

УДК 532.465

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ОБОБЩЕННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Ю. В. КАНАРСКАЯ

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев

Получено 21.12.2002

Негидростатическая модель стратифицированных течений со свободной поверхностью численно реализована для случая обобщенных координат, что позволяет точно и эффективно моделировать процессы в областях сложной конфигурации. Исходные уравнения интегрируются с использованием техники расщепления на внутреннюю и внешнюю моды, а также разложения полей скорости и давления на гидростатическую и негидростатическую компоненты и их последовательного вычисления. Модель применяется для исследования водообмена в проливах.

Негидростатична модель стратифікованих течій з вільною поверхнею чисельно реалізована у випадку узагальнених координат, що дозволяє точно та ефективно моделювати процеси в областях складної конфігурації. Вихідні рівняння інтегруються з використанням техніки розщеплення на внутрішню та зовнішню моди, а також розкладу полів швидкості та тиску на гідростатичну та негідростатичну компоненти та їх послідовне обчислення. Модель застосовується для дослідження водообміну в протоках.

A non-hydrostatic model of free-surface flows is numerically realized with generalized topography-following co-ordinate system, which allows effectively and accurately resolve the complex geometry areas. The primitive equations are integrated with using time-splitting technique on internal and external modes and decomposition of velocity and pressure fields on hydrostatic and non-hydrostatic components and subsequent calculation of ones. Model is applied to simulation of exchange flows over sill in sea straits.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для моделирования гидротермодинамики морей и внутренних водоемов широкое распространение получили модели, основанные на решении уравнений Навье–Стокса в гидростатическом приближении [1,2]. Однако существует широкий спектр задач, в которых важны негидростатические эффекты. В последние годы разработан ряд численных негидростатических моделей [3–5]. Так, в работе [5] используется техника расщепления решения на баротропную и бароклинную моды, а также расщепления поля скорости и давления на негидростатическую и гидростатическую компоненты и их последовательного расчета [3]. Такой подход имеет существенное преимущество по сравнению с решением уравнения Пуассона для полного давления.

При моделировании течений в областях сложной геометрии актуальной является проблема аккуратного описания области. При использовании прямоугольной системы координат необходимо выделять интересующую нас область из множества ячеек сетки прямоугольной конфигурации. Это нерационально, особенно если границы области имеют резкие изгибы, например, в случае моделирования течений в проливах и реках. Избежать таких сложностей позволяет криволиней-

ная ортогональная система координат, для которой координатные линии согласованы с формой области, что дает возможность более точно описывать моделируемую область. Негидростатическая модель, в которой применяется трехмерная ортогональная криволинейная система координат, разработана в работе [4]. Однако в данной модели используется приближение "твердой крышки", что не позволяет описывать поверхностные волны, а уравнение Пуассона решается для полного давления.

Известные трудности при решении геофизических задач заключаются также в аккуратном описании поверхности и рельефа дна и хорошем разрешении поверхностных и придонных пограничных слоев. В работе [2] показано, что применение обобщенной вертикальной s -системы координат является эффективным решением проблемы, так как в каждый момент времени ее координатные плоскости совпадают с поверхностью дна и свободной поверхностью. Эта координатная система позволяет строить сгущенную сетку в областях пограничных слоев.

В данной работе представлена математическая модель негидростатических течений стратифицированных течений со свободной поверхностью. В модели используется криволинейная ортогональная горизонтальная система координат и обобщенная вертикальная s -координата в вертикаль-

ном направлении, в отличие от предыдущей работы [5], в которой использовались декартовы горизонтальные координаты и σ -координата в вертикальном направлении.

Разработанная негидростатическая модель применяется для исследования задачи о двухслойном водообмене в проливах. Такие течения в основном моделировались в рамках гидравлической теории, в которой, как правило, предполагается гидростатическое распределение давления. Однако в работе [6] показана важность негидростатических эффектов для таких течений. В эксперименте [7,8] установлено, что такие течения характеризуются появлением коротковолновой неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и Холмбо в слое раздела. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными [9] по водообмену в узком длинном проливе. Для широкого пролива исследуются эффекты коротковолновой неустойчивости и перемешивания между слоями.

1. МОДЕЛЬ

Исходные уравнения задачи, полученные из уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска с учетом осреднения по Рейнольдсу, имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial t} = G\mathbf{V}_h - \frac{1}{\rho_0} \nabla_h p + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_m \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = G_w - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - b + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_m \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (2)$$

Уравнение неразрывности можно представить в виде:

$$(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0, \quad (3)$$

где оператор G для некоторой функции f задается как

$$G_f = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{f} + \mathbf{a}_m \nabla_h^2 \mathbf{f}; \quad (4)$$

здесь \mathbf{V} – вектор скорости; \mathbf{V}_h – вектор скорости в горизонтальной x, y плоскости; w – составляющая скорости в вертикальном z -направлении; p – давление; $b = \frac{g}{\rho_0}(\rho - \rho_0)$ – плавучесть; ρ – плотность; ρ_0 – плотность невозмущенной среды; a_m и k_m – коэффициенты горизонтальной и вертикальной вязкости соответственно; g – ускорение силы тяжести. Для простоты записи в уравнениях (1), (2) не приводятся слагаемые Кориолиса. Исходные уравнения с учетом сил Кориолиса в ”традиционном приближении” приведены в работе [5] для

случая декартовой системы координат. Поскольку при преобразовании координат эти слагаемые не меняются, то последующее изложение алгоритма может быть легко обобщено включением этих слагаемых таким же способом, как и в работе [5]. Такая форма записи уравнений, в которой выделено вертикальное направление и слагаемые вертикальной диффузии, выбрана для удобства последующего изложения численного алгоритма.

Плотность ρ определяется из уравнения состояния $\rho = \rho(T, S, p)$ в форме, представленной в [10]. Здесь T и S – температура и соленость соответственно. Уравнение переноса для некоторой скалярной функции ϕ_i ($\phi_1 = T, \phi_2 = S$) имеет вид

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = G(\phi_i) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_h \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) + SS_i, \quad (5)$$

где

$$G(\phi_i) = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \phi_i + \mathbf{a}_h \nabla_h^2 \phi_i, \quad (6)$$

a_h и k_h – коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии соответственно; для простоты коэффициенты горизонтального перемешивания a_h и a_m полагаются постоянными; SS_i – внутренние источники и стоки скаляра ϕ_i . Для определения коэффициентов вертикального перемешивания k_h и k_m применяется $k-l$ модель турбулентности [11].

