УДК 532.592

ДОСЛІДЖЕННЯ КНОЇДАЛЬНИХ ХВИЛЬ НА ВОДІ З УРАХУВАННЯМ НЕГІДРОСТАТИКИ В ЇХНІХ ПОЧАТКОВИХ ПЕРЕРІЗАХ

О. А. Рябенко

Національний університет водного господарства та природокористування
вул. Соборна, 11, 33028, Рівне, Україна
E-mail: o.a.riabenko@nuwm.edu.ua

Отримано 16.11.2018

Мета роботи полягає в побудові математичної моделі кноїдальних хвиль та інших типів білякритичних течій, яка б адекватно відображала фізичну природу цих явищ і враховувала можливу негідростатику в їх початковому перерізі. Детальний аналіз накопиченої інформації про кноїдальні хвилі проведено з позицій більш загальної теорії білякритичних течій рідини. Виявлено ряд недоліків існуючих поглядів на проблему кноїдальних хвиль. Показано, що кноїдальні хвилі та інші типи білякритичних течій рідини у ряді випадків не можна однозначно описати лише одним характерним параметром — числом Фруда у початковому перерізі. Цей висновок добре аргументовано наведеними результатами експериментальних досліджень. Побудовано концептуально нову математичну модель хвилеподібних білякритичних течій, яка у явному вигляді враховує можливий негідростатичний розподіл тиску в їхніх початкових перерізах. На основі запропонованої моделі виведено диференціальне рівняння вільної поверхні двовимірного потоку та отримано його загальний розв'язок у вигляді кноїдальних хвиль. Визначено умови існування цих хвиль у залежності від двох факторів — числа Фруда й коефіцієнта негідростатичності в початковому перерізі. Показано, що періодичні кноїдальні хвилі можуть існувати, якщо числа Фруда у їхніх початкових перерізах менші, рівні й більші за одиницю. На додачу до цього обов'язковою умовою існування розглянутих хвиль є наявність негідростатики в початковому перерізі. При цьому крива вільної поверхні тут має бути ввігнутою, а коефіцієнт негідростатичності — більшим за одиницю. Для перевірки отриманих результатів проведено великий обсяг експериментальних досліджень нерухомих періодичних кноїдальних хвиль. Отримані дані повністю підтвердили принципову правильність побудованої математичної моделі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: кноїдальні хвилі, математична модель, білякритичні течії, негідростатичний розподіл тиску, усамітнена хвиля

1. ВСТУП

Кноїдальними хвилями на воді називаються періодичні нерухомі в просторі хвилі з усталеним у часі рухом або стаціонарні рухомі хвилі, які описуються еліптичною функцією Якобі амплітуди косинуса:

$$h = h_1 + (h_c - h_1)\mathrm{cn}^2\left(\frac{x}{\Delta}, k\right). \tag{1}$$

Тут h_1 — мінімальна глибина (під підошвами), h_c — максимальна глибина (під вершинами), Δ і k — параметри хвиль (Рис. 1).

Характерна особливість наведеного визначення полягає в тому, що воно охоплює як хвильові явища з нерухомою вільною поверхнею й усталеним в часі рухом води, так і рухомі стаціонарні групові хвилі, які переміщуються у просторі з певною швидкістю c [1–4]. При розгляді в рухомій системі координат, швидкість і напрямок руху якої співпадають зі швидкістю й напрямком руху хвилі переміщення, такі хвилі виглядають як усталені. Це дозволяє розглядати з єдиних позицій як рухомі, так і нерухомі кноїдальні хвилі.

За наявності відповідних умов кноїдальні хвилі на воді утворюються в межах різних типів гідротехнічних споруд — у нижньому б'єфі водоскидів і ГЕС, у відкритих каналах, у безнапірних тунелях і трубах, а також у складі хвиль переміщення, які формуються в річках, каналах, водосховищах, морях внаслідок дії різних причин [4–8]. Мінімальну глибину h_1 називають початковою (або першою спряженою) глибиною кноїдальних хвиль. Максимальна глибина $h_в$, яка спостерігається під вершинами кноїдальних хвиль, перевищує середню глибину потоку. Ця обставина має велике практичне значення, адже відмітки верху бокових дамб каналів, низу прогінних балок мостів, висоту закритих безнапірних водоводів і тунелів вибирають на основі розрахунків максимальної глибини $h_в$. Окрім того, теорію кноїдальних хвиль широко використовують у сучасних методиках розрахунків профілю вільної поверхні хвилястого стрибка й групових хвиль переміщення, які розглядаються у вигляді сукупності усамітненої та кноїдальних хвиль [5, 9, 10].

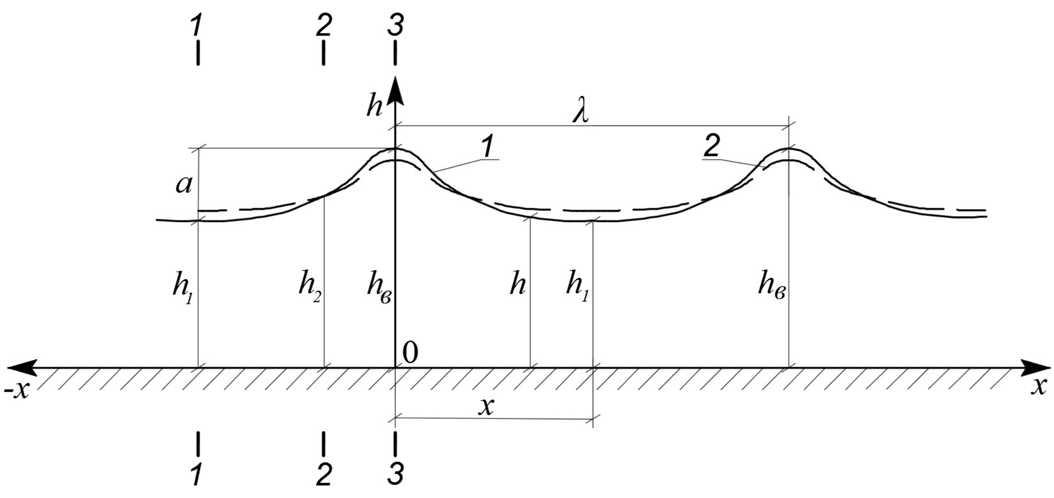

Рис. 1. Схема кноїдальних хвиль:
1 — крива вільної поверхні, *2* — п'єзометрична лінія

Таким чином, проблема розрахунку кноїдальних хвиль є досить актуальною й має велике теоретичне та практичне значення.

2. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Термін «кноїдальні хвилі» трактується різними авторами по-різному. У більшості випадків його застосовують відповідно до визначення, наведеного у вступі. Проте А. М. Бінні, П. О. Девіс, Д. С. Оркней [11], В. В. Смислов [12], досліджуючи хвилі такого типу, цю назву взагалі не використовують. В. Х. Хагер [13] вживає назву «кноїдальні хвилі», хоча отримана ним теоретична залежність і не містить функції $\mathrm{cn}^2(x/\Delta, k)$. Д.А. Сандовер і С. Тейлор [14] експериментально вивчали хвилі переміщення, проте називають досліджувані хвилі кноїдальними.

Кноїдальні хвилі вперше описали голландські математики Д. Й. Кортевег і Г. де Фріс [1], які, розглядаючи питання про стійкість хвиль на мілкій воді, вивели своє знамените нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних

$$\frac{\partial h}{\partial t} - K_1 h \frac{\partial h}{\partial x} - K_2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0, \tag{2}$$

де t — час, K_1 і K_2 — деякі коефіцієнти.

Загальний стаціонарний розв'язок рівняння (2), що описує профіль вільної поверхні кноїдальних хвиль, виражається формулою (1). Частинний розв'язок диференціального рівняння (2) дає профіль усамітненої хвилі

$$\eta = \frac{h}{h_1} = 1 + (\mathrm{Fr}_1 - 1)\mathrm{sch}^2 \left[\sqrt{3(\mathrm{Fr}_1 - 1)} \frac{x}{2h_1} \right] \tag{3}$$

де h_1 та Fr_1 — відповідно глибина та число Фруда у початковому перерізі.

Спершу Д. Й. Кортевег і Г. де Фріс досліджували виключно хвилі на воді, але згодом виявилося, що виведене ними диференціальне рівняння (2) має напрочуд універсальний характер. Воно та його розв'язки (1) і (4) описують багато хвильових явищ різної фізичної природи — в рідинах, газах, твердих тілах, магнітних матеріалах, надпровідниках та інших середовищах [15–17]. Відповідно до цього теорію кноїдальних хвиль також використовують для опису гідродинамічних, оптичних та інших хвиль [18].

Дослідження кноїдальних хвиль почалося з рухомого в просторі феномену [1, 2]. У подальшому виявилося, що вони можуть існувати також у вигляді нерухомого явища при усталеному в часі русі води [5–7, 11]. Підкреслюючи нерухомий характер профілю вільної поверхні таких хвиль, іноді їх називають «стоячими хвилями» (standing waves) [19–23]. Водночас зазначений термін більш широко використовується як назва особливого типу хвиль, що утворюються в результаті інтерференції прямої і зворотної (відбитої від вертикальної стінки) хвиль. При цьому пряма і зворотна хвилі повинні мати однакові параметри (висоту a, довжину λ, модуль швидкості c, профіль тощо), але рухатись у протилежних напрямках. Висота стоячих хвиль дорівнює двом висотам прямої (чи зворотної) хвилі, їхній профіль змінюється в часі, проте положення вузлів залишається незмінним [24, 25].

