

УДК 532.594:551.466

НЕЛИНЕЙНЫЕ КАПИЛЛЯРНО–ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

А. Е. БУКАТОВ, А. А. БУКАТОВ

Морской гидрофизический институт НАН Украины, Севастополь

Получено 01.08.2007

На основе уравнений динамики нелинейных волн в слое однородной идеальной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил методом многих масштабов получены асимптотические разложения до величин третьего порядка малости для потенциала скорости движения жидких частиц и возмущений свободной поверхности, формируемых при распространении периодических волн конечной амплитуды и нелинейном взаимодействии бегущих волн первой и второй гармоник. Проведен анализ амплитудно-фазовых характеристик возмущений. Рассмотрены изменения, вносимые в структуру возмущений пренебрежением зависимости потенциала скорости на свободной поверхности жидкого слоя от ее пространственно-временных деформаций.

На основі рівнянь динаміки нелінійних хвиль у шарі однорідної ідеальної нестисливої рідини з урахуванням капілярних сил методом багатьох масштабів одержані асимптотичні розкладання до величин третього порядку малості для потенціалу швидкості руху часток рідини і збурень вільної поверхні, що формуються при розповсюдженні періодичних хвиль скінченної амплітуди і нелінійній взаємодії хвиль першої і другої гармонік, що біжать. Проведений аналіз амплітудно-фазових характеристик збурень. Розглянуті зміни, що вносяться в структуру збурень зневажаючи залежності потенціалу швидкості на вільній поверхні рідкого шару від її просторово-часових деформацій.

Asymptotic expansions up to values of third order for the fluid velocity potential and elevation of the fluid's surface are obtained by the method of the multiple scales on the basis of the equations of non-linear waves dynamics in the homogeneous ideal incompressible liquid with taking into account capillary forces. The asymptotic expansions are formed by propagation and non-linear interaction of final amplitude periodic traveling waves the first and the second harmonics. The analytical and numerical analysis of the received solutions is carried out. The changes of structure disturbance received neglect by dependence of potential velocity on the fluid's surface on time-space deformations are studied.

ВВЕДЕНИЕ

Волны капиллярно-гравитационного диапазона вносят заметный вклад в формирование шероховатости свободной поверхности жидкости, существенно влияя тем самым на ее отражательную способность и на процесс зарождения ветрового волнения. Они участвуют в передаче энергии от атмосферы к основным энергонесущим компонентам гравитационных волн [1]. Изучению капиллярно-гравитационных волн в линейной постановке посвящены работы [2–6], в которых исследованы дисперсионные свойства волн и оценена роль силы поверхностного натяжения в их генерации и развитии под действием периодических, импульсных и движущихся возмущений. Исследование капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды выполнено в [7] без учета зависимости потенциала скорости на свободной поверхности от ее деформаций.

В настоящей работе методом многих масштабов с учетом пространственно-временных изменений волнового профиля при выводе кинематического и динамического поверхностных граничных условий для нелинейных приближений построены асимптотические разложения до величин третье-

го порядка малости для потенциала скорости и возвышения свободной поверхности при распространении периодических волн конечной амплитуды и нелинейном взаимодействии бегущих волн первой и второй гармоник. Проведен анализ зависимости возмущений от характеристик основной гармоники начального приближения. Рассмотрены изменения, вносимые в структуру возмущений учетом зависимости потенциала скорости в граничных условиях на свободной поверхности от ее деформаций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим влияние поверхностного натяжения на прогрессивные периодические волны конечной амплитуды и нелинейное взаимодействие бегущих волн первой и второй гармоник в слое однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины H . В предположении потенциальности движения жидкости в безразмерных переменных $x = kx_1$, $z = kz_1$, $t = \sqrt{kg}t_1$ (здесь k – волновое число; g – ускорение силы тяжести; t – время) задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq \zeta \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности $z = \zeta$

$$\begin{aligned} &\zeta - \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) - \\ &-\alpha_1 k^2 \zeta_{xx} (1 + \zeta_x^2)^{-3/2} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и на дне бассейна ($z = -H$)

$$\varphi_z = 0. \quad (3)$$

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\zeta = f(x), \quad \zeta_t = 0. \quad (4)$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha/(\rho g)$; ρ – плотность жидкости; α – коэффициент поверхностного натяжения. Потенциал скорости φ и возвышение поверхности бассейна ζ связаны кинематическим условием

$$\zeta_t - \zeta_x \varphi_x + \varphi_z = 0. \quad (5)$$

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Решение задачи (1)–(5) найдем методом многих масштабов [8]. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с $t = T_0$ переменные $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, где ε – малое, но конечное, и предположим, что

$$\begin{aligned} \zeta &= \varepsilon \zeta_0(x, t), \quad \varphi = \varepsilon \varphi_0(x, z, t), \\ f &= \varepsilon f_0(x); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\zeta_0 = \zeta_1 + \varepsilon \zeta_2 + \varepsilon^2 \zeta_3 + O(\varepsilon^3),$$

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2 + \varepsilon^2 \varphi_3 + O(\varepsilon^3),$$

$$f_0 = f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + O(\varepsilon^3).$$

Подставив φ из (6) в уравнения (1) и (3), с точностью до величин третьего порядка малости получим:

$$\varepsilon \Delta \varphi_1 + \varepsilon^2 \Delta \varphi_2 + \varepsilon^3 \Delta \varphi_3 = 0, \quad (7)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0.$$

Рассмотрим теперь динамическое (2), кинематическое (5) и начальное (4) условия. В силу малости ε представим потенциал скорости $\varphi(x, z, t)$ на поверхности жидкости $z = \varepsilon \zeta_0$ в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, t, \varepsilon \zeta_0) &= \varphi(x, t, 0) + \varepsilon \zeta_0 \varphi_z(x, t, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \zeta_0^2 \varphi_{zz}(x, t, 0) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим $\zeta = \varepsilon \zeta_0$, $f = \varepsilon f_0$, $\varphi(x, t, \varepsilon \zeta_0)$ в условия (2) – (5), имея в виду при этом, что по правилу дифференцирования сложной функции частная производная по времени определяется выражением

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2},$$

и учитывая зависимость ζ_0 от x и t в (8).

