

УДК 532.546

## РАСЧЕТ ДЕЙСТВИЯ СКВАЖИНЫ В СЖИМАЕМОМ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

**В. Л. Поляков**

*Институт гидромеханики НАН Украины  
ул. Марии Капнист, 8/4, 03057, Киев, Украина  
E-mail: [Polyakov\\_IGM@list.ru](mailto:Polyakov_IGM@list.ru)*

*Получено 20.12.2017. Пересмотрено 16.07.2018.*

Образовавшиеся в результате тектонических процессов трещиноватые породы часто содержат в своей матрице полезный флюид. Система трещин, служащая для его транспорта, обеспечивает продуктивную работу скважин. Высокие давления в глубоких пластах-коллекторах обуславливают расширение трещин, которые при интенсивных откачках флюида могут не только сжиматься, и даже закрываться. Как следствие, проницаемость породы резко снижается, а дебит скважины падает. Исходя из этого, значительный интерес представляет математическое моделирование действия одиночной скважины в сжимаемой трещиновато-пористой среде. Его целесообразно выполнять, вводя два условных континуума, которые основываются на системе трещин и матрице эксплуатируемого пласта. Скорость межконтинуального обмена флюидом полагается пропорциональной разнице между напорами в них. В этом контексте большое значение приобретает описание связи между проницаемостью первого континуума и давлением в нем. В статье рассмотрены три разных способа формализации этой связи. Сформулирована нелинейная математическая задача откачки несжимаемого флюида из сжимаемой трещиновато-пористой среды с постоянным дебитом. Получено ее решение для двух стадий фильтрационного процесса. Первая из них характеризуется тем, что возмущение, вносимое в фильтрационный режим продуктивного пласта, распространяется с конечной скоростью. После того, как зона возмущения охватит всю область фильтрации, начинается вторая стадия, на протяжении которой давление снижается одновременно во всем пласте. На ряде примеров проиллюстрированы возможности прикладной методики расчета фильтрационных характеристик. Установлены закономерности снижения давления внутри пласта и на забое. Разработанный метод позволяет надежно определять пространственно-временные изменения характеристик фильтрационного режима, заблаговременно оценивать их последствия и принимать рациональные инженерные решения.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** *трещиноватая среда, проницаемость, давление, скважина, сжимаемость, инженерные расчеты, фильтрация*

## 1. ВСТУПЛЕНИЕ

В природных геологических структурах часто встречаются напорные пласты, насыщенные полезными для производственных и хозяйственных нужд флюидами — водой, нефтью или газом. Продуктивность таких пластов, содержащих тяжелые флюиды (воду, нефть) главным образом определяется их фильтрационными и упругими свойствами, а в случае легких флюидов — также сжимаемостью последних. Периодические тектонические воздействия на такие структуры способствуют развитию особых свойств, которые изначально не были им присущи [1]. Так, вследствие формирования системы микроразломов-трещин исходная (первичная) пористость фактически дополняется новообразованной вторичной.

Среды с двойной пористостью, к которым относятся и агрегированные почвогрунты, остаются предметом теоретических и экспериментальных исследований на протяжении многих десятилетий [2–6]. Широкое распространение получила концепция трещиновато-пористых сред, которые, согласно классификации, предложенной в [7], можно разделить на четыре типа. Два основных из них включают среды с четко разграниченными функциями двух систем пор. Так, перенос флюида на значительное расстояние обеспечивают исключительно макропоры, а запасается он в множестве пронизывающих материнскую породу (матрицу) микропор. Частный характер фильтрации в трещиноватой среде подтверждается и формальной возможностью предельного перехода по соответствующим фильтрационным параметрам от более сложных условий в среде с двойной пористостью к более простым при условии ничтожной проницаемости блоков и емкости трещин [8].

В работах [9, 10] изучалось течение жидкости в отдельной трещине — канале с постоянным сечением, а для описания фильтрационного процесса в трещиноватых средах использовались два обобщенных подхода. Первый предполагает, что среда состоит из чередующихся слабопроницаемых пропластков и высокопроводных миниколлекторов [11, 12]. Однако активнее реализовывался и в итоге оказался более эффективным второй подход, при котором совокупности макропор и блоков (матрица) трактуются как два вложенных друг в друга континуума [13, 14]. Естественно, что здесь ключевое значение приобретает корректный учет обмена флюидом между континуумами, а движение жидкости и ее расходование следует описывать двумя наборами физических характеристик. Поэтому соответствующие математические задачи формулируются относительно пьезометрических напоров, понижений, или давлений в двух континуумах раздельно.

Применение численных методов позволило изучать закономерности фильтрации флюида в более общих условиях — неньютоновского поведения жидкости, наличия распределенного внешнего источника, присутствия третьей фазы и пр. [15–17]. Вместе с тем, благодаря аналитическим методам, с успехом использовавшимся в [18–23], удалось вывести удобные для инженерного анализа зависимости. В частности, только с их помощью возможно, интерпретировать данные тестовых испытаний скважин и сравнительно просто выявлять сам факт присутствия разветвленной системы трещин. Более того, это позволяет устанавливать количественные показатели системы трещин, матрицы и межконтинуального обмена [24–27].

Серьезным недостатком аналитических решений прикладных задач часто является фактическая неадекватность реальным условиям, проистекающая из необходимости

существенного упрощения исходных моделей. Так, в случае сжимаемых трещиноватых пород нелинейные нестационарные фильтрационные модели сводились к линейным, и только затем задействовались операционный или приближенные методы решения. Исходя из этого, основной целью данной работы стала разработка инженерного метода расчета действия одиночной (не)совершенной скважины. Прежде всего, речь идет об определении забойного давления в ограниченном трещиноватом пласте на базе нелинейной модели напорной фильтрации, детально отражающей его упругие свойства, а также влияние внешней границы.

## 2. ПОСТАНОВКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается фильтрация флюида в трещиновато-пористой среде. Предположим, что проницаемость матрицы (совокупности блоков) равна нулю, а значит, флюид движется исключительно по системе трещин. Его запасы сосредоточены в матрице, а объем трещин-каналов ничтожно мал. Таким образом, сокращение содержания флюида в пласте эквивалентно снижению его запасов в континууме матрицы, которое непосредственно обусловлено межконтинуальным обменом. Кроме того, порода считается сжимаемой, т.е. при изменении давления в пласте его фильтрационные характеристики также будут изменяться соответствующим образом. В первую очередь, речь идет о пористостях обоих континуумов  $n_f$ ,  $n_m$ , а также проницаемости первого континуума, введенного на базе системы трещин,  $k_f$ . Так как далее будет анализироваться поведение тяжелого несжимаемого флюида, то в качестве основных искомым характеристик выберем пьезометрические напоры  $h$  и производные от них понижения  $S$ . Соответственно, в базовой математической модели задействованы три функции состояния, которые в общем случае имеют вид

$$n_f(S_f) = n_{fo}f_{fn}(S_f), \quad n_m(S_m) = n_{mo}f_{mn}(S_m), \quad k_f(S_f) = k_{fo}f_k(S_f). \quad (1)$$

Здесь  $S_{f,m} = h_\infty - h_{f,m}$  — понижения,  $h_{f,m}$  — текущие пьезометрические напоры в первом и втором континуумах,  $h_\infty$  — пьезометрический напор в невозмущенной части продуктивного пласта.

Основу формируемой модели составляет система уравнений баланса несжимаемого флюида в первом и втором континуумах соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rV) + r \frac{\partial n_f}{\partial t} + rI_{fm} = 0, \quad (2)$$

$$-I_{fm} + \frac{\partial n_m}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

где  $I_{f,m}$  — интенсивность межконтинуального обмена флюидом, означающая его объем, который поступает в единичном объеме пористой среды из одного континуума в другой.

Далее принимаются во внимание выражения для пористостей (1) и скорости фильтрации (закон Дарси):

$$V = \frac{k_f}{\mu_l} \frac{\partial S_f}{\partial r}, \quad (4)$$

где  $\mu_l$  — динамическая вязкость. Тогда система уравнений фильтрации с учетом линейного представления для  $I_{f,m}$  [13, 16, 28]

$$I_{fm} = \lambda(S_f - S_m) \quad (5)$$

примет вид

$$\frac{k_{fo}}{\mu_l} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r f_k(S_f) \frac{\partial S_f}{\partial r} \right] - \lambda r (S_f - S_m) + n_{fo} r \frac{\partial f_{fn}(S_f)}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$\lambda (S_f - S_m) + n_{mo} \frac{\partial f_{mn}(S_m)}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Уместно отметить аналогию формулы (5) с выражением для интенсивности перетоков в слоистых пористых структурах, у которых хорошо проницаемые слои чередуются со слабопроницаемыми прослоями. В последнем случае  $\lambda$  трактуется как отношение коэффициента фильтрации прослоя к его мощности и по существу является мерой пропускной способности соответствующего фильтрующего материала [19].

Введем безразмерные переменные и параметр обмена:  $\bar{S}_{f,m,o} = S_{f,m,o}/H$ ,  $\bar{r} = r/r_W$ ,  $\bar{t} = k_{fo}t/\mu_l n_{mo} r_W^2$ ,  $\bar{\lambda} = \mu_l r_W^2 \lambda/k_{fo}$ , где  $H$  — масштаб для напоров, например  $h_\infty$ . Это позволяет записать систему (6), (7) так:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[ \bar{r} f_k(\bar{S}_f) \frac{\partial \bar{S}_f}{\partial \bar{r}} \right] - \bar{\lambda} \bar{r} (\bar{S}_f - \bar{S}_m) + \bar{n}_o \frac{\partial f_{fn}(\bar{S}_f)}{\partial \bar{t}} = 0, \quad (8)$$

$$\bar{\lambda} (\bar{S}_f - \bar{S}_m) + \frac{\partial f_{mn}(\bar{S}_m)}{\partial \bar{t}} = 0, \quad (9)$$

где  $\bar{n}_o = n_{fo}/n_{mo}$ .

Объемный расход флюида в совершенную скважину  $q$  принимается постоянным. Он определяется следующим образом:

$$q = -2\pi r_W \rho g M \frac{k_f(S_f)}{\mu_l} \frac{\partial S_f}{\partial r} \Big|_{r=r_W}, \quad (10)$$

где  $\rho$  — плотность флюида,  $M$  — мощность пласта. В соответствии с уравнением (10), граничное условие на скважине окончательно будет

$$\bar{r} = 1, \quad f_k(\bar{S}_f) \frac{\partial \bar{S}_f}{\partial \bar{r}} = -\bar{q}, \quad (11)$$

где  $\bar{q} = \mu_l q / 2\pi \rho g k_{fo} M H$ . Недостающие для корректной постановки исходной задачи граничные и начальные условия для первой и второй стадий фильтрационного процесса разнятся. В дальнейшем они будут конкретизированы применительно к подходящим водно-физическим условиям.

В случае несовершенства скважины, обусловленного деформациями фильтрационного потока вблизи нее и наличия зоны кольматажа, его степень принято учитывать с помощью специального фильтрационного сопротивления  $\Phi$  [29, 30]. Тогда найденная теоретическим путем функция понижения напора на забое  $S_{fW}(t) = S_f(r_W, t)$  нуждается в корректировке, причем соответствующую поправку  $\Delta S_{fW}$  к величине  $S_{fW}$  следует вычислять по формуле  $\Delta S_f = q\Phi/kM$ .