Г. Х. Келеган, Г. В. Паттерсон, Д. В. Келлер, Т. Б. Бенджамін, М. Д. Лайтхілл, В. Літтман [26–29] розвинули ідеї Д. Й. Кортевега і Г. де Фріса та розробили основи теорії кноїдальних хвиль. Важливим етапом подальшого розвитку теоретичних і експериментальних досліджень кноїдальних хвиль та інших гідравлічних явищ з хвилястою поверхнею стало врахування нахилу й кривизни елементарних струминок у довільному перерізі потоку та виведення відповідних залежностей для визначення питомої енергії й моменту з урахуванням цих факторів [30–37].

Необхідно підкреслити, що вивчення кноїдальних хвиль відбувається в тісному взаємозв'язку з такими явищами як усамітнена хвиля, солітон, хвилястий стрибок, одиночні та групові хвилі переміщення. Усі вони відносяться до класу білякритичних течій [5, 6, 11, 13, 38, 39] і описуються диференціальним рівнянням Кортевега – де Фріса та іншими, спорідненими з ним. Досить перспективними ідеями при вивченні таких явищ є врахування тертя на дні та розвитку турбулентного примежового шару [39], застосування асимптотичного аналізу до турбулентних потоків, розгляд хвиль на основі k-ε моделі турбулентності та рейнольдсових напружень [40–42], застосування теорії хвиль Стокса у сукупності з методом Фур'є [3, 43], вивчення стійкості кноїдальних хвиль [43–45], їх системне дослідження в комплексі з іншими явищами з класу білякритичних течій рідини [5, 6, 12] та ін.

Переважна більшість досліджень щодо проблематики кноїдальних хвиль має теоретичний характер, часто з використанням чисельного моделювання [44–46]. За таких умов особливого значення набувають експериментальні роботи, які дозволяють коригувати теоретичні результати та вносити ясність у суперечливих ситуаціях. Характерним прикладом у цьому відношення є питання про умови існування кноїдальних хвиль (див. розділ 6).

Основним джерелом для отримання експериментальної інформації про розглядуване явище служать дані про рухомі кноїдальні хвилі [14, 47]. Такий спосіб дослідження має певні недоліки, пов'язані зі складністю проведення відповідних експериментів, що негативно впливає на точність отримуваних даних. Проте головний недолік описаного способу полягає тому, що групові хвилі переміщення не можна вважати кноїдальними на всій довжині. Перша хвиля цього явища є асиметричного, причому початкова глибина $h_{\text{поч}}$ цієї хвилі менша від її кінцевої глибини $h_{\text{кін}}$ у западині між першим і другим гребенями (Рис. 2). На противагу цьому, в кноїдальних хвилях, згідно з визначенням, згадані глибини однакові, а профіль вільної поверхні симетричний відносно вертикалей, що проходять через вершини та підошви хвиль (див. [14]; рисунки 5, 6, 11). Відповідно, кноїдальними хвилями у складі групових хвиль переміщення можна вважати лише частину цього гідродинамічного феномена, розташовану за першою хвилею [5, 26, 48].

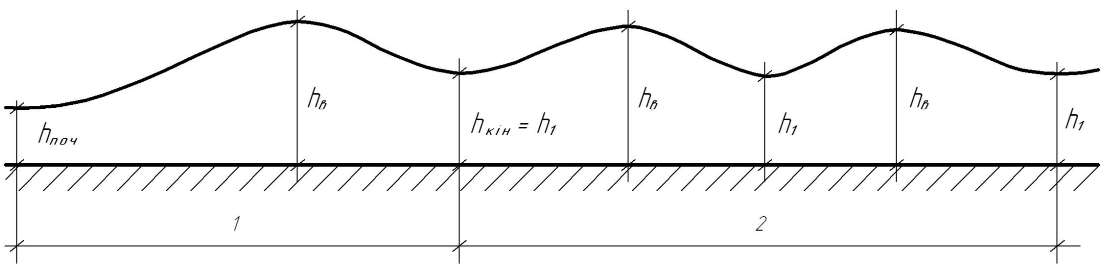

Рис. 2. Схема групових хвиль переміщення:
1 — асиметрична перша хвиля, *2* — періодичні кноїдальні хвилі

Важливо підкреслити, що при розгляді рухомих кноїдальних хвиль у складі групових хвиль їхнє переміщення часто характеризують віднесеним до глибини незбуреного потоку $h = h_{\text{поч}}$ числом Фруда Fr або похідними від нього параметрами [14, 49]. Такий прийом не можна визнати вдалим, адже при цьому глибина $h_{\text{поч}}$ береться за межами кноїдальних хвиль. Характерно, що число Фруда, підраховане за наведеною залежністю, для крутих хвиль переміщення завжди буде більшим за одиницю.

Експерименти з нерухомими кноїдальними хвилями надзвичайно перспективні, хоча мають свою специфіку й потребують застосування спеціальних методик досліджень. Через це таких дослідів проведено надзвичайно мало. Характерними у цьому відношення є роботи А. М. Бінні, П. О. Девіса, Д. С. Оркнея [11]. Ці автори вивчали гідродинамічні феномени, які виникали при витіканні води з резервуару через донний отвір. Частина таких експериментів проведена з хвильовими явищами при числах Фруда, менших за одиницю. Аналіз їхніх результатів дає підставу вважати ці хвилі кноїдальними, хоча дослідники й не класифікують спостережене явище таким чином. Згадана серія експериментів складалась усього з 16 дослідів, проведених у досить вузькому діапазоні чисел Фруда $\text{Fr} = (0.20 \ldots 0.75)$. Важливо підкреслити, що при цьому питання про наявність чи відсутність гідростатичного розподілу тиску в початковому перерізі кноїдальних хвиль узагалі не розглядалося. М. А. Хініс [50], вивчаючи в лабораторних умовах дію кноїдальних і синусоїдальних хвиль на похилий піщаний (пляжний) укіс, показав якісну й кількісну залежність процесу формування дна від типу генерованих хвиль.

Водночас необхідно визнати, що далеко не всі результати досліджень кноїдальних хвиль, отримані різними авторами, повною мірою узгоджуються між собою. У ряді випадків співставлення існуючих точок зору приводить до суперечностей і парадоксів [51]. Таке становище вимагає ретельного аналізу накопиченої інформації, виявлення наявних недоліків і пошуку нових шляхів вивчення кноїдальних хвиль.

3. НЕДОЛІКИ ІСНУЮЧОГО СТАНУ ТЕОРІЇ КНОЇДАЛЬНИХ ХВИЛЬ ТА ЗАДАЧІ НАСТУПНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

На основі аналізу накопиченої інформації та отриманих результатів проведених автором теоретичних і експериментальних досліджень можна сформулювати такі основні недоліки існуючого стану теорії кноїдальних хвиль. Перелічимо їх нижче.

1. Згідно з формулою (1) профіль вільної поверхні кноїдальних хвиль виражається через їхню максимальну глибину $h_{\text{в}}$, яка апріорі невідома. Водночас при виконанні практичних розрахунків знаходження максимальної глибини потоку є однією з основних задач, адже саме вона визначає висотні розміри споруд.

2. Повний комплекс граничних умов у початковому перерізі кноїдальних хвиль 1-1 розкрито не повністю. Серед традиційно використовуваних параметрів потоку (для умов плоскої задачі — глибини h_1, питомої витрати q, числа Фруда Fr_1) залишається нез'ясованою наявність чи відсутність нахилу й кривизни елементарних струминок або, іншими словами, наявність чи відсутність гідростатичного закону розподілу тиску в цьому перерізі.

3. Нез'ясованим залишається також вплив ступеня відхилення від гідростатики в

зазначеному перерізі на конфігурацію профілю вільної поверхні та основні висотні характеристики кноїдальних хвиль — другу спряжену h_2 та максимальну $h_в$ глибини. Відомі залежності Беланже та Рассела–Буссінеска, використовувані для визначення відповідно другої спряженої та максимальної глибин хвилястого стрибка, усамітненої хвилі та інших явищ із класу білякритичних течій, у разі застосування для кноїдальних хвиль дають при $\mathrm{Fr}_1 \leq 1$ якісно неприйнятні, а при $\mathrm{Fr}_1 > 1$ — істотно занижені результати [51].

4. Існуючі точки зору різних авторів про умови існування кноїдальних хвиль надзвичайно суперечливі й вимагають відповідного уточнення (див. розділ 6).

5. Використання початкової глибини $h_{поч}$ першої з групових хвиль переміщення в якості початкової глибини рухомих кноїдальних хвиль є невдалим прийомом, адже вона знаходиться за межами зони існування кноїдальних хвиль (див. Рис. 2).

6. Обсяг і межі відомих експериментальних досліджень з нерухомими кноїдальними хвилями недостатні й потребують істотного розширення у всьому діапазоні їх існування.

Необхідність подальшого розвитку теорії кноїдальних хвиль та усунення виявлених її недоліків дозволяє визначити такі основні задачі подальших досліджень.

1. Теоретичні й експериментальні дослідження кноїдальних хвиль необхідно здійснювати на основі положень теорії білякритичних течій рідини з урахуванням можливої негідростатики у їхньому початковому перерізі.

2. Необхідне проводити спеціальні експериментальні дослідження нерухомих кноїдальних хвиль. При цьому методика таких експериментів має забезпечити оцінку ступеня відхилення від гідростатики в початковому перерізі досліджуваного явища.

3. Результати дослідів з рухомими кноїдальними хвилями вимагають певного переосмислення у зв'язку з невизначеністю положення початкового перерізу для цього випадку, а також характеристик потоку в ньому.

Таким чином, мета даної роботи полягає в побудові адекватної математичної моделі кноїдальних хвиль з урахуванням наявності негідростатики у їхньому початковому перерізі. Також планується отримання відповідних розв'язків і порівняння теоретичних результатів з експериментальними даними для нерухомих кноїдальних хвиль.

