

УДК 532.5

ЗАСТОСУВАННЯ ПОТЕНЦІАЛУ ШВИДКОСТІ СИСТЕМИ ДВОХ ДЖЕРЕЛ У ЗАДАЧІ РУХУ ТОНКОГО СУДНА В ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ ЗІ ЗМІННОЮ В ЧАСІ ШВИДКІСТЮ

О. Г. Стеценко, В. М. Ільченко[†]

Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Марії Капніст, 8/4, 03057, Київ, Україна

[†]E-mail: ilcenkovladimir@gmail.com

Отримано 29.05.2024

У лінійній постановці розв'язано нестационарну задачу визначення амплітудної картини поверхневих збурень, генерованих тонким судном із симетричними обводами, яке рухається зі змінною швидкістю, при безвіддирвному його обтіканні в прямокутному каналі в напрямку поздовжньої осі каналу. Для знаходження розв'язку застосовано метод розподілених по змоченій поверхні судна джерел, який ґрунтується на використанні потенціалу швидкості системи двох латерально симетричних джерел, що рухаються під вільною поверхнею зі змінними в часі швидкістю та інтенсивністю. Цей потенціал задовольняє граничні умови на вільній поверхні, дні та стінках каналу. Він має аналітично-квадратурний вигляд, представлений косинус-рядом Фур'є з відомими коефіцієнтами розкладу. У випадку довільної геометрії судна використання зазначеного методу принаймні на порядок зменшує кількість рівнянь, необхідних для визначення характеру розподілу джерел по змоченій поверхні. Важлива його особливість полягає в можливості розв'язати нестационарну задачу в наперед заданий момент часу, що обумовлено відсутністю процедури знаходження проміжного розв'язку на кожному часовому кроці. У випадку руху тонкого судна інтенсивність розподілу джерел визначається простою залежністю від його геометрії. Як результат розв'язання задачі зводиться до обчислення подвійних інтегралів по змоченій поверхні та інтегралів по хвильовому числу та часу. Отриманий розв'язок містить систему корабельних хвиль із визначеними хвильовими числами, згасаючі з віддаленням від судна збурення та збурення, обумовлені характерною для нестационарних рухів тіла наявністю прилученої маси. Для проведення чисельних експериментів обрано достатньо просту геометрію змоченої поверхні судна. Зміна швидкості його руху в часі відповідає двом характерним етапам. На першому з них судно стартує зі стану спокою й набуває заданої швидкості. На другому етапі відбувається рух судна в режимі гальмування до зупинки. При виборі такої схеми руху структура поверхневих збурень визначається лише згасаючими складовими від корпусу судна та прилученою масою. Проаналізовано характер залежності збурень вільної поверхні від числа Фруда для кожного з етапів руху, геометрії судна, його осадки та геометрії каналу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тонке судно, нестационарний рух, прискорення, канал, джерело, потенціал швидкості, прилучена маса

1. ВСТУП

Дослідження лінійної гідродинаміки руху суден тісно пов'язане з використанням потенціалу швидкості точкових або неперервно розподілених по змоченій поверхні корпусу джерел, які рухаються під вільною поверхнею. Такий вибір підходу пов'язаний з необхідністю знаходити поле генерованих судном корабельних хвиль і величину обумовленого ним хвильового опору. Ці характеристики судна визначаються в рамках моделі ідеального нестисливого середовища. Зауважимо однак, що застосування методу джерел в реальних задачах гідродинаміки суден виявилось складною проблемою. І хоча запис потенціалу швидкості одиничного джерела в нескінченному середовищі у вигляді функції Гріна для рівняння Лапласа був відомий ще на початку минулого століття, його використання призводило до необхідності розв'язувати систему інтегральних рівнянь. Для цього на той час не було розроблено коректних чисельних методів і не існувало необхідних обчислювальних засобів. Помітним кроком вперед у розв'язанні лінійних стаціонарних задач стала робота [1], в якій було отримано потенціал швидкості для одиничного джерела, яке рухається в шарі водного середовища скінченної товщини. Однак цей потенціал виражався через подвійний невластний інтеграл, тому його застосування мало обмежений характер.

Протягом тривалого періоду для вивчення гідродинаміки стаціонарного руху суден розроблялись і застосовувались гідродинамічні моделі з використанням потенціалу швидкості одиничного джерела, (див. [2–5] і бібліографію в них), зокрема, й для руху судна в каналі [6]. Однак, через недостатню потужність тогочасних обчислювальних комплексів такі дослідження виконувались для спрощених схем задач – тонкого тіла Мічеля, спрощеної геометрії обводів судна, імітації руху судна рухом області поверхневого тиску тощо. Лише в останній чверті минулого століття з появою потужних обчислювальних комплексів та завдяки опублікуванню основоположних робіт [7–9] застосування потенціалів швидкості руху одиничних джерел стало пріоритетним при розробці комплексних комп'ютерних програм для визначення гідродинамічних характеристик суден. Зокрема, було розроблено чисельний метод розрахунку гідродинамічних полів, генерованих рухомими під вільною поверхнею тілами [7], метод граничних елементів (панелей) для виконання граничних умов на вільній поверхні та на змоченій поверхні судна [8], а також чисельний алгоритм для виконання граничних умов розсіяння попереду та позаду судна [9]. Створені на їх основі обчислювальні пакети широко використовуються суднобудівними компаніями.

Нестаціонарність руху судна обумовлюється різними факторами, які включають непрямолінійність траєкторії його переміщення, змінну топографію дна, змінну ширину каналу, змінну в часі швидкість, рух кількох суден на різних курсах. Кожна з цих схем руху має свої особливості та труднощі. На загальний клас задач, зокрема, й для руху судна в каналі, досліджений недостатньо повно, що обумовлено складністю відповідних гідродинамічних моделей. Головна проблема полягає у виконанні на вільній поверхні граничної умови, яка містить похідні по часу. У зв'язку з цим на кожному часовому кроці необхідно виконувати процедуру, подібну до розв'язання стаціонарної задачі, що значно збільшує об'єм чисельних розрахунків.

Як і для стаціонарних випадків, до 1980-их рр. нестаціонарні рухи суден імітувались рухом областей поверхневого тиску [10–14]. У деяких роботах гранична умова

на вільній поверхні замінювалась умовою «твердої кришки» [15]. Слід також згадати публікацію [16], в якій визначено потенціал швидкості для точкового джерела змінної інтенсивності, яке рухається під вільною поверхнею глибокого моря. З використанням цього потенціалу розв'язано лінійну задачу виходу на стаціонарний режим руху для тонкого судна, яке стартує в початковий момент із заданою швидкістю, яка надалі не змінюється. Відповідний розв'язок отримано у вигляді дво-, три- й чотирикратних інтегралів.

У подальшому в рамках чисельного моделювання з використанням можливостей новітніх обчислювальних засобів було виконано ряд цікавих досліджень нестационарних хвильових картин за рухомими областями поверхневого тиску в каналах у нелінійній постановці. Зокрема, відзначимо публікації [17–20] та змістовні бібліографічні списки в них. У цих роботах нестационарність обумовлювалась як нелінійністю, при якій має місце Стоксів дрейф [17, 18], так і змінною топографією дна каналу [19, 20]. Для опису динаміки суден у неглибоких каналах використовувались проінтегровані по товщині шару рівняння руху в наближенні мілкої води. Найцікавіший результат цих досліджень полягає у виявленні режимів руху, при яких перед рухомою областю тиску генеруються слабкодисперсійні хвилі, включно з усамітненими хвилями – солітонами.

На особливу згадку заслуговує сучасна робота [21], в якій розв'язано задачу визначення потенціалу швидкості системи двох латерально симетричних джерел однакової інтенсивності, яка змінюється в часі при русі під вільною поверхнею прямокутного каналу. Нагадаємо, що латеральною називають симетрію відносно вертикальної площини, що ділить двобічносиметричне тіло на ліву й праву половини. Для корпусу судна така площина проходить через його поздовжню вісь.

На загал можна зробити висновок, що дослідження нестационарних рухів суден у каналах у строгій постановці, навіть в лінійному наближенні, знаходиться на недостатньому рівні. Це призводить до необхідності проводити складні й дорогі експериментальні дослідження задля вироблення рекомендацій щодо безпечної проводки суден у вузьких і середніх каналах. У цій статті буде отримано ефективний розв'язок лінійної задачі нестационарного руху зі змінною в часі швидкістю тонкого судна в прямокутному каналі. Для цього використовується потенціал швидкості системи двох нестационарних рухомих джерел [21].

2. ВИЗНАЧЕННЯ ПОТЕНЦІАЛУ ШВИДКОСТІ РУХУ СУДНА

Розв'язується задача про рух судна з симетричними обводами довжиною $2L$, максимальною шириною $2b$ в міделевому перерізі та осадкою T , геометрія змоченої поверхні якого описується рівнянням $y = \pm f(x, z)$ у прямокутному каналі з шириною $2l$ і товщиною h шару води в ньому. Розв'язок шукаємо в рухомій системі координат, початок якої знаходиться в точці симетрії площини ватерлінії судна. Вісь Ox спрямована в напрямку руху судна, а вісь Oz угору. При розгляді задачі вибрано такі характерні масштаби: для лінійних розмірів – глибину h , для поля швидкостей – характерне значення швидкості руху U_* , для часу – відношення U_*/g , для функції течії – добуток U_*h , для тиску – подвоєний динамічний напір ρU_*^2 . (g – прискорення вільного падіння, ρ – густину води).

Потенціал швидкості нестационарного руху при застосуванні методу джерел визна-

чається аналогічно до стаціонарного випадку:

$$\phi(t, x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S+S'} G_s(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta) ds, \quad (1)$$

де $G_s(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ – потенціал швидкості рухомої системи двох джерел інтенсивності $q(t, \xi, \eta, \zeta)$, розподілених по змоченій поверхні судна S та по поверхні S' , яка є симетричним відображенням S відносно вільної поверхні («дубльоване» тіло). У задачах руху судна в каналі ця величина представляється у вигляді

$$G_s(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = G_{rs}(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta) + G_{hs}(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta), \quad (2)$$

де складова $G_{rs}(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ відповідає потенціалу швидкості руху відображеного тіла, а $G_{hs}(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ описує збурення вільної поверхні, породжене судном.

Врахуємо, що в лінійних задачах нестационарного руху тонкого судна для інтенсивності джерела справедливе представлення [16]

$$q(t, \xi, \eta, \zeta) = U(t)f_q(\xi, \eta, \zeta), \quad q(t, x, y, z) = U(t)f_q(x, y, z), \quad (3)$$

де функція f_q визначає зміну інтенсивності джерел в кожній точці змоченої поверхні судна. Пропорційність інтенсивності джерел до швидкості руху, незалежно від того, змінна в часі вона, чи ні, впливає з самого вигляду граничної умови на вільній поверхні. При $U(t) = \text{const}$ співмножник $f_q(x, y, z)$ визначає інтенсивність розподілу джерел для стаціонарного руху судна. Слід взяти до уваги, що в тих складових $G_{hs}(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, які залежать від часу безпосередньо, в кожен розрахунковий момент приймається $q = f_q U(t)$, а в тих, які містять інтеграли по часу, – $q = f_q U(\tau)$.

