

УДК 532.593

# ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА И НЕКОТОРЫЕ ИХ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ

А. Н. СЕРДЮЧЕНКО

*Украинский государственный морской технический университет, Николаев**Получено 25.05.2000*

Рассмотрены нелинейные уравнения Шредингера (НУШ) III-V порядков для нелинейных групп волн на глубокой воде, описывающие пространственно-временную эволюцию комплексной амплитуды первой несущей гармоники в потенциале скоростей волновых движений. НУШ-уравнения систематически получены в рамках решения нелинейной краевой задачи теории волн на глубокой воде методом многих масштабов (МММ) для первых пяти порядков по крутизне волн и в предположении умеренной нерегулярности и трехмерности групп волн, а также с учетом действия поверхностного давления ветрового потока. Рассмотрены структура и различные формы операторов НУШ-уравнений при преобразовании независимых медленно меняющихся пространственно-временных переменных (масштабов). Приведены также ассоциированные с НУШ-уравнениями зависимости, описывающие изменения комплексной амплитуды по глубине жидкости, а также краевые задачи для потенциала дрейфового поля скоростей, индуцированного групповой структурой волн. Рассмотрен класс стационарных решений, который включает как хорошо известные солитонные и периодические решения, так и новые решения в виде функций Вейерштрасса.

Розглянуті нелінійні рівняння Шредингера (НРШ) III-V порядків для нелінійних груп хвиль на глибокій воді, які описують просторово-часову еволюцію комплексної амплітуди першої несучої гармоніки в потенціалі швидкості хвильового руху. НРШ-рівняння систематично отримані в рамках розв'язання нелінійної граничної задачі теорії хвиль на глибокій воді методом багатьох масштабів для перших п'яти порядків по крутості хвиль і з урахуванням помірної нерегулярності й тривимірності груп хвиль, а також дії поверхневого тиску вітрового потоку. Розглянуті структура та різноманітні форми операторів НРШ-рівнянь при перетворенні незалежних просторово-часових змінних (масштабів), які повільно змінюються. Наведені також асоційовані з НРШ-рівняннями залежності, що описують зміну комплексної амплітуди по глибині рідини, а також граничні задачі для потенціалу дрейфового поля швидкості, визваного груповою структурою хвиль. Розглянуто клас стаціонарних розв'язків, який включає як добре відомі солітонні та періодичні розв'язки, так і нові розв'язки у вигляді функцій Вейерштрасса.

Nonlinear Schrodinger equations (NLS) of III to V-th orders for deep water surface wave groups, describing temporal and spatial evolution of complex amplitude of fundamental harmonic in velocity potential of wave motion are considered. NLS-equations have been systematically derived for the first five orders in the framework of the solution of nonlinear boundary value problem for deep water waves of finite amplitude by using multi scale technique. Nonlinearity, irregularity and 3D effects of wave motion and surface wind pressure action were included into the consideration. Different combinations of independent slowly varying variables (scales) and corresponding versions of NLS-equations have been considered and discussed. In addition to NLS-equations, linear equations for complex amplitude in fluid domain and linear boundary value problems for drift velocity potential, induced by amplitude modulation of wave motion and associated with NLS-equations, were considered too. Permanent solutions including not only well-known solitary and periodical solutions but some new solutions in elliptic Weierstrass functions have been derived.

## ВВЕДЕНИЕ

Крупномасштабные волны конечной амплитуды в развитом и интенсивном шторме имеют ярко выраженную групповую структуру [1] и могут быть описаны волной Стокса с модулированной по времени и пространственным координатам амплитудой и фазой [2] (рис. 1). Эти величины образуют в совокупности комплексную огибающую амплитуд, которая подчиняется известному нелинейному уравнению Шредингера (НУШ-уравнению или NLS-уравнению в англоязычной литературе) [3, 4]. НУШ-уравнение описывает эволюцию комплексной амплитуды по времени и координатам в плоскости распространения волн, определение которой практически полностью замыкает задачу расчета гидродинамических характеристик волн – волнового профиля, поля гидродинамических давлений

и скоростей частиц жидкости [5], необходимых, в частности, для определения нелинейных волновых воздействий на суда и плавучие сооружения [5, 6].

НУШ-уравнения начали активно изучать примерно с конца 60-х годов, поскольку они оказались эффективным инструментом для исследования широкого класса слабо нелинейных волновых движений с узким спектром не только на глубокой воде [7–19], но и в других физических средах с сильной дисперсией [20–23]. Существует несколько способов получения этих уравнений; сравнительно простой феноменологический подход основан на использовании дисперсионного соотношения с учетом нелинейных эффектов [4, 10], однако наиболее естественным является получение НУШ-уравнений в рамках решения нелинейной краевой задачи теории волн [24] методом многих масштабов [2, 25, 26]. Кроме того, НУШ-уравнения

могут быть получены из вариационных уравнений Уизема или уравнений Захарова (при дополнительном ограничении на ширину спектра волн) [27–30].

В литературе различают НУШ-уравнения III и IV порядков в зависимости от учета нелинейных и дисперсионных эффектов в уравнениях; если в уравнениях III порядка учтены только основные нелинейный и дисперсионный члены, то в уравнения IV порядка включены не только более старшие порядки по нелинейности и дисперсии, но и потенциал дрейфового течения, индуцированного продольными градиентами огибающей амплитуд волн, причем последний оказывает наиболее сильное влияние на эволюцию комплексной огибающей амплитуд волн [16].

Для сред с постоянными характеристиками и границами НУШ-уравнения содержат постоянные коэффициенты, однако при рассмотрении волн в средах с медленно меняющимися параметрами (над неровным дном, на неоднородных течениях, при наличии внутренних волн и др.) эти уравнения существенно усложняются из-за зависимости коэффициентов от медленных пространственно-временных переменных задачи [19, 31–34].

Далее, в литературе в основном рассматриваются НУШ-уравнения для свободных волн, тогда как в реальных условиях волнения ветровые волны находятся под постоянным динамическим воздействием ветрового потока над ними. В общем случае исследование ветро-волновых взаимодействий – самостоятельная и достаточно сложная задача [35–37]. И если ограничиться простейшими представлениями, то ветровое воздействие на потенциальные волны можно смоделировать нормальным поверхностным давлением на волновой поверхности, распространяющимся когерентно с фазовой и групповой скоростями движения групп волн. При этом для крупномасштабных энергонесущих волн в спектре с высотами в 10–20 метров интенсивность давления индуцированного ветрового потока будет достаточно малой и по грубым оценкам ее можно принять по крайней мере в третьем порядке малости по отношению к характерному волновому давлению.

НУШ-уравнения являются нелинейными уравнениями эволюционного типа с параболическим оператором линейного приближения, которые включают в общем случае временные и пространственные медленные переменные, и поэтому их решение встречает определенные трудности. Известные в литературе решения можно грубо разделить на две группы: а) стационарные решения, включающие периодические волны, и солитонные

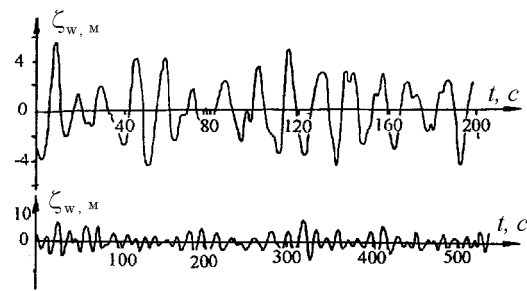


Рис. 1. Примеры записи морского волнения с групповой структурой

решения [11, 13, 14]; б) нестационарные спектральные и многосолитонные решения [8–10, 15–18]. При отыскании решений особые трудности возникают при учете трехмерности волновых движений с групповой структурой. Если косые группы волн с неколлинеарными векторами фазовой и групповой скоростей могут быть получены достаточно просто, то полностью трехмерные стационарные группы волн уже не удастся получить в рамках техники решения для плоских волн [11–13].

В данной статье, посвященной исследованию НУШ-уравнений для ветровых волн на глубокой воде, эти уравнения получены вплоть до V порядка включительно с использованием формальной техники решения нелинейной краевой задачи теории волн методом многих масштабов. Рассмотрена дальнейшая модификация уравнений в зависимости от выбора системы медленных пространственно-временных переменных с точки зрения упрощения структуры операторов в старших приближениях. Приведены также некоторые решения этих уравнений, относящиеся к классу стационарных решений и представленные специальными функциями Якоби и Вейерштрасса. Показаны трудности, которые возникают при учете трехмерности и старших приближений в решениях.

## 1. ПОЛУЧЕНИЕ НУШ - УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МНОГИХ МАСШТАБОВ

Рассмотрим кратко схему получения НУШ-уравнений высоких порядков в рамках решения нелинейной краевой задачи теории волн методом многих масштабов [2, 25], использовав для этого простейший вариант МММ с линейной зависимостью быстрых фазовых переменных от физических пространственно-временных координат  $\vec{x} = (x, y, z), t$  [38]. Это является достаточным для волн на глубокой воде с постоянными параметра-

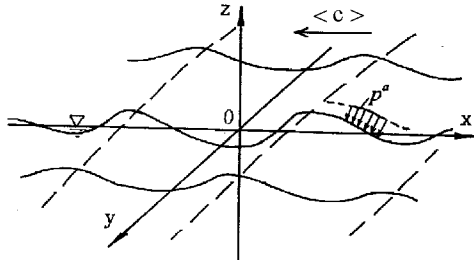


Рис. 2. Система координат и общий вид волнового движения

ми жидкой среды.

### 1.1. Формулировка нелинейной краевой задачи

Будем использовать потенциальное приближение в описании нелинейных волновых движений с групповой структурой и поэтому исходной будет следующая трансформированная краевая задача для потенциала скоростей  $\Phi_w$  [39, 40]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_w &= 0, \quad z < 0; \\ \sum_n \sum_m \left(\frac{-1}{g}\right)^m \frac{1}{n!m!} \left\{ Z_0^n (D + \tilde{p})^m [L + d_t \times \right. & \\ \left. \times (D + \tilde{p})] \right\}_z^{(n+m)} &= 0, \quad z = 0; \\ \nabla \Phi_w &\rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty; \\ \nabla \Phi_w \leq C, \quad C < \infty, \quad (x^2 + y^2)^{1/2} &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\nabla$  – оператор Гамильтона по переменным  $x, y, z$  и использованы обозначения для операторов

$$Z_0 = -\frac{1}{g} \Phi_{wt}, \quad L(\Phi_w) = (\Phi_{wt} + g \Phi_{wz});$$

$$D(\Phi_w) = \frac{1}{2} (\nabla \Phi_w \cdot \nabla \Phi_w), \quad \tilde{p} = \frac{p^a}{\rho},$$

$$d_t = [\nu_2 \frac{\partial}{\partial t} + (\nabla \Phi_w \cdot \nabla)].$$

Здесь множитель  $\nu_2 = 2$  для производной от  $D$  и  $\nu_2 = 1$  для производной от  $\tilde{p}$ ;  $p^a$  – поле давлений ветрового потока; количество удерживаемых членов рядов в граничном условии в (1) определяет порядок приближения по нелинейности волнового движения и для краткости записи использовано индексное обозначение для производных. Подчеркнем, что граничные условия в (1) были получены из исходных условий посредством разложения потенциала скоростей  $\Phi_w$  и ветрового давления  $p^a$  на волновой поверхности в ряды Тейлора

по вертикальной координате  $z$  в окрестности точки  $z = 0$  [16, 39] и последующим исключением из формулировки граничных условий самой волновой поверхности  $z = \zeta_w(x, y, t)$ .

Начальные условия явно не формулируются, поскольку предполагается отыскание семейства решений с постоянными интегрирования, выбор которых позволяет определить конкретные виды волнового движения. Если в исследованиях ориентироваться на локальные волновые движения в штормовой области, то, во-первых, для данной стадии развития шторма можно указать бесконечно много начальных условий, фиксируя различные начальные моменты времени, во-вторых, эти начальные условия будут являться результатом движения волн в предыдущие моменты времени и поэтому не могут быть взяты произвольно, а также должны удовлетворять уравнениям движения.

