

УДК 532.5;626.3

СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СВОБОДНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ ВОДОТОКОВ ПОЛУОБРАТНЫМ МЕТОДОМ

К. Н. АНАХАЕВ

Высокогорный геофизический институт, Нальчик, Россия

Получено 12.07.2007

В работе дается строгое гидромеханическое решение задачи свободной фильтрации для семейства водотоков с криволинейными профилями полуобратным методом Н. Е. Жуковского с использованием последовательных конформных отображений. Результаты подсчета для частных случаев совпадают с известными точными решениями.

В роботі наведено строгий розв'язок задачі вільної фільтрації для сімейства водотоків з криволінійними профілями напівзворотнім методом М. Г. Жуковського з використанням послідовних конформних відображень. Результати підрахунків для окремих випадків співпадають з відомими точними розв'язками.

The exact solution of the problem of free filtration for curvelinear profiles are obtained. The problem is solved by semiinverse N. E. Joukovsky method with using successive conform mappings. The results of calculations for particular cases coincide with known exact solutions.

При гидромеханическом расчете свободной фильтрации из водотоков (рис. 1) во многих случаях используют комплекс Н. Е. Жуковского [1–5]:

$$\theta = z - iW = (x - \psi) + i(y - \varphi) = \theta_1 + i\theta_2, \quad (1)$$

в котором $z = x + iy$ – комплексная область фильтрации с текущими координатами x и y (рис. 1); θ_1 и θ_2 – координаты комплекса Н. Е. Жуковского (рис. 2, а); $W = \varphi + i\psi$ – область комплексного потенциала с координатами напорной функции φ и функции тока ψ с удельным фильтрационным расходом из водотока Q (рис. 2, ж), равными $W = W_n/k$; $\varphi = \varphi_n/k$; $\psi = \psi_n/k$; $Q = Q_n/k$, причем величины с индексом “ n ” – действительные значения этих параметров, k – коэффициент фильтрации грунта основания водотока. Данный метод решения является полуобратным, зависящим от первоначально принятой основы формы профиля водотока в области комплекса Н. Е. Жуковского $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ [1, 2]. В результате определяются все необходимые параметры водотока с шириной по урезу воды B и глубиной по оси H , в том числе очертание профиля водотока, гидродинамическая сетка области фильтрации, величины фильтрационных расходов, положения депрессионных кривых, линий токов и изобар (пьезометрических высот) и др. Отличительной особенностью настоящей работы является то, что в ней основа формы профиля водотока принята в виде полуэллипса, вытянутого вдоль горизонтальной оси (рис. 2, а). Данная задача рассматривалась акад. Н. Н. Павловским с использованием специальных эллиптических функций Якоби [2, с. 430], но, к со-

жалению, не была опубликована. Здесь же приводится строгое, практически точное решение ее на основе элементарных функций. Примем уравнение полуэллипса в области комплекса Н. Е. Жуковского в виде (рис. 2, а):

$$(\theta_1/\theta_2)^2 + (\theta_2/\beta_2)^2 = 1, \quad (2)$$

где $\alpha \geq \beta = 1$ – заданные значения соответственно горизонтальной и вертикальной полуосей полуэллипса 1–А–2–Д–3–4–С, причем точки С и Д расположены на горизонтальной оси в точках $(-\text{sh}^{-1}T)$ и $(+\text{sh}^{-1}T)$, в которых параметр T находится по формуле:

$$T = \text{Arth}(1/\alpha). \quad (3)$$

При этом имеем следующее соответствие точек области фильтрации $z = x + iy$ (табл. 1), из которых выразим величину фильтрационного расхода в виде:

$$Q = B + 2H \cdot \alpha/\beta. \quad (4)$$

Этой же величине равна также и максимальная ширина растекания свободного фильтрационного потока $B_\infty = Q$.

Область $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ (рис. 2, а) конформно отображим на аналогичную эллиптическую комплексную область $t = t_1 + it_2$ с горизонтальной и вертикальной полуосями, соответственно равными $R = \text{ch} T$ и $\text{sh} T$ (рис. 2, б) с помощью функции

$$t = \text{sh} T \cdot \theta. \quad (5)$$

В свою очередь, область $t = t_1 + it_2$ строго отображается на прямоугольник 1–2–Д–С шириной π

Табл 1.

