ISSN 2616-6135. ГІДРОДИНАМІКА І АКУСТИКА. 2018–2019. Том 1(91), № 4. С. 469–483.

УДК 532.5

ПОТЕНЦІАЛ ШВИДКОСТІ НЕСТАЦІОНАРНОГО РУХУ СИСТЕМИ ДВОХ ДЖЕРЕЛ У ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ

О. Г. Стеценко†

Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Желябова, 8/4, 03680, Київ, Україна
† *E-mail:* office@hydromech.com.ua

Отримано 12.12.2017

Розв'язано задачу визначення потенціалу швидкості, обумовленого нестаціонарним рухом системи двох джерел з однаково змінною в часі інтенсивністю, розташованих під вільною поверхнею каналу з прямокутним поперечним перерізом симетрично відносно його вертикальної серединної площини. Шуканий розв'язок складається з двох доданків. Перший з них є сумою потенціалів джерел, представлених у вигляді добутку їхньої інтенсивності на функцію Гріна для рівняння Лапласа в безмежному середовищі. Для забезпечення виконання граничних умов, окрім рухомої системи дійсних джерел, сюди включено уявні джерела, породжені її відображенням від дна каналу, та нескінчену систему джерел, відображених від бічних стінок каналу. В результаті використання інтегрального представлення для одиничного джерела та формули Пуассона для нескінченої системи джерел цю частину розв'язку зведено до косинус-ряду Фур'є за поперечною координатою. Коефіцієнти цього ряду містять інтегральне представлення по поздовжній координаті для функції, яка визначається через відомі характеристики дійсних та відображених відносно дна рухомих джерел. Другий потенціал знайдено так, щоби забезпечити виконання граничної умови на вільній поверхні. При цьому враховано вплив вільної поверхні на характер шуканого розв'язку. Зокрема, описано поле поверхневих хвиль, генероване рухомою системою джерел. Як і для першого потенціалу, відповідний розв'язок знайдено у вигляді косинус-ряду Фур'є з коефіцієнтами, що містять невідому образ-функцію. Для визначення останньої сформульовано початково-граничну задачу з виконанням граничних умов на дні та вільній поверхні. Розв'язок для другого потенціалу також має дві складові. Перша з них одержана у аналітичному вигляді й складається з системи двох періодичних рухів у гідродинамічному полі, яке відповідає рухові розглянутої системи джерел. Період цих часових коливань визначається числом Фруда й відповідним для кожної моди хвильовим спектром. Другу складову одержано у вигляді подвійного інтеграла (відносно часу й поздовжнього хвильового числа) й визначається характером нестаціонарності зміни швидкості та інтенсивності рухомих джерел, а також числом Фруда. Вона дає вклад інерційних сил, обумовлених прилученою масою.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гідродинаміка судна, потенціал швидкості, прямокутний канал, число Фруда, нестаціонарність

1. ВСТУП

Теоретичний опис гідродинаміки суден тісно пов'язаний з використанням потенціалу швидкості переміщення джерел, які дискретно або неперервно у вигляді простого шару розподілені по поверхні, що обмежує область рідини, в якій рухається судно при його симетричному обтіканні. Потенціал швидкості руху точкового джерела береться в такому вигляді, щоб він задовольняв рівняння Лапласа для функції течії ідеальної нестисливої рідини, а інтенсивність розподілу джерел визначається з умов на межі заповненої рідиною області.

Такий підхід широко використовується в лінійних задачах гідродинаміки суден, однак його застосування пов'язане з великим обсягом обчислювальних операцій. Тому розрахунки гідродинамічних характеристик реальних суден стали можливими лише після розробки нових чисельних методів і використання потужних обчислювальних комплексів з постійно зростаючими можливостями. Серед досліджень у цьому напрямку слід відзначити статтю Г. Е. Гедда [1], в якій розроблено метод граничних елементів (панелей) для виконання умов на поверхні заповненої рідиною області, та роботу С. В. Даусона [2], в якій презентовано методику розрахунку з можливістю урахування умови розсіяння попереду судна й за ним. Характерна особливість і водночас перевага методу граничних елементів полягає у використанні потенціалу швидкості одиничного джерела у вигляді функції Гріна для безмежної області, заповненої ідеальною нестисливою рідиною. Однак при його реалізації необхідно знаходити розв'язки багатьох тисяч лінійних рівнянь для визначення невідомих інтенсивностей джерел, що значно ускладнює чисельну процедуру. Згадані труднощі призвели до того, що дослідження в цьому напрямку сконцентровані переважно на розгляді лінійних стаціонарних задач.

Вже на початку вивчення гідродинаміки суден значну увагу приділяли відшуканню такого потенціалу швидкості руху джерел, який би задовольняв усі лінійні граничні умови задачі, за виключенням умови на змоченій поверхні. У такому випадку достатньо обмежитись пошуком інтенсивностей джерел, розташованих на корпусі судна, що дозволяє зменшити розмірність системи рівнянь для їх визначення на порядок і більше. Визначальними у розробці зазначеного підходу стали роботи М. Є. Кочина [3] для глибокого моря та М. Д. Хаскінда [4] для мілкого моря з горизонтальним дном, в яких представлено вигляд відповідних потенціалів швидкості стаціонарного руху одиничного джерела. Використання цих потенціалів дозволило знайти у вигляді квадратур розв'язок задачі стаціонарного руху судна при його симетричному обтіканні (зауважимо, що для опису несиметричного обтікання слід використовувати також розподілені на поверхні судна диполі). Виконані в цьому напрямку дослідження дозволили ще у 1950–1970-их роках отримати загальні розв'язки лінійних задач гідродинаміки руху суден як для глибоких, так і для мілких морів у вигляді квадратур [5–8].