Краевая задача (1) была сформулирована в предположении, что основная искомая величина – потенциал скоростей волновых движений в жидкости  $\Phi_w$ . Однако такой подход не является единственно возможным. Если в качестве основных искоемых величин использовать переменные – волновой профиль  $\zeta_w$  и значение потенциала скоростей на волновой поверхности  $\Phi_w^s$ , – эта пара образует канонические переменные в рамках гамильтоновой формулировки уравнений движения волн, что позволяет применить в дальнейшем решении задачи гамильтонов формализм (эволюционные уравнения В.Е. Захарова фактически основаны на данном подходе) [28–30, 41, 42].

Отметим также, что трансформированные граничные условия в (1) проверены для нелинейных периодических прогрессивных волн Стокса VI порядка, потенциал скоростей которых имеет вид [43]

$$\begin{aligned} \Phi_w^{st} &= -\frac{h_w}{2} c_0 \sum_{n=1}^4 a_n e^{nkz} \sin nk(x + ct) + \\ &+ O(\delta_w^7), \quad c = c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \delta_w^2 + \frac{1}{8} \delta_w^4\right), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c_0 = \sqrt{g/k}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\delta_w = \pi h_w/\lambda$ ;  $h_w$ ,  $\lambda$  – высота и длина волны, а амплитуды кратных гармоник будут  $a_1 = (1 - \frac{1}{2} \delta_w^2 - \frac{37}{24} \delta_w^4)$ ,  $a_2 = \frac{1}{2} \delta_w^3 (1 + \frac{1}{3} \delta_w^2)$ ,  $a_3 = \frac{1}{12} \delta_w^4$ ,  $a_4 = \frac{1}{72} \delta_w^5$ .

Далее использованы безразмерные переменные задачи согласно нормировке

$$\vec{x}' = \langle k \rangle \vec{x}, \quad t' = \langle \sigma \rangle t, \quad \Phi'_w = -\frac{\Phi_w}{\langle c \rangle \langle a \rangle}, \quad (3)$$

где  $\langle \sigma \rangle$ ,  $\langle a \rangle$ ,  $\langle k \rangle = \langle \sigma \rangle^2/g$ ,  $\langle c \rangle = g/\langle \sigma \rangle$  – средние для данного волнового движения значения круго-

вой частоты, амплитуды, волнового числа и фазовой скорости бега волн, играющие роль размерных величин (далее штрих опущен для простоты письма).

### 1.2. НУШ-уравнения III-V порядков в рамках метода МММ

Алгоритм метода МММ сводится к следующим ключевым зависимостям и соотношениям [2, 38]. Во-первых, для оценки порядков возмущений в задаче вводится единый положительный малый параметр  $\epsilon \ll 1$ , а зависимость искомого решения от малого параметра полагается аналитической и представляется отрезком ряда вида

$$\Phi_w(\epsilon) = \epsilon(\Phi_0 + \epsilon\Phi_1 + \epsilon^2\Phi_2 + \dots) + O(\epsilon^6). \quad (4)$$

Во-вторых, независимые физические переменные – время  $t$  и координаты  $\vec{x} = (x, y, z)$  заменяются двумя новыми независимыми быстрыми координатами  $\theta(x, t) = (x + t)$  и  $\zeta(z) = z$  (линейный вариант МММ) и набором медленно меняющихся переменных вида  $T_n = \epsilon^n t$ ,  $\vec{X}_n = \epsilon^n \vec{x}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , так что неизвестные величины  $\Phi_n$  в разложении (4) рассматриваются теперь как функции этих групп новых переменных (см. рис. 3).

Подстановка ряда (4) в уравнения краевой задачи (1), сортировка и расщепление зависимостей по степеням малого параметра  $\epsilon$  приводит к серии линейных краевых задач в возмущениях в быстрых переменных для потенциалов скоростей  $\Phi_n$ . Для первых пяти порядков по  $\epsilon$  решение этих задач получается в виде [5, 40]

$$\Phi_w = \epsilon(-iA \exp \Theta + \epsilon\Phi_{dr} - \frac{i}{2}\epsilon^3(A_{32} + \epsilon A_{42}) \exp 2\Theta - \frac{i}{3}\epsilon^4 A_{43} \exp 3\Theta + \text{к.с.}), \quad (5)$$

где  $A = \frac{1}{2}a \exp \psi$  – комплексная амплитуда первой гармоники;  $\Theta = \zeta + i\theta$  – комплексная быстрая фазовая координата;  $\Phi_{dr}$  – потенциал скоростей медленно меняющегося дрейфового течения, вызванного продольными модуляциями огибающей амплитуд  $a$  и действием ветрового потока [45] (см. ниже);  $A_{ij}$  – комплексные амплитуды кратных гармоник в потенциале скоростей, определяющиеся через амплитуду  $A$  и амплитуды кратных гармоник  $A_n^a$  в ветровом давлении  $p^a$  (см. [40]); ”к.с.” – комплексно-сопряженное выражение. При решении задачи давление  $p^a$  представлялось рядом Фурье по быстрой фазе вида

$$p^a = - \sum_{n=1,2,\dots} A_n^a(\zeta, \vec{X}_m, T_m) \exp in\theta + \text{к.с.}, \quad (6)$$

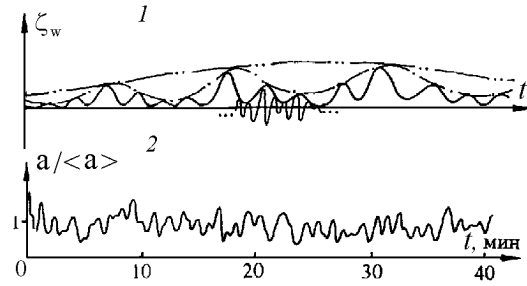


Рис. 3. Групповая структура огибающей амплитуд волн для больших интервалов: 1 – модельное представление (—  $a(T_1)$ , - - -  $a(T_2)$ , - · - · -  $a(T_3)$ ); 2 – реальное изменение огибающей амплитуд по натурным данным [44]

где амплитуда первой гармоники имела, по крайней мере, третий порядок по малому параметру  $\epsilon$ .

Получение решений в рамках МММ для более высоких порядков возмущений, возможное в принципе, сопряжено с достаточно громоздкими аналитическими преобразованиями, преодолеть которые в общем случае практически уже невозможно. Так что первые пять приближений по малому параметру  $\epsilon$  – это максимум возможностей при использовании данного варианта МММ.

Для предельного случая периодических волн решение (5) дает первые три гармоники в потенциале  $\Phi_w^{st}$  в уравнении (2) для волн Стокса V порядка.

Условия исключения вековых решений для потенциалов  $\Phi_n$  порождает для комплексной амплитуды основной гармоники  $A$  систему уравнений в возмущениях в медленных переменных. Для первых пяти порядков по малому параметру  $\epsilon$  эти уравнения имеют вид [40]

$$\epsilon^2: \quad \begin{aligned} A_{Z_1} + iA_{X_1} &= 0, & z < 0; \\ 2A_{T_1} - A_{X_1} &= 0, & z = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\epsilon^3: \quad \begin{aligned} (A_{Z_2} + iA_{X_2}) + \frac{1}{2}A_{Y_1Y_1} &= 0, \\ (2A_{T_2} - A_{X_2}) - \frac{i}{4}(A_{X_1X_1} - 2A_{Y_1Y_1}) - & \\ - 4i\langle\delta\rangle^2 A|A|^2 &= iA_1^a; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\epsilon^4: \quad \begin{aligned} (A_{Z_3} + iA_{X_3}) + \frac{1}{2}(2A_{Y_1Y_2}) + & \\ + \frac{i}{2}(2A_{Y_1Y_1X_1}) &= 0, \\ (2A_{T_3} - A_{X_3}) - \frac{i}{4}(2A_{X_1X_2} - 4A_{Y_1Y_2}) + & \\ + \frac{1}{8}(A_{X_1X_1X_1} - 6A_{Y_1Y_1X_1}) - 2\langle\delta\rangle^2(7|A|^2 \times & \\ \times A_{X_1} - |A|_{X_1}^2 A) - 2i\langle\delta\rangle A\Phi_{drX_1} &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon^5: & \\
 (A_{Z_4} + iA_{X_4}) + \frac{1}{2}(A_{Y_2Y_2} + 2A_{Y_1Y_3}) + \frac{i}{2}(A_{Y_1Y_1X_2} + & \\
 + 2A_{Y_1Y_2X_1}) - \frac{1}{2}(A_{X_1X_1Y_1Y_1} - \frac{1}{4}A_{Y_1Y_1Y_1Y_1}) = 0, & \\
 (2A_{T_4} - A_{X_4}) - \frac{i}{4}[(A_{X_2X_2} + 2A_{X_1X_3}) - 2(A_{Y_2Y_2} + & \\
 + 2A_{Y_1Y_3})] + \frac{1}{8}[3A_{X_1X_1X_2} - 6(A_{Y_1Y_1X_2} + 2 \times & \\
 \times A_{Y_1Y_2X_1})] + \frac{i}{64}[5A_{X_1X_1X_1X_1} - 60A_{X_1X_1Y_1Y_1} + & \\
 + 12A_{Y_1Y_1Y_1Y_1}] - 20i\langle\delta\rangle^4 A|A|^4 - 2\langle\delta\rangle^2(7|A|^2 \times & \\
 \times A_{X_2} - |A|_{X_2}^2 A) - 2\langle\delta\rangle(iA\Phi_{drX_2} + \tilde{F}(A, \Phi_{dr})) + & \\
 + i\langle\delta\rangle^2[D_2^X(A) + D_2^Y(A)] = P^a(A, A_j^a). & \quad (10)
 \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения для операторов

$$\begin{aligned}
 D_2^X(A) &= [6(|A|^2 A)_{X_1X_1} - 7A|A|_{X_1X_1}^2 - \\
 &\quad - \frac{11}{2}(A_{X_1}|A|_{X_1}^2 + 2A|A_{X_1}|^2)], \\
 D_2^Y(A) &= [2(|A|^2 A)_{Y_1Y_1} - 4A|A|_{Y_1Y_1}^2 - \\
 &\quad - (A_{Y_1}|A|_{Y_1}^2 + 5A|A_{Y_1}|^2)], \\
 \tilde{F}(A, \Phi_{dr}) &= [(A_{X_1}\Phi_{drX_1} + A_{Y_1}\Phi_{drY_1}) + \\
 &\quad + \frac{1}{4}A(\Phi_{drX_1X_1} + 2\Phi_{drY_1Y_1})], \\
 P^a(A, A_j^a) &= -\frac{i}{16}(A_{1X_1X_1}^a - 2A_{1Y_1Y_1}^a) + \\
 &\quad + i\langle\delta\rangle A^* P_{2+}(A_j^a) - i\langle\delta\rangle^2 [|A|^2(6A_1^a - \\
 &\quad - P_{1+}^2(A_1^a)) + \frac{1}{2}A^2(2A_1^{a*} - P_{1+}^2(A_1^{a*}))],
 \end{aligned} \quad (11)$$

где также  $P_{j+} = (j + \partial/\partial\zeta)$ ,  $j = 1, 2$  и  $\langle\delta\rangle = \langle k \rangle \langle a \rangle$  – средняя крутизна волнового склона.