При русі тонкого тіла інтенсивність розподілу джерел на змоченій поверхні судна визначається простою залежністю

$$q(t, x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial n} = U(t) \cos(\vec{n}, x) = -\frac{U(t)(\partial f / \partial x)}{\sqrt{1 + (\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial z)^2}}. \quad (4)$$

Врахуємо спрощення, обумовлені тим, що в граничній умові на вільній поверхні для $\partial G / \partial z$ у випадку «дубльованого» тіла для джерел, симетричних відносно вільної поверхні, обнуляється одна зі складових. Тоді розв'язок, одержаний з використанням підходу [21], набуває вигляду

$$G_s = \frac{4U(t)}{l} \sum_{m=0}^{\infty} a_m f_q(\xi, \eta, \zeta) \cos\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi m \eta}{l}\right) \text{Re}(I_{rm} + I_{G1m} + I_{G2m}). \quad (5)$$

Тут

$$a_m = \begin{cases} 1/2 & \text{при } m = 0, \\ 1 & \text{при } m \geq 1, \end{cases}$$

а G_s включає в себе характер зміни інтенсивності джерел в часі в залежності від характеру кожної зі складових у залежності (4). У такий спосіб множник $U(t)$ і його

похідні вносяться в кожну складову виразу для G_s неоднаково, а множник f_q – навпаки, однаково для всіх складових. Надалі він представлятиме залежність q тільки від геометрії змоченого корпусу судна. В області $-L \leq \zeta \leq L$, $-T \leq \zeta \leq T$ компоненти представлення (5) набувають такого вигляду:

$$\operatorname{Re} I_{rm} = U(t) \int_0^\infty D_m \cos[k_1(x - \xi)] dk_1, \quad (6)$$

де

$$D_m = e^{-k_m|z-\zeta|} + e^{-k_m|z+\zeta|} + e^{-k_m(z+2+\zeta)} + e^{-k_m(z+2-\zeta)}; \quad k_m = \sqrt{k_1^2 + \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2}.$$

Максимальне значення m обирається з умови забезпечення необхідної точності обчислень, а z і ζ перебувають в областях $-T \leq z$, $\zeta \leq T$.

Представлення величини $\operatorname{Re} I_{G1m}$ враховує зроблені спрощення та введене представлення (3). Як результат на підставі [21] ця складова набуває вигляду

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_{G1m}(t, x, \xi, \zeta) = & \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}[k_m(z+1)] D_m}{\operatorname{ch} k_m} \times \\ & \times \left\langle \left[q_0 \cos(t F_{1m}) + \frac{\dot{q}_0}{F_{1m}} \sin(t F_{1m}) \right] \cos k_1[x + \operatorname{Fr} s(t) - \xi] \right\rangle dk_1, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$F_{1m} = \sqrt{\operatorname{Fr} k_m \operatorname{th} k_m}; \quad D_{m0} = 2e^{-k_m|\zeta|} + e^{-k_m(2+\zeta)} + e^{-k_m(2-\zeta)};$$

Fr – число Фруда. Відповідно, величина складової $\operatorname{Re} I_{G2m}$ задається виразом

$$\operatorname{Re} I_{G1m}(t, x, \xi, \zeta) = \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{D_{m0} \operatorname{ch}[k_m(z+1)]}{\sqrt{\operatorname{Fr} k_m \operatorname{sh}(2k_m)}} I_{2m} dk_1, \quad (8)$$

де

$$I_{2m} = \int_0^t \left\{ \cos(k_1 F) [q \operatorname{Fr} (\gamma k_m + U^2 k_1^2 \operatorname{Fr}) - \ddot{q}] - \sin(k_1 F) \operatorname{Fr} (q \dot{U} + 2\dot{q} U) \right\} \sin[F_{1m}(t - \tau)] d\tau;$$

$$F = x - \xi + \operatorname{Fr}[s(t) - s(\tau)]; \quad q = q(\tau, \xi, \eta, \zeta); \quad U = U(\tau);$$

$$\gamma = \frac{D_{m0}^*}{D_{m0}}; \quad D_{m0}^* = e^{-k_m(2+\zeta)} + e^{-k_m(2-\zeta)}.$$

Для геометрії змоченої поверхні судна, визначеної у вигляді функції $y = \pm f(x, z)$, інтегрування в формулі (1) по тривимірній поверхні спрощується [4]. У цьому випадку потрібний інтеграл по змоченій поверхні судна представляється у вигляді подвійного інтеграла в області $S + S'$, яку пробігають змінні (ξ, ζ) , а саме:

$$\phi_s(t, x, y, z) = \frac{1}{\pi l} \int_0^\infty \iint_{S+S'} G[t, \tau, x, z, \xi, f(\xi, \zeta), \zeta] d\xi d\zeta dk_1, \quad (9)$$

де

$$G = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, \eta, \zeta) \cos\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \cos\left[\frac{\pi m f(\xi, \zeta)}{l}\right] \operatorname{Re}(I_{rm} + I_{G1m} + I_{G2m}).$$

Таким чином, потенціал швидкості нестационарного руху судна визначається виразом (9) з використанням співвідношень (2), (4), (6) і (7).

3. ПОВЕРХНЕВІ ЗБУРЕННЯ ЗА НЕСТАЦІОНАРНО РУХОМИМ ТОНКИМ СУДНОМ У КАНАЛІ

Згідно з дослідженням [16], амплітудна картина поверхневих збурень, включно з поверхневими хвилями, виражається через потенціал швидкості руху $\phi(t, x, y, z)$ як

$$\eta_s(t, x, y, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial t} - U(t) \operatorname{Fr} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (10)$$

Тут $\operatorname{Fr} = U_*^2 / gh$ – число Фруда (воно відповідає квадрату більш вживаного масштабного параметра $U_* / \sqrt{gh}$). Зі співвідношення (10) та розв'язку (9) для $\phi_s(t, x, y, z)$ впливає, що з урахуванням симетричності розподілу інтенсивності джерел на поверхні «дубльованого» тіла й незалежності I_{G1m} від k_1 вираз для $\eta_s(t, x, y, 0)$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} \eta_s(t, x, y, 0) = & \frac{1}{\pi l} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \int_0^{\infty} \int_S \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos\left[\frac{\pi m f(\xi, \zeta)}{l}\right] \times \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{Fr} U(t) \frac{\partial}{\partial x} \right) \operatorname{Re}(I_{rm} + I_{G1m} + I_{G2m}) d\xi d\zeta dk_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Розглянемо почленно інтегрування для кожної складової підінтегральної функції у співвідношенні (11). Як впливає з формули (6), величина

$$I_{m1} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - U(t) \operatorname{Fr} \frac{\partial}{\partial x} \right) \operatorname{Re} I_{rm}$$

має вигляд

$$\begin{aligned} I_{m1} &= \dot{U}(t) G_{rm} - U(t) \operatorname{Fr} \frac{\partial G_{rm}}{\partial x} = \\ &= D_{mr} \left\{ \dot{U}(t) \cos[k_1(x - \xi)] + k_1 U^2(t) \operatorname{Fr} \sin[k_1(x - \xi)] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Позначимо

$$I_{mp1} = \iint_S D_{m0} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos\left[\frac{\pi m f(\xi, \zeta)}{l}\right] I_{m1} d\xi d\zeta.$$

Тоді

$$I_{mp1}(t, x, 0) = \dot{U}(t) \iint_S F_{m11} d\xi d\zeta + k_1 U^2 \operatorname{Fr} \iint_S F_{m12} d\xi d\zeta, \quad (13)$$

де

$$F_{m11}[x, \xi, \zeta, f(\xi, \zeta)] = D_{m0} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \left[\frac{\pi m f}{l} \right] \cos[k_1(x - \xi)];$$

$$F_{m12}[x, \xi, \zeta, f(\xi, \zeta)] = D_{m0} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \left[\frac{\pi m f}{l} \right] \sin[k_1(x - \xi)].$$

Нехай

$$I_{mp2} = \iint_S D_{m0} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \left[\frac{\pi m f(\xi, \zeta)}{l} \right] I_{m2} d\xi d\zeta, \quad (14)$$

де

$$I_{m2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - U(t) \text{Fr} \frac{\partial}{\partial x} \right) \text{Re } I_{G1m}.$$

Остання величина визначається зі співвідношення (7) так:

$$I_{m2} = D_{m0} [-q_0 \text{Fr} \sin(tF_{1m}) + \dot{q}_0 \cos(tF_{1m})] \cos\{k_1[x + \text{Fr} s(t) - \xi]\}.$$

Таким чином, залежність I_{mp2} від часу t має явний вигляд, а інтегрування по області S слід виконувати лише для функції F_{m21} , представленої виразом

$$F_{m21}[x, \xi, \zeta, f(\xi, \zeta)] = D_{m0} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \left[\frac{\pi m f(\xi, \zeta)}{l} \right] \cos\{k_1[x + \text{Fr} s(t) - \xi]\},$$

тому

$$I_{mp2} = [-q_0 \text{Fr} \sin(tF_{1m}) + \dot{q}_0 \cos(tF_{1m})] \iint_S F_{m21} d\xi d\zeta. \quad (15)$$

За аналогією до попередніх складових позначимо

$$I_{mp3} = \iint_S D_{m0} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \left[\frac{\pi m f(\xi, \zeta)}{l} \right] I_{m3} d\xi d\zeta,$$

де

$$I_{m3} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - U(t) \text{Fr} \frac{\partial}{\partial x} \right) \text{Re } I_{G2m}.$$

Останню величину можна визначити зі співвідношення (8) як

$$I_{m3} = \sqrt{2} \int_0^t \{ \cos(k_1 F) [q \text{Fr} (\gamma k_m + U^2 \text{Fr} k_1^2) - \ddot{q}] - k_1 \text{Fr} \sin(k_1 F) (q\dot{U} + 2\dot{q}U) \} \cos[F_{1m}(t - \tau)] d\tau.$$

Тоді

$$I_{mp3} = \sqrt{2} \int_0^t \{ [q \text{Fr} (\gamma k_m + U^2 \text{Fr} k_1^2) - \ddot{q}] \iint_S F_{m31} d\xi d\zeta -$$

$$- k_1 \text{Fr} (q\dot{U} + 2\dot{q}U) \iint_S F_{m32} d\xi d\zeta \} \cos[F_{1m}(t - \tau)] d\tau, \quad (16)$$

де

$$F_{m31}[t, x, \xi, \zeta, f(\xi, \zeta)] = D_{m0} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \left[\frac{\pi m f}{l} \right] \cos(k_1 F);$$

$$F_{m32}[t, x, \xi, \zeta, f(\xi, \zeta)] = D_{m0} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \left[\frac{\pi m f}{l} \right] \sin(k_1 F).$$

Таким чином, амплітудна картина збурень вільної поверхні задається виразом

$$\eta(t, x, y, 0) = \frac{1}{\pi l} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \left[\frac{\pi m y}{l} \right] \int_0^{\infty} (I_{mp1} + I_{mp2} + I_{mp3}) dk_1. \quad (17)$$

4. ПОВЕРХНЕВІ ЗБУРЕННЯ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ РУСІ ТОНКОГО СУДНА ЗІ СТАНУ СПОКОЮ

У якості розрахункового прикладу розглянемо нестационарний рух тонкого судна зі стану спокою. Геометрія змоченої поверхні судна задається функцією

$$y = f(x, z) = b f_1(x) \left[1 - \left(\frac{z}{T} \right)^2 \right], \quad (18)$$

де

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x| - b_1}{L - b_1} & \text{при } b_1 \leq |x| \leq L, \\ 1 & \text{при } 0 \leq |x| < b_1. \end{cases}$$

Тут величина b_1 визначає координати початку й кінця області незмінної форми поперечного перерізу корпусу судна (див. Рис. 1).