Зауважимо, що розрахунок гідродинамічних характеристик суден і породжених ними хвильових полів у задачах для моря скінченної глибини з використанням потенціалу одиничного джерела [4] виявився складною проблемою. Це обумовлено, з одного боку, необхідністю знаходити інтенсивності розподілу джерел по корпусу судна, а з другого, — потребою обчислювати наявний у виразі для потенціалу швидкості одиничного джерела подвійний інтеграл, який, у свою чергу, складається з двох збіжних невласних інтегралів. Зазначені труднощі стали головною причиною застосування цього підходу лише для тонких суден при їх стаціонарному русі. У цьому класі задач майже всі сучасні дослідники [9–14] використовували базову модель з робіт [1, 2].

Для каналів із поперечним перерізом прямокутної форми слід згадати роботу [15]. У ній відповідна стаціонарна задача розв'язувалася з використанням нескінченої системи дзеркально відображених відносно бічних стінок каналу джерел, що забезпечило виконання граничної умови непротікання на них. Це дозволило знайти розв'язок для тонкого судна у вигляді квадратур. При розгляді задач гідродинаміки руху судна в каналі широко використовувалась спрощена одновимірна гідравлічна постановка, див. бібліографію в [5–7, 16]. Окрім того, відзначимо нещодавню роботу [17], в якій для знаходження розв'язку також використовувався метод граничних елементів.

У статті [18] розв'язано задачу знаходження потенціалу швидкості для випадку стаціонарного руху в каналі з прямокутним поперечним перерізом системи двох одиничних джерел, розміщених симетрично відносно вертикальної площини симетрії каналу. Одержаний аналітичний розв'язок у вигляді косинус-ряду Фур'є можна використовувати для суден із симетричними обводами, які рухаються посередині каналу.

Нестаціонарні режими руху як точкових джерел, так і суден досліджені значно менше. У монографії [19] знайдено потенціал швидкості нестаціонарного руху точкового джерела змінної інтенсивності під вільною поверхнею глибокого моря. Цей результат має вигляд суми двох подвійних інтегралів і одного потрійного. Використання таких потенціалів у задачах нестаціонарної гідродинаміки реальних суден різко збільшує обсяг обчислювальних операцій, тому важко визначити, чи має цей підхід переваги перед покроковим у часі визначенням розподілу джерел по всій межі області рідини за процедурою, аналогічною випадку стаціонарного руху. Окрім того, в роботі [19] для випадку руху тонкого судна з нульовими початковими умовами (або при набутті у початковий момент судном скінченої швидкості, яка надалі не змінюється) отримано розв'язок із дво-, три- і чотирикратними інтегралами. При цьому розрахунки гідродинамічних характеристик не проводились.

Дослідження нестаціонарних режимів руху збурень в каналах достатньо повно характеризуються роботами з вивчення хвильових картин за рухомою областю поверхневого тиску незмінної величини в прямокутному й трапецієвидному каналах з горизонтальним дном [20], а також у прямокутному каналі при змінній топографії дна [21, 22]. У цих публікаціях для неглибоких каналів використані проінтегровані по товщині шару рівняння Бусінеска — наближення мілкої води. Для їх розв'язання розроблено чисельну модель, на основі якої описані нелінійні слабо дисперсійні хвилі, генеровані рухомими збуреннями. До задач із нестаціонарністю, обумовленою зміною в часі швидкості руху, можна віднести роботу [23]. У ній в наближенні мілкої води досліджені процеси формування в прямокутному каналі нелінійних слабо дисперсійних хвиль (включно з солітонами) за областю поверхневого тиску, яка в початковий момент почала рух із заданою й надалі незмінною швидкістю. Аналіз наведених результатів показує, що в цілому розуміння гідродинаміки нестаціонарного руху суден у каналах наразі знаходиться на початковій стадії. Насамперед це стосується нелінійної постановки, яка набуває особливої ваги для вузьких каналів.

У зв'язку з недостатнім рівнем дослідженості нестаціонарного руху суден у каналах видається доцільним продовжити вивчення цих режимів руху для точкових джерел з метою знаходження для генерованих ними потенціалів швидкості таких розв'язків, які можна було б ефективно використати в лінійних задачах нестаціонарного руху суден у каналах з урахуванням сучасних можливостей обчислювальної техніки. У даній роботі на базі розробленого в [18] підходу розв'язано лінійну задачу нестаціонарного руху системи двох джерел однакової інтенсивності, яка змінюється в часі, симетрично розташованих у прямокутному каналі відносно його вертикальної площини симетрії.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розв'язується лінійна задача знаходження потенціалу швидкості збуреного руху $G(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, обумовленого нестаціонарним рухом зі швидкістю $U(t)$ системи двох джерел змінної інтенсивності $q(t)$ під вільною поверхнею ідеальної нестисливої рідини з густиною ρ в каналі з прямокутним поперечним перерізом. Джерела вважаються розміщеними симетрично відносно вертикальної площини симетрії каналу. Ширина каналу становить $2l$, а товщина шару рідини в ньому — h. Для математичного опису введено рухому систему координат xyz, початок якої знаходиться на поздовжній лінії симетрії вільної поверхні рідини. При цьому вісь Ox направлено в бік руху джерел, а вісь Oz, яка проходить через точку посередині між ними, — вгору. У безрозмірній постановці вибрано такі масштаби: для лінійних розмірів — h (товщину шару рідини), для часу — U_s/g, для тиску — ρU_s^2, для потенціалу швидкості — $U_s h$ (тут U_s — характерна швидкість руху, а g — прискорення вільного падіння).