Условия исключения секулярных решений порождают также последовательность линейных краевых задач в возмущениях для дрейфового потенциала  $\Phi_{dr}$  следующего вида

$$\epsilon^3: \quad \Phi_{drZ_1} = 2\langle\delta\rangle|A|_{X_1}^2, \quad z < 0; \quad (12)$$

$$\epsilon^4: \quad \nabla_1^2 \Phi_{dr} = 0, \quad z < 0;$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{drZ_2} + \Phi_{drT_1T_1} &= 2\langle\delta\rangle|A|_{X_2}^2 - i\langle\delta\rangle \times \\
 \times [A^*(\frac{3}{2}A_{X_1X_1} + A_{Y_1Y_1}) + \text{к.с.}], & \quad z = 0; \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\epsilon^5: \quad 2(\nabla_1 \cdot \nabla_2)\Phi_{dr} = 0, \quad z < 0;$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{drZ_3} + 2\Phi_{drT_1T_2} &= 2\langle\delta\rangle|A|_{X_3}^2 - i\langle\delta\rangle[2A^* \times \\
 \times (\frac{3}{2}A_{X_1X_2} + A_{Y_1Y_2}) + \text{к.с.}] + 4\langle\delta\rangle^3|A|_{X_1}^4 + & \\
 + \langle\delta\rangle^5(|A|_{X_1X_1X_1}^2 + \frac{4}{5}|A|_{Y_1Y_1Y_1}^2 + \text{к.с.}) - & \\
 - \frac{3}{8}\langle\delta\rangle[(A^*A_{X_1X_1})_{X_1} + \frac{4}{3}A^*A_{Y_1Y_1X_1} + & \\
 + \text{к.с.}] - \langle\delta\rangle[(A^*P_{1-}(A_1^a))_{T_1} + \text{к.с.}], & \quad z = 0, \quad (14)
 \end{aligned}$$

где  $A^*$  – комплексно сопряженное значение к  $A$  и  $\nabla_j$ ;  $j = 1, 2$  – операторы Гамильтона в медленных переменных  $\vec{X}_1, \vec{X}_2$  соответственно.

Как видно, дрейфовое поле скоростей, индуцированное продольными модуляциями огибающей амплитуд волн, практически полностью определяется комплексной амплитудой первой гармоники  $A$ , и только в пятом порядке по  $\epsilon$  на это поле начинает влиять первая гармоника в поверхностном давлении ветрового потока.

В приведенных выше уравнениях (7) – (10) каждое второе как раз и относится к классу уравнений, получивших в литературе название нелинейных уравнений Шредингера – НУШ-уравнений [3, 4]. При этом второе уравнение в (8) есть НУШ-уравнение III порядка, в (9) – НУШ-уравнение IV порядка, а в (10) – НУШ-уравнение V порядка по малому параметру  $\epsilon$ , характеризующему нелинейные и модуляционные эффекты в волновом движении.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ НУШ-УРАВНЕНИЙ III–V ПОРЯДКОВ

### 2.1. Общая характеристика уравнений в возмущениях

Рассмотрим сначала несколько вопросов, относящихся к общей характеристике полученных выше уравнений в возмущениях для комплексной амплитуды  $A$  и потенциала скоростей  $\Phi_{dr}$ . Первый вопрос касается области применимости, поскольку асимптотическая природа полученных уравнений естественно ограничивает их применимость определенными пространственно-временными интервалами. Если средний период и длина волн равны соответственно  $\langle T \rangle = 2\pi/\langle\sigma\rangle$  и  $\langle\lambda\rangle = 2\pi/\langle k \rangle$ , то каждое последующее уравнение применимо на временных и пространственных интервалах порядка  $2\langle T \rangle/\epsilon^n$  и  $\langle\lambda\rangle/\epsilon^n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ . Если принять для определенности  $\langle T \rangle \sim 10$  с, а  $\epsilon \sim 0.25$ , то получим временные интервалы порядка 1.3 мин, 5 мин, 20 мин и 1.3 часа, что включает интервал квазистационарности нерегулярного ветрового волнения (на котором производится определение статистических и спектральных характеристик волн) и приближается к интервалу синоптической изменчивости ветрового волнения [1].

Второй вопрос относится к формированию структуры уравнений при переходе к старшим приближениям. Как видно, эту структуру формируют операторы следующих типов: базовые

линейные операторы групповой структуры; линейные дисперсионные операторы в виде старших производных от  $A$  по медленным переменным  $X_m, Y_m, m = 1, 2, 3$ ; нелинейные операторы третьего и пятого порядков, содержащие модули  $|A|^m, m = 2, 4$ ; смешанные нелинейно-дисперсионные операторы четвертого и пятого порядков; "дрейфовые" операторы четвертого и пятого порядков, содержащие потенциал  $\Phi_{dr}$ , и, наконец, "ветровые" операторы третьего и пятого порядков. При этом нетрудно видеть, что структура операторов существенно усложняется при переходе к старшим приближениям.

Третий вопрос связан с интерпретацией полученных уравнений и общей схемой их решения. По существу уравнения (7)–(10) и (12)–(14) являются связанной рекуррентной последовательностью краевых задач в возмущениях с линейными уравнениями в области отыскания решения и граничными условиями, которые для комплексной амплитуды являются нелинейными и неоднородными, а для дрейфового потенциала – линейными и также неоднородными при  $z = 0$ . Поэтому естественная процедура решения сводится к следующему. В первом порядке возмущения определяется решение  $A(\vec{X}_1, T_1; \vec{p}_1)$ , где  $\vec{p}_1$  есть вектор параметров решения, зависящий от медленных переменных следующего уровня  $\vec{X}_2, T_2$ . Решение уравнений второго приближения приведет к зависимости  $\vec{p}_1(\vec{X}_2, T_2; \vec{p}_2)$ , где  $\vec{p}_2$  – вектор параметров второго приближения, зависящий от медленных переменных  $\vec{X}_3, T_3$  и т. д. На этом пути, однако, возникают серьезные трудности, связанные с нелинейностью граничных условий, а также с быстрым нарастанием числа параметров решений (постоянных интегрирования) на каждом этапе.

Альтернативная точка зрения состоит в том, чтобы в качестве основных уравнений рассматривать граничные условия на плоскости  $z = 0$  – НУШ-уравнения для комплексной амплитуды  $A$ , а все остальные уравнения интерпретировать как вспомогательные. В частности, первые уравнения в (7)–(10) следует рассматривать как условия для определения зависимости амплитуды  $A$  от вертикальных медленных координат  $Z_n, n = 1, 2, \dots$ , поскольку НУШ-уравнения описывают решение только на плоскости  $z = 0$ . Краевые задачи для дрейфового потенциала также играют вспомогательную роль, поскольку решение для  $\Phi_{dr}$  определяется структурой решения для  $A$  в первых двух порядках возмущений. Оба подхода имеют свои достоинства и недостатки. Так, в первом подходе удобнее искать спектральные решения, а второй более подходит для получения солитонных реше-

ний для амплитуды  $A$ .

Наконец, последний вопрос связан с влиянием давления ветрового потока на волновое движение. В рамках принятых допущений НУШ-уравнение III порядка включает амплитуду первой "ветровой" гармоники  $A_1^a$ , а уравнение V порядка – оператор  $P^a$ , требующий, вообще говоря, достаточно обширной информации об интенсивности и пространственно-временной структуре индуцированного поля давлений ветрового потока над волнами. Следовательно, ветровое давление должно определять динамику движения волн на временных интервалах порядка 4–7 минут. Однако представляется маловероятным, что ветровой поток может оказывать заметное влияние на крупномасштабные волны с высотами порядка 10–20 м и длинами порядка 100–200 м на столь ограниченных временных интервалах. Более реально предположить, что действие ветрового потока проявится на интервалах порядка 20–30 мин. и более. Это дает возможность уменьшить интенсивность ветрового давления, по крайней мере, еще на один порядок. Тогда амплитуда  $A_1^a$  переходит из уравнения (8) в (9), а оператор  $P^a$  вообще исключается из рассмотрения. Таким образом, это позволяет рассматривать базовые решения уравнений третьего порядка для более простых свободных волн, перенеся эффекты давления ветрового потока на волновой поверхности на четвертый уровень возмущения.

## 2.2. Трансформация НУШ-уравнений при заменах медленных переменных

Рассмотрим далее некоторые другие варианты НУШ-уравнений, которые можно получить при подходящих заменах медленных переменных. Во-первых, из структуры уравнений в возмущениях (7)–(10) видно, что можно ввести в рассмотрение единые медленные масштабы  $\vec{X} = (X, Y, Z)$  и  $T$  без разделения их по уровням возмущений. Для этого необходимо формально просуммировать соответствующие уравнения в (7)–(10) и (12)–(14) с учетом множителей  $\epsilon^n, n = 2, 3, 4, 5$  и соотношений для производных вида

$$\frac{\partial^n}{\partial X^n} = \left( \frac{\partial}{\partial X_1} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X_2} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + \dots \right)^n,$$

$$\frac{\partial^n}{\partial T^n} = \left( \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_2} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_3} + \dots \right)^n$$

при  $n = 1, 2, \dots$

Если, кроме этого, сделать замены зависимых переменных (чтобы убрать "лишние" степени  $\epsilon$  и

явно выделить порядки кратных амплитуд для ветрового давления и порядок дрейфового потенциала) вида

$$\epsilon A \rightarrow A, \epsilon^{3+j} A_j^a \rightarrow \langle \delta \rangle^{2+j} A_j^a, \epsilon^2 \Phi_{dr} \rightarrow \langle \delta \rangle \Phi_{dr},$$

то полученные выше НУШ-уравнения можно привести к виду [40]

$$\begin{aligned} (2A_T - A_X) + \epsilon B_2(A) + \epsilon^3 B_3(A) + \epsilon^3 B_4(A) - \\ - 4i\langle \delta \rangle^2 \epsilon^{-1} A(|A|^2 + 5\langle \delta \rangle^2 |A|^4) - \langle \delta \rangle^2 \times \\ \times (D_1^X(A) + \tilde{F}(A, \Phi_{dr})) + i\epsilon \langle \delta \rangle^2 (D_2^X + \\ + D_2^Y) = -i\langle \delta \rangle^2 \epsilon^{-1} A_1^a, \quad z=0, \end{aligned} \quad (15)$$

где последовательно обозначены дисперсионные, нелинейно-дисперсионные и "дрейфовый" операторы вида

$$\begin{aligned} B_2 &= -\frac{i}{4}(A_{XX} - 2A_{YY}), \\ B_3 &= \frac{1}{8}(A_{XXX} - 6A_{XYY}), \\ B_4 &= -\frac{i}{64}(5A_{XXXX} - 60A_{XXYY} + \\ &+ 12A_{YYYY}); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} D_1^X &= 2(7|A|^2 A_X - A|A|^2_X), \\ D_2^X &= [6(|A|^2 A)_{XX} - 7A|A|^2_{XX} - \\ &- \frac{11}{2}(A_X|A|^2_X + 2A|A_X|^2)], \\ D_2^Y &= [2(|A|^2 A)_{YY} - 4A|A|^2_{YY} - \\ &- (A_Y|A|^2_Y + 5A|A_Y|^2)]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= 2\{A[i\Phi_{drX} + \frac{1}{4}\epsilon(\Phi_{drXX} + 2\Phi_{drYY})] + \\ &+ \epsilon(A_X\Phi_{drX} + A_Y\Phi_{drY})\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Кроме того, уравнение в области  $z < 0$  и краевая задача для  $\Phi_{dr}$  переписутся в виде

$$\begin{aligned} (A_Z + iA_X) + \epsilon R(A)_{YY} = 0, \quad z < 0; \\ R = \frac{1}{2}[(A + i\epsilon A_X + \frac{1}{4}\epsilon^2 A_{YY}) - \epsilon^2 A_{XX}]; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\nabla^2 \Phi_{dr} = 0, \quad z < 0;$$

$$\begin{aligned} \Phi_{drZ} + \epsilon \Phi_{drTT} = 2(|A|^2_X + 2\langle \delta \rangle^2 |A|^4_X - \\ - i\epsilon N_1(A) + \epsilon^2 N_2(A)), \quad z = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= (\frac{3}{2}|A|^2_{XX} + |A|^2_{YY}) - 2[\frac{3}{2}(AA^*_X)_X + \\ &+ (AA^*_Y)_Y]; \\ N_2 &= \frac{1}{2}[\frac{1}{4}\epsilon|A|^2_{XXX} + (\frac{3}{2}|A_X|^2_X + \\ &+ |A_Y|^2_Y) + (A_Y A^*_X + A_X A^*_Y)_Y]. \end{aligned} \quad (21)$$

В новых переменных  $T, \bar{X}$  уравнения приобретают компактную форму записи и становятся более обозримыми. Отметим также, что уравнения (15), (20) фактически содержат теперь два малых параметра  $\epsilon$  и  $\langle \delta \rangle$ ; второй малый параметр появился естественным образом в результате нормирования переменных задачи.

