

УДК 534.182

ВИМУШЕНІ ТА ХРЕСТОПОДІБНІ ХВИЛІ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ В ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНОМУ «СПІВОЧОМУ БОКАЛІ»

 Т. С. Краснопольська^{†1},  Ю. В. Горський²

¹Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Марії Капніст, 8/4, 03057, Київ, Україна
[†]E-mail: krasnopolska1005@gmail.com

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64/13, 01601, Київ, Україна

Отримано 04.03.2026 ◊ Прийнято 01.06.2026 ◊ Опубліковано 03.09.2026

За допомогою методу суперпозиції пояснено появу та структуру вимушених і хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини, наливої в тонкостінний циліндричний резервуар скінченної глибини. Обрана конфігурація системи наближено моделює так звані «співочі бокали», відомі завдяки інтенсивному випромінюванню тонального звуку при його збудженні зволоженим пальцем, який рівномірно рухається вздовж вільної крайки стінки. На додачу до теоретичного аналізу проведено дослідження на спеціальному експериментальному стенді з можливістю фотофіксації зміщень вільної поверхні рідини. Графічне представлення висоти вільної поверхні показує основні особливості хвильових картин, які спостерігаються в «співочому бокалі». Показано, що вимушені хвилі мають чотири вузли в азимутальному напрямку. Вони відповідають найнижчій згинальній формі окружних коливань пружної оболонки та узгоджені з модовою структурою власних коливань рідини в обмеженій області. Специфіка хрестоподібних хвиль полягає в тому, що їхні гребені завжди перпендикулярні до вібруючої стінки. Показано, що якісний опис основних характеристик вимушених хвиль на вільній поверхні рідини в бокалі можна провести в рамках лінеаризованої теоретичної моделі. Водночас релевантне моделювання хрестоподібних хвиль можливе лише за допомогою нелінійних математичних підходів, які описують параметричний резонанс. Розвинута в цій статті двомодова резонансна модель дає найбільш вірогідний механізм збудження хрестоподібних хвиль. Отримані математичні співвідношення формують базу для кількісного дослідження поверхневих хвиль у частково заповнених ємностях з циліндричними перерізами у широкому діапазоні геометричних і фізичних параметрів. Очікувані результати можуть бути корисними для прогнозування вібраційної поведінки резервуарів для зберігання нафтопродуктів, водонапірних башт, паливних баків тощо.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: «співочий бокал», вимушені поверхневі хвилі, хрестоподібні хвилі, метод суперпозиції, параметричний резонанс, власні моди

1. ВСТУП

Поза сумнівом, багатьом із читачів цієї статті добре відомий звук, який видає «співочий бокал», коли зволожений палець рівномірно рухається по обідку – вільній крайці – скляної стінки, примушуючи її вібрувати. Протягом тривалого часу це явище служило предметом численних досліджень, здебільшого експериментальних, зосереджених на особливостях генерації звукових хвиль і пружного деформування вібруючого бокала. Зокрема, було встановлено, що основний режим коливань такої ємності – вимушена хвиля з чотирма вузлами, рівномірно розташованими в азимутальному напрямку. Така просторова конфігурація амплітуд зміщень відповідає першій, найбільш низькочастотній, моді згинальних коливань циліндричного перерізу.

Якщо «співочий бокал» частково заповнити рідиною, присутність якої змінює частоту випромінюваного звуку, то можна спостерегти складний візерунок хвиль на вільній поверхні рідини. Дійсно, при достатньому освітленні стають видимими хвилі, безпосередньо зумовлені вібрацією стінки – з чотирма вузлами, які рухаються в окружному напрямку з тією ж швидкістю, що й палець, котрий збуджує систему [1]. Однак у повній інтерференційній картині домінують не вони, а так звані «хрестоподібні» або «крайові» хвилі, гребені яких перпендикулярні до вібруючої скляної стінки. Уперше ці короткі стоячі хвилі були зафіксовані ще Фарадеєм [2]. Варто згадати також гарний вступний опис хвиль цього типу, який дав у своїй статті Уокер [3]. Гарретт [4] був першим, хто описав передачу енергії від хвилепродуктора до хрестоподібної хвилі в рамках математичного підходу, який включає в себе середній рух вільної поверхні. Однак сама по собі наявність такого середнього руху не є достатньою для передачі енергії до хрестоподібних хвиль у довгому басейні – вони мають якимось чином отримувати свою енергію безпосередньо від хвилепродуктора. Нелінійну теорію для пояснення механізму генерації хрестоподібних хвиль було розроблено в дослідженнях Махоні [5], Джонса [6], Ліхтера і Андерхілла [7], Майлза [8], Майлза і Гендерсона [9]. Проте всі вони використовували відомий розв'язок Хейвелока [10], отриманий для хвиль у напівнескінченному басейні. Математична постановка задачі для такого басейну включає радіаційно-хвильову граничну умову, яка заміщує однорідну умову, при якій певна компонента швидкості на межі (наприклад, на дні басейну) мала б дорівнювати нулю.

Мета цієї статті полягає в поясненні та моделюванні феномену виникнення хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини, яка міститься в «співочому бокалі». Майлз і Гендерсон [9] стверджували, що хрестоподібні хвилі виникають внаслідок порушення симетрії за рахунок втрати стійкості поперечного руху хвиль. Однак, як буде показано в нижче, хрестоподібні хвилі можуть виникати і внаслідок несиметричної нестійкості поперечних хвиль, які не були симетричними з самого початку.

Для спрощення математичного аналізу вібруючий бокал розглядатимемо як частково заповнений нев'язкою рідиною циліндричний контейнер, який здійснює коливання у вимушеному режимі. Припускаючи іротаційний характер руху рідини, математичну модель сформулюємо як потенціальну задачу з граничними умовами, що також належним чином визначаються через потенціал течії. Цей потенціал можна записати у вигляді ряду Фур'є за повною системою власних функцій відносно радіальної та азимутальної координат з коефіцієнтами, які залежать лише від осьової координати.

Дотримуючись загальної процедури представлення рядів Фур'є для похідних, нео-

днорідну граничну умову на поверхні циліндра можна перетворити на праву частину рівняння для власних функцій. Недолік цього класичного підходу полягає в тому, що він надає розв'язок у доволі громіздкій формі, з якої нелегко побачити вплив стінки вібруючого циліндра. Альтернативою слугує метод суперпозиції, вперше використаний Ламе для задач теорії пружності [11]. Він дає чіткіше уявлення про зв'язок між вібрацією циліндра та хвильовим рухом рідини на вільній поверхні. Це дозволяє побудувати простішу математичну модель, яка показує як хрестоподібна хвиля може безпосередньо генеруватися рухом хвилепродуктора чи вібруючого бокала [12, 13]. Такий опис механізму збудження резонансних хрестоподібних хвиль дає наочне розуміння особливостей формування інтерференційних візерунків на вільній поверхні рідини.

Говорячи про структуру даної статті, зауважимо, що після вступу 1 у розділі 2 сформульовано математичну постановку хвильової задачі. Після цього за допомогою методу суперпозиції розв'язано задачу про збудження вимушених поверхневих хвиль в лінеаризованій постановці. У розділі 3 проаналізовано нелінійну задачу для резонансних власних мод. Розділ 4 присвячено побудові одно- та двомодової моделей збудження хрестоподібних хвиль у циліндричному резервуарі та порівнянню теоретичних прогнозів з результатами експериментальних спостережень. У фінальному розділі 5 сформульовано висновки з дослідження, а в додатку подано громіздкі аналітичні вирази для вагових коефіцієнтів рядів Фур'є.

2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Для того, щоб проаналізувати хвилі на вільній поверхні рідини в «співочому бокалі» (Рис. 1), зробимо певні спрощувальні припущення щодо геометрії області течії, замінивши чашоподібну ємність циліндром з круглим перерізом (радіуса R) і плоским горизонтальним дном (Рис. 2). Зауважимо, що, хоча ця базова геометрія сама по собі є осесиметричною, стінка циліндра здійснює коливання по другій моді в окружному напрямку з порушенням такої симетрії – із залежністю $\cos(2\theta)$ від азимутальної коор-

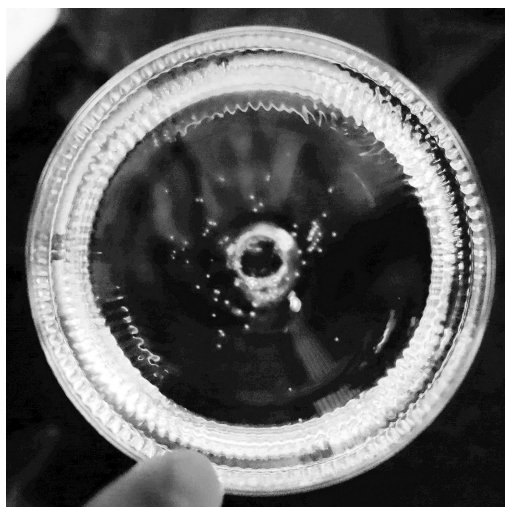


Рис. 1. Хрестоподібні хвилі біля краю «співочого бокала»

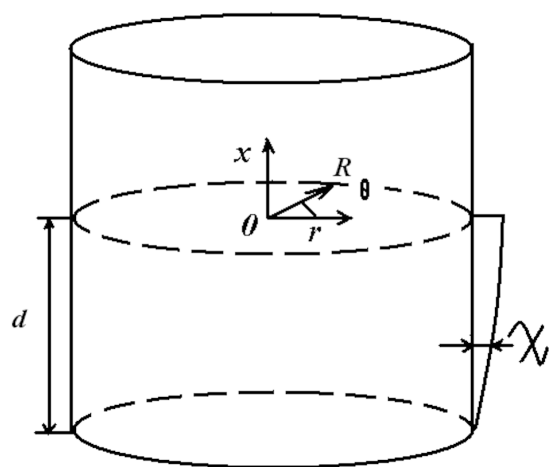


Рис. 2. Геометрія моделі контейнера та система координат

динати θ [1].

