ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРУБОПРОВОДЕ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

А. П. КОВАЛЕНКО

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев
e-mail: koval.ap@yandex.ua

ВВЕДЕНИЕ

Зачастую трубопроводные системы с жидкостью подвержены различного рода динамическим нагрузкам, в том числе и продольным динамическим (и ударным) нагружениям. Поэтому актуальным является исследование переходных процессов в таких системах при таких нагружениях. Математическое моделирование таких гидроупругих систем может снизить аварийность и позволит более тщательно учитывать взаимодействие элементов таких систем при указанных нагружениях. При определенных ограничениях трубопроводы можно рассматривать как полубесконечные цилиндрические оболочки с жидкостью. При этом необходимо построить механическую и математическую модели; выявить характерные параметры для исследуемой гидроупругой системы; разработать метод решения и исследовать влияние характерных величин на переходные процессы в такой гидроупругой системе. Зачастую исследование переходных процессов в трубопроводах с жидкостью сводится к поиску решений сложных систем уравнений математической физики при определенных начальных и граничных условиях. При этом актуальным есть построение эффективных подходов к изучению переходных процессов в таких гидроупругих системах при определенных ограничениях на систему. Вследствие сложности постановки начально-краевой задачи (в общем случае нелинейной) актуальным становится вопрос упрощения математической модели без существенной потери качества исследований.

Исследования в этой области проводятся на протяжении последних десятилетий. В работах расматриваются как правило цилиндрические оболочки с жидкостью [1–5]. Одной из распространенных является модель типа Тимошенко для оболочки и рассмотрение жидкости в акустическом приближении. Рассматриваются задачи как в нелинейной так и в линейной постановке. Для исследования переходных процессов зачастую достаточно ограничиться линейной постановкой задачи. Анализ публикаций показывает, что приемлемую точность решения дают приближенные методы решения задачи о переходных процессах в оболочке с жидкостью в линейной постановке и рассмотрение жидкости в акустическом приближении [6–8].

Целью работы является построение линеаризированной математической модели для исследования переходных процессов в механических системах цилиндрическая оболочка – жидкость при продольном динамическом нагружении. При этом линеаризованная математическая модель должна отображать все основные качества математической модели в нелинейной постановке.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ С ЖИДКОСТЬЮ

Рассматривается упругая тонкостенная оболочка вращения с жидкостью. Вводится цилиндрическая система координат x', r', θ, причем ось x' направлена по оси симметрии оболочки с началом на торце оболочки $x' = 0$, l' - длина оболочки, $r' = f'(x')$ - уравнение медиана срединной поверхности вращения оболочки. На срединной поверхности оболочки введена система ортогональных криволинейных координат α_1, α_2 таким образом, что линия $r' = f'(x')$ совпадает с линией $\alpha_2 = const$. Следовательно в каждой точке срединной поверхности заданы базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, причем $\vec{e}_1$ направим по касательной к линии $\alpha_2 = const$. Единичный вектор $\vec{n}$ направим по внешней нормали к плоскости, образованной ортами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Давление жидкости в состоянии покоя и давление с наружной стороны равны между собой и имеют значение P_0. В сечениях $x' = 0$ и $x' = l'$ находятся жесткие пластины, препятствующие вытеканию жидкости, определенным образом закрепленные на торцах оболочки. Предположим, что торец $x' = 0$ оболочки свободен, а торец $x' = l'$ определенным образом закреплен или свободен.

Конечной целью исследований является изучение переходных процессов в системе. Поэтому необходимо выбирать такие модели для оболочки и жидкости, которые в состоянии описывать распространение волновых возмущений. Для описания движения оболочки используются уравнения типа Тимошенко в перемещениях [9]. Для описания закона движения жидкости – уравнения Навье-Стокса [10].