### 3. ПЕРВАЯ СТАДИЯ

Для первой стадии процесса характерно отсутствие влияния границ разрабатываемого пласта на работу скважин. Возмущение, вносимое скважиной в фильтрационный режим пласта, локализовано вблизи нее. На внешней границе указанной зоны принимается пара условий:

$$\bar{r} = \bar{R}, \quad \bar{S}_f = \bar{S}_\infty = 0, \quad \frac{\partial \bar{S}_f}{\partial \bar{r}} = 0. \quad (12)$$

Со временем зона возмущения  $r_W \leq r \leq R$  расширяется, так что ее радиус  $R$  является функцией  $t$ .

Поскольку режимные возмущения возникают в момент включения скважины, то начальные условия записываются так:

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{S}_{f,m} = 0, \quad \bar{R} = 1. \quad (13)$$

Для решения задачи (8), (9), (11)–(13) используется прием динамического осреднения правых частей уравнений фильтрации [31, 32], в соответствии с которым

$$\frac{1}{1-R} \int_1^{\bar{R}} \bar{r} \frac{\partial f_{fn}(\bar{S}_f)}{\partial \bar{t}} d\bar{r} = G_f(\bar{t}), \quad \frac{1}{1-R} \int_1^{\bar{R}} \bar{r} \frac{\partial f_{mn}(\bar{S}_m)}{\partial \bar{t}} d\bar{r} = G_m(\bar{t}). \quad (14)$$

Тогда уравнение (8) удобно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[ \bar{r} \frac{\partial F_k(\bar{S}_f)}{\partial \bar{r}} \right] = \bar{n}_0 G_l(\bar{t}) + G_m(\bar{t}), \quad (15)$$

где  $F_k(\bar{S}_f) = \int f_k(\bar{S}_f) d\bar{S}_f$ .

Первое интегрирование соотношения (15) с учетом второго условия (12) дает

$$\bar{r} \frac{\partial F_k(\bar{S}_f)}{\partial \bar{r}} = (\bar{n}_0 G_l + G_m)(\bar{r} - \bar{R}), \quad (16)$$

а повторное интегрирование с учетом первого условия (12):

$$F_k(\bar{S}_f) = F_k(0) + (\bar{n}_0 G_l + G_m) \left( \bar{r} - \bar{R} - \bar{R} \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}} \right). \quad (17)$$

При условии (11) из равенства (16) вытекает, что

$$\bar{n}_0 G_f + G_m = \frac{\bar{q}}{\bar{R} - 1}. \quad (18)$$

Получить простое выражение для понижения  $\bar{S}_f$  удастся, если уравнение (17) решается относительно  $\bar{S}_f$ . Так, если найдена такая функция  $F^{-1}$ , что

$$\bar{S}_f(\bar{r}, \bar{R}) = F_k^{-1} \left[ F_k(0) + \bar{q} \frac{\bar{r} - \bar{R} - \bar{R} \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}}}{\bar{R} - 1} \right], \quad (19)$$

то последующие выкладки должны выполняться с целью установления зависимостей  $\bar{R}(\bar{t})$ ,  $\bar{S}_m(\bar{r}, \bar{t})$ . Более чувствительной к изменениям давления (напора) является проницаемость породы. Если ее считать линейно упругой, то для  $n_f(S_f)$ ,  $n_m(S_m)$  положить [33, 34]

$$f_{fn}(\bar{S}_f) = 1 - b_{fn}(\bar{S}_f - \bar{S}_0), \quad f_{mn}(\bar{S}_m) = 1 - b_{mn}(\bar{S}_m - \bar{S}_0) \quad (20)$$

В этом случае

$$\frac{\partial f_{fn}(\bar{S}_f)}{\partial \bar{t}} = -b_{fn} \frac{\partial \bar{S}_f}{\partial \bar{t}}, \quad \frac{\partial f_{mn}(\bar{S}_m)}{\partial \bar{t}} = -b_{mn} \frac{\partial \bar{S}_m}{\partial \bar{t}}.$$

Как следует из равенства (19),

$$\frac{\partial \bar{S}_f}{\partial \bar{t}} = \psi_k(\bar{r}, \bar{R}) \frac{d\bar{R}}{d\bar{t}},$$

где

$$\psi_k(\bar{r}, \bar{R}) = \frac{\partial}{\partial \bar{R}} F_k^{-1} \left[ F_k(0) + \bar{q} \frac{\bar{r} - \bar{R} - \bar{R} \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}}}{\bar{R} - 1} \right].$$

Тогда

$$G_f = \frac{b_{fn}}{\bar{R} - 1} \int_1^{\bar{R}} \bar{r} \frac{\partial \bar{S}_f}{\partial \bar{t}} d\bar{r} = \frac{b_{fn} \Psi_k(\bar{R})}{\bar{R} - 1} \frac{d\bar{R}}{d\bar{t}}, \quad (21)$$

где  $\Psi_k(\bar{R}) = \int_1^{\bar{R}} \bar{r} \psi_k(\bar{r}, \bar{R}) d\bar{r}$ , а также

$$G_m = \frac{b_{mn}}{\bar{R} - 1} \int_1^{\bar{R}} \bar{r} \frac{\partial \bar{S}_m}{\partial \bar{t}} d\bar{r}. \quad (22)$$

Теперь уравнение (9) представляется в таком упрощенном виде:

$$\bar{\lambda} \bar{r} (\bar{S}_f - \bar{S}_m) = b_{mn} \bar{r} \frac{\partial \bar{S}_m}{\partial \bar{t}}. \quad (23)$$

Обе его части интегрируются по  $\bar{r}$  от 1 до  $\bar{R}$ . В результате получим

$$\bar{\lambda} \int_1^{\bar{R}} \bar{r} [\bar{S}_f(\bar{r}, \bar{t}) - \bar{S}_m(\bar{r}, \bar{t})] d\bar{r} = b_{mn} \int_1^{\bar{R}} \bar{r} \frac{\partial \bar{S}_m}{\partial \bar{t}} d\bar{r} = (\bar{R} - 1) G_m(\bar{t}). \quad (24)$$

Далее продифференцируем по  $\bar{t}$  обе части уравнения (24). При этом учтем, что в соответствии с соотношением (12),

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \int_1^{\bar{R}(\bar{t})} \bar{r} \bar{S}_{f,m}(\bar{r}, \bar{t}) d\bar{r} = \int_1^{\bar{R}(\bar{t})} \bar{r} \frac{\partial \bar{S}_{f,m}}{\partial \bar{t}} d\bar{r}.$$

Вместе с тем,

$$\int_1^{\bar{R}(\bar{t})} \bar{r} \frac{\partial \bar{S}_f}{\partial \bar{t}} d\bar{r} = \Psi_k(\bar{R}) \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{t}}, \quad (25)$$

где

$$\Psi_k(\bar{R}) = \int_1^{\bar{R}} \bar{r} \psi_k(\bar{r}, \bar{R}) \frac{\partial \bar{S}_f}{\partial \bar{t}} d\bar{r}, \quad \psi_k(\bar{r}, \bar{R}) = \frac{\partial \bar{S}_f(\bar{r}, \bar{R})}{\partial \bar{R}}.$$

Тогда уравнение (24) преобразуется к следующему виду:

$$\bar{\lambda} \Psi_k(\bar{R}) \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{t}} - \frac{\bar{\lambda}}{b_{mn}} (\bar{R} - 1) G_m = G_m \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{t}} + (\bar{R} - 1) \frac{\partial G_m}{\partial \bar{t}} = 0. \quad (26)$$

Итак, имеется система трех уравнений относительно неизвестных  $\bar{R}$ ,  $G_f$ ,  $G_m$ , которая, наряду с условием (18), включает в себя следующие соотношения:

$$b_{mn} G_f = b_{fn} G_m, \quad (27)$$

$$G_f = \frac{b_{fn}}{\bar{R} - 1} \Psi_k(\bar{R}) \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{t}}. \quad (28)$$

Последовательно исключив из уравнений (18), (27), (28)  $G_f$  и  $G_m$ , получим дифференциальное уравнение относительно радиуса  $\bar{R}$ :

$$(\bar{n}_0 b_{fn} + b_{mn}) \Psi_k(\bar{R}) \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{t}} = \bar{q}. \quad (29)$$

Решение уравнения (29) при выполнении второго условия (13) имеет вид

$$\bar{t}(\bar{R}) = \frac{\bar{n}_0 b_{fn} + b_{mn}}{\bar{q}} \int_1^{\bar{R}} \Psi_k(\xi) d\xi. \quad (30)$$

Кроме того, величины  $G_f(\bar{R})$  и  $G_m(\bar{R})$  описываются следующими выражениями:

$$G_f(\bar{R}) = \frac{b_{fn} \bar{q}}{(\bar{n}_0 b_{fn} + b_{mn})(\bar{R} - 1)}, \quad G_m(\bar{R}) = \frac{b_{mn} \bar{q}}{(\bar{n}_0 b_{fn} + b_{mn})(\bar{R} - 1)}.$$

Из уравнения (23) получим точную зависимость относительного понижения во втором континууме от параметра  $\bar{S}_f$ :

$$\bar{S}_m(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{\lambda} e^{-\bar{\lambda} \bar{t}} \int_0^{\bar{t}} e^{\bar{\lambda} \xi} \bar{S}_f(\bar{r}, \bar{R}(\xi)) d\xi. \quad (31)$$

Для вычисления конкретных значений функции  $\bar{S}_m(\bar{r}, \bar{t})$  необходимо заменить в выражении (31) переменную интегрирования  $\bar{t}$  на  $\bar{R}$  с использованием зависимости (30). Кроме того, следует учесть, что в соответствии с формулой (30)

$$\frac{d\bar{t}}{d\bar{R}} = \frac{\bar{n}_0 b_{fn} + b_{mn}}{\bar{q}} \Psi_k(\bar{R}). \quad (32)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\bar{S}_m(\bar{r}, \bar{R}) &= \bar{\lambda} e^{-\lambda \bar{i}(\bar{R})} \int_1^{\bar{R}} e^{\bar{\lambda} \varsigma(\eta)} \bar{S}_f(\bar{r}, \eta) \frac{d\varsigma}{d\eta} d\eta = \\ &= \frac{\bar{\lambda}(\bar{n}_0 b_{fn} + b_{mn})}{\bar{q}} e^{-\lambda \bar{i}(\bar{R})} \int_1^{\bar{R}} e^{\bar{\lambda} \varsigma(\eta)} \Psi_k(\eta) \bar{S}_f(\bar{r}, \eta) d\eta.\end{aligned}\quad (33)$$

Интенсивность фильтрационного процесса в трещиновато-пористой среде, прежде всего, определяется проницаемостью системы макропор-трещин. В связи с этим важное значение приобретает величина критического давления  $p_{cr}$  или критического понижения  $S_{cr}$ , при достижении которой пластовым давлением происходит схлопывание (закрытие) трещин. В рамках сформулированной выше модели это означает прекращение фильтрации жидкости. В действительности флюид все-таки будет течь к местам фильтрационной разгрузки через последовательность блоков по микропорам. Однако скорость такого течения оказывается настолько малой, что учитывать ее в инженерных расчетах не имеет смысла. В зависимости от величины  $p_{cr}$ , при описании пропускной способности рассматриваемой среды возможны две характерные ситуации.