Для дослідження особливостей генерації хрестоподібних хвиль у «співочих бокалах» у лабораторії науково-дослідного відділу вихрових рухів Інституту гідромеханіки НАН України було створено спеціальну експериментальну установку, схематично зображений на Рис. 3. На цій схемі цифрами позначено такі пристрої та складові: 1 – ємність з водою; 2 – стенд з поворотною платформою; 3 – фотоапарат SONY DSC-RX100; 4 – мікрофон ЕСМ999; 5 – аналого-цифровий перетворювач Fast Track C400; 6 – персональний комп'ютер.

Теорію розв'язання задачі про збудження поверхневих резонансних хрестоподібних хвиль у циліндричному басейні при гармонічних коливаннях поверхні циліндра викладено в статті [13]. Очевидно, що процедура отримання загального розв'язку з використанням двох резонансних моделей хрестоподібних хвиль залишається чинною і в нашому випадку. Нагадаємо, що в першій моделі візерунків пучностей, провалів і вузлових ліній на вільній поверхні моделювався лише однією резонансною модою, а в другій – трьома модами, які задовольняли умову параметричного резонансу. Між результатами, отриманими за допомогою обох підходів, існують дві принципові відмінності:

1. При застосуванні першої моделі амплітуди поверхневих хрестоподібних хвиль змінюються в часі з частотою 2ω , що вдвічі перевищує частоту, передбачену другою моделлю.
2. У випадку існування лише одної резонансної моди доданки, які визначають прояв параметричного резонансу, пропорційні до a^2 – квадрата амплітуди коливань «співочого бокала» a , яка відіграє роль малого параметра задачі. Але у разі, коли інтерференційних візерунків на вільній поверхні моделюється трьома модами, виявляється, що всі вони пропорційні до a , тобто, мають зовсім інший порядок малості. Це означає, що тримодову модель збудження хрестоподібних хвиль значно легше реалізувати з практичної точки зору.

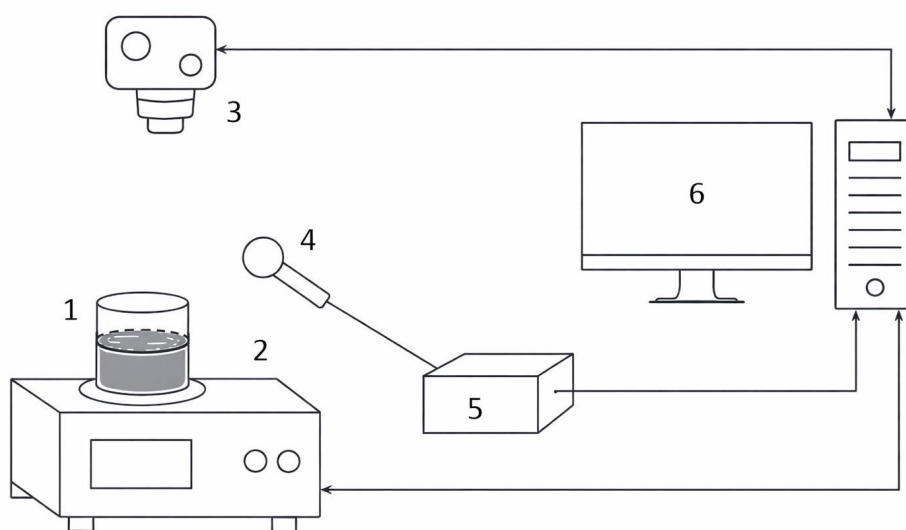


Рис. 3. Схема експериментальної установки для дослідження генерації хрестоподібних хвиль

У цьому дослідженні ми пропонуємо до розгляду принципово нову модель генерації резонансних хрестоподібних хвиль, коли на вільній поверхні рідини існують лише дві параметрично збуджувані моди.

3. ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ

3.1. Постановка проблеми

Розглянемо рідину з вільною поверхнею, налиту в циліндричний контейнер з радіусом R і суцільним непроникним дном. У цьому випадку рух такого суцільного середовища зручно описувати в циліндричній системі координат (r, θ, x) , де вісь Ox спрямована вгору вздовж осі симетрії контейнера (Рис. 2). Нехай рідина в стані спокою має середню глибину d . Тоді, якщо прийняти середнє положення вільної поверхні за $x = 0$, отримуємо положення дна резервуара $x = -d$.

Нехай стінка циліндра здійснює гармонічні коливання з частотою ω таким чином, що її радіус змінюється як $R^*(x, \theta, t) = R + \chi(\theta, x, t)$, де χ має такий вигляд:

$$\chi = a \cos 2\theta \cos \frac{\pi x}{2d} \cos \omega t. \quad (1)$$

Тут a – амплітуда вібрацій циліндра; співмножник $\cos(2\theta)$ відповідає другій власній моді стінки циліндра в азимутальному напрямку.

Вважаємо рідину нев'язкою та нестисливою. Окрім того, в припущенні, що рух рідини є безвихровим, поле швидкості v вичерпно описується через потенціал швидкості $\varphi(r, \theta, x, t)$; $v = \nabla \varphi$. Визначальне рівняння для φ має вигляд

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{на} \quad 0 \leq r \leq R + \chi(\theta, x, t), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -d \leq x \leq \zeta, \quad (2)$$

де $\zeta(r, \theta, t)$ – переміщення вільної поверхні.

Припускаючи, що вплив поверхневого натягу є незначним, динамічні та кінематичні граничні умови для вільної поверхні запишемо у вигляді

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + g\zeta = \frac{T}{\rho} \left\{ \nabla^2 \zeta - \frac{1}{2} \nabla \zeta \cdot [(\nabla \zeta)^2 \nabla \zeta] \right\} + F(t) \quad \text{при} \quad x = \zeta(r, \theta, t), \quad (3)$$

$$\varphi_x = \nabla \varphi \cdot \nabla \zeta + \zeta_t \quad \text{при} \quad x = \zeta(r, \theta, t). \quad (4)$$

Тут g – гравітаційне прискорення; T – поверхневий тиск на межі повітря–рідина; ρ – густина рідини; $F(t)$ – функція часу [14]. Індеси на кшталт t і x вказують на часткове диференціювання по відповідних координатах.

Швидкість нормальної течії на дні резервуара дорівнює нулю:

$$\varphi_x = 0 \quad \text{при} \quad x = -d, \quad (5)$$

а кінематична умова на коливній стінці циліндра формулюється як

$$\varphi_r = \chi_t + \nabla \varphi \cdot \nabla \chi \quad \text{при} \quad r = R + \chi(\theta, x, t). \quad (6)$$

Менісковий та капілярний впливи на лінії контакту поверхні рідини зі стінкою циліндра виключено з розгляду. Окрім того, припускається, що швидкість рідини залишається обмеженою по всій області, зокрема,

$$\varphi_r < \infty \quad \text{при} \quad r = 0. \quad (7)$$

3.2. Постановка лінійної задачі для циліндричної поверхні, що коливається

Природно припустити, що вібрація стінки циліндра індукує хвильову картину в рідині. Вважаючи, що ця картина може бути описана в термінах нормальних мод з характерними власними частотами, розкладаємо потенціал $\varphi(r, \theta, x, t)$ і переміщення вільної поверхні $\zeta(r, \theta, t)$ за повним набором власних функцій, які визначаються лінійною теорією.