Амплітуди поверхневих збурень визначаються співвідношенням (16), в якому

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \begin{cases} -\frac{b}{L - b_1} \operatorname{sign}(\xi) \left[1 - \left(\frac{\zeta}{T} \right)^2 \right] & \text{при } b \leq |x| \leq L, \\ 0 & \text{при } 0 \leq |x| < b, \end{cases} \quad (19)$$

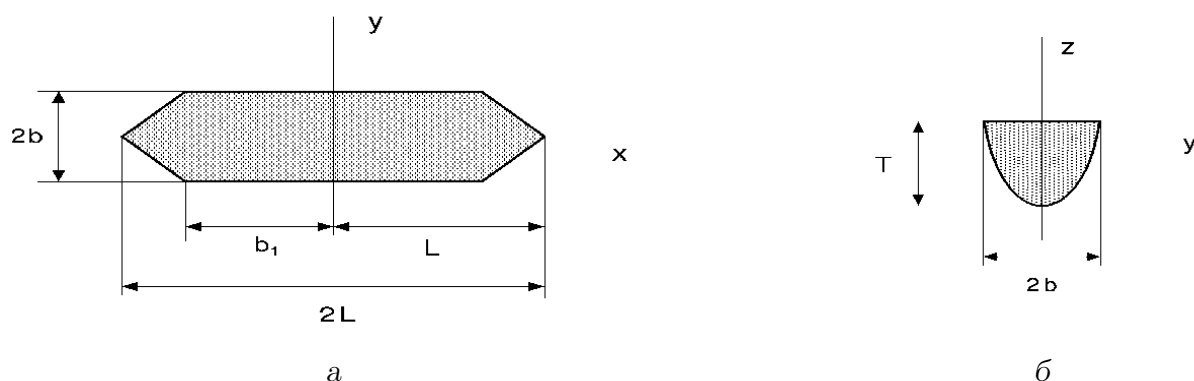


Рис. 1. Модель судна:

a — вигляд у плані; b — міделевий переріз

а у виразі для I_{mp2} покладено $U_0 = 0$. Розглянемо визначення величин I_{m2i} та інтегралів $\int_0^\infty I_{mp1} dk_1$ та $\int_0^\infty I_{mp3} dk_1$ для заданої геометрії судна.

Для нульової складової розв'язку

Вираз для $\eta_s(t, x, 0)$ при $m = 0$ має вигляд

$$\eta_{s0}(t, x, y, 0) = -\frac{1}{2\pi l} \int_0^\infty (I_{0p1} + I_{0p2} + I_{0p3}) dk_1. \quad (20)$$

Зауважимо, що

$$I_{0p1}(t, x, 0) = \iint_S [\dot{U}(t) F_{011} + k_1 \text{Fr} U^2(t) F_{012}] d\xi d\zeta, \quad (21)$$

де

$$F_{011}[\xi, \zeta, f(\xi, \zeta)] = d_{0r} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos[k_1(x - \xi)];$$

$$F_{012}[\xi, \zeta, f(\xi, \zeta)] = d_{0r} \frac{\partial f}{\partial \xi} \sin[k_1(x - \xi)].$$

Для складової (20) при заданій геометрії судна неважко довести, що інтегрування F_{01} та F_{02} по ξ та k_1 призводить до аналітичних представлень [22]. Виконавши відповідні операції, бачимо, що для всіх x справедливо

$$\int_0^\infty I_{0p1} dk_1 = -\frac{b}{L - b_1} [\dot{U}(t) F_{011p} + U^2(t) F_{012p}], \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} F_{011p}(x) = & \int_{-T}^0 \left(1 - \frac{\zeta^2}{T^2} \right) \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x+L}{|\zeta|} \right) + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x-L}{|\zeta|} \right) - \right. \\ & - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x+b_1}{|\zeta|} \right) - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x-b_1}{|\zeta|} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{x+L}{2+\zeta} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{x+L}{2-\zeta} \right) + \\ & + \operatorname{arctg} \left(\frac{x-L}{2+\zeta} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{x-L}{2-\zeta} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{x+b_1}{2+\zeta} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{x+b_1}{2-\zeta} \right) - \\ & \left. - \operatorname{arctg} \left(\frac{x-b_1}{2+\zeta} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{x-b_1}{2-\zeta} \right) \right\} d\zeta; \end{aligned}$$

$$F_{012p}(x) = \int_{-T}^0 \left(1 - \frac{\zeta^2}{T^2}\right)^2 \left\{ \frac{x+b_1}{(x+b_1)^2 + \zeta^2} + \frac{x-b_1}{(x-b_1)^2 + \zeta^2} - \frac{x+L}{(x+L)^2 + \zeta^2} - \right. \\ \left. - \frac{x-L}{(x-L)^2 + \zeta^2} + \frac{x+b_1}{(x+b_1)^2 + (2+\zeta)^2} + \frac{x+b_1}{(x+b_1)^2 + (2-\zeta)^2} + \right. \\ \left. - \frac{x-b_1}{(x-b_1)^2 + (2+\zeta)^2} + \frac{x-b_1}{(x-b_1)^2 + (2-\zeta)^2} - \frac{x+L}{(x+L)^2 + (2+\zeta)^2} - \right. \\ \left. - \frac{x+L}{(x+L)^2 + (2-\zeta)^2} - \frac{x-L}{(x-L)^2 + (2+\zeta)^2} - \frac{x-L}{(x-L)^2 + (2-\zeta)^2} \right\} d\zeta.$$

Для складової I_{0p2} з виразу (15), урахувавши, що $q_0 = 0$, маємо

$$I_{0p2} = \dot{q}_0 \cos(tF_{10}) \iint_S F_{021} d\xi d\zeta,$$

де

$$F_{021} = D_{m0} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos[k_1(x + \text{Fr } s - \xi)].$$

Для складової I_{0p3}

$$I_{03}(t, x, \zeta, k_1, 0) = \\ = \sqrt{2} \frac{\partial f}{\partial \xi} d_0 \int_0^t \left\{ [(k_1 \text{Fr } U(\gamma + k_1 \text{Fr } U^2) - \ddot{U}) \cos(k_1 F)] - 3k_1 \text{Fr } U \dot{U} \sin(k_1 F) \right\} \times \quad (23) \\ \times \cos[F_{10}(t - \tau)] d\tau.$$

Зауважимо, що в останній інтегрування по S відбувається лише для функцій

$$F_{031} = d_{0r} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos(k_1 F),$$

$$F_{032} = d_{0r} \frac{\partial f}{\partial \xi} \sin(k_1 F).$$

Неважко бачити, що вирази для F_{031} та F_{032} відрізняються від виразів F_{011} та F_{012} лише наявністю в них $\sin[k_1(x - \xi + f_t)]$ та $\cos[k_1(x - \xi + f_t)]$ замість $\sin[k_1(x - \xi_t)]$ та $\cos[k_1(x - \xi_t)]$. Оскільки функція $f_t = \text{Fr}[s(t) - s(\tau)]$ не залежить від координат в області $S(\xi, \zeta)$, то інтегрування I_{0i3} по k_1 і S виконується так само, як і для I_{0i1} . Відповідні вирази для $F_{031p}(x)$ та $F_{032p}(x)$ отримуємо з виразів для $F_{011p}(x)$ та $F_{012p}(x)$ простою заміною x на $x + f_t$. З огляду на очевидність цієї операції, повні вирази для $F_{031p}(x)$ та $F_{032p}(x)$ тут не наводимо.

За аналогією з попередніми міркуваннями, величину

$$I_{0p3}(t, x, 0) = \sqrt{2} \iint_S I_{03} d\xi d\zeta$$

представимо у вигляді

$$I_{0p3}(t, x, 0) = \sqrt{2} \int_0^t [(k_1 \text{Fr } U(\gamma + U^2 \text{Fr } k_1) - \ddot{U}) F_{031p} - 3k_1 \text{Fr } U \dot{U} F_{032p}] \cos[F_{10}(t - \tau)] d\tau. \quad (24)$$

Таким чином, для нульової складової амплітуд поверхневих збурень отримано

$$\eta_{s0}(t, x, y, 0) = \frac{1}{\pi l} \left\{ \frac{b}{L - b_1} [\dot{U}(t) F_{01p} + \text{Fr } U^2(t) F_{02p}] + \int_0^\infty (I_{0p2} + I_{0p3}) dk_1 \right\}. \quad (25)$$

Для складових розв'язку з $m \geq 1$

Розглянемо визначення величин $I_{mp1}(t, x, 0)$ та $I_{mp3}(t, x, 0)$, де для заданої геометрії судна вирази для F_{m11} , F_{m12} , F_{m31} і F_{m32} одержуються з наведених раніше простою заміною в них f_q на $-\partial f / \partial \xi$. Подвійне інтегрування по змоченій поверхні виконується лише для функцій

$$F_{m11}[\xi, \zeta, f(\xi, \zeta)] = d_{mr} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \left[\frac{\pi m f(\xi, \zeta)}{l} \right] \cos[k_1(x - \xi)];$$

$$F_{m12}[\xi, \zeta, f(\xi, \zeta)] = d_{mr} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \left[\frac{\pi m f(\xi, \zeta)}{l} \right] \sin[k_1(x - \xi)].$$

Для $I_{mp1}(t, x, 0)$ інтеграл по S можна одержати у вигляді квадратур. Увівши допоміжне позначення

$$a_{m\zeta} = \frac{\pi m b}{l(L - b_1)} \left(1 - \frac{\zeta^2}{T^2} \right),$$

запишемо

$$\cos \left[\frac{\pi m f(\xi, \zeta)}{l} \right] = \cos [a_{m\zeta}(L - |\xi|)].$$