Полное давление p является суммой гидростатической p_h , поверхностной p_s и негидростатической q составляющих:

$$\frac{p}{\rho_0} = p_s + p_h + q. \quad (7)$$

Поверхностное давление определяется следующим образом:

$$p_s = p_a + g\eta(x, y, t), \quad (8)$$

где $\eta(x, y, t)$ – отклонение свободной поверхности от положения покоя; p_a – атмосферное давление. Гидростатическая составляющая давления находится интегрированием по вертикали уравнения (2), в котором опущены конвективные и вязкие слагаемые:

$$p_h(x, y, z, t) = g \int_z^\eta b d\xi. \quad (9)$$

При гидростатической постановке задачи $q = 0$, горизонтальные скорости находятся из уравнения (1), при этом вертикальная скорость находится из уравнения неразрывности. Гидростатическое приближение является ”приближением мелкой воды”. При негидростатической постановке задачи

решается полная система уравнений (1)–(3), (5) с учетом разложения (7), что позволяет описывать весь спектр волн для несжимающей жидкости.

Преобразуем исходные уравнения к горизонтальным ортогональным криволинейным координатам (ξ_1, ξ_2) и к обобщенной вертикальной координате. Обобщенная вертикальная координата [2] $s = s(\xi_1, \xi_2, z, \tau)$ выбирается таким образом, чтобы в каждый момент времени ее координатные плоскости совпадали со свободной поверхностью и поверхностью дна, т. е. $s(\eta) = 0, s(-H) = -1$. В отличие от σ -системы [1], которая является частным случаем s -системы, последняя позволяет эффективно разрешать придонные и приповерхностные слои.

Выполним переход от декартовых координат (x, y, z, t) к новым криволинейным координатам (ξ_1, ξ_2, s, τ) , где $z = z(\xi_1, \xi_2, s, \tau)$, $x = x(\xi_1, \xi_2)$, $y = y(\xi_1, \xi_2)$, представляя инвариантные операторы в уравнениях (1) и (2) в горизонтальных ортогональных координатах. Формулы перехода от z -системы к s -системе координат имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \frac{A}{J} \frac{\partial f}{\partial s} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \frac{B}{J} \frac{\partial f}{\partial s} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{J} \frac{\partial f}{\partial s}, \quad (11)$$

где

$$J = \partial z / \partial s, A = -(\partial z / \partial \xi_1)_s, B = -(\partial z / \partial \xi_2)_s,$$

$$C = -(\partial z / \partial t)_s, h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_i} \right)^2}, i = 1, 2.$$

В новой системе координат уравнения движения с учетом разложения для давления (7) записываются следующим образом:

$$\Delta \frac{\partial \mathbf{V}_h J}{\partial \tau} = G_{\mathbf{V}_h} - \Delta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k_m}{J} \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial s} \right) - \Delta (gJ \nabla_h \eta + \mathbf{B}_h + J \nabla_h^s \mathbf{q}), \quad (12)$$

$$\Delta \frac{\partial w J}{\partial \tau} = G_w + \Delta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k_m}{J} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \Delta \frac{\partial q}{\partial s}, \quad (13)$$

$$\Delta \frac{\partial \phi_i J}{\partial \tau} = G_{\phi_i} + \Delta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k_m}{J} \frac{\partial \phi_i}{\partial s} \right) + J S S_i. \quad (14)$$

Уравнение неразрывности (2) в новой системе координат будет иметь вид

$$\frac{\partial u h_2 J}{\partial \xi_1} + \frac{\partial v h_1 J}{\partial \xi_2} + \Delta \frac{\partial w}{\partial s} + h_2 \frac{\partial A u}{\partial s} + h_1 \frac{\partial B v}{\partial s} = 0, \quad (15)$$

где $\Delta = h_1 h_2$,

$$G_f = - \left(\frac{\partial u h_2 J f}{\partial \xi_1} + \frac{\partial v h_1 J f}{\partial \xi_2} + \Delta \frac{\partial \omega f}{\partial s} \right) + a_m \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{J h_2}{h_1} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{J h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right),$$

$$\nabla_h = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right),$$

$$\nabla_h^s = \left(\frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{A}}{J} \frac{\partial}{\partial s} \right), \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{B}}{J} \frac{\partial}{\partial s} \right) \right),$$

$$\mathbf{B}_h = (\mathbf{B}_{\xi_1}, \mathbf{B}_{\xi_2}), \mathbf{B}_{\xi_i} = -J \int_s^0 \frac{J}{h_i} \left[\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial s}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s'} \right] ds'.$$

Следует отметить, что данная форма записи уравнений – консервативная. В уравнениях (12), (13) скорости $u(\xi_1, \xi_2, s, \tau)$, $v(\xi_1, \xi_2, s, \tau)$ являются проекциями вектора скорости \mathbf{V}_h в направлениях ξ_1, ξ_2 соответственно.

Кинематическое граничное условие на поверхности ($s = 0$) и на дне ($s = -1$):

$$W = \frac{u}{h_1} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad s = 0, \quad (16)$$

$$W = -\frac{u}{h_1} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{v}{h_2} \frac{\partial H}{\partial y}, \quad s = -1. \quad (17)$$

Введем преобразованную вертикальную скорость

$$\omega = w - u \frac{A}{h_1} - v \frac{B}{h_2} - C, \quad (18)$$

так что $\omega = 0$ при $s = 0, s = -1$.

Граничные условия для уравнений (12) – (14) при $s \rightarrow 0$ ставятся следующим образом:

$$\frac{k_m}{J} \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial s} = \tau_0, \quad (19)$$

$$\frac{k_h}{J} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial s} \right) = H_i, \quad (20)$$

где τ_0 – вектор касательных напряжений ветра; H_i – поток скаляра ϕ_i через поверхность. На дне $s \rightarrow -1$ задаются соответствующие граничные условия:

$$\frac{k_m}{J} \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial s} = \tau_b, \quad (21)$$

где $\tau_b = \mathbf{C}_D |\mathbf{V}_h| \mathbf{V}_h$, – вектор напряжений на дне,

$$C_D = \max \left(2.5e - 3; \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z_b + z_0}{z_0} \right) \right)^{-2} \right);$$

z_b – пограничний слой постійного напруження; z_0 – масштаб шероховатости; κ – постійна Кармана. На дне відсутні потоки соли і тепла. Нормальні і тангенціальні швидкості, а також скалярні потоки рівні нулю на твердих границях. На відкритих границях використовуються умови излучения [12].