Тогда, собрав коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравняв их нулю, из (2), (4), (5), (7) для определения ζ_n , φ_n порядка ε^n , $n = 1, 2, 3$ получим уравнения

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq 0, \quad (9)$$

$$\zeta_n - \frac{\partial \varphi_n}{\partial T_0} - \alpha_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial x^2} = F_n^*, \quad z = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = L_n^*, \quad z = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0, \quad z = -H, \quad (12)$$

$$\zeta_n = f_n(x), \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} = G_n, \quad t = 0. \quad (13)$$

Здесь

$$F_n^* = F_n + F_n^0, \quad L_n^* = L_n + L_n^0,$$

$$F_1 = F_1^0 = L_1 = L_1^0 = L_2^0 = G_1 = 0,$$

$$F_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right],$$

$$L_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}, \quad G_2 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1},$$

$$G_3 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1},$$

Тогда из кинематического условия (11) находим

$$F_3 = \zeta_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} - \frac{3}{2} \alpha_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right)^2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \tau \sin \theta, z = 0. \quad (15)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (12) на дне бассейна, запишем φ_1 в виде

$$\varphi_1 = b_0 \operatorname{ch}(z + H) \sin \theta. \quad (16)$$

После подстановки соотношения (16) в (15) получим $b_0 = \tau (\operatorname{sh} H)^{-1}$. В результате

$$\varphi_1 = b_1 \sin \theta,$$

$$b_1 = \tau (\operatorname{sh} H)^{-1} \operatorname{ch}(z + H). \quad (17)$$

Подставляя выражения (14) и (17) в динамическое условие (10), найдем дисперсионное соотношение

$$\tau^2 = (1 + \alpha_1 k^2) \operatorname{th} H. \quad (18)$$

Выражение, определяющее $\beta(T_1, T_2)$ в (14), получим из последующих приближений. Чтобы найти второе приближение (решение задачи при $n = 2$), определим правые части уравнений (10), (11), используя (14), (17), (18). Тогда с учетом требования отсутствия основной гармоники получим

$$\zeta_2 = a_2 \cos 2\theta,$$

$$\varphi_2 = b_2 \operatorname{ch} 2(z + H) \sin 2\theta + \varphi_2^*, \quad (19)$$

где

$$a_2 = \tau^2 \eta_2 \mu_n^{-1},$$

$$\mu_n = (1 + n^2 \alpha_1 k^2) \operatorname{th} nH - n\tau^2, \quad n = 2,$$

$$\eta_2 = \operatorname{th} 2H - \operatorname{cth} H - \frac{1}{4} (\operatorname{cth}^2 H - 1) \operatorname{th} 2H,$$

$$b_2 = \tau \left(a_2 - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \right) \times \operatorname{ch} 2(z + H) \operatorname{sh}^{-1} 2H,$$

$$\varphi_2^* = \frac{1}{4} \tau^2 (\operatorname{cth}^2 H + 1) T_0.$$

$$L_3 = \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right) - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1} - \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3},$$

$$F_2^0 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \quad L_3^0 = \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z},$$

$$F_3^0 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \zeta_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}.$$

Отметим, что слагаемые F_2^0 , F_3^0 , L_3^0 , входящие в правые части уравнений (10), (11), обусловлены учетом зависимости ζ_0 от x и t в (8) при выводе поверхностных граничных условий для нелинейных приближений [9]. Что касается выражений $F_{2,3}$, $L_{2,3}$, $G_{2,3}$, то они аналогичны полученным в [7]. Из (10), (11) видно, что зависимость ζ_0 от x и t в (8) не проявляется в выражениях для приближения порядка ε ($F_1^0 = L_1^0 = 0$). В приближениях же ε^2 такое слагаемое (F_2^0) входит только в динамическое, а в приближении ε^3 – в динамическое (F_3^0) и кинематическое (L_3^0) условия.

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН

Задача (9)-(13) сформулирована в общем случае неустановившихся возмущений конечной амплитуды. Остановимся на рассмотрении бегущих периодических волн, задавая $f_n(x)$ в соответствующем виде. В таком случае выберем первое приближение ($n = 1$) возвышения поверхности бассейна ζ_1 в форме

$$\zeta_1 = \cos \theta, \quad \theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2). \quad (14)$$

При этом оказывается, что θ не зависит от T_1 . Поэтому $\beta = \beta_2(T_2)$. Полученные решения для первого (14), (17) и второго (19) приближений определяют правые части динамического (10) и кинематического (11) условий задачи для третьего приближения ($n = 3$). Исключив в них слагаемые, порождающие секулярность, для ζ_3, φ_3 найдем

$$\zeta_3 = a_3 \cos 3\theta, \varphi_3 = b_3 \sin 3\theta + \varphi_3^*, \beta = \tau \sigma_0 T_2.$$

Здесь

$$a_3 = \tau^2 [(1 + 9\alpha_1 k^2) \operatorname{th} 3H - 3\tau^2]^{-1} \times \\ \times (l_4 \operatorname{th} 3H - l_6),$$

$$b_3 = \tau \left(a_3 - \frac{1}{3} l_6 \right) \operatorname{ch} 3(z + H) \operatorname{sh}^{-1} 3H,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} (l_5 - l_3 \operatorname{th} H),$$

$$\varphi_3^* = \tau \left[\frac{1}{2} (l_5 - l_3 \operatorname{th} H) - l_5 \right] \times \\ \times \operatorname{ch} (z + H) \operatorname{sh}^{-1} H \sin \theta,$$

$$l_3 = \frac{3}{8} \alpha_1 k^2 \tau^{-2} + \\ + \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \left(\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - \frac{5}{4} \right) - \\ - a_2 \left(\frac{1}{2} + \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H \right),$$

$$l_4 = -\frac{3}{8} \alpha_1 k^2 \tau^{-2} + \\ + \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \left(\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - \frac{15}{4} \right) + \\ + a_2 \left(\frac{11}{2} - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H \right),$$

$$l_5 = l_2 - \frac{3}{8}, \quad l_6 = 3l_2 + \frac{5}{8},$$

$$l_2 = \frac{1}{2} [a_2 (\operatorname{cth} H + 2\operatorname{cth} 2H) - \\ - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H].$$

Следовательно, возвышение поверхности бассейна ζ и потенциал скорости движения жидкости φ до величин третьего порядка малости определяются из выражений

$$\zeta = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n a_n \cos n\theta, \\ \varphi = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n (b_n \sin n\theta + \varphi_n^*), \quad (20)$$

$$\theta = x + \sigma t, \quad \sigma = \tau (1 + \varepsilon^2 \sigma_0), \quad a_1 = 1, \quad \varphi_1^* = 0.$$