Тоді у виразі (22) для I_{mp1} маємо таке аналітичне представлення для інтегралів по ξ :

$$F_{m\xi1}(k_1, x) = \int_{-L}^L \text{sign}(\xi) \cos[k_1(x - \xi)] \cos[a_{m\zeta}(L - |\xi|)] d\xi = F_{m\xi11} + F_{m\xi12};$$

$$F_{m\xi2}(k_1, x) = \int_{-L}^L \text{sign}(\xi) \sin[k_1(x - \xi)] \cos[a_{m\zeta}(L - |\xi|)] d\xi = F_{m\xi21} + F_{m\xi22},$$

де

$$F_{m\xi 11} = \frac{1}{k_1^2 - a_{m\zeta}^2} \left\langle k_1 \{ \sin[k_1(x + b_1)] \cos[a_{m\xi}(L - b_1)] - \sin[k_1(x + L)] \} + \right. \\ \left. + a_{m\xi} \cos[k_1(x + b_1)] \sin[a_{m\xi}(L - b_1)] \right\rangle;$$

$$F_{m\xi 12} = \frac{1}{k_1^2 - a_{m\zeta}^2} \left\langle k_1 \{ \sin[k_1(x - b_1)] \cos[a_{m\xi}(L - b_1)] - \sin[k_1(x - L)] \} - \right. \\ \left. - a_{m\xi} \cos[k_1(x - b_1)] \sin[a_{m\xi}(L - b_1)] \right\rangle;$$

$$F_{m\xi 21} = \frac{1}{k_1^2 - a_{m\zeta}^2} \left\langle k_1 \{ \cos[k_1(x + b_1)] \cos[a_{m\xi}(L - b_1)] - \cos[k_1(x + L)] \} - \right. \\ \left. - a_{m\xi} \sin[k_1(x + b_1)] \sin[a_{m\xi}(L - b_1)] \right\rangle;$$

$$F_{m\xi 22} = \frac{1}{k_1^2 - a_{m\zeta}^2} \left\langle k_1 \{ \cos[k_1(x - L)] - \cos[k_1(x - b_1)] \cos[a_{m\xi}(L - b_1)] \} - \right. \\ \left. - a_{m\xi} \sin[k_1(x + b_1)] \sin[a_{m\xi}(L - b_1)] \right\rangle,$$

а $I_{mp1}(k_1, x, 0)$ визначається як

$$I_{mp1}(t, x, 0) = -\frac{2b}{L - b_1} \int_0^\infty \left[\dot{U}(t) I_{mp11} + k_1 \text{Fr} U^2(t) I_{mp12} \right] dk_1, \quad (26)$$

де

$$I_{mp11}(k_1, x) = \int_{-T}^0 d_m \left(1 - \frac{\zeta^2}{T^2} \right) F_{m\xi 1} d\zeta;$$

$$I_{mp12}(k_1, x) = \int_{-T}^0 d_m \left(1 - \frac{\zeta^2}{T^2} \right) F_{m\xi 2} d\zeta;$$

$$d_m = 2e^{-k_m|\zeta|} + e^{-k_m(2+\zeta)} + e^{-k_m(2-\zeta)}.$$

Інтегрування по ζ і k_1 виконуємо чисельно. В околі особливостей при $k_1(L - b_1) = a_{m\zeta}$ інтеграли обраховуються в розумінні головного значення. При інтегруванні по ζ , враховуючи плавність зміни геометрії змоченої поверхні, допустимо використовувати формулу методу трапецій з достатньо великим кроком.

Друга складова розв'язку для даної схеми руху має вигляд

$$I_{mp2} = \dot{q}_0 \cos(tF_1 m) \iint_S F_{m21} d\xi d\zeta,$$

де

$$F_{m21}[x, \xi, \zeta, f(\xi, \zeta)] = D_{m0} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \left[\frac{\pi m f(\xi, \zeta)}{l} \right] \cos \{k_1[x + \text{Fr } s(t) - \xi]\}.$$

Тому після роздільного інтегрування отримуємо

$$I_{mp2} = \dot{q}_0 \cos(tF_{1m}) \int_{-T}^0 d_m \left(1 - \frac{\xi^2}{T^2} \right) F_{m2\xi} d\zeta, \quad (27)$$

де $F_{m\xi2}$ визначається за допомогою $F_{m\xi1}$ після заміни в останньому виразі x на $x + s(t)$.

Аналогічний підхід використовується й при визначенні I_{mp3} . Як і для I_{mp1} , виконавши інтегрування по ξ від функцій F_{m31} та F_{m32} , здобуємо представлення для

$$I_{mp3} = \sqrt{2} \iint_{S+S'} I_{m3} d\xi d\zeta$$

у вигляді

$$I_{mp3}(t, x, k_1 0) = \sqrt{2} \int_0^t \left[\left(U \text{Fr} (\gamma k_m + U^2 \text{Fr } k_1^2) - \ddot{U} \right) F_{m32} - 3k_1 \text{Fr } U \dot{U} F_{m31} \right] \times \quad (28)$$

$$\times \cos[F_{1m}(t - \tau)] d\tau.$$

Тут

$$F_{m31}(\tau, k_1, x) = \int_{-T}^0 d_m \left(1 - \frac{\xi^2}{T^2} \right) F_{m\xi1t} d\zeta,$$

$$F_{m32}(\tau, k_1, x) = \int_{-T}^0 d_m \left(1 - \frac{\xi^2}{T^2} \right) F_{m\xi2t} d\zeta,$$

а $F_{m\xi1t}$ та $F_{m\xi2t}$ відповідають виразам для $F_{m\xi1}$ та $F_{m\xi2}$ після заміни x на $x + f_t$. При обрахуванні I_{m31p} та I_{m32p} інтегрування по ζ виконується аналогічно.

У результаті загальний розв'язок для амплітуди поверхневих збурень набуває вигляду

$$\eta_s(t, x, y, 0) = \frac{1}{\pi l} \left\{ \frac{1}{2} \left[\dot{U}(t) F_{01p} + \text{Fr } U^2(t) F_{02p} + \int_0^\infty I_{0p3} dk_1 \right] + \right. \quad (29)$$

$$\left. + \sum_{m=1}^\infty \cos\left(\frac{m\pi y}{l}\right) \int_0^\infty (I_{mp1} + I_{mp2} + I_{mp3}) dk_1 \right\}.$$

5. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

На підставі розробленої чисельно-аналітичної моделі були проведені чисельні експерименти для судна, яке починає рух зі стану спокою. Геометрія змоченої частини корпусу відповідає схемі, наведений у розділі 3. Розрахунки виконувались для різних значень параметрів геометрії судна та режимів руху.

Безрозмірна швидкість задавалась функцією

$$U(t) = d_1 \sin(dt). \quad (30)$$

За масштаб швидкості приймалось її середнє значення за час руху до досягнення максимальної величини. Розрахунки проводились у часовому інтервалі $0 \leq t \leq \pi/d$, де d визначається вибором відповідного значення розрахункового часу $t_{\max}$.

Величина характерної швидкості визначалась при заданому числі Фруда. Для цього у виразі (5) параметр d задавався таким, щоб у кінці першого етапу руху (при $t = t_1$) швидкість досягала максимального значення – $d_1 = \pi/(2t_1)$. Величина d_1 вибиралась такою, щоб за період руху швидкість судна не перевищувала значення, при якому виникають нелінійні ефекти.

На другому етапі руху процес гальмування триває протягом інтервалу $(t_2 - t_1)$ до повної зупинки судна. Зміна швидкості руху відбувається за законом

$$U(t) = d_1 \sin \left[\frac{\pi}{2} + d_2(t - t_1) \right],$$

де $d_2 = \pi(t_2 - t_1)/2$, а $t/2$ задається відповідно до бажаної величини прискорення в процесі гальмування.

Слід зазначити, що отримані результати описують дію механізму, який у гідромеханіці нестационарних рухів обумовлюється наявністю прилучених мас. При цьому породжується збурення середовища за наявності ненульового прискорення руху судна. Заданий нами характер зміни швидкості вибрано таким чином, щоб досягнути повного ходу при $d_1 t = \pi/2$, коли швидкість руху досягає максимального значення, а прискорення виходить на нуль. Надалі може відбуватись вихід на стаціонарний режим руху або зміна характеру нестационарності. У даному випадку на другому етапі руху судна в інтервалі часу

$$\frac{\pi}{2d_1} \leq t \leq \frac{\pi}{d_2}$$

моделювалось гальмування судна до його зупинки. При цьому зменшення тривалості інтервалу $(t_2 - t_1)$ відповідало збільшенню величини прискорення гальмування.

Результати чисельних експериментів для різних значень характерних параметрів задачі наведено на Рис. 2–13, де зображені профілі збурень вільної поверхні в повздовжніх перерізах ділянки каналу, в межах якої знаходиться судно, для двох різних значень координати y : поблизу судна (а) й поблизу стінки каналу (б). Як правило, задавалось значення параметру ширини каналу $l = 2$, окрім випадку, коли моделювання проводилось для широкого каналу з $l = 4$ (див. Рис. 10 та 11). Параметр довжини судна набував значень $L = 2$ або $L = 1$. Параметр ширини судна в усіх випадках був $b = 0.1$, а параметр довжини циліндричної вставки моделі судна (див. Рис. 1) завжди вважався $b_1 = 0.7L$. Переліки розрахункових параметрів, характерних для кожного конкретного випадку наведені під відповідними графіками.

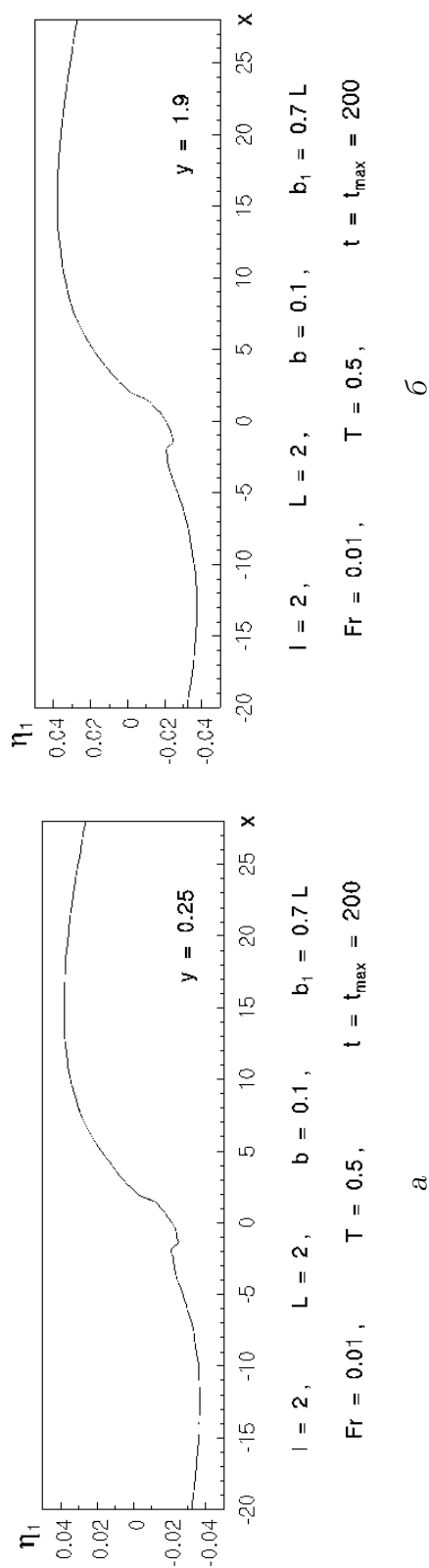


Рис. 2. Профілі поверхневих збурень у момент набуття судном максимальної швидкості; закінчення першого етапу руху ($Fr = 0.01$, $T = 0.5$)