Після лінеаризації граничних умов (3) і (4) сформулюємо задачу для довільної функції деформування циліндричної оболонки $W(\theta, x, t)$, а не лише для конкретної функції $\chi(\theta, x, t)$, заданій співвідношенням (1):

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -d \leq x \leq 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \zeta_t && \text{при} \quad x = 0; \\ \varphi_x &= 0 && \text{при} \quad x = -d; \\ \varphi_r &< \infty && \text{при} \quad r = 0; \\ \varphi_r &= W_t(\theta, x, t) && \text{при} \quad r = R; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\varphi_\theta|_{\theta=0} = \varphi_\theta|_{\theta=2\pi}.$$

Розв'язок загальної лінійної неосесиметричної крайової задачі (8), (9) з довільним вібраційним збудженням $W_t(\theta, x, t)$ стінки циліндра можна отримати різними способами. Як було показано Стоксом у роботі 1847 року, потенціал $\varphi(r, \theta, x, t)$ може бути записаний у вигляді ряду Фур'є за повною системою власних функцій від r і θ з коефіцієнтами, які залежать від осової координати x (див. також монографію Бромвіча [15]). Згідно із загальною процедурою представлення рядів Фур'є для похідних, неоднорідна гранична умова при $r = R$ перетворюється на праву частину рівняння (8), яка відповідає члену φ_{xx} .

3.3. Метод суперпозиції

Розв'язки набору неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь відносно x , якими визначаються коефіцієнти розкладу з неоднорідними граничними умовами, можна легко знайти аналітичними методами. Однак недолік класичного підходу полягає в громіздкості запису кінцевого результату, в якому нелегко побачити вплив коливань стінки циліндра. Тому в якості прийнятної альтернативи застосуємо метод суперпозиції [11], який дає чіткіше уявлення про зв'язок між вібрацією циліндра та хвильовим рухом рідини на вільній поверхні.

Згідно з цим методом потенціал φ запишемо як суму трьох гармонічних функцій:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2. \quad (10)$$

Розглянемо особливості кожної з них більш детально.

Потенціал φ_0 визначається осесиметричною граничною задачею

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0 \quad \text{на} \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -d \leq x \leq 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi_0)_x &= (\zeta_0)_t && \text{при } x = 0, \\
 (\varphi_0)_x &= 0 && \text{при } x = -d, \\
 (\varphi_0)_r &< \infty && \text{при } r = 0, \\
 (\varphi_0)_r &= W_t(\theta, x, t) && \text{при } r = R, \\
 (\varphi_0)_\theta|_{\theta=0} &= (\varphi_0)_\theta|_{\theta=2\pi}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Співвідношення

$$\begin{aligned}
 \zeta_0(t) &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \zeta(r, \theta, t) r dr d\theta, \\
 W_0(t) &= \frac{1}{2\pi R d} \int_0^{2\pi} \int_0^R W(\theta, x, t) R dx d\theta.
 \end{aligned} \tag{13}$$

задають середній за період рівень урізу води та середнє зміщення стінки циліндра відповідно.

Закон збереження маси передбачає, що

$$(\zeta_0)_t \pi R^2 - 2\pi R d (W_0)_t = 0. \tag{14}$$

Потенціал φ_1 визначається лінійною задачею

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad \text{на } x = 0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi_1)_x &= (\zeta - \zeta_0)_t && \text{при } x = 0, \\
 (\varphi_1)_x &= 0 && \text{при } x = -d, \\
 (\varphi_1)_r &< \infty && \text{при } r = 0, \\
 (\varphi_1)_r &= W_t(\theta, x, t) && \text{при } r = R, \\
 (\varphi_1)_\theta|_{\theta=0} &= (\varphi_1)_\theta|_{\theta=2\pi}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Умови в радіальному напрямку однорідні, тоді як в азимутальному – періодичні. Потенціал φ_1 можна записати як суму власних функцій відносно r і θ .

Оскільки потенціал φ_2 має відповідати задачі

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad \text{на } 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -d \leq x \leq 0, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_2)_x &= (\zeta - \zeta_0)_t && \text{при} && x = 0, \\
(\varphi_2)_x &= 0 && i = 0, 1, 2, && x = -d, \\
(\varphi_2)_r &< \infty && \text{при} && r = 0, \\
(\varphi_2)_r &= (W - W_0)_t(\theta, x, t) && \text{при} && r = R,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$(\varphi_2)_\theta|_{\theta=0} = (\varphi_2)_\theta|_{\theta=2\pi}.$$

Його можна записати як суму власних функцій відносно x (перші дві однорідні граничні умови зі співвідношень (18)) і по θ (умова періодичності).

Формулювання (11)–(12), (15)–(16) та (17)–(18) для φ_0 , φ_1 та φ_2 відповідно належать до граничних задач типу Неймана, в яких на межах області задається нормальна похідна від φ . Для розв'язків без сингулярностей у кутах області друга теорема Гріна вимагає, щоб задані нормальні похідні від φ , які є компонентами нормальної швидкості, задовольняли умову нульового потоку через межу. Очевидно, що в нашому випадку ця умова виконується автоматично.

Неважко вказати форму розв'язку задачі (11)–(12) для φ_0 :

$$\varphi_0(x, r, \theta, t) = -\dot{W}_0(t) \frac{r^2}{2R} + \dot{\zeta}_0 \frac{(d+x)^2}{2d}, \tag{19}$$

де крапка позначає похідну за часом.

Наостанок зазначимо, що для специфічного закону зміщення стінки циліндра, заданого співвідношенням (1), для середнього рівня рідини справедливо

$$\zeta_{00}(t) = 0, \tag{20}$$

оскільки середнє зміщення циліндра (1) дорівнює нулю. Зауважимо, що середній рівень тут позначено як $\zeta_{00}(t)$ для того, щоб відрізнити його від загального випадку, коли стінка циліндра має зміщення $W(\theta, x, t)$.

Розв'язок лінійної задачі (15)–(16) для φ_1 можна бути записати в формі

$$\varphi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{ij}(t) \frac{\text{ch } k_{ij}(x+d)}{N_{ij} \text{ch } k_{ij}d} \psi_{ij}(r, \theta), \tag{21}$$

де $\varphi_{ij}(t)$ – амплітуди азимутальної і радіальної власних функцій, а $\psi_{ij}(r, \theta)$ визначається як

$$\psi_{ij}(r, \theta) = J_i(k_{ij}r) \cos i\theta. \tag{22}$$

Тут $J_i(z)$ – функція Бесселя i -го порядку першого роду, а N_{ij} – константа нормалізації:

$$N_{ij}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \psi_{ij}^2(r, \theta) r dr d\theta. \tag{23}$$

У формулі (24) k_{ij} – корені рівняння

$$J'_i(k_{ij}R) = 0. \quad (24)$$

Система функцій $\psi_{ij}(r, \theta)$, з $i = 0, 1, 2, \dots$ та $j = 1, 2, 3, \dots$ – повна ортогональна. Тому будь-яку функцію змінних r і θ можна представити за допомогою звичайної процедури розкладання в ряд Фур'є. Тоді зміщення вільної поверхні $\zeta(r, \theta, t) - \zeta_0(t)$ набуде вигляду

$$\zeta(r, \theta, t) - \zeta_0(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_{ij}(t) \frac{\psi_{ij}(r, \theta)}{N_{ij}}. \quad (25)$$

Гранична умова, представлена першим зі співвідношень (16), дає зв'язок між амплітудами рядів (21) і (25) у вигляді:

$$\varphi_{ij}(t) = \dot{\zeta}_{ij}(t)(k_{ij} \operatorname{th} k_{ij} d)^{-1}, \quad i = 0, \quad j = 1. \quad (26)$$

Потенціал швидкості $\varphi_2(r, \theta, x, t)$ запишемо як звичайний ряд Фур'є за $\cos i\theta$ та $\cos \alpha_l x$ з $\alpha_l = l\pi/d$. Тоді загальний розв'язок набуває вигляду

$$\varphi_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{il}(t) \cos \alpha_l x I_i(\alpha_l r) \cos i\theta, \quad (27)$$

де $I_i(z)$ – модифікована функція Бесселя першого роду i -го порядку.

Амплітуди $\Phi_{il}(t)$ можна знайти, застосувавши передостанню граничну умову з (18), яка дає

$$\Phi_{il}(t) = \dot{W}_{il}(t) = \frac{2 - \delta_{i0}}{d\pi\alpha_l I'_i(\alpha_l R)} \int_0^{2\pi} \int_{-d}^0 [\dot{W}(\theta, x, t) - \dot{W}(t)] \cos \alpha_l x \cos i\theta R dx d\theta. \quad (28)$$

Тут δ_{i0} – дельта Кронекера, а $I'_i(z) = dI_i(z)/dz$.

