\vec\nabla\left(\nabla^2 f\right)-$$

$$-\frac{\beta}{2}H^2\vec\nabla\cdot\left[\nabla^2 f\vec\nabla H\right]- \qquad (10)$$

$$-\beta H\vec\nabla\cdot\left[\left(\vec\nabla f\cdot\vec\nabla H\right)\vec\nabla H\right]-$$

$$-\frac{\beta}{2}H\left(\vec\nabla H\cdot\vec\nabla H\right)\nabla^2 f-$$

$$-\frac{\beta}{2}H^2\nabla^2\left(\vec\nabla f\cdot\vec\nabla H\right)-\frac{\beta}{6}H^3\nabla^4 f=0.$$

Подставим те же соотношения в оставшееся граничное условие на свободной поверхности и, так же удерживая только слагаемые порядка α и β, получим:

$$\zeta + \gamma\zeta_{tt} + \delta\nabla^4\zeta + f_t - \beta H\left(\vec{\nabla} f_t \cdot \vec{\nabla} H\right) -$$

$$-\frac{\beta}{2}H^2\nabla^2 f_t + \frac{\alpha}{2}\left(\vec{\nabla} f\right)^2 = 0. \qquad (11)$$

Перейдем в систему координат, связанную с фронтом волны, распространяющейся в направлении оси X. При этом полагаем, что масштаб L характерных изменений f и ξ в поперечном направлении Y много больше длины волны. Замена переменных

$$r = \int\limits_0^x \frac{dp}{c\,(p,y)} - t, \quad s = \beta x, \qquad (12)$$

$$\xi = \varepsilon y, \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{L} = \mathrm{O}\left(\beta^{\frac{1}{2}}\right), \quad c = \sqrt{H}$$

в предположении, что

$$\gamma = \mathrm{O}\,(\beta)\,, \delta = \mathrm{O}\,(\beta)\,,$$

преобразует последние два уравнения к виду:

$$\zeta_r - f_{rr} - \frac{\alpha}{H}\left(\zeta f_r\right)_r - 2\beta H^{\frac{1}{2}} f_{rs} -$$

$$-\frac{\beta}{2}H^{-\frac{1}{2}}H_s f_r + \beta\frac{H}{6}f_{rrrr} - \qquad (13)$$

$$-\varepsilon^2\left[J^2 H f_{rr} + f_r\,(JH)_\xi + 2JHf_{r\xi} +\right.$$

$$\left.+\left(Hf_\xi\right)_\xi\right] = \mathrm{O}\left(\beta^2\right),$$

$$\zeta - f_r + \frac{\alpha}{2H}f_r^2 + \frac{\beta H}{2}f_{rrr} + \gamma\zeta_{rr} -$$

$$-\frac{T\omega^x}{H}\zeta_{rr} + \delta\zeta_{rrrr}H^{-2} = \mathrm{O}\,(\varepsilon\beta)\,, \qquad (14)$$

где

$$\omega^x = \Phi_{yy}, \quad \mathrm{T} = \alpha h_1 E^*\left(1-\nu^2\right)A/\lambda,$$

$$J\,(s,\xi) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{s}{\beta}} H\,(p,\xi)^{-\frac{3}{2}}\,dp.$$

После ряда преобразований, обозначая $\zeta H^{\frac{1}{4}} = h$, приходим к следующему соотношению:

$$h_s + \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\beta}H^{-\frac{7}{4}}hh_r + \frac{1}{6}H^{\frac{1}{2}}h_{rrr} +$$

$$+\frac{\gamma}{2\beta}H^{-\frac{1}{2}}h_{rrr} - \frac{\mathrm{T}\omega^x}{2\beta H^{\frac{3}{2}}}h_{rrr} + \frac{\delta}{2\beta}H^{-\frac{5}{2}}h_{rrrrr} =$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{2\beta}H^{-\frac{1}{4}}\left(Hf_\xi\right)_\xi - \qquad (15)$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2\beta}H^{-\frac{1}{2}}\left[J^2Hh_r + h\,(JH)_\xi + 2HJh_\xi\right].$$

