СПЕКТР ОБЪЕМНЫХ ВОЛН СДВИГА В РЕГУЛЯРНО-СЛОИСТОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. ЛЕВЧЕНКО

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: ylvv@ukr.net

Предложен метод вывода дисперсионных соотношений для объемных волн сдвига в регулярно слоистых средах, что позволяет исследовать свойства волн при повторении поля с произвольным значением периода структуры. Исследована взаимосвязь спектров дисперсионных кривых в конечных и бесконечных структурах. Проведен анализ форм колебаний объёмных волн сдвига.

ВВЕДЕНИЕ.

Проблеме распространения волн различной физической природы в периодических структурах посвящено большое количество работ [1–6]. Основными направлениями этих исследований являлось изучение структуры зон пропускания и условий существования объёмных и поверхностных волн. Исследование дисперсионных свойств и характера колебаний объемных волн в настоящее время является недостаточно изученным. Частично дисперсионные свойства и колебания объемных волн исследовались в [4]. В этой работе были получены дисперсионные соотношения и изучены формы колебаний упругих волн для минимального значения периода повторения поля, которое совпадало с периодом структуры. Проблема исследования спектра объёмных волн в общем случае является открытой. Как известно периодическая среда обладает свойством трансляционной симметрии, что позволяет повторение поля с произвольным значением периода структуры. Поэтому в настоящей работе выведены дисперсионные уравнения, для объемных волн сдвига с произвольным периодом повторения, а также исследован их спектр и формы колебаний.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что имеется слоистая структура образованная периодическим повторением вдоль оси Oz пакета слоев толщины h. Пакет состоит из Q слоев. Свойства слоев характеризуются параметрами Ламе λ_q, μ_q, плотностью ρ_q и толщиной h_q ($q = 1,\ldots,Q$). На поверхностях раздела слоев выполняются условия сопряжения механических величин [3]. Процесс распространения волн сдвига в слоях описывается системой уравнений [3-5]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}, \qquad \sigma_{yx} = \mu\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \sigma_{yx} = \mu\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (1)$$

Будем полагать, что слои однородны вдоль направлений Ox и Oy. Материальные параметры μ и ρ являются периодическими функциями переменной z с периодом h. Зависимость полей от координаты x и времени t будем описывать зависимостью $\exp[i(kx - \omega t)]$ (k –постоянная распространения, ω – циклическая частота).

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение уравнений (1) относительно $u(x,z,t)$ в каждом из слоев пространства ищем в виде

$$u(x,z,t) = [B^{(1)}_{(n-1)Q+q} \sin\Omega_q(z - z_{n,q}) + B^{(2)}_{(n-1)Q+q} \cos\Omega_q(z - z_{n,q})]\exp(i(kx - \omega t)), \qquad (2)$$

где $z_{n,q-1} < z < z_{n,q}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$ $z_{n,q} = (n-1)h + h_1 + \cdots h_q$, $h = h_1 + h_2 + \cdots h_Q$.

Подставив решения (2) в условия на границах раздела свойств $z_{n,q}$ исходную задачу сведем к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &N(a_1,0)\vec{B}_{(n-1)Q+1} = N(a_2,\theta_2)\vec{B}_{(n-1)Q+2},\\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\ &N(a_{Q-1},0)\vec{B}_{(n-1)Q+Q-1} = N(a_Q,\theta_Q)\vec{B}_{nQ},\\ &N(a_Q,0)\vec{B}_{nQ} = N(a_1,\theta_1)\vec{B}_{nQ+1}, \end{aligned} \qquad (3)$$

Матрицы $N(a_i,\theta_i)$, $N(a_i,0)$, вектора столбцы $\vec{B}_j$ и обозначения, используемые в системе (3) совпадает с принятыми в работе [3].