Точки	x	y	ψ	φ	θ_1	θ_2
1	$B/2$	0	$-Q/2$	0	$-\frac{Q-B}{2} = -\alpha$	0
A	0	$H=1$	0	0	0	$H=\beta=1$
2	$-B/2$	0	$Q/2$	0	$\frac{Q-B}{2} = \alpha$	0
D	—	—	$Q/2$	—	$\text{sh}^{-1}T$	0
3	$-Q/2$	∞	$Q/2$	∞	0	0
4	$Q/2$	∞	$-Q/2$	∞	0	0
C	—	—	$-Q/2$	—	$\text{sh}^{-1}T$	0

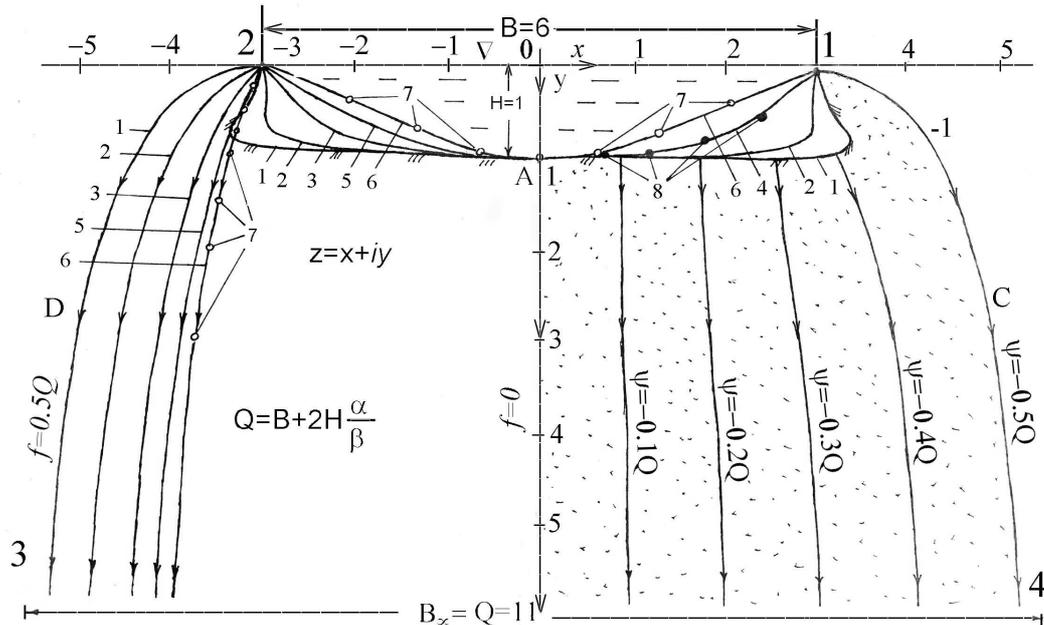


Рис. 1. Свободная фильтрация из водотоков различных криволинейных профилей при $B/H=6$:
 1-6 – профили водотоков и соответствующие им депрессионные кривые (левая половина)
 для значений $\alpha/\beta = 2.5; 2.0; 1.5; 1.35; 1.2$ и 1 ;
 7 – результаты точного решения акад. Павловского Н.Н. [2] для $\alpha/\beta = 1$;
 8 – координаты натурального профиля русел каналов в супесчаных и суглинистых грунтах [9];
 9 – линии токов при $\Delta\psi = 0.1Q$ для $\alpha/\beta = 2.5$ (правая половина)

и высотой $T \leq \pi$ комплексной области $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ (рис. 2, в) функцией [6]

$$\varepsilon = \text{arcsint}. \quad (6)$$

Полученный "уширенный"прямоугольник конформно отобразим на область $S = S_1 + iS_2$ (рис. 2, з) функцией

$$S = \frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{T} \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right), \quad (7)$$