4. КНОЇДАЛЬНІ ХВИЛІ ЯК СКЛАДОВА ЧАСТИНА КЛАСУ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ РІДИНИ

Як відомо, кноїдальні хвилі на воді належать до білякритичних течій рідини, які утворюються в області чисел Фруда, близьких до одиниці [5,6,12,37,38]. До цього класу входить велика група нерухомих і рухомих гідравлічних явищ з хвиле- та вальцеподібною поверхнею. Наприклад, у роботі [6] сюди віднесено вісім типів нерухомих і шість типів рухомих (хвиль переміщення) гідравлічних явищ. Білякритичні течії мають ряд характерних особливостей і не можуть бути описані залежностями плавно змінного руху. Розгляд з єдиних позицій усього класу білякритичних течій рідини дозволяє вивести ряд універсальних залежностей для таких феноменів, а також уточнити границі існування різних їх типів. Окрім цього, такий системний підхід дає можливість виявити деякі особливості окремих явищ, які раніше залишалися невідомими. Значною мірою сказане стосується і кноїдальних хвиль.

Серед учених, які займаються проблемою вивчення різних типів білякритичних течій рідини, досить поширена точка зору, що ці явища, як і всі потоки рідини з вільною поверхнею, однозначно описуються характерним числом Фруда. Відповідно до цього більшість виведених різними дослідниками (крім автора цієї статті) залежностей для визначення другої спряженої й максимальної глибин та опису профілю вільної поверхні й умови існування хвилястого стрибка, усамітненої хвилі, одиночної та групових хвиль переміщення однозначно виражаються через число Фруда Fr_1 у початковому перерізі цих явищ. Для нерухомих і рухомих явищ відповідно його визначають такими формулами:

$$\mathrm{Fr}_1 = \frac{v_1^2}{gh_1}, \tag{4}$$

$$\mathrm{Fr}_1 = \frac{c^2}{gh_1}. \tag{5}$$

Тут v_1 — швидкість потоку в початковому перерізі нерухомих явищ, c — швидкість руху хвиль переміщення, h_1 — початкова (перша спряжена) глибина, g — прискорення вільного падіння. Для умов плоскої задачі формулу (4) можна записати у вигляді

$$\mathrm{Fr}_1 = \frac{q^2}{gh_1^3}, \tag{6}$$

де q — питома витрата.

Проте при детальному аналізі виявлено, що така точка зору щодо білякритичних течій рідини є хибною. Спроби поширити дію відомих залежностей для визначення другої спряженої глибини h_2 гідравлічного стрибка та максимальної глибини $h_в$ усамітненої хвилі на всі явища цього класу течій (тобто вийти за межі, встановлені авторами згаданих залежностей) призводять до суперечностей та парадоксів [51]. Відсутність коректних пояснень щодо сутності таких парадоксів ставить під сумнів правильність ідей, використовуваних для опису білякритичних течій рідини.

З метою розкриття сутності парадоксів білякритичних течій та побудови коректної т'еорії цього класу явищ у Національному університеті водного господарства та природокористування (НУВГП) були проведені системні й доволі об'ємні експериментальні й теоретичні дослідження. Аналіз отриманих результатів і даних інших дослідників дозволив зробити надзвичайно важливий висновок про те, що в початковому перерізі білякритичних течій може спостерігатись як гідростатичний, так і негідростатичний розподіл тиску по глибині. Таке відхилення від гідростатики викликається нахилом і кривизною елементарних струминок у вертикальній площині.

Виявилося, що число Фруда Fr_1 однозначно описує білякритичні течії рідини лише при наявності гідростатичного розподілу тиску у їхньому початковому перерізі. За відсутності гідростатики в зазначеному перерізі число Фруда Fr_1 не може однозначно описати явища розглядуваного класу: при одному і тому ж значенні Fr_1 білякритичні течії можуть формуватися по-різному. Достовірність такого висновку наочно ілюструє Рис. 3 в сукупності з даними Табл. 1. Тут показані дві пари дослідів, параметри яких підібрані таким чином, що в кожній парі однакові початкові глибини h_1, питомі витрати q та числа Фруда Fr_1, але різні глибини нижнього б'єфу. Внаслідок цього в початковому перерізі виявляються різними ступені викривлення потоку в вертикальній площині та, відповідно, ступені відхилення від гідростатики.

Наведені дані красномовно свідчать про те, що хоча в порівнюваних парах дослідів число Фруда Fr_1 є однаковим, проте обриси кривої вільної поверхні та п'єзометричної лінії кількісно і якісно відрізняються між собою. При цьому геометричні характеристики порівнюваних явищ (максимальна і друга спряжена глибини, висота і довжина хвиль тощо) — істотно різні. Важливо підкреслити, що в дослідах другої пари відрізняються навіть типи явищ.

Доведений факт можливості існування у початковому перерізі розглядуваних явищ не тільки гідростатичного, а й негідростатичного розподілу тиску по висоті потоку дозволяє пояснити сутність парадоксів білякритичних течій [51] та підійти до вивчення

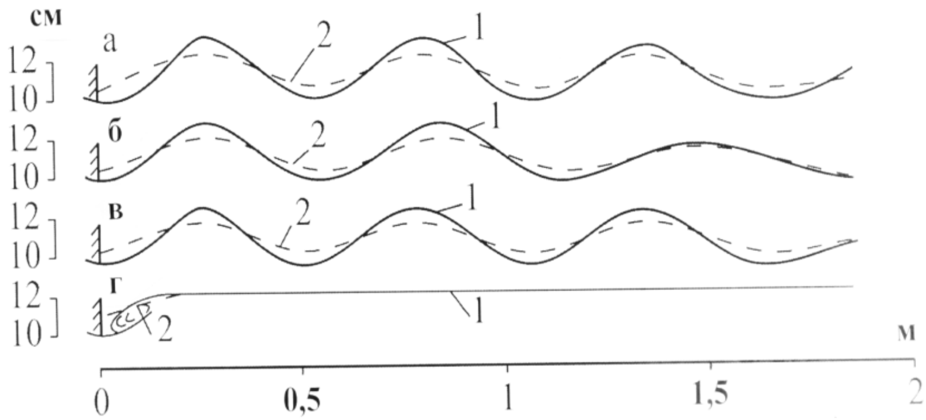

Рис. 3. Криві вільної поверхні *1* та п'єзометричної лінії *2* для двох пар дослідів: *а, б* — з кноїдальними хвилями, *в, г* — з безстрибковим вальцевим спряженням б'єфів

Табл. 1. Основні характеристики дослідів, зображених на Рис. 3

Номер досліду	q дм^2/с	h_1 см	Fr_1	s_1	h_2 см	$h_в$ см	Тип явища
а	9.72	10.0	0.96	1.06	11.6	13.2	кноїдальні хвилі
б	9.72	10.0	0.96	1.04	11.4	12.7	кноїдальні хвилі
в	9.30	10.0	0.88	1.05	11.3	12.6	кноїдальні хвилі
г	9.30	10.0	0.88	1.11	12.35	–	безстрибкове вальцеве спряження б'єфів

цих течій з принципово нових позицій. Необхідно підкреслити, що питання про вплив нахилу й кривизни елементарних струминок на характеристики потоку з хвилястою поверхнею вивчений досить добре [30,34–36,52]. Але стосовно початкового (а не довільного) перерізу білякритичних течій ця ідея використана вперше.

Для повноти інформації з цього питання зауважимо, що при виконанні чисельних розрахунків хвилястого стрибка автори робіт [41,53–55] постулюють ненульові значення для першої (h') й другої (h'') похідних у початковому перерізі стрибка. По-суті, це — визнання наявності нахилу та кривизни елементарних струминок, тобто можливості існування негідростатики в зазначеному перерізі. Проте обґрунтування такого рішення, мотивація його доцільності, умови застосування, межі змін величин h' та h'' чи відповідні посилання на першоджерела, на жаль, не наводяться. Можна припустити, що це викликано особливостями використовуваних диференціальних рівнянь та прагненням авторів наблизити розрахункові значення обчислюваних величин до експериментальних. Але тут необхідно зробити принципове зауваження. Справа полягає в тому, що майже всі автори зазначених робіт, окрім [53], використовують у своїх розрахунках результати дослідів Х. Шансона [56] та І. Готох, І. Ясуда, І. Охтсу [57]. Утім у цих експериментальних дослідженнях можливість відхилення від гідростатики у початковому перерізі стрибка взагалі не розглядалася.

5. ДЕЯКІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ РІДИНИ З УРАХУВАННЯ МОЖЛИВОЇ НЕГІДРОСТАТИКИ В ПОЧАТКОВОМУ ПЕРЕРІЗІ

Наведемо ряд положень розробленої автором цієї статті теорії білякритичних течій рідини [58, 59], необхідних для розгляду проблеми кноїдальних хвиль і однозначного трактування викладеного матеріалу. Концептуально новою в ній є ідея врахування у явному вигляді можливого відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску у початковому перерізі 1-1 досліджуваних течій. Таке відхилення враховується за допомогою трьох пов'язаних між собою коефіцієнтів — негідростатичності (s_1), гідродинамічного тиску (t_1) і потенціальної енергії (β_1). Стосовно довільного перерізу потоку з хвилястою поверхнею ці коефіцієнти визначаються такими залежностями:

$$S = \frac{h_{\text{п.д.}}}{h}, \qquad t = \frac{F_{\text{е.г.д.т.}}}{F_{\text{е.г.с.т.}}}, \qquad \beta = \frac{E_{\text{пот}}}{h}. \tag{7}$$

Тут $h_{\text{п.д.}}$ — п'єзометричний тиск на дні, виражений у висоті водяного стовпа; $F_{\text{е.г.д.т.}}$ і $F_{\text{е.г.с.т.}}$ — площі епюр гідродинамічного та гідростатичного тиску відповідно; $E_{\text{пот}}$ — питома потенціальна енергія; h — глибина. Для параболічного розподілу тиску по глибині, характерного для перерізів потоку, проведених через вершини та підошви хвиль, зазначені коефіцієнти пов'язані між собою такими співвідношеннями [35,58,59]:

$$\beta = \frac{1+2s}{3}, \qquad t = \frac{4s-1}{3}, \qquad \beta = \frac{1+t}{2}, \tag{8}$$

причому для гідростатичного розподілу тиску $s = t = \beta = 1$.