В первой из них  $p_{cr}$  находится вне рабочего диапазона давлений. Тогда стандартное значение понижения  $S_0$  (при  $S_f = S_0$ ,  $f_k = 1$ ) можно вообще не связывать с  $S_{cr}$  и рекомендовать для  $f_k(\bar{S}_f)$  следующие аппроксимационные выражения [35–40]:

$$f_k(\bar{S}_f) = 1 - a_k(\bar{S}_f - \bar{S}_0), \quad (34)$$

$$f_k(\bar{S}_f) = e^{-\gamma_k(\bar{S}_f - \bar{S}_0)}. \quad (35)$$

Очевидно, что в случае (34) при откачке флюида трещины не будут закрываться, если  $S_{cr} \geq S_{fw}$ , где  $S_{fw, \max}$  — понижение на забое в конце эксплуатационного периода.

Во второй ситуации в ходе откачки понижение на забое достигнет  $S_{cr}$ , что приведет к преждевременной остановке скважины. Тогда для формализации характеристики  $k_f$  целесообразно изначально воспользоваться выражением

$$k_f = k_{f\infty} \left( \frac{p_f - p_{cr}}{p_\infty - p_{cr}} \right)^\delta, \quad (36)$$

где  $k_{f\infty}$  — проницаемость континуума трещин в невозмущенном пласте,  $p_f$  и  $p_\infty$  — текущее и исходное пластовое давление,  $\delta$  — эмпирический коэффициент ( $\delta \geq 0$ ).

В последующих выкладках будет использовано соотношение (36), представленное относительно соответствующих понижений:

$$k_f = k_{f\infty} f_k(\bar{S}_f, \bar{S}_{cr}, \delta) = k_{f\infty} \left( \frac{\bar{S}_{cr} - \bar{S}_f}{\bar{S}_{cr}} \right)^\delta. \quad (37)$$

Далее полученное выше аналитическое решение исходной задачи, выраженное зависимостями (19) и (29), конкретизируется с использованием предложенных трех представ-



лений  $f_k(S_f)$  (34)–(37). Таким образом, в случае (34) справедливо

$$F_k(\bar{S}_f) = \bar{S}_f - \bar{S}_0 - \frac{a_k}{2}(\bar{S}_f - \bar{S}_0)^2, \quad F_k(0) = -\bar{S}_0 - \frac{a_k}{2}\bar{S}_0^2,$$

$$\bar{S}_f(\bar{r}, \bar{R}) = \bar{S}_0 + \frac{1}{a_k} \left[ 1 - \sqrt{(1 - a_k\bar{S}_0)^2 - 2a_k\bar{q} \frac{\bar{r} - \bar{R} - \bar{R} \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}}}{\bar{R} - 1}} \right], \quad (38)$$

$$\psi_k(\bar{r}, \bar{R}) = \frac{\bar{q} \left( \bar{R} - \bar{r} + \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}} \right)}{(\bar{R} - 1)^{3/2} \sqrt{(1 - a_k\bar{S}_0)^2(\bar{R} - 1) - 2a_k\bar{q} \left( \bar{r} - \bar{R} - \bar{R} \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}} \right)}}. \quad (39)$$

Используя совместно соотношения (21) и (39), находим  $\Psi_k(\bar{R})$ . Привлечение равенства (29) позволяет рассчитать изменение  $\bar{R}$  со временем.

При экспоненциальной зависимости (35) эти же величины находим следующим образом:

$$F_k(\bar{S}_f) = -\frac{1}{\gamma_k} e^{-\gamma_k(\bar{S}_f - \bar{S}_0)}, \quad F_k(0) = -\frac{1}{\gamma_k} e^{\gamma_k\bar{S}_0},$$

$$\bar{S}_f(\bar{r}, \bar{R}) = \bar{S}_0 - \frac{1}{\gamma_k} \ln \left( e^{\gamma_k\bar{S}_0} - \gamma_k\bar{q} \frac{\bar{r} - \bar{R} - \bar{R} \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}}}{\bar{R} - 1} \right), \quad (40)$$

$$\psi_k(\bar{r}, \bar{R}) = -\bar{q} \frac{\bar{R} - \bar{r} + \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}}}{(\bar{R} - 1) \left[ e^{\gamma_k\bar{S}_0}(\bar{R} - 1) - \gamma_k\bar{q} \left( \bar{r} - \bar{R} - \bar{R} \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}} \right) \right]}. \quad (41)$$

Наконец, для случая (37) получаем

$$F_k(\bar{S}_f) = -\frac{1}{(1 + \delta)\bar{S}_{cr}^\delta} (\bar{S}_{cr} - \bar{S}_f)^{\delta+1}, \quad F_k(0) = -\frac{\bar{S}_{cr}}{1 + \delta},$$

$$\bar{S}_f(\bar{r}, \bar{R}) = \bar{S}_{cr} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\bar{q}(1 + \delta)}{\bar{S}_{cr}^\delta} \frac{\bar{r} - \bar{R} - \bar{R} \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}}}{\bar{R} - 1} \right]^{1/(1+\delta)} \right\}, \quad (42)$$

$$\psi_k(\bar{r}, \bar{R}) = \bar{q} \frac{\bar{R} - \bar{r} + \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}}}{(\bar{R} - 1)^2} \left[ 1 - \frac{\bar{q}(1 + \delta)}{\bar{S}_{cr}^\delta} \frac{\bar{r} - \bar{R} - \bar{R} \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}}}{\bar{R} - 1} \right]^{-\delta/(1+\delta)}. \quad (43)$$

#### 4. ВТОРАЯ СТАДИЯ

Вторая стадия начинается в момент  $t_*$  достижения фронтом возмущения  $r = R$  внешней непроницаемой границы разрабатываемого пласта, которая имеет цилиндрическую форму и радиус  $R_*$ . Поскольку  $t_*$  является временем окончания первой стадии,

его относительное значение предлагается вычислять по формуле (30):

$$\bar{t}_* = \frac{\bar{n}_0 b_{fn} + b_{mn}}{\bar{q}} \int_1^{\bar{R}_*} \Psi_k(\bar{R}) d\bar{R}. \quad (44)$$

Постановка исходной математической задачи (8), (9), (11)–(13) в связи с переходом от первой стадии ко второй претерпевает незначительные изменения. Во-первых, на внешней границе сохраняется только условие непротекания, а именно,

$$\bar{r} = \bar{R}_*, \quad \frac{\partial \bar{S}_{f2}}{\partial \bar{r}} = 0. \quad (45)$$

Во-вторых, меняются начальные условия, которые теперь должны описывать профили относительных понижений на момент времени  $\bar{t}_*$ . В общем случае они имеют вид

$$\bar{t}_2 = 0, \quad \bar{S}_{f2,m2} = \bar{S}_{f,m}^0(\bar{r}). \quad (46)$$

Здесь и далее отсчет времени  $\bar{t}_2$  ведется с момента окончания первой стадии. Индекс «2» в обозначениях для понижений и времени использован для того, чтобы четко разграничить результаты теоретического анализа, полученные применительно к первой и второй стадиям. Итак, согласно формуле (19)

$$\bar{S}_f^0(\bar{r}) = F_k^{-1} \left[ F_k(0) - \bar{q} \frac{\bar{r} - \bar{R}_* - \bar{R}_* \ln \frac{\bar{r}}{\bar{R}_*}}{\bar{R}_* - 1} \right], \quad (47)$$

а, исходя из соотношения (33),

$$\bar{S}_m^0(\bar{r}) = \frac{\bar{\lambda}(\bar{n}_0 b_{fn} + b_{mn})}{\bar{q}} e^{-\bar{\lambda} \bar{t}_*} \int_1^{\bar{R}_*} e^{-\bar{\lambda} \zeta(\eta)} \Psi_k(\eta) \bar{S}_f(\bar{r}, \eta) d\eta. \quad (48)$$

Двойное интегрирование уравнения (8) с учетом соотношений (14) и условий (11), (45) дает для  $\bar{S}_{f2}$  такое выражение:

$$\bar{S}_{f2}(\bar{r}, \bar{t}_2) = F_k^{-1} \left[ F_k(0) - \bar{q} \frac{\bar{r} - \bar{R}_* \ln \bar{r}}{\bar{R}_* - 1} - B(\bar{t}_2) \right]. \quad (49)$$

В то же время, из формул (9), (20), (49) вытекает, что

$$\bar{S}_{m2}(\bar{r}, \bar{t}_2) = e^{-\bar{\lambda} \bar{t}_2} \left[ \bar{S}_m^0(\bar{r}) + \bar{\lambda} \int_0^{\bar{t}_2} e^{\bar{\lambda} \xi} F_k^{-1} \left[ F_k(0) - \bar{q} \frac{\bar{r} - \bar{R}_* \ln \bar{r}}{\bar{R}_* - 1} - B(\xi) d\xi \right] \right]. \quad (50)$$

Неизвестная переменная величина  $B_2(\bar{t}_2)$  находится из баланса флюида в области фильтрации к концу расчетного периода:

$$\int_0^{\bar{t}_2} \int_1^{\bar{R}_*} \frac{\partial \bar{q}_r}{\partial \bar{r}} d\bar{r} d\bar{t} + \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \int_0^{\bar{t}_2} \left( \bar{n}_0 \frac{\partial f_{fn}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial f_{mn}}{\partial \bar{r}} \right) d\bar{t} d\bar{r} = 0. \quad (51)$$

Из соотношения (51) в общем случае вытекает следующее равенство:

$$\int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \{ \bar{n}_0 [f_{fn}(\bar{S}_{f2}(\bar{r}, B)) - f_{fn}(0)] + f_{mn}(\bar{S}_{m2}(\bar{r}, B)) - f_{mn}(0) \} d\bar{r} + \bar{q}\bar{t}_2 = 0, \quad (52)$$

которое с учетом соотношений (20) принимает вид

$$\int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \{ \bar{n}_0 b_{fn} [\bar{S}_{f2}(\bar{r}, B) - \bar{S}_f^0(\bar{r})] + b_{mn} [\bar{S}_{m2}(\bar{r}, B) - \bar{S}_m^0] \} d\bar{r} = \bar{q}\bar{t}_2. \quad (53)$$

Дифференцирование обеих частей интегрального уравнения (53) по  $\bar{t}$  позволяет получить уже дифференциальное уравнение относительно  $B$ , а именно,

$$\int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \left\{ \bar{n}_0 b_{fn} \left[ \frac{\partial \bar{S}_{f2}}{\partial B}(\bar{r}, B) \frac{dB}{d\bar{t}_2} - \bar{\lambda} \bar{S}_f^0(\bar{r}) + \bar{\lambda} \bar{S}_{f2}(\bar{r}, B) \right] + \right. \\ \left. + b_{mn} \bar{\lambda} \left[ F^{-1} \left\{ F_k(0) - \bar{q} \frac{\bar{r} - \bar{R}_* \ln \bar{r}}{\bar{R}_* - 1} - B(\bar{t}_2) - \bar{S}_m^0(\bar{r}) \right\} \right] \right\} d\bar{r} = \bar{q}(1 + \lambda \bar{t}_2). \quad (54)$$