Уравнения динаміки (12)–(14) описують як внутрішні, так і поверхні гравітаційні хвилі. Фазові швидкості поверхні гравітаційних хвиль в натурних умовах во багато раз перевищують швидкості внутрішніх хвиль і визначають обмеження на вибір часового кроку при численному розв'язанні задачі. Для ефективності розрахунків цілесообразно використовувати метод розщеплення [1] для проінтегрованих по глибині рівнянь руху (зовнішня мода) і рівнянь, що враховують тривимірну структуру (внутрішня мода).

Проінтегровані по глибині від $s = 0$ до $s = -1$ рівняння руху (12) з урахуванням граничних умов (21) і рівняння неперервності (15) з урахуванням кінематических граничних умов для вертикальної швидкості (16), (17) мають вигляд

$$\Delta \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{h}}}{\partial \tau} = \bar{G}_{\mathbf{V}_{\mathbf{h}}} - \Delta (gJ \nabla_{\mathbf{h}} \eta + \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{h}} + \tau_{\mathbf{b}} - \tau_{\mathbf{0}}), \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{u} h_2 J}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \bar{v} h_1 J}{\partial \xi_2} + \Delta \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 0, \quad (23)$$

де

$$\bar{G}_f = - \left(\frac{\partial u h_2 J f}{\partial \xi_1} + \frac{\partial v h_1 J f}{\partial \xi_2} \right) + a_m \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{J h_2}{h_1} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{J h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right);$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{h}} = \int_{-1}^0 \mathbf{B}_{\mathbf{h}} \, ds, \quad \bar{\mathbf{V}} = \int_{-1}^0 \mathbf{V} \, ds.$$

Слід відзначити, що в дифузійних складових рівнянь (12) – (14) і (22) не враховуються громоздкі члени, що виникають при переході до обобщенної системи координат. В роботі [13] показано, що ці складові не є суттєвими.

2. ЧИСЛЕННИЙ АЛГОРИТМ

Система рівнянь, записана в консервативному вигляді (12)–(15) з відповідними граничними умовами, розв'язується методом кінцевих різниць. Як і в роботі [5], в основі алгоритма

лежить розщеплення полів швидкості і тиску на гідростатическу і негідростатическу компоненти і їх послідовний розрахунок. Відмінність від [5] розв'язання задачі розділено на чотири етапи: (1) – розрахунок скалярів; (2) – розрахунок рівня і проінтегрованих по глибині полів швидкості; (3) – розрахунок гідростатических складових швидкості і тиску; (4) – розрахунок негідростатических складових швидкості і тиску. Реалізація обчислювального алгоритму на часовому проміжку $[n-1, n+1]$ з кроками по часу для зовнішньої і внутрішньої моди Δt_e і Δt_i відповідно представлено нижче.

1 етап. Розрахунок скалярів

Поля скалярів (температура, солоність, параметри турбулентності) обчислюються з використанням напівявної схеми. Адвективні складові апроксимуються схемами високого порядку [14] з використанням негідростатического поля швидкостей із попереднього кроку n . Складові вертикальної дифузії обчислюються по неявній схемі. Отримана лінійна тривіагональна система рівнянь розв'язується методом прогонки. Полудискретна форма рівняння (14) має вигляд

$$\Delta \frac{(\phi_i J)^{n+1} - (\phi_i J)^{n-1}}{2\Delta t_i} = G(\phi_i^n) + \Delta \frac{\partial}{\partial s} \left(k_h \frac{\partial \phi_i^{n+1}}{\partial s} \right) + \Delta J S S_i^n. \quad (24)$$

Плотність ρ^{n+1} визначається із рівняння стану з використанням значень T^{n+1} і S^{n+1} .

2 етап. Розрахунок рівня

На другому етапі по явній схемі розв'язуються рівняння зовнішньої моди (22), (23) на інтервалі $[n, n+1]$ з часовим кроком Δt_e :

$$\Delta \frac{\eta^{m+1} - \eta^{m-1}}{2\Delta t_e} + \frac{\partial h_2 (\bar{u} J)^m}{\partial \xi_1} + \frac{\partial h_1 (\bar{v} J)^m}{\partial \xi_2} = 0, \quad (25)$$

$$\Delta \frac{(\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{h}} \mathbf{J})^{m+1} - (\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{h}} \mathbf{J})^{m-1}}{2\Delta t_e} = -\Delta g J^m \nabla_{\mathbf{h}} \eta^m + \bar{G}_{\mathbf{V}_{\mathbf{h}}}^m + \Delta (\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{h}}^m + \tau_{\mathbf{b}}^m - \tau_{\mathbf{0}}^m), \quad (26)$$

де індекс m відповідає номеру часового кроку зовнішньої моди. При цьому в момент часу n швидкість зовнішньої моди розраховується з використанням значення повної негідростатическої швидкості, обчисленої на n кроку: $\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{h}}^n = \int_{-1}^0 \mathbf{V}_{\mathbf{h}}^n \, ds$. Отримані в результаті розв'язання двовимірної задачі $\Delta t_i / \Delta t_e$ поля рівня усереднюються на інтервалі часу $(n-1, n)$ і $(n, n+1)$.

Осредненное значение уровня $\tilde{\eta}$ используется при расчете трехмерного поля на следующем этапе. Таким образом осуществляется связь между вычислениями во внешнем и внутреннем цикле для внутренней и для внешней моды соответственно.

3 этап. Расчет гидростатического поля скоростей и давления

На этом этапе рассчитываются промежуточные значения скорости $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ из уравнений (12), (13) при $q = 0$. Используется неявное вычисление слагаемых вертикальной диффузии. Полученная линейная трехдиагональная система уравнений эффективно решается методом прогонки. Уравнения движения в полудискретной форме с шагом по времени Δt_i имеет вид:

$$\Delta \frac{(\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{h}} \mathbf{J})^{n+1} - (\mathbf{V}_{\mathbf{h}} \mathbf{J})^{n-1}}{2\Delta t_i} = G_{\mathbf{V}_h}^n + \Delta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k_m}{J} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{h}}^{n+1}}{\partial s} \right) - \Delta (gJ \nabla_{\mathbf{h}} \tilde{\eta} + \mathbf{B}_{\mathbf{h}}^n), \quad (27)$$

$$\Delta \frac{(\tilde{w}_h J)^{n+1} - (w_h J)^{n-1}}{2\Delta t_i} = G_w^n + \Delta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k_m}{J} \frac{\partial \tilde{w}_h^{n+1}}{\partial s} \right). \quad (28)$$

Следует отметить, что на этом этапе удовлетворяются все граничные условия для поля скорости. На следующем этапе полученное поле скорости корректируется внутри области таким образом, чтобы удовлетворять условию неразрывности.