Першою спряженою (або початковою) глибиною h_1 білякритичних течій називається мінімальна глибина у вибраному на початку розглядуваних явищ перерізі 1-1, в якому дотичні до кривої вільної поверхні та п'єзометричної лінії займають горизонтальне положення. Сформульоване визначення першої спряженої глибини розглядуваних течій виявляється дуже зручним при аналізі експериментальних результатів. Справа полягає в тому, що при постановці таких досліджень дуже часто використовують схему витікання води з-під затвора, з донних отворів гідротехнічних споруд або з труб, тунелів, галерей [6,11,56,57]. Глибина потоку на виході з таких конструкцій повністю відповідає наведеному визначенню.

Важлива особливість цього формулювання полягає в тому, що воно передбачає можливість загального (негідростатичного) розподілу гідродинамічного тиску по глибині. Гідростатичний закон є частинним випадком загального розподілу. Він спостерігається тоді, коли зазначені дотичні збігаються. Наведене визначення передбачає наявність у початковому перерізі ввігнутого (з негідростатикою) або плоскопаралельного (з гідростатикою) потоку, внаслідок чого коефіцієнти s_1, t_1, β_1 можуть бути більшими чи рівними одиниці. Зауважимо, що М. Ямагуші, І. Цушія [60], Ж. Д. Фентон [3] при розгляді кноїдальних хвиль також відносить їхні характерні параметри до мінімальної глибини. Ж. С. Монтес, Х. Шансон [54] називають початковим переріз хвилястого стрибка з мінімальною глибиною.

Другою спряженою глибиною h_2 білякритичних течій називається глибина в такому перерізі 2-2, вибраному в напрямку збільшення глибини, де розподіл гідродинамічного тиску описується гідростатичним законом. Для явищ з поверхневим вальцем такий переріз знаходиться на певній віддалі від його кінця, а для явищ із хвилястою поверхнею — проходить через найближчу до перерізу 1-1 точку перетину кривої вільної поверхні та п'єзометричної лінії. Зазвичай вважається, що вона співпадає з точкою перегину кривої вільної поверхні, в якій дорівнює нулю друга похідна: $d^2h/dx^2 = h'' = 0$. Це відповідає наведеним визначенням. У роботі [58] виведено залежність, яка зв'язує спряжені глибини білякритичних течій:

$$\eta_2 = \frac{h_2}{h_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{t_1 + 2\mathrm{Fr}_1} cos\left\{\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\arccos\left[\frac{3\sqrt{3}\alpha_{02}\mathrm{Fr}_1}{\sqrt{(t_1 + 2\mathrm{Fr}_1)^3}}\right]\right\}, \tag{9}$$

де α_{02} — коефіцієнт кількості руху у перерізі 2-2. У частинному випадку гідростатичного розподілу тиску в перерізі 1-1 і значенні $\alpha_{02} = 1$ загальна залежність (9) зводиться до класичної формули Беланже:

$$\eta_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1} - 1\right). \tag{10}$$

Узагальнене диференціальне рівняння білякритичних течій рідини з урахуванням можливого відхилення від гідростатики у їхньому початковому перерізі, виведене на основі відповідної математичної моделі [59,61], має такий вигляд:

$$h^{12} = \frac{3}{\mathrm{Fr}_1}\left[-\eta^3 + (2\beta_1 + \mathrm{Fr}_1)\eta^2 - (2\beta_1 - 1 + 2\mathrm{Fr}_1)\eta + \mathrm{Fr}_1\right]. \tag{11}$$

Загальний його розв'язок цього рівняння отримано у формі системи, яка описує профіль вільної поверхні кноїдальних хвиль:

$$\begin{cases} \eta = \dfrac{h}{h_1} = 1 + (\eta_c - 1)cn^2\left(\dfrac{x}{\Delta}, k\right), \\ \Delta = 2h_1\sqrt{\dfrac{\eta_c \mathrm{Fr}_1}{3(\eta_c^2 - \mathrm{Fr}_1)}}, \\ k = \sqrt{\dfrac{\eta_c(\eta_c - 1)}{\eta_c^2 - \mathrm{Fr}_1}}, \\ \eta_c = \dfrac{1}{2}\left[t_1 + \mathrm{Fr}_1 + \sqrt{(t_1 + \mathrm{Fr}_1)^2 - 4\mathrm{Fr}_1}\right] \end{cases} \tag{12}$$

Максимальна глибина h_c хвилеподібних білякритичних течій спостерігається у перерізі 3-3, який проходить через вершину першої хвилі. Вона визначається формулою, яка співпадає з останнім співвідношенням системи (12)):

$$\eta_c = \frac{h_c}{h_1} = \frac{1}{2}\left[t_1 + \mathrm{Fr}_1 + \sqrt{(t_1 + \mathrm{Fr}_1)^2 - 4\mathrm{Fr}_1}\right]. \tag{13}$$

Частинний випадок загальної залежності (13) за умови наявності гідростатики в перерізі 1-1 та при числах Фруда $\mathrm{Fr}_1 > 1$ задається відомою формулою Рассела–Буссінеска, виведеною для усамітненої хвилі:

$$\eta_c = \frac{h_c}{h_1} = \mathrm{Fr}_1. \tag{14}$$

Наведені залежності (9), (11)–(13), які визначають другу спряжену h_2 і максимальну $h_в$ глибини, а також профіль вільної поверхні, дозволяють розраховувати вказані характеристики різних типів білякритичних течій, включаючи кноїдальні хвилі. Слід підкреслити, що ці співвідношення враховують можливе відхилення від гідростатики в початковому перерізі розглядуваних явищ. При цьому шукані характеристики однозначно виражаються через параметри потоку в початковому перерізі білякритичних течій. Характерно, що саме наявність негідростатичного розподілу тиску в ньому пояснює сутність парадоксів, обговорених у [51].

6. УМОВИ ІСНУВАННЯ КНОЇДАЛЬНИХ ХВИЛЬ

У відповідності з існуючими класифікаціями хвиль на воді, область існування кноїдальних хвиль зазвичай визначається в залежності від різних діючих факторів — довжини і висоти хвиль, глибини води, швидкості переміщення, модуля еліптичних функцій та ін. [3, 4, 21, 29]. Проте при проведенні теоретичних і експериментальних досліджень прагнуть оперувати такими характеристиками хвиль, якими можна керувати — питомою витратою q (для просторової задачі — загальною витратою Q та характеристиками поперечного перерізу русла), початковою глибиною h_1, швидкістю потоку v_1 у початковому перерізі, швидкістю руху хвиль c тощо. Ці параметри зводяться до числа Фруда $\mathrm{Fr}_1 = q^2/gh_1^3$ або $\mathrm{Fr}_1 = c^2/gh_1$, за допомогою якого найчастіше й виражають умови існування кноїдальних хвиль та інших типів білякритичних течій рідини.

Накопичена інформація з питання про умови існування кноїдальних хвиль є доволі суперечливою. Багато авторів вважають, що кноїдальні хвилі можуть існувати як при $\mathrm{Fr}_1 < 1$, так і при $\mathrm{Fr}_1 > 1$ [4, 21, 26, 29, 62, 63]. При цьому зазначаються такі межі можливої області існування: Г. Х. Келеган, Г. В. Паттерсон [26], Р. Л. Вігель [4] — $\mathrm{Fr}_1 = (0.49 \ldots 1.70)$, Ф. М. Хендерсон [63], Г. Хольторф [21] — $\mathrm{Fr}_1 = (0.8 \ldots 1.5)$. Водночас ряд авторів притримуються тої точки зору, що кноїдальні хвилі утворюються лише при числах Фруда $\mathrm{Fr}_1 < 1$, а при $\mathrm{Fr}_1 > 1$ формується усамітнена хвиля [5, 10, 13, 64].

Запропонована теорія білякритичних течій рідини з урахуванням можливої негідростатики у їхньому початковому перерізі дозволяє внести ясність у питання про умови існування кноїдальних хвиль. Структура диференціального рівняння (11) та його загального розв'язку (12) показують, що умови існування кноїдальних хвиль необхідно виражати в залежності не від одного параметра, а від двох — числа Фруда Fr_1 і коефіцієнта негідростатичності s_1, який враховує ступінь відхилення від гідростатики у початковому перерізі цих хвиль. У роботі [59] в результаті інтегрування диференціального рівняння (11) й виведення його загального розв'язку (12) отримано наступні дві умови існування кноїдальних хвиль:

$$\mathrm{Fr}_1 \ (<, =, >) \ 1 \tag{15}$$

$$s_1 > 1. \tag{16}$$

Проведений аналіз умов існування загального розв'язку (12) показав, що стосовно існування кноїдальних хвиль не існує ніяких обмежень по числу Фруда Fr_1. Перша умова, яка задається відношенням (15), засвідчує, що кноїдальні хвилі можуть утворюватися на поверхні спокійних, критичних і бурхливих потоків.