Начальное значение  $B_0 = B(0)$  предлагается находить из уравнения

$$\bar{n}_0 b_{fn} \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \bar{S}_{f2}(\bar{r}, B_0) d\bar{r} + b_{mn} \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \bar{S}_{m2}(\bar{r}, B_0) d\bar{r} = \bar{q}\bar{t}_2. \quad (55)$$

В частном случае малости величины и изменений пористости первого континуума ( $b_{fn} \approx 0$ ) для определения величины  $B$  достаточно решить алгебраическое уравнение

$$b_{mn} \bar{\lambda} \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \left\{ F_k^{-1} \left[ F_k(0) - \bar{q} \frac{\bar{r} - \bar{R}_* \ln \bar{r}}{\bar{R}_* - 1} - B(\bar{t}) \right] - \bar{S}_m^0(\bar{r}) \right\} d\bar{r} = \bar{q}(1 + \lambda \bar{t}_2). \quad (56)$$

Запишем уравнение (56) для трех ранее выбранных случаев задания зависимости  $f_k(\bar{S}_f)$ . Так, при линейной ее форме (34) будет

$$2 \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \sqrt{1 - 2a_k \bar{q} \frac{\bar{r} - \bar{R}_* \ln \bar{r}}{\bar{R}_* - 1} - 2a_k B(\bar{t}_2)} d\bar{r} = (1 + a_k \bar{S}_0)(\bar{R}_*^2 - 1) - \frac{2a_k \bar{q}}{\bar{\lambda} b_{mn}} (1 + \bar{\lambda} \bar{t}_* + \bar{\lambda} \bar{t}_2), \quad (57)$$

а при экспоненциальной (35) —

$$2 \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \ln \left[ \frac{\gamma_k \bar{q}}{\bar{R}_* - 1} (\bar{R}_* \ln \bar{r} - \bar{r}) - B(\bar{t}_2) \right] d\bar{r} = \gamma_k \bar{S}_0 (\bar{R}_*^2 - 1) - \frac{2\gamma_k \bar{q}}{\bar{\lambda} b_{mn}} (1 + \bar{\lambda} \bar{t}_* + \bar{\lambda} \bar{t}_2) / \quad (58)$$

Если учесть критическое понижение и возможное схлопывание трещин в ходе откачки, то получим

$$2 \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \left[ \frac{\bar{q}(1+\delta)\bar{S}_{cr}^\delta}{\bar{R}_* - 1} (\bar{R}_* \ln \bar{r} - \bar{r}) - B(\bar{t}_2) \right]^{1/(1+\delta)} d\bar{r} = \bar{S}_{cr}(\bar{R}_*^2 - 1) - \frac{2\bar{q}}{\lambda b_{mn}}(1 + \lambda \bar{t}_* + \lambda \bar{t}_2). \quad (59)$$

При этом начальные значения  $B_0$  определяются путем подбора из следующих уравнений:

$$2 \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \sqrt{1 - 2a_k \bar{q} \frac{\bar{r} - \bar{R}_* \ln \bar{r}}{\bar{R}_* - 1} - 2a_k B_0} d\bar{r} = (1 + a_k \bar{S}_0)(\bar{R}_*^2 - 1) - \frac{2a_k \bar{q}}{\lambda b_{mn}}(1 + \lambda \bar{t}_*), \quad (60)$$

$$-2 \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \ln \left[ \frac{\gamma_k \bar{q}}{\bar{R}_* - 1} (\bar{R}_* \ln \bar{r} - \bar{r}) - B_0 \right] d\bar{r} + \gamma_k \bar{S}_0 (\bar{R}_*^2 - 1) = \frac{2\gamma_k \bar{q}}{\lambda b_{mn}} \quad (61)$$

и

$$2 \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \left[ \frac{\bar{q}(1+\delta)\bar{S}_{cr}^\delta}{\bar{R}_* - 1} (\bar{R}_* \ln \bar{r} - \bar{r}) - B_0 \right]^{1/(1+\delta)} d\bar{r} = \bar{S}_{cr}(\bar{R}_*^2 - 1) - \frac{2\bar{q}}{\lambda b_{mn}}(1 + \lambda \bar{t}_*) \quad (62)$$

соответственно.

Следует заметить, что начальные значения  $B_0$ , найденные из уравнений (60)–(62) могут заметно отличаться от величин  $B_{0*}$ , определенных из равенства величин  $\bar{S}_f$  и  $\bar{S}_{f2}$  при  $\bar{t} = \bar{t}_*$  ( $\bar{t}_2 = 0$ ). Такая нестыковка объясняется особенностью, которую имеют функции  $\partial \bar{S}_{f,m}(\bar{t})/\partial \bar{t}$  при формальном переходе от одной стадии фильтрационного процесса к другой. Действительно, на первой из них на фронте возмущения они равны нулю, а на второй при  $\bar{r} = \bar{R}_*$  — строго положительны. Возможные при этом ошибки в расчетах со временем нивелируются. Поскольку вычисления на второй стадии рекомендуется выполнять на базе уравнений (57)–(59), то логично из них же подбирать и  $B_0$ , хотя отвечающая ему функция  $\bar{S}_{f2}(\bar{r}, B_0)$  и окажется несколько больше, чем  $\bar{S}_f(\bar{r}, \bar{t}_*)$ .

После установления с помощью уравнений (57)–(59) закономерности изменения  $B$  во времени динамику относительного понижения на забое можно рассчитывать по одной из следующих трех формул: в случае (34)

$$\bar{S}_{fw}(\bar{t}_2) = \bar{S}_0 + \frac{1}{\bar{a}_k} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2a_k \bar{q}}{\bar{R}_* - 1} - 2a_k B(\bar{t}_2)} \right], \quad (63)$$

в случае (35)

$$\bar{S}_{fw}(\bar{t}_2) = \bar{S}_0 - \frac{1}{\gamma_k} \ln \left[ e^{j_k \bar{S}_0} - \frac{\gamma_k \bar{q}}{\bar{R}_* - 1} - \gamma_k B(\bar{t}_2) \right], \quad (64)$$

в случае (37)

$$\bar{S}_{fw}(\bar{t}_2) = \bar{S}_{cr} \left\{ 1 - \left[ \frac{\bar{q}(1+\delta)}{\bar{S}_{cr}(\bar{R}_* - 1)} (\bar{R}_* \ln \bar{r} - \bar{r}) - B(\bar{t}_2) \bar{S}_{cr}^{-1-\delta} \right]^{1/(1+\delta)} \right\}. \quad (65)$$

## 5. КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Полученное аналитическое решение нелинейной задачи о неустановившемся притоке флюида с постоянным расходом к (не)совершенной скважине в однородном трещиновато-пористом пласте проиллюстрируем примерами с разнообразными исходными данными, охватывающими как нормальные, так и критические условия. Предметом расчетов стали относительные величины, способные в совокупности дать полную картину развития фильтрационного режима при его возмущении сосредоточенным стоком с заданной интенсивностью. К ним, в частности, относятся радиус зоны возмущения, понижения напора внутри пласта и на его внутренней границе в континуумах макропор и матрицы (микропор). Количественный анализ выполнялся последовательно на первой и второй стадиях фильтрационного процесса. При этом исходные параметры либо фиксировались изначально ( $\bar{q}$ ,  $\bar{S}_0$ ,  $\bar{S}_{cr}$ ,  $\bar{n}_0 b_{fn} + b_{fm}$ ), либо варьировались — дискретно ( $\bar{R}_*$ ,  $a_k$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\delta$ ) или непрерывно ( $a_k$ ,  $\bar{\lambda}$ ). Для обобщения результатов вычислений и сокращения числа задействованных в них параметров параллельно использовалось так называемое приведенное время  $\tilde{t}$ , которое связано с безразмерным временем следующим образом:

$$\tilde{t} = \frac{\bar{n}_0 b_{fn} + b_{mn}}{\bar{q}} \bar{t}.$$

Повышенное внимание было уделено действию скважины в особо неблагоприятных ситуациях, когда удельный объем макропор существенно сокращается и, как следствие, проницаемость их системы падает. С этой целью рассмотрены разные варианты аппроксимации функции проницаемости, реально отражающие возможность или невозможность схлопывания (полного закрытия) трещин в ходе интенсивной откачки флюида. Уместно заметить, что подбор соответствующего параметра сжатия  $\delta$  в выражении (37) позволяет учесть индивидуальный (ускоренный или замедленный) характер уменьшения проницаемости породы при стремлении понижения к критическому значению.

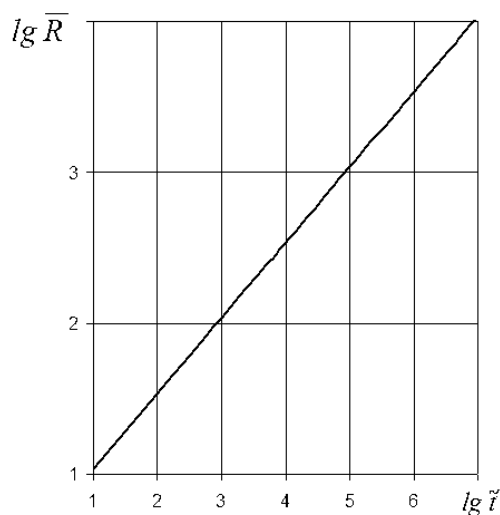


Рис. 1. Расширение зоны возмущения со временем

Рис. 1. Расширение зоны возмущения со временем

В первую очередь, рассчитывалось положение фронта возмущения как функция от  $\lg \tilde{t}$ . Эта связь имеет основополагающее значение для последующих вычислений функций понижений, поскольку решение исходной задачи получено в параметрической форме, а параметром в нем как раз и является радиус  $\bar{R}$ . Кривая, обобщающая полученные при этом данные, изображена на Рис. 1. Она является универсальной в том смысле, что отражает устойчивую существенную взаимосвязь, которая существует только между  $\bar{R}$  и  $\tilde{t}$ . Конечно, расчетные время и радиус связаны также с некоторыми параметрами задачи ( $\bar{q}$ ,  $\bar{S}_0$  и  $a_k$  в случае (34)), однако эти зависимости выражены достаточно слабо. Это дает основание для того, чтобы считать обсуждаемую кривую универсальной. Достаточно отметить, что формальное увеличение  $a_k$  и  $\bar{q}$  в пять раз обу-

словливает изменение  $\bar{R}$  менее, чем на 2%. В то же время, параметр  $a_k$  для развития зоны возмущения существенно влияет на время продуктивной работы скважины.