Решение системы (3) в регулярно-слоистом полупространстве ищем в виде

$$\begin{aligned} &\vec{B}_{(n-1)Q+1} = \sum_{j=1}^{2} K_j \chi_j^n (N_Q)^{M-1} N^{-1}(a_q;0) \prod_{q=2}^{Q} N(a_q;\theta_q) N^{-1}(a_q;0)\vec{Y}_j,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\vec{B}_{(n-1)Q+Q-1} = \sum_{j=1}^{2} K_j \chi_j^n (N_Q)^{M-1} N^{-1}(a_{(n-1)Q+Q-1};0) N(a;\theta_Q) N^{-1}(a_Q;0)\vec{Y}_j,\\ &\vec{B}_{nQ} = \sum_{j=1}^{2} K_j \chi_j^n (N_Q)^{M-1} N^{-1}(a_q;0)\vec{Y}_j. \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь χ_j и Y_j характеристические числа, собственные вектора передаточной матрицы $N_{MQ} = (N_Q)^M$, где $N_Q = \prod_{q=1}^{Q} N^{-1}(a_q;0)N(a_q,\theta_q)$, $M = 1,2,\cdots$. Характеристическое уравнение матрицы N_{MQ} является возвратным [3-5] и имеет вид

$$\chi^2 - 2b_{MQ}\chi + 1 = 0, \qquad b_{MQ} = spurN_{MQ}/2 \qquad (5)$$

Исходя из вида дисперсионного уравнения (5) при $M = 1$ условие существования объемных запишется $|b_Q| \le 1$. При этом границы зон пропускания будут дисперсионными соотношениями для объемных волн сдвига. Граница [4]

$$b_Q = 1 \qquad (6)$$

соответствует колебаниям период повторения, которых совпадает с периодом структуры, а колебания на границе

$$b_Q = -1 \qquad (7)$$

повторяются с периодом $2h$.

Положив $Q = 2$, а решения выбрав в виде

$$u(x,z,t) = [B^{(1)}_{2n-1}\sin\Omega_1(z - z_{2n=1} + h_1/2) + B^{(2)}_{2n-1}\cos\Omega_1(z - z_{2n-1} + h_1/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \quad z_{2n-2} < z < z_{2n-1},$$
$$u(x,z,t) = [B^{(1)}_{2n}\sin\Omega_2(z - z_{2n} + h_2/2) + B^{(2)}_{2n}\cos\Omega_2(z - z_{2n} + h_2/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \quad z_{2n-1} < z < z_{2n}. \tag{8}$$

на основании условий сопряжения между слоями получаем систему однородных алгебраических уравнений

$$N(a_1,-\theta_1/2)\vec{B}_{2n-1} = N(a_2,\theta_2/2)\vec{B}_{2n},$$
$$N(a_2,-\theta_2/2)\vec{B}_{2n} = N(a_1,\theta_1/2)\vec{B}_{2n+1}. \tag{9}$$

На границах $b_2 = 1$ бесконечная система уравнений (9) сводится к двум независимым системам уравнений

$$\begin{gathered}B^{(1)}_1\sin(\theta_1/2) + B^{(1)}_2\sin(\theta_2/2) = 0;\\ B^{(1)}_1 a_1\cos(\theta_1/2) - B^{(1)}_2 a_2\cos(\theta_2/2) = 0.\\ B^{(2)}_1\cos(\theta_1/2) - B^{(2)}_2\cos(\theta_2/2) = 0,\\ B^{(2)}_1 a_1\sin(\theta_1/2) + B^{(2)}_2 a_2\sin(\theta_2/2) = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Такой вид систем уравнений позволяет показать, что на границах $b_2 = 1$ зон пропускания происходят антисимметричные - антисимметричные (AA)

$$u(x,z,t) = [B^{(1)}_{2n-1}\sin\Omega_1(z - z_{2n=1} + h_1/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \quad 0 < z < h_1, \tag{11}$$
$$u(x,z,t) = [B^{(1)}_{2n}\sin\Omega_2(z - z_{2n} + h_2/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \quad h_1 < z < h,$$

и симметричные-симметричные (SS) колебания относительно срединных плоскостей слоев.