Щодо ролі другої умови (16) зазначимо таке. Загальний розв'язок (12) можливий при

$$s_1 \geq 1, \tag{17}$$

але рівність

$$s_1 = 1 \tag{18}$$

(тобто наявність гідростатики у початковому перерізі) виконується лише для усамітненої хвилі, яка є окремим типом кноїдальних хвиль. При цьому умова існування періодичних кноїдальних хвиль задається виразом (16). Таким чином, обов'язковою умовою існування періодичних кноїдальних хвиль є наявність негідростатики в їхньому початковому перерізі, причому крива вільної поверхні там має бути ввігнутою. Отже загальні межі існування періодичних кноїдальних хвиль можна виразити умовами (15), autorefeq:16.

Виконання умови (16) для нерухомих кноїдальних хвиль забезпечується конструкцією і розмірами споруд, а також гідравлічними характеристиками потоку рідини. Проте для рухомих кноїдальних хвиль реалізація цієї умови є непростою, адже при розгляді хвиль переміщення, що утворюються на поверхні нерухомої води, завжди можна вибрати такий початковий переріз, в якому спостерігається гідростатичний розподіл тиску — $s_1 = 1$.

На основі співставлення умов (16) і (17) можна зробити висновок, що безпосереднє утворення рухомих кноїдальних хвиль з негідростатичною у їх початковому перерізі на поверхні нерухомої рідини є неможливим. Більш детально це питання розглянуто в роботі [65]. У ній також зроблено висновок, що для формування рухомих кноїдальних хвиль на поверхні нерухомої рідини необхідне існування перехідної ділянки, на якій відповідно до рівняння Кортевега – де Фріса (2) відбувається початковий етап формування цих хвиль.

7. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Значна частина експериментальних досліджень кноїдальних хвиль здійснена на основі рухомих явищ у складі хвиль переміщення [3, 14, 47, 49]. Проте в таких умовах постановка експериментів становить певні складнощі, а точність отримуваних результатів є нижчою, ніж у випадку нерухомого явища. До того ж кноїдальні хвилі є лише частиною утворюваних хвиль переміщення.

Експериментальні дослідження нерухомих кноїдальних хвиль з усталеним рухом рідини дають можливість отримувати на установці досліджувані хвилі відразу за вихідним отвором споруди, що істотно спрощує методику експериментів та підвищує якість отримуваних результатів. Проте такі роботи малочисленні. Нам відомі лише три таких приклади — А. М. Бінні, П. О. Девіс, Д. С. Оркней [11], О. А. Рябенко [58, 59], Д. М. Поплавський [66].

Автори першого дослідження провели невелику серію дослідів в області чисел $\mathrm{Fr}_1 = (0.18 \ldots 0.75)$, проте тут не оцінювалась можливість відхилення від гідростатичного розподілу тиску в початковому перерізі кноїдальних хвиль. Останні два дослідження, проведені в НУВГП, здійснені на основі теорії білякритичних течій з урахуванням можливого відхилення від гідростатики в їхньому початковому перерізі. Використання згаданої теорії вимагало від дослідників розробити й застосувати принципово нову методику експериментів, яка б дозволила в додаток до визначення традиційних параметрів досліджуваних явищ (витрата, положення вільної поверхні тощо) забезпечити знаходження на установці трьох додаткових характеристик — положення перерізу 1-1 з першою спряженою глибиною, положення перерізу 2-2 з другою спряженою глибиною, а також ступеня відхилення від гідростатики в перерізі 1-1. Цю проблему було вирішено за допомогою застосування великої кількості донних п'єзометрів розташованих з певним інтервалом по довжині лотока. Зазначимо, що в своїх дослідах О. А. Рябенко використав 95, а Д. М. Поплавський — 89 п'єзометрів.

Автор робіт [58, 59] провів експериментальні дослідження кноїдальних хвиль у лотоку прямокутної форми довжиною 39 м, шириною 1 м і висотою 1 м. Кноїдальні хвилі утворювалися за схемою витікання води з-під затвора з плавним обрисом нижньої частини. В дослідах по осі потоку за допомогою шпіценмасштабу визналось положення кривої вільної поверхні, а на основі показів донних п'єзометрів знаходили п'єзометричну лінію. Наявність обрисів цих двох кривих дозволила надійно визначити розташування по довжині лотока перерізів з першою і другою спряженими глибинами та значення коефіцієнта негідростатичності $s_1 = 1$ у будь-якому перерізі потоку. Використана методика досліджень враховувала можливість певного коливання в часі досліджуваного явища відносно деякого усередненого положення. Подібний ефект для хвилястого й класичного стрибків зафіксували в своїх експериментах також Ж. М. Леннон і Д. Ф. Хілл [67]. Експериментальна установка й методика цих досліджень більш детально описані в ро-

Табл. 2. Основні характеристики дослідів з кноїдальними хвилями

Тип потоку	Кільк. досл.	Q, дм^3/с	Характеристики в початковому перерізі h_1, см	s_1	Fr_1	h_2, см	h_c, см
Спокійний, критичний ($Fr_1 \le 1$, $s_1 > 1$)	46	27.0… …331.5	5.0… …26.0	1.02… …1.07	0.46… …1.00	5.35… …28.65	5.8… …31.9
Бурхливий ($Fr_1 > 1$, $s_1 > 1$)	6	71.2… …150.6	8.0… …13.0	1.05… …1.06	1.06… …1.18	9.1… …15.3	10.5… …17.95

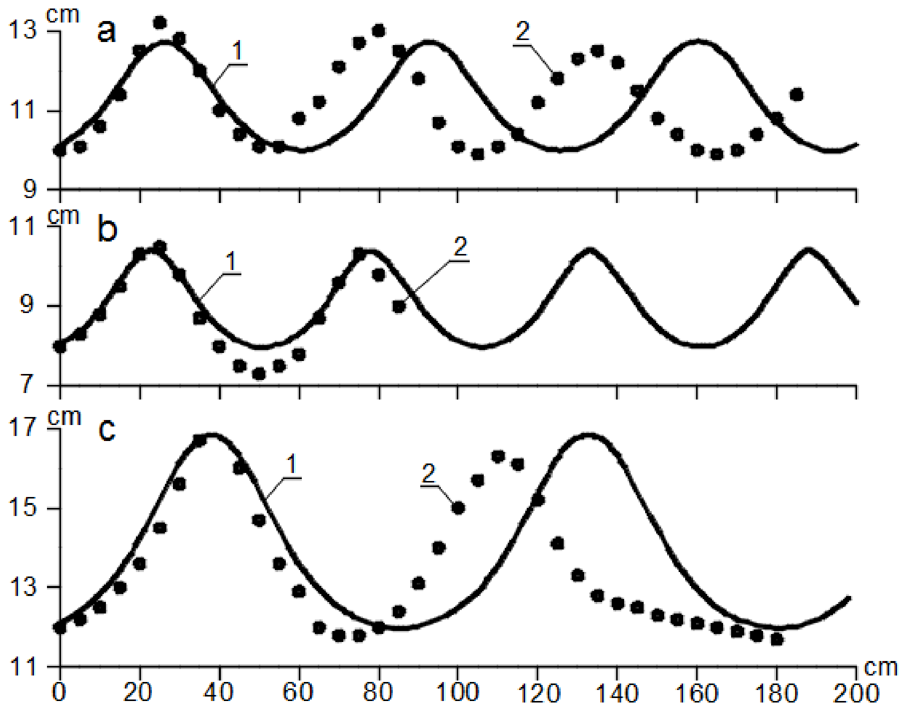

Рис. 4. Профіль вільної поверхні кноїдальних хвиль (*1* – теорія, *2* – експеримент):
а — у спокійному потоці нри $\mathrm{Fr}_1 = 0.96$, $s_1 = 1.06$, $h_1 = 0.10$ м, $q = 0.0972$ м^2/с;
б — у критичному потоці при $\mathrm{Fr}_1 = 1.01$, $s_1 = 1.05$, $h_1 = 0.08$ м, $q = 0.0712$ м^2/с;
в — у бурхливому потоці при $\mathrm{Fr}_1 = 1.17$, $s_1 = 1.06$, $h_1 = 0.12$ м, $q = 0.1409$ м^2/с

ботах [58, 59].

У Табл. 2 наведено основні характеристики проведених дослідів з нерухомими кноїдальними хвилями. Зауважимо, що такі досліди при числах Фруда Fr_1 рівних та більших за одиницю проведені вперше і можуть бути визнані унікальними. Отримані експериментальні результати підтверджують теоретичний висновок, що кноїдальні хвилі можуть існувати при будь-яких значеннях Fr відносно одиничного.

Порівняння з експериментальними даними теоретичних значень другої спряженої h_2 та максимальної $h_в$ глибин кноїдальних хвиль, підрахованих відповідно за формулами (9) і (13), висвітлено в роботах [58, 59, 68, 69] і показало високу кореляцію.

На Рис. 4 представлені результати трьох дослідів з кноїдальними хвилями, підібрані таким чином, що число Фруда Fr_1 у їх початковому перерізі є меншим, рівним (у межах точності експериментів) і більшим за одиницю. Аналогічні результати наведені також у роботах [66, 70], де експериментальні профілі вільної поверхні кноїдальних хвиль співставлено з теоретичними, побудованими за системою рівнянь (12). Продемонстровано їх хорошу збіжність. Особливістю розрахунків, виконаних за системою (12), є те, що в них максимальна глибина кноїдальних хвиль підраховується, а не задається наперед. Це вигідно відрізняє запропоновану методику від методу, використаного в роботах [3, 4], в яких значення глибини $h_в$ нав'язувалось певним чином.

8. ВИСНОВКИ

1. Кноїдальні хвилі можуть існувати в природі при числах Фруда Fr_1 у їхньому початковому перерізі менших, рівних та більших за одиницю.

2. Обов'язковою умовою існування періодичних кноїдальних хвиль є наявність викривлення потоку (у вертикальній площині) у їхньому початковому перерізі з негідростатичним розподілом тиску по глибині. При цьому вільна поверхня тут має бути ввігнутою, а коефіцієнт негідростатичності $s_1 > 1$.