Следует отметить, что предельные характеристики  $\bar{R}_u, \bar{t}_u$ , характеризующие фильтрационный режим пласта в момент локального полного закрытия трещин и сам момент закрытия, сравнительно просто определяются с привлечением условия прекращения макрофильтрации. Поскольку при схлопывании трещин проводимость их континуума обращается в нуль, то, например, в случае представления (34) для  $f_k(\bar{S}_f)$  относительное предельное понижение  $\bar{S}_{fu}$  будет

$$\bar{S}_{fu} = \bar{S}_0 + \frac{1}{a_k}. \quad (66)$$

Очевидно, что, прежде всего, закроются макропоры непосредственно около добывающей скважины. Поэтому из соотношений (38) следует простое уравнение для нахождения методом подбора величины  $\bar{R}_u$ :

$$2a_k\bar{q}(1 - \bar{R}_u + \bar{R}_u \ln \bar{R}_u) = (1 - a_k\bar{S}_0)^2(\bar{R}_u - 1). \quad (67)$$

Как правило  $\bar{R}_u \gg 1$ . Тогда с минимальной погрешностью можно считать, что

$$\bar{R}_u = \exp \left[ 1 + \frac{(1 - a_k\bar{S}_0)^2}{2a_k\bar{q}} \right].$$

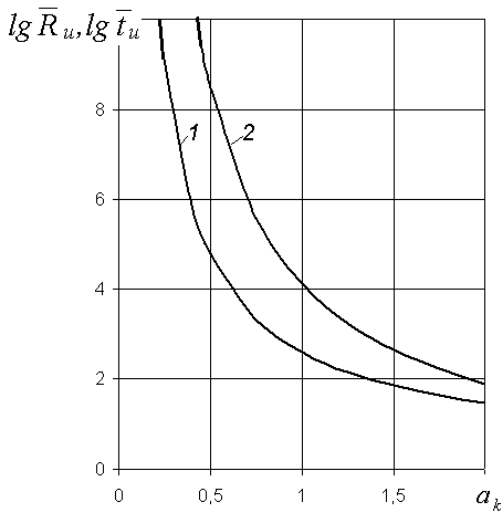


Рис. 2. Зависимости  $\bar{R}_u(a_k), \bar{t}_u(a_k)$ :

$$1 - \lg \bar{R}_u; 2 - \lg \bar{t}_u \quad 2a_k\bar{q}(\bar{R}_* \ln \bar{R}_* - \bar{R}_* + 1) > \bar{R}_* - 1,$$

а, с учетом  $\bar{R}_u \gg 1$ ,

$$2a_k\bar{q}(\ln \bar{R}_* - 1) > 1.$$

Относительное время достижения фильтрационным режимом предельного состояния  $\bar{t}_u$  в течение первой стадии вычисляется с учетом выражений (30) и (65) по формуле

$$\bar{t}_u = \frac{\bar{n}_0 b_{fn} + b_{mn}}{\bar{q}} \int_1^{\bar{R}_u} \Psi_k(\xi) d\xi, \quad (69)$$

Если схлопывание трещин около скважины не произойдет на первой стадии, это может случиться на второй стадии. При этом, согласно зависимости (64), максимальному значению  $\bar{S}_{f2u}$  будет отвечать наибольшее из возможных значение  $B_m$ , вычисляемое по формуле

$$B_m = \frac{1}{2a_k} - \frac{\bar{q}}{\bar{R}_* - 1}. \quad (68)$$

Отметим, что вторая стадия вообще начнется только при выполнении условий

$$B_m > B_0, \quad \bar{R}_u > \bar{R}_*,$$

что эквивалентно такому соотношению между параметрами задачи:

а в течение второй стадии — по формуле

$$\bar{t}_u = \frac{b_{mn}}{2a_k\bar{q}} \left[ (1 + a_k\bar{S}_0)(\bar{R}_*^2 - 1) - 2 \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} \sqrt{\bar{R}_* \ln \bar{r} - \bar{r} + 1} d\bar{r} \right] - \frac{1}{\lambda}. \quad (70)$$

Тесную связь предельных характеристик с упругими свойствами системы макропор подтверждает Рис. 2, на котором в графической форме показаны зависимости  $\bar{R}_u$  и  $\bar{t}_u$  от параметра  $a_k$ , рассчитанные применительно к первой стадии по формулам (67) и (69). Очевидна высокая чувствительность указанных характеристик к  $a_k$  при  $a_k < 1$ . При проведении экспериментальных исследований с целью определения модельных параметров полезно иметь в виду равенство  $f_k$  и  $f_{fn}$  в момент схлопывания трещин. Так как  $f_k(\bar{S}_{cr}) = f_{fn}(\bar{S}_{cr}) = 0$ , то при линейном характере соответствующих аппроксимационных выражений оказывается справедливым  $a_k = f_{fn}$ . В действительности серьезные отличия между функциями  $k_f(S_f)$  и  $n_f(S_f)$  обусловлены значимой разницей между их масштабами —  $k_{fo}$  (или  $k_{f\infty}$ ) и  $n_{fo}$ .

Если же принять представление (37), то в соответствии с физическим смыслом критического понижения будет  $\bar{S}_{fu} = \bar{S}_{cr}$ . Предельное положение фронта возмущения на первой стадии предлагается находить из уравнения

$$\bar{q}(1 + \delta)(\bar{R}_u \ln \bar{R}_u - \bar{R}_u + 1) = \bar{S}_{cr}(\bar{R}_u - 1). \quad (71)$$

Время фактической остановки скважины на протяжении второй стадии фильтрационного процесса следует вычислять по формуле

$$\bar{t}_u = \frac{b_{mn}}{2\bar{q}} \left\{ \bar{S}_{cr}(\bar{R}_*^2 - 1) - 2 \left[ \frac{\bar{q}(1 + \delta)}{\bar{R}_* - 1} \right]^{1/(1+\delta)} \bar{S}_{cr}^{\delta/(1+\delta)} \int_1^{\bar{R}_*} \bar{r} (\bar{R}_* \ln \bar{r} - \bar{r} + 1)^{1/(1+\delta)} d\bar{r} \right\} - \frac{1}{\lambda}. \quad (72)$$

Рис. 3 отражает характер изменения понижения в пределах зоны возмущения. Здесь показаны профили понижения в континууме трещин, рассчитанные по формуле (38) в четыре фиксированных момента времени при  $a_k = 0.75$ . Соответствующие им значения  $\bar{R}$  вычислялись из уравнения (30) методом подбора. Кривая 1 является предельной, так как отвечает предельному значению времени  $\bar{t}_u$  и ограничивает семейство всех аналогичных профилей сверху. Предельный профиль сформировался непосредственно перед резким уменьшением интенсивности фильтрационного процесса и фактической остановкой скважины, поэтому продолжать ее эксплуатацию нецелесообразно. Очевидно, что лишено практического смысла и последующее моделирование указанного процесса. Кстати, оно значительно осложняется возможностью кратковременного восстановления давления на забое в первом континууме и, как следствие, частичного раскрытия трещин.

Рис. 3 позволяет сделать вывод о постоянном нарастании забойного понижения. Однако полное представление о его поведении вплоть до величины  $\bar{S}_{fu}$  дает Рис. 4, демонстрирующий прирост  $\bar{S}_{fu}$  с течением времени при разных упругих свойствах пласта. Кривые 1 и 2 ограничены сверху значениями 0.798 и 1, которые достигаются при  $\bar{t} = 1760$  и  $5 \cdot 10^4$  и могут трактоваться как критические. Вообще же, между  $a_k$  и  $\bar{S}_{cr}$

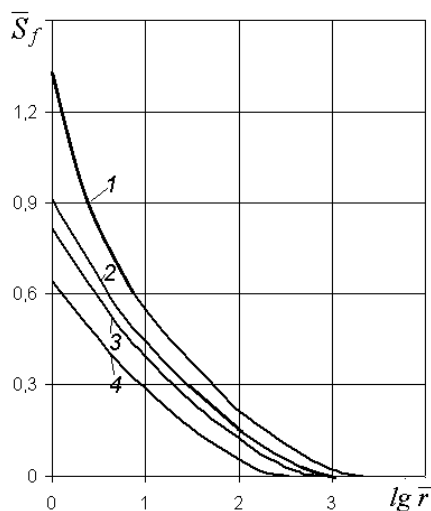


Рис. 3. Профили относительного понижения в зоне возмущения:

$$1 - \tilde{t} = \tilde{t}_u = 3.825 \cdot 10^5; 2 - \tilde{t} = 10^5, 3 - \tilde{t} = 5 \cdot 10^4; 4 - \tilde{t} = 10^4$$

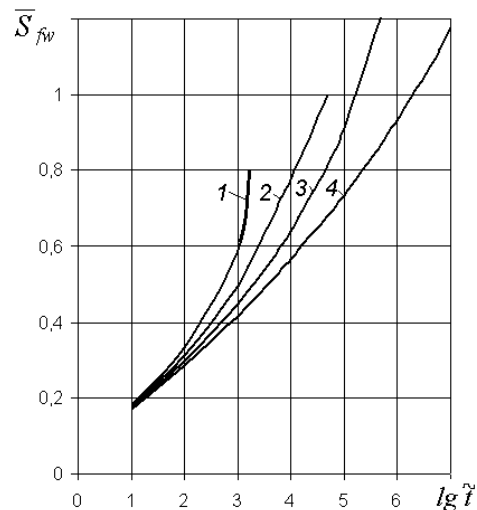


Рис. 4. Рост относительного понижения на забое со временем:

$$1 - a_k = 1.25; 2 - a_k = 1; 3 - a_k = 0.75; 4 - a_k = 0.5$$

несложно установить однозначное соответствие, которое в случае (37) и  $\delta = 1$  будет

$$\bar{S}_{cr} = \bar{S}_0 + \frac{1}{a_k}.$$

Поэтому кривая 2 на Рис. 4 дублирует кривую 2 на Рис. 5, где представлены зависимости  $\bar{S}_{fw}(\lg \tilde{t})$ , рассчитанные по формуле (42) при трех значениях  $\delta$  (включая  $\delta = 1$ ) и  $\bar{S}_{cr} = 1$ . Отсюда видно, что изменение показателя  $\delta$  в два раза существенно сказывается на динамике забойного понижения. Так, при увеличении  $\delta$  время эффективной работы скважины ограничено значением  $\tilde{t}_u = 471.1$  (кривая 1). При аналогичном уменьшении  $\delta$  имеем  $\tilde{t}_u = 3.845 \cdot 10^5$ . Поэтому для анализа результативности действия скважины особенно важно иметь возможность надежно прогнозировать пропускную способность системы макропор и последствия ее изменения.

Поведение функции понижения в матричном континууме  $\bar{S}_m(\bar{r}, \bar{t})$  носит более сложный характер вследствие существенного влияния на него не только фильтрационных свойств первого континуума, но и обменного процесса (в рассматриваемом случае — притока флюида из второго континуума в первый). Последний характеризуется коэффициентом  $\lambda$ , который в рассмотренных примерах изменялся на четыре порядка. Результаты вычислений величины  $\bar{S}_m$  в окрестности скважины ( $\bar{r} = 1$ ), полученные по формуле (33) при  $a_k = 0.5$ ,  $\bar{n}_0 b_{fn} + b_{mn} = 0.005$ , приведены на Рис. 6. Очевидно, что существенный рост понижения  $\bar{S}_{mw}$  начинается не сразу, а со значительным запаздыванием, длительность которого определяется обменным коэффициентом. По истечении большого времени и при не слишком малых значениях  $\bar{\lambda}$  (в рассчитанных примерах —  $\tilde{t} > 10^6$ ,  $\bar{\lambda} > 0.001$ ) оба понижения практически сравниваются и дальше растут синхронно вплоть до предельного момента  $\tilde{t}_u$ .