Полученное выражение для нелинейного уравнения Шредингера сравнивалось с различными вариантами этого уравнения в периодической литературе, естественно, в рамках III, IV порядков. Приведем для примера НУШ-уравнение IV порядка из статьи [17] (в обозначениях первоисточника), как наиболее полное для свободных трехмерных групп волн:

$$\begin{aligned} 2i(A_t + \frac{1}{2}A_x) - \frac{1}{4}A_{xx} + \frac{1}{2}A_{yy} - |A|^2 A - \\ - \frac{i}{8}(A_{xxx} - 6A_{yyx}) - \frac{i}{2}A(AA^*_x - A^*A_x) + \\ + \frac{5}{2}i|A|^2 A_x - AH(|A|^2_x) = 0, \quad z = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{x' - x}{r^3} f(x') dx', \\ r &= [(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Если это уравнение умножить на  $i$ , заменить переменные  $A \rightarrow 2\langle \delta \rangle A$ ,  $t \rightarrow -t$ , производные представить в виде  $A_x = \epsilon A_X$ ,  $A_t = \epsilon A_T$ , ..., а нелинейно-дисперсионные члены преобразовать в виде  $\frac{i}{2}[5|A|^2 A_x - A(AA^*_x - A^*A_x)] = \frac{i}{2}[7|A|^2 A_x - A|A|^2_x]$ , то мы полностью получим НУШ-уравнение IV приближения согласно уравнению (15). При этом интеграл в уравнении (22) соответствует члену  $2iA\Phi_{drX}$  в (15), где дрейфовый потенциал есть

$$\Phi_{dr} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{|A|^2_x dx'}{r}, \quad z = 0.$$

Отметим еще, что нелинейные члены третьего и пятого порядков в уравнении (15) дают следующую нелинейную поправку к фазовой скорости бега прогрессивной волны:  $\psi = (\frac{1}{2}\delta_a^2 + \frac{5}{8}\delta_a^4)\epsilon^{-1}T$ , где величину  $\delta_a = \langle \delta \rangle a$  необходимо рассматривать как крутизну первой гармоники в потенциале скоростей. Крутизну  $\delta_a$  можно легко выразить через крутизну волнового склона  $\delta_w$ , используя приведенное выше решение для волны Стокса согласно (2), что снова приводит к поправке, представленной в (2).

В литературе встречаются и некоторые другие комбинации медленных переменных [16, 18]; в частности, из оператора линейного приближения естественно следует переменная  $\xi = 2(X + \frac{1}{2}T)$ , которая соответствует системе координат, движущейся со средней групповой скоростью бега волны.

В поперечном направлении удобнее использовать переменную  $\eta = \sqrt{2}Y$ . Связав две медленные переменные  $X$  и  $T$  в одну  $\xi$ , необходимо ввести новую медленную переменную; из физических соображений это может быть либо медленное время эволюции групп волн  $\tau = \frac{1}{2}\epsilon T$ , либо медленная продольная координата пробега группы волн  $\chi = \epsilon X$ . Эти группы медленных переменных рассматривались в нашей работе [40] и основные результаты состояли в следующем.

В медленных переменных  $(\xi, \eta, \tau)$  НУШ-уравнение записывается в виде (в операторной форме с дополнительной заменой  $A \rightarrow \frac{1}{2}A$ )

$$\begin{aligned} N_S^{(III)} + i\epsilon N_S^{(IV)} - \frac{1}{4}\epsilon^2 N_S^{(V)} + O(\epsilon^3) &= 0; \\ N_S^{(III)} &= [iA\tau + (A_{\xi\xi} - A_{\eta\eta}) + \delta_e^2 A|A|^2], \\ N_S^{(IV)} &= \{(A_{\xi\xi} - 3A_{\eta\eta})_{\xi} - \delta_e^2 [(7A_{\xi}|A|^2 - \\ &- A|A|^2_{\xi}) + 4iA\Phi_{dr\xi} - i\delta_e A_1^a]\}, \\ N_S^{(V)} &= \{(5A_{\xi\xi\xi\xi} - 10 \cdot 3A_{\xi\xi\eta\eta} + 3A_{\eta\eta\eta\eta}) - \\ &- 5\delta_e^4 A|A|^4 + \delta_e^2 [\tilde{F} + 4(D_2^X + \frac{1}{2}D_2^Y)]\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\delta_e = \langle \delta \rangle \epsilon^{-1}$ ; операторы  $D_2^X, D_2^Y$  сохраняют свой вид в (17) с учетом замены  $X \rightarrow \xi, Y \rightarrow \eta$ , а оператор  $\tilde{F}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= 8i[A(\Phi_{dr\xi\xi} + \Phi_{dr\eta\eta}) + 4(A_{\xi}\Phi_{dr\xi} + \\ &+ \frac{1}{2}A_{\eta}\Phi_{dr\eta})]. \end{aligned} \quad (24)$$

Не составляет труда получить аналогичные выражения и для операторов НУШ-уравнения для переменных  $(\xi, \eta, \chi)$ , однако в [40] было показано, что в операторах четвертого и пятого порядков  $N_S^{(IV)}, N_S^{(IV)}$  полезно выделить базовый оператор третьего порядка  $N_S^{(III)}$ :

$$\begin{aligned} N_S^{(IV)} &= -i(N_S^{(III)})_{\xi} - \Delta N_S^{(IV)}, \\ N_S^{(V)} &= (N_S^{(III)})_{\chi} + 5[(N_S^{(III)})_{\xi\xi} - \\ &- (N_S^{(III)})_{\eta\eta}] - 10(\Delta N_S^{(IV)})_{\xi} - \Delta N_S^{(V)}; \\ N_S^{(III)} &= [-iA_{\chi} + (A_{\xi\xi} - A_{\eta\eta}) + \delta_e^2 A|A|^2], \\ \Delta N_S^{(IV)} &= [2A_{\eta\eta\xi} + 8\delta_e^2 (A_{\xi}|A|^2 + \frac{1}{2}iA \times \\ &\times \Phi_{dr\xi} - \frac{1}{8}i\delta_e A_1^a)], \\ \Delta N_S^{(V)} &= \{2A_{\eta\eta\eta\eta} + 5\delta_e^4 A|A|^4 + \delta_e^2 [\Delta D_1^X - \\ &- (\Delta \tilde{F} + \Delta D_2^{\xi} + \Delta D_2^{\eta}) + 10i\delta_e A_1^a]\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где использованы следующие обозначения для до-

полнительных операторов:

$$\begin{aligned} \Delta D_1^X &= -i(15A_{\chi}|A|^2 - A|A|^2_{\chi}), \\ \Delta D_2^{\xi} &= 9[5A_{\xi\xi}^2 A^* - (3A_{\xi}^2 A^* + A^2 A_{\xi\xi}^*), \\ \Delta D_2^{\eta} &= [5A_{\eta\eta}^2 A^* + 6|A|^2_{\eta} A_{\eta} + (A^2 A_{\eta}^*)_{\eta}], \\ \Delta \tilde{F} &= 8i[iA\Phi_{dr\chi} + 9(A_{\xi}\Phi_{dr\xi} + \frac{2}{3}A\Phi_{dr\xi\xi}) + \\ &+ 2(A_{\eta}\Phi_{dr\eta} + \frac{1}{2}A\Phi_{dr\eta\eta})]. \end{aligned} \quad (26)$$

Полезность такой формы представления операторов старших порядков состоит в том, что при поиске решения для амплитуды  $A$  в виде асимптотического ряда

$$A = A_0 + \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \dots$$

выделенные операторы младших порядков обращаются в нуль, так что окончательно НУШ-уравнение может быть записано в укороченном виде [40] как

$$\begin{aligned} N_S^{(III)}(A) - i\epsilon \Delta N_S^{(IV)}(A) + \epsilon^2 [\frac{3}{2}(\Delta N_S^{(IV)}(A))_{\xi} + \\ + \frac{1}{4}\Delta N_S^{(V)}(A)] + O(\epsilon^3) = 0, \quad z = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где выражения для оставшихся операторов приведены в уравнениях (25), (26).

Зависимость (27) дает наиболее простую структуру операторов НУШ-уравнения пятого порядка из рассмотренных выше. При этом, если получено решение  $A(\xi, \eta, \chi)$ , то зависимость  $A(\xi, \eta, \tau)$  может быть определена с помощью замены переменных  $\chi = -\tau + \frac{1}{2}\epsilon\xi$ .

В заключение данного пункта приведем уравнение в области жидкости для амплитуды  $A$ , которое имеет вид

$$\begin{aligned} A_{\xi} &= -\frac{1}{4}i\epsilon R(A)_{\eta\eta}, \quad \tilde{\xi} = \xi + i\zeta, \quad \zeta = 2Z; \\ R(A) &= [A + 2i\epsilon A_{\xi} - 4\epsilon^2 (A_{\xi\xi} - \frac{1}{8}A_{\eta\eta})]. \end{aligned} \quad (28)$$

Для плоских групп волн это уравнение дает условие аналитичности амплитуды по комплексной переменной  $\tilde{\xi}^* = \xi - i\zeta$ .

### 3. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ НУШ-УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим класс стационарных решений НУШ-уравнений, т.е. решений, которые сохраняются в определенной системе координат. Стационарные решения образуют очень важный класс решений, поскольку они являются асимптотически устойчивыми и играют роль своего рода сепаратрис в "фазовом пространстве" всевозможных решений НУШ-уравнений. При этом ограничимся в



основном плоскими (2D) волновыми движениями, которые также могут использоваться для локального описания групп волн в шторме с достаточно протяженными гребнями.

### 3.1. Стационарные 2D решения НУШ-уравнения III порядка

Представив амплитуду  $A$  через огибающую амплитуд  $a$  и модуляцию фазы  $\psi$  в виде  $A = a \exp i\psi$  (множитель  $\frac{1}{2}$  уже был учтен ранее при получении уравнений (23) – (27)), приведем НУШ-уравнение III порядка для плоских волн к системе двух уравнений для действительных функций  $a$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned} a_\tau + 2a_\xi \psi_\xi + a\psi_{\xi\xi} &= 0, \\ -a\psi_\tau + a_{\xi\xi} - a\psi_\xi^2 + \delta_\epsilon^2 a^3 &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Для получения решений системы (29) используем прием типа метода полуобратной задачи, когда одна из функций в (29) задается определенной структурой, а другая уже ищется как решение соответствующих уравнений. Напомним сначала известные решения НУШ-уравнения третьего порядка. Простейшее стационарное решение – это прогрессивная волна Стокса с постоянной амплитудой  $a = a_0 = \text{const}$ . Для фазы  $\psi = \psi(\xi, \tau)$  в этом случае решение получается в виде линейной функции

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \kappa_0 \xi + \omega_0 \tau; \\ \omega_0 &= (-\kappa_0^2 + \delta_\epsilon^2 a_0^2), \quad (\kappa_0, \omega_0, \psi_0) = \text{const}. \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\psi_0$  – начальная фаза;  $\kappa_0$  – поправка к волновому числу, возникающая когда последнее несколько отличается от среднего волнового числа  $\langle k \rangle$ ;  $\omega_0$  – поправка к круговой частоте (и фазовой скорости), обусловленная указанной расстройкой волнового числа и нелинейностью волн.

Если теперь принять для фазы  $\psi$  линейную зависимость  $\psi = \kappa_0 \xi + \omega_0 \tau$ , то для амплитуды  $a$  получим уравнения

$$\begin{aligned} a_\tau + 2\kappa_0 a_\xi &= 0, \\ a_{\xi\xi} - a(\omega_0 + \kappa_0^2) + \delta_\epsilon^2 a^3 &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Из первого уравнения (31) видно, что  $a = a(\vartheta)$ ,  $\vartheta = \xi - 2\kappa_0 \tau$ . В литературе хорошо известны локализованные солитонные решения вида  $a(\vartheta) = a_s \cosh^{-1} b\vartheta$  (см. [3, 4, 14, 15, 22, 23] и многие другие работы по НУШ-уравнениям), причем для волн на глубокой воде только  $n = 1$  обеспечивает баланс кубического нелинейного и дисперсионного членов в (31), так что окончательно соли-

тонное решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} a &= a_s \cosh^{-1} b\vartheta, \quad \psi = \psi_0 + \kappa_0 \xi + \omega_0 \tau; \\ \vartheta &= \vartheta_0 + \xi - 2\kappa_0 \tau, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_\epsilon a_s, \\ \omega_0 &= (-\kappa_0^2 + \frac{1}{2} \delta_\epsilon^2 a_s^2), \end{aligned} \quad (32)$$

где  $a_s$  – максимальная амплитуда солитона огибающей;  $b$  – параметр ширины солитона;  $\vartheta_0$  определяет начальное положение солитона.

