НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ГИДРОМЕХАНИКИ

В.Т. ГРИНЧЕНКО
И.В. ВОВК
В.Т. МАЦЫПУРА

ОСНОВЫ АКУСТИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

КИЕВ
2009

УДК 537.8

В книге рассмотрены основные математические модели, которые широко используются в акустике при исследовании закономерностей распространения волн в газах, жидкостях и твердых телах. Значительное внимание уделено развитию современных методов решения акустических задач, которые обеспечивают определение количественных характеристик звуковых полей в полной области их существования, включая ближнее и дальнее поля. Приведены решения широкого круга задач излучения и рассеяние звука в областях сложной геометрии, важных для решения многих прикладных проблем. Основное внимание уделено гармоническим проблемам для линейных и нелинейных задач, а также предложены эффективные подходы к решению нестационарных задач. Значительное внимание при анализе конкретных решений уделяется раскрытию физических особенностей процесса формирования звуковых полей и установлению обобщенных связей между параметрами излучателей и структурой звукового поля.

Для инженерно-технических работников, специализирующихся в области акустики и ее практического применения.

Рецензенты: В.В. МЕЛЕШКО, В.Г. САВИН, И.Т. СЕЛЕЗОВ

Утверждено в печать ученым советом Института гидромеханики НАН Украины

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины как учебное пособие (письмо №14/18Г—279 от 07.02.07)

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ГИДРОМЕХАНИКИ

ГРИНЧЕНКО Виктор Тимофеевич
ВОВК Игорь Владимирович
МАЦЫПУРА Владимир Тимофеевич

ОСНОВЫ АКУСТИКИ

Авторизованный дополненный перевод с украинского
ОСНОВИ АКУСТИКИ, Київ, Наукова думка, 2007, 640 с.

НВП « Видавнитство “ Наукова думка” НАН Украины»
01601 Киев 1, ул. Терещинковская, 3

ISBN 978-966-00-1022-2

© В. Т. Грінченко,
І. В. Вовк,
В. Т. Маципура, 2007

© В.Т. Гринченко,
И.В. Вовк,
В. Т. Мацыпура, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вступительное слово 13

Предисловие 14

Введение 16

РАЗДЕЛ 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В АКУСТИКЕ 20

РАЗДЕЛ 2

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ 26

2.1. Незатухающие колебания в системе с одной степенью свободы 26
2.1.1. Исходные модельные представления 26
2.1.2. Уравнения свободного движения в системе с одной степенью свободы 29
2.1.3. Гармонический осциллятор 34
2.2. Осциллятор при наличии демпфирования 40
2.2.1. Свободные колебания 40
2.2.2. Вынужденные колебания 45
2.2.3. Добротность 54
2.2.4. Комплексное механическое сопротивление 58
2.3. Энергетические характеристики процесса колебаний 60
2.4. Примеры колебательных систем с двумя степенями свободы 65
2.5. Свободные колебания в системе с двумя степенями свободы 67
2.5.1. Нормальные колебания 68
2.5.2. Характеристики связи в системе 73

2.5.3. Движение при заданных начальных условиях 75
2.6. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы 79
2.7. Биения 83
2.8. Цепочка идентичных осцилляторов 87
2.9. Задачи 91

РАЗДЕЛ 3

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ 95

3.1. Переход к сплошной одномерной среде в цепочке связанных осцилляторов 95
3.2. Модель струны. Уравнение движения элемента струны 97
3.3. Общее решение уравнения движения струны. Движение при заданных начальных условиях 100
3.3.1. Решение Д'Аламбера для бесконечной струны 100
3.3.2. Волновое движение в полубесконечной струне 106
3.3.3. Волновое сопротивление струны 110
3.4. Энергетические характеристики волнового движения струны 112
3.5. Волновое движение в конечной струне. Нормальные колебания 116
3.6. Анализ движения струны 122
3.6.1. Бегущие и стоячие волны 122
3.6.2. Дисперсионное соотношение 125
3.6.3. Энергия колебаний конечной струны 130
3.6.4. Примеры колебаний в конечной струне при разных начальных условий 130
3.7. Вынужденные колебания струны 134
3.8. Влияние демпфирования на движение струны 136
3.9. Свойства мембраны. Уравнение движения элемента мембраны 141
3.10. Особенности волнового движения в мембране 146
3.11. Свободные колебания в прямоугольной мембране 147
3.11.1. Нормальные колебания 148
3.11.2. Движение мембраны при определенных начальных условиях 154
3.12. Свободные колебания круглой мембраны 156
3.13. Задачи 163

РАЗДЕЛ 4

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ 168

4.1. Полная система уравнений акустики и ее линеаризация .. 169
4.1.1. Модель акустической среды 169
4.1.2. Уравнение движения 172
4.1.3. Уравнение неразрывности 176
4.1.4. Уравнение состояния 177
4.2. Волновое уравнение 180
4.3. Потенциал скорости 182
4.4. Уравнение Гельмгольца 184
4.5. Граничные условия 185
4.6. Энергетические характеристики звуковых волн 187
4.6.1. Плотность энергии 187
4.6.2. Плотность потока мощности. Интенсивность 188
4.7. Задачи 191

РАЗДЕЛ 5

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ 192

5.1. Гармонические волны 192
5.2. Плоские гармонические волны 193
5.3. Поглощение звука 200
5.4. Принцип суперпозиции 204
5.5. Отражение и прохождение звука на границе раздела двух акустических сред 206
5.5.1. Постановка и решения задачи 206
5.5.2. Анализ нормального падения волны 209
5.5.3. Анализ наклонного падения волны 212
5.5.4. Звуковое поле при закритических углах падения волны 214
5.5.5. Энергетические соотношения при наклонном падении волны 221
5.6. Отражение звука от подвижной границы 223
5.7. Входное сопротивление препятствия 225
5.8. Входное сопротивление жидкого плоского слоя, опирающегося на препятствие 231
5.9. Прохождение звуковой волны через жидкий плоский слой 235
5.9.1. Постановка и решения задачи 235
5.9.2. Нормальное падение плоской волны на слой с поглощением 238

5.9.3. Прохождение звука через слой при закритических углах падения волны 239
5.10. Спектральное разложение звукового поля 241
5.11. Волноводы 245
5.11.1. Волноводное распространение звука 245
5.11.2. Нормальные волны плоского волновода 247
5.12. Понятие групповой скорости 253
5.12.1. Энергетическое определение групповой скорости .. 253
5.12.2. Кинематическое определение групповой скорости . 256
5.13. Создание гармонического поля в волноводе 262
5.14. Плоскопараллельный волновод с поглощающими границами 267
5.15. Распространение звукового импульса в плоском волноводе 270
5.15.1. Математическая модель импульсного сигнала 271
5.15.2. Распространение в волноводе импульсного сигнала с одномодовой пространственной структурой 276
5.15.3. Распространение в волноводе импульсного сигнала с многомодовой пространственной структурой 287
5.16. Особенности распространения звука в движущейся жидкости 293
5.16.1. Уравнения звуковых волн в движущейся жидкости 293
5.16.2. Волны в движущемся жидком полупространстве, возбуждаемые пространственной гармоникой 295
5.17. Задачи 297

РАЗДЕЛ 6

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ 302

6.1. Некоторые сведения из теории тензоров 302
6.1.1. Формулы перехода от одного ортогонального базиса к другому 305
6.1.2. Определение ортогонального тензора 307
6.1.3. Связь между тензорами второго ранга и линейными операторами 309
6.1.4. Связь между тензорами и инвариантными полилинейными формами 310
6.2. Твердое упругое тело как акустическая среда 314
6.3. Тензор напряжений 315
6.4. Тензор деформаций 322
6.5. Закон Гука 326
6.6. Общие уравнения распространения волн в твердых телах 334