что дает прямоугольник шириной π , вытянутый

по вертикали на высоту π^2/T . Область же $S = S_1 + iS_2$ практически точно (с погрешностью $\ll 0.5-0.6\%$) [7] отображается на нижнюю полу-плоскость $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ (рис. 2, д) функцией

$$\zeta_1 = \frac{r}{2 \sin S} (1 + r^{-2} \cdot \sin^2 S), \quad (8)$$

в которой $r = \text{ch}(\pi^2/T)$, а точки C и 1 соответственно принимают значения $(1/\lambda)$ и $(-1/\lambda)$, где

$$\lambda = 2r/(1 + r^2). \quad (9)$$

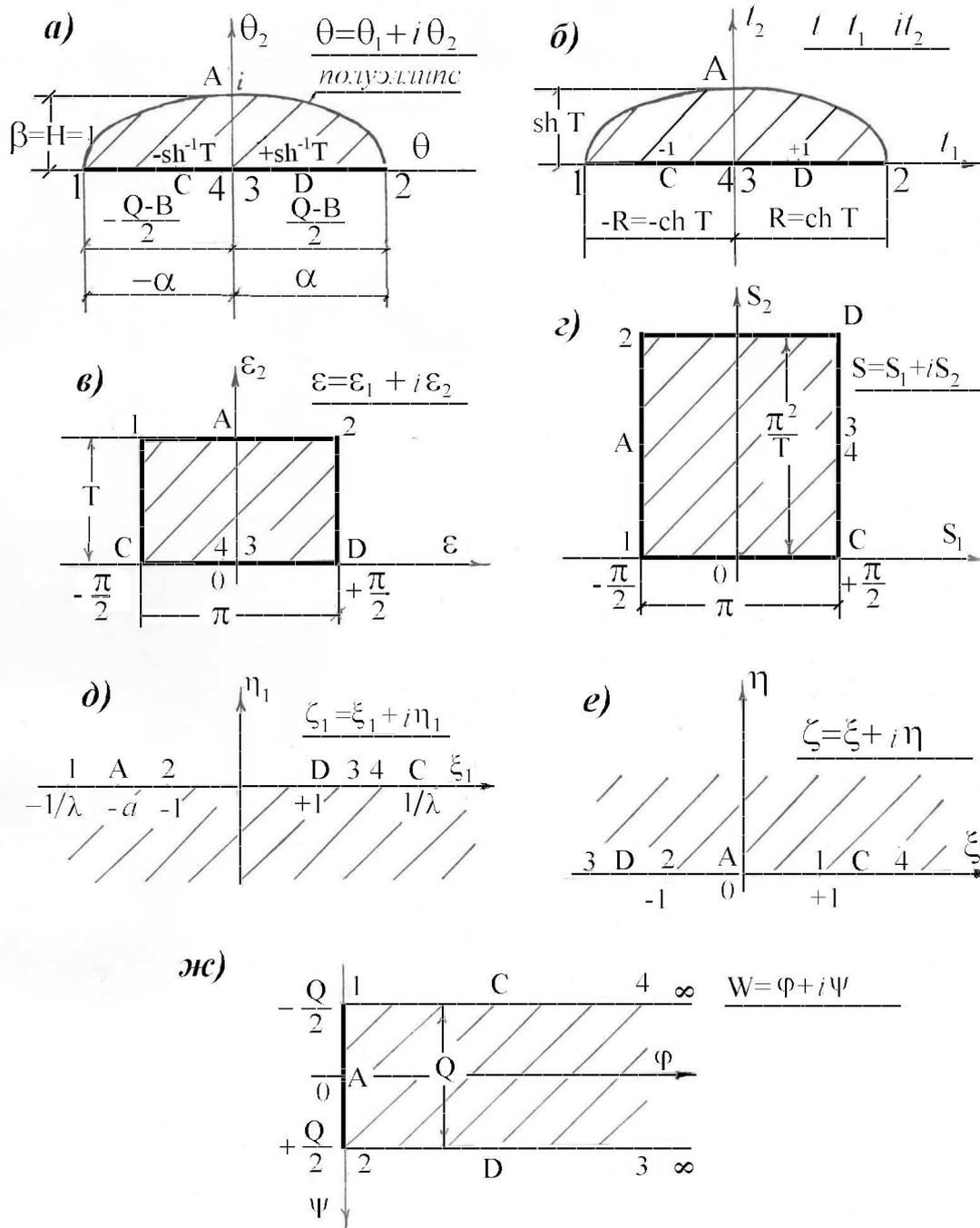


Рис. 2. Схема последовательных конформных отображений области комплексного потенциала Н. Е. Жуковского (полуэллипса) на область комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ (полуполосы)