В размерных величинах ($\zeta = \zeta/k, \Phi = \varphi \sqrt{kg/k^2}, \varepsilon = ak$, где a – амплитуда начальной гармоники)

$$\zeta = a \cos \theta + a^2 k a_2 \cos 2\theta + a^3 k^2 a_3 \cos 3\theta,$$

$$\Phi = ab_1 \sqrt{g/k} \sin \theta + a^2 b_2 \sqrt{kg} \sin 2\theta + \\ + a^3 k b_3 \sqrt{kg} \sin 3\theta + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \Phi_n^*,$$

где

$$\theta = kx + \sigma_1 (1 + a^2 k^2 \sigma_0) t, \quad \sigma_1 = \tau \sqrt{kg}, \quad \Phi_n^* = \varphi_n^* \sqrt{kg/k^2},$$

а индекс 1 у x и t здесь и далее опущен. Фазовую скорость волновых возмущений определим из формул

$$\nu = \nu_1 (1 + \varepsilon^2 \sigma_0), \quad \nu_1 = \tau \sqrt{g/k}.$$

Из полученных выражений следует, что частота и фазовая скорость возмущений зависят не только от коэффициента поверхностного натяжения, но и от амплитуды начальной волновой гармоники. Фазовая скорость ν_1 основной линейной гармоники как функция волнового числа k имеет минимум при значении $k = k^*$, удовлетворяющем условию $V_1(k) = \nu_1(k)$, где

$$V_1 = \frac{g}{2\sigma} [(1 + 3\alpha_1 k^2) \operatorname{th} kH + \\ + (1 + \alpha_1 k^2) (1 - \operatorname{th}^2 kH) kH]$$

характеризует групповую скорость линейных гравитационно-капиллярных волн.

Для глубокой воды ($kH \gg 1$) решение упрощается, так как

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{4 + 7\alpha_1 k^2}{16(1 - 3\alpha_1 k^2)},$$

$$\sigma_0 = -\frac{6 + 9\alpha_1 k^2}{16(1 + \alpha_1 k^2)}, \quad \nu = \sqrt{(1 + \alpha_1 k^2) g/k},$$

$$l_5 = l_2 + \frac{3}{8}, \quad l_6 = 3l_2 + \frac{3}{8},$$

$$\tau = \sqrt{1 + \alpha_1 k^2}, \quad \sigma_1 = \sqrt{kg(1 + \alpha_1 k^2)},$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \operatorname{th} 2H - \frac{1}{4} \operatorname{th} 2H (\operatorname{cth}^2 H - 1) - \operatorname{cth} H.$$

$$k^* = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}, \quad \lambda(k^*) = 2\pi\sqrt{\alpha_1}, \quad \sigma(k^*) = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt[4]{\alpha_1}},$$

В этом случае [7] на глубокой воде

$$\nu_1(k^*) = \sqrt{2g} \sqrt[4]{\alpha_1}, \quad V_1 = \frac{1}{2} g \sigma^{-1} (1 + 3\alpha_1 k^2).$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{1 + \alpha_1 k^2}{1 - 2\alpha_1 k^2},$$

Причем V_1 и ν_1 связаны соотношением

$$V_1 = \frac{1}{2} \nu_1 (1 + 3\alpha_1 k^2) (1 + \alpha_1 k^2)^{-1}.$$

$$a_3 = \frac{3}{16} \frac{2 + 7\alpha_1 k^2 + 2(\alpha_1 k^2)^2}{(1 - 2\alpha_1 k^2)(1 - 3\alpha_1 k^2)},$$

Минимальное значение имеет и V_1 как функция k в точке $k = k^0$. При $kH \gg 1$ имеем

$$\sigma_0 = \frac{8 + \alpha_1 k^2 + 2(\alpha_1 k^2)^2}{16(1 - 2\alpha_1 k^2)(1 + \alpha_1 k^2)}.$$

$$k^0 = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1} k^*, \quad \lambda(k^0) = \sqrt[4]{\frac{3}{7 - 4\sqrt{3}}} \lambda(k^*),$$

Отсюда при $\alpha = 0$ найдем значения $a_2 = 1/2$, $a_3 = 3/8$, $\sigma_0 = 1/2$, совпадающие с полученными в [10] при обычном разложении по малому параметру.

$$\sigma(k^0) = \sqrt[4]{\frac{2 - \sqrt{3}}{3\sqrt{3}}} \sigma(k^*),$$

Отметим, что полученное решение (20) справедливо вне малых окрестностей резонансных значений волновых чисел k_2 и k_3 , удовлетворяющих уравнению $\mu_n = 0$ при $n = 2$ и $n = 3$ соответственно.

$$V_1(k^0) = g(\sqrt{3} - 1) / \sigma(k^0),$$

$$V_1(k^0) = 0.768 \nu_1(k^*).$$

Если при выводе кинематического и динамического поверхностных условий для нелинейных приближений пренебречь зависимостью ζ_0 от x и t в (8) (полагая F_2^0, F_3^0, L_3^0 равными нулю в (10), (11)), то в формулах (20), определяющих решение задачи, следует учесть, что

Если $kH \gg 1$, то $k_n = 1/\sqrt{n\alpha_1}$. Указанные точки остаются сингулярными как при учете, так и без учета слагаемых F_2^0, F_3^0, L_3^0 . Амплитудные значения a_2, a_3, b_2, b_3 и величина обусловленного нелинейностью фазового сдвига σ_0 при этом изменяются, что следует из сопоставления соответствующих выражений для рассматриваемых случаев. Следовательно, изменяется и пространственное распределение вертикальных смещений свободной поверхности, а также составляющих скорости волнового возмущения, формируемого бегущей периодической волной конечной амплитуды.

$$l_3 = \frac{3}{8} \alpha_1 k^2 \tau^{-2} + \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \left(\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - \frac{9}{4} \right) + a_2 \left(\frac{3}{2} - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H \right),$$

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ ГАРМОНИК

$$l_4 = -\frac{3}{8} \alpha_1 k^2 \tau^{-2} + \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \left(\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - \frac{11}{4} \right) + a_2 \left(\frac{7}{2} - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H \right),$$

Выберем теперь первое приближение ($n = 1$) возвышения поверхности жидкости в форме

$$\zeta_1 = \cos \theta + a_1 \cos 2\theta,$$

$$\theta = x + \tau T_0 + \beta_1 (T_1, T_2), \quad (21)$$

где a_1 постоянная порядка единицы.