4 этап. Расчет негидростатического поля скоростей и давления

Негидростатическое поле скорости вычисляется из уравнений движения (12), (13) с учетом градиентов негидростатической компоненты давления:

$$(\mathbf{V}_{\mathbf{h}} \mathbf{J})^{n+1} = (\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{h}} \mathbf{J})^{n+1} - 2\Delta t_i J \nabla_{\mathbf{h}}^s \mathbf{q}^{n+1}, \quad (29)$$

$$(wJ)^{n+1} = (\tilde{w}J)^{n+1} - 2\Delta t_i \frac{\partial q^{n+1}}{\partial s}. \quad (30)$$

Полное поле скорости удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial h_2 (uJ)^{n+1}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial h_1 (vJ)^{n+1}}{\partial \xi_2} + \Delta \frac{\partial w^{n+1}}{\partial s} + h_2 \frac{\partial (Au)^{n+1}}{\partial s} + h_1 \frac{\partial (Bv)^{n+1}}{\partial s} = 0. \quad (31)$$

Подставляя выражения (29), (30) в (31), получаем уравнение Пуассона для определения негидростатической компоненты давления q :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{h_2 J}{h_1} \frac{\partial q}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{h_2 A}{h_1} \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial s} A \frac{\partial q}{\partial \xi_1} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{h_1 J}{h_2} \frac{\partial q}{\partial \xi_2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{h_1 B}{h_2} \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial s} B \frac{\partial q}{\partial \xi_2} + \right. \\ & \left. + \Delta \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{J} \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial s} \frac{A^2}{J} \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial s} \frac{B^2}{J} \frac{\partial q}{\partial s} \right)^{n+1} = \\ & = \frac{1}{2\Delta \tau_i} \left(\frac{\partial (h_1 \tilde{u} J)}{\partial x} + \frac{\partial (h_2 \tilde{v} J)}{\partial y} + \right. \\ & \left. + h_2 \frac{\partial (\tilde{u} A)}{\partial s} + h_1 \frac{\partial (\tilde{v} B)}{\partial s} + \Delta \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} \right)^{n+1}. \quad (32) \end{aligned}$$

Уравнение (32), записанное в конечно-разностном виде, решается с использованием модифицированного метода сопряженных градиентов [15] с соответствующими граничными условиями как и в работе [5]. После того, как негидростатическая составляющая давления определена, находится полное распределение скорости $u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}$ из выражений (29), (30).

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОДООБМЕНА В ПРОЛИВАХ

Разность плотности в двух резервуарах или морях, соединенных проливом, приводит к двуправленному потоку воды. Потоки, состоящие из двух слоев жидкости разной плотности, как правило, исследуются в рамках гидравлических моделей, основанных на гидростатическом приближении [7, 16–17]. Одним из наиболее важных параметров гидравлической теории является составное число Фруда

$$G^2 = F_1^2 + F_2^2 \equiv \frac{u_1^2}{g'h_1} + \frac{u_2^2}{g'h_2}, \quad (33)$$

где u_1, h_1 и u_2, h_2 – скорость и толщина верхнего и нижнего слоев соответственно; $g' = g\Delta\rho/\rho_0$; $\Delta\rho$ – разность плотности между резервуарами. Поток является критическим, если $G = 1$. При этом показано, что длинные волны не могут распространяться вне области $G > 1$ в область $G < 1$. Максимальный обмен реализуется при наличии двух точек контроля $G = 1$, ограничивающих область $G < 1$. В этом случае поток между двумя точками контроля является изолированным, т. е. возмущения вне области не распространяются в область $G < 1$ [17].

Существует ряд факторов, которые не учитывает гидравлическая теория. Таковыми являются негидростатические эффекты, которые влияют на обмен импульсом и массой между слоями [6, 18].

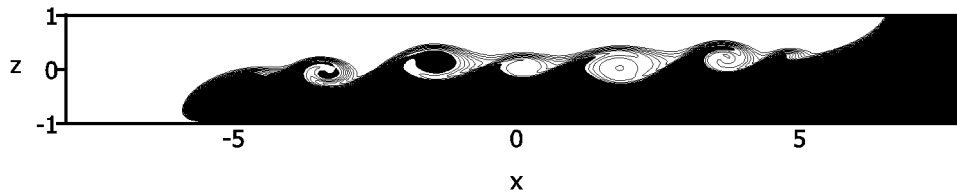


Рис. 1. Распределение плотности в численном эксперименте 1 в безразмерных координатах в момент времени $t=10$

Эксперименты [7, 8] показывают, что режим таких течений характеризуется появлением неустойчивости на границе раздела жидкостей. Она вызвана коротковолновыми процессами, такими как неустойчивость Кельвина-Гельмгольца и Холмбо. Устойчивость слоистых течений в гидравлической теории, как правило, анализируется на основе критерия Лонга для длинных волн [19]. Однако в работах [7, 8] показано, что это условие нарушается в случае коротковолновых процессов, которые не описываются в рамках гидростатических моделей. В то же время учет такой неустойчивости важен, так как она влияет на сдвиговые напряжения и вовлечение жидкости на границе раздела, что, в свою очередь, определяет величину потока.

Описанная выше негидростатическая модель применяется для исследования водообмена в проливах. В п. 3.1 показана способность модели описывать сдвиговую неустойчивость на примере водообмена в шлюзе. В п. 3.2 моделируется эксперимент [9] для узкого и длинного пролива. Проводится сравнение результатов расчетов и эксперимента. В численном эксперименте для широкого пролива в п. 3.3 исследуются негидростатические коротковолновые эффекты.