Анализ действия совершенной скважины на второй стадии фильтрационного процес-



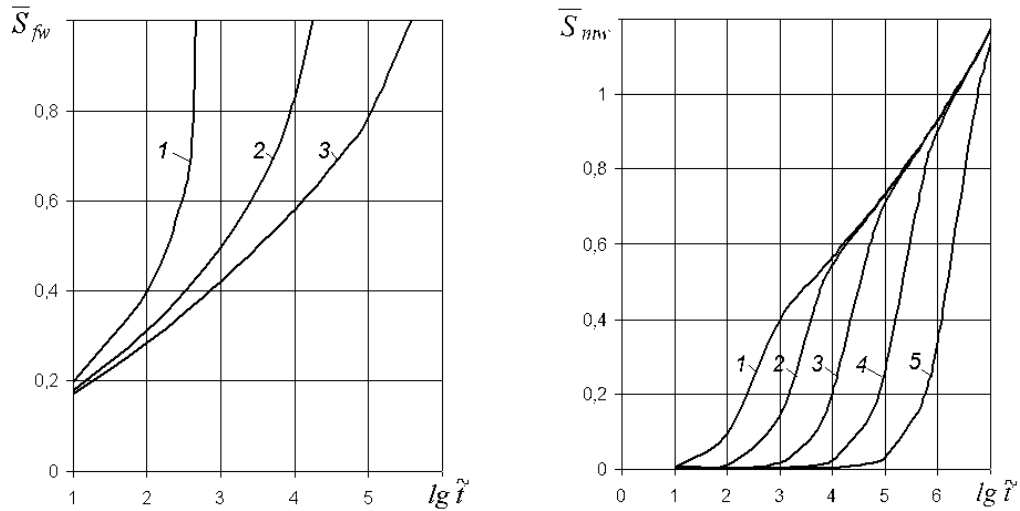


Рис. 5. Рост относительного понижения на забое со временем:

$$1 - \delta = 2; 2 - \delta = 1; 3 - \delta = 0.5$$

Рис. 6. Рост относительного понижения у скважины в континууме матрицы со временем:

$$1 - \bar{\lambda} = 1; 2 - \bar{\lambda} = 0.1; 3 - \bar{\lambda} = 0.01; 4 - \bar{\lambda} = 0.001; 5 - \bar{\lambda} = 0.0001$$

са выполнялся с момента времени  $\bar{t}_*$ , который определялся по формуле (30) при  $\bar{R} = \bar{R}_*$ . Вычисления несколько упростились благодаря частичному учету упругих свойств континуума трещин. При этом принималось во внимание только снижение проницаемости системы макропор в ходе откачки флюида — в равенстве (34) полагалось  $a_k = 0.5$ . При этом игнорировалось сопутствующее изменение ее емкости ( $b_{fn} = 0$ ). Таким образом, функциональный параметр  $B(\bar{t}_2)$  определялся подбором из уравнения (57), а его значение при  $\bar{t}_2 = 0$  — из уравнения (60).

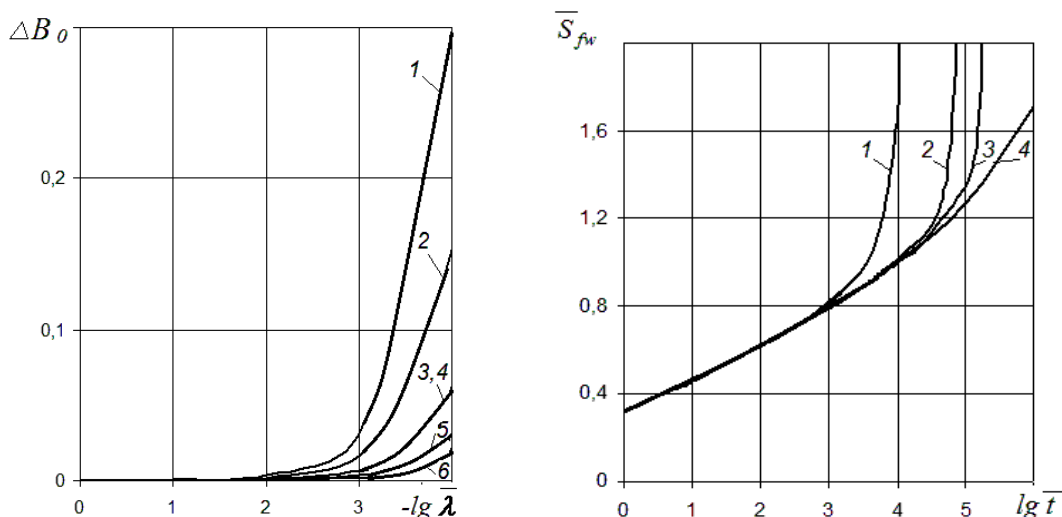
Из равенства величин  $\bar{S}_f(\bar{r}, \bar{t}_*)$  и  $\bar{S}_{f2}(\bar{r}, B_0)$  в случае (34) несложно получить альтернативное выражение для  $B_0$ :

$$B_{0*} = \bar{S}_0 - \frac{a_k}{2} \bar{S}_0^2 + \bar{q} \bar{R}_* \frac{\ln \bar{R}_* - 1}{\bar{R}_* - 1}. \quad (73)$$

Следует заметить, что вычисленные двумя различными способами значения  $B_0$  различаются в принципе, поскольку уже изначально зависят от разного количества модельных параметров. Для оценки этих отличий определялось отношение

$$\Delta B_0 = \frac{B_0 - B_{0*}}{B_{0*}},$$

тракуемое как функция от  $\bar{\lambda}$  при  $\bar{q} = 0.1$ ,  $\bar{S}_0 = 0$ . При этом варьировались параметры  $\bar{R}_*$ ,  $b_{mn}$  и  $a_k$ . Как видно из Рис. 7, на котором представлено семейство кривых  $\Delta B_0(-\lg \bar{\lambda}, \bar{R}_*, b_{mn}, a_k)$ , ощутимые (свыше 5%) различия в оценках  $B_0$  на основе двух указанных подходов наблюдаются при  $\bar{\lambda} \leq 0.0005$ . Причиной этого является скачкообразное изменение  $\partial S_{f,m}/\partial t$  при переходе от первой стадии моделируемого процесса ко второй. Действительно, в течение первой стадии на фронте возмущения, вплоть до ее


 Рис. 7. Зависимость  $\Delta B_0(-\lg \bar{\lambda})$ :

1–5 –  $\bar{R}_* = 3000$ ; 6 –  $\bar{R}_* = 5000$ ; 1 –  $b_{mn} = 0.001$ ; 2 –  $b_{mn} = 0.002$ ;  
 3, 4, 6 –  $b_{mn} = 0.005$ ; 6 –  $b_{mn} = 0.01$ ; 1–3, 5, 6 –  $a_k = 0.5$ ; 4 –  $a_k = 0.25$

Рис. 8. Изменение относительного понижения напора в континууме трещин на забое со временем:

1 –  $\bar{R}_* = 1000$ ; 2 –  $\bar{R}_* = 3000$ ; 3 –  $\bar{R}_* = 5000$ ; 4 –  $\bar{R}_* \rightarrow \infty$

конца, на внешней границе области фильтрации эти производные равны нулю, а в начале второй — строго положительны. Заметим, однако, что подобное рассогласование в начальном условии для второй стадии будет минимальным, за исключением очень малых значений  $\bar{\lambda}$ . Это служит лишним доводом в пользу правомерности реализуемого упрощенного подхода к решению исходной задачи.

Далее на Рис. 8 демонстрируется рост величины  $\bar{S}_f$  на забое в реальном времени ( $\bar{t} = \bar{t}_* + \bar{t}_2$ ). Она рассчитывалась при разных размерах области фильтрации, включая и  $\bar{R}_* \rightarrow \infty$ , по формуле (38) на первой стадии и по формуле (63) — на второй. Значения  $\bar{S}_{fw}$  вычислялись вплоть до момента схлопывания трещин у скважин  $\bar{t}_u$ , который в данном случае находился по формуле (70). Например, при  $\bar{R}_* = 3000$  макропоры закрылись через  $\bar{t}_u = 7.3 \cdot 10^4$  после начала второй стадии. Заслуживает внимания ускоренный характер снижения напора на второй стадии (сравни кривые 1–3 с базовой кривой 4, отвечающей неограниченному в плане пласту). Исходя из этого, точка начала резкого подъема опытной кривой изменения забойного давления (понижения) может служить диагностическим признаком ограниченности фильтрационного потока и использоваться для установления его протяженности. Рис. 8 подтверждает существенность влияния размеров области фильтрации на забойное давление. Быстрое снижение напора, особенно при малых значениях  $\bar{R}_*$  (кривая 1), может приводить к раннему закрытию транзитных пор и, как следствие, падению дебита скважины.

Предельные профили понижения  $\bar{S}_{f2}(\bar{r})$  в полулогарифмических координатах, отвечающие началу второй стадии ( $\bar{t}_2 = 0$ ,  $\bar{t} = \bar{t}_*$ ) и ее концу ( $\bar{t} = \bar{t}_u$ ), изображены на Рис. 9. Особо следует отметить существенную неравномерность снижения напора в пределах области фильтрации. Она объясняется упругими свойствами первого континуума. Дей-

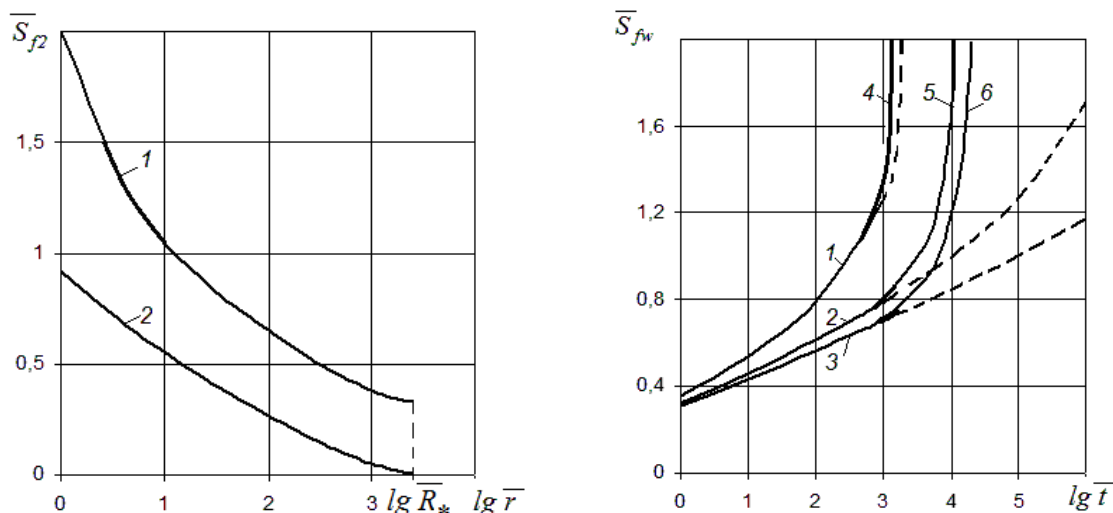


Рис. 9. Профили относительного понижения напора в континууме трещин:

$$1 - \bar{t} = \bar{t}_u; 2 - \bar{t} = \bar{t}_*$$

Рис. 10. Рост относительного понижения напора на забое со временем:

$$1-3 - \bar{R}_* \rightarrow \infty; 4-6 - \bar{R}_* = 1000, 1, 4 - \delta = 2; 2, 5 - \delta = 1; 3, 6 - \delta = 0.5$$

ствительно, за промежуток времени  $\bar{t}_u - \bar{t}_*$  понижение на забое увеличилось на 1.086, а на внешней границе указанной области — только на 0.326. В несжимаемом же пласте при  $t > t_*$  давление должно снижаться равномерно.