3. Співставлення теоретичних і експериментальних даних про другу спряжену h_2 і максимальну $h_в$ глибини та профіль вільної поверхні нерухомих кноїдальних хвиль показали їх хорошу збіжність. Це свідчить про принципову правильність розробленої теорії білякритичних течій рідини.

9. УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

c — швидкість руху хвиль переміщення (мс$^{-}$1),

E — питома енергія (м),

Fr_1 — число Фруда у початковому перерізі (–),

g — прискорення вільного падіння (м/с^2),

h_1 — початкова (перша спряжена) глибина (м),

h_2 — друга спряжена глибина (м),

$h_в$ — глибина під вершиною хвиль (м),

$h_{1поч}$ — початкова глибина першої хвилі хвиль переміщення (м),

$h_{кін}$ — кінцева глибина першої хвилі хвиль переміщення (м),

k — модуль кноїдальних хвиль (м),

M — момент (кг м/с),

q — питома витрата ($1/м^2 с^1$),

s — коефіцієнт негідростатичності (–),

t — коефіцієнт гідродинамічного тиску (–),

v_1 — швидкість потоку у початковому перерізі (м/с),

α_{02} — коефіцієнт кількості руху (Буссінеска) у перерізі з другою спряженою глибиною (–),

β — коефіцієнт потенціальної енергії (–),

Δ — параметр кноїдальних хвиль (м).

ЛІТЕРАТУРА

[1] Korteweg D. J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. — 1895. — may. — Vol. 39, no. 240. — P. 422–443.

[2] Lamb H. Hydrodynamics. — New York : Dover, 1932.

[3] Fenton J. D. The cnoidal theory of water waves // Developments in Offshore Engineering / ed. by Herbich J. B. — Houston : Gulf, 1998. — P. 55–98.

[4] Wiegel R. L. A presentation of cnoidal wave theory for practical application // Journal of Fluid Mechanics. — 1960. — Vol. 7, no. 2. — P. 273–286.

[5] Турсунов А. А. Околокритическое состояние безнапорных потоков воды // Известия ВНИИГ. — 1969. — Т. 90. — С. 201–224.

[6] Ryabenko A. A. Types, characteristics, and conditions of existence of near-critical flows // Hydrotechnical Construction. — 1992. — Vol. 26, no. 5. — P. 269–275.

[7] Karabut E. A. Higher-order approximations of cnoidal-wave theory // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2000. — Vol. 41, no. 1. — P. 84–94.

[8] Heller V., Hager W. H., Minor H.-E. Landslide generated impulse waves in reservoirs. Basics and computation. — ETH Zürich : Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, 2009. — 172 p.

[9] Ryabenko A. A. Representation of a wave jump and group of translation waves as a combination of a solitary wave and cnoidal waves // Hydrotechnical Construction. — 1998. — Vol. 32, no. 5. — P. 246–252.

[10] Castro-Orgaz O., Canas J. R., Ripolles J. D. Resalto hidráulico ondulatorio // Ingeniería del agua. — 2015. — Vol. 19, no. 2. — P. 63–74.

[11] Binnie A. M., Davies P. O., Orkney J. C. Experiments on the flow water from a reservoir through an open horizontal channel // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. — 1955. — Vol. 230, no. 1181. — P. 225–236.

[12] Смыслов В. В. Исследование околокритических течений жидкости в открытых руслах // Известия вузов. Энергетика. — 1967. — № 1. — С. 97–103.

[13] Hager W. H. Equations for plane, moderately curved open channel flows // Journal of Hydraulic Engineering. — 1985. — Vol. 111, no. 3. — P. 541–546.

[14] Sandover J. A., Taylor C. Cnoidal waves and bores // La Houille Blanche. — 1962. — Vol. 48, no. 3. — P. 443–465.

[15] Miles J. W. The Korteweg – de Vries equation: a historical essay // Journal of Fluid Mechanics. — 1981. — Vol. 106, no. 1. — P. 131–147.

[16] Newell A. C. Solitons in mathematics and physics. — Tucson, University of Arizona : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.

[17] Филиппов А. Т. Многоликий солитон. — Москва : Наука, 1986.

[18] Wilson M. Cnoidal wave formation in a laser system with active saturable absorber : Ph. D. thesis ; Gto. — Leon, Gto. Mexico, 2011.

[19] Ippen A., Harleman D. Verification of theory for obliqne standing waves // Transactions of the American Society of Civil Engineers. — 1956. — Vol. 121, no. 1. — P. 678–694.

[20] Смыслов В. В. Аннотации законченных в 1963 г. НИР по гидротехнике. Стоячие волны в спокойных потоках. — Москва / Ленинград : Энергия, 1965. — С. 428–431.

[21] Holtorff G. Eine exakte Theorie stationarer und fortschreitender wirbelfreier Schwerewellen // Die Wasserwirtschaft. — 1966. — nu. 11. — S. 349–356.

[22] Wols B. A. Undular hydraulic jumps : Ph. D. thesis ; Delft University of Technology. — Delft, the Netherlands, 2005.

[23] Flussbau. Weiterbildendes Studium "Wasser und Umwelt". — Bauhaus-Universität Weimar : DWA, 2007. — 440 S.

[24] Физический энциклопедический словарь / под ред. Прохоров М. — Москва : Советская энциклопедия, 1984. — 944 с.

[25] СНиП 2.06.04-82*. Нагрузка и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов). — 1989.

[26] Keulegan G. H., Patterson G. W. Mathematical theory of irrotational translation waves // Journal of Research of the National Bureau of Standards. — 1940. — Vol. 24, no. 1. — P. 47–101.

[27] Keller J. B. The solitary wave and periodic waves in shallow water // Annals of the New York Academy of Sciences. — 1949. — Vol. 51, no. 3. — P. 345–350.

[28] Benjamin T. B., Lighthill M. J. On cnoidal waves and bores // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. — 1954. — Vol. 224, no. 1159. — P. 448–460.

[29] Littman W. On the existence of periodic waves near critical speed // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1957. — Vol. 10, no. 2. — P. 241–269.

[30] Fawer C. Étude de quelques écoulements permanents à filets courbes. — Lausanne : Imprimerie La Concorde, 1937. — 127 p.

[31] Serre F. Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // La Houille Blanche. — 1953. — Vol. 39, no. 3. — P. 374–388.

[32] Serre F. Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // La Houille Blanche. — 1953. — Vol. 39, no. 6. — P. 830–872.

[33] Iwasa Y. Analytical consideration on cnoidal and solitari waves // Transactions of the Japan Society of Civil Engineers. — 1956. — Vol. 1956, no. 32. — P. 43–49.

[34] Khafagi A., Hammad S. Z. Velocity and pressure distribution in curved streamline flow // Water and Water Engineering. — 1954. — Vol. 58. — P. 106–115.

[35] Смыслов В. В. Теория водослива с широким порогом. — Киев : АН УССР, 1956. — 184 с.

[36] Matthew G. D. On the influerce of curvature surface tension and viscosity on flow over round-crested weirs // Proceedings of the Institution of Civil Engineers. — 1963. — Vol. 25, no. 4. — P. 511–524.

[37] Hager W. H. Critical flow condition in open channel hydraulics // Acta Mechanica. — 1985. — Vol. 54, no. 3-4. — P. 157–179.

[38] Chanson H. Free-surface flows with near-critical flow conditions // Canadian Journal of Civil Engineering. — 1996. — Vol. 23, no. 6. — P. 1272–1284.

[39] Castro-Orgaz O., Chanson H. Near-critical free-surface flows: real fluid flow analysis // Environmental Fluid Mechanics. — 2011. — Vol. 11, no. 5. — P. 499–516.

[40] Steinruck H., Schneider W., Grillhofer W. A multiple scales analysis of the undular hydraulic jump in turbulent open channel flow // Fluid Dynamics Research. — 2003. — Vol. 33, no. 1-2. — P. 41–55.

[41] Jurisits R., Schneider W., Bae Y. B. A multiple-scales solution of the undular hydraulic jump problem // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. — 2007. — Vol. 7, no. 1. — P. 4120007–4120008.

[42] Schneider W., Yasuda Y. Stationary solitary waves in turbulent open-channel flow: Analysis and experimental verification // Journal of Hydraulic Engineering. — 2016. — Vol. 142, no. 04015035. — 7 p.

[43] Fenton J. D., Zerihun Y. T. A Boussinesq approximation for open channel flow // Proceedings of 32nd Congress of IAHR. — Venice : published on CD. — 2007. — P. 1–10.

[44] Bottman N., Deconinck B. KdV cnoidal waves are spectrally stable // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2009. — Vol. 25, no. 4. — P. 1163–1180.

[45] Deconinck B., Kapitula T. The orbital stability of the cnoidal wares of the Korteveg – de Vries equation // Physics Letters A. — 2010. — Vol. 374, no. 39. — P. 4018–4022.

[46] A numerical model for shoaling and refraction of second-order cnoidal waves over an irregular bottom : Rep. : Final Report / Army Corps of Enqineers ; executor: Hardi T. A., Kraus N. C. — Washington, DC : 1987.

[47] Sandover J. A., Zienkiewicz O. C. Experiments on surge waves // Water Power. — 1957. — Vol. 9. — P. 418–424.

[48] Favre H. Étude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts. — Paris : Dunod, 1935. — 215 p.

[49] Нышанов Е. Волны перемещения в машинных каналах : Дис... канд. техн. наук. — Алма-Ата, 1988.

[50] Hinis M. A. Cnoidal and sinusoidal ware reflection from a laboratory sand beach : Ph. d. thesis ; Drexel University. — 2003.