3.1. Водообмен жидкости в шлюзе

Решается задача о водообмене жидкости различной плотности в шлюзе. Эта задача в основном моделировалась в рамках гидростатического приближения внутренней гидравлики [20]. Однако эксперименты показывают, что такие течения являются неустойчивыми, что проявляется в перемешивании между слоями [21]. Численный эксперимент 1 проводился для конфигурации, описанной в [22]. Прямоугольный бассейн длиной $L_x = 0.8$ м, шириной $L_y = 0.15$ м и высотой $H = 0.1$ м наполнен водой различной плотности, которая разделена вертикальной перегородкой в середине бассейна. После того как перегородку убирают, объемы воды разной плотности начинают двигаться в противоположных направлениях. Значение $g' = 1$ см/с². Расчеты про-

двигались при постоянных молекулярных коэффициентах вязкости $k_m = a_m = 10^{-6}$ м²/с и диффузии $k_h = 1.4 \cdot 10^{-9}$ м²/с для солёности на сетке $400 \times 10 \times 100$ с шагом по времени для внутренней моды $\Delta t_i = 0.06$ при отношении $\Delta t_e / \Delta t_i = 30$. На рис. 1, показывающем распределение плотности в момент времени $t = 10$, видно формирование неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, схожее с экспериментом [21] и расчетами [22].

Таким образом, данный пример демонстрирует применимость модели для моделирования волно-вихревой неустойчивости в сдвиговом течении, которая будет исследоваться ниже в п. 3.3 для задачи о водообмене в широком проливе.

3.2. Водообмен в длинном узком проливе с порогом

В данном разделе моделируется лабораторный эксперимент Мадерича 701 [16] в проливе длиной $L_x = 60.5$ см, шириной $L_y = 0.9$ см и высотой $H = 8$ см с расширением в глубокие и широкие бассейны на обоих концах. Поток с величиной плавучести $g' = 1.46$ см/с² создавался с помощью нагревания воды в левом бассейне и охлаждения в правом [9]. В расчетах этот процесс моделировался включением источников слагаемых в правую часть уравнения (14) для температуры. Расчеты проводились при постоянных молекулярных коэффициентах вязкости $k_m = a_m = 10^{-6}$ м²/с и диффузии $k_h = 1.4 \cdot 10^{-7}$ м²/с для температуры на сетке $200 \times 11 \times 80$ с шагом по времени для внутренней моды $\Delta t_i = 0.02$ с при отношении $\Delta t_e / \Delta t_i = 30$. На рис. 2 показана моделируемая область канала на криволинейной ортогональной сетке. Течение является ламинарным при числе Рейнольдса $Re = 0.5 \sqrt{g' H} H / k_m$ порядка 1400. Однако измерения профилей температуры [9] показывают расширение термоклина с левой стороны порога (рис. 3). Это отображает также рассчитанное распределение плотности на рис. 4, а. Как видно из рисунка, за счет вязкого вовлечения толщина ламинарного пограничного слоя растет. Рассчитанный слой раздела по скоростям хорошо

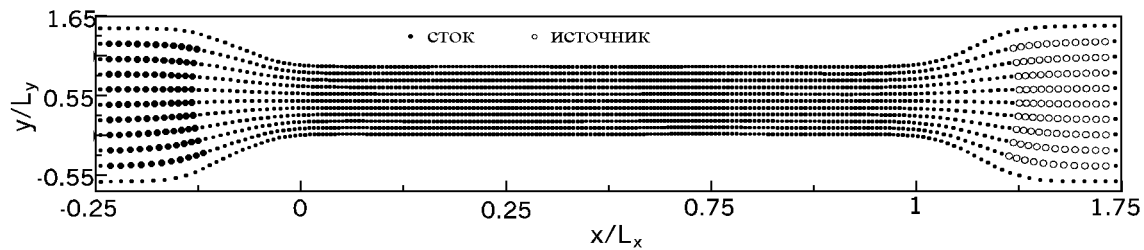


Рис. 2. Криволинейная ортогональная сетка: горизонтальный вид канала

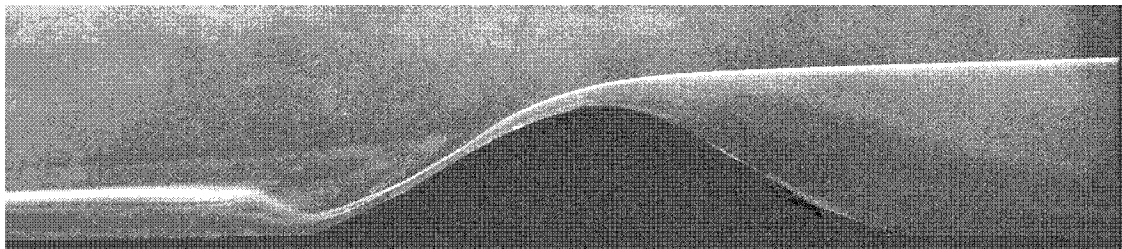


Рис. 3. Фотография эксперимента 701 [16].

совпадает с экспериментальным.

Представленное на рис. 4, в поле скорости показывает сложную структуру слева от порога. Поток опускается вниз по склону порога, а затем двигается в обратном направлении вдоль склона и возвращается, формируя широкий термоклин. Проводилось сравнение расчетов для негидростатического (численный эксперимент 2) и гидростатического случаев (численный эксперимент 3) при одинаковом разрешении по пространству и с одинаковыми шагами по времени. На рис. 4, с показано распределение абсолютного значения разностей скоростей, которое составляет около 28% слева в области порога. Вычисленное составное число Фруда из выражения (33) показывает значения меньше критических (рис. 5), что указывает на возможную роль вязкости в контроле водообмена через длинные проливы [18]. Расчеты расхода в нижнем слое воды вдоль пролива (рис. 6) отличаются от экспериментальных. Для эксперимента постоянное значение потока $q = 0.98 \text{ см}^3/\text{с}$, тогда как максимальное значение переменного потока вдоль пролива $q = 0.74 \text{ см}^3/\text{с}$. По-видимому, приведенные отличия вызваны наличием эффектов вязкости, а также различием в способе расчета расхода в эксперименте [9].

3.3. Водообмен в широком проливе

В эксперименте 701 доминировало пристеночное трение, так как канал был очень узкий $L_y/H = 0.11$. Трение стабилизирует поток, и течение является ламинарным. Однако реальные проливы – обычно широкие со сложной топографией и преобладанием влияния трения о дно и в слое раздела. Для того, чтобы оценить влияние стенок, расчеты проводились (численный эксперимент 4) также для конфигурации пролива, описанном в п.3.2 с условиями скольжения на стенках. Из рис. 7 видно, что отсутствие трения на стенках приводит к изменению циркуляции за порогом.