Вектор полного перемещения оболочки $\vec{\Phi}$ в точке $P(\alpha_1, \alpha_2, z)$ примем, как обычно, по сдвиговой модели Тимошенко [9] в виде $\vec{\Phi} = \vec{F} + z\vec{\gamma}$, где $\vec{F} = \vec{e}_1 U_1' + \vec{e}_2 U_2' + \vec{n} W'$ – вектор перемещений срединной поверхности; $\vec{\gamma} = \vec{e}_1 \gamma_1 + \vec{e}_2 \gamma_2$ – вектор угла поворота нормального элемента; z – координата, осчитываемая вдоль направления, обозначенного ортом $\vec{n}$. Рассматривается осесимметричное движение. В этом случае $U_2' = \gamma_1 = 0$. Явный вид дифференциальных операторов теории упругих оболочек типа Тимошенко можно получить из общего случая уравнения движения произвольной оболочки [9]. В работе [11] показана применимость приближенных теорий оболочек при исследовании переходных процессов.

Тогда задача об исследовании переходных процессов в изучаемой системе оболочка-жидкость сведется к решению следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} L_1\left(U_1', W', \gamma_2\right) - \rho_1 h' \frac{\partial^2 U_1'}{\partial t'^2} &= g_1, \\ L_2\left(U_1', W', \gamma_2\right) - \rho_1 h' \frac{\partial^2 W'}{\partial t'^2} &= \left(P - P_0\right) + g_2, \\ L_3\left(U_1', W', \gamma_2\right) - \frac{\rho_1 h'^3}{12} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t'^2} &= g_3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{V'}}{\partial t'} + \left(\overrightarrow{V'} grad \overrightarrow{V'}\right) = \overrightarrow{Q} - \frac{gradP}{\rho} + \frac{\mu graddiv \overrightarrow{V'}}{3\rho} + \frac{\mu \Delta \overrightarrow{V'}}{\rho}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + div \rho \overrightarrow{V'} = 0, \tag{3}$$

$$\Omega(P, \rho) = 0. \tag{4}$$

Здесь (1) уравнения движения упругой оболочки вращения в перемещениях [9] с учетом напряжений на внутренних стенках, вызванных наличием вязкой жидкости и внешнего давления P_0 [10]. Уравнение (2) уравнение движения вязкой слабосжимаемой изотропной жидкости в векторной форме [10]. Уравнения (3) и (4) суть уравнения неразрывности для жидкости [10] и уравнения состояния жидкости [10,12]. Неизвестными функциями в этих уравнениях являются $U_1', W', \gamma_2, \overrightarrow{V'}, \rho, P$.

В уравнениях (1)(4) приняты следующие обозначения: ρ_1, h' плотность материала и толщина стенки оболочки; P давление в жидкости; g_i $(i = \overline{1,3})$ функции, зависящие от параметров жидкости, которые учитывают напряжение на внутренних стенках оболочки (при отсуствии вязкости $\mu = 0, g_i$ =0, $(i = \overline{1,3})$); $\overrightarrow{V'}$ вектор скорости частиц жидкости; $\vec{Q}$ вектор массовой силы, отнесенный к единице массы жидкости; ρ, μ плотность и коэффициент жидкости, Δ оператор Лапласа в пространстве занятом жидкостью.

В уравнеиях (1) $L_i(U_1', W', \gamma_2)$ $(i = \overline{1,3})$ известные дифференциальные операторы теории упругих оболочек типа Тимошенкою Явный вид этих операторов можно получить из общего случая уравнений движения произвольной оболочки, полученных К.З.Галимовым [9]. Эти операторы в тензорных обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} L_1(U_1', W', \gamma_2) &= \nabla_i T^{i1} - b_i^1 N^i, \\ L_2(U_1', W', \gamma_2) &= \nabla_i N^i - b_{ik} T^{ik}, \\ L_3(U_1', W', \gamma_2) &= \nabla_i M^{i2} - N^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь ∇_i $(i = 1,2)$ символ ковариантного дифференцирования относительно ковариантных компонент метрического тензора срединной поверхности оболочки a_{ik} ;

$$\begin{aligned} \nabla_k \mathrm{N}^i &= \frac{\partial N^i}{\partial a^k} + \Gamma_{kj}^i \mathrm{N}^j, \\ \nabla_j \mathrm{T}^{ik} &= \frac{\partial T^{ik}}{\partial a^j} + \mathrm{T}^{sk} \Gamma_{js}^i + T^{is} \Gamma_{js}^k, \end{aligned} \tag{6}$$

где Γ_{ik}^j символы Кристофеля.

В (5) величины T^{ik}, N^i, M^{ik} $(i,k = 1,2)$ выражаются через перемещения, согласно [9].