Удовлетворяя условию на дне и учитывая взаимосвязь волновых характеристик через граничные условия (10), (11), запишем

$$\varphi_1 = \tau \left[\frac{\operatorname{ch}(z+H)}{\operatorname{sh} H} \sin \theta + a_1 \frac{\operatorname{ch} 2(z+H)}{\operatorname{sh} 2H} \sin 2\theta \right]. \quad (22)$$

Подставляя ζ_1 , φ_1 из (21), (22) в правые части динамического (10) и кинематического (11) граничных условий для второго приближения и решив задачу при $n = 2$, требуя отсутствие первой и второй гармоник в частном решении, получим

$$\zeta_2 = a_2 \cos 2\theta + \sum_{n=3}^4 a_{2n} \cos n\theta, \quad (23)$$

$$\varphi_2 = \tau \sum_{n=1}^4 b_{2n} \operatorname{ch} n(z+H) \operatorname{sh}^{-1} nH \sin n\theta + b_{20} t. \quad (24)$$

Здесь

$$\beta = \sigma_1 T_1 + \beta_2 (T_2),$$

$$\sigma_1 = \frac{a_1 \tau}{4} (4 \operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H + \operatorname{th} H),$$

$$b_{20} = \frac{1}{4} \tau^2 (\operatorname{cth}^2 H + 1) + a_1^2 \tau^2 (\operatorname{cth}^2 2H + 1),$$

$$b_{21} = -\frac{1}{2} a_1 (2 \operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H) + \frac{\sigma_1}{\tau},$$

$$b_{22} = a_2 + a_0,$$

$$b_{23} = a_{23} - \frac{1}{2} a_1 (2 \operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H),$$

$$b_{24} = a_{24} - a_1^2 \operatorname{cth} 2H,$$

$$a_{23} = -\frac{1}{2} a_1 \tau [3 (2 \operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H) + (2 \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - 11) \operatorname{th} 3H] \mu_3^{-1},$$

$$a_{24} = -a_1^2 \tau^2 \left[4 \operatorname{cth} 2H + (\operatorname{cth}^2 2H - 5) \operatorname{th} 4H \right] \mu_4^{-1},$$

$$a_0 = a_1 \frac{\sigma_1}{\tau} - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H,$$

$$a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 H} (1 + \operatorname{th}^2 H)^{-1},$$

μ_3 , μ_4 определяются по формуле μ_n из (19) при $n = 3$ и $n = 4$, β_2 и a_2 найдем из третьего приближения.

Выражения для ζ_1 , φ_1 из (21), (22) и ζ_2 , φ_2 из (23), (24) определяют правые части динамического (10) и кинематического (11) условий при $n = 3$. Исключив из них слагаемые, порождающие секулярность, найдем

$$a_2 = (w_2 - w_1) (\eta_3 - \eta_4 - 2\tau \operatorname{th} H)^{-1},$$

$$w_1 = \tau (q_1 \operatorname{th} H + \gamma_1),$$

$$w_2 = \frac{\tau}{2a_1} (q_2 \operatorname{th} 2H + \gamma_2),$$

$$\eta_3 = \frac{\tau}{2} (3 \operatorname{th} H - \operatorname{cth} H - 4 \operatorname{cth} 2H),$$

$$\eta_4 = \frac{2\sigma_1}{a_1}, \quad \beta_2 = \sigma_2 T_2,$$

$$\sigma_2 = a_2 \left(\tau \operatorname{th} H - \frac{1}{2} \eta_3 \right) - \frac{1}{2} w_1,$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2} b_{21} a_1 \operatorname{cth} H - (a_0 + a_1 a_{23}) \operatorname{cth} 2H - \frac{3}{2} a_1 b_{23} \operatorname{cth} 3H - \frac{33}{4} a_1^2 - \frac{9}{8},$$

$$\gamma_2 = - (b_{21} + a_{23}) \operatorname{cth} H - 2a_{24} a_1 \operatorname{cth} 2H - 3b_{23} \operatorname{cth} 3H - 4b_{24} a_1 \operatorname{cth} 4H - 9a_1^3 - 6a_1,$$

$$q_1 = \sum_1^4 q_{1n}, \quad q_2 = \sum_1^4 q_{2n},$$

$$q_{11} = a_1 \left(\frac{5}{2} \frac{\sigma_1}{\tau} - \frac{1}{2} b_{21} + 2a_{23} \right) + a_0 + \frac{\alpha_1}{\tau^2} \left(\frac{3}{8} k^2 + 3a_1^2 k^2 \right),$$

$$q_{12} = \left(\frac{\sigma_1}{\tau} b_{21} - \frac{7}{4} a_1^2 - \frac{5}{8} \right) \text{cth } H - 5a_1^2 \text{cth } 2H,$$

$$q_{13} = a_1 b_{23} \left(\frac{3}{2} - 3 \text{cth } 2H \text{cth } 3H \right) - (a_0 + a_1 b_{21}) \text{cth } H \text{cth } 2H,$$

$$q_{14} = -a_0 - a_1 \left(b_{21} + 2 \frac{\sigma_1}{\tau} + 3b_{23} + 3a_{23} \right) - 2a_1^2 (2 \text{cth } 2H - \text{cth } H),$$

$$q_{21} = \left(2a_0 \frac{\sigma_1}{\tau} - 5a_1^3 + a_1 \right) \text{cth } 2H - \frac{5}{2} a_1 \text{cth } H,$$

$$q_{22} = 4a_1 b_{24} (1 - \text{cth } 4H \text{cth } 2H) + b_{21} \left(1 - \frac{1}{2} \text{cth}^2 H \right) + \frac{3}{2} b_{23} (2 - \text{cth } H \text{cth } 3H),$$

$$q_{23} = a_1 \left[2a_{24} + \frac{\alpha_1}{\tau^2} (3k^2 + 6a_1^2 k^2) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{\tau} + a_{23} \right),$$

$$q_{24} = \frac{1}{2} \left(b_{21} + \frac{\sigma_1}{\tau} \right) - a_1 \left[\frac{1}{2} \text{cth } H - \text{cth } 2H + 4(b_{24} + a_{24}) \right] - \frac{3}{2} (b_{23} + a_{23}).$$

