Светлой памяти академика АН СССР-РАН
Михаила Михайловича Лаврентьева,
рассмотревшего, одобрившего и опубликовавшего
новые подходы автора.

ОБ ОДНОМ НОВОМ СПОСОБЕ КОРРЕКТНОГО РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ВОЛНОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В.С. КРУТИКОВ

Международный технологический университет «Николаевская политехника»
E-mail: mnkukraine@mksat.net

Методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов впервые корректно (однозначно) получены функции управления волновыми процессами в областях с подвижными границами, с нелинейными условиями и подвижными границами, с нелинейными условиями на подвижных границах.

1. «Задача определения звуковых тонов, излучаемых колеблющейся системой, иногда разрешима в явном виде, а иногда нет, но обратная задача определения формы колокола по звуку, который он способен издавать, просто ставит в тупик самых искусных математиков, физиков, исследователей…. Сейчас мы должны с восхищением приветствовать каждый, даже небольшой шаг, в этом направлении» [1, С. 285]. В работе делается попытка сделать шаг в этом направлении. А именно, решить сложные задачи в областях с подвижными границами – определить начальные размеры сферы и цилиндра по значениям функций воздействия (нелинейные условия (3), (4)) в точке волновой зоны и на подвижной границе. При этом величины начального радиуса, перемещений и законы изменения скорости подвижных границ могут быть произвольными. А законы изменения скорости и радиуса подвижной границы неизвестны, подлежат определению и, как правило, нелинейны. Подобные задачи в математической физике не рассматривались.

Рассмотрим задачу:

$$\varphi_{tt} - a^2\varphi_{rr} - (\nu - 1)\varphi_r a^2 r^{-1} = 0, \qquad r \ge R(t), \tag{1}$$

$$\varphi_t(r,0) = \varphi(r,0) = 0, \qquad R(0) = r_0, \tag{2}$$

$$P - P_0\big|_{r=R(t)} = -\rho\varphi_t - 0,5\rho\varphi_r^{\ 2}, \tag{3}$$

$$P - P_0\big|_{r=r_1} = -\rho\varphi_t - 0,5\rho\varphi_r^{\ 2}, \tag{4}$$

$$v(R(t),t) \ne dR(t)/dt \text{ б} \tag{5}$$

где φ – потенциал скорости; ν – показатель симметрии; t – время; $R(t), r_0, r, r_1$ – координаты: подвижных границ, начальная, текущая, точки волновой зоны соответственно; P_0, ρ, a – давление, плотность, скорость распространения возмущений в невозмущенной жидкости; v – скорость, (5) – условие проницаемости (излучения) подвижной границы.

В теории волн уравнение (1) имеет фундаментальное значение [2]. В рамках рассматриваемой математической модели под управлением понимается: 1 – функция скорости (движения и проницаемости подвижных границ) или 2 – функция давления (на подвижной границе). Известны аналитические соотношения (74.6), (74.8) и т.д. (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Теор. физика», 1986. Т.6), которые не учитывают влияния r_0, применить их к обратным задачам затруднительно.

Некорректными считаются задачи, для которых не удовлетворяется хотя бы одно из условий: а) решение задачи существует; б) решение определяется однозначно; в) задача устойчива (А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьев) [3, С. 930]. Ранее точные аналитические решения обратных и прямых волновых задач в областях с подвижными (ПГ) и подвижными проницаемыми границами (ППГ) получены [4-7] (условие 1). Решения устойчивы [4, С. 18] (условие 3); второе условие не выполнено – решения неоднозначны. Говорилось, например, в [7], что функции воздействия можно получить (обеспечить) с различных (бесконечного множества) величин начального радиуса r_0, но при этом законы движения границ будут существенно различными, также различными будут волновые поля, кроме значений в одной точке r_1. Это не позволяло: корректно (однозначно) определить никакими способами (ни численно, ни аналитически и т.д.) функции управления; однозначно восстановить волновые поля в полном объеме от следствия (функции воздействия) до причины (функции управления); однозначно, корректно решить вопросы управления волновыми процессами в областях с ПГ и ППГ (определить вводимую в плазменный канал мощность [8,9] $N(t)$ (15) [7]).

Преодоление некорректности функций управления волновыми процессами имеет большое научное, прикладное и принципиальное значение. Без решения вопросов многозначности обратных, прямых, дважды нелинейных (с ПГ и нелинейными дополнительными условиями) волновых задач решения проблемы подвижных границ не может считаться полным и окончательно завершенным.

