ПРО ГЕНЕРАЦІЮ ЗВУКУ ОБМЕЖЕНОЮ ОБЛАСТЮ ЗБУРЕНОЇ ТЕЧІЇ В ЖОРСТКОСТІННОМУ КАНАЛІ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

А. О. БОРИСЮК
Інститут гідромеханіки НАН України, вул. Желябова, 8/4, 03680 Київ-180 МСП
Тел. (+38-044) 453-2655 E-mail: aobor@mail.ru

A problem of sound generation by a limited region of a disturbed flow in an infinite straight rigid channel of circular cross-section is solved, and quantitative relationships between the characteristics of sound field and the parameters of channel and flow are found. A disturbed flow is modelled by the distributed volume quadrupole and surface dipole sources of sound (the characteristics of which are assumed to be known), and the cases of uniform and non-uniform distribution of the sources are considered.

ВСТУП

У даній роботі розв’язується задача про генерацію звуку обмеженою областю збуреної течії у нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу і встановлюється кількісний зв’язок між характеристиками звукового поля та параметрами каналу і потоку. Область збурення моделюється розподіленими в ній об’ємними квадрупольними і поверхневими дипольними джерелами звуку (характеристики яких вважаються відомими) і розглядаються випадки рівномірного та нерівномірного розподілу джерел.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається нескінченний прямий жорсткостінний канал кругового поперечного перерізу радіусом a (рис.), в якому зі швидкістю U тече рідина густиною ρ і в’язкістю ν. Течія характеризується малим числом Маха $M = U / c_0 << 1$ (c_0 - швидкість звуку в незбуреній рідині). У скінченному регіоні V_0 течія збурена і цей регіон створює в каналі акустичне поле. Необхідно дослідити це поле і встановити кількісний зв’язок між його характеристиками та параметрами каналу і потоку.

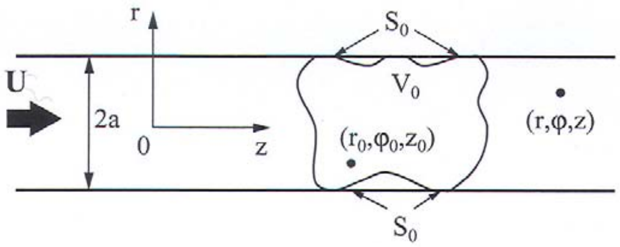

Рис.

Згідно з теорією Лайтхіла [1] можна без втрати загальності вважати, що в’язкість рідини відіграє суттєву роль лише в області збурення, а згенерований звук поширюється в ідеальному стисливому середовищі. За цих умов акустичне поле описується рівнянням

Лайтхіла, в якому права частина містить як об’ємні квадрупольні $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$, так і зумовлені наявністю стінки поверхневі дипольні $\partial F_i / \partial y_i$ джерела [2-4]:

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i}, \qquad 0 < r < a, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad |z| < \infty. \tag{1}$$

Граничними умовами є відсутність радіальної швидкості на стінці каналу:

$$\left. \frac{\partial p_a}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \tag{2}$$

і умова випромінювання в нескінченність.

У рівняннях (1) і (2) введено такі позначення: ρ_a і p_a - акустичні флуктуації густини й тиску, які зв’язані співвідношенням $p_a = c_0^2 \rho_a$; $T_{ij} \approx \rho u_i u_j$ і $F_i = n_j(\tau_{ij} + p\delta_{ij})$ - напруження Лайтхіла та i-та компонента прикладених до стінки сил (T_{ij} та F_i зникають відповідно за межами об’єму V_0 і поверхні S_0, яка його оточує); $\tau_{ij} = (2/3)\mu\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - 2\mu\varepsilon_{ij}$ - дотичні напруження; $\varepsilon_{ij} = (1/2)(\partial u_i / \partial y_j + \partial u_j / \partial y_i)$ - швидкості деформації; n_j – j-та компонента зовнішньої нормалі до стінки каналу; u_i – i-та компонента швидкості рідини; $\mu = \rho\nu$ - її динамічна в’язкість; p – тиск; δ_{ij} - символ Кронекера. Крім цього, тут і далі передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