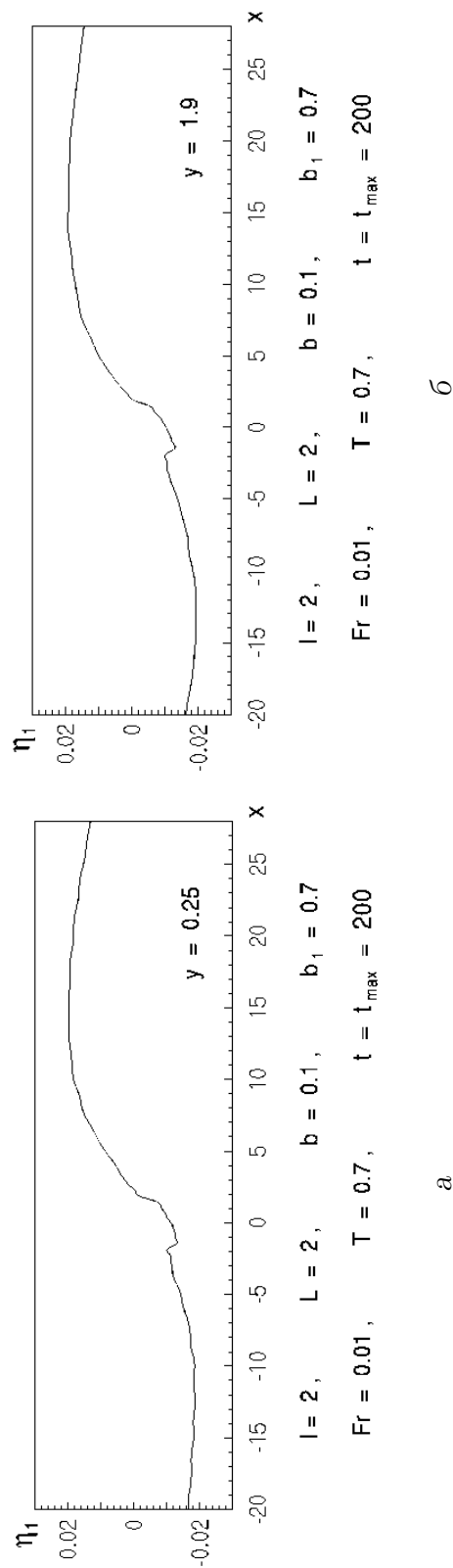


Рис. 3. Профілі поверхневих збурень у момент набуття судном максимальної швидкості; закінчення першого етапу руху ($Fr = 0.01$, $T = 0.7$)

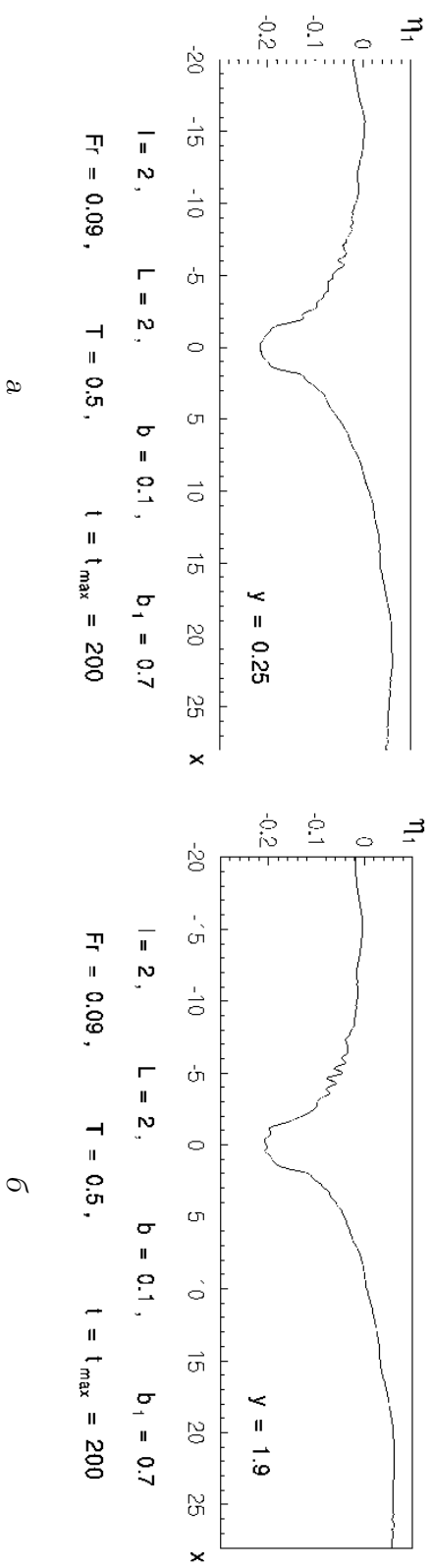


Рис. 4. Профілі поверхневих збурень у момент набуття судном максимальної швидкості; закінчення першого етапу руху ($Fr = 0.09$, $T = 0.5$)

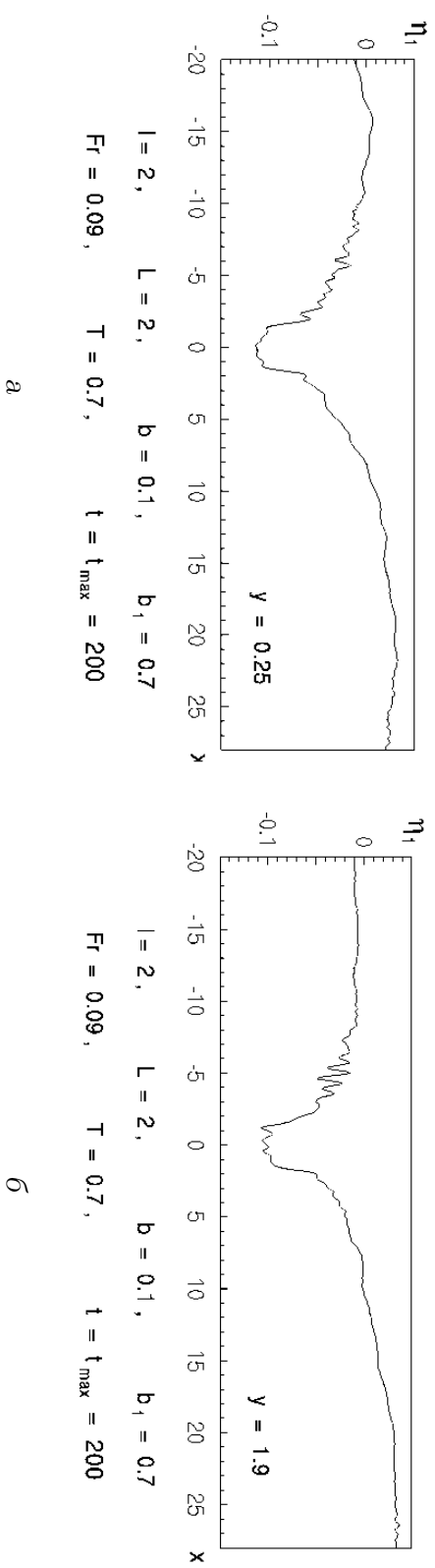


Рис. 5. Профілі поверхневих збурень у момент набуття судном максимальної швидкості; закінчення першого етапу руху ($Fr = 0.09$, $T = 0.7$)

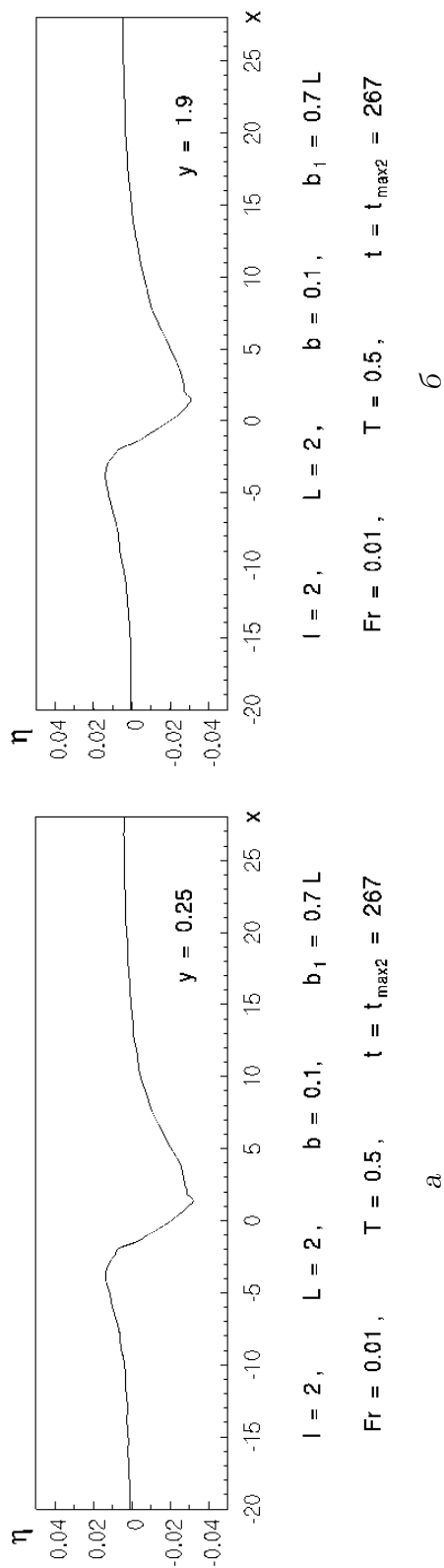


Рис. 6. Профілі поверхневих збурень у момент зупинки судна; закінчення другого етапу руху ($Fr = 0.01$, $T = 0.5$)