Тогда решение задачи для третьего приближения ($n = 3$) имеет вид

$$\zeta_3 = a_3 \cos 2\theta + \sum_{n=3}^6 a_{3n} \cos n\theta, \quad (25)$$

$$\varphi_3 = \tau \sum_{n=2}^6 b_{3n} \frac{\text{ch } n(z+H)}{n \text{sh } nH} \sin n\theta + \tau^2 b_{31} t, \quad (26)$$

где

$$a_{3n} = \tau^2 (q_n \text{th } H + \gamma_n) \mu_n^{-1}, \quad n = 3, 4, 5, 6;$$

$$b_{32} = 2a_3 + 2 \frac{\sigma_1}{\tau} (a_1 + a_2) + \gamma_2,$$

$$b_{3n} = \frac{\tau (na_{3n} + \gamma_n)}{n \text{sh } H}, \quad n = 3, 4, 5, 6;$$

$$b_{31} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_1}{\tau} (1 + 4a_1^2) - b_{21} \text{cth}^2 H \right] - 2a_1 \left[b_{22} \text{cth}^2 2H + \frac{5}{8} \text{cth } H + \frac{1}{4} \text{cth } 2H - a_2 \right] + b_{30},$$

$$b_{30} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_1}{\tau} (1 + 4a_1^2) + b_{21} \right] - a_1 \left(2a_2 + 2b_{22} - \frac{3}{4} \text{cth } H + \frac{3}{2} \text{cth } 2H \right),$$

$$q_3 = \sum_{n=1}^4 q_{3n}, \quad q_4 = \sum_{n=1}^3 q_{4n}, \quad q_5 = \sum_{n=1}^3 q_{5n},$$

$$q_6 = a_1 [4b_{24} (3 - \text{cth } 2H \text{cth } 4H) + 2a_{24}] + a_1^3 \left(\text{cth } 2H - 6 \frac{\alpha_1 k^2}{\tau^2} \right) + q_{61},$$

$$q_{61} = 4a_1 (b_{24} + a_{24}),$$

$$q_{31} = a_2 \left(\frac{7}{2} - \text{cth } H \text{cth } 2H \right) + 3 \frac{\sigma_1}{\tau} b_{23} \text{cth } 3H - \frac{3}{2} \frac{\alpha_1 k}{\tau} \left(\frac{1}{4} k + 3k a_1^2 \right),$$

$$q_{32} = a_1 \left[b_{21} \left(\frac{3}{2} - \text{cth } H \text{cth } 2H \right) + \frac{5}{2} \frac{\sigma_1}{\tau} \right] - a_1^2 \left(\frac{11}{8} \text{cth } H - \frac{1}{2} \text{cth } 2H \right),$$

$$q_{33} = a_0 (3 - \text{cth } H \text{cth } 2H) + \frac{1}{8} \text{cth } H + 2b_{24} (3 - \text{cth } 4H \text{cth } H) + \frac{1}{2} a_{24},$$

$$q_{34} = a_0 + a_1 \left(b_{21} + 2 \frac{\sigma_1}{\tau} \right) + 2a_2 - 2b_{24} - \\ - 2a_{24} - 3a_1^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} H - \operatorname{cth} 2H \right),$$

$$q_{41} = \frac{3}{2} b_{23} (4 - \operatorname{cth} 3H \operatorname{cth} H) - 3 \frac{\alpha_1 k^2}{\tau^2} a_1 + \\ + 2 \frac{\sigma_1}{\tau} (2 b_{24} \operatorname{cth} 4H + a_1^2),$$

$$q_{42} = 2a_1 \left[a_2 (3 - \operatorname{cth}^2 2H) + \frac{3}{4} \operatorname{cth} 2H + \right. \\ \left. + a_0 (2 - \operatorname{cth}^2 2H) - \frac{1}{8} \operatorname{cth} H \right] + \frac{1}{2} a_{23},$$

$$q_{43} = a_1 \left[4a_2 + 2a_0 - \frac{1}{4} \operatorname{cth} H + \frac{1}{2} \operatorname{cth} 2H \right] + \\ + \frac{3}{2} (b_{23} + a_{23}) + 2a_1^2 \frac{\sigma_1}{\tau},$$

$$q_{51} = 2b_{24} (5 - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 4H) + \frac{1}{2} a_{24} - \\ - a_1^2 \left(\frac{3}{8} \operatorname{cth} H - \frac{5}{2} \operatorname{cth} 2H + \frac{15}{2} \frac{\alpha_1 k^2}{\tau^2} \right),$$

$$q_{52} = 2a_1 \left[a_{23} + \frac{3}{4} b_{23} (5 - 2 \operatorname{cth} 3H \operatorname{cth} 2H) \right],$$

$$q_{53} = 2b_{24} + 2a_{24} + 3a_1 (b_{23} + a_{23}) + \\ + a_1^2 \left(\operatorname{cth} 2H - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \right),$$

$$\gamma_3 = -a_2 \left(\frac{3}{2} \operatorname{cth} H + 3 \operatorname{cth} 2H \right) - \\ - \frac{3}{2} (b_{21} a_1 + a_{24}) \operatorname{cth} H - 3a_0 \operatorname{cth} 2H - \\ - 6b_{24} \operatorname{cth} 4H + 3a_{23} \frac{\sigma_1}{\tau} - \frac{51}{8} a_1^2 - \frac{1}{8},$$

$$\gamma_4 = -2a_{23} \operatorname{cth} H - 4a_1 (2a_2 + a_0) \operatorname{cth} H - \\ - 6b_{23} \operatorname{cth} 3H + 4a_{24} \frac{\sigma_1}{\tau} - \frac{3}{2} a_1,$$

$$\gamma_5 = -\frac{5}{4} a_{24} \operatorname{cth} H - 5a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H - \\ - \frac{15}{2} a_1 b_{23} \operatorname{cth} 3H - 10b_{24} \operatorname{cth} 4H - \frac{21}{8} a_1^2,$$

$$\gamma_6 = -6a_{24} a_1 \operatorname{cth} 2H - 12a_1 b_{24} \operatorname{cth} 4H - a_1^3,$$

а величина a_3 может быть определена из уравнений для четвертого приближения.