Точка a получает значение $\zeta_{1(A)} = -a$, где a находится по формуле

$$a = \frac{r}{\sqrt{2(r+1)}} + \frac{\sqrt{2(r+1)}}{r}. \quad (10)$$

Таким образом, полученная элементарная функция

$$\zeta_1 = \frac{r}{2 \sin \left[\frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{T} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsint} \right) \right]} \times \left\{ 1 + r^2 \cdot \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{T} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsint} \right) \right] \right\} \quad (11)$$

практически точно отображает внутренность полуэллипса $t = t_1 + it_2$ (рис. 2, б) на нижнюю полуплоскость $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ (рис. 2, д), что до сих пор могло выполняться только лишь с помощью специальных эллиптических функций Якоби [8, с. 170].

Далее, используя дробно-линейное преобразование

$$\zeta = -\frac{(\zeta_1 + a)(1 - \lambda)}{\zeta_1 \cdot m + n}, \quad (12)$$

где

$$m = 2a\lambda - (1 + \lambda); \quad n = a(1 + \lambda) - 2, \quad (13)$$

конформно отобразим область $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ (рис. 2, д) на верхнюю полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2, е). На последнюю отобразим также область комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$, имеющий вид горизонтальной полуполосы (рис. 2, ж), функцией [3–5]:

$$W = -i \frac{Q}{\pi} \operatorname{arcsin} \zeta. \quad (14)$$

Подставляя в выражение (14) значения $\zeta_1, \zeta_2, S, \varepsilon, t$ из соотношений (5)–(12), найдем взаимосвязь областей $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ (рис. 2, а) и $W = \varphi + i\psi$ (рис. 2, ж) в виде:

$$W = \varphi + i\psi = -i \frac{Q}{\pi} \operatorname{arcsin} \left[-\frac{(\zeta_1 + a)(1 - \lambda)}{\zeta_1 \cdot m + n} \right], \quad (15)$$

где

$$\zeta_1 = \frac{1 + r^{-2} \cdot \sin^2 \gamma}{2 \cdot r^{-1} \sin \gamma}; \quad (16)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{T} \left\{ \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsin} \left[\operatorname{sh} T \cdot (\theta_1 + i\theta_2) \right] \right\}.$$

Отделяя в соотношениях (15) и (16) вещественную и мнимую части, окончательно получим:

$$\varphi = \frac{Q}{\pi} \operatorname{Arch} \frac{M}{2}; \quad \psi = -\frac{Q}{\pi} \operatorname{arcsin} \frac{2\xi}{M}, \quad (17)$$

в которых для случая $\eta = 0$ имеем:

$$\text{при } |\xi| \leq 1 \quad M = 2; \quad \varphi = 0; \quad \psi = -Q/\pi \cdot \operatorname{arcsin} \xi;$$

$$\text{при } |\xi| > 1 \quad M = 2 \cdot |\xi|; \quad \varphi = Q/\pi \cdot \operatorname{Arch} |\xi|; \quad \psi = \pm Q/2;$$

(верхний знак для участка 1–4, нижний – для 2–3).
Здесь

$$M = \sqrt{(1 + \xi)^2 + \eta^2} + \sqrt{(1 - \xi)^2 + \eta^2}, \quad (18)$$

В выражениях (17) и (18) значения ξ и η будут

$$\xi = -(1 - \lambda) \frac{(\xi_1 + a)(\xi_1 \cdot m + n) + \eta_1^2 m}{(\xi_1 m + n)^2 + (\eta_1 m)^2};$$

$$\eta = -\frac{\eta_1(1 - \lambda)(n - ma)}{(\xi_1 m + n)^2 + (\eta_1 m)^2}, \quad (19)$$