Крупномасштабные течения в реальных проливах характеризуются большими числами Рейнольдса. Воспроизвести такие течения в лабораторных экспериментах сложно. Однако в экспериментах [7, 8] при увеличении числа Рейнольдса в несколько раз, по сравнению с числом Рейнольдса в лабораторном эксперименте 701 [9], наблюдается

появление волновихревой неустойчивости на границе раздела жидкости. Для того, чтобы исследовать изменение характера движения с увеличением числа Рейнольдса, моделировалась конфигура-

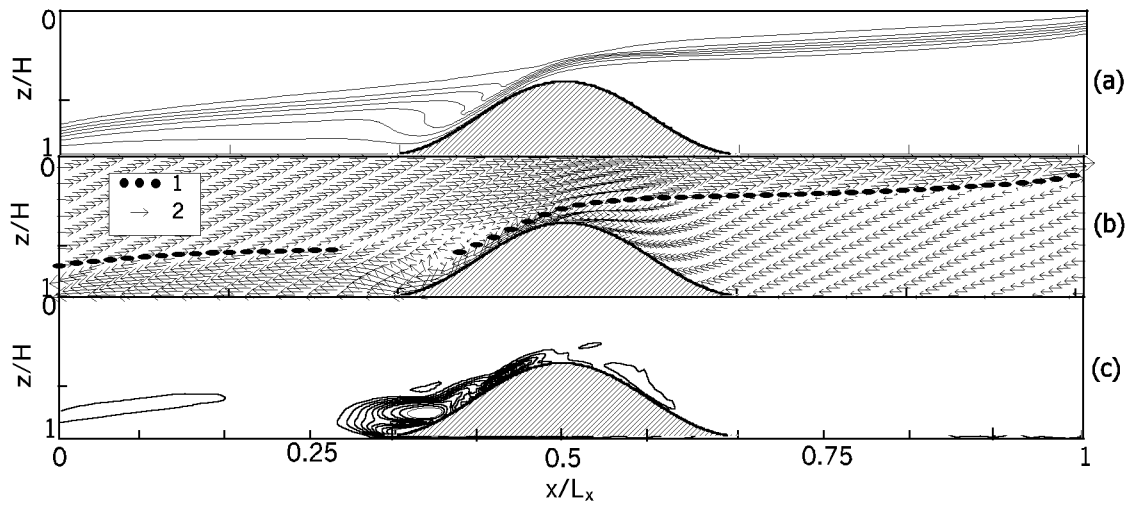


Рис. 4. а – распределение плотности в численном эксперименте 2; в – положение слоя раздела по скоростям в эксперименте 701 (1), поле скоростей в численном эксперименте 2 (2); с – модуль разности между гидростатическим и негидростатическим полями скоростей

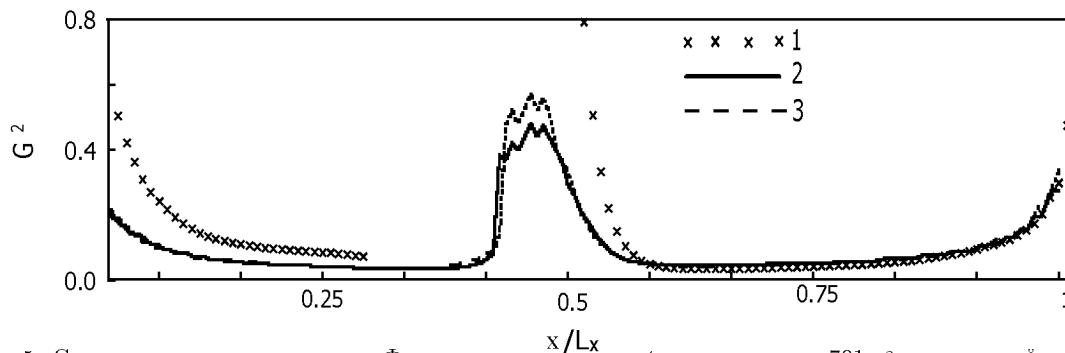


Рис. 5. Сравнение составного числа Фруда вдоль пролива: 1 – эксперимент 701, 2 – численный эксперимент 2, 3 – численный эксперимент 3

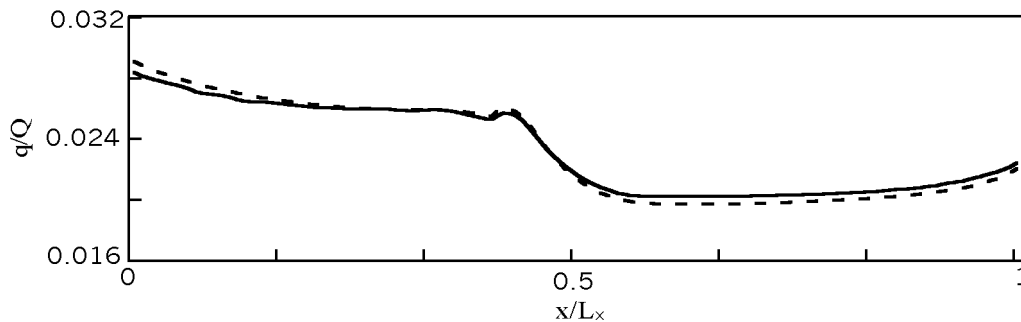


Рис. 6. Расход в нижнем слое вдоль пролива: 1 – численный эксперимент 2, 2 – численный эксперимент 3
 $Q = \sqrt{g'H}HL_y$

ция пролива в п. 3.2 с условиями скольжения на боковых стенках, а также с увеличенными линейными размерами, соответствующими числу Рейнольдса 140000.

Проводились два численных эксперимента для негидростатического (численный эксперимент 5) и гидростатического (численный эксперимент 6) случаев. Следует отметить, что для устойчивости