[51] Рябенко О. А. Проблеми і парадокси білякритичних течій рідини // Прикладна гідромеханіка. — 2011. — Т. 13(85), № 4. — С. 37–51.

[52] Castro-Orgaz O., Hager W. H. One-dimensional modelling of curvilinear free surface flow: Generalized Matthew theory // Journal of Hydraulic Research. — 2014. — Vol. 52, no. 1. — P. 14–23.

[53] Hager W. H., Hutter K. On pseudo-uniform flow in open channel hydraulics // Acta Mechanica. — 1984. — Vol. 53, no. 3–4. — P. 183–200.

[54] Montes J. S., Chanson H. Characteristics of undular hydraulic jumps. Experiments and analysis // Journal of Hydraulic Engineering. — 1998. — Vol. 124, no. 2. — P. 192–205.

[55] Bose S. K., Castro-Orgaz O., Dey S. Free surface profiles of undular hydraulic jumps // Journal of Hydraulic Engineering. American Society of Civil Engineers. — 2012. — Vol. 138, no. 4. — P. 362–366.

[56] Flow characteristics of undular hydraulic jump. Comparison with near-critical flows : Rep. : CH 45/95 / University of Queensland ; executor: Chanson H. — Australia : 1995.

[57] Gotoh H., Yasuda Y., Ohtsu I. Effect of channel slope on flow characteristics of undular hydraulic jumps // WIT Transactions on Ecology and the Environment. — 2005. — Vol. 83. — P. 33–43.

[58] Рябенко А. А. Исследование околокритических течений в открытых руслах : Дис... канд. техн. наук. — Ровно, 1975.

[59] Рябенко О. А. Теоретичні основи і мотоди розрахунків білякритичних течій рідини з вільною поверхнею : Дис... докт. техн. наук. — Рівне, 2003. — 393 с.

[60] Yamaguchi M., Tsuchiya Y. Relation between wave characteristics of cnoidal wave theory derived by Laitone and by Chappelear // Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute. — 1974. — Vol. 24, no. 3. — P. 217–231.

[61] Рябенко О. А. Математична модель хвилеподібних білякритичних течій рідини з урахуванням можливого викривлення потоку у вертикальній площині у їх початковому перерізі // Прикладна гідромеханіка. — 2006. — Т. 8(80), № 1. — С. 60–72.

[62] Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М. Исследование жидкости при скоростях, близких к критической // Труды Московского физико-технического института. — 1959. — Т. 3. — С. 25–59.

[63] Herderson F. M. Open channel flow. — New York : Macmillan, 1966. — 554 p.

[64] Верeземский В. Г. О прыжке и сужении бурного потока : Автореф. дис... канд. техн. наук ; Московский гидромелиоративный институт. — Москва, 1967. — 14 с.

[65] Рябенко О. А. Форми вільної поверхні та умови існування гідродинамічного солітону, самотньої, одиночної і кноїдальних хвиль // Прикладна гідромеханіка. — 2007. — Т. 9(81), № 1. — С. 66–80.

[66] Поплавський Д. М. Розрахунок профілю вільної поверхні кноїдальних хвиль // VIII Міжнародна НПК «Нетрадиційні і поновлювані джерела енергії як альтернативні первинним джерелам енергії в регіоні». — Львів. — 2015. — С. 200–203.

[67] Lennon J. M., Hill D. F. Particle image velocimetry measurement of undular and hydraulic jumps // Journal of Hydraulic Engineering. — 2006. — Vol. 132, no. 12. — P. 1283–1294.

[68] Рябенко А. А. Экспериментальные исследования сопряженных глубин околокритических течений // Гидравлика и гидротехника. — 1977. — Т. 25. — С. 70–78.

[69] Рябенко А. А. Экспериментальные исследования максимальной глубины околокритических течений с волнообразной поверхностью // Гидравлика и гидротехника. — 1985. — Т. 41. — С. 45–50.

[70] Використання диференціального рівняння затухаючих вимушених коливань при побудові профілю вільної поверхні кноїдальних хвиль / Рябенко О. А., Клюха О. О., Галич О. О. і Поплавський Д. М. // Гідроенергетика України. — 2016. — № 1-2. — С. 55–58.

REFERENCES

[1] D. J. Korteweg and G. de Vries, “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 39, pp. 422–443, may 1895.

[2] H. Lamb, *Hydrodynamics.* New York: Dover, 1932.

[3] J. D. Fenton, “The cnoidal theory of water waves,” in *Developments in Offshore Engineering* (J. B. Herbich, ed.), pp. 55–98, Houston: Gulf, 1998.

[4] R. L. Wiegel, “A presentation of cnoidal wave theory for practical application,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 7, no. 2, pp. 273–286, 1960.

[5] A. A. Tursunov, “Near-critical state of non-pressure water flows,” *Izvestiia VNIIG*, vol. 90, pp. 201–224, 1969.

[6] A. A. Ryabenko, “Types, characteristics, and conditions of existence of near-critical flows,” *Hydrotechnical Construction*, vol. 26, no. 5, pp. 269–275, 1992.

[7] E. A. Karabut, “Higher-order approximations of cnoidal-wave theory,” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 41, no. 1, pp. 84–94, 2000.

[8] V. Heller, W. H. Hager, and H.-E. Minor, *Landslide generated impulse waves in reservoirs. Basics and computation.* ETH Zürich: Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, 2009.

[9] A. A. Ryabenko, “Representation of a wave jump and group of translation waves as a combination of a solitary wave and cnoidal waves,” *Hydrotechnical Construction*, vol. 32, no. 5, pp. 246–252, 1998.

[10] O. Castro-Orgaz, J. R. Canas, and J. D. Ripolles, “Resalto hidráulico ondulatorio,” *Ingeniería del agua*, vol. 19, no. 2, pp. 63–74, 2015.

[11] A. M. Binnie, P. O. Davies, and J. C. Orkney, “Experiments on the flow water from a reservoir through an open horizontal channel,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 230, no. 1181, pp. 225–236, 1955.

[12] V. V. Smyslov, “Study of near-critical fluid flows in open channels,” *Izvestiia Vuzov. Energetika*, no. 1, pp. 97–103, 1967.

[13] W. H. Hager, “Equations for plane, moderately curved open channel flows,” *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 111, no. 3, pp. 541–546, 1985.

[14] J. A. Sandover and C. Taylor, "Cnoidal waves and bores," *La Houille Blanche*, vol. 48, no. 3, pp. 443–465, 1962.

[15] J. W. Miles, "The Korteweg – de Vries equation: a historical essay," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 106, no. 1, pp. 131–147, 1981.

[16] A. C. Newell, *Solitons in mathematics and physics*. Tucson, University of Arizona: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.

[17] A. T. Filippov, *The many-faced soliton*. Moscow: Nauka, 1986.

[18] M. Wilson, *Cnoidal wave formation in a laser system with active saturable absorber*. PhD thesis, Gto, Leon, Gto. Mexico, 2011.

[19] A. Ippen and D. Harleman, "Verification of theory for obliqne standing waves," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 121, no. 1, pp. 678–694, 1956.

[20] V. V. Smyslov, *Annotations of researches on hydraulic engineering completed in 1963. Standing waves in still flows*, pp. 428–431. Moscow / Leningrad: Energia, 1965.

[21] G. Holtorff, "Eine exakte Theorie stationarer und fortschreitender wirbelfreier Schwerewellen," *Die Wasserwirtschaft*, no. 11, pp. 349–356, 1966.

[22] B. A. Wols, *Undular hydraulic jumps*. phdthesis, Delft University of Technology, Delft, the Netherlands, 2005.

[23] *Flussbau. Weiterbildendes Studium "Wasser und Umwelt"*. Bauhaus-Universität Weimar: DWA, 2007.

[24] M. Prohorov, ed., *Physical encyclopedic dictionary*. Moscow: Sovetskaya Enciklopedia, 1984.

[25] "SNiP 2.06.04-82*. Loading and impact on hydrotechnical structures (wave, ice and of vessels)," 1989.

[26] G. H. Keulegan and G. W. Patterson, "Mathematical theory of irrotational translation waves," *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 24, no. 1, pp. 47–101, 1940.

[27] J. B. Keller, "The solitary wave and periodic waves in shallow water," *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 51, no. 3, pp. 345–350, 1949.

[28] T. B. Benjamin and M. J. Lighthill, "On cnoidal waves and bores," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 224, no. 1159, pp. 448–460, 1954.

[29] W. Littman, "On the existence of periodic waves near critical speed," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 10, no. 2, pp. 241–269, 1957.

[30] C. Fawer, *Étude de quelques écoulements permanents à filets courbes*. Lausanne: Imprimerie La Concorde, 1937.

[31] F. Serre, "Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux," *La Houille Blanche*, vol. 39, no. 3, pp. 374–388, 1953.

[32] F. Serre, "Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux," *La Houille Blanche*, vol. 39, no. 6, pp. 830–872, 1953.

[33] Y. Iwasa, "Analytical consideration on cnoidal and solitari waves," *Transactions of the Japan Society of Civil Engineers*, vol. 1956, no. 32, pp. 43–49, 1956.

[34] A. Khafagi and S. Z. Hammad, "Velocity and pressure distribution in curved streamline flow," *Water and Water Engineering*, vol. 58, pp. 106–115, 1954.

[35] V. V. Smyslov, *Theory of a spillway with a wide threshold*. Kyiv: AS UkrSSR, 1956.

[36] G. D. Matthew, "On the influerce of curvature surface tension and viscosity on flow over round-crested weirs," *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 25, no. 4, pp. 511–524, 1963.

[37] W. H. Hager, "Critical flow condition in open channel hydraulics," *Acta Mechanica*, vol. 54, no. 3-4, pp. 157–179, 1985.