2. Определять функции управления волновыми процессами будет методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [4,5]. Для определенности рассмотрим случай сферической симметрии $\nu = 3$. В соответствии с этими методами получим решение уравнения (1), которое удовлетворяет начальным условиям (2) и условию $P - P_0\big|_{r=r_1} = -\rho\varphi_t = f\left[t - (r_1 - r_0)/a\right]$ – обратная задача; функции управления при этом имеют вид (6-8) [4]. Для общего случая произвольных законов движения границ и видов функции f последнюю можно аппроксимировать полиномом Лагранжа в степени m. Число m характеризует количество точных значений функции и может быть сколь угодно большим.

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi_1^m, \; A_m = const \tag{6}$$

Тогда, с учетом [4, ф-лы (6)–(8)] и (6) функции управления имеют вид:

$$P\big(R(t),t\big) = \frac{r_1}{R(t)}\sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2}\rho v^2\big(R(t),t\big), \qquad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}, \tag{7}$$

$$v\big(R(t),t\big)\rho R^2(t)/r_1 = \frac{R(t)}{a}\sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{m+1}\xi^{m+1}, \tag{8}$$

$$\frac{\left[R^3(t) - r_0^3\right]\cdot\rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{m+1}\xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m \cdot m!}{(m+2)!}\xi^{m+2}. \tag{9}$$

Для ступенчатой функции в точке r_1 функции управления 1 и 2 имеют вид:

$$P\big(R(t),t\big)=\frac{r_1}{R(t)}A_0\sigma_0(\xi)-\frac{1}{2}\rho v^2\big(R(t),t\big);\quad v\big(R(t),t\big)=\frac{r_1}{R^2(t)\rho}\left[\frac{R(t)}{a}A_0+A_0\xi\right],\tag{10}$$

$$\frac{\left[R^3(t)-r_0^{\,3}\right]\cdot\rho}{3r_1}=\frac{R(t)}{a}A_0\xi+\frac{A_0}{2}\xi^2,\quad \xi=t-\frac{R(t)-r_0}{a},\quad \sigma_0(t-\tau)=\begin{cases}0,\ t<\tau\\1,\ t\ge\tau\end{cases}\tag{11}$$

Это точное аналитическое решение обратной задачи с ПГ имеет важное значение.

С учетом (7), (8) и (9) запишем:

$$P\big(R(t),t\big)=\frac{r_1}{R(t)}\sum_{m=0}^{\infty}A_m\xi^m-\frac{1}{2}\rho\left\{\frac{r_1}{R^2(t)\rho}\left[\frac{R(t)}{a}\sum_{m=0}^{\infty}A_m\xi^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{m+1}\xi^{m+1}\right]\right\}^2.\tag{12}$$

Здесь $P\big(R(t),t\big)$ известно по условию (3). Это соотношение пригодно для любых точек $R(t)=r=r_1$. Соотношения для определения A_m в общем случае произвольных величин начального радиуса, законов движения границ и вида $P\big(R(t),t\big)$ имеют вид (метод последовательного определения коэффициентов Лагранжа A_m):

$$A_m=N\pm\left(N^2-M\right)^{1/2};\ N=-\frac{1}{2}\frac{2C_1C_2^{\,2}C_3C_4-\dfrac{r_1}{R(t)}\xi^m}{C_1C_2^{\,2}C_4^{\,2}};\ M=\frac{C_1C_2^{\,2}C_3-C_0}{C_1C_2^{\,2}C_4},\tag{13}$$

где

$$C_0=-P\big(R(t),t\big)+\frac{r_1}{R(t)}\sum_{m=0}^{m-1}A_m\xi^m;\ C_1=\frac{1}{2}\rho;\ C_2=\frac{r_1}{R^2(t)\rho};$$

$$C_3=\frac{r_1}{R(t)}\sum_{n=0}^{m-1}A_n\xi^n+\sum_{n=0}^{m-1}\frac{A_n}{n-1}\xi^{n-1};\ C_4=\frac{r_1}{R(t)}\xi^m+\frac{1}{m+1}\xi^{m+1},$$

при $R(t)=r_1$ (12), (13) переходят в полученные ранее (2.4), (2.7) [10].

Решение проводим методом последовательных приближений. Следует отметить, что в работе Баева А.В. (Доклады РАН. 1986. Т.287. №6) рассматривается другая разновидность обратных волновых задач методом последовательных приближений, без учета ПГ и нелинейных условий на подвижных границах.

3. Преодоление некорректности (многозначности), связанной с величиной r_0 для случая заданного нелинейного условия на ПГ $P-P_0\big|_{r=R(t)}=-\rho\varphi_t-0{,}5\rho\varphi_r^{\,2}$.