Для визначення невідомих функцій $\zeta_{ij}(t)$, які представляють амплітуди прямо збуджених поверхневих хвиль, застосуємо лінеаризовану динамічну граничну умову для вільної поверхні (3):

$$\varphi_t + g\zeta - \frac{T}{\rho} \nabla^2 \zeta = F(t) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (29)$$

де φ – повний потенціал згідно з формулою (10). Підставляючи (10) у (29), отримуємо нескінченну множину звичайних диференціальних рівнянь для функцій $\zeta_{ij}(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_{0j}(t) + \omega_{0j}^2 \zeta_{0j}(t) &= \ddot{W}_0(t) a_{0j} \beta_{0j} - \sum_{l=1}^{\infty} \ddot{W}_{0l}(t) b_{0lj} \beta_{0j}, \\ \ddot{\zeta}_{ij}(t) + \omega_{ij}^2 \zeta_{ij}(t) &= - \sum_{l=1}^{\infty} \ddot{W}_{il}(t) b_{ilj} \beta_{ij}, \end{aligned} \quad (30)$$

де $\beta_{ij} = k_{ij} \operatorname{th} k_{ij} d$, а

$$\omega_{ij} = \left[\left(g k_{ij} + \frac{T}{\rho} k_{ij}^3 \right) \operatorname{th} k_{ij} d \right]^{1/2} \quad \text{для} \quad i = 0, 1, 2, \quad \text{та} \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Коефіцієнти a_{00} , a_{0j} , b_{i0} та b_{ij} можна знайти, представивши радіальні функції $r^2/2$, які входять до складу φ_0 (формула (19)) та $I_i(\alpha_l r)$, які входять до складу φ_2 (формула (26)) у вигляді розкладів

$$\frac{r^2}{2} = a_{00} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j} \frac{J_0(k_{0j}r)}{N_{0j}}, \quad (32)$$

$$I_i(\alpha_l r) = b_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \frac{J_i(k_{ij}r)}{N_{ij}}. \quad (33)$$

Система лінійних диференціальних рівнянь (30) переважно описує вимушені коливання з власними частотами ω_{ij} . Розв'язавши їх із заданими початковими умовами при заданих часових залежностях функцій $W_0(t)$ та $W_{il}(t)$, отримаємо амплітуди $\zeta_{ij}(t)$ хвиль на вільній поверхні рідини в явному вигляді.

3.4. Вимушені резонансні коливання при деформації циліндра типу (1)

У випадку збудження, яке задається співвідношенням (1), тобто коливаннями циліндра по другій власній моді в азимутальному напрямку, розв'язки рівнянь (30) з ненульовими амплітудами відповідають власним модам $\zeta_{2j}(t)$, в які входить функція азимутальної координати $\sim \cos 2\theta$. Підставляючи функцію збудження (1) в (29) і беручи до уваги, що функції $\cos i\theta$ ортогональні, знаходимо, що для $i \neq 2$ всі $\dot{W}_{il}(t) = 0$, а при $i = 2$:

$$\Phi_{2l}(t) = \dot{W}_{2l}(t) = -\frac{2aR\omega \sin \omega t}{d\alpha_l I_2'(\alpha_l R)} \int_{-d}^0 \cos \frac{\pi x}{2d} \cos \alpha_l x dx. \quad (34)$$

Таким чином, висота вільної поверхні $\zeta(r, \theta, t)$ визначається як

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_{2j}(t) \frac{J_2(k_{2j}r) \cos(2\theta)}{N_{2j}}. \quad (35)$$

У тому разі, коли частота збудження ω близька до однієї з власних частот ω_{2q} , рух вільної поверхні може бути апроксимований саме цією резонансною власною модою, а висоти вільної поверхні задані у вигляді

$$\zeta(r, \theta, t) = \zeta_{2q}(t) \frac{J_2(k_{2q}r) \cos 2\theta}{N_{2q}}. \quad (36)$$

При застосуванні динамічної умови (3) для резонансної амплітуди $\zeta_{2q}(t)$ рівняння можна записати у вигляді

$$\ddot{\zeta}_{2q}(t) + \omega_{2q}^2 \zeta_{2q}(t) = F_{2q} \omega^2 \cos \omega t \quad (37)$$

з коефіцієнтами

$$F_{2q} = \frac{2aR}{d\alpha_q I_2'(\alpha_q R)} \int_{-d}^0 \cos [\pi x / (2d)] \cos \alpha_q x dx = \frac{4(-1)^{q-1} aR}{\pi \alpha_q (2q-1)(2q+1) I_2'(\alpha_q R)}. \quad (38)$$

Увівши безрозмірний час $\tau = \omega t$ і безрозмірну амплітуду резонансних коливань $\xi_{2q} = \zeta_{2q}/a$ (a – амплітуда збудження згідно з (1)), легко отримати рівняння для безрозмірних амплітуд:

$$\ddot{\xi}_{nm} + (1 + \beta_{2q})\xi_{2q} = F_{2q} \cos \tau, \quad (39)$$

де $\ddot{\xi}_{2q}$ – друга похідна від ξ_{2q} по τ , а константа $\beta_{2q} = (\omega_{2q}^2/\omega^2) - 1$ – мала величина за резонансних умов. Таким чином, розв’язок рівняння (39) для випадку гармонічних стаціонарних коливань набуває вигляду

$$\xi_{2q} = \frac{F_{2q} \cos \tau}{\beta_{2q}}. \quad (40)$$

Цей тип поверхневої хвильової картини спостерігався Жубером та ін. [16] в експерименті.

4. ПАРАМЕТРИЧНЕ ЗБУДЖЕННЯ ХРЕСТОПОДІБНИХ ХВИЛЬ

4.1. Одномода модель

Нелінійні задачі для резонансних власних мод розв’язуються аналогічно до лінійної задачі для φ_1 , розглянутої в попередньому розділі. Так, нелінійну задачу для φ_2 розв’язують, розкладаючи нелінійну граничну умову (6) в ряд за функціями $\cos \alpha_l x$ та $\cos i\theta$. Наступний крок полягає у визначенні зв’язків між амплітудами потенціалу φ_1 , а також функцій $\varphi_{ij}(t)$ та амплітуд $\zeta_{ij}(t)$, якими задаються хвилі рідини згідно з нелінійною граничною умовою (4). Насамкінець динамічна умова (3) застосовується для замикання задачі, а саме, для отримання нелінійних диференціальних рівнянь для резонансних амплітуд при заданому співвідношенні (1) збудженні $\chi(x, t)$.

Розглянемо хвильову картину, яка реалізується при параметричному резонансі. У тому випадку, коли частота збудження дорівнює одній з власних частот власних мод з $\cos 2\theta$, набуває чинності система рівнянь (30) з $i = 2$. Для параметричного резонансу частота збудження має бути

$$\omega \approx \frac{2}{s}\omega_{nm} \quad \text{для } s = 1, 2, 3, 4, \dots, \quad (41)$$

де ω_{nm} – власна частота моди ψ_{nm} ($n \neq 0$). При цьому хвиля для цієї резонансної моди записується як

$$\zeta \approx \frac{1}{N_{nm}}\zeta_{nm}(t)\psi_{nm}(r, \theta) + \zeta_{00} \quad (42)$$

з $\psi_{nm}(r, \theta) = J_n(k_{nm}r) \cos n\theta = \psi$ (див. рівняння (25)).

Враховуючи сильну нелінійність розглянутої математичної задачі, уведемо малий параметр, який дозволяє розв’язувати її в наближеннях різних порядків. Цей параметр має бути пропорційним амплітуді коливань a (1), яка принаймні на порядок менша за радіус циліндра R :

$$\varepsilon = \frac{a\omega_{nm}^2}{g}. \quad (43)$$

Ми шукаємо резонансні розв’язки $\zeta_{nm}(t)$, які можуть перевищувати амплітуду коливань a і мають порядок $O(\varepsilon^{3/4})$ [9, 17]. Для отримання коливань вільної поверхні у

вигляді (42) припустимо, що потенціал швидкості φ_1 можна записати наступним чином (див. рівняння (21)):

$$\varphi_1 \approx \varphi_{nm}(t)\psi_{nm}(r, \theta) \frac{\operatorname{ch} k_{nm}(x+d)}{N_{nm} \operatorname{ch} k_{nm}d}. \quad (44)$$

Якщо $\zeta_{00} = 0$, то $\varphi_0 = 0$ і цю частину розв'язку для φ можна опустити.

Кінематичну граничну умову на циліндрі (6) можна записати так:

$$\varphi = \chi_t + \chi_x \varphi_x + \frac{1}{(R + \chi)^2} \chi_\theta \varphi_\theta \quad \text{на} \quad r = R + \chi. \quad (45)$$

З огляду на те, що $\chi = O(\varepsilon)$, похідні функції φ розкладемо в ряди Тейлора при $r = R$:

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \varphi_r + \varphi_{rr}\chi + \varphi_{rrr}\chi^2 + O(\varepsilon^3), \\ \varphi_x &= \varphi_x + \varphi_{xr}\chi + \varphi_{xrr}\chi^2 + O(\varepsilon^3), \\ \varphi_\theta &= \varphi_\theta + \varphi_{\theta r}\chi + \varphi_{\theta rr}\chi^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (46)$$

Оскільки $(\varphi_1)_r = 0$ при $r = R$, застосування граничної умови (45) для $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ приводить до рівняння

$$\begin{aligned} &(\varphi_2)_r + (\varphi_2)_{rr}\chi - (\varphi_2)_x\chi_x - \frac{1}{R^2}(\varphi_2)_\theta\chi_\theta + \\ &+ (\varphi_2)_{rrr}\chi^2 - (\varphi_2)_{xr}\chi_x\chi - \frac{1}{R^2}(\varphi_2)_{\theta r}\chi_\theta\chi + \frac{2}{R^3}(\varphi_2)_{\theta}\chi_\theta\chi = \\ &= \chi_t - (\varphi_1)_{rr}\chi - (\varphi_1)_{rrr}\chi^2 + (\varphi_1)_x\chi_x + \frac{1}{R^2}(\varphi_1)_{\theta}\chi_\theta - \frac{2}{R^3}(\varphi_1)_{\theta}\chi_\theta\chi + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (47)$$