Гранична задача знаходження потенціалу швидкості джерела

$$G(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = G_1(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta) + G_1(t, x, y, z, \xi, -\eta, \zeta)$$

формулюється у вигляді рівняння Лапласа

$$\Delta G = 0 \tag{1}$$

з граничними умовами

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - 2U\mathrm{Fr}\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial x} + U^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \mathrm{Fr}\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \mathrm{Fr}\dot{U}\frac{\partial G}{\partial x} \qquad \text{при} \qquad z = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \qquad \text{при} \qquad z = -h, \tag{3}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \qquad \text{при} \qquad y = \pm l, \tag{4}$$

а також із початковими умовами при $t = 0$:

$$\begin{gathered} G(0, x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = G_0(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), \qquad \dot{G}_0 = \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{(0,x,y,z,\xi,\eta,\zeta)}, \\ q(0) = q_0, \qquad \dot{q}(0) = \dot{q}_0, \\ U(0) = U_0, \qquad \dot{U}(0) = \dot{U}_0 \end{gathered} \tag{5}$$

та умовою випромінювання

$$G(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta) \to 0 \qquad \text{при} \qquad x \to \infty. \tag{6}$$

Тут уведено оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

і квадрат числа Фруда $\mathrm{Fr} = U_0^2/gh$. Крапка зверху означає похідну по часу.

Розв'язок задачі для функції $G(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ знаходимо за аналогією з випадком стаціонарного руху такої системи джерел, розглянутому в [18]:

$$\begin{gathered} G(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = G_r(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta) + G_h(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta), \\ G_r = G_{1r}(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta) + G_{1r}(t,x,y,z,\xi,-\eta,\zeta), \\ G_h = G_{1h}(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta) + G_{1h}(t,x,y,z,\xi,-\eta,\zeta). \end{gathered} \tag{7}$$

При цьому [4]

$$G_{1r} = q(t)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

$$r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+2+\zeta)^2}.$$

Зауважимо, що в процесі знаходження розв'язку задачі спочатку визначається функція $G_r(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ у вигляді, який задовольняє граничним умовам на дні і на бічних ствнквх каналу. $G_h(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ — добавочна функція, яка враховує вплив вільної поверхні. При цьому сумарний потенціал швидкості $G(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ задовольняє всім умовам (2)—(6).

3. СХЕМА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ФУНКЦІЇ G_r

Представимо G_r у вигляді, який задовольняє граничну умову на дні:

$$G_r = \frac{q}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\infty}^{\infty} \left[e^{-k|z-\zeta|} + e^{-k(x+2+\zeta)}\right] e^{ik_1(x-\xi)} \cos(k_2 y)\cos(k_2\eta) dk_1 dk_2,$$

як це було зроблено в [18]. Для автоматичного виконання граничної умови на бічних стінках каналу використаємо метод розміщення для кожного з фізичних джерел нескінченої системи одиничних джерел, дзеркально відображених відносно стінок. Це дозволяє записати G_r у формі

$$G_r = \frac{q}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\infty}^{\infty} \left[e^{-k|z-\zeta|} + e^{-k(x+2+\zeta)}\right] e^{ik_1(x-\xi)-2ik_2 nl} \cos(k_2 y)\cos(k_2\eta) dk_1 dk_2. \tag{8}$$

Інтегрування по k_2 у цьому виразі може бути виконано з використанням формули Пуассона:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(t)e^{ink}dt=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\psi(2\pi m).$$

У результаті складова $G_r(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ набирає вигляду, який одночасно задовольняє граничні умови на дні та бічних стінках каналу:

$$G_r=\frac{2q}{l}\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos\left(\frac{\pi my}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi m\eta}{l}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}D_m e^{ik_1(x-\xi)}dk_1. \tag{9}$$

Тут $D_m=e^{-k_m|z-\zeta|}+e^{-k_m(z+2+\zeta)}$, $a_m=\begin{cases}1/2 & \text{при} \quad m=0;\\ 1 & \text{при} \quad m\geq 1.\end{cases}$

Зауважимо, що $k_m=\sqrt{k_1^2+(\pi m/l)^2}$ — модуль хвильового вектора в комплексній k_1-площині — скрізь додатна величина. При $m=0$ $k_m=|k_1|$.

Отриманий вираз визначає граничну умову на вільній поверхні для складової G_h таким чином, щоб там виконувалась відповідна умова (2) для $G=G_r+G_h$.

4. ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ФУНКЦІЇ G_h

Розв'язок для G_h знаходимо у вигляді аналогічного за структурою до виразу (8) інтегрального представлення, яке задовольняє рівняння (1)і граничні умови (3) і (4):

$$G_h=\frac{2}{l}\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos\left(\frac{\pi my}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi m\eta}{l}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{G}_{hm}(t,k_1z,\zeta)e^{ik_1(x-\xi)}dk_1. \tag{10}$$

Зі співвідношень (1)—(5), (9), (10) формулюємо початково-граничну задачу для визначення $\bar{G}_{hm}$ (штрих означає похідну по z). У неї входить рівняння

$$\bar{G}''_{hm}-k_m^2\bar{G}_{hm}=0 \tag{11}$$

з граничними умовами

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\bar{G}_{hm}}{\partial t^2}-2ik_1U\mathrm{Fr}\frac{\partial\bar{G}_{hm}}{\partial t}+\mathrm{Fr}\frac{\partial\bar{G}_{hm}}{\partial z}-(k_1^2U^2\mathrm{Fr}^2+ik_1\dot{U}\mathrm{Fr})\bar{G}_{hm}=\\ =\left[q(\mathrm{Fr}k_m+U^2k_1^2\mathrm{Fr}^2+ik_1\dot{U}\mathrm{Fr})+2ik_1U\mathrm{Fr}\dot{q}-\ddot{q}\right]D_{mo} \qquad \text{при} \qquad z=0,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\frac{\partial\bar{G}_{hm}}{\partial z}=0 \qquad \text{при} \qquad z=-h, \tag{13}$$

$$\bar{G}_{hm}\to 0 \qquad \text{при} \qquad x\to\infty \tag{14}$$

та початковими умовами при $t=0$:

$$\bar{G}_{hm}=q_0D_{m0}, \qquad \frac{\partial\bar{G}_{hm}}{\partial t}=\dot{q}_0D_{m0}. \tag{15}$$

В умові (12) використано співвідношення

$$\left.\frac{\partial D_m}{\partial z}\right|_{z=0} = -k_m D_{m0},$$

де $D_{m0} = e^{-k_m|\zeta|} + e^{-k_m(2+\zeta)}$, а в умові (15) D_{m0} визначає ζ-координати розміщення джерел у площині (ξ, ζ) при $t = 0$. В обох випадках ці вирази мають однаковий вигляд, тому і однаково надалі позначені.

Шукаючи розв'язок рівняння (11) у вигляді

$$\bar{G}_{hm} = C_1(t, k_1, \zeta)e^{k_m z} + C_2(t, k_1, \zeta)e^{-k_m z}, \tag{16}$$

з умов (11), (12) одержуємо рівняння для визначення C_2:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 C_2}{\partial t^2} - 2ik_1 U \mathrm{Fr} \frac{\partial C_2}{\partial t} + (\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m - k_1^2 U^2 \mathrm{Fr}^2 - ik_1 \mathrm{Fr} \dot{U})C_2 = \\ = \frac{e^{-k_m}}{2 \operatorname{ch} k_m} \left[q(\mathrm{Fr} k_m + k_1^2 U^2 \mathrm{Fr}^2 + ik_1 \dot{U} \mathrm{Fr}) + 2ik_1 U \mathrm{Fr} \dot{q} - \ddot{q} \right] D_{m0}.\end{gathered} \tag{17}$$

Зробивши у цьому співвідношенні заміну [19]

$$\bar{C}_2 = C_2 e^{-i\mathrm{Fr} k_1 s(t)}, \qquad s(t) = \int\limits_0^t U dt, \tag{18}$$

приходимо до рівняння

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \bar{C}_2}{\partial t^2} + \mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m \bar{C}_2 = \\ = \frac{e^{-k_m - i\mathrm{Fr} k_1 s(t)}}{2 \operatorname{ch} k_m} \left[q(\mathrm{Fr} k_m + k_1^2 U^2 \mathrm{Fr}^2 + ik_1 \dot{U} \mathrm{Fr}) + 2ik_1 U \mathrm{Fr} \dot{q} - \ddot{q} \right] D_{m0}.\end{gathered} \tag{19}$$

Зі співвідношень (16)—(19) маємо

$$\begin{gathered}\bar{G}_{hm} = 2e^{k_m} \operatorname{ch}[k_m(z+1)] e^{i\mathrm{Fr} k_1 s(t)} \bar{C}_2 = \\ = e^{i\mathrm{Fr} k_1 s(t)} \frac{\operatorname{ch}[k_m(z+1)]}{\operatorname{ch} k_m} 2e^{k_m} \left[C_{1h} \cos(t\sqrt{\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m}) + C_{2h}(t\sqrt{\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m}) \right] + \\ + \frac{e^{i\mathrm{Fr} k_1 s(t)} \operatorname{ch}[k_m(z+1)] D_m}{\sqrt{2\mathrm{Fr} k_m \operatorname{sh}(2k_m)}} \int\limits_0^t e^{-i\mathrm{Fr} k_1 s(\tau)} \times \\ \times \left[q(\mathrm{Fr} k_m + U^2 k_1^2 \mathrm{Fr}^2 + ik_1 \dot{U} \mathrm{Fr}) + 2ik_1 U \mathrm{Fr} \dot{q} - \ddot{q} \right] \sin[\sqrt{\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m}(t-\tau)] d\tau.\end{gathered} \tag{20}$$