У циліндричній системі координат права частина рівняння (1) має такий вигляд [2]:

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \rho u_r^2}{\partial r_0^2} + \frac{\partial^2 \rho u_z^2}{\partial z_0^2} + \left(\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \right) \rho u_\phi^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \right) + \frac{2}{r_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{\partial}{\partial r_0} \right) - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \right) \times$$

$$\times \rho u_r u_\phi + 2 \frac{\partial^2 \rho u_r u_z}{\partial r_0 \partial z_0} + \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial^2}{\partial \phi_0 \partial z_0} + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \right) \right) \rho u_\phi u_z$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(r_0 F_r \right) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi_0} + \frac{\partial F_z}{\partial z_0},$$

де (r_0, ϕ_0, z_0) - координати джерела.

АКУСТИЧНЕ ПОЛЕ

Задача (1), (2) розв’язується методом функцій Гріна. Її розв’язок для акустичних флуктуацій густини ρ_a має такий вигляд [2]:

$$\rho_a(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iiint_{V_0} \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) dV_0(\vec{r}_0) + \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iint_{S_0} \frac{\partial F_i(\vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial y_i} G(\vec{r}, t; \vec{r}_{0a}, t_0) dS_0(\vec{r}_{0a}),$$

де G - функція Гріна хвильового рівняння для вибраного каналу. Вона записується у вигляді ряду по його акустичних модах $\Psi_{nm} = \left\{ \Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)} \right\}$ [2]:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = -\frac{i}{4\pi c_0^2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \phi_0)}{\left\| \Psi_{nm}^{(j)} \right\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \phi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_{nm}|z - z_0|}}{k_{nm}} e^{-i\omega(t - t_0)} d\omega, \tag{3}$$

$$\Psi_{nm}^{(1)} = J_n(\alpha_{nm} r) \cos(n\phi), \quad \Psi_{nm}^{(2)} = J_n(\alpha_{nm} r) \sin(n\phi).$$

Тут J_n – циліндричні функції Бесселя першого роду порядку n; $\alpha_{nm} = \zeta_{nm} / a$ - радіальні хвильові числа; ζ_{nm} - корені рівняння $J_n^{/}(\zeta_{nm}) = 0$, m=1,2,...; $k_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \alpha_{nm}^2}$ і $k_0 = \omega / c_0$ - осьове й акустичне хвильові числа відповідно; а $\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2$ - квадрати норм мод, які даються виразами

$$\left\|\Psi_{nm}^{(1)}\right\|^2 = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m} a), n = 0, \\ \dfrac{\pi a^2}{2} J_n^2(\alpha_{nm} a)\left[1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nm}^2 a^2}\right], n \geq 1, \end{cases} \qquad \left\|\Psi_{nm}^{(2)}\right\|^2 = \begin{cases} 0, n = 0, \\ \left\|\Psi_{nm}^{(1)}\right\|^2, n \geq 1; \end{cases}$$

Підстановка функції Гріна (3) у вираз для тиску p_a, а одержаного співвідношення в інтеграл

$$P(\omega)\delta(\omega - \omega') = \int_0^a \int_0^{2\pi} < \breve{p}_a^*(r,\phi,z,\omega)\breve{v}_{az}(r,\phi,z,\omega') > rdrd\phi$$