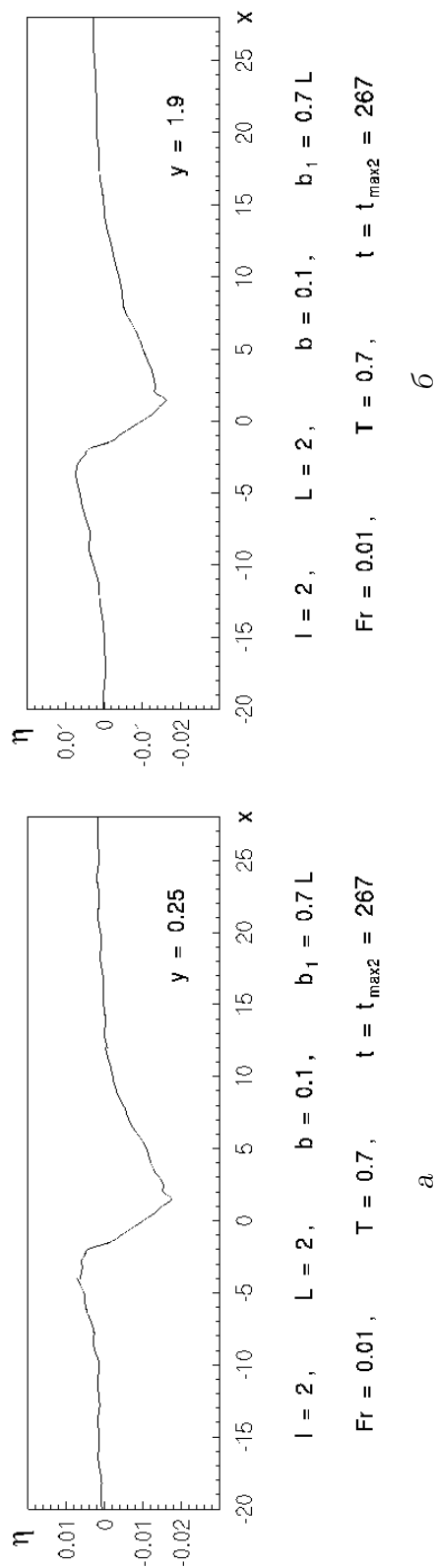


Рис. 7. Профілі поверхневих збурень у момент зупинки судна; закінчення другого етапу руху ($Fr = 0.01$, $T = 0.7$)

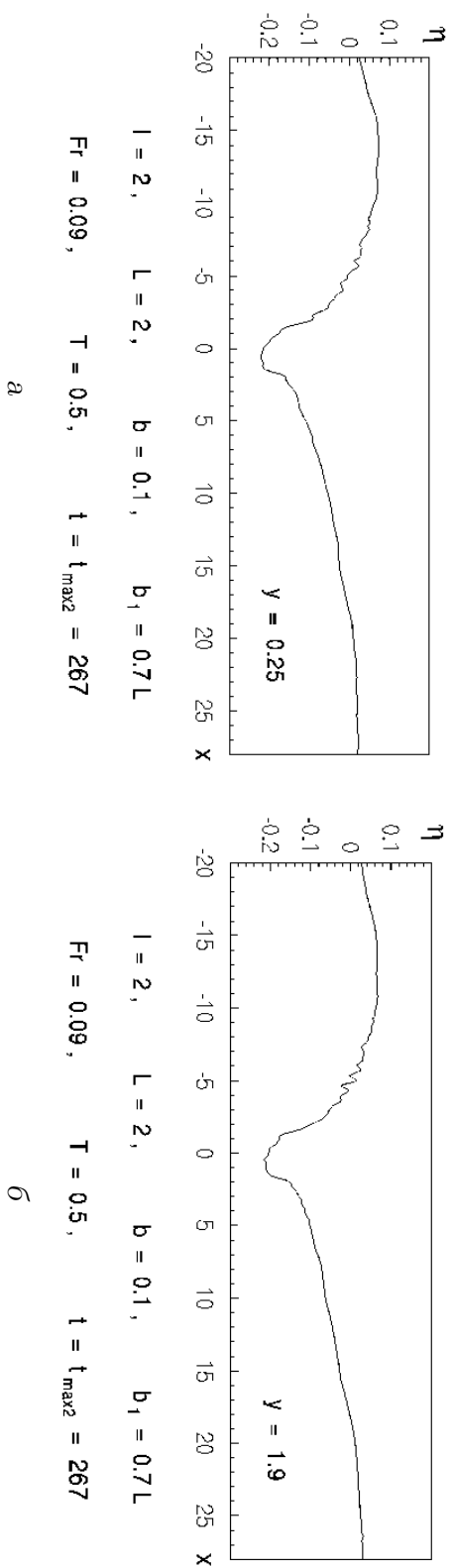


Рис. 8. Профілі поверхневих збурень у момент зупинки судна; закінчення другого етапу руху ($Fr = 0.09$, $T = 0.5$)

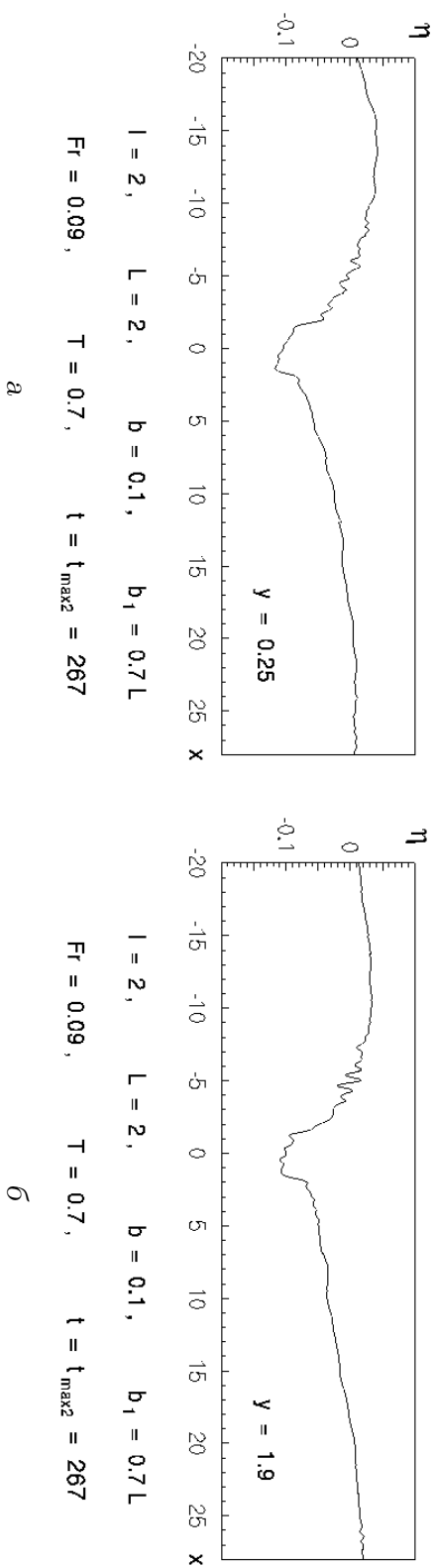


Рис. 9. Профілі поверхневих збурень у момент зупинки судна; закінчення другого етапу руху ($Fr = 0.09$, $T = 0.7$)

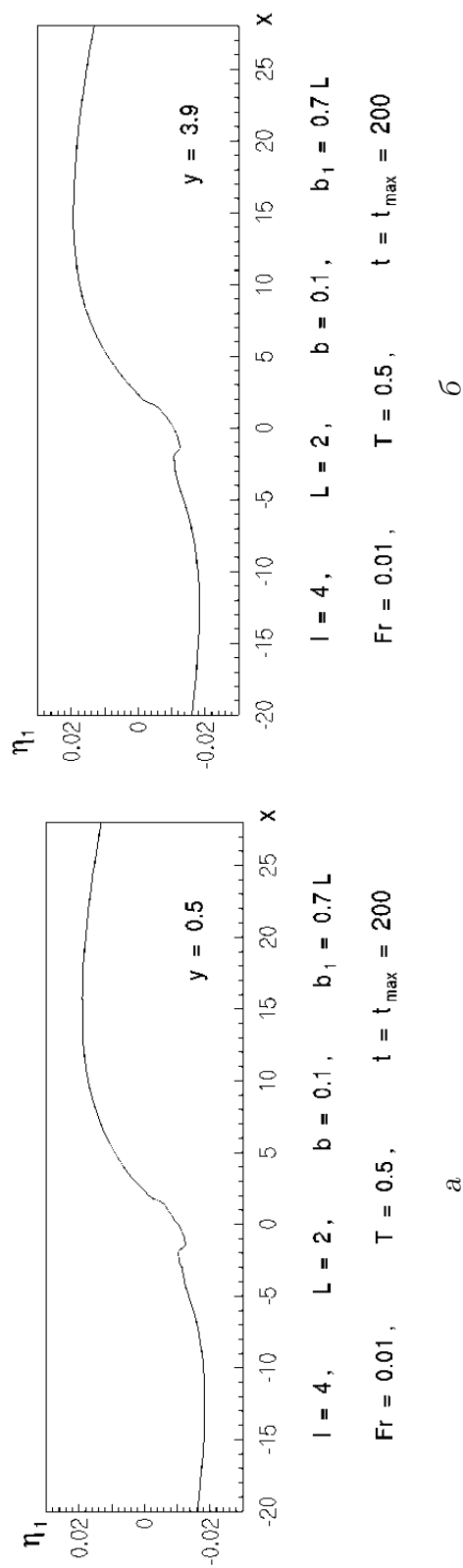


Рис. 10. Профілі поверхневих збурень у момент набуття судном максимальної швидкості в широкому каналі