6.7. Продольные и поперечные волны 337
6.8. Граничные условия для твердых тел 339
6.9. Отражение плоской гармонической волны от свободной границы полупространства 340
6.10. Энергетический анализ процесса отражения плоской гармонической волны от свободной границы полупространства 349
6.11. Поверхностная волна Рэлея 352
6.12. Волны в твердом полупространстве, возбуждаемые пространственной гармоникой 359
6.13. Методы возбуждения объемных и поверхностных волн... 367
6.14. Волны в твердом полупространстве, возбуждаемые источником конечных размеров 369
6.15. Твердые волноводы 375
6.16. Распространение SH-волн в слое 376
6.17. Волны Лэмба 379
6.18. Приближенные модели описания упругих волн в твердых телах 389
6.19. Продольные волны в стержне 389
6.20. Колебания дискретно-непрерывной системы 392
6.21. Изгибные волны в стержне 395
6.21.1. Характер нагрузки и деформации 395
6.21.2. Уравнение движения элемента стержня 398
6.21.3. Свойства волнового движения в стержне 400
6.22. Волновое движение в стержне при заданных начальных условиях 401
6.23. Изгибные колебания конечных стержней 405
6.24. Задачи 412

РАЗДЕЛ 7

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА 417

7.1. Радиационное демпфирование 418
7.2. Пульсирующая сфера 420
7.3. Сопротивление излучения пульсирующей сферы 426
7.4. Энергетические характеристики пульсирующей сферы .. 428
7.5. Монополь 431
7.6. Поле совместно работающих монополей. Характеристика направленности 433
7.7. Осциллирующая сфера 442
7.8. Энергетические характеристики осциллирующей сферы 448
7.9. Диполь 450
7.10. Коэффициент концентрации 453

7.11. Взаимодействие источников звука 456
7.12. Излучение звука источниками, которые имеют неодинаковую скорость движения частиц поверхности излучателя 459
7.12.1. Цилиндрический излучатель 460
7.12.2. Сферический излучатель 475
7.13. Задачи 488

РАЗДЕЛ 8

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА 492

8.1. Использование терминов “дифракция” и “рассеяние” 492
8.2. Постановка задачи рассеяния. Характеристики явления рассеяния звука 493
8.3. Рассеяние плоской волны идеальным препятствием больших волновых размеров 496
8.4. Рассеяние плоской волны препятствием малых волновых размеров 498
8.5. Рассеяние плоской волны на идеальном бесконечном круговом цилиндре 501
8.5.1. Постановка и построение решения задачи 502
8.5.2. Звуковое поле на поверхности и вблизи цилиндра ... 505
8.6. Рассеянное поле на большом волновом расстоянии от цилиндра 509
8.7. Рассеяние плоской волны на идеальной сфере 516
8.8. Рассеяние плоской волны на звукопроницаемой сфере 522
8.9. Рассеяние звука газовым пузырьком в жидкости 529
8.10. Задачи 535

РАЗДЕЛ 9

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ И РАССЕЯНИИ ЗВУКА 537

9.1. Канонические и неканонические области существования звукового поля 537
9.2. Дельта-функция Дирака 538
9.3. Неоднородное волновое уравнение 542
9.4. Функция Грина для уравнения Гельмгольца. Свободное пространство 544
9.5. Принцип Гюйгенса. Условие излучения Зоммерфельда 549
9.6. Физический анализ математической формулировки принципа Гюйгенса 553
9.7. Метод Кирхгоффа определения поля рассеянной волны .. 555

9.8. Отражение звука от плоского диска. Зоны Френеля 559
9.9. Функция Грина для полупространства 564
9.10. Излучение звука диском в акустически жестком экране 568
9.10.1. Поле на оси излучателя 569
9.10.2. Дальнее поле 572
9.10.3. Сопротивление излучения 576
9.11. Рассеяние звука на клине 580
9.11.1. Рассеяние цилиндрической звуковой волны на клине 580
9.11.2. Рассеяние плоской звуковой волны на клине 585
9.11.3. Условие на ребре 586
9.12. Рассеяние звука на клине с цилиндром в вершине 589
9.13. Принцип взаимности 592
9.14. Вычисление звуковых полей плоских излучателей с помощью интеграла Фурье 594
9.15. Возбуждение волновода точечным источником 599
9.16. Задачи 604

РАЗДЕЛ 10

МЕТОД ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ 605

10.1. Основные положения метода частичных областей 606
10.2. Некоторые сведения о решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений 609
10.3. Использование условия на ребре при применении метода частичных областей 611
10.4. Использование разных систем координат в методе частичных областей 618
10.5. Дополнение граничных условий 622
10.6. Распространение звука в нерегулярных волноводах 629
10.6.1. Распространение звука в волноводе с изгибом 629
10.6.2. Распространение звука в волноводе с ответвлением 638
10.6.3. Прохождение звука через область сопряжения плоского и клинообразного волноводов 641
10.7. Рассеяние звука на клинообразном объекте 652
10.8. Излучение звука диском 658
10.8.1. Диск в бесконечном экране 659
10.8.2. Диск в полусферическом экране 667
10.8.3. Диск в конечном кольцевом экране 669
10.8.4. Диск в свободном пространстве 671
10.9. Шумозащитные барьеры 678

10.10. Излучение звука системой соосных пьезокерамических колец 684
10.11. Задачи 696

РАЗДЕЛ 11

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ 698

11.1. Линейные и нелинейные математические модели 698
11.2. Нелинейный осциллятор 701
11.3. Период колебаний нелинейного осциллятора 703
11.4. Фазовое пространство 704
11.5. Особые точки и их классификация 705
11.6. Фазовый портрет динамической системы 709
11.6.1. Консервативная система 710
11.6.2. Диссипативная система 713
11.7. Осциллятор с нелинейностью синуса 715
11.7.1. Аналитический подход 715
11.7.2. Асимптотический метод 719
11.8. Осциллятор с квадратичной нелинейностью, как математическая модель теплового расширения кристалла 725
11.9. Собственные колебания газового пузырька в жидкости . 729
11.10. Автоколебания 733
11.10.1. Автоколебания — типичное природное явление .. 733
11.10.2. Основные определения и свойства 734
11.10.3. Маятниковые часы 738
11.10.4. Свойство фазы на предельном цикле автоколебаний 741
11.11. Автоколебательные системы с нелинейной силой трения 743
11.11.1. Отрицательное трение как механизм возбуждения автоколебаний 743
11.11.2. Осциллятор Рэлея 748
11.11.3. Почему звучит скрипка 751
11.12. Вынужденные колебания нелинейного осциллятора 753
11.12.1. Нелинейный резонанс 754
11.12.2. Резонанс на гармониках и субгармониках 765
11.13. Хаос при вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора 769
11.13.1. Некоторые особенности исследования хаоса 771
11.13.2. Осциллятор с кубической нелинейностью при гармоническом внешнем влиянии 773
11.13.3. Хаотизация колебаний пузырька газа в жидкости под действием звукового поля 778

11.14. Параметрические колебания нелинейных систем 779
11.14.1. Энергетический анализ явления параметрического возбуждения колебательной системы 780
11.14.2. Гармоническое параметрическое возбуждение в системе 782
11.14.3. Маятник Капицы 788
11.15. Синхронизация колебаний 790
11.15.1. Синхронизация — фундаментальное нелинейное явление 790
11.15.2. Синхронизация периодических автоколебаний внешним воздействием 793
11.16. Задачи 800