Таким образом, возмущение поверхности бассейна конечной глубины при нелинейном взаимодействии периодических прогрессивных волн первой и второй гармоник до величин третьего порядка определяются выражением

$$\zeta = \varepsilon \cos \theta + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n a_n \cos 2\theta + \\ + \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n \sum_{j=3}^4 a_{nj} \cos j\theta + \varepsilon^3 \sum_{n=5}^6 a_{3n} \cos n\theta,$$

$$\theta = x + \sigma t, \quad \sigma = \tau + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2.$$

Соответствующее выражение можно записать и для потенциала скорости:

$$\varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^3 \varphi_3,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ определяются формулами (22), (24), (26).

В размерных переменных $x = x/k, t = t/\sqrt{kg}, \zeta = \zeta/k, a = \varepsilon/k$, (где a и k – амплитуда и волновое число основной линейной гармоники) выражения для возвышения поверхности бассейна и потенциала скорости примут вид

$$\zeta = a \zeta_1 + a^2 k \zeta_2 + a^3 k^2 \zeta_3, \quad (27)$$

$$\varphi = a \sqrt{g/k} \varphi_1 + a^2 \sqrt{kg} \varphi_2 + a^3 k \sqrt{kg} \varphi_3. \quad (28)$$

При этом

$$\theta = kx + \sigma t, \quad \sigma = \sqrt{kg} (\tau + ak\sigma_1 + a^2 k^2 \sigma_2),$$

$$v = \sqrt{g/k} (\tau + ak\sigma_1 + a^2 k^2 \sigma_2),$$

а $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ имеют вид (21), (23), (25).

Формулы (25)–(28) для ζ и φ определяют волновое возмущение и при отказе от учета кривизны

волнового профіля в вираженні для потенціала швидкості (8) на поверхні басейна [7]. Однак в такому випадку ($F_2^0 = F_3^0 = L_3^0 = 0$) слід врахувати, що

$$a_1 = \pm \frac{1}{2} (\operatorname{cth} H \operatorname{th} 2H)^{1/2},$$

$$a_2 = (w_2 - w_1) (\eta_3 - \eta_4)^{-1},$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{4} a_1 \tau (4 \operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H - 3 \operatorname{th} H),$$

$$b_{20} = \frac{1}{4} \tau^2 (\operatorname{cth}^2 H - 1) + a_1^2 \tau^2 (\operatorname{cth}^2 2H - 1),$$

$$a_{23} = -\frac{1}{2} a_1 \tau \left(3 (2 \operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H) + (2 \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - 7) \operatorname{th} 3H \right) \mu_3^{-1},$$

$$a_{24} = -a_1^2 \tau^2 \left(4 \operatorname{cth} 2H + (\operatorname{cth}^2 2H - 3) \operatorname{th} 4H \right) \mu_4^{-1},$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2} b_{21} a_1 \operatorname{cth} H - (a_0 + a_1 a_{23}) \operatorname{cth} 2H - \frac{3}{2} a_1 b_{23} \operatorname{cth} 3H - \frac{9}{4} a_1^2 - \frac{3}{8},$$

$$\gamma_2 = - (b_{21} + a_{23}) \operatorname{cth} H - 2 a_{24} a_1 \operatorname{cth} 2H - 3 b_{23} \operatorname{cth} 3H - 4 b_{24} a_1 \operatorname{cth} 4H - 3 (a_1^3 + a_1),$$

$$\gamma_3 = -a_2 \left(\frac{3}{2} \operatorname{cth} H + 3 \operatorname{cth} 2H \right) - \frac{3}{2} (b_{21} a_1 + a_{24}) \operatorname{cth} H - 3 a_0 \operatorname{cth} 2H - 6 b_{24} \operatorname{cth} 4H + 3 a_{23} \frac{\sigma_1}{\tau} - \frac{27}{8} a_1^2 - \frac{3}{8},$$

$$\gamma_4 = -2 a_{23} \operatorname{cth} H - 4 a_1 (2 a_2 + a_0) \operatorname{cth} H - 6 b_{23} \operatorname{cth} 3H + 4 a_{24} \frac{\sigma_1}{\tau} - 3 a_1,$$

$$\gamma_5 = -\frac{5}{4} a_{24} \operatorname{cth} H - 5 a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H - \frac{15}{2} a_1 b_{23} \operatorname{cth} 3H - 10 b_{24} \operatorname{cth} 4H - \frac{45}{8} a_1^2,$$

$$\gamma_6 = -6 a_{24} a_1 \operatorname{cth} 2H - 12 a_1 b_{24} \operatorname{cth} 4H - 3 a_1^3,$$

$$q_1 = \sum_{n=1}^3 q_{1n}, \quad q_2 = \sum_{n=1}^3 q_{2n}, \quad q_3 = \sum_{n=1}^3 q_{3n},$$

$$q_4 = \sum_{n=1}^2 q_{4n}, \quad q_5 = \sum_{n=1}^2 q_{5n},$$

$$q_{14} = q_{24} = q_{34} = q_{43} = q_{53} = q_{61} = b_{30} = 0.$$

Все інші позначення залишаються тими ж.

Побудовані розкладання (27), (28) справедливі в межах малих відхилень значень k_n , визначених рівнянням $\mu_n = 0$, $n = 3, 4, 5, 6$.

З отриманих співвідношень випливає, що характеристики формуваних порушень залежать від амплітуд взаємодіючих гармонік. При цьому вплив амплітуд на частоту σ і фазову швидкість ν проявляється як в першому, так і в другому наближенні. В випадку біжущих періодических хвиль ($a_1 = 0$) обумовлений нелінійністю фазовий зсув порушень має тільки другий порядок малості [7, 9, 10].