где

$$\xi_1 = \frac{\delta_1}{2} \left(\frac{r}{\delta_1^2 + \delta_2^2} + \frac{1}{r} \right);$$

$$\eta_1 = \frac{\delta_2}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{\delta_1^2 + \delta_2^2} \right);$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \sin S_1 \cdot \operatorname{ch} S_2; \quad \delta_2 = \cos S_1 \cdot \operatorname{sh} S_2; \\ S_1 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{T} \varepsilon; \quad S_2 = \frac{\pi}{T} \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right); \\ \varepsilon_1 &= \operatorname{arcsin} \frac{2t_1}{N}; \quad \varepsilon_2 = \operatorname{Arch} \frac{N}{2}; \\ N &= \sqrt{(1 + t_1)^2 + t_2^2} + \sqrt{(1 - t_1)^2 + t_2^2}; \\ t_1 &= \operatorname{sh} T \cdot \theta_1; \quad t_2 = \operatorname{sh} T \cdot \theta_2; \\ \theta_1 &= \pm \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\theta_2}{\beta} \right)^2}; \\ \theta_2 &= \beta \sqrt{1 - \left(\frac{\theta_1}{\alpha} \right)^2}; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(верхний знак – для $x > 0$, нижний – для $x < 0$)
Значения λ, a, m и n находятся из соотношений (9), (10) и (13) соответственно.

В формулах (20) для случая $t_2 = 0$ имеем:

$$\text{при } |t_1| \leq 1 \quad N = 2; \quad \varepsilon_1 = \operatorname{arcsin} t_1; \quad \varepsilon_2 = 0;$$

$$\text{при } |t_1| > 1 \quad N = 2 \cdot |t_1|; \quad \varepsilon_1 = \pm \pi/2; \quad \varepsilon_2 = \operatorname{Arch} |t_1|;$$

(верхний знак для участка 1–С, нижний – для 2–Д).

Полученные расчетные зависимости (17)–(20) дают полное гидромеханическое решение задачи свободной фильтрации для целого семейства различных профилей водотоков (с эллиптической основой форм) с возможностью определения для них всех необходимых параметров фильтрационного потока. Так, на рис. 1 для отношения В/Н=6 (в усл. ед.) построены очертания профилей водотоков при заданных значениях $\alpha/\beta = 2.5; 2.0; 1.5; 1.35; 1.2$ и 1 (кривые 1–6), а также депрессионные

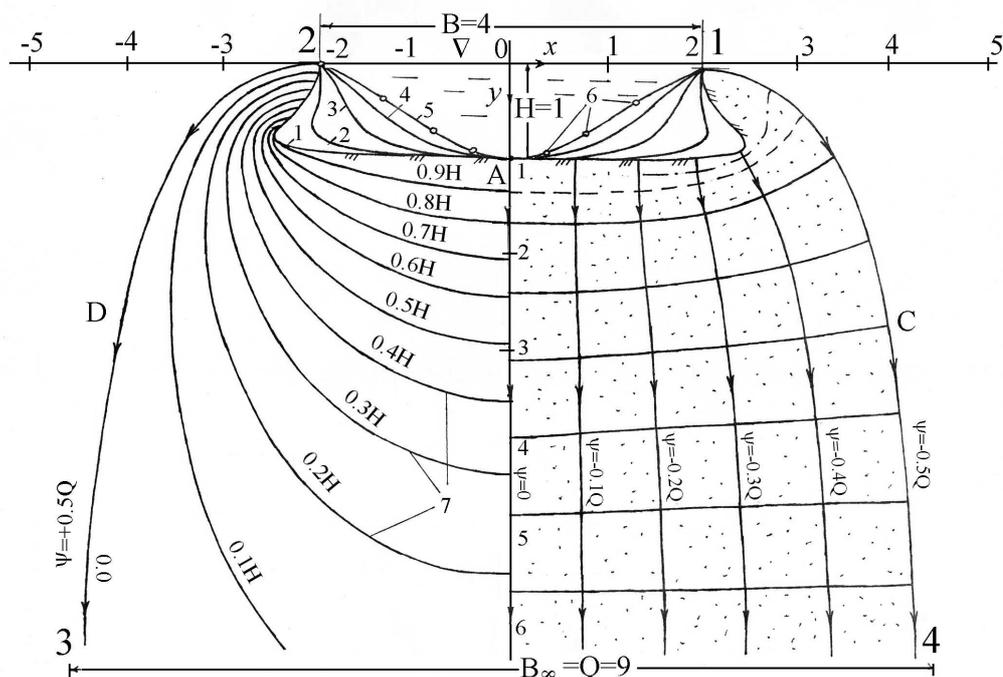


Рис. 3. Картина свободного фильтрационного потока из водотока при $V/H=4$:

1–5 – профили водотоков при значениях $\alpha/\beta = 2.5; 2.0; 1.5; 1.2$ и 1 ;