Пусть необходимо на ПГ обеспечить функцию воздействия $P\big(R(t),t\big)$ в виде кривой (1) (рис. 1 [5]). Воспользуемся физическим фактом: функция $P\big(R(t),t\big)$ несет информацию о том, с какого начального радиуса начиналось движение, с какой скоростью расширялся поршень, и что на ПГ при $t\to 0$ и одинаковом r_0 значение $P\big(R(t),t\big)$ (кривая 1, рис. 1 [5]) и ступенчатой функции (10) равны. Формулы (10) действительны при любом $r=R(t)=r_1$. Определяем A_0, для чего выбираем такое r_1, близкое к r_0, чтобы при малом t ($0,1; 0,001\cdot 10^{-6}$ с и т.д.) с большой точностью равнялось $P\left(R(t),t\right)\approx P\left(r_1,t^0\right)$.

Определяем A_0. При $R(t)=r_1$ из (10), $\rho = 102\, кг\cdot c^2/м^4$, $a=1500\, м/с$, $t\to 0$, $A_0\left(t-\dfrac{r_1=R(t)-r_0}{a}\right)=0$, имеем

$$P_{\substack{\max\\ кривая1}} = 4730 = A_0 - 0,5\frac{1}{\rho a^2}A_0^{\,2} = A_0 - 21,7864924\cdot 10^{-6}A_0^{\,2}.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем $A_0 = 5354,67389$.

Определяем $v\left(R(t),\, t=0\right)$, из (10), учитывая $\xi=0$ при $t\to 0$, $r_1\approx r_0$

$$v\left(R(t),\, t=0\right) = \frac{A_0}{\rho a} = \frac{5354,67389\cdot 10^4}{102\cdot 1500} = 349,978685\, м/с.$$

Определяем r_1. Приближенно зависимость $\left(r_1/r_0\right)$ можно определить из (10) при $t\to 0$;

$$R(0)=r_0,\; A_0\left(t-\frac{r_0-r_0}{a}\right)=0;\; A_0 = 349,978685;$$

$$v\left(R(t),\, t=0\right) = \frac{r_1}{r_0^{\,2}\rho}\left[\frac{r_0}{a}A_0\right];\; 349,978685 = \frac{r_1\cdot 10^4 A_0}{102\cdot r_0\cdot a};\; \frac{r_1}{r_0}=1.$$

Определяем r_0 (выбираем r_1 как можно ближе к r_0, при этом время – сотые, тысячные доли *мкс*). С учетом найденных значений и (7) имеем соотношение для $t = 0,001\cdot 10^{-6}$:

$$4730 = 5354,67389 -$$

$$-\frac{0,5\cdot 102}{10^4}\left\{\frac{10^4}{(r_0\cdot 1)102}\left[\frac{(r_0\cdot 1)}{1500}5354,67389 + 5354,67389\left(0,001\cdot 10^{-6} - \frac{(r_0\cdot 1)-r_0}{1500}\right)\right]\right\}^2$$

решаемое известными методами, $r_0 = 1\cdot 10^{-3}\, м$, что точно соответствует решению прямой задачи методом характеристик полной системы (10) работы [5] уравнений движения, сплошности и состояния для изоэнтропических процессов в форме Тэта. Определив r_0, по (13) методом последовательного определения коэффициентов Лагранжа вычисляем A_m, а по (7)-(9) и другие однозначные значения функций управления. За первое приближение берутся значения, вычисленные по (13) при $r_1\approx R(t)$ [10].

4. Преодоление некорректности (многозначности), связанной с величиной r_0 для случая заданного нелинейного условия $P-P_0\big|_{r=r_1} = -\rho\varphi_t - 0,5\rho\varphi_r^{\,2} = F_1 - F_2$.

Пусть необходимо в точке волновой зоны r_1 обеспечить функцию воздействия в виде кривой 2 (рис. 1 [5]). Приближенно аппроксимируем эту кривую полиномом Лагранжа $f=\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_m\xi_1^{\,m}$, где

$$A_4 = 0,342831\cdot 10^{24};\; A_3 = -4,06966\cdot 10^{18};\; A_2 = 16,7101\cdot 10^{12};\; A_1 = -12,953\cdot 10^{6}; \qquad (14)$$

$$A_0 = 49,40999;\; m = 0\div 4;\; P\left(t=0,(3)\cdot 10^{-6}\right) = 46,8025056.$$