Сталі C_{1h} та C_{2h} визначаються з початкових умов задачі. Якщо в початковий момент руху джерела мають швидкість руху U_0 і прискорення $\dot{U}_0$ рівні нулю, то

$$C_{1h} = C_{2h} = 0,$$

а розв'язок для $\bar{G}_{hm}$ визначається лише інтегральною складовою виразу (19). Ці сталі також нульові для режиму руху, коли джерела в початковий мрмент часу набувають швидкість U_0, яка надалі не змінюється. У загальному випадку, коли $U_0 \neq 0$ і $\dot{U}_0 \neq 0$, з формул (15) і (18) сталі C_{1h}, C_{2h} одержуються у вигляді

$$C_{1h} = q_0 D_{m0}, \qquad C_{2h} = -\frac{\dot{q}_0 D_{m0}}{\sqrt{\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m}}. \tag{21}$$

З виразів (19) і (21) випливає таке представлення розв'язку для $\bar{G}_{hm}$:

$$\begin{gathered}\bar{G}_{hm} = e^{i\mathrm{Fr}k_1 s(t)} \frac{\operatorname{ch}[k_m(z+1)]}{\operatorname{ch} k_m} \times \\ \times \left[q_0 \cos(t\sqrt{\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m}) + \frac{\dot{q}_0}{\sqrt{\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m}} \sin(t\sqrt{\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m}) \right] + \bar{I}_m,\end{gathered} \tag{22}$$

де

$$\begin{gathered}\bar{I}_m = \frac{e^{i\mathrm{Fr}k_1 s(t)} D_m \operatorname{ch}[k_m(z+1)]}{\sqrt{2\mathrm{Fr} k_m \operatorname{sh}(2k_m)}} \int\limits_0^t e^{-i\mathrm{Fr}k_1 s(\tau)} \times \\ \times \left[q(\mathrm{Fr}k_m + U^2 k_1^2 \mathrm{Fr}^2 + ik_1 \dot{U} \mathrm{Fr}) + 2ik_1 U \mathrm{Fr} \dot{q} - \ddot{q} \right] \sin[\sqrt{\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m}(t-\tau)] d\tau.\end{gathered}$$

На підставі співвідношень (9), (19), (21), (22) розв'язок поставленої задачі зручно представити у вигляді, в якому виділені характерні механізми формування гідродинамічного поля, генерованого рухом джерел:

$$G(t,x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{2}{l} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi m \eta}{l}\right) \mathbf{Re}\,(I_{G1m} + I_{G2m} + I_{G3m}), \tag{23}$$

де

$$I_{G1m} = q \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_m e^{ik_1(x-\xi)} dk_1,$$

$$\begin{gathered}I_{G2m} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1[x+\mathrm{Fr}s(t)-\xi]} \frac{\operatorname{ch}[k_m(z+1)] D_m}{\operatorname{ch} k_m} \times \\ \times \left[q_0 \cos(t\sqrt{\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m}) + \frac{\dot{q}_0}{\sqrt{\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m}} \sin(t\sqrt{\mathrm{Fr}} k_m \operatorname{arctg} k_m) \right] dk_1,\end{gathered}$$

$$I_{G3m} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(x-\xi)} \bar{I}_m dk_1.$$

Інтеграл I_{G1m} знайдено у [18] в явному вигляді і його дійсна частина визначається виразом

$$\mathbf{Re}\, I_{G1m}(t,x,z,\xi,\zeta) = q(t) e^{ik_1 \mathrm{Fr}s(t)} G_{rmI}(x,z,\xi,\zeta), \tag{24}$$

де

$$G_{r0I} = \int\limits_0^\infty [e^{-k_1|z-\zeta|} + e^{-k_1(z+2+\zeta)}]\cos[k_1(x-\xi)]dk_1 =$$
$$= \frac{|z-\xi|}{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2} + \frac{z+2+\zeta}{(x-\xi)^2+(z+2+\zeta)^2},$$

$$G_{rmI} = \int\limits_0^\infty [e^{-k_m|z-\zeta|} + e^{-k_m(z+2+\zeta)}]\cos[k_1(x-\xi)]dk_1 = \frac{2}{l}(I_{1m}+I_{2m}),$$

$$I_{1m} = \frac{\pi m|z-\zeta|}{l\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}}K_1\left[\frac{\pi m}{l}\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}\right],$$

$$I_{2m} = \frac{\pi m(z+2+\zeta)}{l\sqrt{(x-\xi)^2+(z+2+\zeta)^2}}K_1\left[\frac{\pi m}{l}\sqrt{(x-\xi)^2+(z+2+\zeta)^2}\right].$$

Тут $m \geq 1$, K_1 — модифікована функція Бесселя.

Складова $\mathbf{Re}\, I_{G2m}$ визначається з виразу

$$\mathbf{Re}\, I_{G2m}(t,x,z,\xi,\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\mathrm{ch}[k_m(z+1)]D_m}{\mathrm{ch}\, k_m}\times\right.$$
$$\times\left[q_0\cos(t\sqrt{\mathrm{Fr}k_m\,\mathrm{arctg}\, k_m}) + \frac{\dot{q}_0}{\sqrt{\mathrm{Fr}k_m\,\mathrm{arctg}\, k_m}}\sin(t\sqrt{\mathrm{Fr}k_m\,\mathrm{arctg}\, k_m})\right]\times \tag{25}$$
$$\left.\times\cos[k_1(x+s(t)\mathrm{Fr}-\xi)]\right\}dk_1.$$

Перша складова розв'язку (23) описує затухаючі з віддаленням від джерел зміщення середовища. Друга складова описує хвильову картину на вільній поверхні у вигляді системи двох $2\pi/\sqrt{\mathrm{Fr}k_m\,\mathrm{arctg}\, k_m}$-періодичних рухів для m-ої складової.