Рис. 10 может служить иллюстрацией к применению другого способа аппроксимации зависимости  $k(S_f)$  на второй стадии разработки скважины. Здесь показаны кривые роста забойного понижения с течением времени при тех же значениях  $\delta$ , что и на Рис. 5. Для  $\bar{S}_{cr}$  выбрано значение  $\delta = 2$ , что формально позволило существенно продлить продуктивную работу скважины за счет увеличения предельного значения  $\bar{S}_{fu}$  вдвое. Кстати, при этом также соразмерно возрастает и предельный радиус  $\bar{R}_u$ , а значит, вторая стадия успевает начаться и при заметно больших размерах области фильтрации. Расчеты велись на протяжении всего эксплуатационного периода — от пуска ( $\bar{t} = 0$ ) до закрытия трещин ( $\bar{t} = \bar{t}_u$ ) — по формулам (30), (40) на первой стадии и по (65) на второй. На Рис. 10 представлены значения  $\bar{S}_{fw}$ , начиная с момента  $\bar{t} = 1$  ( $\lg \bar{t} = 0$ ). Поэтому здесь представлены кривые 1–3, характеризующие изменения фильтрационного режима в безграничном пласте ( $\bar{R}_* \rightarrow \infty$ ). Их начальные участки (сплошные линии) описывают рост забойного понижения на первой стадии. Логичным их продолжением применительно ко второй стадии являются кривые 4–6, описывающие последующее увеличение забойного понижения в ограниченном пласте ( $\bar{R}_* = 1000$ ) вплоть до предельного значения  $\bar{S}_{fu} = 2$ . Длительность первой стадии практически одинакова для всех случаев, а длительность второй, наоборот, сильно зависит от  $\delta$ . Так, значения времени  $\bar{t}_u$ , вычисленные из соотношения (72) при  $\delta = 1$  и  $\delta = 2$ , отличаются на порядок. При больших значениях  $\delta$  влияние размеров области фильтрации на динамику забойного давления значительно ослабевает.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Образовавшиеся под действием значительных механических нагрузок, сопровождающих тектонические процессы, трещиноватые породы часто содержат в своей матрице полезный флюид. Система трещин, непосредственно служащая для его транспорта, обеспечивает продуктивную работу скважин. Высокие давления в глубоких пластах-коллекторах обуславливают расширение трещин, которые при интенсивных откачках уменьшаются. При существенном снижении давления они могут не только сжиматься, но нередко и вообще закрываться. При этом проницаемость породы резко снижается, а дебит скважины падает.

Математическое моделирование действия одиночной скважины в сжимаемой трещиновато-пористой среде целесообразно выполнять, условно вводя два континуума, которые основываются на системе трещин и матрице эксплуатируемого пласта. При этом скорость межконтинуального обмена флюидом оправдано полагать пропорциональной разнице между репрезентативными давлениями (напорами) в них. Здесь важное значение приобретает описание связи между проницаемостью первого континуума и давлением в нем. Рассмотрены три разных способа ее формализации.

Возмущение, вносимое в фильтрационный режим продуктивного пласта, распространяется с конечной скоростью, что характеризует первую стадию фильтрационного процесса. После того, как зона возмущения охватит всю область фильтрации, начинается вторая стадия, на протяжении которой давление снижается одновременно во всей области. Полученное аналитическое решение нелинейной математической задачи об откачке флюида скважиной с постоянным дебитом из сжимаемого трещиноватого пласта позволяет с высокой точностью прогнозировать изменения давления (напора) внутри пласта и на его границах. Результаты расчетов забойного давления могут успешно использоваться при интерпретации данных тестовых испытаний скважины с целью получения исходной информации о физических свойствах трещиноватого коллектора.

Проведенные расчеты на примерах с типичными исходными данными показали низкую чувствительность процесса распространения возмущения к параметрам задачи, характеризующим работу скважины, упругие свойства пласта и его начальное механическое состояние. При изменении внутрипластового давления в широких пределах большое значение для стабильной и производительной работы скважины имеет критическое давление, а также соотношение между ним и забойным давлением. Поэтому с физической точки зрения особенно важно подобрать адекватное аппроксимационное (двух- или трехпараметрическое) выражение для зависимости между проницаемостью и давлением. На второй стадии понижение давления ускоряется и происходит синхронно во всей области фильтрации. Процесс откачки флюида скважиной ограничен во времени моментом схлопывания трещин около забоя, который наступает при снижении забойного давления до критического. Последующая эксплуатация скважины становится нецелесообразной ввиду малой проницаемости матрицы пласта. Разработанный расчетный метод позволяет надежно определять пространственно-временные изменения характеристик фильтрационного режима, заблаговременно оценивать их последствия и принимать рациональные инженерные решения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дорофеева Т. В. Тектоническая трещиноватость горных пород и условия формирования трещинных коллекторов нефти и газа. — Ленинград : Недра, 1986. — 222 с.
- [2] Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — Москва : Недра, 1972. — 288 с.
- [3] Дуркин С. М., Хасанов А. И. Разработка трудноизвлекаемых запасов — основная задача будущего // Известия Коми научного центра УрО РАН. — 2016. — № 1(25). — С. 74–79.
- [4] Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. — Москва : Наука, 1969. — 545 с.
- [5] Saidi A. M. Reservoir engineering of fractured reservoirs. — London : Total, 1987. — 864 p.
- [6] Колганов В. И., Ковалева Г. А. О негативных последствиях неучета наличия трещиноватости в карбонатных коллекторах // Нефтепромысловое дело. — 2011. — № 1. — С. 6–12.
- [7] Allan J., Sun S. Q. Controls on Recovery Factor in Fractured Reservoirs: Lessons Learned from 100 Fractured Fields // All Days. — SPE, 2003.
- [8] Бондарев Э. А., Николаевский В. Н. К постановке задач теории фильтрации однородной жидкости в трещиноватых пористых средах. — 1966. — Т. 30. — С. 29–33.
- [9] Голф-Рахт Т. Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. — Москва : Недра, 1986. — 608 с.
- [10] Райсс Л. Основы разработки трещиноватых коллекторов. — Ижевск : Издательство «ИКИ», 2012. — 118 с.
- [11] Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. — Москва : Недра, 1965. — 273 с.
- [12] Закиров С. Н. Разработка газовых, газоконденсатных и нефтегазоконденсатных месторождений: Учебное пособие для вузов. — Москва : Струна, 1998. — 628 с.
- [13] Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. XXIV, № 5. — С. 852–864.
- [14] Желтов Ю. В., Кудинов В. И., Малофеев Г. Е. Разработка сложнопостроенных месторождений вязкой нефти в карбонатных коллекторах. — Москва : Нефть и газ, 1997. — 256 с.
- [15] Куштанова Г. Г. Некоторые особенности нестационарной фильтрации в трещиновато-пористых коллекторах // Нефтегазовое дело. — 2007. — № 1. — С. 21–26.

- [16] Altinörs A., Önder H. A double-porosity model for a fractured aquifer with non-Darcian flow in fractures // *Hydrological Sciences*. — 2008. — Vol. 53, no. 4. — P. 868–882.
- [17] Lewis R., Pao W. Numerical simulation of three-phase flow in deforming fractured reservoirs // *Oil, Gas Science and Technology — Revue d'IFP Energies nouvelles*. — 2002. — Vol. 57, no. 5. — P. 499–514.
- [18] Баренблатт Г. И. О движении газожидкостных смесей в трещиновато-пористых породах // *Известия АН СССР. Серия Механика и машиностроение*. — 1964. — № 3. — С. 47–50.
- [19] Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н. Математические методы в вопросах орошения. — Москва : Наука, 1969. — 414 с.
- [20] Поляков В. Л. О математическом моделировании фильтрации жидкости в дренируемом трещиноватом напорном пласте // *Доповіді НАН України*. — 2017. — № 6. — С. 28–35.
- [21] Cornaton F., Perrochet P. Analytical 1D dual-porosity equivalent solutions to 3D discrete single-continuum models. Application to karstic spring hydrograph modelling // *Journal of Hydrology*. — 2002. — Vol. 262, no. 1-4. — P. 165–176.
- [22] De Smedt F. Analytical solution for constant-rate pumping test in fissured porous media with lobule-porosity behavior // *Transport in Porous Media*. — 2011. — Vol. 88, no. 3. — P. 479–489.
- [23] Moench A. F. Well test analysis in naturally fissured, geothermal reservoirs with fracture skin // *Proceedings of the Ninth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering / Stanford University*. — Stanford, CA. — 1983. — P. 175–180.
- [24] Warren J. E., Root P. J. The behavior of naturally fractured reservoirs // *Society of Petroleum Engineers Journal*. — 1963. — Vol. 3, no. 03. — P. 245–255.
- [25] Интерпретация гидродинамических исследований скважин, вскрывших трещиновато-пористый пласт / Хайруллин М. Х., Шамсиев М. Н., Морозов П. Е. и Абдуллин А. И. // *Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений*. — 2007. — Т. 1. — С. 30–32.
- [26] Эрлагер Р. Гидродинамические методы исследования скважин. — Москва / Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2007. — 512 с.
- [27] Bourdet D. Well test analysis: The use of advanced interpretation models. — Amsterdam : Elsevier Science B. V., 2002. — 426 p.
- [28] Желтов Ю. П. О моделировании в нефтепромысловой механике (обзор) // *Прикладная механика и техническая физика*. — 1962. — № 4. — С. 134–152.
- [29] Олейник А. Я. Фильтрационные расчеты вертикального дренажа. — Киев : Наукова думка, 1978. — 202 с.

- [30] Шестаков В. М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. — Москва : Изд-во МГУ, 1965. — 233 с.
- [31] Поляков В. Л. Фильтрационные деформации в дренируемых грунтах: теория и приложения. — Киев : Аграр Медиа Групп, 2014. — 382 с.
- [32] Поляков В. Л. К нелинейной теории газовых скважин // Доповіді НАН України. — 2017. — № 12. — С. 23–32.
- [33] Методы фильтрационных расчетов гидромелиоративных систем / под ред. Веригина Н. Н. — Москва : Колос, 1970. — 440 с.
- [34] Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. — Москва : Наука, 1977. — 664 с.
- [35] Агзамов А. А., Хайитов О. Г. Оценка снижения проницаемости трещиноватого коллектора в процессе разработки месторождения нефти // Известия вузов. Горный журнал. — 2010. — № 3. — С. 31–32.
- [36] Подземная гидравлика: Учебник для вузов / Басниев К. С., Власов А. М., Кочина И. Н. и Максимов В. М. — Москва : Недра, 1986. — 303 с.
- [37] Желтов Ю. П. Разработка нефтяных месторождений: Учебник для вузов. — Москва : ОАО «Издательство «Недра», 1998. — 365 с.
- [38] Мироненко В. А., Шестаков В. М. Основы гидрогеомеханики. — Москва : Наука, 1977. — 664 с.
- [39] Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. — Москва : Недра, 1984. — 232 с.
- [40] Влияние сжимаемости трещин на выработку запасов трещиновато-пористых карбонатных коллекторов / Рустамов И. Ф., Васильев В. В., Дерюшев Д. Е., Андреев Д. В. и Владимиров И. В. // Нефтепромысловое дело. — 2013. — № 3. — С. 76–79.