Підставимо розв'язки (44) для φ_1 і (27) для φ_2 у співвідношення (47), помножимо їх на $\cos i\theta \cos \alpha_l x$ ($i = 1, 2, 3, \dots$, $\alpha_l = l\pi/d$) та проінтегруємо по поверхні циліндра. Зберігаючи доданки при $O(\varepsilon^{3/2})$, отримуємо для φ_2 такий вираз:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \sum_{l=1}^{\infty} G_{2l} \cos \alpha_l x I_2(\alpha_l r) \cos(2\theta) + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} G_{(n-2)l} \cos \alpha_l x I_{n-2}(\alpha_l r) \cos[(n-2)\theta] + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} G_{(n+2)l} \cos \alpha_l x I_{n+2}(\alpha_l r) \cos[(n+2)\theta] - \\ &- \varepsilon^2 \varphi_{nm}(t) \frac{g^2(\cos 2\omega t + 1)}{\omega_{nm}^4} \sum_{l=1}^{\infty} G_{nl} \cos \alpha_l x I_n(\alpha_l r) \cos(n\theta) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (48)$$

Тут G_{2l} , $G_{(n-2)l}$, $G_{(n+2)l}$, G_{nl} – залежні від часу коефіцієнти; $J'_i(z) = dJ_i(z)/dz$; а G_{nl} задаються формулами

$$G_{nl} = \frac{k_{nm}^3 J'_{nm}(k_{nm}R)}{dI'_n(\alpha_l R) \alpha_l N_{nm} \operatorname{ch} k_{nm}d} \int_{-d}^0 \cosh k_{nm}(x+d) \cos^2(\pi x/2d) \cos \alpha_l x dx. \quad (49)$$

Останній доданок у співвідношенні (48) має порядок $O(\varepsilon^{3/2})$, оскільки, як випливає з лінійного наближення нелінійної умови (4), амплітуда φ_1 буде

$$\varphi_{nm}(t) = \frac{\dot{\zeta}_{nm}(t)}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} d},$$

що й відповідає шуканому порядку (див. (26)). Саме цей доданок і породжує параметричний резонанс у розглянутій математичній постановці. Для того, щоб вирази (44) і (48) відповідали кінематичній граничній умові (4), останню слід розкласти в ряд Тейлора, зберігши доданки до порядку $O(\varepsilon^{3/2})$:

$$\begin{aligned} (\varphi_1)_x + \zeta(\varphi_0)_{xx} + \zeta(\varphi_1)_{xx} + \zeta^2(\varphi_1)_{xxx} + \zeta(\varphi_2)_{xx} = \\ = \zeta_t + (\varphi_1)_r \zeta_r + \frac{1}{r^2}(\varphi_1)_\theta \zeta_\theta + (\varphi_2)_r \zeta_r + \frac{1}{r^2}(\varphi_2)_\theta \zeta_\theta + (\varphi_1)_{rx} \zeta_r + \frac{1}{r^2}(\varphi_1)_{\theta x} \zeta_\theta. \end{aligned} \quad (50)$$

Підставивши сюди співвідношення (44) і (48), після множення на $\psi_{nm}(r, \theta)r/N_{nm}$ та інтегрування по поверхні $x = 0$, отримаємо

$$\varphi_{nm}(t) = \gamma_{10}[1 - \gamma_{11}\zeta_{nm}^2]\dot{\zeta}_{nm} + O(\varepsilon^3), \quad (51)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{10} &= [k_{nm} \operatorname{th}(k_{nm} d)]^{-1}; \\ \gamma_{11} &= \frac{1}{N_{nm}^4} \int \int [k_{nm}^2 \psi^2 - \psi_r^2 - \frac{1}{r^2} \psi_\theta^2] \psi^2 r dr d\theta. \end{aligned} \quad (52)$$

Рівняння (44), (48) і (51) підставимо в розклад за Тейлором виразу для динамічної граничної умови (3), який має вигляд

$$\begin{aligned} (\varphi_1)_t + \zeta(\varphi_1)_{tx} + (\varphi_2)_t + \zeta^2(\varphi_1)_{txx} + \left(g - \frac{T}{\rho} \nabla^2\right) \zeta + \\ + \frac{1}{2} \left[(\varphi_1)_x^2 + (\varphi_1)_r^2 + \frac{1}{r^2} (\varphi_1)_\theta^2 \right] + (\varphi_1)_x \zeta(\varphi_1)_{xx} + (\varphi_1)_r \zeta(\varphi_1)_{rx} + \\ + \frac{1}{r^2} (\varphi_1)_\theta \zeta(\varphi_1)_{\theta x} + (\varphi_1)_r (\varphi_2)_r + \frac{1}{2} \frac{T}{\rho} k_{nm}^2 \zeta \left(\zeta_r^2 + \frac{1}{r^2} \zeta_\theta^2 \right) + \\ + \frac{T}{\rho} \left\{ \zeta_r \left[\zeta_r \zeta_{rr} - \frac{1}{r^3} \zeta_\theta^2 + \frac{1}{r^2} \zeta_\theta \zeta_{r\theta} \right] + \frac{1}{r^2} \zeta_\theta \left[\zeta_r \zeta_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \zeta_\theta \zeta_{\theta\theta} \right] \right\} = F(t). \end{aligned} \quad (53)$$

Припустивши, що $F(t) = 0$, рівняння для резонансної амплітуди хрестоподібних хвиль запишемо так:

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_{nm} + \omega_{nm}^2 \zeta_{nm} - (\gamma_{12} - 3\gamma_{13} + \gamma_{15}) \dot{\zeta}_{nm}^2 \zeta_{nm} + \gamma_{13} \ddot{\zeta}_{nm} \zeta_{nm}^2 - \\ - \frac{\gamma_{14}}{2} \ddot{\zeta}_{nm} (\cos 2\omega t + 1) + \omega \gamma_{14} \dot{\zeta}_{nm} \sin 2\omega t = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Тут

$$\begin{aligned}
 \gamma_{12} &= \frac{3\pi k_{nm}^2}{4N_{nm}^4} \int_0^R J_n^4 r dr; \\
 \gamma_{13} &= \frac{\pi}{4N_{nm}^4} \int_0^R [3k_{nm}^2 (J'_{nm})^2 + \frac{n^2}{r^2} J_n^2] J_n^2(k_{nm}r) r dr; \\
 \gamma_{14} &= \varepsilon^2 \frac{2\pi g^2}{\omega_{nm}^4 N_{nm}} \sum_{l=1}^{\infty} G_{nl} \int_0^R J_n(k_{nm}r) I_n(\alpha_l r) r dr; \\
 \gamma_{15} &= \frac{T\pi k_{nm}^3 \text{th } k_{nm}d}{8\rho\omega^2 N_{nm}^4} \int_0^{2\pi} \int_0^R [3k_{nm}^2 (J'_{nm})^2 + \frac{n^2}{r^2} J_n^2] J_n^2(k_{nm}r) r dr + \\
 &\quad + \frac{T\pi k_{nm} \text{th } k_{nm}d}{4\rho\omega^2 N_{nm}^4} \int_0^R \{3k_{nm} (J'_{nm}) [k_{nm}^3 (J'_{nm}) (J'_{nm}) - \frac{n^2}{r^3} J_n^2 + \frac{n^2 k_{nm}}{r^2} J_n J'_{nm}] + \\
 &\quad + [\frac{n^2 k_{nm}^2}{r^2} J_n (J'_{nm})^2] + \frac{n^3}{r^2} J_n^2\} J_n(k_{nm}r) r dr.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Коефіцієнти доданків $\dot{\zeta}_{nm}$ і $\ddot{\zeta}_{nm}$ у рівнянні (54) періодично змінюються в часі, що може призводити до параметричного резонансу. Після введення безрозмірного часу $\tau = \omega t$ та безрозмірної амплітуди резонансних коливань $\xi_{nm} = \zeta_{nm}/a$ отримаємо рівняння для безрозмірної амплітуди:

$$\ddot{\xi}_{nm} + (1 + \beta_{nm})\xi_{nm} + [A_1\dot{\xi}_{nm}^2 - A_3(1 + \cos 2\tau)]\ddot{\xi}_{nm} + A_2\dot{\xi}_{nm}^2\xi_{nm} + 2A_3\dot{\xi}_{nm} \sin 2\tau = 0. \tag{56}$$

зі сталими коефіцієнтами

$$\beta_{nm} = \frac{\omega_{nm}^2}{\omega^2} - 1; \quad A_1 = \gamma_{13}a^2; \quad A_2 = (3\gamma_{13} - \gamma_{12} - \gamma_{15})a^2; \quad A_3 = \gamma_{14}/2, \tag{57}$$

де $\dot{\xi}_{nm}$ і $\ddot{\xi}_{nm}$ позначають першу та другу похідні ξ_{nm} по τ відповідно. Співвідношення (56) є рівнянням типу Хілла [18, 19] з періодично змінними коефіцієнтами, яке при $\beta_{nm} \approx 0$ має ненульові резонансні розв'язки. Це означає, що при виконанні умови

$$\beta_{nm} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{nm} \approx \omega \tag{58}$$

на вільній поверхні рідини в контейнері можуть виникати резонансні хрестоподібні хвилі з ненульовими амплітудами.