Проведя подстановки согласно [9] получим конкретный вид дифференциальных операторов $L_i(U_1', W', \gamma_2)$ $(i = \overline{1,3})$. К системе уравнений (1)-(4) необходимо присоединить начальные и граничные условия.

Согласно принятому выше предположению в начальный момент система оболочка-жидкость находится в состоянии покоя. В этом случае начальные условия запишуться в следующем виде. При $t' = 0$

$$U_1' = \frac{\partial U_1'}{\partial t'} = W' = \frac{\partial W'}{\partial t'} = \gamma_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial t'} = 0,\ \overrightarrow{V'} = 0,\ \rho = \rho_0,\ P = P_0 \tag{7}$$

В выражении (7) ρ_0 плотность жидкости в состоянии покоя.

Из усовия совместного движения оболочки и прилегающих к ней частиц жидкости получаем условие непроницаемости оболочки [13]:

$$\text{при } x' = 0, l: \ V'_{x'} = \frac{\partial U'_{x'}}{\partial t'}; \text{ при } r' = f'(x'): \ V'_n = \frac{\partial W'}{\partial t'}. \tag{8}$$

Из условия отсуствия разрыва между жидкостью и стен кой оболочки получаем:

$$\text{при } r' = f'(x'): \ V'_{\alpha_1} = \frac{\partial U'_1}{\partial t'}. \tag{9}$$

В (8) и (9) приняты следующие обозначения: $U'_{x'}$ проекция вектора перемещений оболочки Ф на ось Ox'; $V'_{x'}, V'_n, V'_{\alpha_1}$ составляющие вектора скорости частиц жидкости по координате x' направлениной к внешней нормали $\vec{n}$ и по направлению координаты α_1 соответственно.

В выражениях (8) и (9), как это принято в теории тонких упругих оболочек [9,14], произведен “снос” граничных условий с боковой поверхности $r' = f'(x') - \frac{h}{2}$ на срединную поверхность $r' = f'(x')$.

Граничным условием для продольного смещения оболочкиявляется уравнение движения пластины, закрепленной на торце $x' = 0$ с учетом внешней силы, напряжения оболочки в сечении $x' = 0$ и силы давления жидкости в сечении $x' = 0$:

$$\text{при } x' = 0: \ m\frac{\partial^2 U'_{x'}}{\partial t'^2} = F(t') + F_{об}(t') + F_{ж}(t'). \tag{10}$$

Здесь $F_{об}(t') = 2\pi f'_{(0)} h'_{x'} \sigma_{x'}(0, t'),\ F_{ж}(t') = -2\pi \int\limits_0^{f'_{(0)}} (P - P_0) r' dr'$, масса жесткой пластины, $\sigma_{x'}(x', t')$ проекция напряжения в оболочке на ось Ox'.

К граничным условиям (8)-(10) необходимо присоединить граничные условия, зависящие от формы оболочки и ее закрепления [15]:

$$M_n\left(U'_1, W', \gamma_2\right) = 0 \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

В выражении (11) $M_n\left(U'_1, W', \gamma_2\right)$ некоторые дифференциальные операторы на граничных линиях срединной поверхности. Вид операторов $M_n\left(U'_1, W', \gamma_2\right)$ и их число определяются в каждом конкретном случае формой оболочки и характером ее закрепления в пространстве.

2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ

Задачи изучения переходных процессов в упругих трубопроводах при продольных ударных динамических нагружениях можно моделировать с приемлемой погрешностью полубесконечной цилиндрической оболочкой с находящейся внутри жидкостью. При этом необходимо применять такие механические модели цилиндрической оболочки, которые учитывают волновой характер распространения возмущений по стенке оболочки. Вместе с тем механическая модель движения оболочки должна быть достаточно простой для расчетов, учитывать все существенные процессы для данного класса задач и иметь удовлетворительную точность при проведении вычислений. Модель жидкости также должна учитывать волновой характер распространения возмущений. На основании вышеизложенного представляется целесообразным использовать линейные уравнения движения оболочки по модели Тимошенко [16]. Эта модель учитывает волновой характер распространения возмущений по стенке оболочки и, при определенных ограничениях на импульсное или ударное нагружение, обеспечивает хорошее совпадение с результатами исследований по нелинейной теории [9] ($V_0 \le 0,03C_p$, где V_0 – начальная скорость продольного удара по торцу оболочки, C_p – скорость распространения продольных волн по стенке оболочки). Жидкость рассматриваем в акустическом приближении, учитывающем волновой характер возмущений в среде. Следовательно, задачу можно рассматривать в линейном приближении. При приемлемой точности вычислений такие модели позволяют применять математические методы, значительно упрощающие проведение исследований. При данных предположениях начально-краевая задача запишется следующим образом. Уравнения движения:

$$\begin{cases} U_{xx} - U_{tt} = \beta_{13} W_x; & \Psi_{xx} - \Psi_{tt} = \alpha_{22} + \beta_{23} W_x; \\ W_{xx} - b_3^2 W_{tt} = \alpha_{33} W + \beta_{31} U_x + \beta_{32} \Psi + K_s \varphi_t, & \varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \dfrac{1}{r} \cdot \varphi_r - \dfrac{1}{a^2} \cdot \varphi_{tt} = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Начальные условия имеют вид

$$t = 0: \; U = W = \Psi = U_t = W_t = \psi_t = 0, \qquad \varphi = \varphi_x = \varphi_r = \varphi_t = 0. \qquad (13)$$

Граничные условия будут

$$x = 0: \; W_x = \Psi = 0, \; \varphi_x = U_t,; \quad U_{tt} = 2\pi K_m K_h \left(U_x + \nu W \right) + \frac{2\pi}{\alpha_{33}} K_m K_s K_h \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} r dr; \quad t = +0: \; U_t = V_0$$
$$x = \infty: \; \text{U=W} = \Psi = \varphi = \varphi_x = \varphi_r = \varphi_t = 0; \quad r = 1: \; \varphi_r = W_t. \qquad (14)$$

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На основании вышеизложенного следует, что применение предложенного подхода дает возможность значительно упростить нахождение приближенного решения, учитывающее взаимное влияние элементов гидроупругой системы и волновой характер распространения возмущений. При этом погрешность исследования находится в рамках разумной погрешности Исследования в данной области целесообразно продолжать для исследования переходных процессов в данных механических системах при осевом ударном нагружении для различных значений массово-геометрических характеристик системы. В частности, представляет несомненный интерес исследование влияния параметров системы на поперечные перемещения стенок трубопровода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алумяэ Н. А.* Переходные процессы деформации упругих оболочек и пластинок // Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 883–889.
2. *Мовсисян Л. А.* Продольный удар по цилиндрической оболочке. // Изв. АН Арм. ССР. Физ. мат науки.– 1964. – **17**, № 5. – С.43–46.

3. *Нигул У. К.* О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек // Тр. VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок.– М.: Наука, 1966. – С. 593–599.
4. *Сагомонян А. Я.* Осевой удар цилиндрической оболочки о жесткую плоскость // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. –№ 2. – С.173–176.
5. *Кубенко В. Д.* Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. – Киев.: Наук. думка, 1979. – 184 с.
6. *Коваленко А. П.* Исследование практической сходимости метода итераций при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008. – Вып. 2(31). – С. 240–244.
7. *Коваленко А. П.* Исследование практической сходимости численного обращения преобразования Лапласа–Карсона при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. –Вып. 2(35). – С.236–240.
8. *Коваленко А. П.* О применимости интегрального преобразования Лапласа- Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках. // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – Вып. 3(39). – С.213–217.
9. *Галимов К. З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. // Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – 326 с.
10. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: том 1. – М.: Наука, 1976. – 535 с.
11. *Нигул У. К.* О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек // Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 593–599.
12. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1972. – 368 с.
13. *Ильгамов М. А.* Граничные условия на поверхности контакта оболочки с жидкостью в эйлерово-лагранжевой форме. // Тр. X всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Кутаиси, 1975 г. – Тбилиси: Мецниераба, 1975. – с.170–180.
14. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. – Л.:Судостроение, 1972. – 374 с.
15. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Механика твердых деформируемых тел: том 5 – М.: ВИНИТИ, 1973. – 272 с.
16. *Gerrmann G., Mirsky J.* Three-dimensional and shell-theory analysis of axially motions of cylinder //J. Appl. Mech. – 1956.– **23**, №4. – P. 563 – 568.