В солитонном решении, как видно, нелинейная поправка к круговой частоте составляет только половину от таковой для периодических волн Стокса, а протяженность солитона огибающей зависит от максимальной амплитуды  $a_s$ .

Здесь уместно поставить вопрос – возможно ли существование стационарного солитона огибающей на фоне прогрессивной волны Стокса, т.е. при задании амплитуды в виде  $a = a_0 + \tilde{a}(\vartheta)$ ,  $\tilde{a}(\vartheta) = a_s \cosh^{-1} b\vartheta$ , где  $\vartheta = \xi + v\tau$ . Оказывается, что даже при представлении модуляции фазы в виде  $\psi(\xi, \tau) = \psi(\vartheta, \tau)$  с явной зависимостью от времени эволюции  $\tau$  не удается получить непротиворечивые соотношения для данной структуры решения и поэтому ответ на поставленный вопрос следует считать отрицательным.

Общее же уравнение для амплитуды получается из второго уравнения (31), если умножить его на  $a_\vartheta$  и проинтегрировать один раз по  $\vartheta$ :

$$(a_\vartheta)^2 = c_0 + (\omega_0 + \kappa_0^2) a^2 - \frac{1}{2} \delta_\epsilon^2 a^4, \quad (33)$$

где  $c_0$  – постоянная интегрирования.

Правую часть в уравнении (33) можно разложить на множители, так что это уравнение приводится к виду, допускающему решения в эллиптических функциях Якоби [11, 47]. Если несколько перенормировать переменные  $a = a_s \hat{a}$ ,  $\vartheta = (\frac{1}{\sqrt{2}} \delta_\epsilon a_s)^{-1} \hat{\vartheta}$ , то уравнение (33) приводится к каноническому виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\hat{a}}{d\hat{\vartheta}}\right)^2 &= (a_1^2 - \hat{a}^2)(\hat{a}^2 - a_2^2), \\ a_1^2 &= 2\Omega_0 \delta_\epsilon^{-2} (1 - \frac{1}{2} R), \quad a_2^2 = 2\Omega_0 \delta_\epsilon^{-2} \frac{1}{2} R; \\ \Omega_0 &= \omega_0 + \kappa_0^2, \quad R = \sqrt{1 + 2c_0 \Omega_0^{-2} \delta_\epsilon^2} - 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Решением уравнения (34) может быть только эллиптическая функция Якоби  $dn$  при условии  $a_1^2 = 1$ ,  $a_2^2 = (1 - m)$  ( $m \in [0; 1]$  – квадрат модуля функции [47]), так что окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} a(\vartheta) &= a_s dn(\vartheta|m), \quad \psi = \psi_0 + \kappa_0 \xi + \omega_0 \tau; \\ \vartheta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_\epsilon a_s (\xi - 2\kappa_0 \tau), \quad m = 1 - (1 - \frac{\delta a}{a_s})^2; \\ \omega_0 &= -\kappa_0^2 + \delta_\epsilon^2 a_s^2 (1 - m/2), \end{aligned} \quad (35)$$

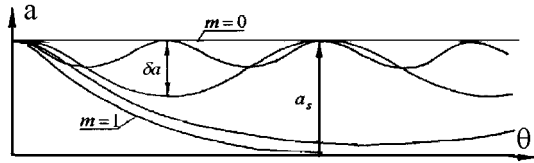


Рис. 4.  $dn$  –решения для огибающей амплитуд волн при различной глубине модуляции

где в качестве свободных параметров использованы:  $a_s$  – максимальная амплитуда;  $\delta a \leq a_s$  – глубина модуляции амплитуд (см. рис. 4), а также определенные выше величины  $\kappa_0$  и  $\psi_0$ .

Период модуляции огибающей амплитуд  $T_a$  равен  $T_a = 2K(m)$ , где  $K(m)$  – полный эллиптический интеграл первого рода [47]. Как предельные случаи решение (35) дает периодическую волну Стокса ( $m = 0$ ) и солитон огибающей ( $m = 1$ ), рассмотренные выше.

Следуя принятому подходу, предположим, что для амплитуды имеет место общая зависимость  $a = a(\vartheta)$ ,  $\vartheta = \xi + v\tau$ ,  $v = \text{const}$ . Рассмотрим возможность существования более общей, чем линейная, фазы  $\psi = \kappa_0\xi + \omega_0\tau + \phi(\vartheta)$ ,  $\phi \sim 1$ . Тогда уравнения (29) примут вид

$$\begin{aligned} v a_{\vartheta} + 2(\kappa_0 + \phi_{\vartheta})a_{\vartheta} + a\phi_{\vartheta\vartheta} &= 0, \\ a_{\vartheta\vartheta} - a[(\omega_0 + v\phi_{\vartheta}) + (\kappa_0 + \phi_{\vartheta})^2] + &+ \delta_e^2 a^3 = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Если первое уравнение в (36) умножить на  $a$ , то его затем можно проинтегрировать дважды по  $\vartheta$ , получив выражение для фазы  $\phi$ :

$$\phi(\vartheta) = -\left(\frac{1}{2}v + \kappa_0\right)\vartheta + c_1 \int a^{-2} d\vartheta + \phi_0, \quad \phi_0 = \text{const}. \quad (37)$$

Чтобы не дублировать линейный член в фазе  $\psi$ , необходимо принять, как и ранее,  $v = -2\kappa_0$ .

Второе уравнение в (36) после домножения на квадрат амплитуды и последующего интегрирования трансформируется к виду (в нормированных переменных  $\hat{a}, \hat{\vartheta}$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\hat{a}_{\hat{\vartheta}}^2)^2 &= -\hat{a}^6 + B\hat{a}^4 - C\hat{a}^2 + D, \\ B &= 2\Omega_0(\delta_e a_s)^{-2}, \quad C = -2c_0\delta_e^{-2}a_s^{-4}, \\ D &= -2c_1^2\delta_e^{-2}a_s^{-6}. \end{aligned} \quad (38)$$

Это уравнение заменой искомой переменной

$$\hat{q} = -\hat{a}^2 + 2\Omega_0/(3\delta_e^2 a_s^2)$$

приводится к канонической форме, допускающей решение в эллиптических функциях Вейерштрасса

$\wp(\hat{\vartheta}; \omega_1, \omega_2)$  [47, 49] ( $\omega_1, \omega_2$  – примитивные периоды функции Вейерштрасса)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\hat{q}}{d\hat{\vartheta}}\right)^2 &= 4\hat{q}^3 - g_2\hat{q} - g_3, \\ g_2 &= \frac{16}{3}(\delta_e a_s)^{-4}\Omega_0^2\left(1 + \frac{3}{2}\tilde{c}_0\right), \\ g_3 &= -\frac{64}{27}(\delta_e a_s)^{-6}\Omega_0^3\left[\left(1 + \frac{9}{8}\tilde{c}_0\right) - \frac{27}{32}\tilde{c}_1^2\right], \end{aligned} \quad (39)$$

где  $\tilde{c}_0 = 2c_0\delta_e^2\Omega_0^{-2}$ ,  $\tilde{c}_1^2 = 4c_1^2\delta_e^4\Omega_0^{-3}$ , а дискриминант полинома в правой части уравнения (39) [47–49] будет

$$\begin{aligned} \Delta &= (g_2^3 - 27g_3^2) = [2(\delta_e a_s)^{-2}\Omega_0]^6 \left[ (1 + \tilde{c}_0)(\tilde{c}_0^2 + \right. \\ &\left. + 4\tilde{c}_1^2) + \frac{1}{2}\tilde{c}_1^2(\tilde{c}_0 - \frac{27}{8}\tilde{c}_1^2) \right]. \end{aligned}$$

Решению данного уравнения в действительных функциях отвечает условие  $\Delta \geq 0$  [47], при котором имеют место три действительных корня полинома в правой части  $e_1 \geq e_2 \geq e_3$  ( $e_1 = \wp(\omega_1)$ ,  $e_2 = \wp(\omega_1 + \omega_2)$ ,  $e_3 = \wp(\omega_2)$ ;  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ) [48].

Таким образом, записав  $\hat{q} = \wp(\hat{\vartheta}; \omega_1, \omega_2)$ , получим для огибающей амплитуд  $a$  выражение

$$\begin{aligned} a &= a_s \sqrt{a_m - \wp(\hat{\vartheta}; \omega_1, \omega_2)}, \\ a_m &= \frac{2}{3}(\delta_e a_s)^{-2}\Omega_0. \end{aligned} \quad (40)$$

Варьируя постоянные интегрирования  $c_0, c_1$ , можно добиться различных форм решения в рамках данного класса функций. Для этого удобно перейти от эллиптических функций Вейерштрасса к эллиптическим функциям Якоби, используя известные соотношения между ними [47, 49]. Стандартные соотношения, справедливые для всей комплексной плоскости, являются в общем случае сингулярными [49], однако в частном случае действительной переменной можно получить и регулярные соотношения, если согласовать канонические дифференциальные уравнения для обеих видов эллиптических функций, записанные выше. Для этого необходимо уравнение для любой из ограниченных функций Якоби ( $sn, cn, dn$ ) домножить на квадрат этой же функции и использовать преобразование вида

$$\wp(\hat{\vartheta}) = \gamma_0 + \gamma_2 J^2(\hat{\vartheta}_1), \quad \hat{\vartheta} = \gamma_1 \hat{\vartheta}_1,$$

где  $J = (sn, cn, dn)$  – обозначение для функций Якоби и  $\gamma_n$ ;  $n = 0, 1, 2$  – коэффициенты, подлежащие определению при согласовании канонических уравнений.

В результате получим следующие несингулярные соотношения:

$$\begin{aligned} \wp(\hat{\vartheta}) &= e_3 + (e_2 - e_3)sn^2(\sqrt{e_1 - e_3}\hat{\vartheta}) = \\ &= e_2 - (e_2 - e_3)cn^2(\sqrt{e_1 - e_3}\hat{\vartheta}) = \\ &= e_1 - (e_1 - e_3)dn^2(\sqrt{e_1 - e_3}\hat{\vartheta}). \end{aligned} \quad (41)$$

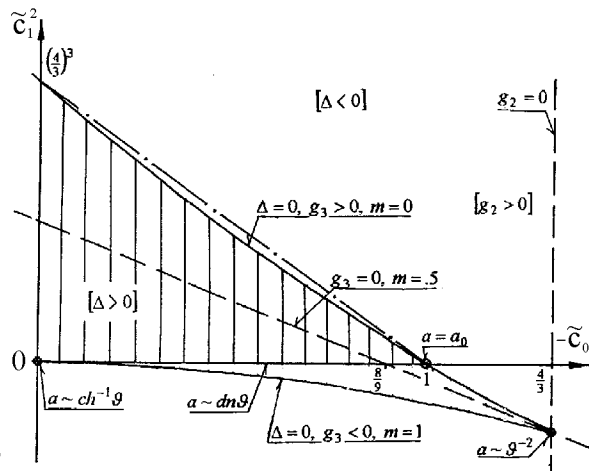


Рис. 5. Диаграмма решений по параметрам  $(c_0, c_1)$ ;  $|||$  – область действительных решений, ——— аппроксимация  $\tilde{c}_1^2 \sim (4/3)^3(1 + \tilde{c}_0)$

При этом корни полинома  $\{e_n\}$ , дискриминант  $\Delta$  и инварианты  $g_2, g_3$  связаны с квадратом модуля функций Якоби  $m$  и новым параметром – волновым числом модуляций огибающей амплитуд на действительной прямой  $k = 2K(m)/\omega_1$  – известными соотношениями [49]

$$e_1 = \frac{1}{3}k^2(2 - m), \quad e_2 = \frac{1}{3}k^2(2m - 1),$$

$$e_3 = -\frac{1}{3}k^2(1 + m);$$

$$\Delta = 16k^{12}m^2(m - 1)^2, \quad m \in [0; 1]; \quad (42)$$

$$g_2 = \frac{4}{3}k^4(m^3 + 1)(m + 1)^{-1},$$

$$g_3 = \frac{4}{27}k^6(m + 1)(m - 2)(2m - 1).$$

Из этих соотношений видно, что условие  $\Delta = 0$  возможно только при  $m = 0$  (периодические волны Стокса) и при  $m = 1$  (солитон огибающей), а условие  $g_3 = 0$  дает  $m = 1/2$  и при  $m \in [0; 1]$  всегда  $g_2 > 0$ . Полезной является диаграмма решений на плоскости параметров  $c_0, c_1$  (рис. 5), из которой, в частности, следует, что солитонное решение является единственным действительным решением на нижней ветви полукубической параболы, определяемой условием  $\Delta = 0$ , тогда как на верхней ветви параболы таких решений может быть целое семейство, включая и решение для волны Стокса. Сингулярное решение  $\varphi \sim \vartheta^{-2}$  находится вне поля действительных решений при условии  $g_2 = g_3 = 0$ .