На Рис. 4 показано структуру вільної поверхні, задану згідно з (42) при моделюванні однією власною модою з власними числами, наприклад, $n = 100$ і $m = 1$: $\psi_{100\ 1}(r, \theta)$. Ця одномодова апроксимаційна хвильова картина істотно відрізняється від тої, яка спостерігається в експерименті. При уважному розгляді представленої на Рис. 1 фотографії помічаємо наявність чотирьох вузлів, майже рівномірно розташованих по бічній стінці

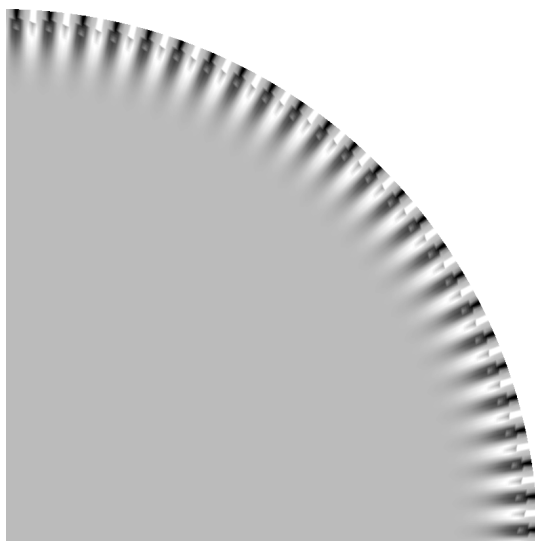


Рис. 4. Рельєф вільної поверхні для випадку апроксимації однією власною модою $\psi_{nm}(r, \theta)$ з $n = 100$, $m = 1$

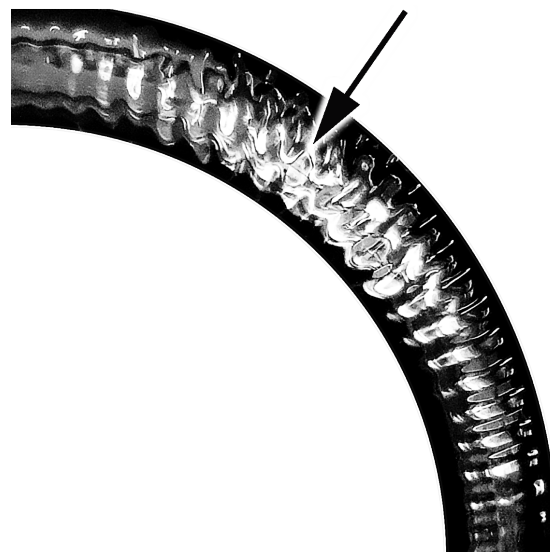


Рис. 5. Хрестоподібні хвилі біля краю «співочого бокала» в лабораторному експерименті

бокала, відсутніх на Рис. 4). Очевидно, вказані вузлові лінії пов'язані з коливаннями стінки згідно з азимутальною формою 2θ .

Однак таку чотиривузлову структуру на вільній поверхні можуть формувати й хрестоподібні хвилі, зумовлені резонансним збудженням ще одної додаткової хвилі з іншими індексами i та j . Наприклад, розглядаючи резонансну моду з $i = 102$, $j = 1$, слід узяти доповнюючу моду з $i = 104$, $j = 1$. В цьому випадку коливання вільної поверхні рідини апроксимуються двома модами $\psi_{102\,1}(r, \theta)$ та $\psi_{104\,1}(r, \theta)$. Відповідний візерунок вільної поверхні рідини в першому квадранті ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) показано на Рис. 5. Тут чітко виділяються дві вузлові області – поблизу $\theta = 0$ і в околі $\theta = \pi/2$.

4.2. Двомодова резонансна модель

Розглянемо математичну модель резонансних хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у випадку, якщо спостережений в експерименті розподіл апроксимують дві власні моди. Відомо, що спектр поверхневих хвиль рідини для циліндричного резервуара є дуже щільним [12]. Наприклад, при $R = 4.9$ см, $d = 6$ см та $i \geq 102$ довжина хрестоподібних хвиль менша за 0.3 см. Для таких коротких хвиль капілярні ефекти домінують над гравітаційними [14], а відносна різниця між визначеними за формулою (31) власними частотами ω_{nm} з номерами $n = 102$, $m = 1$ та $n = 104$, $m = 1$ становить лише $(\omega_{104\,1} - \omega_{102\,1})/\omega_{102\,1} < 0.028\%$. На Рис. 5 стрілкою показано ареал найбільш інтенсивного прояву хвилі з $n = 104$, $m = 1$, яка доповнює резонансну.

Таким чином, в експериментах, коли коливання вільної поверхні буде проходити з двома власними модами одночасно, можна очікувати різницю частот менше 2.8%. При цьому власні частоти обох мод задовольняють умову резонансу (41) з невеликими відхиленнями. Отже, якщо мода ψ_{nm} з $n \neq 0$ і $m = 1$ є резонансною з власною частотою

ω_{nm} , то неважко визначити моду з номерами $(n+2)$ і m , таку, що

$$\omega_{nm} \approx \omega_{(n+2)m}. \quad (59)$$

За цієї умови висоту поверхні можна апроксимувати цими двома резонансними власними модами:

$$\zeta \approx \frac{\zeta_{nm}}{N_{nm}} \psi_{nm} + \frac{\zeta_{(n+2)h}}{N_{(n+2)h}} \psi_{(n+2)h}. \quad (60)$$

Оскільки задача має сильну нелінійність, ми використовуємо малий параметр ε , пропорційний до амплітуди коливань a (43), і шукаємо розв'язок порядку $O(\varepsilon)$ [4]. Для коливань вільної поверхні (60) потенціал швидкості φ_1 слід записати у вигляді

$$\varphi_1 \approx \varphi_{nm}(t) \psi_{nm} \frac{\operatorname{ch} k_{nm}(x+d)}{N_{nm} \operatorname{ch} k_{nm} d} + \varphi_{(n+2)h}(t) \psi_{(n+2)h} \frac{\operatorname{ch} k_{(n+2)h}(x+d)}{N_{(n+2)h} \operatorname{ch} k_{(n+2)h} d}. \quad (61)$$

Використовуючи граничну умову на циліндрі (45) і підставляючи розв'язки (61) для φ_1 і (27) для φ_2 в рівняння (47), після множення на $\cos i\theta \cos \alpha_l x$ (з $i = 1, 2, 3, \dots$, $\alpha_l = l\pi/d$) та інтегрування по поверхні циліндра, залишаючи доданки порядку $O(\varepsilon^2)$, отримуємо для φ_2 такий вираз:

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{2l}(t) \cos \alpha_l x I_2(\alpha_l r) \cos 2\theta + \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{(n+2)l}(t) \cos \alpha_l x I_{n+2}(\alpha_l r) \cos(n+2)\theta + \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{nl}(t) \cos \alpha_l x I_n(\alpha_l r) \cos n\theta. \end{aligned} \quad (62)$$

Тут

$$\begin{aligned} \Phi_{2l}(t) = & -\frac{a\omega \sin \omega t}{d\alpha_l I'_2(\alpha_l R)} \int_{-d}^0 \cos \alpha_l x \cos \frac{\pi x}{2d} dx; \\ \Phi_{(n+2)l}(t) = & -\frac{a\varphi_{nm}(t) \cos \omega t}{d\alpha_l I'_{n+2}(\alpha_l R)} \left\{ k_{nm}^2 J_n''(k_{nm} R) C_{nml} + \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{2d} k_{nm} J_n(k_{nm} R) D_{nml} - \frac{2n}{R^2} J_n(k_{nm} R) C_{nml} \right\}; \\ \Phi_{nl}(t) = & -\frac{a\varphi_{(n+2)h}(t) \cos \omega t}{d\alpha_l I'_n(\alpha_l R)} \left\{ k_{(n+2)h}^2 J_{n+2}''(k_{(n+2)h} R) C_{(n+2)hl} + \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{2d} k_{(n+2)h} J_{n+2}(k_{(n+2)h} R) D_{(n+2)hl} - \frac{2(n+2)}{R^2} J_{n+2}(k_{(n+2)h} R) C_{(n+2)hl} \right\}; \end{aligned} \quad (63)$$

$$C_{ijl} = \frac{1}{N_{ij}} \int_{-d}^0 \frac{\operatorname{ch} k_{ij}(x+d)}{\operatorname{ch} k_{ij} x} \cos \frac{\pi x}{2d} \cos \alpha_l x dx;$$

$$D_{ijl} = \frac{1}{N_{ij}} \int_{-d}^0 \frac{\operatorname{sh} k_{ij}(x+d)}{\operatorname{sh} k_{ij} x} \sin \frac{\pi x}{2d} \cos \alpha_l x dx.$$

Існує дві суттєві відмінності між розв'язками, отриманими за допомогою одномодової моделі (48) і у випадку збудження двох резонансних мод (62), які задовольняють умову резонансу (59):

1. У першій моделі залежні від часу амплітуди G_{nl} мають удвічі більшу частоту, ніж у другій.
2. У випадку однієї резонансної моди доданки G_{nl} (48) пропорційні a^2 , тобто мають порядок $O(\varepsilon^{3/2})$. Якщо ж візерунок вільної поверхні моделюється двома модами, вони пропорційні a , тобто мають порядок $O(\varepsilon^2)$. Це означає, що двомодова модель більш легко реалізується на практиці [13].