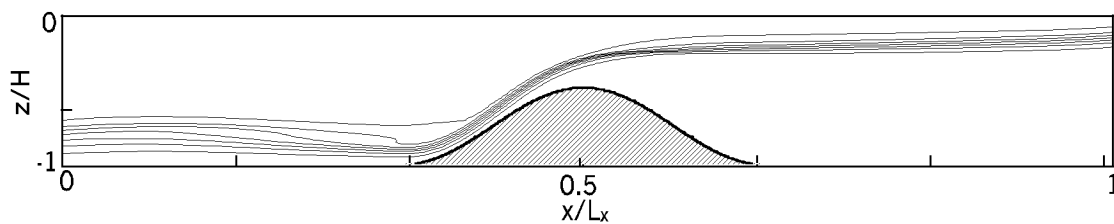


Рис. 7. Распределение плотности в численном эксперименте 4

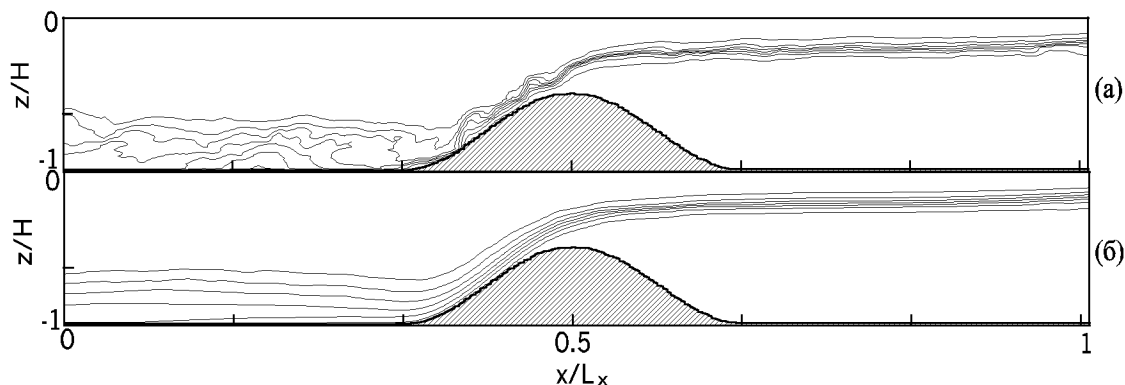


Рис. 8. Распределение плотности в численном эксперименте 5: *a* – мгновенный профиль, *b* – усредненный по времени профиль

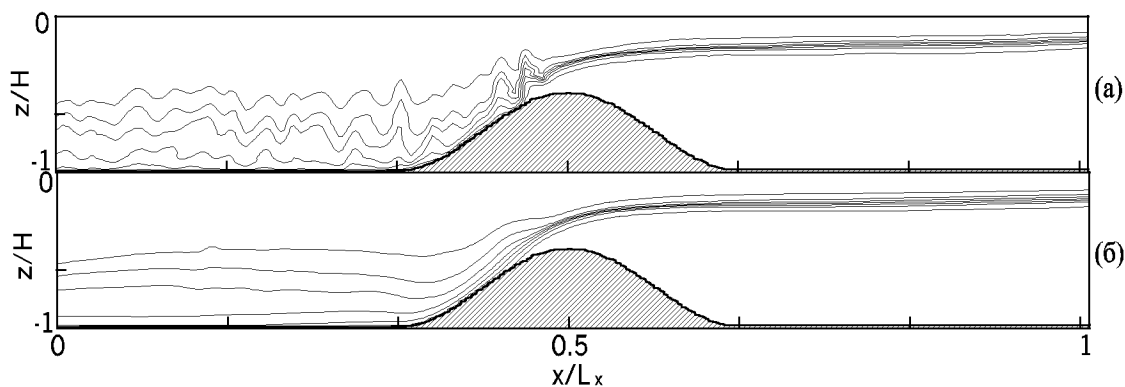


Рис. 9. Распределение плотности в численном эксперименте 6: *a* – мгновенный профиль, *b* – усредненный по времени профиль

счета в случае гидростатических вычислений необходимо было выбирать шаг по времени в три раза меньше, чем в негидростатическом случае. Расчитанное мгновенное распределение плотности в негидростатическом случае показано на рис. 8, *a*, на котором видно формирование неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на левом склоне порога, а также наличие возмущений в правой части порога. Подобная картина наблюдалась в эксперименте [7]. Для гидростатических расчетов (рис. 9, *a*) таких возмущений нет. Анализ изменения рассчитанного негидростатического поля плотности во

времени показывает, что возмущения возникают в области вершины порога, где заметны колебания слоя раздела, а затем распространяются в обе стороны. На левом склоне порога, где сдвиг максимален, формируется неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. Разрушение волн за порогом приводит к заметной зоне перемешивания слева от порога. Возмущения распространяются также вправо в слое сдвига. Как видно из сравнения усредненных профилей плотности на рис. 8 и 9, в случае гидростатических расчетов описание коротковолновых процессов приводит к увеличению переме-

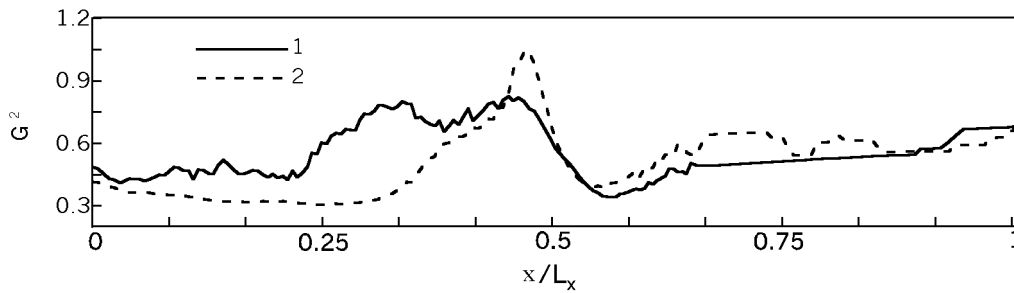


Рис. 10. Составное число Фруда: 1 – численный эксперимент 5, 2 – численный эксперимент 6

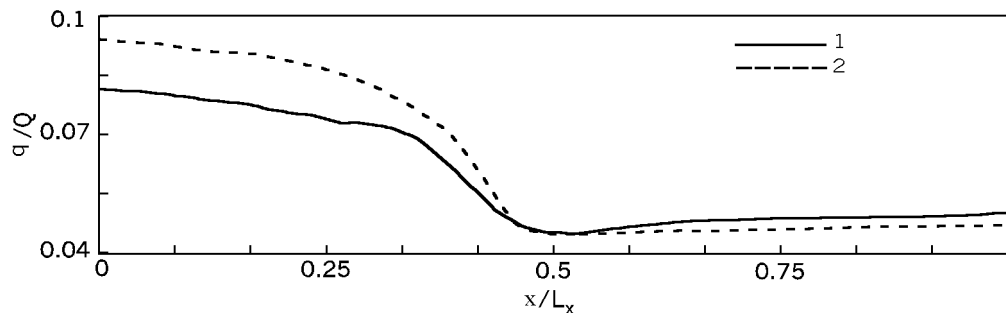


Рис. 11. Расход в нижнем слое вдоль пролива: 1 – численный эксперимент 5, 2 – численный эксперимент 6

шивания в области формирования неустойчивости на склоне порога, а также в области разрушения волн слева от порога. Вычисленное составное число Фруда вдоль пролива для усредненных по времени параметров течения в случае гидростатических и негидростатических вычислений показано на рис. 10. Как видно, в области вершины порога составное число Фруда для гидростатических расчетов $G = 1$, тогда как для негидростатических расчетов оно принимает околокритические значения $G \approx 1$ на вершине и вдоль левого склона порога. Это различие отображает влияние коротковолновой неустойчивости и перемешивания в этой области. Некоторые отличия в числе Фруда также наблюдаются в правой части от порога. Они вызваны процессами вовлечения между слоями. На рис. 11 показано сравнение величин усредненных по времени потоков в нижнем слое. Из негидростатических расчетов видно, что в области справа от порога наблюдается небольшое вовлечение жидкости из нижнего слоя в верхний. Обе модели показывают, что в левой части от порога происходит значительное вовлечение жидкости из верхнего слоя в нижний, причем различие в вовлечении между гидростатическим и негидростатическим потоком составляет около 16%.