РАЗДЕЛ 12

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ 802

12.1. Нелинейная акустика как раздел физики нелинейных волн 802
12.2. Простые волны 805
12.2.1. Волны Римана 805
12.2.2. Графический анализ деформации профиля волны Римана 814
12.3. Методы получения приближенных уравнений нелинейной акустики 815
12.3.1. Метод последовательных приближений 816
12.3.2. Метод медленно изменяющегося профиля 819
12.4. Графический анализ деформации профиля простой волны на основе приближенного решения 823
12.5. Нелинейное взаимодействие в простых волнах 824
12.6. Нелинейные волны в среде с диссипацией. Уравнение Бюргерса 827
12.7. Нелинейные волны в среде с релаксацией. Уравнение Кортевега-де Вриза-Бюргерса 832
12.8. Плоские бегущие волны в слабонелинейной поглощающей среде с дисперсией 838
12.9. Солитоны 842
12.10. Нелинейное взаимодействие акустических волн 844
12.11. Параметрические излучатели и приемники звука 846
12.12. Задачи 851

РАЗДЕЛ 13

АКУСТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ 853

13.1. Общие положения 853
13.2. Измерение колебательной скорости и акустического давления методом диска Рэлея 854
13.3. Градуировка электроакустических преобразователей на основе принципа взаимности 858
13.3.1. Формулирование принципа взаимности для электроакустических преобразователей 858
13.3.2. Метод трех преобразователей 861
13.4. Относительные методы градуировки 863
13.5. Задачи 864

Список литературы 865

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО

Есть многое на свете, друг Горацио,
Что и не снилось нашим мудрецам.

У. Шекспир[*]*. Гамлет* (*1601 г.*)

Нашу книгу мы открываем шекспировскими строками. Они написаны четыреста лет назад. Но как тогда, так и сегодня, человек постепенно познает природу, расширяется горизонт его видения, а значит и в будущем исследователями будет открыто еще много нового и интересного. Мы живем во время больших и быстрых перемен. В таких условиях процесс развития науки очень важен для общества. Действительно, опираясь на научные исследования, благодаря общим усилиям людей можно предусмотреть и содействовать решению проблем, которые влияют, как на отдельного человека, так и на весь мир в целом. С этими мыслями и с надеждой на будущее мы работали над книгой. Понятно, что мысли эти не новые, но чтобы подчеркнуть их весомость, мы, обращаясь к читателю, хотим напомнить высказывание Пуанкаре[**], касающееся "науки ради науки", т.е. проблемы развития науки и ее места в жизни общества [[***], с. 281—282]:

"Уровень цивилизации зависит от науки и искусства. Формула "наука для науки" возбуждала удивление; а между тем это, конечно, стоит "жизни для жизни", если жизнь не жалка и ничтожна, и даже "счастья для счастья", если не держаться того взгляда, что все удовольствия равноценны, если не считать, что цель цивилизации состоит в том, чтобы доставлять алкоголь охотникам для выпивки.

Всякое действие должно иметь цель. Мы должны страдать, должны трудиться, должны платить за наше место в спектакле, чтобы видеть, или, по крайней мере, чтобы другие увидели свет…Геологическая история показывает нам, что жизнь есть лишь беглый эпизод между двумя вечностями смерти, и что в этом эпизоде прошедшая и будущая деятельность сознательной мысли — не более как мгновение. Мысль — только вспышка света посреди долгой ночи.

Но эта вспышка — все".

---

[*] Шекспир (Shakespeare) Уильям (1564—1616) — английский драматург и поэт.

[**] Пуанкаре (Poincare) Анри Жюль (1854—1912) — французский математик, физик, астроном и философ.

[***] Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983. — 560 с.

Нашим детям —
Валентине, Анне, Ольге,
Наталии и Тимофею

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание данной книги формировалось с целью выполнения двух заданий. С одной стороны, мы попытались изложить фундаментальные закономерности физической акустики читателю, который только начинает изучать предмет. Материал книги в значительной мере связан со спецификой образования будущего инженера-акустика. В книге излагаются основные физические представления, касающиеся колебаний механических систем и распространения волн в газах, жидкостях и твердых телах. С другой стороны, в книге достаточно подробно рассмотрены наиболее распространенные математические модели акустических явлений, которые широко используются при получении количественных характеристик акустических полей. Следует подчеркнуть тот факт, что развитие вычислительной техники и усовершенствование алгоритмов расчетов обеспечили возможность решения достаточно сложных граничных задач, исследование которых ранее было невозможно.

Характер изложения материала книги имеет первостепенное значение для понимания соотношений между физическими и математическими моделями явлений и их естественными аналогами. В рамках таких соотношений особенно важно установить границы применимости тех или иных моделей и факторов, определяющих эти границы.

Математические выкладки не вызовут каких-либо трудностей у читателей, которые усвоили основы математического анализа в рамках программы инженерной подготовки. Некоторые вопросы, которые изучаются согласно программам математических курсов, рассматриваются с акцентами на физическое содержание задачи. Часто понимание физической сути моделируемого явления может дать надежную основу для развития математических методов решения задачи.

Предлагаемое издание может служить пособием студентам для внеаудиторного чтения. Оптимальным использованием данного пособия было бы ознакомление с темой перед лекцией и возвращение к

ней после лекции. Очень полезна проверка себя путем решения задач, помещенных в конце каждого раздела. Такая работа с книгой почти идеальна.

Хотя очерченная схема требует значительных целенаправленных усилий, следует добавить еще один необходимый элемент эффективного образовательного процесса. С одной стороны, следует помнить, что современная акустика — это чрезвычайно широко развитая наука и невозможно даже надеяться охватить предмет в рамках одной книги. С другой стороны, высшей целью любого образовательного процесса является формирование собственной точки зрения на предмет. Однако собственная точка зрения не может быть сформирована лишь на основе овладения одной, чужой точки зрения. Чтение других книг, сравнение выкладок, понимание разных точек зрения обеспечивает получение истинного знания. Поэтому в книге приведен перечень соответствующей литературы.

В процессе первого ознакомления с предметом в некоторых случаях могут возникнуть трудности при проведении формальных математических преобразований. При этом может сложиться впечатление, что такие преобразования является главным содержанием работы. Хотелось бы, чтобы, работая с книгой, читатель понимал, что математическое решение системы уравнений не является ответом на поставленный физический вопрос. Полученные математические соотношения должны быть физически осмыслены раньше, чем можно будет сказать о завершении решения задачи.

При формировании структуры книги и выборе ее содержания авторы опирались на многолетний опыт исследовательской и преподавательской работы в области физической акустики в Институте гидромеханики НАН Украины, в Киевском НИИ Гидроприборов, на кафедре акустики и акустоэлектроники Национального технического университета Украины “КПИ” и кафедре теоретической и прикладной механики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко. Значительное влияние на выбор материала и характер обсуждения имело многолетнее сотрудничество с коллегами, которые работают в области акустики.

Авторы пользуются возможностью выразить благодарность всем коллегам и помощникам, которые способствовали появлению этой книги, и выражают благодарность за все высказанные замечания и пожелания после выхода книги на украинском языке в издательстве “Наукова думка”, г. Киев, 2007 год. Перевод книги на русский язык выполнен авторами. В процессе перевода добавлены некоторые новые данные, способствующие, по мнению авторов, улучшению книги.

ВВЕДЕНИЕ

> Под словом “открытие” я здесь подразумеваю существенный скачок в понимании природы. Небольшие, обычно невидимые миру открытия делаются непрерывно, и именно они составляют радость повседневной работы. Любопытство, умение радоваться каждому малому шагу, каждому небольшому открытию — необходимое условие для человека, выбравшего научную профессию.
>
> *А.Б. Мигдал*[*] [[**], *с. 61*]

Слово акустика происходит от греческого слова ἀχούω (*akustikos*) — слуховой, слушающий. Акустика — одна из древнейших областей знаний человека, которая зародилась в результате потребности дать объяснение слуховым и языковым явлениям. В этом аспекте следует особенно отметить интерес человека к музыкальным звукам и инструментам. Так, еще Пифагор[***] отметил, что одновременное звучание одинаковых струн разной длины приятно для слуха, если длины этих струн относятся одна к другой как небольшие целые числа. Древние музыкальные инструменты намного старше, чем первые, дошедшие до нас, сведения об акустике как науки о звуке. Наверное, наиболее старинные музыкальные инструменты — духовые. Разные свистелки и дудки из рогов животных и раковин находят в раскопках палеолита. Время возникновения старинной флейты и трубы-раковины — 13-ое тысячелетие до нашей эры, флейты с игровыми отверстиями — 2-ое тысячелетие до нашей эры.