[38] H. Chanson, "Free-surface flows with near-critical flow conditions," *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 23, no. 6, pp. 1272–1284, 1996.

[39] O. Castro-Orgaz and H. Chanson, "Near-critical free-surface flows: real fluid flow analysis," *Environmental Fluid Mechanics*, vol. 11, no. 5, pp. 499–516, 2011.

[40] H. Steinruck, W. Schneider, and W. Grillhofer, "A multiple scales analysis of the undular hydraulic jump in turbulent open channel flow," *Fluid Dynamics Research*, vol. 33, no. 1-2, pp. 41–55, 2003.

[41] R. Jurisits, W. Schneider, and Y. B. Bae, "A multiple-scales solution of the undular hydraulic jump problem," *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 7, no. 1, pp. 4120007–4120008, 2007.

[42] W. Schneider and Y. Yasuda, "Stationary solitary waves in turbulent open-channel flow: Analysis and experimental verification," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 142, no. 04015035, 2016.

[43] J. D. Fenton and Y. T. Zerihun, "A Boussinesq approximation for open channel flow," in *Proceedings of 32nd Congress of IAHR*, (Venice), pp. 1–10, published on CD, 2007.

[44] N. Bottman and B. Deconinck, "KdV cnoidal waves are spectrally stable," *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, vol. 25, no. 4, pp. 1163–1180, 2009.

[45] B. Deconinck and T. Kapitula, "The orbital stability of the cnoidal wares of the korteveg – de vries equation," *Physics Letters A*, vol. 374, no. 39, pp. 4018–4022, 2010.

[46] T. A. Hardi and N. C. Kraus, "A numerical model for shoaling and refraction of second-order cnoidal waves over an irregular bottom," Tech. Rep. Final Report, Army Corps of Enqineers, Washington, DC, 1987.

[47] J. A. Sandover and O. C. Zienkiewicz, "Experiments on surge waves," *Water Power*, vol. 9, pp. 418–424, 1957.

[48] H. Favre, *Étude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts*. Paris: Dunod, 1935.

[49] E. Nyshanov, *Waves of transition in machine channels*. Dis. cand. techn. sci., Alma-Ata, 1988.

[50] M. A. Hinis, *Cnoidal and sinusoidal ware reflection from a laboratory sand beach*. Ph. d. thesis, Drexel University, 2003.

[51] O. A. Riabenko, "Problems and paradoxes of near critical fluid flow," *Applied Hydromechanics*, vol. 13(85), no. 4, pp. 37–51, 2011.

[52] O. Castro-Orgaz and W. H. Hager, "One-dimensional modelling of curvilinear free surface flow: Generalized Matthew theory," *Journal of Hydraulic Research*, vol. 52, no. 1, pp. 14–23, 2014.

[53] W. H. Hager and K. Hutter, "On pseudo-uniform flow in open channel hydraulics," *Acta Mechanica*, vol. 53, no. 3–4, pp. 183–200, 1984.

[54] J. S. Montes and H. Chanson, "Characteristics of undular hydraulic jumps. experiments and analysis," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 124, no. 2, pp. 192–205, 1998.

[55] S. K. Bose, O. Castro-Orgaz, and S. Dey, "Free surface profiles of undular hydraulic jumps," *Journal of Hydraulic Engineering. American Society of Civil Engineers*, vol. 138, no. 4, pp. 362–366, 2012.

[56] H. Chanson, "Flow characteristics of undular hydraulic jump. comparison with near-critical flows," Tech. Rep. CH 45/95, University of Queensland, Australia, 1995.

[57] H. Gotoh, Y. Yasuda, and I. Ohtsu, "Effect of channel slope on flow characteristics of undular hydraulic jumps," *WIT Transactions on Ecology and the Environment*, vol. 83, pp. 33–43, 2005.

[58] A. A. Ryabenko, *Study of near-critical flows in open channels*. Dis. cand. techn. sci., Rivne, 1975.

[59] O. A. Ryabenko, *Theoretical foundations and methods of calculations of near-critical fluid flows with a free surface*. Dis. doct. techn. sci., Rivne, 2003.

[60] M. Yamaguchi and Y. Tsuchiya, "Relation between wave characteristics of cnoidal wave theory derived by Laitone and by Chappelear," *Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute*, vol. 24, no. 3, pp. 217–231, 1974.

[61] O. A. Riabenko, "Mathematical model of wavelike near-critical flows of fluid taking into account possible flow deformation in a vertical plane its initial cross-section," *Applied Hydromechanics*, vol. 8(80), no. 1, pp. 60–72, 2006.

[62] N. N. Moiseev and A. M. Ter-Krikorov, "Studying the fluid at velocities close to a critical one," *Trudy Moskovskogo Fiziko-Tehnicheskogo Instituta*, vol. 3, pp. 25–59, 1959.

[63] F. M. Herderson, *Open channel flow.* New York: Macmillan, 1966.

[64] V. G. Verezemskii, *On the jump and narrowing of the turbulent flow.* Dis. cand. techn. sci., Moscow Hydromelioration Institute, Moscow, 1967.

[65] O. A. Riabenko, "Forms of free surface and conditions of existence of hydrodynamic soliton, solitary, single and cnoidal waves," *Applied Hydromechanics*, vol. 9(81), no. 1, pp. 66–80, 2007.

[66] D. M. Poplavsky, "Calculating the profile of the free surface of cnoidal waves," in *VIII International Conference "Non-Traditional and Renewable Energy Sources As Alternatives to Primary Energy Sources in the Region"*, (Lviv), pp. 200–203, 2015.

[67] J. M. Lennon and D. F. Hill, "Particle image velocimetry measurement of undular and hydraulic jumps," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 132, no. 12, pp. 1283–1294, 2006.

[68] A. A. Ryabenko, "Experimental studies of conjugate depths of near-critical flows," *Gidravlika i Gidrotehnika*, vol. 25, pp. 70–78, 1977.

[69] A. A. Ryabenko, "Experimental studies of the maximum depth of near-critical flows with a wavy surface," *Gidravlika i Gidrotehnika*, vol. 41, pp. 45–50, 1985.

[70] O. A. Ryabenko, O. O. Klyukha, O. O. Galich, and D. M. Poplavsky, "Using the differential equation of damped forced oscillations in the construction of the profile of the free surface of cnoidal waves," *Hidroenergetyka Ukrainy*, no. 1-2, pp. 55–58, 2016.

А. А. Рябенко

Исследование кноидальних волн на воде с учетом негидростатикив их начальных сечениях

Цель работы состоит в построении математической модели кноидальных волн и других типов околокритических течений, которая бы адекватно отражала физическую природу этих явлений и учитывала возможную негидростатику в их начальном сечении. Детальный анализ накопленной информации о кноидальных волнах проведен с позиций более общей теории околокритических течений жидкости. Выявлен ряд недостатков существующих взглядов на проблему кноидальных волн. Показано, что кноидальные волны и другие типы околокритических течений жидкости в ряде случаев нельзя однозначно описать только одним характерным параметром — числом Фруда в начальном сечении. Этот вывод хорошо аргументирован приведенными результатами экспериментальных исследований. Построена концептуально новая математическая модель волнообразных околокритических течений, в явном виде учитывающая возможное негидростатическое распределение давления в их начальных сечениях. На основе предложенной модели выведено дифференциальное уравнение кривой свободной поверхности потока и получено его общее решение в виде кноидальных волн. Определены условия существования этих волн в зависимости от двух факторов — числа Фруда и коэффициента негидростатичности в начальном сечении. Показано, что периодические кноидальные волны могут существовать при числах Фруда в их начальных сечениях меньших, равных и больших единицы. В дополнение к этому обязательным условием существования рассматриваемых волн является наличие негидростатики в их начальном сечении. При этом кривая свободной поверхности здесь должна быть вогнутой, а коэффициент негидростатичности — больше единицы. Для проверки полученных результатов проведен большой объем экспериментальных исследований неподвижных периодических кноидальных волн. Полученные данные полностью подтвердили принципиальную правильность построенной математической модели.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: кноидальные волны, математическая модель, околокритические течения, негидростатическое распределение давления, уединенная волна

A. A. Riabenko

Investigation of cnoidal water waves with the allowance for a non-hydrostatics in their initial cross-section

The goal of the study is to build the mathematical model of cnoidal waves and other types of near-critical flows, which would adequately reflect the physical nature of these phenomena and take into account possible non-hydrostatics in their initial section. The accumulated information about cnoidal waves is analyzed in detail from the standpoint of a more general theory of near-critical fluid flows. Many shortcomings of the current views on the problem of cnoidal waves have been revealed. Frequently, the cnoidal waves and other types of near-critical fluid flows cannot be uniquely described by only one characteristic parameter, namely, the Froude number in the initial cross-section. The results of experimental research prove this conclusion. A conceptually new mathematical model of wave-like near-critical flows is constructed with explicit allowance for possible non-hydrostatic pressure distribution in their initial sections. Based on the proposed model, the differential equation of the free surface of the two-dimensional flow is derived, and its general solution is in the form of cnoidal waves. The two factors control the conditions for the existence of these waves: the Froude number and the coefficient of non-hydrostaticity in the initial section. As is shown, the periodic cnoidal waves can exist if the Froude numbers in their initial cross-sections are less than, equal to, and greater than unity. In addition, a necessary condition for the existence of the considered waves is the presence of non-hydrostatics in the initial section. At the same time, the curve of the free surface should be concave here, and the non-hydrostatic coefficient should be greater than unity. Extended experimental studies of stationary periodic cnoidal waves were carried out to verify the theoretical results. The obtained data fully confirmed the fundamental correctness of the constructed mathematical model.

KEY WORDS: cnoidal waves, mathematical model, near-critical flows, non-hydrostatic pressure distribution, solitary wave