Определим значение $v(r_1,t)$ в момент прихода волны. Воспользуемся физическим фактом: (см. п.п. 3):

- функции $v(R(t),t)$ (решение методом характеристик системы (10) [5]) на ПГ при $t \to 0$ и ступенчатой функции (10) равны;
- функции $v(r_1,t)$ в точке r_1 (решение методом характеристик системы (10) [5]) в момент прихода волны $t^0 = (r_1 - r_0)/a$ и ступенчатой функции (10) при $R(t) = r_1$ равны.

$$A_0 = 49,40999;\ r_1 = 80 \cdot 10^{-3}\,м;\ a = 1500\,м/с;\ \rho = 102\,кгс \cdot с^2/м^4;$$

$$v(r_1,t) = \frac{r_1}{\left(R^2(t) = r_1^2\right)\rho}\left[\frac{R(t) = r_1}{a}A_0 + A_0\left(\xi = t^0 - \frac{r_1 - r_0}{a} = 0\right)\right] = 3,22941113\,м/с,$$

$$F_2 = 0,5\rho v^2 = 0,0531883906\,кгс/см^2.$$

Из (7) при $R(t) = r_1$, $t = 53 \cdot 10^{-6}$ – время выбираем такое, чтобы F_2 и погрешности были наименьшими, и F_2 мало отличались от произведенной оценки, получаем соотношение, A_m из (14):

$$46,8025056 = 49,40999 + A_1\xi^1 + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + A_4\xi^4 - (F_2 \approx 0);\ \xi = \left(53 \cdot 10^{-6} - \frac{r_1 - r_0}{a}\right),$$

в котором одно неизвестное r_0, решаемое известными методами: $r_0 = 1 \cdot 10^{-3}\,м$, что точно соответствует решению методом характеристик прямой задачи полной системы (10) [5]. Зная r_0, по (6)-(9) можно однозначно восстановить волновые поля в полном объеме, во всех точках, включая ПГ, а также восстановить функции управления.

5. В отличие от областей, направлений или объектов физических исследований «физическая проблема» имеет место, когда содержание ответа не ясно, когда имеет место непредсказуемость результатов и неопределенность границ применимости [11]. Все это в полной мере относится к проблемам ПГ, ППГ и вопросам управления. Необходимо добавить еще невозможность до настоящего времени корректного, однозначного определения функций управления волновыми процессами. Для сферических и особенно цилиндрических волн эти проблемы однозначно характеризуются как сложнейшие, фундаментальные «физические проблемы».

Рассмотрим случай цилиндрической симметрии. Методами [4-6] получим решение уравнения (1) для $\nu = 2$. Функции управления имеют вид (6)-(8) [7] (они многократно приведены, в том числе недавно, см. список литературы в [7]).

5.1. Преодоление первой некорректности, обусловленной множеством величин начального радиуса r_0 при различных законах изменения скорости ПГ, обеспечивающих однозначную функцию воздействия в точке r_1. Пусть необходимо обеспечить функцию воздействия в виде кривой 1 (рис. 1 [7]) в точке $r_1 = 200\,мм$, $a = 1460\,м/с$, $\rho = 102\,кгс \cdot с^2/м^4$. Следуя подробному описанию в п.п. 3, 4, воспользуемся нисходящей ветвью кривой 1 Рис. 1 [7] для периода $t \ge \alpha_2$, $\alpha_2 = t^0 + 4 \cdot 10^{-6}\,с$; $P_{max}(r_1,t) = 163\,кгс/см^2$; $\alpha = 0,00365 \cdot 10^{-6}$ из [7], которую аппроксимируем полиномом, где

$$A_0 = 163;\ A_1 = 5,60(6) \cdot 10^6;\ A_2 = 0,201(9) \cdot 10^{12};\ A_3 = -0,0161(3) \cdot 10^{18}. \qquad (15)$$

Соотношение, согласованное со структурой волнового уравнения [4,6,7] и с учетом реальных запаздываний будет иметь вид, время t выбрано по соображениям п.п. 3, 4:

$$P\left(r_1, t = 150,849315\cdot 10^{-6}\right) = 110,(9) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 - \left(F_2 \approx 0\right); \tag{16}$$

где $\xi = \left[t - \left(r_1 - r_0\right)/a\right] - 4\cdot 10^{-6} = \left(9,863014\cdot 10^{-6} + r_0/1,46\cdot 10^3\right)$; $F_2 = 0,5\rho v^2\left(r_1, t\right)$; A_m из (15), оценка величины $F_2 = 0,61565\,кгс/см^2$, которая будет еще меньше через $10\,мкс$, произведена по точным формулам (9)-(13) [7] при $R(t) = r_1$. Решение (16) производится известными методами: $r_0 = 0,2\cdot 10^{-3}\,м$, что точно соответствует значению r_0 при решении прямой задачи методом Годунова системы (14), (15) [7].