Итак, акустика, так или иначе, должна была возникнуть на основе естественного интереса человека к звуковым явлениям окружающего мира, к звукам, которые мы сейчас называем музыкальными, и музыкальным инструментам.

---

[*] Мигдал Аркадий Бейнусович (1911—1991) — российский физик-теоретик, академик АН СССР (1966).

[**] Мигдал А.Б. Поиски истины. — М.: Мол. гвардия, 1983. — 239 с.

[***] Пифагор (Pythagoras) Самосский (приблизительно 570 — 500 до н.е.) — греческий математик и философ.

Наверное, впервые термин “акустика” использовал Савэр* в своих мемуарах, опубликованных Парижской академией наук в 1701 г. Вот отрывок из его работы**: “Я пришел к выводу, что есть более общая наука, чем музыка, и назвал эту науку акустикой; предметом этой науки являются звуки вообще, тогда как предметом музыки выступают звуки, которые приятны для слуха. Чтобы поставить эту науку на уровень с другими науками, такими, как оптика, необходимо объяснить природу звука и его свойства и выяснить, как работают органы слуха”.

В настоящее время акустика — это область современной физики, которая изучает закономерности распространения и приема звука. Понимание этих закономерностей оказывается решающим для успешной деятельности людей во многих сферах. Это предопределяет наличие в развитом обществе значительной потребности в специалистах по акустике. Общие представления о тех проблемах, которыми занимается современная акустика, можно получить разными путями. Если иметь в виду акустику как научную физическую дисциплину, то общее представление о ней можно получить, анализируя перечень разделов в ведущем периодическом (12 раз в году) издании по акустике — Журнал американского акустического общества (The Journal of the Acoustical Society of America), а также знакомясь с перечнем секций во многих ежегодных международных конференциях, количество которых составляет 10—20 в году:

- распространение и дифракция волн;
- нелинейная акустика;
- акустика твердого тела;
- квантовая акустика;
- акустика мирового океана;
- геоакустика;
- методы и средства борьбы с шумами и вибрациями;
- строительная и архитектурная акустика;
- физические основы промышленного применения ультразвука;
- медицинская акустика;
- электроакустические преобразователи;
- акустические измерения;
- электроакустика;
- методы исследования и обработки акустических сигналов;
- речь и слух;

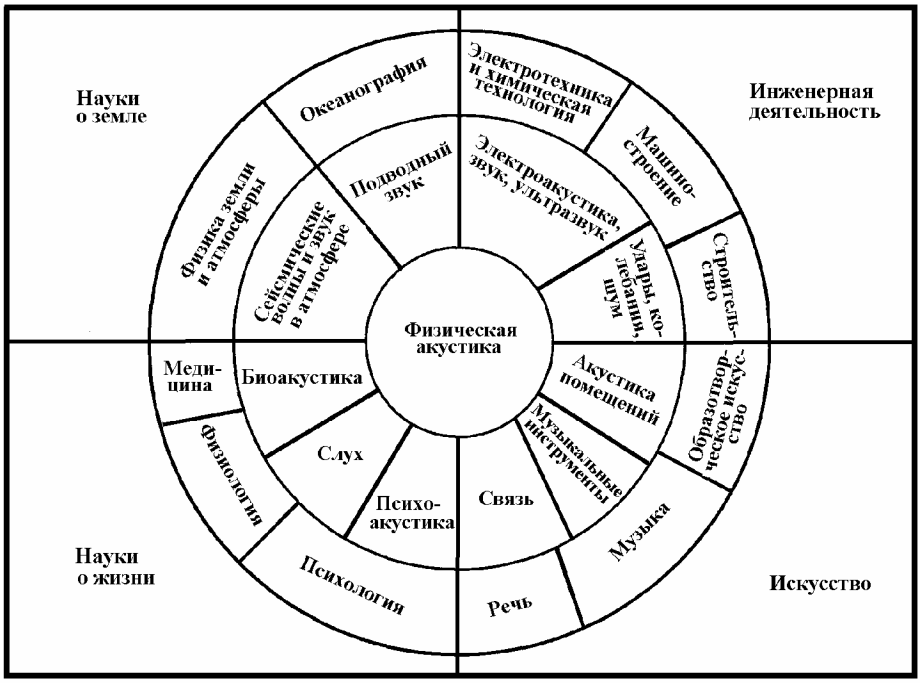
---

* Савэр (Sauveur) Жозеф (1653—1716) — французский физик и математик, основатель музыкальной акустики.

** Principes d’acoustique et de musique, ou système général des intervalles des sons. — Mémoires de l’Académie Royale des sciences, 1701.

• музыкальная акустика;
• биоакустика.

Объединение в одном форуме специалистов таких разных направлений, конечно, приводит к вопросу о том, что есть общего, например, между музыкальной и медицинской акустикой. Возникает и другой вопрос: с чего следует начинать образование тому, кто желает стать специалистом-акустиком. Для придания большей наглядности ответу на этот вопрос воспользуемся круговой картой Линдсея* (рисунок).



Такая диаграмма ставит в центр физическую акустику как основу для использования фундаментальных знаний из теории колебаний и теории распространения волн при решении широкого круга прикладных проблем. Звук, по сути — это специфический тип волнового движения в разных материальных средах, связанный с наличием относительных смещений отдельных частиц среды (имеющих массу) и способностью среды восстанавливать невозмущенное состояние благодаря упругим внутренним силам. Собственно, “игра” сил инерции и упругости составляет первооснову процессов возникновения и распро-

* Линдсей (Lindsay) Роберт Брюс (1900—1985) — американский акустик, главный редактор Журнала американского акустического общества (*The Journal of the Acoustical Society of America*) (1957—1975).

странения звуковых волн в разных средах. Именно с овладения этими первоосновами и должно начинаться изучение акустики.

Кольца вокруг центра диаграммы поделены на отдельные секторы. По смыслу секторы первого кольца близки к указанным секциям акустической конференции. Сектора внешнего кольца указывают на более широкие отрасли прикладной деятельности и связи этих отраслей с соответствующими разделами акустики. Во внешней области выделены четыре квадрата, которые интегрально представляют важные области человеческой деятельности, связанные с акустикой.

Даже такой упрощенный взгляд на структуру современной акустики способен отразить ее грандиозность. Схема, посредством которой мы изображаем построение акустики, бесспорно, имеет существенные недостатки, присущие любому рассказу о науке, который идет впереди изложения ее основных понятий и модельных представлений. Правильное и глубокое представление о современной акустике можно получить в процессе ее изучения.