Подстановка полученных зависимостей в выра-

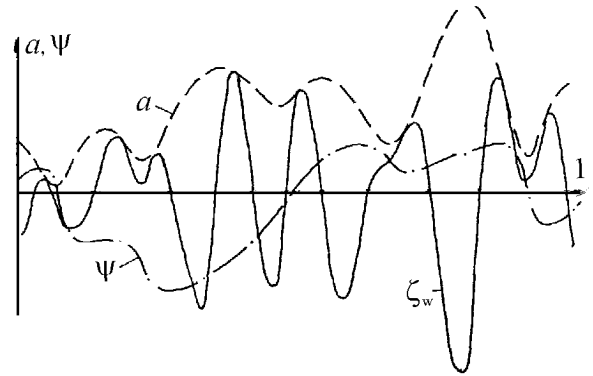


Рис. 6. Огибающая амплитуд и модуляция фазы для участка нерегулярного волнения в СЗА

жение для амплитуды (40) окончательно дает

$$a = ka_s[\frac{1}{3}(\hat{\Omega}_0 + (1 + m)) - msn^2(k\hat{\vartheta}|m)]^{1/2} =$$

$$= ka_s[\frac{1}{3}(\hat{\Omega}_0 - (2m - 1)) + mcn^2(k\hat{\vartheta}|m)]^{1/2} =$$

$$= ka_s[\frac{1}{3}(\hat{\Omega}_0 - (2 - m)) + dn^2(k\hat{\vartheta}|m)]^{1/2} \quad (43)$$

с соотношениями для постоянных интегрирования, которые следуют из сравнения различных выражений для инвариантов  $g_2, g_3$ :

$$\hat{c}_0 + \hat{\Omega}_0^2 = m^2 - m + 1,$$

$$\hat{c}_1^2 - \frac{2}{3}\hat{c}_0\hat{\Omega}_0 - \hat{\Omega}_0^3 = (m - 2)(2m - 1)(m + 1), \quad (44)$$

где

$$\hat{\Omega}_0 = 2\Omega_0(\delta_\epsilon ka_s)^{-2}, \quad \hat{c}_0 = 6c_0(\delta_\epsilon k^2 a_s^2)^{-2},$$

$$\hat{c}_1^2 = 27c_1^2(\delta_\epsilon k^3 a_s^3)^{-2}.$$

В эти выражения входят следующие параметры и постоянные интегрирования:  $c_0, c_1, a_s, k, m, \Omega_0 = \omega_0 + \kappa_0^2$ , причем параметры  $a_s, k$  входят только в виде произведения. Амплитуда  $a_s$  и расстройка  $\kappa_0$  являются произвольными и не могут определяться в рамках данной постановки задачи, поэтому оставшиеся свободные параметры  $c_0, c_1, m, \omega_0$  могут быть выражены через два из них с помощью соотношений связи (44).

Таким образом, получен сравнительно новый класс стационарных решений, который начал изучаться в литературе лишь в последние годы [51,52]. Анализ показал, что данное решение дает корректные асимптотики для частных случаев уже известных решений. Физичность новых решений подтверждается анализом волнограмм реального нерегулярного волнения (см. рис. 6), из которых видно, что в местах резкого уменьшения огибающей амплитуд модуляция фазы также испытывает

быстрое изменение в виде перехода с одного уровня на другой.

### 3.2. Трехмерные решения НУШ III-уравнения

Для трехмерных волн уравнения (29) будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_\tau + 2(a_\xi \psi_\xi - a_\eta \psi_\eta) + a(\psi_{\xi\xi} - \psi_{\eta\eta}) &= 0, \\ -a\psi_\tau + (a_{\xi\xi} - a_{\eta\eta}) - a(\psi_\xi^2 - \psi_\eta^2) + &+ \delta_e^2 a^3 = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Как и для плоских волн, примем, что фаза  $\psi$  является линейной функцией всех медленных переменных  $\xi, \eta, \tau$ , т.е.

$$\psi = \psi_0 + \kappa_{||}\xi + \kappa_{\perp}\eta + \omega_0\tau, \quad (46)$$

где величина  $\kappa_{||}$  определяет, как и ранее, продольную расстройку по волновому числу, а величина  $\kappa_{\perp}$  – поперечную расстройку, задающую малый поворот порядка  $\epsilon$  для вектора фазовой скорости бега волн. Тогда уравнения (45) для амплитуды  $a$  перепишутся в виде

$$\begin{aligned} a_\tau + 2(\kappa_{||}a_\xi - \kappa_{\perp}a_\eta) &= 0, \\ a_{\xi\xi} - a_{\eta\eta} - a(\omega_0 + \kappa_{||}^2 - \kappa_{\perp}^2) + \delta_e^2 a^3 &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Примем далее, что амплитуда  $a$  является функцией переменной

$$\chi_{\perp} = \xi + \nu_{\perp}\eta + \nu\tau, \quad \nu = -2(\kappa_{||} - \nu_{\perp}\kappa_{\perp}),$$

в которой величина  $\nu_{\perp}$  определяет поворот вектора групповой скорости бега волн на некоторый угол относительно оси  $Ox$ . Тогда второе уравнение в (47) снова превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение рассмотренного ранее вида

$$(1 - \nu_{\perp}^2)a_{\chi_{\perp}\chi_{\perp}} - a(\omega_0 + \kappa_{||}^2 - \kappa_{\perp}^2) + \delta_e^2 a^3 = 0. \quad (48)$$

Решение данного уравнения будет давать так называемые косые или псевдотрехмерные группы волн, для которых вектора фазовой и групповой скоростей являются неколлинеарными, так что сами волны и группы волн будут бежать в разных направлениях (подробнее см. [9–11]). Такие решения хорошо описывают корабельные волны, расходящиеся от носовой оконечности движущегося судна [12]. Однако в штормовой области трехмерные группы волны движутся с почти совпадающими направлениями фазовой и групповой скоростей по отношению к генеральному направлению движения волн. Поэтому для трехмерных групп

ветровых волн необходимо искать другие структуры решений.

Один из наиболее простых способов получения таких решений может состоять в следующем. Будем полагать, что величины  $a_s, b, \kappa_0, \omega_0, \psi_0$  в плоских волнах являются функциями поперечной координаты  $\eta$ . Рассмотрим, существуют ли непротиворечивые условия для отыскания этих зависимостей, исходя из общих уравнений (45). Такая процедура порождает систему обыкновенных дифференциальных уравнений по  $\eta$ , анализ решений которой показал следующие результаты. Во-первых, величины  $b, \kappa_0, \omega_0$  должны быть постоянными, во-вторых, для фазы  $\psi_0$  получаются противоречивые соотношения типа  $\psi_{0\eta} \sim a_s^{-2}$  и  $\psi_{0\eta} \sim a_s^2$ , и, в третьих, возникают противоречия при отыскании решения для  $a_s(\eta)$ . Таким образом, данный путь оказывается непродуктивным и не дает требуемых результатов.

Исходя из физических представлений, можно предположить, что в трехмерном случае вообще могут отсутствовать стационарные решения, так как нелинейный кубический член балансируется второй производной по продольной координате, а вторая производная по поперечной координате, имеющая противоположный знак и связанная с пространственным расхождением волн, в этом механизме может и не участвовать. Поэтому неизбежно будет иметь место "расплывание" волнового пакета в поперечном направлении с модификацией его движения и в продольном направлении, т.е. пакет должен непрерывно эволюционировать.

Начальную динамику этого процесса можно проследить, наложив на трехмерное солитонное решение малые нестационарные возмущения по амплитуде и фазе с удержанием по ним только малых первого порядка

$$a = a^{(s)} + \tilde{a}, \quad \psi = \psi^{(s)} + \tilde{\psi},$$

где первые члены есть солитонное решение вида (32), а вторые – малые возмущения, первоначально равные нулю и развивающиеся из-за неточности начального задания трехмерной группы волн. При этом трехмерность солитона огибающей задана формой (рис. 7)

$$\begin{aligned} a_s &= a_s(\eta) = a_{s0}r_0(1 + d_0 \cosh \beta\eta)^{-1}, \\ r_0 &= \sqrt{1 - d_0^2}, \quad d_0 = \cosh^{-1} \beta\eta_0, \end{aligned} \quad (49)$$

где  $\eta_0$  – эффективная ширина группы;  $\beta$  – параметр уменьшения амплитуд на периферии группы, так что варьируя значения  $\eta_0$  и  $\beta$ , можно получить различные формы гребней волн.

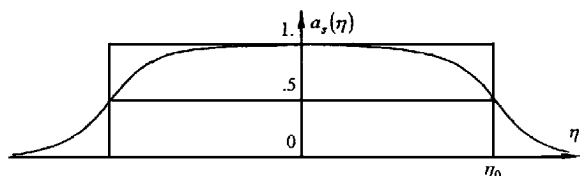


Рис. 7. Форма огибающей амплитуд волн в поперечном направлении;

Подстановка этих соотношений в уравнения (45) приводит к следующей системе линейных уравнений в возмущениях относительно амплитуды  $\tilde{a}$  и модифицированной фазы  $\tilde{\phi} = a_s \tilde{\psi}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\tau + \tilde{\phi}_{\zeta_+ \zeta_-} - F_1 \tilde{\phi} &= 0; \\ \tilde{\phi}_\tau - \tilde{a}_{\zeta_+ \zeta_-} + F_2 \tilde{a} &= F_0, \end{aligned} \quad (50)$$

где  $\zeta_\pm = (\vartheta \pm \eta)/2$  и обозначены функции

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2} \delta_\varepsilon^2 a_{s_0}^2 (1 - 2ch_{\parallel}^{-2}) + \beta^2 d_0 [ch_{\perp}] + \\ &\quad + d_0 (2 - ch_{\perp}^2) (1 + d_0 ch_{\perp})^{-2}; \\ F_2 &= \frac{1}{2} \delta_\varepsilon^2 a_{s_0}^2 [1 - 6r_0^2 (1 + d_0 ch_{\perp})^{-2} ch_{\parallel}^{-2}]; \\ F_0 &= -a_{s_0} r_0 d_0 (1 + d_0 ch_{\perp})^{-3} ch_{\parallel}^{-1} \{ \delta_\varepsilon^2 a_{s_0}^2 \times \\ &\quad \times ch_{\parallel}^{-2} [2ch_{\perp} + d_0 (1 + ch_{\perp})^{-2}] - \\ &\quad - \beta^2 [ch_{\perp}] + d_0 (2 - ch_{\perp}^2) \}. \end{aligned} \quad (51)$$

Здесь для краткости письма также приняты обозначения  $ch_{\parallel} = \cosh b\vartheta$ ,  $ch_{\perp} = \cosh \beta\eta$ .