Інтеграл $\bar{I}_m$ не має аналітичного представлення по t і, хоч до його інтегрування по k_1 можна застосувати теорію лишків, оскільки підінтегральна функція задовольняє умови леми Жордана, однак, через наявність в неї точок розгалуження на уявній осі, при довільному характері зміни в часі швидкості руху не вдається зменшити кратність інтегрування. Водночас, відсутність на дійсній осі x особливих точок у підінтегральній функції спрощує процедуру інтегрування по цій координаті.

З урахуванням парності I_{G3m} по k_1 її дійсна частина представляється виразом

$$\mathbf{Re}\, I_{G3m} = \sqrt{2}\int\limits_0^\infty \frac{D_{m0}\,\mathrm{ch}\,[k_m(z+1)]}{\sqrt{\mathrm{Fr}k_m\,\mathrm{sh}(2k_m)}}\bar{I}_{3m}dk_1, \tag{26}$$

де

$$\bar{I}_{3m} = \int\limits_0^t \left\{\cos(k_1F)\left[q(\mathrm{Fr}k_m + U^2k_1^2\mathrm{Fr}^2) - \ddot{q}\right] - k_1\mathrm{Fr}\sin(k_1F)(q\dot{U}+2U\dot{q})\right\}\sin(F_1)d\tau.$$

Тут $F = x - \xi + \mathrm{Fr}[s(t) - s(\tau)]$, $F_1 = \sqrt{\mathrm{Fr} k_m \operatorname{arctg} k_m}(t - \tau)$, $q = q(\tau)$, $U = U(\tau)$.

Таким чином, остаточний розв'язок поставленої задачі дається виразами (23)—(26).

5. ВИСНОВКИ

Розв'язано лінійну задачу знаходження потенціалу швидкості нестаціонарного руху системи двох джерел змінної в часі інтенсивності в каналі з прямокутною формою поперечного перерізу. Приймалось, що розглянуті джерела мають однакову інтенсивність і розміщені симетрично відносно вертикальної площини симетрії каналу. Остаточний розв'язок записано у вигляді квадратур, причому його частину представлено в аналітичному вигляді.

Використання отриманого потенціалу швидкості руху в нестаціонарних задачах гідродинаміки суден в каналах зводить їх до проблеми знаходження розподілу інтенсивностей джерел лише на змоченій поверхні корпусу судна в довільний момент часу. Це дозволяє визначити повну гідродинаміку судна у заданий наперед момент без необхідності покрокового інтегрування в часі, що істотно (більш, ніж на порядок) зменшує кількість невідомих у розрахункових схемах. Враховуючи цю перевагу, знайдені потенціали швидкості для випадку нестаціонарного руху доцільно використовувати при обчисленні хвильових полів і гідродинамічних характеристик суден із симетричними обводами для випадку їх руху вздовж вісі каналу обмеженої ширини, у якому вплив бічних стінок на гідродинаміку процесів є помітним.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Gadd G. E. A method for computing the flow and surface wave pattern around full forms // Transactions of the Royal Institution of Naval Architects. — 1976. — Vol. 118. — P. 207–219.

[2] Dawson C. W. A practical computer method for solving wave problems // Proceedings of the Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics / University of California. — Berkeley. — 1977. — P. 30–39.

[3] Кочин Н. Е. Собрание сочинений. — Москва : АН СССР, 1949. — Т. 2. — С. 105–162.

[4] Хаскинд М. Д. Общая теория волнового сопротивленя тел в жидкости конечной глубины // Прикладная математика и механика. — 1945. — Т. 9, № 3. — С. 257–264.

[5] Костюков А. А. Теория корабельных волн и волнового сопротивления. — Ленинград : Судостроение, 1959. — 311 с.

[6] Басин А. М., Веледницкий И. О., Ляховицкий А. Г. Гидродинамика судов на мелководье. — Ленинград : Судостроение, 1976. — 320 с.

[7] Войткунский Я. И. Сопротивление движению судов. — Ленинград : Судостроение, 1988. — 287 с.

[8] Воробьев Ю. Л. Гидродинамика судов в стесненном фарватере. — Санкт-Петербург : Судостроение, 1992. — 224 с.

[9] Tarafder M. S. Third order contribution to the wave-making resistance of a ship at finite depth of water // Ocean Engineering. — 2007. — Vol. 34, no. 1. — P. 32–44.

[10] Tarafder M. S., Suzuki K. Wave-making resistance of catamaran hull in shallow water using a potential based panel method // Journal of Ship Research. — 2008. — Vol. 52, no. 1. — P. 16–29.

[11] Tarafder M. S., Suzuki K. Computation of free surface flow around a ship in shallow water using a potential based panel method // International Shipbuilding Progress. — 2006. — Vol. 53, no. 1. — P. 33–54.

[12] Tarafder M. S., Khalil G. M. Calculation of ship sinkage and trim in deep water using a potential based panel method // International Journal of Applied Mechanics and Engineering. — 2006. — Vol. 11, no. 2. — P. 401–414.