РАЗДЕЛ 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В АКУСТИКЕ

> Задача физики — воссоздать по возможности точную картину мира без строгих правил игры, используя все известные экспериментальные и теоретические факты, используя основанные на интуиции догадки, которые в дальнейшем будут проверены на опыте.
>
> *А.Б. Мигдал* [*, *с. 155*]

В разных областях физики для качественного и количественного описания явлений, систематизации опыта и, в конце концов, создания методики исследования новых явлений повсеместно используются разные методы моделирования. В частности, математический, физический, экспериментальный. Такой подход дает возможность из всего многообразия связей между объектами реального мира выделить и исследовать те, которые являются самыми существенными для протекания рассматриваемого явления, а несущественные отбросить. Это довольно сложная работа. Можно сказать, что именно в форме моделей явлений аккумулируется и передается человеческий опыт. В последнее время особое значения приобретает математическое моделирование явлений и процессов. При этом одинаково важную роль играют как накопленный уровень физических знаний о мире, так и большие возможности вычислительных средств, которые позволяют количественно изучать моделируемые явления. Очень важный момент, стимулирующий развитие моделирования, связан с большими техническими и финансовыми трудностями, которые возникают при проведении натурных экспериментов.

Математическое моделирование оказалось чрезвычайно плодотворным как средство систематизации, накопления и передачи новых знаний. В рамках таких моделей формируются и наполняются конкретным содержанием основные понятия той или другой отрасли науки. Акустика как область физики давно и успешно использует ме-

---

* Мигдал А.Б. Поиски истины. — М.: Мол. гвардия, 1983. — 239 с.

тоды математического моделирования. Именно в рамках таких методов и построена предлагаемая читателям книга.

Рассмотрим коротко понятие модели. Слово “модель” (от латинского слова *modulus*) означает “копия, образец, прототип”. В самом общем определении, можно сказать, что *модель* — это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе изучения замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования его характеристики (свойства). Сосредоточим наше внимание на математической модели.

Обычно в акустике *математической модели* предшествует построение *мысленной физической модели.* Мысленная физическая модель определяется двумя аспектами:

1) построение модели среды и отдельных составляющих исследуемого объекта (его геометрия, характеристики материала и поверхности объекта). Например, при изучении колебаний пружинного маятника нужно определить свойства пружины и тела с некоторой массой; обычно говорят о безмассовой пружине и идеально жестком теле, т.е., теле, поверхность которого не деформируется под действием внешней силы;

2) моделирование постановки задачи в рамках данной модели.

При построении мысленной физической модели в акустике широко используется ряд моделей, которые заимствованы из механики, математического анализа, геометрии. Так, во втором разделе будем использовать модельное понятие материальной точки, как это принято в теоретической механике, а в следующих разделах — представление о сплошной среде. Рассматривая предельные поверхности реальных объектов, воспользуемся идеальными представлениями о линиях и поверхностях, развитыми в геометрии.

Итак, на этапе мысленного физического моделирования строят некоторую идеализированную модель реального объекта, при этом относительно менее важными свойствами объекта пренебрегают.

После того, как мысленная физическая модель создана, переходят к построению математической модели. Иногда во время этого процесса оказывается, что одна та же математическая модель соответствует нескольким мысленным физическим моделям. Так, механические и электрические колебательные системы описываются одинаковыми уравнениями (см. параграф 2.1); это позволяет, при необходимости, вместо относительно сложного эксперимента на механической системе провести более простой эксперимент на соответствующей электрической системе.

Один и тот же объект может иметь много неэквивалентных моделей. Прежде всего, это связано с необходимостью исследования разных характеристик объекта. Например, исследование идеального маятника без трения и, наоборот, учет сил трения во время колебательного процесса приводят к принципиально разным математическим моделям. Различные математические модели могут использоваться

даже при изучении одной и той же характеристики объекта. Здесь важную роль играют средства исследования. Например, при применении ЭВМ более удобны одни модели, а при аналитическом исследовании — другие.

Конечно, общие контуры математической модели очерчиваются уже на этапе мысленного физического моделирования. Тем не менее, и после завершения этого этапа, как правило, возможны различные модификации математической модели. Иногда в уравнениях можно оставить одни члены и отбросить другие, нелинейные зависимости заменить на линейные, сложные геометрические формы — на более простые и т.д. Это очень важный момент. Поэтому при изложении материала мы постоянно подчеркиваем сущность тех модельных предположений, которые приведены в данном разделе книги. Понимание содержания таких предположений необходимо для того, чтобы не сделать ошибку, которая все время подстерегает того, кто изучает предмет: расширить область применения полученного в рамках выбранной модели результата за границы применимости самих модельных предположений. В связи с этим при описании модели нужно говорить не только о свойствах объекта, которые отбрасываются или учитываются, но и указывать границы применимости принятых предположений. Часто определение таких границ является довольно сложной задачей, особенно, когда речь идет о возможных количественных оценках. В книге на простейших примерах показан характер такой работы.

Важно отметить, что понятие “исследовать модель” существенно сложнее, чем это может казаться на первый взгляд. Яркий пример, поясняющий эту мысль приведен в работе [*, с. 232]: “...математика учит нас, что решение уравнения $dx / dt = x$ однозначно определяется начальными условиями (т.е., существующие интегральные кривые на плоскости (t, x) не пересекаются). Этот вывод математической модели далек от реальности. Компьютерный эксперимент показывает, что все эти интегральные кривые имеют общие точки на отрицательной полуоси t. Действительно, например, кривые с начальными условиями $x(0)= 0$ и $x(0) = 1$ при $t = -10$ практически пересекаются, а при $t = -100$ между ними невозможно вставить и атом. Свойства пространства на малых отрезках не описываются евклидовой геометрией. Использование теоремы единственности в этой ситуации — явное превышение точности модели. При практическом использовании модели это нужно иметь в виду, иначе можно натолкнуться на серьезные неприятности”.

Итак, важно понимать, что *математическое решение уравнений математической модели еще не является решением физической за-*

---

* Арнольд В.И. О преподавании математики // Успехи матем. наук. — 1998. — **53**, вып. 1. — С. 228—234.

дачи. Поэтому прежде, чем считать задачу исследования реального объекта решенной, нужно сформулировать результат в виде физических понятий, т.е. нужно четко понимать как математическое содержание полученных решений, так и то, что они означают на языке реального мира, который описывает математика.

Важнейшее требование к математической модели – это *требование адекватности* реальному объекту относительно выбранной системы его характеристик. Под этим, обычно, понимают:

1) адекватное качественное описание объекта в соответствии с выбранными характеристиками. Например, исследование модели колебательной системы дает возможность сделать правильный вывод о затухании колебаний реального объекта, об устойчивости его движения и т.п.;

2) адекватное количественное описание объекта в соответствии с выбранными характеристиками с некоторой разумной степенью точности, которая определяется практической целесообразностью и необходимостью.

Следует отметить, что любая адекватность только относительная и имеет свои границы применимости (как и модель в целом, о чем мы уже говорили). Об этом нужно помнить, чтобы не возникло желание навязать реальному объекту свойства его модели. Примером могут служить свободные колебания реальной системы с малым трением. Если при математическом анализе колебаний заменить эту систему линейной моделью без трения, то такая упрощенная модель может иметь высокую степень адекватности по частотам и формам колебаний, но будет, очевидно, совсем неадекватной по затуханию колебаний.

Если только исходить из требований адекватности, то сложные модели лучше простых. Действительно, с одной стороны, сложная модель позволяет учесть больше факторов, которые так или иначе будут влиять на изучение характеристик объекта. С другой стороны, учет большого числа параметров, которые характеризуют объект, может привести к громоздким уравнениям, которые не поддаются исследованию. И это справедливо даже при наличии мощных ЭВМ. Можно привести много примеров, когда, полагаясь только на мощности ЭВМ без вдумчивой разработки математической модели, исследователь сталкивался с непреодолимыми трудностями.

Таким образом, мы приходим к требованию *достаточной простоты модели относительно выбранной системы характеристик*, которая в некоторой степени противоположна требованию адекватности. Итак, вместе с наличием адекватности, модель должна быть достаточно простой, чтобы можно было с необходимой точностью провести ка-

чественный или количественный анализ характеристик объекта и осмыслить результат.