Величина $\sigma^* = \sigma_1 \sqrt{kg}$, що характеризує фазовий зсув в наближенні порядку ε , зменшується з збільшенням kH в силу того, що при цьому зменшується a_1 . В випадку $kH \gg 1$ вона практично рівна нулю. Якщо ж $kH \ll 1$, то

$$\sigma^* = \pm \frac{3\sqrt{2}}{8} \sqrt{\frac{g}{H} (1 + \alpha_1 k^2)} \left(1 - \frac{1}{2} k^2 H^2 \right),$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} |\sigma^*| = \frac{3\sqrt{2}}{8} \sqrt{\frac{g}{H}}.$$

Пренебрегаючи кривизною хвильового профіля в вираженні для φ на поверхні рідини, маємо $\sigma^* = \pm \frac{1}{4} \sqrt{kg (1 + \alpha_1 k^2)}$ для глибокої води ($kH \gg 1$) і

$$\sigma^* = \pm \frac{3\sqrt{2}}{8} \sqrt{\frac{g}{H} (1 + \alpha_1 k^2)} \left(1 - \frac{5}{6} k^2 H^2 \right),$$

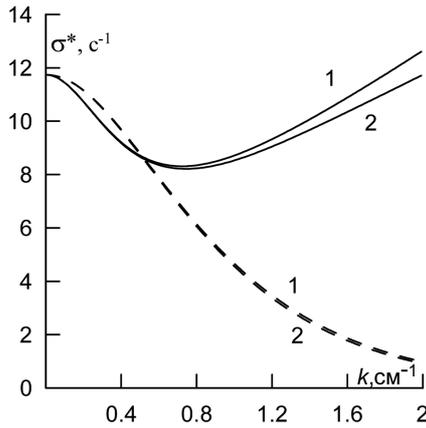


Рис. 1. Распределение частоты фазового сдвига в приближении порядка ε по волновому числу

$$\lim_{k \rightarrow 0} |\sigma^*| = \frac{3\sqrt{2}}{8} \sqrt{\frac{g}{H}}$$

в длинноволновом приближении ($kH \ll 1$). Направленность фазового сдвига, обусловленного участием второй гармоники в формировании волнового движения, определяется знаком a_1 .

Полученные формулы показывают, что с увеличением длины волны λ (уменьшением волнового числа k) влияние учета зависимости ζ_0 от x и t в (8) на фазовый сдвиг возмущений, характеризуемый величиной σ^* , убывает.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Для получения количественных оценок характеристик формируемого волнового возмущения капиллярно-гравитационного диапазона проводились численные расчеты по найденным аналитическим выражениям, определяющим структуру возвышения поверхности жидкости с учетом (вариант 1) и без учета (вариант 2) слагаемых F_2^0, F_3^0, L_3^0 в правых частях уравнений (10), (11) для нелинейных приближений.

Распределение фазового сдвига σ^* , обусловленного участием второй взаимодействующей гармоники в формировании возмущений, по волновому числу k иллюстрируют графики на рис.1. Они получены в случае $a_1 > 0$, $H = 2$ см при коэффициентах поверхностного натяжения

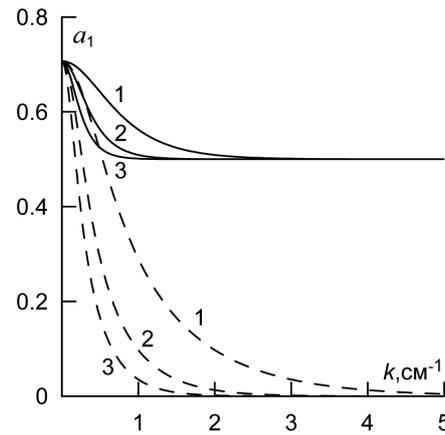


Рис. 2. Распределение амплитуды второй взаимодействующей гармоники по волновому числу

$\alpha = 74$ дин/см на границе воды с воздухом (линии 1) и $\alpha = 30$ дин/см на границе бензола с воздухом [11] (линии 2). Видно, что с увеличением α растет и σ^* . Это изменение усиливается с увеличением волнового числа. Причем для варианта 2 оно более заметно, чем для варианта 1. Распределения же σ^* по k для указанных вариантов при фиксированных α отличаются не только количественно, но и качественно.

Существенное влияние учета слагаемых F_2^0, F_3^0, L_3^0 проявляется и в поведении амплитуды a_1 второй взаимодействующей гармоники как функции волнового числа. Это показывает сопоставление графиков $a_1(k)$, приведенных на рис.2 штриховыми (вариант 1) и сплошными (вариант 2) линиями, где номера 1, 2, 3 отвечают толщинам H жидкого слоя, равным 1, 2 и 3 см. Отсюда следует, что с ростом H амплитуда a_1 убывает, достигая своего предельного значения при меньших волновых числах. Предельное значение равно нулю и 0.5 для вариантов 1 и 2 соответственно. Отметим, что $a_1(k)$ не зависит от α .

Распределения высоты вертикальных смещений поверхности жидкости вдоль направления распространения волн изображены штриховыми (вариант 1) и сплошными (вариант 2) линиями на рис. 3, 4 при $H = 1$ см, $t = 0$, $\alpha = 74$ дин/см. Эти профили получены при $a_3 = 0$ для значений амплитуды a и длины волны λ основной гармоники, равных соответственно 0.1 см, 6.98 см (рис. 3) и 0.06 см и 1.05 см (рис. 4) при $a_1 > 0$ (рис. 3,а, 4,а) и $a_1 < 0$ (рис. 3,б, 4,б). Представленные распределения ζ по x показывают, что формируемые профили вол-

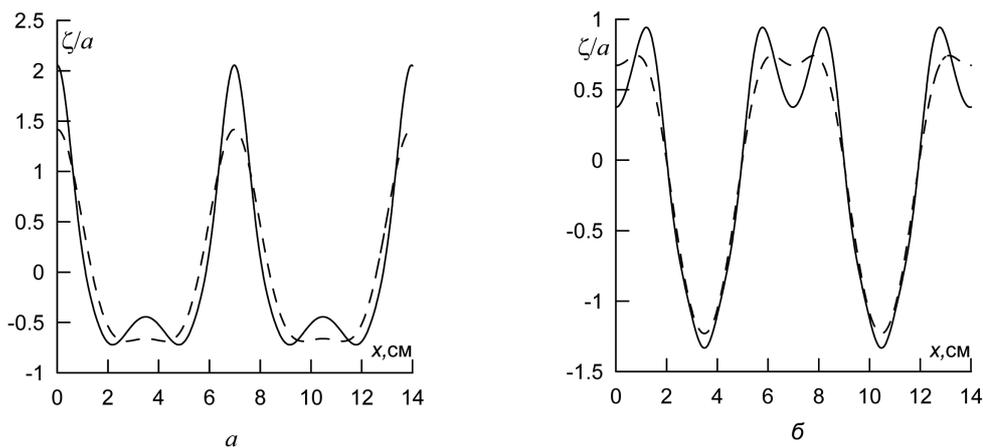


Рис. 3. Профили возвышения поверхности жидкости при $a = 0.1$ см, $\lambda = 6.98$ см