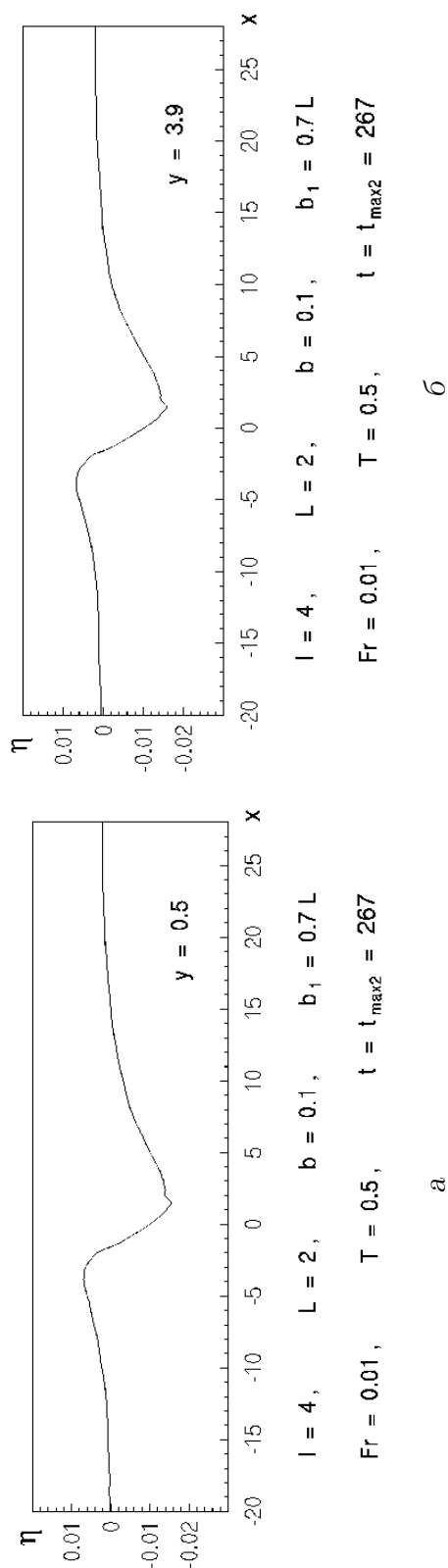


Рис. 11. Профілі поверхневих збурень у момент зупинки судна в широкому каналі

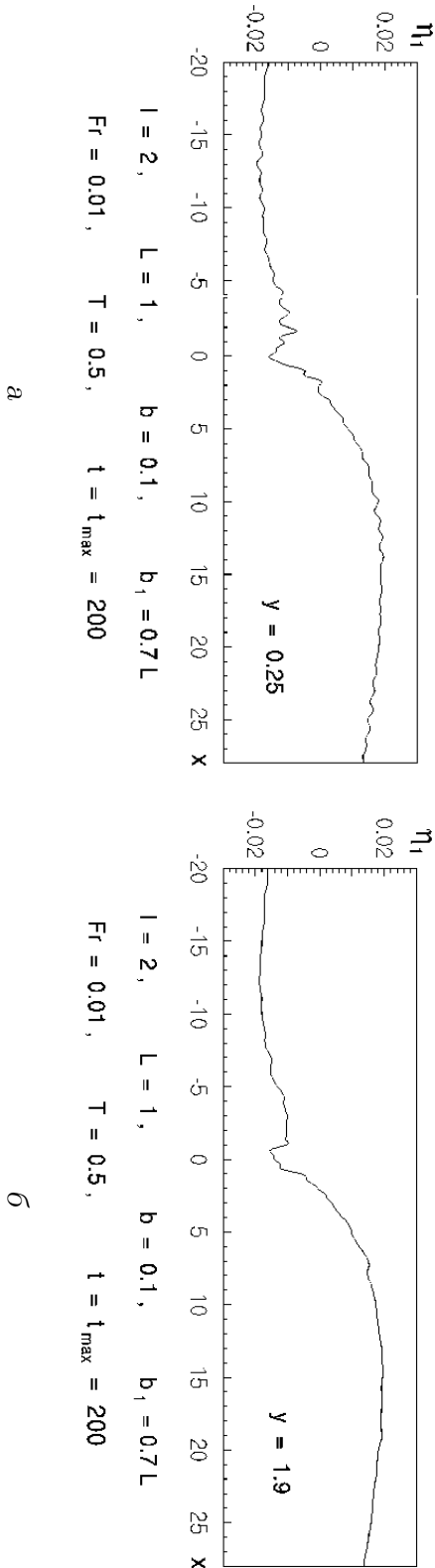


Рис. 12. Профілі поверхневих збурень у момент набуття коротким судном максимальної швидкості

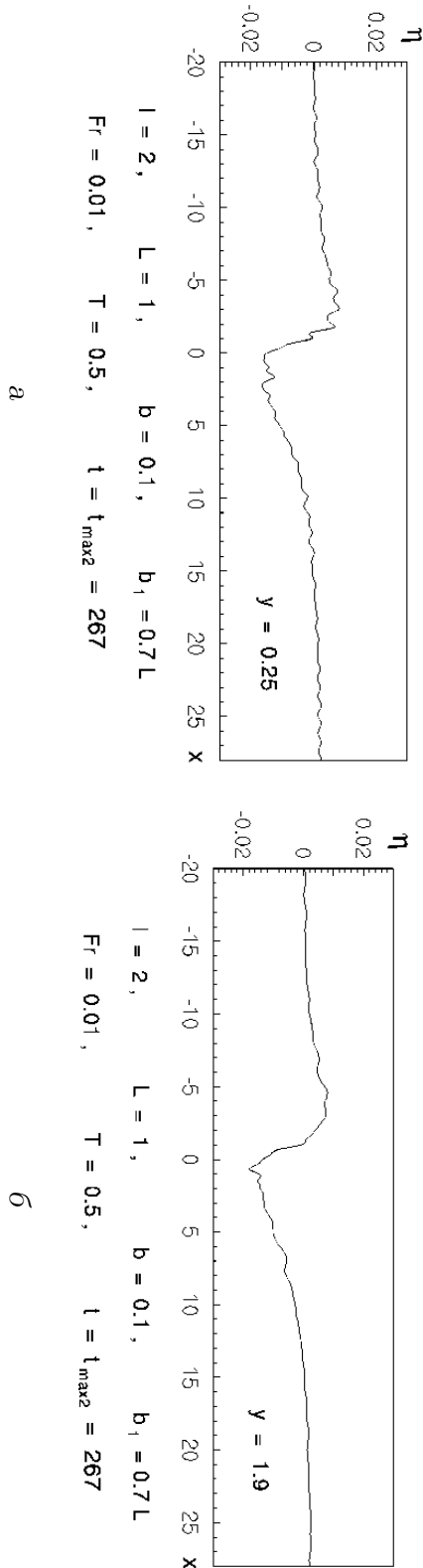


Рис. 13. Профілі поверхневих збурень у момент зупинки короткого судна

На Рис. 2 і 3 для числа Фруда $Fr = 0.01$ і двох різних осадок судна $T = 0.5$ та $T = 0.7$ наведено ту частину амплітудних збурень у момент досягнення судном максимальної швидкості при $t = 200$, яка представлена в розв'язку ефектом зміщення корпусом судна та інерційною складовою. Як видно з графіків, у обох випадках у різних повздовжніх перерізах спостерігається практично однаковий характер профілів, тобто вся область рідини в каналі рухається майже як одне ціле. При цьому перед судном утворюється зона підйому вільної поверхні, за якою формується зона опускання. Зрозуміло, що профілі для обох осадок, попри однаковий характер, мають різні значення характерних амплітуд – збільшення осадки призводить до зменшення амплітуди зміщень.

Зі зростанням числа Фруда такий характер поверхневих збурень змінюється. Це добре видно з Рис. 4 і 5, на яких представлено картину збурень для руху судна з $Fr = 0.09$. Тут профілі в наведених повздовжніх перерізах вже не однакові, відрізняється й характер ділянок опускання та підйому рівня вільної поверхні.

На Рис. 6 і 7 наведено картини амплітудних збурень, обумовлених зміщенням корпусом судна та інерційною складовою, в кінці другого етапу руху з гальмуванням судна – в момент його повної зупинки при $t = 267$. Зауважимо, що при розрахунках цей режим гальмування розглядався як продовження руху з $Fr = 0.01$ на першому етапі. На другому етапі характерна середня швидкість не змінюється, так що число Фруда залишається тим самим. Водночас величина прискорення зростає, що приводить до збільшення поверхневих амплітуд. Слід зауважити, що для другого етапу руху амплітудні збурення η являють собою суму амплітудних збурень, що виникли на обох етапах: $\eta = \eta_1 + \eta_2$.

На Рис. 8 і 9 наведено профілі амплітуд для тієї ж геометрії судна й каналу, але для більшого числа Фруда. Бачимо, що зі зростанням числа Фруда збільшуються не лише амплітуди збурень, а й довжина зони характерного підйому вільної поверхні позаду судна та характерної зони опускання вільної поверхні попереду нього.

При збільшенні ширини каналу амплітуди зміщень вільної поверхні зменшуються по всій його ширині. Проілюструємо цей ефект, порівнявши Рис. 10 і 2 для першого етапу руху та Рис. 11 і 6 для другого етапу.

На Рис. 12 і 13 показано два профілі амплітуд, розрахованих для режиму руху, що відповідає Рис. 2 і 6, але для коротшого судна – з $L = 1$. Порівняння цих графіків показує, що при рівності всіх інших параметрів руху зменшення довжини корпусу судна призводить до зменшення амплітуд зміщень вільної поверхні.

Розрахунки показують, що картини амплітудних збурень, які відповідають корабельним хвилям, при нестационарному русі мають розмитий характер без чітко виражених хвильових фронтів, типових для стаціонарного руху [23].

6. ВИСНОВКИ

Проведено дослідження гідродинаміки нестационарного руху суден у каналах. Як результат одержано вдосконалену чисельно-аналітичну модель нестационарного руху зі змінною в часі швидкістю судна. Головною її особливістю є використання для опису руху судна потенціалу швидкості, згенерованої нестационарним рухом у каналі системи двох латерально симетричних джерел. Останній задовольняє всі граничні умови задачі, окрім умови непротікання на змоченій поверхні корпусу. Уведення допоміжного потенціалу швидкості зводить розв'язання вихідної задачі до визначення з граничної

умови непротікання на поверхні судна характеру розподілу інтенсивності джерел на ній з подальшим інтегруванням по поверхні для визначення внесків усіх цих джерел у розв'язок.

З використанням запропонованої моделі виконано чисельні експерименти щодо побудови відповідних амплітудних картин збурення вільної поверхні. Як відомо, при стаціонарному русі судна формування його опору відбувається під дією зміщень водного середовища, ініційованих безпосередньо корпусом (вони швидко затухають з віддаленням від нього) та корабельних хвиль. Для досліджуваного типу руху присутня також додаткова інерційна компонента, обумовлена наявністю так званих прилучених мас. Цей механізм може бути домінуючим у формуванні гідродинамічних полів та визначенні гідродинамічного опору судна.

Показано, що в залежності від величини числа Фруда, і при прискоренні, й при гальмуванні судна механізм прилучених мас відповідає за генерування середньої швидкості всього водного середовища в каналі в напрямку руху судна. Цікаво, що при малих значеннях числа Фруда для достатньо вузького каналу цей рух практично однаковий для його виділеного поперечного перерізу. Зі зростанням числа Фруда така подібність порушується, особливо в режимі розгону. Встановлено, що при достатньо швидкому гальмуванні позаду судна утворюється область підйому вільної поверхні, яка нагадує початковий етап формування усамітненої корабельної хвилі. Як відомо, такі хвилі генеруються при русі суден у каналах при числах Фруда, які відповідають першій критичній зоні. Підтверджено збільшення амплітуд поверхневих зміщень при збільшенні числа Фруда, зменшенні осадки чи довжини судна.

Розглянутий тип нестационарності вносить істотні зміни в структуру поля корабельних хвиль. На відміну від стаціонарного руху, тут не існує незгасаючих хвильових мод з дискретними характерними хвильовими числами. Натомість кожна мода містить неперервний спектр хвильових чисел. Як результат генероване протягом часового інтервалу зміни швидкості руху судна хвильове поле має розмитий характер і буде згасати завдяки механізму дисперсії. Зокрема, тут відсутній характерний хвильовий клин із видимим переднім фронтом – про нього може нагадувати лише наявність невеликих зон максимальних амплітуд зміщень вільної поверхні. Якщо протягом певного часового інтервалу спостерігається вихід на незмінне значення швидкості руху судна, то генерується відповідне стаціонарне поле корабельних хвиль. Тоді результуюче поле буде складатися з суми хвиль двох типів – стаціонарних і нестационарних.