Подводя итог короткому рассказу о математическом моделировании приведем несколько общих соображений, которые не могут служить непосредственным указанием к действию, они лишь дают разумные подсказки, как и что, следует делать [*, с. 330].

"1. Чем проще модель, тем меньше возможность ошибочных выводов.
2. Модель должна быть простой, насколько это возможно, но не проще.
3. Пренебрегать можно чем угодно, нужно только знать, как это повлияет на решение.
4. Модель должна быть грубой: малые поправки не должны кардинально менять ее поведение.
5. Модель и расчет не должны быть точнее исходных данных.
6. При анализе результатов исследования модели важны не только конкретные численные результаты, но и понимание того, почему и как все происходит и как все это зависит от параметров".

Одной из загадок науки Эйнштейн** считал возможность исследования природы с помощью математики. Соглашаясь с мыслью великого ученого, мы в начале раздела говорили о чрезвычайной плодотворности математического моделирования. Желая еще раз подчеркнуть важность этого положения, приведем отрывок из книги [***, с. 344, 346], содержание которой направлено на то, чтобы показать, что построение математических моделей — это одна из движущих сил науки. Заметим, что авторы используют термин *абстракция*. Согласно Энциклопедическому словарю (М., Советская энциклопедия, 1989), "*абстракция* (от латинского слова *abstractio* – отвлечение) – форма познания, основанная на мысленном выделении существенных свойств и связей предмета и отвлечении от других, частных его свойств и связей..." Понятно, что процесс абстрагирования является основой при построении математической модели.

"Часто подчеркивают единство природы. Все связано со всем. К счастью, это не конструктивная формула. Явления, тела, разнообразные типы движений естественным образом вычленяются из общей массы. Это свойство мира, в котором мы существуем, представляет

---

* Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004. – 401 с.

** Эйнштейн (Einstein) Альберт (1879—1955) — немецкий физик, лауреат Нобелевской премии (1922).

*** Каганов М.И., Любарский Г.Я. Абстракция в математике и физике. — М.: Физматлит, 2005. — 352 с.

собой необходимое условие возможности его изучения. Невозможно было бы исследовать явления природы, если бы каждое из них зависело от всех остальных. Само понятие *явление* предполагает выделенность из всего происходящего.

Познаваемым делает мир абстрагирование. Возможность абстрагирования — одно из свойств нашего Мира.

Сравнение чисел, полученных на основе теории, с числами, добытыми экспериментальным путем, есть основной этап, без которого невозможно выяснить, понимаем ли мы природу.

Природа учит абстрагировать и дает возможность проверить законность использования абстракции".

Вообще построение математической модели есть один из наиболее сложных и ответственных этапов работы. Опыт свидетельствует о том, что во многих случаях правильно выбрать модель — это решить задачу больше, чем наполовину. Умение правильно выбрать математическую модель, образно говоря, находится на границе науки и искусства. Понятно, что искусством построения моделей можно овладеть только благодаря собственной практике, но ощутить и получить первые навыки на этом пути можно, работая над этой книгой.

Эти абстрактные рассуждения можно наполнить совершенно конкретным содержанием. В различных руководствах по акустике представлено решение задачи об излучении звука системой двух круговых цилиндров. При этом указывается, что случай касающихся цилиндров (см. раздел 10), рассматриваемый в рамках предельного перехода при стремлении расстояния между цилиндрами к нулю, не имеет решения. Удивительно то, что авторы не продолжают рассмотрение физической задачи. Ведь совершенно ясно, что физически такая задача совершенно корректна. Отсутствие ее решения в рамках математической модели, основанной на предельном переходе, свидетельствует лишь о ее неадекватности физической задаче Для читателя это интересная ситуация для размышлений и построения собственной корректной математической модели.

РАЗДЕЛ 2

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

На балке висит колокол. Вы можете сильно дергать веревку и не раскачаете колокол, а маленький мальчик его раскачает, если придаст выгодную форму кривой своей силы, если будет вовремя увеличивать и уменьшать свою силу. Одно дело, насколько колокол отклонится под действием данного груза, другое — как раскачать колокол последовательными толчками. Именно *этим* интересуется теория колебаний.

Л.И. Мандельштам[*] [*32, с. 12*]

2.1. Незатухающие колебания в системе с одной степенью свободы

2.1.1. Исходные модельные представления

Уже при рассмотрении простейших моделей механических систем формулируются понятия, важные для описания сложных колебательных и волновых движений. Говоря о простейших системах, имеем в виду не только их простоту, связанную с набором составных элементов, а и существенное упрощение описания процессов взаимодействия таких систем с окружающим миром. В крайнем случае, можно вообще пренебрегать таким взаимодействием при рассмотрении.

Простейшая колебательная система имеет два элемента — упругость и массу. При этом в качестве простейшего элемента массы можно использовать материальную точку. В общем случае ее движение полностью описывается заданием радиуса-вектора положения точки как функции времени $\mathbf{r}$ или тремя его проекциями на оси, например декартовой системы координат $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Если на материальную точку не наложены никакие связи, то под действием произвольных сил, которые действуют на нее, все три ко-

[*] Мандельштам Леонид Исаакович (1879—1944) — российский физик, академик АН СССР (1929).

ординаты будут изменяться как функции времени. Этот факт в динамике твердого тела описывают, вводя понятие *степеней свободы* механической системы. Материальная точка вообще имеет три степени свободы. Сначала рассмотрим такие случаи, когда для описания движения в системе достаточно знать лишь одну функцию времени, т.е. когда система имеет одну степень свободы; в данном разделе не учитываем потери энергии в колебательной системе.

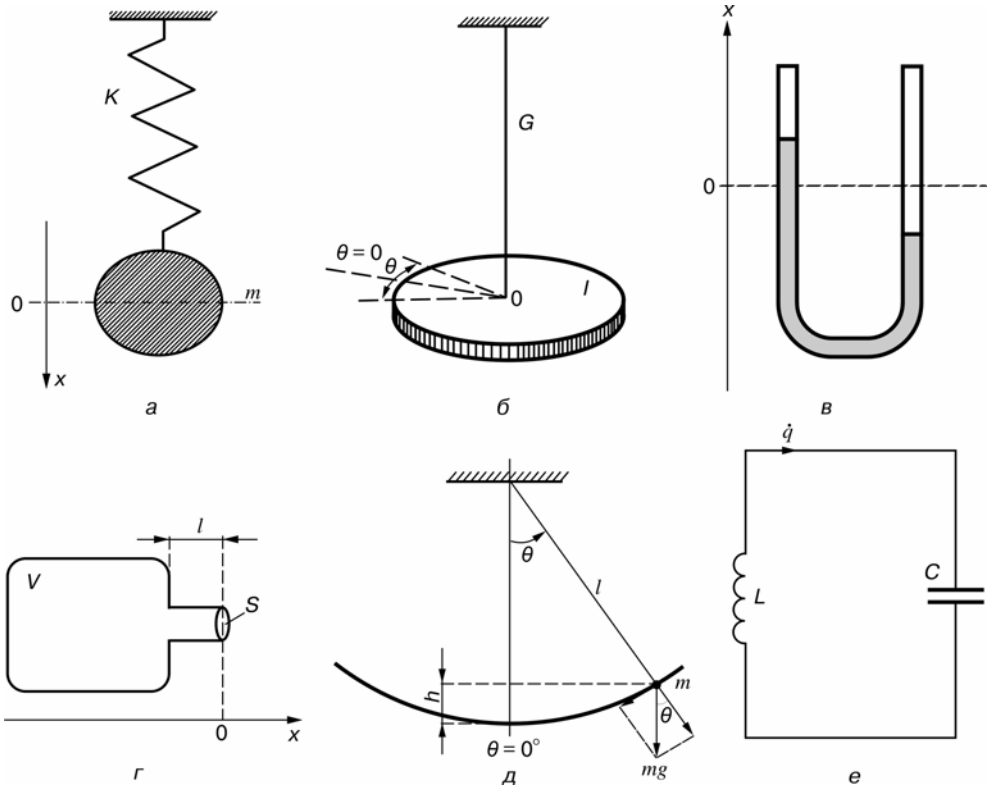


Рис. 2.1. Примеры колебательных систем с одной степенью свободы

Такое предположение, конечно, накладывает ограничения на силы, которые действуют на материальную точку, - они не должны приводить к другим типам движения. Кроме того, для возникновения определенного движения системы, которое определяется как колебание, в системе должны действовать специфические силы. При некотором определенном положении системы эти силы равны нулю. Такое положение называется *равновесным*. При любом другом положении материальной точки на нее должна действовать сила, которая стремится возвратить систему в равновесное состояние. Подобную за природой действия силу называют *восстанавливающей*. Простейшая модель системы, которая создает такую силу, есть идеально упругая пружина,

один конец которой закреплен, а к другому приложена масса. Схематично такая система приведена на рис. 2.1, *а*. Равновесное положение отвечает точке $x = 0$.