[13] Застосування методу граничних елементів для розрахунку корабельних хвиль / Горбань В. О., Горбань І. М., Масюк С. В. і Нікішов В. І. // Прикладна гідромеханіка. — 2011. — Т. 13(85), № 4. — С. 22–29.

[14] Горбань В. О., Масюк С. В., Нікішов В. І. Чисельне моделювання корабельних хвиль при рухові судна в умовах обмеженного фарватеру // Прикладна гідромеханіка. — 2013. — Т. 15(87), № 2. — С. 13–21.

[15] Костюков А. А. О волнообразовании и волновом сопротивлении судов в ограниченном фарватере жидкости // Прикладная математика и механика. — 1955. — Т. 19, № 5. — С. 557–570.

[16] Jovanović M. Otpor broda u plovnom kanalu // Vodoprivreda. — 2004. — Vol. 36, no. 209-210. — P. 283–288.

[17] Масюк С. В., Нікішов В. І. Розрахунок корабельних хвиль, спричинених рухом судна у прямокутному та трапецієвидному каналах // Прикладна гідромеханіка. — 2016. — Т. 18(90), № 2. — С. 49–57.

[18] Стеценко О. Г. Потенціал швидкості стаціонарного руху в каналі системи двох одиничних джерел // Прикладна гідромеханіка. — 2016. — Т. 18(90), № 2. — С. 76–80.

[19] Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. — Москва : Наука, 1977. — 805 с.

[20] Liu P. L.-F., Wu T.-R. Waves generated by moving pressure disturbances in rectangular and trapezoidal channels // Journal of Hydraulic Research. — 2004. — Vol. 42, no. 2. — P. 163–171.

[21] Torsvik T., Pedersen G., Dysthe K. Influence of cross channel depth variation on ship wave patterns // Mechanics and Applied Mathematics / Department of Mathematics, University of Oslo. — 2008. — No. 2.

[22] Torsvik T., Dysthe K., Pedersen G. Influence of variable Froude number on waves generated by ships in shallow water // Physics of Fluids. — 2006. — Vol. 18, no. 6. — P. 062102(1–11).

[23] Ertekin R. C., Webster W. C., Wehausen J. V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width // Journal of Fluid Mechanics. — 1986. — Vol. 169. — P. 275–292.

REFERENCES

[1] G. E. Gadd, “A method for computing the flow and surface wave pattern around full forms,” *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects*, vol. 118, pp. 207–219, 1976.

[2] C. W. Dawson, “A practical computer method for solving wave problems,” in *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, (Berkeley), pp. 30–39, University of California, 1977.

[3] N. E. Kochin, *Collected works*, vol. 2, ch. On wave drag and lifting force of bodies immersed in a liquid, pp. 105–162. Moscow: The Academy of Sciences of the USSR, 1949.

[4] M. D. Haskind, “General theory of wave drag of the bodies in a liquid of finite depth,” *Prikladnaâ matematika i mehanika*, vol. 9, no. 3, pp. 257–264, 1945.

[5] A. A. Kostyukov, *Theory of ship waves and wave drag*. Leningrad: Sudostroenie, 1959.

[6] A. M. Basin, I. O. Velednickii, and A. G. Liahovickii, *Hydrodynamics of shallow water ships*. Leningrad: Sudostroenie, 1976.

[7] Y. I. Voitkunskii, *Ship movement resistance*. Leningrad: Sudostroenie, 1988.

[8] Y. L. Vorobiov, *Hydrodynamics of ships in cramped fairway*. Saint-Petersburg: Sudostroenie, 1992.

[9] M. S. Tarafder, “Third order contribution to the wave-making resistance of a ship at finite depth of water,” *Ocean Engineering*, vol. 34, no. 1, pp. 32–44, 2007.

[10] M. S. Tarafder and K. Suzuki, “Wave-making resistance of catamaran hull in shallow water using a potential based panel method,” *Journal of Ship Research*, vol. 52, no. 1, pp. 16–29, 2008.

[11] M. S. Tarafder and K. Suzuki, “Computation of free surface flow around a ship in shallow water using a potential based panel method,” *International Shipbuilding Progress*, vol. 53, no. 1, pp. 33–54, 2006.

[12] M. S. Tarafder and G. M. Khalil, “Calculation of ship sinkage and trim in deep water using a potential based panel method,” *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 11, no. 2, pp. 401–414, 2006.

[13] V. O. Gorban, I. V. Gorban, S. V. Masiuk, and V. I. Nikishov, "Adaptation of the boundary element method for ship wave calculations," *Applied Hydromechanics*, vol. 13(85), no. 4, pp. 22–29, 2011.

[14] V. O. Gorban, S. V. Masyuk, and V. I. Nikishov, "Computation of the ship waves on the movement of ships in restricted waterways," *Applied Hydromechanics*, vol. 15(87), no. 2, pp. 13–21, 2013.

[15] A. A. Kostyukov, "On wave formation and wave drag of ships in the limited liquid fairway," *Prikladnaâ matematika i mehanika*, vol. 19, no. 5, pp. 557–570, 1955.

[16] M. Jovanović, "Otpor broda u plovnom kanalu," *Vodoprivreda*, vol. 36, no. 209-210, pp. 283–288, 2004.

[17] S. V. Masiuk and V. I. Nikishov, "Calculation of ship waves caused by vessel motion in rectangular and trapezoidal channel," *Applied Hydromechanics*, vol. 18(90), no. 2, pp. 49–57, 2016.