(де $\delta(...)$ - дельта-функція Дірака, дужки <...> означають операцію осереднення за множиною реалізацій, зірочка вказує на комплексне спряження, а $\breve{p}_a$ і $\breve{v}_{az}$ - відповідно образи Фур’є акустичного тиску та осьової компоненти акустичної швидкості) дає загальний вираз для акустичної енергії P, згенерованої на частоті ω *нерівномірно* розподіленими в об’ємі V_0 квадрупольними і на поверхні S_0 дипольними джерелами [2]:

$$\begin{aligned} P(\omega) = \sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}^{(q)}(\omega) = \sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\left\|\Psi_{nm}^{(q)}\right\|^2 k_{nm}\rho_0\omega}\Bigg[\iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iiint_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}_0^{\,/}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k^/ \partial y_l^/} \times \\ \times \Psi_{nm}^{(q)}(r_0,\phi_0)\Psi_{nm}^{(q)}(r_0^/,\phi_0^/) e^{-sign(z-z_0)ik_{nm}(z_0^/ - z_0)} dV_0(\vec{r}_0^{\,/}) + \iint_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \iint_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}_{oa}, \vec{r}_{oa}^{\,/}, \omega)}{\partial y_i \partial y_k^/} \times \\ \times \Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0)\Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0^/) e^{-sign(z-z_0)ik_{nm}(z_0^/ - z_0)} dS_0(\vec{r}_{0a}^{\,/}) + 2\,\mathrm{Re}\Bigg(\iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \times \\ \times \iint_{S_0} \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}_{0a}^{\,/}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k^/} \Psi_{nm}^{(q)}(r_0,\phi_0)\Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0^/) e^{-sign(z-z_0)ik_{nm}(z_0^/ - z_0)} dS_0(\vec{r}_{0a}^{\,/})\Bigg)\Bigg]. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $\vec{r}_0$, $\vec{r}_0^{\,/}$ і $\vec{r}_{0a}$, $\vec{r}_{0a}^{\,/}$ - радіус-вектори квадрупольних і дипольних джерел звуку відповідно; функції S_{ijkl}^T та S_{ik}^F є взаємними спектрами образів Фур’є напружень Лайтхіла T_{ij}:

$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}_0^{\,/}, \omega)\delta(\omega - \omega^/) =< \breve{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega)\breve{T}_{kl}(\vec{r}_0^{\,/}, \omega^/) >$

та сил F_k:

$S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}_{0a}^{\,/}, \omega)\delta(\omega - \omega^/) =< \breve{F}_i^*(\vec{r}_{0a}, \omega)\breve{F}_k(\vec{r}_{0a}^{\,/}, \omega^/) >$,

S_{ijk}^{TF} - взаємним спектром образів Фур’є напружень T_{ij} і сил F_k:

$S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}_{0a}^{\,/}, \omega)\delta(\omega - \omega^/) =< \breve{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega)\breve{F}_k(\vec{r}_{0a}^{\,/}, \omega^/) >$;

Re(...) означає дійсну частину вказаної в дужках комплексної величини; а функція знаку $sign(z - z_0)$ є позитивною, якщо оцінки енергії проводяться вниз за течією від розташованих у поперечному перерізі каналу z=z_0 джерел, і негативною, якщо вгору за течією від них. Положення ж частоти ω відносно критичних частот каналу $\omega_{nm} = c_0\alpha_{nm}$ визначає (через хвильові числа k_{nm} в експоненті $\exp(-sign(z-z_0)ik_{nm}(z_0^/ - z_0))$ випадки однорідних ($\omega \geq \omega_{nm}$) та неоднорідних ($0 < \omega < \omega_{nm}$) хвиль.

Якщо квадрупольні й дипольні джерела звуку розподілені *рівномірно* у займаних ними областях, формула (4) спрощується за рахунок спрощення виразів для спектрів S_{ijkl}^T, S_{ik}^F і S_{ijk}^{TF}, які стають функціями лише відстані між джерелами (відповідно $\vec{\xi} = \vec{r}_0^{\,/} - \vec{r}_0$, $\vec{\xi}_{aa} = \vec{r}_{oa}^{\,/} - \vec{r}_{oa}$ та $\vec{\xi}_a = \vec{r}_{0a}^{\,/} - \vec{r}_0$) і частоти [2]:

$$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}_0^{\,/}, \omega) = S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega), \quad S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}_{0a}^{\,/}, \omega) = S_{ik}^F(\vec{\xi}_{aa}, \omega), \quad S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}_{0a}^{\,/}, \omega) = S_{ijk}^{TF}(\vec{\xi}_a, \omega).$$