Для того, щоб вивести остаточні рівняння для амплітуд резонансних власних мод, застосуємо кінематичну граничну умову (50), зберігаючи всі доданки до порядку $O(\varepsilon^2)$ включно. Підставивши сюди розв'язки (61) і (62) для φ_1 і φ_2 , перемноживши доданки Ψ_{nm}/N_{nm} і $\Psi_{(n+2)h}/N_{(n+2)h}$ та проінтегрувавши по вільній поверхні, одержимо розв'язки для амплітуд потенціалу φ_1 у такому вигляді:

$$\varphi_{nm} = \gamma_{nm}[\dot{\xi}_{nm} + \xi_{(n+2)p}Q_{(n+2)p})a \sin \omega t], \quad (64)$$

$$\varphi_{(n+2)h} = \gamma_{(n+2)h}[\dot{\xi}_{(n+2)h} + \xi_{nm}M_{(n+2)h})a \sin \omega t],$$

де $\gamma_{ij} = [k_{ij} \tanh k_{ij} d]^{-1}$. Вирази для коефіцієнтів $Q_{(n+2)p}$, $M_{(n+2)h}$ наведено в додатку.

Тепер застосуємо динамічну граничну умову (53), зберігаючи лише доданки до порядку $O(\varepsilon^2)$. Після підстановки в неї виразів (61), (62) і (64) та операцій, аналогічних описаним вище, одержимо такі рівняння для амплітуд резонансних хрестоподібних хвиль:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \ddot{\xi}_{(n+2)h} B_{nm} a \cos \omega t + \\ + \dot{\xi}_{(n+2)h} V_{nm} a \sin \omega t - \xi_{(n+2)h} \omega Q_{nm} a \cos \omega t = 0; \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{(n+2)h} + \omega_{(n+2)h}^2 \xi_{(n+2)h} - \ddot{\xi}_{nm} A_{(n+2)h} a \cos \omega t + \\ + \dot{\xi}_{nm} V_{(n+2)h} a \sin \omega t - \xi_{nm} \omega M_{(n+2)h} a \cos \omega t = 0. \end{aligned}$$

Вирази для коефіцієнтів B_{nm} , $A_{(n+2)h}$, Q_{nm} , V_{nm} , $V_{(n+2)h}$, $M_{(n+2)h}$ наведено в додатку.

Система рівнянь (65) описує зв'язані коливання з параметричним резонансом, коли $\omega \approx 2\omega_{nm} \approx 2\omega_{(n+2)h}$ відповідно до теорії Луїзеля [20]. За наявності параметричної нестійкості розв'язки такого роду будуть необмежено зростати. Якщо ж до системи додати нелінійний опір, то розв'язки стають обмеженими і в фазовому просторі з'являються аттрактори. Для розглянутої задачі це означає, що на вільній поверхні можуть виникати резонансні хрестоподібні хвилі з ненульовими амплітудами.

У цьому дослідженні ми розробили дві принципово відмінні моделі збудження хрестоподібних хвиль на поверхні рідини в контейнері. Яка ж із них відповідає реальному випадку, можна визначити експериментально, порівнявши частоти вібрацій циліндра з власними частотами спостережених хрестоподібних хвиль. Виміряне значення резонансної частоти виявилось близьким до половини частоти звучання «співочого бокала»,

яка в нашому випадку становить 273 Гц. Таким чином, на практиці реалізується саме друга модель, коли власні частоти форм ψ_{nm} і $\psi_{(n+2)h}$ будуть 138.37 Гц і 142.29 Гц відповідно.

5. ВИСНОВКИ

Представлену роботу присвячено математичному моделюванню феномену появи хрестоподібних хвиль у «співочому бокалі» за допомогою розв'язків для резонансних коливань поверхні рідини. При цьому вимушені хвилі, які мають чотири вузли в азимутальному напрямку, відповідають лінійному наближенню, а для коротших хрестоподібних хвиль отримано нелінійні параметричні рівняння. Побудовано дві істотно відмінні математичні моделі. Перша з них описує появу хрестоподібних хвиль при наявності на вільній поверхні рідини лише однієї власної моди коливань. Друга модель – у цій статті вона представлена вперше – відповідає ситуації, коли збуджуються дві власні моди. Отриманий у її рамках просторовий розподіл висоти вільної поверхні відображає основні риси хвильових інтерференційних візерунків, які зафіксовані в експериментах. Важливо, що частоти таких власних форм близькі до половини частоти звучання «співочого бокала», як і спостережені частоти хрестоподібних хвиль. Це підтверджує той факт, що на практиці реалізується саме модель зі збудженням двох власних мод.

ДОДАТОК. КОЕФІЦІЄНТИ РІВНЯНЬ У ДВОМОДОВІЙ МОДЕЛІ

У цьому додатку наведено коефіцієнти в рівняннях (64) і (65), отримані після інтегрування по вільній поверхні рідини:

$$Q_{nm} = - \sum_{l=1} \frac{\omega \pi}{2d \alpha_l I'_n(\alpha_l R) N_{nm} N_{(n+2)h}} \times$$

$$\times \left\{ \left[\alpha_l^2 + \frac{2(n+2)}{R^2} \right] \int_0^R I_2(\alpha_l r) J_{n+2}(k_{(n+2)h} r) J_n(k_{nm} r) r dr - \right.$$

$$\left. - \alpha_l k_{(n+2)h} \int_0^R I'_2(\alpha_l r) J'_{n+2}(k_{(n+2)h} r) J_n(k_{nm} r) r dr \right\} \times$$

$$\times \int_{-d}^0 \cos \alpha_l x \cos \frac{\pi x}{2d} dx,$$

$$M_{(n+2)h} = \sum_{l=1} \frac{\omega \pi 2(n+1)}{d \alpha_l I'_n(\alpha_l R) N_{nm} N_{(n+2)h} R^2} \times$$

$$\times \int_0^R I_2(\alpha_l r) J_{n+2}(k_{(n+2)h} r) J_n(k_{nm} r) r dr \int_{-d}^0 \cos \alpha_l x \cos \frac{\pi x}{2d} dx + Q_{n+2h},$$

$$B_{nm} = \frac{\gamma_{(n+2)h}\pi}{\gamma_{nm}N_{nm}} \sum_{l=1}^R \frac{\int_0^R I_n(\alpha_l r) J_n(k_{nm} r) r dr}{d\alpha_l I'_n(\alpha_l R)} \times \\ \times \left[k_{(n+2)h}^2 J''_{n+2}(k_{(n+2)h} R) C_{(n+2)hl} + \frac{\pi}{2d} k_{(n+2)h} J_{n+2}(k_{(n+2)h} R) D_{(n+2)hl} - \right. \\ \left. - \frac{2(n-2)}{R^2} J_{n+2}(k_{(n+2)h} R) C_{(n+2)hl} \right],$$

$$A_{(n+2)h} = \frac{\gamma_{nm}\pi}{\gamma_{(n+2)h}N_{(n+2)h}} \sum_{l=1}^R \frac{\int_0^R I_{n+2}(\alpha_l r) J_{n+2}(k_{(n+2)h} r) r dr}{d\alpha_l I'_{n+2}(\alpha_l R)} \times \\ \times \left[k_{nm}^2 J''_n(k_{nm} R) C_{nml} + \frac{\pi}{2d} k_{nm} J_n(k_{nm} R) D_{nml} - \frac{2n}{R^2} J_n(k_{nm} R) C_{nml} \right],$$

$$V_{nm} = \omega B_{nm} + Q_{(n+2)h} - \sum_l \frac{\omega \gamma_{(n+2)h} \pi k_{(n+2)h}}{2d \gamma_{nm} I'_2(\alpha_l R) N_{(n+2)h} N_{nm}} \times \\ \times \int_0^R I'_n(\alpha_l r) J'_{n+2}(k_{(n+2)h} r) J_n(k_{nm} r) r dr \int_{-d}^0 \cos \alpha_l x \cos \frac{\pi x}{2d} dx,$$

$$V_{(n+2)h} = \omega A_{(n+2)h} + M_{(n+2)h} - \sum_l \frac{\omega \gamma_{nm} \pi k_{nm}}{2d \gamma_{(n+2)h} I'_2(\alpha_l R) N_{n=2h} N_{nm}} \times \\ \times \int_0^R I_{n+2}(\alpha_l r) J'_n(k_{nm} r) J_{n+2}(k_{(n+2)h} r) r dr \int_{-d}^0 \cos \alpha_l x \cos \frac{\pi x}{2d} dx.$$