[18] O. G. Stetsenko, "Velocity potential of stationary motion in channel of a system of two single sources," *Applied Hydromechanics*, vol. 18(90), no. 2, pp. 76–80, 2016.

[19] L. N. Sretenskii, *Liquid wave motion theory*. Moscow: Nauka, 1977.

[20] P. L.-F. Liu and T.-R. Wu, "Waves generated by moving pressure disturbances in rectangular and trapezoidal channels," *Journal of Hydraulic Research*, vol. 42, no. 2, pp. 163–171, 2004.

[21] T. Torsvik, G. Pedersen, and K. Dysthe, "Influence of cross channel depth variation on ship wave patterns," in *Mechanics and Applied Mathematics*, no. 2, Department of Mathematics, University of Oslo, 2008.

[22] T. Torsvik, K. Dysthe, and G. Pedersen, "Influence of variable Froude number on waves generated by ships in shallow water," *Physics of Fluids*, vol. 18, no. 6, pp. 062102(1–11), 2006.

[23] R. C. Ertekin, W. C. Webster, and J. V. Wehausen, "Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 169, pp. 275–292, 1986.

O. G. Stetsenko

Velocity potential of unsteady motion of a system of two sources in a rectangular channel

The paper deals with the problem of determining the velocity potential generated by a non-stationary motion of a system of two sources with similar time-variable intensities located under the free surface of a rectangular cross-section channel symmetrically to its vertical median plane. The overall solution is the sum of two potentials. The first one is the sum of potentials of the sources represented as a product of a source intensity and Green function for Laplace equation in the infinite medium, the said potentials including the sources being a reflection in respect of the moving system relative to a channel bottom and the infinite source system being a reflection of the moving system relative the channel side walls in addition to the mowing system itself. This approach allows the fulfilling of boundary conditions for this potential on the bottom and the side walls. By integral representation for a single source and Poisson formulae for the above-mentioned infinite source system, this component is a Fourier cosine series in respect of a transverse coordinate. The involved coefficients comprise an integral representation by longitudinal coordinate for a function being determined by the known characteristics of the mowing sources and the sources being the reflection of the above moving sources relative to the bottom. The second potential is calculated to satisfy the boundary conditions on the free surface. It is responsible for the influence of the free surface on the solution behavior. A field of surface waves generated by the moving source system is described. Like the first potential, it has the form of a Fourier cosine series with coefficients that include the unknown image function. To determine the latter, an initial-boundary problem was formulated, with the fulfillment of boundary conditions on the bottom and free surface. The solution for the second potential also has two components. The first component obtained in analytical form represents the system of two periodic motions that occurred in the hydrodynamic field corresponding to the motion of the mentioned source system. The Froude number and wave spectrum corresponding to each mode determine the period of these time oscillations. The second component is a double integral, by the time and longitudinal wave number. It depends on the behavior of a non-stationary velocity variation, the intensity of the moving sources, and the Froude number. This term represents the contribution of the inertial forces generated by the added mass.

KEY WORDS: ship hydrodynamics, velocity potential, rectangular channel, Froude number, unsteadiness

А. Г. Стеценко

Потенциал скорости нестационарного движения системы двух источников в прямоугольном канале

Решена задача определения потенциала скорости, обусловленного нестационарным движением системы двух источников с одинаково изменяющейся во времени интенсивностью, расположенных под свободной поверхностью канала с прямоугольным поперечным сечением симметрично относительно его вертикальной срединной плоскости. Искомое решение состоит из двух слагаемых. Первое из них является суммой потенциалов источников, представленных в виде произведения их интенсивности на функцию Грина для уравнения Лапласа в безграничной среде. Для обеспечения выполнения граничных условий, кроме подвижной системы действительных источников, сюда включены мнимые источники, порожденные ее отражением от дна канала и бесконечная система источников, отраженных от боковых стенок канала. В результате использования интегрального представления для единичного источника и формулы Пуассона для бесконечной системы источников эта часть решения сведена к косинус-ряду Фурье по поперечной координате. Коэффициенты данного ряда содержат интегральное представление по продольной координате для функции, определяемой по известным характеристикам действительных и отраженных относительно дна подвижных источников. Второй потенциал найден так, чтобы обеспечить выполнение граничного условия на свободной поверхности.

При этом учтено влияние свободной поверхности на характер искомого решения. В частности, описано поле поверхностных волн, генерируемое подвижной системой источников. Как и для первого потенциала, соответствующее решение найдено в виде косинус-ряда Фурье с коэффициентами, содержащими неизвестную образ-функцию. Для определения последней сформулирована начально-граничная задача с выполнением граничных условий на дне и свободной поверхности. Решение для второго потенциала также имеет две составляющие. Первая из них получена в аналитическом виде и состоит из системы двух периодических движений в гидродинамическом поле, соответствующем движению рассматриваемой системы источников. Период этих временных колебаний определяется числом Фруда и соответствующим каждой моде волновым спектром. Вторая составляющая получена в виде двойного интеграла (по времени и продольному волновому числу) и определяется характером нестационарности изменения скорости и интенсивности движущихся источников, а также числом Фруда. Она дает вклад инерционных сил, обусловленных просоединенной массой.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: гидродинамика судна, потенциал скорости, прямоугольный канал, число Фруда, нестационарность