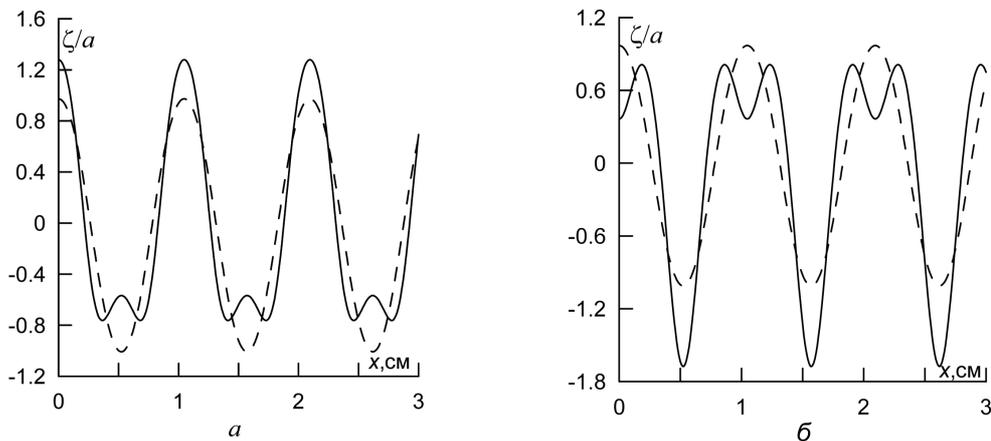


Рис. 4. Профили возвышения поверхности жидкости при $a = 0.06$ см, $\lambda = 1.08$ см

новых возмущений зависят от знака амплитуды a_1 второй взаимодействующей гармоники. При этом имеют место и заметные отличия в поведении $\zeta(x)$, обусловленные учетом слагаемых F_2^0, F_3^0, L_3^0 . Они могут проявляться и при $a_1 = 0$ [9].

Зависимость резонансных значений $k = k_n$ от толщины слоя жидкости H при $\alpha = 74$ дин/см показано на рис. 5, где номерам n , равным 2, 3, 4, 5, 6, соответствуют кривые по порядку сверху вниз. Отсюда следует, что влияние глубины H , выражающееся в увеличении k_n , проявляется только при $H < 1.5$ см. При больших H величины k_n остаются практически постоянными. Увеличение коэффициента поверхностного натяжения приводит к ро-

сту соответствующих значений k_n , которые достигают своих предельных постоянных величин при еще меньших толщинах слоя жидкости. В частности, для $\alpha = 30$ дин/см значения k_n практически не ощущают влияния глубины уже при $H > 1$ см, а их предельные величины равны 4.04, 3.29, 2.85, 2.55, 2.33 при n , равных 2, 3, 4, 5, 6 соответственно.

Напомним, что указанные точки $k = k_n$ являются сингулярными для построенных решений (20) при $n = 2, 3$ и (27), (28) при $n = 3, 4, 5, 6$. В случае $\alpha = 0$ сингулярности отсутствуют.

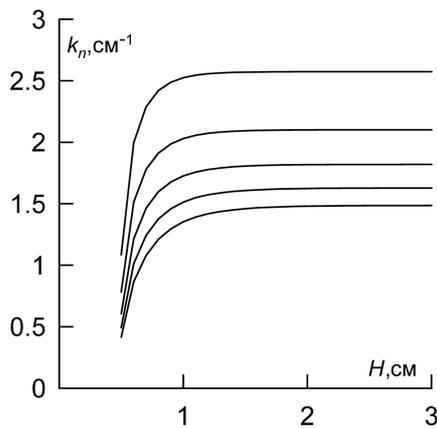


Рис. 5. Зависимость резонансных значений волнового числа от толщины слоя жидкости

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом многих масштабов на основе теории нелинейных волн с учетом капиллярности и изменений потенциала скорости на свободной поверхности за счет ее деформаций получены уравнения для определения трех приближений решения задачи о распространении произвольного начального отклонения поверхности слоя однородной идеальной несжимаемой жидкости от невозмущенного уровня. В случае периодической бегущей волны конечной амплитуды и при нелинейном взаимодействии бегущих волн первой и второй гармоник построены решения этих уравнений, определяющие возвышения свободной поверхности и потен-

циал скорости формируемых возмущений с точностью до величин третьего порядка малости. Проведен анализ амплитудно-фазовых характеристик волновых возмущений капиллярно-гравитационного диапазона. Дана оценка изменений, вносимых в структуру возмущений учетом кривизны волнового профиля в выражении потенциала скорости на поверхности жидкого слоя при выводе кинематического и динамического граничных условий для нелинейных приближений.

1. Монин А.С., Красицкий В.П. Явления на поверхности океана.– Л.: Гидрометеоздат, 1985.– 375с.
2. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений.– М.; Л.: ОНТИ, 1936.– 304 с.
3. Федосенко В.С. Неустановившиеся капиллярно-гравитационные волны // Морские гидрофизические исследования.– 1970.– № 3(49).– С. 78–91.
4. Копачевский Н.Д. Задача Коши для малых движений идеальной капиллярной вращающейся жидкости // Докл. АН СССР.– 1974.– 219, № 16.– С. 1310–1313.
5. Murray J.C. On the linear capillary-gravity waves problem // Acta mechanics.– 1975.– 23, № 3.– P. 229–238.
6. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Волны в неоднородном море.– Киев: Наукова думка, 1983.– 224 с.
7. Nayfeh A.H. Finite amplitude surface waves in a liquid layer // J. of Fluid Mechanics.– 1970.– 40, № 4.– P. 671–684.
8. Найфе Л.Х. Методы возмущений.– М.: Мир, 1976.– 455 с.
9. Букатов А.Е., Букатов А.А. Капиллярно-гравитационные волны конечной амплитуды на поверхности однородной жидкости // Морской гидрофизический журнал.– 2005.– № 5.– С. 34–46
10. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Math. Phys. Pap. Cambr. Univ. Press.– 1847.– 1.– P. 197–229.
11. Дейли Дж. Механика жидкости.– М.: Энергия, 1971.– 480 с.