Приведенный анализ демонстрирует важность учета негидростатических эффектов при модели-

ровании водообмена в проливах. В вычислениях расчетная сетка была достаточно грубой для детального исследования сдвиговой неустойчивости. Однако она позволяет определить общий характер течения. Последующие исследования при более детальном разрешении необходимы для понимания сложного процесса потери устойчивости и перемешивания в таких течениях.

ВЫВОДЫ

В настоящей работе представлено дальнейшее развитие численного конечно-разностного алгоритма [5] решения задачи о негидростатических течениях стратифицированной жидкости со свободной поверхностью. Приведено обобщение модели для случая криволинейной ортогональной горизонтальной системы координат и обобщенной вертикальной координаты, что значительно расширяет возможности использования модели в геофизических приложениях. Модель применена к задачам о водообмене жидкости различной плотности в проливе криволинейной геометрии. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для слу-

чая узкого пролива дает достаточно хорошее согласование. Исследование гидродинамики водообмена в широком проливе продемонстрировало важность учета механизма волновихревой неустойчивости в стратифицированной жидкости, которая не описывается в рамках гидростатического приближения.

Автор благодарен докт. физ.-мат. наук Мадеричу В. С. за руководство работой, предоставление результатов эксперимента, а также полезные предложения и комментарии. Работа частично поддерживалась CRDF (UG2-2425-SE-02) и INTAS грантом для молодых ученых YSF 2002-127.

1. *Blumberg A. F., Mellor G. L.* A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model // *American Geophysical Union.*– 1987.– 4.– P. 1–16.
2. *Pietrzak J., Jacobson J. B., Burchard H., Vested H. J., Petersen O.* A three-dimensional hydrostatic model for coastal and ocean modelling using a generalised topography following co-ordinate system // *Ocean. Modelling.*– 2002.– 4.– P. 173–205.
3. *Casulli V., Stelling G. S.* Numerical simulation of 3D quasi-hydrostatic, free-surface flows // *J. Hydr. Eng.*– 1998.– 124, N 7, July.– P. 678–686.
4. *Winters K. B., Seim H. E., Finnigan T. D.* Simulation of non-hydrostatic, density stratified flow in irregular domains // *Int. J. Num. Methods.*– 2000.– 32.– P. 263–284.
5. *Канарская Ю. В., Мадерич В. С.* Численная негидростатическая модель течений со свободной поверхностью // *Прикл. Гидромех.*– 2002.– 4(76).– P. 280–289.
6. *Zhu D. Z., Lawrence G. A.* Non-hydrostatic effects in layered shallow water flows // *J. Fluid Mech.*– 1998.– 355.– P. 1–16.
7. *Zhu D. Z., Lawrence G. A.* Hydraulics of exchange flows // *J. Hydr. Eng.*– 2000.– 126 (12).– P. 921–928.
8. *Pawlak G., Armi L.* Stability and mixing of a two-layer exchange flow // *Dyn. Atmos. Oceans.*– 1996.– 24.– P. 139–151.
9. *Мадерич В. С., Константинов С. И., Кулик А. И., Олексюк В. В.* Лабораторное моделирование водообмена в проливах // *Океанология.*– 1998.– 38 (5).– P. 602–608.
10. *Mellor G. L.* An equation of state for numerical models of ocean and estuaries // *J. Atmos. Ocean. Tech.*– 1991.– 8.– P. 609–611.
11. *Mellor G. L., Yamada T.* Development of turbulence closure model for geophysical fluid problems // *Rev. Geophys. Space Phys.*– 1982.– 20.– P. 851–875.
12. *Orlanski V. P.* A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // *J. Comput. Phys.*– 1976.– 21.– P. 251–269.
13. *Mellor G. L., Blumberg A. F.* Modelling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system // *Mon. Wea. Rev.*– 1985.– 113.– P. 1380–1383.
14. *Smolarkiewicz P. K.* MPDATA: A finite-difference solver for geophysical flows // *J. Comp. Phys.*– 1984.– 140.– P. 459–480.
15. *Seager V.* A SLAP for the Masses.– 1988: LLNL Tech. Rep, UCRL-100267.– 70 p.
16. *Maderich V. S.* Two-layer exchange flows through long straits with sill // *Oceanic Fronts and Related Phenomena. Konstantin Fedorov Int. Memorial Symp., IOC Workshop Rep. Series.*– UNESCO 2000.– 159.– P. 326–331.
17. *Farmer D. M., Armi L.* The hydraulics of two flowing layers with different densities // *J. Fluid. Mech.*– 1986.– 163.– P. 27–58.
18. *Hogg M. H., Ivey G. N., Winters K. B.* Hydraulics and mixing in controlled exchange flows // *J. Geoph. Res.*– 2001.– 15.– P. 959–972.
19. *Long R. R.* Long waves in a two fluid system // *J. Meteorol.*– 1956.– 13.– P. 7–21.
20. *Grobelbauer H. P., Fannelop T. K., Britter R. E.* The propagation of intrusion fronts of high density ratios // *J. Fluid. Mech.*– 1993.– 250.– P. 669–687.
21. *Hacker J., Linden P. F., Dalziel S. B.* Mixing in lock-exchange gravity currents // *Dyn. Atmos. Oceans.*– 1996.– 24.– P. 183–195.
22. *Hartel C., Meiburg E., Necker F.* Analysis and direct numerical simulation of the flow at a gravity-current head. Pt1 Flow topology and front speed for slip and no-slip boundaries // *J. Fluid. Mech.*– 2000.– 418.– P. 189–212.