На частотах, определяемых из уравнения (7), постоянные B_{2n-1} и B_{2n} связаны соотношениями $\cdots = \vec{B}_{-3} = -\vec{B}_{-1} = \vec{B}_1 = -\vec{B}_3 = \cdots ;\cdots = \vec{B}_{-4} = -\vec{B}_{-2} = \vec{B}_0 = -\vec{B}_2 = \vec{B}_4 \cdots$, период колебаний становит $2h$, а бесконечная система уравнений сводится к следующим независимым системам уравнений

$$\begin{gathered}B^{(1)}_1\sin(\theta_1/2) - B^{(1)}_2\cos(\theta_2/2) = 0,\\ B^{(1)}_1 a_1\cos(\theta_1/2) - B^{(1)}_2 a_2\sin(\theta_2/2) = 0.\\ B^{(2)}_1\cos(\theta_1/2) + B^{(2)}_2\sin(\theta_2/2) = 0,\\ B^{(2)}_1 a_1\sin(\theta_1/2) + B^{(2)}_2 a_2\cos(\theta_2/2) = 0.\end{gathered}\ . \tag{12}$$

Исходя из систем (12) можно показать, что на частотах, определяемых из уравнений соответствующих $b_2 = -1$, имеет место симметрия колебаний относительно срединных плоскостей слоев ASSA на толщине $2h$

$$u(x,z,t) = [B^{(1)}_{2n-1}\sin\Omega_1(z - z_{2n=1} + h_1/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \quad 0 < z < h_1,$$
$$u(x,z,t) = [B^{(1)}_{2n}\cos\Omega_2(z - z_{2n} + h_2/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \quad h_1 < z < h,$$
$$u(x,z,t) = [B^{(1)}_{2n+1}\cos\Omega_1(z - z_{2n=1} + h_1/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \quad h < z < h + h_1,$$
$$u(x,z,t) = [B^{(1)}_{2(n+20}\sin\Omega_2(z - z_{2n} + h_2/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \quad h + h_1 < z < 2h,$$

или SAAS

$$u(x,z,t) = [B^{(1)}_{2n-1}\cos\Omega_1(z - z_{2n=1} + h_1/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \quad 0 < z < h_1,$$

$$u(x,z,t)=[B_{2n}^{(1)}\sin\Omega_2(z-z_{2n}+h_2/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \qquad h_1<z<h,$$
$$u(x,z,t)=[B_{2n+1}^{(1)}\sin\Omega_1(z-z_{2n=1}+h_1/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \quad h<z<h+h_1,$$
$$u(x,z,t)=[B_{2(n+20}^{(1)}\cos\Omega_2(z-z_{2n}+h_2/2)]\exp(i(kx-\omega t)); \qquad h+h_1<z<2h.$$

Таким образом, на периоде колебаний $2h$ имеем симметрию типа SS или AA относительно центральной плоскости колебаний.

Чтобы получить дисперсионные соотношения для объемных волн в общем случае рассмотрим характеристическое уравнение, предположив, что новый порождающий пакет состоит из M первоначальных порождающих пакетов. Исходя из вида характеристического уравнения (5), дисперсионное уравнение для объемных волн в этом случае можно записать

$$(b_{MQ}-1)(b_{MQ}+1)=0 \tag{13}$$

Используя формулу Абелеса [1,2]

$$(N_Q)^m=\begin{Bmatrix} N_Q^{11}U_{m-1}(b_Q)-U_{m-2}(b_Q) & N_Q^{12}U_{m-1}(b_Q) \\ N_Q^{21}U_{m-1}(b_Q) & N_Q^{22}U_{m-1}(b_Q)-U_{m-2}(b_Q) \end{Bmatrix}$$

дисперсионное уравнение (13) можно представить в виде

$$(b_QU_{M-1}(b_Q)-U_{M-2}(b_Q)-1)(b_QU_{M-1}(b_Q)-U_{M-2}(b_Q)-1)=0, \tag{14}$$

где $U_M(b_Q)$ полиномы Чебышева. Выполнив ряд преобразований и учитывая унимодулярность матрицы N_{mQ} дисперсионное соотношение (14) можна свести к виду

$$(b_Q+1)(b_Q-1)U_{M-1}(b_Q)=0. \tag{15}$$

Воспользовавшись свойствами полиномов Чебышева [1,2] уравнения (15) можно свести к более простым

$$(b_Q+1)(b_Q-1)(b_Q-\cos\frac{\pi}{M})(b_Q-\cos\frac{2\pi}{M})\ldots(b_Q-\cos\frac{(m-1)\pi}{M})=0\,. \tag{16}$$

Такая запись дисперсионного соотношения позволяет заключить, что дисперсионные кривые для объемных волн локализованы в зонах пропускания.