В отличие от любой реальной пружины идеальная, которую мы помещаем в систему, лишена массы. Кроме того, для растяжения или сжатия идеальной пружины на любую величину (x) необходимо приложить силу, прямо пропорциональную этому смещению:

$$F_x = -Kx. \tag{2.1}$$

Здесь K — характеристика пружины, которая называется *жесткостью*, Н/м.

При рассмотрении колебательных систем используется также величина, обратная к жесткости, которая называется *податливостью*: $s = 1/K$.

Соотношение (2.1) отражает важное предположение о свойствах пружины. Интуитивно понятно, что поведение идеальной пружины приближается к поведению реальной пружины лишь в случае относительно небольших отклонений от положения равновесия. Движение системы при таких ограничениях определяет *малые* колебания близи положения равновесия.

Итак, мы начали использовать такие понятия, как большое и малое отклонение от положения равновесия. Для более полного понимания следует все время придерживаться такого правила: как только в тексте появились понятия “большой” и “малый”, необходимо выяснить, что с чем сравнивается и какой выбран масштаб для измерения этой величины. При этом удается избежать принципиальных ошибок, которые возможны в процессе построения моделей реальных систем и качественного анализа особенностей их поведения.

В качестве примера системы с одной степенью свободы рассмотрим систему, приведенную на рис. 2.1, *а*. Если характерной особенностью этой системы считать то, что для описания движения в ней достаточно задать лишь одну функцию $x(t)$, то легко можно указать ряд систем, аналогичных по свойствам. На рис. 2.1, *б* изображена система с жестким диском, который характеризуется некоторым моментом инерции относительно вертикальной оси, проходящей через точку O, и идеально упругим стрежнем заданной длины с крутильной жесткостью G. Итак, для закручивания стрежня на некоторый угол θ необходим крутильный момент

$$M = -G\theta, \tag{2.2}$$

где размерность G, Н · м. В такой системе возможно движение, которое полностью определяется заданием угла закручивания как функции времени.

На рис. 2.1, *в* жидкость плотности ρ заполняет U-образную трубку; полная длина столба жидкости равняется l. Жидкость в трубке колеблется вокруг положение равновесия, для которого высота уровня жидкости одинакова в обоих коленах. Движение жидкости характеризуется величиной изменения уровня в коленах $x(t)$ относительно положения равновесия $x = 0$, а восстанавливающая сила определяется разностью давления на некотором горизонтальном уровне в коленах трубки.

На рис. 2.1, *г* приведена колебательная система, представляющая собой открытую колбу объемом V с шейкой длиной l и площадью поперечного сечения S. Колба заполнена воздухом плотности ρ. Под действием звуковой волны на воздух в шейке колбы возникают колебания. В случае малых размеров сосуда по сравнению с длиной звуковой волны, воздух в объеме V ведет себя, как некоторая пружина, а воздух в шейке колбы движется, как некоторая масса. Итак, возможное движение в такой системе полностью определяется координатой $x(t)$ перемещения "воздушной пробки" в шейке колбы. Тогда восстанавливающая сила в такой системе будет определяться силой упругости, возникающей при изменении объема V воздуха внутри колбы.

Движение математического маятника, приведенное на рис. 2.1, *д*, полностью описывается заданием функции $\theta(t)$. Здесь следует лишь подчеркнуть, что источник восстанавливающей силы (земное тяготение) не идеализируется в такой мере, как в рассмотренных раньше системах. И это сразу сказывается на зависимости восстанавливающей силы от координаты θ, что будет разъяснено далее в тексте.

По аналогии с рассмотренными механическими системами ведет себя и электрический контур (рис. 2.1, *е*). Контур состоит из таких модельных элементов как сосредоточенные катушка индуктивности, конденсатор и идеальные проводники. Для полного описания состояния такого электрического контура достаточно задать изменение во времени величины $q(t)$, характеризующей заряд конденсатора.

Как видно из приведенных примеров, физическая суть величин, описывающих движение системы с одной степенью свободы, может быть разной. Собственно поэтому эти величины называют *обобщенными координатами.*

2.1.2. Уравнения свободного движения в системе с одной степенью свободы

При рассмотрении особенностей движения систем указанного типа первой задачей является задача об определении характеристик свободного движения систем. При этом имеется ввиду такая ситуация: под действием некоторого внешнего воздействия система выводится из положения равновесия и далее она имеет возможность

двигаться свободно. Для полного и однозначного определения дальнейшего движения системы результат внешнего влияния описывается той же функцией, что и движение системы. Поскольку такой функцией является обобщенная координата, то первоначальное внешнее влияние конкретизируется заданием начального значения обобщенной координаты и скорости ее изменения, а именно, обобщенной скорости.

Для получения соотношений, которые дают возможность определить изменение обобщенных координат с течением времени при заданных начальных условиях, используются физические законы. Чтобы записать уравнение движения для систем, приведенных на рис. 2.1 (кроме последней), воспользуемся вторым законом Ньютона*. Для первой, третьей и четвертой систем соответствующее векторное соотношение записывается в проекции на ось *Ox*. При этом для первой и четвертой систем (рис. 2.1, *а*, *г*) имеем выражение

$$m\ddot{x} + Kx = 0, \tag{2.3}$$

а для третьей (рис. 2.1, *в*) следующее:

$$\rho l\ddot{x} + 2\rho g x = 0.$$

Для математического маятника (рис. 2.1, *д*) восстанавливающая сила равна проекции силы тяжести на касательную к траектории движения шарика. Поэтому соотношение, отражающее второй закон Ньютона, примет вид

$$ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0. \tag{2.4}$$

Закон сохранения момента количества движения для колебательной системы, приведенной на рис. 2.1, *б*, запишем следующим образом:

$$I\ddot{\theta} + G\theta = 0, \tag{2.5}$$

где I — момент инерции диска относительно вертикальной оси, кг · м^2. Используя закон Кирхгоффа* для электрического контура, представленного на рис. 2.1, *е*, приходим к соотношению

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0, \tag{2.6}$$

где размерности L, Гн, и C, Ф. Все полученные соотношения (2.3)—(2.5) содержат в себе как искомые функции, так и их производные, т.е. это — дифференциальные уравнения. В уравнения (2.3), (2.5) и

---

* Ньютон (Newton) Исаак (1643—1727) — английский физик, механик, астроном и математик.

* Кирхгофф (Kirchhoff) Густав Роберт (1824—1887) — немецкий физик.