Переходя к системе переменных (x,ξ,t) и умножая полученное в результате этого соотношение на $H^{\frac{1}{2}}\beta$, получаем:

$$h_t + H^{\frac{1}{2}}h_x + \frac{3}{2}\alpha H^{-\frac{3}{4}}hh_x +$$

$$+\frac{\beta}{6}H^{\frac{3}{2}}\left[H^{\frac{1}{2}}\left(H^{\frac{1}{2}}h_x\right)_x\right]_x +$$

$$+\frac{\gamma}{2}H^{\frac{1}{2}}\left[H^{\frac{1}{2}}\left(H^{\frac{1}{2}}h_x\right)_x\right]_x -$$

$$-\frac{\mathrm{T}\omega^x}{2}H^{-\frac{1}{2}}\left[H^{\frac{1}{2}}\left(H^{\frac{1}{2}}h_x\right)_x\right]_x + \qquad (16)$$

$$+\frac{\delta}{2}H^{-\frac{3}{2}}\left[H^{\frac{1}{2}}\left(H^{\frac{1}{2}}\left(H^{\frac{1}{2}}\left(H^{\frac{1}{2}}h_x\right)_x\right)_x\right)_x\right]_x =$$

$$= -\varepsilon^2 H^{\frac{1}{4}}\left(Hf_\xi\right)_\xi,$$

Подстановка в последнее соотношение $h = H^{\frac{3}{4}}f_x$ с последующим сокращением на $H^{\frac{3}{4}}$ дает

$$f_{xt} + H^{\frac{1}{2}}f_{xx} + \frac{3}{2}\alpha f_x f_{xx} + \frac{\beta}{6}H^{\frac{5}{2}}f_{xxxx} +$$

$$+\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{T\omega^x}{2H}\right)H^{\frac{3}{2}}f_{xxxx} + \qquad (17)$$

$$+\frac{\delta}{2}H^{\frac{1}{2}}f_{xxxxxx} = -\frac{\varepsilon^2}{2}H^{\frac{1}{2}}f_{\xi\xi}.$$

Используя разложение дробных степеней H в ряд и обозначая $\eta = f_x$, окончательно получим:

$$\eta_t + \left(1 + \frac{3}{2}\alpha\eta\right)\eta_x + \left(\frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} - \frac{T\omega^x}{2}\right)\eta_{xxx} +$$

$$+\frac{\delta}{2}\eta_{xxxxx} = -\frac{\varepsilon^2}{2}f_{\xi\xi}. \qquad (18)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы получили уравнение, описывающее распространение двумерных изгибно-гравитационных волн в море, покрытом сплошным льдом. Как и в модифицированном уравнении КдВ [1], в этом уравнении появляется дополнительное слагаемое, включающее третью производную η_{xxx}, что приводит к существованию решений различного типа в зависимости от соотношения параметров в скобке при этой производной [1, 5]. При выводе уравнения КП авторы [4] не учитывают геометрически нелинейный прогиб упругой пластины, что не влияет на вид уравнения, однако не может не влиять на область существования его решения. Геометрически нелинейный прогиб пластины дает вклад именно в коэффициент при третьей производной, определяющий область существования решения. Например, искусственно вводя предварительное натяжение пластины в работе [6], автор предопределил наличие дискретного спектра решений, при котором малое изменение одного из параметров приводит к исчезновению изгибно-гравитационного солитона, что абсолютно не соответствует физике рассматриваемого явления. Учет нелинейного прогиба, как нам представляется, позволит получить непрерывную область существования решения, когда малое изменение параметров задачи приводит только к изменению характеристик изгибно-гравитационного солитона, но не к его исчезновению.

1. *Ткаченко В. А., Яковлев В. В.* Нелинейно-дисперсионная модель трансформации поверхностных волн в прибрежной зоне моря, покрытой льдом // Прикладна гідромеханіка.– 1999.– **1(73)**, N3.– С. 55-64.
2. *Демченко Р. И., Железняк М. И.* Нелинейно-дисперсионные эффекты распространения поверхностных волн вдоль неоднородностей рельефа дна // Гидромеханика.– 1983.– Вып.48.– С. 17-22.
3. *Prabir Daripa* Higher-order Boussinesq equations for two-way propagation of shallow water waves // Eur. J. of Mech. B/Fluids.– 2006.– **25**, N6.– P. 1008-1021.
4. *Haragus-Courcelle M., Il'ichev A.* Three-dimensional solitary waves in the presence of additional surface effects // Eur. J. Mech.B/Fluids.– 1998.– **17**, N5.– P. 739-768.
5. *Гончаренко Т. Б., Яковлев В. В.* Дослідження сталих нелінійних згинно-гравітаційних хвиль в морі, вкритому суцільною кригою // Прикладна гідромеханіка.– 2005.– **7(79)**, N2.– С. 3-7.
6. *Марченко А. В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПММ.– 1988.– **52**, Вып.2.– С. 230-235.