Використана вдосконалена гідродинамічна модель дозволяє розширити клас суден, які можна вважати тонкими, з відповідним спрощенням задачі визначення характеру розподілу інтенсивності джерел на змоченій частині корпусу. Це обумовлено тим, що, на відміну від класичної схеми тонкого судна Мічеля, коли джерела розміщуються в площині вертикальної симетрії судна, в запропонованій авторами моделі джерела розташовані на реальній змоченій поверхні корпусу.

REFERENCES

- [1] M. D. Haskind, "General theory of wave drag of the bodies in a liquid of finite depth," *Prikladnaia matematika i mehanika*, vol. 9, no. 3, pp. 257–264, 1945.

- [2] A. A. Kostyukov, *Theory of ship waves and wave resistance*. Leningrad: Sudostroenie, 1959.
- [3] A. M. Basin, I. O. Velenditskii, and A. G. Lyahovitskii, *Hydrodynamics of ships in shallow water*. Leningrad: Sudostroenie, 1976.
- [4] Y. I. Voitkunsii, *Drag to ship movement*. Leningrad: Sudostroenie, 1988.
- [5] Y. L. Vorobiov, *Hydrodynamics of ships in a restricted fairway*. Snakt-Peterburg: Sudostroenie, 1992.
- [6] A. A. Kostyukov, "On wave formation and wave drag of ships in the limited liquid fairway," *Prikladnaia matematika i mehanika*, vol. 19, no. 5, pp. 557–570, 1955.
- [7] J. L. Hess and A. M. O. Smith, "Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies," *Journal of Ship Research*, vol. 8, no. 4, pp. 22–44, 1964. DOI: <https://doi.org/10.5957/jsr.1964.8.4.22>
- [8] G. E. Gadd, "A method for computing the flow and surface wave pattern around full forms," *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects*, vol. 118, pp. 207–219, 1976.
- [9] C. W. Dawson, "A practical computer method for solving wave problems," in *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*. Berkeley: University of California, 1977, pp. 30–39.
- [10] E. M. Shifrina, "Wave resistance of a surface pressure system during non-stationary motion," in *Ship hydromechanics and theory*, Leningrad, 1979, pp. 21–28.
- [11] G. I. Sielman and E. M. Shifrina, "Wave resistance during unsteady motion of a surface pressure system," in *Applied Problems of Hydromechanics*, Kyiv, 1981, pp. 42–47.
- [12] J. C. Tatinclaux, "On the wave resistance of surface-effect ships," in *Annual Meeting of the Society of Naval Architects and Marine Engineers*. New York: Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1975, pp. 51–61, 62–66.
- [13] H. H. Chen, "On a rectangular pressure distributions of oscillating strength a free surface," *Journal of Ship Research*, vol. 21, no. 1, pp. 11–23, 1977. DOI: <https://doi.org/10.5957/jsr.1977.21.1.11>
- [14] L. Chee-Seng, "Water waves generated by an oscillatory surface pressure travelling at critical speed," *Wave Motion*, vol. 3, no. 2, pp. 159–179, 1981. DOI: [https://doi.org/10.1016/0165-2125\(81\)90004-4](https://doi.org/10.1016/0165-2125(81)90004-4)
- [15] V. A. Gorban and S. V. Masyuk, "Numerical simulation of hydrodynamic interaction of bodies moving in fluid," *Applied Hydromechanics*, vol. 8(80), no. 3, pp. 27–49, 2006.
- [16] L. N. Sretenskii, *Liquid wave motion theory*. Moscow: Nauka, 1977.

- [17] P. L.-F. Liu and T.-R. Wu, “Waves generated by moving pressure disturbances in rectangular and trapezoidal channels,” *Journal of Hydraulic Research*, vol. 42, no. 2, pp. 163–171, 2004. DOI: <https://doi.org/10.1080/00221686.2004.9728379>
- [18] T. Torsvik, G. Pedersen, and K. Dysthe, “Influence of cross channel depth variation on ship wave patterns,” in *Mechanics and Applied Mathematics*, no. 2. Department of Mathematics, University of Oslo, 2008.
- [19] T. Torsvik, K. Dysthe, and G. Pedersen, “Influence of variable Froude number on waves generated by ships in shallow water,” *Physics of Fluids*, vol. 18, no. 6, pp. 062 102 (1–11), 2006. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2212988>
- [20] R. C. Ertekin, W. C. Webster, and J. V. Wehausen, “Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 169, pp. 275–292, 1986. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112086000630>
- [21] O. G. Stetsenko, “A velocity potential of unsteady motion of a system of two sources in a rectangular channel,” *Hydrodynamics and Acoustics*, vol. 1(91), no. 4, pp. 469–483, 2019.
- [22] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*. New York: Academic Press, 2004.
- [23] B. Yang, S. Kaidi, and E. Lefrançois, “CFD method to study hydrodynamics forces acting on ship navigating in confined curved channels with current,” *Journal of Marine Science and Engineering*, vol. 10, no. 9, pp. 1263 (1–21), 2022. DOI: <https://doi.org/10.3390/jmse10091263>

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Хаскинд М. Д. Общая теория волнового сопротивления тел в жидкости конечной глубины // Прикладная математика и механика. — 1945. — Т. 9, № 3. — С. 257–264.
- [2] Костюков А. А. Теория корабельных волн и волнового сопротивления. — Ленинград : Судостроение, 1959. — 311 с.
- [3] Басин А. М., Веледницкий И. О., Ляховицкий А. Г. Гидродинамика судов на мелководье. — Ленинград : Судостроение, 1976. — 320 с.
- [4] Войткунский Я. И. Сопротивление движению судов. — Ленинград : Судостроение, 1988. — 288 с.
- [5] Воробьев Ю. Л. Гидродинамика судов в стесненном фарватере. — Санкт-Петербург : Судостроение, 1992. — 224 с.
- [6] Костюков А. А. О волнообразовании и волновом сопротивлении судов в ограниченном фарватере жидкости // Прикладная математика и механика. — 1955. — Т. 19, № 5. — С. 557–570.

- [7] Hess J. L., Smith A. M. O. Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies // Journal of Ship Research. — 1964. — Vol. 8, no. 4. — P. 22–44.
- [8] Gadd G. E. A method for computing the flow and surface wave pattern around full forms // Transactions of the Royal Institution of Naval Architects. — 1976. — Vol. 118. — P. 207–219.
- [9] Dawson C. W. A practical computer method for solving wave problems // Proceedings of the Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics / University of California. — Berkeley. — 1977. — P. 30–39.
- [10] Шифрина Е. М. Волновое сопротивление системы поверхностных давлений при нестационарном движении // Гидромеханика и теория корабля. — Ленинград, 1979. — С. 21–28.
- [11] Г. И. Зильман Е. М. Ш. Волновое сопротивление при неустановившемся движении системы поверхностных давлений // Прикладные задачи гидромеханики. — Киев, 1981. — С. 42–47.
- [12] Tatinclaux J. C. On the wave resistance of surface-effect ships // Annual Meeting of the Society of Naval Architects and Marine Engineers. — New York : Society of Naval Architects and Marine Engineers. — 1975. — P. 51–61, 62–66.
- [13] Chen H. H. On a rectangular pressure distributions of oscillating strength a free surface // Journal of Ship Research. — 1977. — Vol. 21, no. 1. — P. 11–23.
- [14] Chee-Seng L. Water waves generated by an oscillatory surface pressure travelling at critical speed // Wave Motion. — 1981. — Vol. 3, no. 2. — P. 159–179.
- [15] Горбань В. О., Масюк С. В. Чисельне моделювання гідродинамічної взаємодії тіл, що рухаються в рідині // Прикладна гідромеханіка. — 2006. — Т. 8(80), № 3. — С. 27–49.
- [16] Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. — Москва : Наука, 1977. — 805 с.
- [17] Liu P. L.-F., Wu T.-R. Waves generated by moving pressure disturbances in rectangular and trapezoidal channels // Journal of Hydraulic Research. — 2004. — Vol. 42, no. 2. — P. 163–171.
- [18] Torsvik T., Pedersen G., Dysthe K. Influence of cross channel depth variation on ship wave patterns // Mechanics and Applied Mathematics / Department of Mathematics, University of Oslo. — 2008. — No. 2.
- [19] Torsvik T., Dysthe K., Pedersen G. Influence of variable Froude number on waves generated by ships in shallow water // Physics of Fluids. — 2006. — Vol. 18, no. 6. — P. 062102 (1–11).

- [20] Ertekin R. C., Webster W. C., Wehausen J. V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width // Journal of Fluid Mechanics. — 1986. — Vol. 169. — P. 275–292.
- [21] Стеценко О. Г. Потенціал швидкості нестационарного руху системи двох джерел у прямокутному каналі // Гідродинаміка і акустика. — 2019. — Т. 1(91), № 4. — С. 469–483.
- [22] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — Москва : ГРФМЛ, 1971. — 1108 с.
- [23] Yang B., Kaidi S., Lefrançois E. CFD method to study hydrodynamics forces acting on ship navigating in confined curved channels with current // Journal of Marine Science and Engineering. — 2022. — Vol. 10, no. 9. — P. 1263 (1–21).

O. G. Stetsenko, V. M. Ilchenko

Applying the velocity potential of a two-source system to the problem of a thin ship moving in a rectangular channel with time-varying speed

The linear non-stationary problem of determining the amplitude picture of the surface disturbances generated by a thin ship with symmetric outlines moving with time-dependent velocity and attached flow in the channel with rectangular cross-section along its longitudinal axis is solved. A methodology considering the sources distributed over a wetted surface is applied to obtain the solution. It is based on the use of the velocity potential of two laterally symmetric sources moving under the free surface with time-dependent velocity and intensity. This potential satisfies boundary conditions on the free surface, bottom, and channel walls. It is represented in analytical-and-quadrature form and is expanded into a cosine Fourier series with known coefficients. In the case of the ship of arbitrary geometry, the use of this method decreases the number of equations required for defining a distribution of sources over the wetted ship surface at least by an order. Its important feature is the possibility to solve the non-stationary problem at a predetermined moment. This is due to the lack of a procedure for finding the intermediate solution at every time step. In the case of a thin ship, source distribution intensity is written as a simple function of its geometry. As a result, the problem solution is reduced to calculating the double integrals over a wetted surface and integrals over a wave number and time. The obtained solution includes a system of ship waves with known wave numbers, the disturbances that attenuate as they move away from a ship, and disturbances determined by an added mass that is typical for non-stationary body motion. A sufficiently simple geometry of a wetted surface is used in the numerical studies. Variation of the ship's velocity motion corresponds to its two typical stages. In the first stage, the vessel starts motion from the state of rest and reaches a determined velocity. In the second stage, the ship moves in the deceleration mode till it stops. For such a motion pattern, the surface disturbance structure is determined only by decaying components from the ship body and added mass. The obtained relationships between free surface disturbances, Froude number for each motion stage, ship geometry, vessel draft, and channel geometry are analyzed.

KEY WORDS: *thin ship, non-stationary motion, acceleration, source, velocity potential, added mass*