Для лучшего понимания характера объемных волн сдвига рассмотрим нормальные волны в регулярно-слоистой пластине, состоящей из M порождающих пакетов. Граничные поверхности пластины $z=0$ и $z=Mh$ свободны от напряжений. Подстановка решений (2) в условия сопряжения на плоскостях разрыва свойств позволяет свести задачу к системе однородных уравнений относительно неизвестных $B_p^{(i)}$ $(i=1,2;\ p=1,2,\ldots MQ)$

$$\begin{aligned}
&\vec{N}_1(a_1,\theta_1)\vec{B}_1=0,\\
&N(a_1,0)\vec{B}_{(n-1)Q+1}=N(a_2,\theta_2)\vec{B}_{(n-1)Q+2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&N(a_{Q-1},0)\vec{B}_{(n-1)Q+Q-1}=N(a_Q,\theta_Q)\vec{B}_{(n-1)Q+Q}\\
&\vec{N}_Q(a_Q,0)\vec{B}_{MQ}=0. \quad n=1,\cdots L.
\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь введена вектор строка $\vec{N}(a_q,\theta_q)=\left[N^{11}(a_q,\theta_q);N^{11}(a_q,\theta_q)\right]$. Введя замену неизвестных по формуле $\vec{C}_{(n-1)Q+q}=N(a_q,0)\vec{B}_{(n-1)Q+q}$, систему уравнений (17) в новых переменных можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\vec{N}(a_1,\theta_1)N(a_1,0)\vec{C}_1 = 0,\\
&C_{(n-1)Q+1} = N(a_2,\theta_2)N^{-1}(a_2,0)\vec{C}_2,\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&C_{(n-1)Q+Q-1} = N(a_q,\theta_Q)N^{-1}(a_Q,0)\vec{C}_Q,\\
&\vec{N}(a_Q,0)N^{-1}(a_Q,0)\vec{C}_{MQ} = 0.
\end{aligned} \qquad (18)$$

В результате реккурентных преобразований система уравнений (18) сводится к виду $N_{MQ}^{12}\vec{C}_1^{12} = 0$. здесь $N_{MQ} = (N_Q)^M$. Из требования существования нетривиального решения системы (18), используя свойства полиномов Чебышева, находим дисперсионные уравнения для нормальных волн сдвига в пластине

$$N_Q^{12} = 0; \qquad (b_Q - \cos\frac{\pi}{M})(b_Q - \cos\frac{2\pi}{M})\dots(b_Q - \cos\frac{(m-1)\pi}{M}) = 0. \qquad (19)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вид дисперсионных соотношений (16) и (19) позволяет заключить, что дисперсионные кривые, определяемые вторым соотношением (19), совпадают с дисперсионными кривыми для объемных волн, локализованных в зонах пропускания. При фиксированном M уравнения (19) имеют $M-1$ корень в каждой из зон, где выполняется условие $|b_Q| < 1$. Каждое из решений уравнения $b_Q = \cos(m\pi / M)$ в общем случае может быть охарактеризовано тремя индексами (m, l, M), где l порядковый номер зоны пропускания при возрастании частоты от ноля. Соответственно этими же индексами могут быть охарактеризованы и типы колебаний в периодических структурах. Отметим, что типы колебаний (m, l, M) и (rm, l, rM) являются эквивалентными. В работе показано, что формы колебаний сильно зависимы от значения индекса l, а от значений индексов m и M такой зависимости не прослеживается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баас Ф. Г., Булгаков А. А., Тетервов А. П.* Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 886 с.
3. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук думка, 1982.– 200 с.
4. *Шульга Н. А., Левченко В. В., Подлипенец А. Н.* Формы колебаний на границах зон пропускания объемных волн сдвига. // Прикл. мех. –1984. – **20**, № 11.– С.84–93.
5. *Levchenko V. V.* Localization of shear waves near layers separating two regularly laminated half-spaces. // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, № 1 – P. 98–103.
6. *Shul'ga N. A.* Propagation of elastic waves in periodically inhomogeneous media. // Int.Appl. Mech. – 2003. – **39**, № 6. – P. 763–796.