Однородная часть решения допускает разделение переменных по  $\tau$  и  $\zeta_\pm$  и зависимость по медленному времени  $\tau$  имеет экспоненциальный характер  $\sim \exp(\pm \lambda \tau)$ , где  $\lambda$  – константа расщепления с непрерывным спектром. Эта часть решения по  $\zeta_\pm$  удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} Z^2[\tilde{a}_o] - Z[F_2 \tilde{a}_o] - F_1 Z[\tilde{a}_o] + (F_1 F_2 + \\ + \lambda^2) \tilde{a}_o &= 0; \\ \tilde{\phi}_o &= (Z[\tilde{a}_o] - F_2 \tilde{a}_o), \\ Z[\cdot] &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \zeta_+ \partial \zeta_-}, \end{aligned} \quad (52)$$

а неоднородную часть следует искать методом вариации произвольных постоянных по медленному времени. Окончательно полное решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= - \int_0^\infty (1 - \cosh \lambda \tau) f_0(\lambda) \tilde{a}_o(\zeta_\pm, \lambda) d\lambda, \\ \tilde{\phi} &= \int_0^\infty \lambda^{-1} \sinh \lambda \tau f_0(\lambda) \tilde{\phi}_o(\zeta_\pm, \lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (53)$$

где  $f_0$  есть разложение правой части  $F_0$  по однородной фазе  $\tilde{\phi}_o$ :

$$F_0 = \int_0^\infty f_0(\lambda) \tilde{\phi}_o(\lambda) d\lambda.$$

Таким образом, для полного решения задачи о развитии нестационарных возмущений необходимо найти однородные решения  $\tilde{a}_o$  и  $\tilde{\phi}_o$ , а также  $f_0(\lambda)$ . При  $\tau \rightarrow 0$  асимптотические оценки имеют вид

$$\tilde{a} \sim \tau^2 \int_0^\infty \lambda^2 f_0 \tilde{a}_o d\lambda, \quad \tilde{\phi} \sim \tau F_0. \quad (54)$$

В заключение данного пункта рассмотрим еще некоторые преобразования исходной системы уравнений для трехмерных волн (45). Эти уравнения можно в некоторой степени упростить, если принять, что линейная часть модуляции фазы  $\psi = \kappa_0 \xi + \omega_0 \tau + \phi$  не зависит от поперечной координаты (ветровые волны с  $\kappa_{\perp} = 0$ ), а нелинейная часть фазы  $\phi$  зависит от поперечной координаты слабо и также может в первом порядке игнорироваться.

Тогда первое уравнение в (45) переписется в виде

$$\begin{aligned} \varkappa_\vartheta + 2l_\vartheta \varkappa &= -l_\tau; \\ l &= \ln a, \quad \kappa = \phi_\vartheta, \end{aligned} \quad (55)$$

где зависимость  $a$  и  $\phi$  от времени  $\tau$  учитывает нестационарность движения групп волн.

Это уравнение для функции  $\varkappa$  можно проинтегрировать по переменной  $\vartheta$ , получив решение

$$\varkappa = a^{-2} \left( c_0 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\vartheta} a_\tau^2 d\vartheta \right). \quad (56)$$

Постоянную интегрирования  $c_0$  можно определить, например, из условия  $\varkappa \rightarrow 0$ ,  $\vartheta \rightarrow \infty$ , что окончательно дает соотношения

$$\begin{aligned} \varkappa &= -\frac{1}{2} a^{-2} \langle a^2 \rangle_\tau, \quad \langle \dots \rangle = \int_{-\infty}^{\vartheta} (\dots) d\vartheta; \\ \phi &= \phi_0 - \frac{1}{2} \langle a^{-2} \langle a^2 \rangle_\tau \rangle. \end{aligned} \quad (57)$$

Если подставить теперь полученные зависимости во второе уравнение (45) и отбросить величину  $\phi_\eta^2$  как малую, то последнее переписется в виде

$$Z[a] - a[(\omega_0 + \kappa_0^2) - (\phi_\tau + \phi_\vartheta^2)] + \delta_\varepsilon^2 a^3 = 0. \quad (58)$$

Поскольку фаза  $\phi$  определяется через огибающую амплитуд интегральным соотношением (57), то уравнение (58) является по-существу нелинейным

интегро-дифференциальным уравнением в частных производных, и его интегрирование в общем случае требует привлечения численных методов [48].

Таким образом, приведенные выше результаты показывают, что при отыскании трехмерных решений, описывающих группы ветровых волн в штормовой области, трудности математического характера оказываются более существенными, чем при исследовании плоских волновых движений.

### 3.3. Солитонное решение НУШ-уравнения IV порядка

Рассмотрим теперь влияние старших порядков на базовые стационарные решения НУШ-уравнения III порядка, взяв в качестве примера солитонное решение  $\cosh^{-1}$  и НУШ-уравнение IV порядка. Это позволит выявить проблемы, которые возникают при переходе к старшим приближениям. Поскольку НУШ-уравнение содержит теперь малый параметр  $\epsilon$ , то представим решение в виде рядов по степеням  $\epsilon$  [14]:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \epsilon a_1 + \dots, \\ \psi &= \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \dots. \end{aligned} \quad (59)$$

Для базовых величин  $a_0, \psi_0$  решение имеет вид (32), а поправки  $a_1, \psi_1$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} a_{1\tau} + 2(a_{1\xi}\psi_{0\xi} + a_{0\xi}\psi_{1\xi}) + (a_1\psi_{0\xi\xi} + a_0 \times \\ \times \psi_{1\xi\xi}) &= [a_{0\tau}\psi_{0\xi} + (a_0\psi_{0\tau})_\xi] + 8\delta_\epsilon^2 a_0^2 a_{0\xi}, \\ -a_0\psi_{1\tau} - a_1\psi_{0\tau} + a_{1\xi\xi} - a_1\psi_{0\xi}^2 - 2a_0\psi_{0\xi} \times \\ \times \psi_{1\xi} + 3\delta_\epsilon^2 a_0^2 a_1 &= -(a_0\psi_{0\tau}\psi_{0\xi} - a_{0\tau\xi}) - \\ -8\delta_\epsilon^2 a_0^3 \psi_{0\xi} - 2a_0\Phi_{dr\xi}. \end{aligned} \quad (60)$$

Потенциал скоростей дрейфового течения  $\Phi_{dr}$  удовлетворяет краевой задаче (20), которую в данном приближении следует рассматривать с точностью до  $O(\epsilon)$ . Общее решение краевой задачи можно искать методом функций Грина [48]. Это приводит к интегральному представлению для  $\Phi_{dr}$ , записанному выше. Однако тогда уравнение (60) трансформируется к более сложному интегро-дифференциальному уравнению. Поэтому более удобным является решение с помощью интегрального преобразования Фурье, что дает окончательно зависимость

$$\Phi_{dr} = -a_s^2 \int_0^\infty \frac{\sigma}{\sinh \frac{\pi}{2}\sigma} \exp(b\zeta\sigma) \sin(b\vartheta\sigma) d\sigma,$$

из которой получаются следующие оценки для проекций дрейфовых скоростей в плоскости тихой воды:

$$\begin{aligned} \Phi_{dr\xi} &\approx -2ba_s^2(\cosh^{-3} b\vartheta + \frac{1}{16} \cosh^{-2} b\vartheta - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cosh^{-1} b\vartheta), \\ \Phi_{dr\zeta} &= -2ba_s^2 \cosh^{-3} b\vartheta \sinh b\vartheta. \end{aligned} \quad (61)$$

Подставляя теперь зависимости для  $a_0, \psi_0, \Phi_{dr\xi}$  в правую часть уравнений (60), можно получить явные уравнения для определения поправок  $a_1, \psi_1$ . Для записи этих уравнений введем еще новые переменные

$$\vartheta^\pm = b(\xi \pm 2\kappa_0\tau).$$

При определении поправки к базовому решению будем следовать условию стационарности решения, приняв  $\psi_1(\xi, \tau) = \psi_1(\vartheta^-)$ . Тогда первое уравнение в (60) сведется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial \vartheta^-} &= F[\psi_1(\vartheta^-)], \\ F[\psi_1(\vartheta^-)] &= \psi_{1\vartheta^-} - 2 \cosh^{-1} \vartheta^- \sinh \vartheta^- \times \\ &\quad \times \psi_{1\vartheta^-} + [(3\kappa_0^2 - \frac{1}{2}a_s^2) \cosh^{-1} \vartheta^- \sinh \vartheta^- + \\ &\quad + 8a_s^2 \cosh^{-3} \vartheta^- \sinh \vartheta^-]/b. \end{aligned} \quad (62)$$

Из данного уравнения видно, что амплитуда  $a_1$  также должна быть функцией только переменной  $\vartheta^-$ , а правая часть дает уравнение для фазы  $\psi_1$ , однородную и неоднородную части решения, которые будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_{1\vartheta^-} &= \psi_{1\vartheta^-}^o + \psi_{1\vartheta^-}^i, \\ \psi_{1\vartheta^-}^o &= \alpha_0 \cosh^2 \vartheta^-, \\ \psi_{1\vartheta^-}^i &= \alpha_1 + \alpha_2 \cosh^{-2} \vartheta^-. \end{aligned} \quad (63)$$

После определения постоянных  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  и однократного интегрирования окончательно получим для фазы  $\psi_1$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{10} + (\frac{3}{2}\kappa_0^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}a_s) \vartheta^- + 2\sqrt{2}a_s \times \\ &\quad \times \tanh \vartheta^-, \quad \psi_{10} = \text{const}. \end{aligned} \quad (64)$$

Подстановка полученных зависимостей во второе уравнение в (60) приводит последнее к виду

$$\begin{aligned} a_{1\vartheta^-} - (1 - 6 \cosh^{-2} \vartheta^-) a_1 &= \\ = \sum_{n=1}^4 C_n \cosh^{-n} \vartheta^-, \\ C_1 &= -2\kappa_0 a_s^{-1} (\kappa_0^2 - \frac{3}{2}a_s^2), \\ C_2 &= 2\sqrt{2}a_s^2, \quad C_4 = -2C_2, \\ C_3 &= -4a_s (5\kappa_0 - \frac{\sqrt{2}}{16}a_s). \end{aligned} \quad (65)$$

Однородную часть решения этого уравнения составляют две функции [14, 50]

$$a_{11}^o = \cosh^{-2} \vartheta^- \sinh \vartheta^-,$$

$$a_{12}^o = \vartheta^- \cosh^{-2} \vartheta^- \sinh \vartheta^- - \cosh^{-1} \vartheta^- + \frac{1}{3} \cosh \vartheta^-$$

с Вронскианом  $W = 2/3$ .

Неоднородную часть решения необходимо искать методом вариации произвольных постоянных интегрирования. После необходимых и достаточно громоздких аналитических преобразований окончательное решение для амплитуды  $a_1$  запишется в виде

$$\begin{aligned} a_1(\vartheta^-) = & [a_{11} - \frac{1}{2}C_1\vartheta^- + \frac{1}{5}C_4 \arctan(\sinh \vartheta^-)] \times \\ & \times \cosh^{-2} \vartheta^- \sinh \vartheta^- + \frac{1}{2}(C_1 + \frac{1}{2}C_3) \cosh^{-1} \vartheta^- + \\ & + \frac{1}{3}(C_2 + \frac{3}{5}C_4) \cosh^{-2} \vartheta^-. \end{aligned} \quad (66)$$

Как видно, учет первых поправок к базовому решению нарушает симметричность огибающей амплитуд волн в группе. Однако наиболее важным является то, что простые разложения в ряды по степеням малого параметра вида (59) порождают линейно растущие по  $\vartheta$ -координате члены, поэтому такие разложения не являются равномерно пригодными. Для устранения секулярных членов необходимо применять более общую технику асимптотических рядов, например, вводить нелинейные масштабы для устранения неоднородностей [14, 34, 38], что существенно усложняет получение решений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Нелинейные эволюционные уравнения для комплексной амплитуды первой фундаментальной гармоники в потенциале скоростей волновых движений с групповой структурой на поверхности воды – так называемые НУШ-уравнения – являются ключевыми в исследовании гидродинамики этих движений. Амплитуды кратных равновесных гармоник, как и среднее дрейфовое поле в потенциале скоростей, полностью определяются через амплитуду первой гармоники.