## REFERENCES

- [1] T. V. Dorofeeva, *Tectonic fracturing of rocks and conditions for the formation of fractured oil and gas reservoirs*. Leningrad: Nedra, 1986.
- [2] G. I. Barenblatt, V. M. Yentov, and V. M. Ryzhik, *Theory of non-stationary filtration of liquid and gas*. Moscow: Nedra, 1972.
- [3] S. M. Durkin and A. I. Hasanov, “Development of hard-to-recover reserves is the main task of the future,” *Izvestiya Komi Nauchnogo Centra UrO RAN*, no. 1(25), pp. 74–79, 2016.
- [4] *Development of research on the theory of filtration in the USSR*. Moscow: Nauka, 1969.
- [5] A. M. Saidi, *Reservoir engineering of fractured reservoirs*. London: Total, 1987.



- [6] V. I. Kolganov and G. A. Kovaleva, “On the negative consequences of ignoring the presence of fracturing in carbonate reservoirs,” *Neftepromyslovoe Delo*, no. 1, pp. 6–12, 2011.
- [7] J. Allan and S. Q. Sun, “Controls on recovery factor in fractured reservoirs: Lessons learned from 100 fractured fields,” in *All Days*, SPE, 2003.
- [8] E. A. Bondarev and V. N. Nikolaevsky, “On the formulation of problems in the theory of filtration of a homogeneous liquid in fractured porous media,” vol. 30, pp. 29–33, 1966.
- [9] T. D. van Golf-Racht, *Fundamentals of fractured reservoir engineering*. Amsterdam: Elsevier Science, 1982.
- [10] L. H. Reiss, *The reservoir engineering aspects of fractured formations*. Houston, TX: Gulf Publishing Company, Book Division, 1980.
- [11] M. A. Hussein-zade, *Features of fluid motion in an inhomogeneous stratum*. Moscow: Nedra, 1965.
- [12] S. N. Zakirov, *Development of gas, gas condensate and oil and gas condensate fields: Textbook for higher education*. Moscow: Struna, 1998.
- [13] G. I. Barenblatt, Y. P. Zheltov, and I. N. Kochina, “On the basic concepts of the theory of filtration of homogeneous fluids in fractured rocks,” *Prikadnaya Mehanika i Mehanika*, vol. XXIV, no. 5, pp. 852–864, 1960.
- [14] Y. P. Zheltov, V. I. Kudinov, and G. E. Malofeev, *Development of complex viscous oil fields in carbonate reservoirs*. Moscow: Neft i Gaz, 1997.
- [15] G. G. Kushtanova, “Some features of non-stationary filtration in fractured-porous reservoirs,” *Neftegazovoe Delo*, no. 1, pp. 21–26, 2007.
- [16] A. Altinörs and H. Önder, “A double-porosity model for a fractured aquifer with non-Darcian flow in fractures,” *Hydrological Sciences*, vol. 53, no. 4, pp. 868–882, 2008.
- [17] R. Lewis and W. Pao, “Numerical simulation of three-phase flow in deforming fractured reservoirs,” *Oil, Gas Science and Technology — Revue d’IFP Energies nouvelles*, vol. 57, no. 5, pp. 499–514, 2002.
- [18] G. I. Barenblatt, “On the motion of gas-liquid mixtures in fractured-porous rocks,” *Izvestiya AN SSSR. Seriya Mehanika i Mashinostroenie*, no. 3, pp. 47–50, 1964.
- [19] P. Y. Polubarinova-Kochina, V. G. Pryazhinskaya, and V. N. Emih, *Mathematical methods in irrigation*. Nauka.
- [20] V. L. Polyakov, “On the modeling of the filtration of a liquid in a drainable fissured head stratum,” *Reports of NAS of Ukraine*, no. 6, pp. 28–35, 2017.



- [21] F. Cornaton and P. Perrochet, “Analytical 1d dual-porosity equivalent solutions to 3d discrete single-continuum models. application to karstic spring hydrograph modelling,” *Journal of Hydrology*, vol. 262, no. 1-4, pp. 165–176, 2002.
- [22] F. De Smedt, “Analytical solution for constant-rate pumping test in fissured porous media with lobule-porosity behavior,” *Transport in Porous Media*, vol. 88, no. 3, pp. 479–489, 2011.
- [23] A. F. Moench, “Well test analysis in naturally fissured, geothermal reservoirs with fracture skin,” in *Proceedings of the Ninth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering*, (Stanford, CA), pp. 175–180, Stanford University, 1983.
- [24] J. E. Warren and P. J. Root, “The behavior of naturally fractured reservoirs,” *Society of Petroleum Engineers Journal*, vol. 3, no. 03, pp. 245–255, 1963.
- [25] M. H. Khairullin, M. N. Shamsiev, P. E. Morozov, and A. I. Abdullin, “Interpretation of hydrodynamic studies of wells penetrating a fractured-porous reservoir,” *Geologiya, Geofizika i Razrabotka Neftianyh i Gazovyh Mestorozhdenii*, vol. 1, pp. 30–32, 2007.
- [26] R. C. Earlougher Jr, *Advances in well test analysis*. US: Society of Petroleum Engineers of AIME, 1977.
- [27] D. Bourdet, *Well test analysis: The use of advanced interpretation models*. Amsterdam: Elsevier Science B. V., 2002.
- [28] Y. P. Zheltov, “On modeling in oilfield mechanics (a review),” *Prikladnaya Mehanika i Tehnicheskaya Fizika*, no. 4, pp. 134–152, 1962.
- [29] A. Y. Oleinik, *Filtration calculations of vertical drainage*. Kyiv: Naukova Dumka, 1978.
- [30] V. M. Shestakov, *Theoretical basis for assessing of backwater, dewatering and drainage*. MGU Publications.
- [31] V. L. Polyakov, *Filtration deformations in drained soils: Theory and applications*. Kyiv: Agrar Media Group, 2014.
- [32] V. L. Polyakov, “On the nonlinear theory of gas wells,” *Reports of NAS of Ukraine*, no. 12, pp. 23–32, 2017.
- [33] N. N. Verigin, ed., *Methods of filtration calculations of irrigation and drainage systems*. Kolos.
- [34] P. Y. Polubarinova-Kochina, *Theory of groundwater movement*. Moscow: Nauka, 1977.
- [35] A. A. Agzamov and O. G. Khayitov, “Estimation of fractured reservoir permeability reduction during oil field development,” *Izvestiya Vuzov. Gornyy Zhurnal*, no. 3, pp. 31–32, 2010.
- [36] K. S. Basniev, A. M. Vlasov, I. N. Kochina, and V. M. Maksimov, *Underground hydraulics: Textbook for higher education*. Moscow: Nedra, 1986.

- [37] Y. P. Zheltov, *Development of oil fields: Textbook for higher education*. Moscow: Nedra, 1998.
- [38] V. A. Mironenko and V. M. Shestakov, *Fundamentals of hydrogeomechanics*. Moscow: Nauka, 1977.
- [39] V. N. Nikolaevsky, *Mechanics of porous and fractured media*. Moscow: Nedra, 1984.
- [40] I. F. Rustamov, V. V. Vasiliev, D. E. Deryushev, D. V. Andreev, and I. V. Vladimirov, "Effect of fracture compressibility on the recovery of fractured-porous carbonate reservoirs," *Neftepromyslovoe Delo*, no. 3, pp. 76–79, 2013.

**В. Л. Поляков**

**Розрахунок дії свердловини в стисливому  
тріщинувато-пористому середовищі**

Тріщинуваті породи, утворені в результаті тектонічних процесів, часто містять у своїй матриці корисний флюїд. Система тріщин, яка служить для його транспорту, забезпечує продуктивну роботу свердловин. Високі тиски в глибоких пластах-колекторах зумовлюють розширення тріщин, які при інтенсивних відкачуваннях флюїду можуть не тільки стискатися, а й навіть закриватися. Як наслідок, проникність породи різко знижується, а дебіт свердловини падає. Виходячи з цього, значний інтерес представляє математичне моделювання дії одиначної свердловини в тріщинувато-пористому середовищі, що стискається. Його доцільно виконувати, вводячи два умовні континууми, які базуються на системі тріщин і матриці експлуатованого пласта. Швидкість міжконтинуального обміну флюїдом вважається пропорційною різниці між тисками в них. У цьому контексті велике значення набуває опис зв'язку між проникністю першого континууму й тиском у ньому. У статті розглянуто три різні способи формалізації цього зв'язку. Сформульовано нелінійну математичну задачу відкачування нестисливого флюїду з тріщинувато-пористого середовища, яке стискається, за умови сталого дебіту. Отримано розв'язки для двох стадій фільтраційного процесу. Перша з них характеризується тим, що збурення, внесені в фільтраційний режим продуктивного пласта, поширюються зі скінченною швидкістю. Після того, як зона збурення охопить усю область фільтрації, починається друга стадія, протягом якої тиск знижується одночасно у всьому шарі. На ряді прикладів проілюстровано можливості прикладної методики розрахунку фільтраційних характеристик. Встановлено закономірності зниження тиску всередині пласта та на вибої. Розроблений метод дозволяє надійно визначати просторово-часові зміни характеристик фільтраційного режиму, завчасно оцінювати їх наслідки та приймати раціональні інженерні рішення.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** тріщинувате середовище, проникність, тиск, свердловина, стисливість, інженерні розрахунки, фільтрація

**V. L. Polyakov**

**Calculation of a well in compressible fractured porous medium**

Fractured rocks formed in tectonic processes often contain a useful fluid in their matrix. The system of cracks that serves for its transport ensures the productive operation of wells. High pressures in deep reservoirs cause the expansion of cracks which, with intensive fluid pumping, can not only shrink but even close. As a result, the permeability of the rock decreases sharply, and the flow rate in the drain drops. Therefore, mathematical modeling of the action of a single well in a compressible fractured-porous medium is of considerable interest. It is advisable to perform it by introducing two conditional continuums based on the system of fractures and the matrix of the reservoir being exploited. The rate of intercontinuum fluid exchange is assumed to be proportional to the difference between the heads in them. So, the description of the relationship between the permeability of the first continuum and the pressure in it is of great importance. The article considers three different ways of formalizing this connection. A nonlinear mathematical problem is formulated for pumping an incompressible fluid from a compressible fractured-porous medium with a constant discharge. Its solution is obtained for two stages of the filtration process. The first of them is characterized by the fact that the perturbation introduced into the filtration regime of the productive formation propagates at a finite speed. After the perturbation zone covers the entire filtration area, the second stage begins when the pressure uniformly decreases in the reservoir. Several examples illustrate the methodology for calculating the filtration characteristics. The patterns of pressure decrease inside the reservoir and at the bottom hole are established. The developed method allows for reliably determining the space-time changes in the filtration regime characteristics, assessing their consequences in advance, and making rational engineering decisions.

*KEY WORDS: fractured medium, permeability, pressure, well, compressibility, engineering calculations, underground flow*