5.2. <u>Преодоление второй некорректности</u>, связанной со множеством величин l конечных длин расширяющегося цилиндра, возможно сравнением $P\left(R(t), t\right)$ – давления на ПГ или $P\left(r_1, t\right)$: а) при расширении заданного конечного l и б) бесконечной длины цилиндра, определенного по вычисленным ранее r_0 (см. выше) и скорости $v\left(R(t), t\right)$ поршня (подробно описано в [7]). Физически понятно, функции воздействия, а также управления, будут идентичными в определенный промежуток времени Δt до тех пор, пока не начнет сказываться влияние частей расширяющегося бесконечного цилиндра, больших l.

Зная Δt, с учетом соотношений

$$\Delta t = c/a - t^0; \qquad c = \left[\left(0,5l\right)^2 + \left(r_1 - r_0\right)^2\right]^{1/2}, \tag{17}$$

длина l однозначно определится из (17). Оценено влияние погрешности определения Δt на вычисление l; показано, что погрешность определения Δt приводит к меньшей в два раза погрешности определения l. Значение $l = 200\,мм$ точно соответствует расчету методом Годунова С.К. системы (14) [7] прямой задачи расширения цилиндра конечной длины. Значения $\Delta t = 16; 20\,мкс$ также хорошо отражены на рисунке $\left(P\left(R(t), t\right)\right)$ [7] наилучшим совпадением функций управления конечного и бесконечного цилиндров именно в этом диапазоне времени Δt. Зная r_0 и l однозначно определены волновые поля в полном объеме, а также функции управления по формулам работы [7] и вводимая в плазменный канал мощность $N(t)$ [7].

Анализ результатов показывает, что впервые удовлетворены все три условия корректности проблемы управления волновыми процессами в областях с подвижными границами для сферических и цилиндрических волн: решения существуют, единственны и устойчивы. Без точных аналитических решений (6)-(13) и (6)-(13) [7] решить эти проблемы нельзя, метод [12] применить для обратных задач затруднительно. Границы применимости волнового уравнения и его точных аналитических решений в областях с ПГ и ППГ [5,6] определены впервые и нетрадиционно в [13].

В заключение необходимо сказать следующее. Как известно, удивительны необычайное число приложений волнового уравнения, в той или иной степени описывающего все богатство явлений Природы, как и непостижимая эффективность математики в естественных науках [2, 14], которые многократно возрастают теперь еще и наличием однозначных аналитических соотношений функций управления волновыми процессами в областях с ПГ и ППГ. Учет влияния проницаемости (излучения) подвижной границы рассмотрен в [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики (в 4 томах) / Предисловие Н. Н. Боголюбова: том 4. – М.: Мир., 1982. – 428 с.
2. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. Н.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
3. *Математическая* энциклопедия / Гл. ред. Виноградов И. М.: том 3 – М.: Сов. энц., 1982. – 1183 с.
4. *Крутиков В. С.* // ДАН. – 1999. – **364**, № 1. – С. 17–20.
5. *Крутиков В. С.* // ДАН. – 1993. – **333**, № 4. – С. 512–514.
6. *Крутиков В. С.* // ДАН. 1999. – **368**, № 6. – С. 755–758.
7. *Крутиков В. С.* // ДАН. – 2006. – **406**, № 1. – С. 1–5.
8. *Лямшев Л. М.* // УФН. – 1987. – **151**, №3. – С. 479–527.
9. *Наугольных К. А., Рой Н. А.* Электрические разряды в воде. М.: Наука. 1971. 151 с.
10. *Крутиков В. С.* // Прикл. матем. и механ. – 1991. – **6**. – С. 1058–1062.
11. *Гинзбург В. Л.* // УФН. – 1971. – **103**, №1. – С. 87–119.
12. *Гринберг Г. А.* // ПММ. – 1967. – **31**, №2. – С. 193–203.
13. *Крутиков В. С.* // Акуст. журн. – 1996. – **42**, № 4. – С. 534–540.
14. *Вигнер Е.* // УФН. 1968. Т.**94**, вып. 3. С. 535–546.
15. *Крутиков В. С.* // Труды акустич. симпозиума «КОНСОНАНС-2013». – К.: ИГМ НАНУ, 2013. – С. 162–168.