6 – результаты точного решения акад. Н. Н. Павловского [2] для $\alpha/\beta = 1$;

7 – семейство изобар – линий равных давлений (пьезометрических высот) для $\alpha/\beta = 2.5$ (левая половина);

8 – гидродинамическая (квадратичная) сетка фильтрации с интервалом $0.1Q$ для $\alpha/\beta = 2.5$ (правая половина)

кривые (левая половина) и линии токов для значений лент расходов $\Delta\psi = 0.1Q$ (правая половина). Следует отметить, что при $\alpha/\beta \rightarrow 1$ (кривые 6) очертания профиля водотока и депрессионной кривой, а также выражение для определения фильтрационного расхода (4) соответствуют частному случаю круговой основы формы профиля водотока и совпадают с результатами точных решений проф. В. В. Ведерникова [1] и акад. Павловского (точки 7) [2, с. 446, таб. 23 и с. 451, таб. 4].

В случае же $\alpha/\beta = 1.35$ расчетный профиль водотока (кривая 4) достаточно близко совпадает с координатами (точки 8) натурального профиля русла канала, полученными на основе обработки большого количества фактических данных для супесчаных и суглинистых грунтов [9, с. 235, таб. 5.10].

На рис. 3 представлены различные очертания профилей водотока для отношения $V/H=4$, полученные для значений $\alpha/\beta = 2.5; 2.0; 1.5; 1.2$ и 1 (кривые 1–5). Для частного случая $\alpha/\beta \rightarrow 1$ подсчитанный профиль водотока полностью совпадает с результатами точного решения (точки 6) [2, с. 446, таб. 2]. Показано также положение семейства

изобар – линий равных давлений (пьезометрических высот), построенных для случая $\alpha/\beta = 2.5$ с градацией $0.1H$ (кривые 7 – левая половина), а также гидродинамическая (квадратичная) сетка фильтрации с интервалом $0.1Q$ (правая половина). Как видно из изложенного, форма очертания профиля водотока (при одном и том же значении V/H) оказывает существенное влияние на параметры фильтрационного потока из него. В частности, для случаев $\alpha/\beta = 1$ и 2.5 (при $V/H=4$) величины фильтрационных расходов Q (и максимальной ширины растекания потока V) возрастают на 50% (с 6.0 до 9.0).

З а к л ю ч е н и е.

В статье получено строгое гидромеханическое решение задачи свободной фильтрации для семейства различных очертаний профилей водотока эллиптической основы формы. При этом использован полуобратный метод, основанный на последовательных конформных отображениях области комплекса Н. Е. Жуковского на область комплексного потенциала. Приведены расчетные зависимости для определения всех необходимых пара-

метров свободной фильтрации из водотоков различных очертаний. Для частного случая водотока с круговой основой формы профиля ($\alpha/\beta \rightarrow 1$) полученное решение совпадает с результатами известных точных решений [1, 2]. Кроме этого, в статье впервые дается практически точное конформное отображение внутренности "уширенного" полуэллипса на полуплоскость комбинацией элементарных функций (вместо специальных эллиптических функций Якоби), что открывает новые возможности в развитии фундаментальных методов расчета потенциальных потоков.

1. Водерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа.– М.-Л.: Госстройиздат, 1939.– 248 с.
2. Павловский Н. Н. Собрание сочинений. Т. II Движение грунтовых вод.– М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956.– 771 с.
3. Анахаев К. Н. Гидромеханический расчет свободной фильтрации из водотоков криволинейного профиля со смещенным тальвегом // ДАН.– 2004.– Т. 395, № 6.– С. 761-766.
4. Анахаев К. Н. Свободная фильтрация из водотоков // Известия АН СССР, Механика жидкости и газа.– 2004.– № 5.– С. 94-99.
5. Анахаев К. Н. Свободная фильтрация из водотоков ломано-криволинейного профиля // ДАН.– 2005.– Т. 400, № 1.– С. 41-45.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М.: Наука, 1984.– 831 с.
7. Анахаев К. Н. О расчете потенциальных потоков // ДАН.– 2005.– Т. 401, № 3.– С. 337-341.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1973.– 736 с.
9. Косиченко Ю. М. Каналы переброски стока России.– Новочеркасск: НГМА, 2004.– 470 с.