REFERENCES

- [1] G. Jundt, A. Radu, E. Fort, J. Duda, H. Vach, and N. Fletcher, “Vibrational modes of partly filled wine glasses,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 119, no. 6, pp. 3793–3798, 2006. <https://doi.org/10.1121/1.2198183>
- [2] M. Faraday, “On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. A121, pp. 299–340, 1831. <https://doi.org/10.1098/rstl.1831.0018>

- [3] J. Walker, “The amateur scientist: Edge waves form a spoke-like pattern when vibrations are set up in a liquid,” *Scientific American*, vol. 251, no. 6, pp. 130–139, 1984. <https://doi.org/10.1038/scientificamerican1284-130>
- [4] C. J. R. Garrett, “On cross-waves,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 41, no. 4, pp. 837–849, 1970. <https://doi.org/10.1017/s0022112070000952>
- [5] J. J. Mahony, “Cross-waves. part 1. theory,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 55, no. 2, pp. 229–244, 1972. <https://doi.org/10.1017/s002211207200182x>
- [6] A. F. Jones, “The generation of cross-waves in a long deep channel by parametric resonance,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 138, pp. 53–74, 1984. <https://doi.org/10.1017/s0022112084000033>
- [7] S. Lichter and W. B. Underhill, “Mode-number shifting of nonlinear cross-waves,” *Physical Review A*, vol. 35, pp. 5282–5284, 1987. <https://doi.org/10.1103/physreva.35.5282>
- [8] J. W. Miles, “Parametrically excited, standing cross-waves,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 186, pp. 119–127, 1988. <https://doi.org/10.1017/s0022112088000060>
- [9] J. W. Miles and D. Henderson, “Parametrically forced surface waves,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 22, pp. 143–165, 1990. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.22.010190.001043>
- [10] T. H. Havelock, “Forced surface-waves on water,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 8, no. 51, pp. 569–576, 1929. <https://doi.org/10.1080/14786441008564913>
- [11] G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Paris: Bachelier, 1852.
- [12] T. S. Krasnopolskaya and G. J. F. van Heijst, “Wave pattern formation in a fluid annulus with a radially vibrating inner cylinder,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 328, pp. 229–252, 1996. <https://doi.org/10.1017/s0022112096008701>
- [13] Y. V. Gorskyi, T. S. Krasnopolskaya, and Y. O. Zhuk, “Cross-waves on liquid surface in partially filled cylindrical container,” *International Applied Mechanics*, vol. 61, no. 6, pp. 739–753, 2025. <https://doi.org/10.1007/s10778-026-01391-8>
- [14] T. S. Krasnopolskaya and G. J. F. van Heijst, “Fluid surface waves in a partially filled ‘singing wine glass’,” *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, vol. 67, pp. 116–124, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2017.08.011>
- [15] H. Lamb, *Hydrodynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1932.
- [16] T. J. I. Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*. London: Macmillan, 1908.
- [17] S. V. Joubert, T. H. Fay, and E. L. Voges, “A storm in a wineglass,” *American Journal of Physics*, vol. 75, no. 7, pp. 647–651, 2007. <https://doi.org/10.1119/1.2742397>

- [18] J. W. Miles, “Resonantly forced surface waves in a circular cylinder,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 149, pp. 15–31, 1984. <https://doi.org/10.1017/s0022112084002512>
- [19] R. Moussa, “A generalization of Ince’s equation,” *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 02, no. 13, pp. 1171–1182, 2014. <https://doi.org/10.4236/jamp.2014.213137>
- [20] W. H. Louisell, *Coupled mode and parametric electronics*. New York: Wiley, 1960.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Vibrational modes of partly filled wine glasses / Jundt G., Radu A., Fort E., Duda J., Vach H., and Fletcher N. // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2006. — Vol. 119, no. 6. — P. 3793–3798.
- [2] Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1831. — Vol. A121. — P. 299–340.
- [3] Walker J. The amateur scientist: Edge waves form a spoke-like pattern when vibrations are set up in a liquid // Scientific American. — 1984. — Vol. 251, no. 6. — P. 130–139.
- [4] Garrett C. J. R. On cross-waves // Journal of Fluid Mechanics. — 1970. — Vol. 41, no. 4. — P. 837–849.
- [5] Mahony J. J. Cross-waves. Part 1. Theory // Journal of Fluid Mechanics. — 1972. — Vol. 55, no. 2. — P. 229–244.
- [6] Jones A. F. The generation of cross-waves in a long deep channel by parametric resonance // Journal of Fluid Mechanics. — 1984. — Vol. 138. — P. 53–74.
- [7] Lichter S., Underhill W. B. Mode-number shifting of nonlinear cross-waves // Physical Review A. — 1987. — Vol. 35. — P. 5282–5284.
- [8] Miles J. W. Parametrically excited, standing cross-waves // Journal of Fluid Mechanics. — 1988. — Vol. 186. — P. 119–127.
- [9] Miles J. W., Henderson D. Parametrically forced surface waves // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1990. — Vol. 22. — P. 143–165.
- [10] Havelock T. H. Forced surface-waves on water // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. — 1929. — Vol. 8, no. 51. — P. 569–576.
- [11] Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l’élasticité des corps solides. — Paris : Bachelier, 1852. — 335 p.
- [12] Krasnopolskaya T. S., van Heijst G. J. F. Wave pattern formation in a fluid annulus with a radially vibrating inner cylinder // Journal of Fluid Mechanics. — 1996. — Vol. 328. — P. 229–252.

- [13] Горський Ю. В., Краснопольська Т. С., Жук Я. О. Хрестоподібні хвилі на поверхні рідини в частково заповненій циліндричній ємності // Прикладна механіка. — 2025. — Т. 61, № 6. — С. 40–55.
- [14] Krasnopol'skaya T. S., van Heijst G. J. F. Fluid surface waves in a partially filled 'singing wine glass' // European Journal of Mechanics - B/Fluids. — 2018. — Vol. 67. — P. 116–124.
- [15] Lamb H. Hydrodynamics. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1932. — 738 p.
- [16] Bromwich T. J. I. An introduction to the theory of infinite series. — London : Macmillan, 1908. — 540 p.
- [17] Joubert S. V., Fay T. H., Voges E. L. A storm in a wineglass // American Journal of Physics. — 2007. — Vol. 75, no. 7. — P. 647–651.
- [18] Miles J. W. Resonantly forced surface waves in a circular cylinder // Journal of Fluid Mechanics. — 1984. — Vol. 149. — P. 15–31.
- [19] Moussa R. A generalization of Ince's equation // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 2014. — Vol. 02, no. 13. — P. 1171–1182.
- [20] Louisell W. H. Coupled mode and parametric electronics. — New York : Wiley, 1960. — 268 p.

T. S. Krasnopol'skaya, Yu. V. Gorskiy

**Forced waves and cross-waves on a liquid surface in a partially filled
"singing wineglass"**

The occurrence and structure of the forced and cross waves on a free surface of the liquid poured into the thin-walled cylindrical reservoir with a finite depth are explained using the superposition method. The chosen configuration of the system approximates the so-called "singing wineglasses," famous due to the tonal sound radiation when exciting it by the wet finger evenly moving along the free edge of the wall. The theoretical analysis is complemented by the study held on the created special experimental benchmark that allows the photographic imaging of the free liquid surface displacements. The offered graphic representation of the height of the free surfaces depicts the main features of the wave distributions observed in the "singing wineglass." The forced waves are shown to have the four knots in the azimuthal direction. Those knots correspond to the lowest bending mode of the circumferential vibration of the elastic shell and match with a modal structure of eigen oscillations of the liquid in the finite domain. The peculiarity of the cross-waves is the ultimate orthogonality of their crests to the vibrating wall. The principal characteristics of the forced waves on the free liquid surface in the glass may be qualitatively described within the limits of the linearized theoretical model. At the same time, the cross-waves may be adequately modeled only by the nonlinear mathematical approaches describing the parametric resonance. The two-mode resonant model developed in this paper offers the most plausible mechanism of the occurrence of cross-waves. The obtained mathematical relations form the basis for simulation of

the surface waves in the partially filled reservoirs in a wide range of the geometric and physical parameters. The expected results may be of use for prognostication of the behavior of the oil storage reservoirs, water towers, fuel tanks, and so on.

KEY WORDS: “singing wineglass”, forced surface waves, cross-waves, superposition method, parametric resonance, eigenmodes