2. Эффективным инструментом для получения НУШ-уравнений являются методы многих масштабов (МММ), так как в рамках этих методов удается систематически и корректно получить НУШ-уравнения с учетом всех эффектов задачи и, в частности, нелинейности, нерегулярности и трехмерности волн, а также действия поверхностного давления ветрового потока. Кроме НУШ-уравнений, МММ дает уравнения для амплитуды

первой гармоники в области жидкости и краевые задачи для дрейфового потенциала, которые необходимы для определения гидродинамических характеристик волн.

3. Сравнение полученных зависимостей с имеющимися в периодической литературе НУШ-уравнениями III и IV порядков для свободных волн показали полную идентичность результатов. Подходящим выбором медленных переменных можно добиться определенного упрощения структуры операторов старших порядков НУШ-уравнений. Выше были рассмотрены варианты этих уравнений для четырех наборов медленных переменных  $(\bar{X}_n, T_n, n = 1, 2, 3, 4)$ ,  $(\bar{X}, T)$ ,  $(\xi, \eta, \tau)$  и  $(\xi, \eta, \chi)$ . В первой группе переменных НУШ-уравнения представляют собой рекуррентную последовательность уравнений по все более медленным пространственно-временным переменным. НУШ-уравнения в переменных  $(\bar{X}, T)$  получают факторизацией этой рекуррентной цепочки уравнений. Переменные третьей группы, где  $\xi, \eta$  есть групповые координаты на плоскости, а  $\tau$  – медленное время эволюции, удобны для исследования динамики движения групп волн при учете эффектов старших порядков. Наконец, переменные четвертой группы, в которых роль времени эволюции играет медленная продольная координата разгона  $\chi$ , применимы для исследования групп волн на больших дистанциях пробега. При этом для последней группы переменных удастся в наибольшей степени упростить операторы НУШ-уравнения в IV и V порядках.

4. Особый класс решений НУШ-уравнений составляют стационарные решения, которые сохраняются в некоторой системе координат и являются асимптотически устойчивыми. К простейшим стационарным решениям НУШ-уравнений III порядка относятся хорошо известные периодическая волна Стокса и солитонное решение  $\cosh^{-1}$ , которые, в свою очередь, являются предельными асимптотиками для периодического решения в виде эллиптической функции Якоби  $dn$ . Решение  $dn$  для огибающей амплитуд волн основано на предположении о линейной зависимости модуляции фазы от медленных переменных  $\xi, \tau$ . Если же выйти за рамки этого допущения и принять более общую нелинейную зависимость для модуляции фазы, то класс стационарных решений расширяется за счет решений в виде эллиптических функций Вейерштрасса  $\wp$ . Физичность новых решений подтверждается анализом огибающей амплитуд и модуляции фаз для реальных групп волн на волнограммах нерегулярного волнения.

5. Попытки получить трехмерные решения

НУШ-уравнения третьего порядка показали, что достаточно просто можно получить только косые группы волн с неколлинеарными векторами фазовой и групповой скоростей. В остальных случаях приходится иметь дело с уравнениями, эффективное интегрирование которых требует привлечения численных методов. В то же время переход к НУШ-уравнению IV порядка показал, что построение его решения в виде простых асимптотических рядов приводит к появлению секулярных членов в выражении для огибающей амплитуд волн, так что для их устранения необходимо привлекать более общую технику, например, вводить нелинейные масштабы по медленным переменным.

1. Давидан И.Н., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс. – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 286 с.
2. Сердюченко А.Н. Исследование групп ветровых волн методом многих масштабов // Труды Всесоюз. совещ. по числ. методам в задачах волн. гидродинамики: Сб. научн. тр. – Красноярск, ВЦ СО АН СССР, 1991. – С. 134-139.
3. Yuen G.C., Lake B.M. Instabilities of waves on deep water // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1980. – 12. – P. 303-334.
4. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. – Киев: Наукова думка, 1991. – 198 с.
5. Сердюченко А.Н. Динамика морских волн и судна в шторме с учетом нелинейных эффектов // Прикладная гидромеханика. – 1998. – 72. – С. 112-135.
6. Yung-Sur Shin, Chung J.S., Lin W.M. et. al. Dynamic Loading for Structural Analysis of Fine Form Container Ship Based on Non-Linear Large Amplitude Motions and Loads Method // Trans. SNAME. – 1997. – 105. – P. 127-154.
7. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. – 1968. – N 2. – С. 86-91.
8. Cramer M.S., Watson L.T. The evolution of long - wave solutions to the nonlinear Schrodinger equation // Phys. Fluids. – 1984. – 27. – N 4. – P. 821-826.
9. Bryant P.J. Cyclic recurrence in nonlinear unidirectional ocean waves // J.Fluid Mech. – 1988. – 192. – P. 329-337.
10. Stiassnie M., Kroszynski U.I. Long-time evolution of an unstable water-wave train // J.Fluid Mech. – 1982. – 116. – P. 207-225.
11. Hui W.H., Hamilton J. Exact solutions of a three-dimensional nonlinear Schrodinger equation applied to gravity waves // J.Fluid Mech. – 1979. – 93. – Part 1. – P. 117-133.
12. Brown E.D., Buchsbaum S.B., Hall R.E., Penhume J.P. Observations of a nonlinear solitary wave packet in the Kelvin wake of a ship // J.Fluid Mech. – 1989. – 204. – P. 263-293.
13. Bryant P.J. Oblique wave groups in deep water // J.Fluid Mech. – 1984. – 146. – P. 1-20.
14. Akylas T.R. Higher-order modulation effects on solitary wave envelopes in deep water // J.Fluid Mech. – 1989. – 198. – P. 387-397.
15. Akylas T.R. High-order modulation effects on solitary wave envelopes in deep water. Part 2. Multi-soliton envelopes // J.Fluid Mech. – 1991. – 224. – P. 417-428.
16. Dysthe K.B. Note on a modification to the nonlinear Schrodinger equation for application to deep water waves // Proc. R. Soc. Lond. – 1979. – A 369. – P. 105-114.
17. Janssen P.A.E.M. On a fourth -order envelope equation for deep -water waves // J.Fluid Mech. – 1983. – 126. – P. 1-11.
18. Lo E., Mei C.C. A numerical study of water - wave modulation based on a higher -order nonlinear Schrodinger equation // J.Fluid Mech. – 1985. – 150. – P. 395-416.
19. Абрашкин А.А. Гравитационные поверхностные волны огибающей в завихренной жидкости // Изв. АН СССР (ФАО). – 1991. – 27. – N 6. – С. 633-637.
20. Кудашев В.Р., Михайловский А.Б. Неустойчивость периодических волн, описываемых нелинейным уравнением Шредингера // ЖЭТФ. – 1984. – 90. – Вып. 5. – С. 1656-1668.
21. Захаров В.Е., Литвак А.Г., Ракова Е.И. и др. О структурной устойчивости волновых коллапсов в средах с локальной нелинейностью // ЖЭТФ. – 1988. – 94. – Вып. 5. – С. 107-111.
22. Кузнецов Е.А., Турицын С.К. Неустойчивость и коллапс солитонов в средах с дефокусирующей нелинейностью // ЖЭТФ. – 1988. – 94. – Вып. 8. – С. 119-129.
23. Дьяченко Ф.И., Захаров В.Е., Пушкарев А.Н. и др. Солитонная турбулентность в неинтегрируемых волновых системах // ЖЭТФ. – 1989. – 96. – Вып. 6(12). – С. 2026-2031.
24. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977. – 815 с.
25. Сердюченко А.Н. Уравнения в возмущениях для нелинейной краевой задачи теории волн // Гидродинамика корабля: Сб. научн. тр. – Николаев: НКИ, 1984. – С. 66-74.
26. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. Multi -scale expansions in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform // Physica. – 1986. – 18D. – P. 455-464.
27. Laedke E.W., Spatschek K.H. Variational formulation for the evolution of a deep-water wavetrain in two space dimensions // Phys. Fluids. – 1985. – 28. – N 8. – P. 2315-2316.
28. Janssen P.A.E.M. Quasilinear approximation for the spectrum of wind-generated water waves // J.Fluid Mech. – 1982. – 117. – P. 493-506.
29. Stiassnie M., Shemer L. On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves // J.Fluid Mech. – 1984. – 143. – P. 47-67.
30. Dommermuth D.J., Yue D.K.P. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves // J.Fluid Mech. – 1987. – 184. – P. 267-288.
31. Akylas T.R., Kung T.-J. On nonlinear wave envelopes of permanent form near a caustic // J.Fluid Mech. – 1990. – 214. – P. 489-502.
32. Johnson R.S. On the modulation of water waves in the neighbourhood of  $kh=1.363$  // Proc. R. Soc. Lond. – 1977. – A 357. – P. 131-141.
33. Anker D., Freeman N.C. On the soliton solution of the Dave-Stewardson equation for long waves // Proc. R. Soc. Land. – 1978. – A 366. – P. 529-540.



34. *Grimshaw R.* Slowly varying solitary waves. II. Non-linear Schrödinger equation // Proc. R. Soc. Lond.– 1979.– А 368.– Р. 377-388.
35. *Кравцов Ю.А., Эткин В.С.* Ветровое волнение как автоколебательный процесс // Изв. АН СССР (ФАО).– 1983.– 19.– С. 1123-1138.
36. *Кузнецов А.Е., Лушников П.М.* Нелинейная теория возбуждения волн ветром за счет неустойчивости Кельвина-Гельмгольца // ЖЭТФ.– 1995.– 108.– Вып. 2(8).– С. 614-630.
37. *Реутов В.П., Троицкая Ю.И.* О нелинейных эффектах при взаимодействии волн на воде с турбулентным ветром // Изв. РАН (ФАО).– 1995.– 31.–N 6.– С. 825-834.
38. *Найфе А.Х.* Методы возмущений.– М.: Мир, 1976.– 455 с.
39. *Сердюченко А.Н.* Качественный анализ структуры уравнений для слабо нелинейного поля ветровых волн // Судостроение: Респуб. межвед. научн.-техн. сб.– Киев-Одесса: Вища школа.– 1983. - Вып. 32.– С. 3-12.
40. *Сердюченко А.М.* Нелінійні рівняння Шредінгера п'ятого порядку для хвиль на глибокій воді // Доповіді НАН України.– 2000.– 12.– С. 44-50.
41. *Krasitsky V.P.* On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves // J. Fluid Mech.– 1994.– 272.– Р. 1-20.
42. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Гамильтонов формализм для нелинейных волн // Усп. Физ. Наук.– 1997.– 167.– N 11.– С. 1137-1168.
43. *Сердюченко А.Н., Румянцева И.Б.* Гидродинамические характеристики волн Стокса, близких к предельным // Судостроение: Респуб. межвед. научн. - техн. сб.– Киев-Одесса: Вища школа.– 1987.– Вып. 36.– С. 19-23.
44. *Ефимов В.В., Соловьев Ю.П.* Низкочастотные колебания уровня моря и групповая структура ветровых волн // Изв. АН СССР (ФАО).– 1984.– 20.– N 10.– С. 985-994.
45. *Езерский А.Б., Папко В.В.* // Лабораторное исследование крупномасштабных потенциальных течений, индуцированных пакетом поверхностных волн.– Изв. АН СССР (ФАО).– 1986.– С. 22.– N 9.979-986
46. *Сердюченко А.Н.* Гидродинамические характеристики ветровых волн конечной амплитуды // Прикладна гідромеханіка.– 1999.– 74. – N 4.– С. 75-81.
47. *Абрамовиц М., Стигун И.* Справочник по специальным функциям.– М.: Наука, 1979.– 832 с.
48. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров).– М.: Наука, 1970.– 720 с.
49. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций.– М.: Наука, 1970.– 304 с.
50. *Э. Камке* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, 1976.– 576 с.
51. *Громов Е.М., Таланов В.И.* Нелинейная динамика коротких цугов волн в диспергирующих средах // ЖЭТФ.– 1996.– 110, вып. 1(7).– С. 137-149.
52. *Porubov A.V., Parker D.F.* Some general periodic solutions to coupled nonlinear Schrodinger equations // Wave Motion.– 1999.– 29.– Р. 97-109.