Аналіз співвідношення (4) показує, що акустична енергія *P* не залежить від осьової координати *z*, а отже не спадає зі збільшенням відстані від джерел (це природньо для жорсткостінного каналу, де немає втрат енергії). Крім того, *P* дорівнює сумі енергій $P_{nm}^{(q)}$ акустичних мод каналу. Енергія ж окремої моди $P_{nm}^{(q)}$ визначається трьома доданками. Перший з них являє собою звукову енергію, згенеровану об'ємними квадруполями $\partial^2 T_{ij}/\partial y_i \partial y_j$, другий – енергію, випромінену поверхневими диполями $\partial F_i/\partial y_i$, а третій доданок зумовлений взаємодією квадруполів і диполів. Відносний внесок кожного доданку в енергію $P_{nm}^{(q)}$ (а відтак і в акустичну енергію *P*) різний у різних областях значень числа Маха *M*. Якщо число *M* таке, що у згенерованому звуковому полі домінує внесок квадруполів, то у виразі для $P_{nm}^{(q)}$ залишается лише перший доданок, і співвідношення (4) набуває вигляду

$$P(\omega) = \sum_{q=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\left\|\Psi_{nm}^{(q)}\right\|^2 k_{nm}\rho_0\omega} \iiint\limits_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iiint\limits_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}_0^{\,/}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k^/ \partial y_l^/} \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) \times$$

$$\times \Psi_{nm}^{(q)}(r_0^/, \phi_0^/) e^{-sign(z-z_0)ik_{nm}(z_0^/ - z_0)} dV_0(\vec{r}_0^{\,/}).$$

Коли ж число Маха належить до діапазону, де домінують диполі, визначальним є другий доданок і замість цього маємо таке співвідношення:

$$P(\omega) = \sum_{q=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\left\|\Psi_{nm}^{(q)}\right\|^2 k_{nm}\rho_0\omega} \iint\limits_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \iint\limits_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}_{oa}, \vec{r}_{oa}^{\,/}, \omega)}{\partial y_i \partial y_k^/} \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi_0) \times$$

$$\times \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi_0^/) e^{-sign(z-z_0)ik_{nm}(z_0^/ - z_0)} dS_0(\vec{r}_{0a}^{\,/}).$$

ВИСНОВКИ

У даній роботі розв'язано задачу про генерації звуку обмеженою областю збуреної течії у нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Тут збурена течія моделюється розподіленими в ній об'ємними квадрупольними і поверхневими дипольними джерелами звуку (характеристики яких вважаються відомими) і розглядаються випадки рівномірного та нерівномірного розподілу джерел. Аналіз одержаних при цьому результатів дозволяє зробити такі висновки.

1. Для розглянутого каналу методом нормальних мод побудовано функцію Гріна хвильового рівняння.

2. Методом функцій Гріна одержано загальний розв’язок задачі, який встановлює кількісний зв’язок між характеристиками звукового поля та параметрами каналу і нерівномірно/рівномірно розподілених джерел.
3. Показано, що звукова енергія дорівнює сумі енергій акустичних мод каналу. Енергія ж окремої моди складається з трьох доданків. Перший з них являє собою енергію, згенеровану об’ємними квадруполями, другий – енергію, випромінену поверхневими диполями, а третій доданок зумовлений взаємодією квадруполів і диполів.
4. Для різних значень числа Маха проведено аналіз порядку цих доданків і одержано відповідні спрощені вирази для акустичної енергії.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. 1.General theory // Proc. Roy. Soc. London. - 1952. – **A 211**. – P.564-587.
2. *Борисюк А.О.* Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 1. Загальна теорія // Акуст. вісн. – 2003. – **6**, №3. – С.3-9.
3. *Curle N.* The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // Proc. Roy. Soc. London. – 1955. **- A 231**. – P.505-514.
4. *Blake W.K.* Mechanics of flow-induced sound and vibration. – New York: Acad. Press Inc., 1986. – vol.1, 2. – 974p.