(2.6) функции и производные входят линейно, что и отражено в выражении “линейные дифференциальные уравнения”. В формулу (2.4) искомая функция входит нелинейно ($\sin\theta$). Разница в поведении механических систем, которые описываются линейными и нелинейными уравнениями, очень велика. Суть, причина и содержание этих уравнений в определенной степени раскрываются в разделе 11. Но уже в данном параграфе можно четко проследить причину возникновения нелинейности. Математический маятник — это единственная из рассматриваемых систем, для которой написание математического соотношения, отражающего связь между отклонением системы от положения равновесия и восстанавливающей силой, не требует предположений, упрощающих и идеализирующих источник колебаний. Нелинейность (2.4) исчезает, если предположить малость отклонений от положения равновесия, аналогично тому, как это сделано при описании других систем, приведенных на рис. 2.1.

Представим функцию $\sin\theta$ в виде ряда

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots \qquad (2.7)$$

Если анализ задачи и требуемая точность решения позволяет пренебречь слагаемыми с третьей и высшими степенями θ, то $\sin\theta \approx \theta$, и уравнение (2.4), принявшее вид

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0\,, \qquad (2.8)$$

будет аналогично уравнениям для других рассмотренных систем. При этом можно сказать, что в случае малых отклонений от положения равновесия движение математического маятника описывается линейным дифференциальным уравнением.

Заметим, что можно привести примеры моделей колебательных систем, которые являются нелинейными даже при малых отклонениях системы от положения равновесия. Рассмотрим, например, систему, приведенную на рис. 2.2. Здесь оба конца витой пружины зафиксированы на определенном расстоянии l один от другого, а масса m прикреплена к центру пружины; K — жесткость пружины. Поскольку масса двигается вдоль оси Ox, то восстанавливающая сила $F_В(x)$ равна проекции силы упругости пружины F на ось Ox. Силой тяжести, которая действует на массу m, будем пренебрегать (она не вносит вклад в восстанавливающую силу).

В соответствии с рис. 2.2 деформация пружины ξ определяется соотношением: $\xi = 2\sqrt{(l/2)^2 + x^2} - l_0$, где l_0 — длина пружины в недеформированном состоянии. Тогда потенциальная энергия системы $E_П$ выражается соотношением

$$E_{\Pi}(\xi)=\frac{K\xi^2}{2}=\frac{K}{2}\left[2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+x^2}-l_0\right]^2.$$

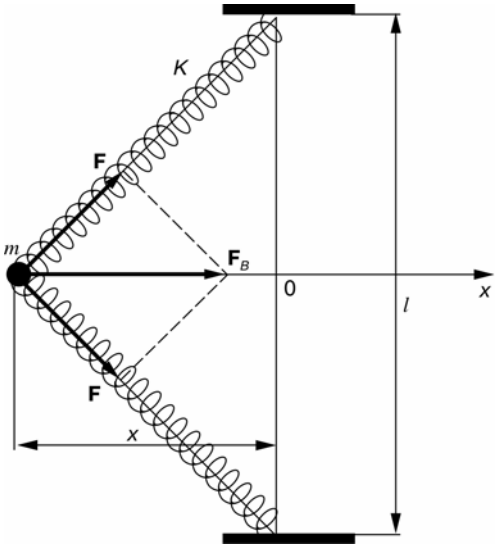


Рис. 2.2. Пример нелинейной колебательной системы

(Напомним, что потенциальная энергия E_{Π} пружины определяется работой против силы упругости, т.е. $E_{\Pi}=\int_0^{\xi}K\xi d\xi=K\xi^2/2$.) Учитывая связь между потенциальной энергией и восстанавливающей силой, действующей вдоль оси Ox, находим выражение для этой силы:

$$F_{\text{B}}(x)=-\frac{dE_{\Pi}}{dx}=-4Kx\left[1-\frac{l_0}{l}\frac{1}{\sqrt{1+(2x/l)^2}}\right]. \qquad (2.9)$$

Разложим это выражение в ряд в окрестности малых значений величины $(x/l) < 1$:

$$F_{\text{B}}(x)=-4K(l-l_0)\frac{x}{l}-8Kl_0\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^5+\ldots\right]. \qquad (2.10)$$

Если $x \ll l$, то, конечно, можно пренебречь высокими степенями x/l, и считать силу линейной относительно x. Тем не менее, если длина недеформированной пружины l_0 равна расстоянию l между креплениями, то линейный член исчезает, и даже для малой величины x восста-

навливающая сила $F_{\text{В}}(x) \approx -8Kx^3/l^2$ пропорциональна кубу смещения.

Следует сказать, что наличие линейной зависимости восстанавливающей силы при малых колебаниях системы является, как говорят, *типичной* в природе. Поэтому в начале будем рассматривать именно такие колебания. После деления (2.3), (2.5), (2.6) и (2.8) на коэффициент при второй производной становится очевидным, что для всех случаев коэффициент при обобщенной координате имеет размерность: единица, деленная на секунду в квадрате. Это дает возможность сделать вывод о том, что закономерности изменения во времени обобщенных координат для всех рассматриваемых систем (рис. 2.1) полностью идентичны, и для их изучения можно ввести некоторую новую математическую модель, которая охватывает все рассмотренные частичные физические модели. Дифференциальное уравнение этой математической модели имеет вид

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \qquad (2.11)$$

где размерность ω_0, с^{-1}.

Понятно, что дальнейшее движение системы определяется ее начальным состоянием, или, как говорят, *начальными условиями*, которые записывают для некоторого момента времени t, пусть это будет $t = 0$. Начальные условия, очевидно, обусловлены заданием начальных обобщенных координат смещения и скорости:

$$\xi(0) = \xi_0, \ \dot{\xi}(0) = \upsilon_0. \qquad (2.12)$$

Такая математическая модель получила название *гармоничного осциллятора* (от латинского слова *oscillo* — колеблюсь). Суть этого названия становится понятной при анализе решения уравнения (2.11).

Задание именно двух начальных условий (2.12) легко понять с физической точки зрения. Предположим мы хотим знать состояние осциллятора в некоторый момент времени. Для этого нам недостаточно знать смещение ξ, ведь в дальнейшем оно может, как увеличиваться, так и уменьшаться. Необходимо также знать скорость осциллятора $\dot{\xi}$ в тот же момент времени. Таким образом, поведение осциллятора полностью описывается эволюцией во времени двух величин $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$.

<u>*Пример 2.1.*</u> Начальные условия для математического маятника таковы: $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Определить максимальное значение угла θ_0 при условии учета только линейного члена в ряде (2.7). Считать, что второй член ряда (2.7) меньше первого минимум в десять раз.

Решение. Согласно условию $\theta_0^3/(6\theta_0) = 0{,}1$; отсюда, максимальный угол отклонения маятника равен $\theta_0 \approx 44^\circ$.

2.1.3. Гармонический осциллятор

Уравнение (2.11) описывает закономерности движения, общие для многих электрических и механических систем. Для конкретного изучения этих закономерностей необходимо найти решение этого уравнения и привести его в соответствие с заданными начальными условиями. В математике существует специальный раздел, посвященный теории дифференциальных уравнений, который содержит в себе и разработку методов их решения. Для тех уравнений, которые встречаются в данном разделе, решения могут быть получены на основе довольно простых и наглядных соображений.

Уравнение (2.11) — это некоторое алгебраическое соотношение, которое связывает значение функции и ее второй производной в любой момент времени. Поэтому решением этого уравнения может быть функция, которая не изменяет своего вида вследствие двукратного дифференцирования или, как говорят, является *инвариантной* (от латинского слова *invarians* — неизменный) относительно операции двукратного дифференцирования. Функции такого типа хорошо известны из математического анализа. Например, функция

$$y(t) = A\exp(\alpha t) \qquad (2.13)$$

имеет такое свойство относительно операции дифференцирования любого порядка n:

$$y^{(n)}(t) = A\alpha^n \exp(\alpha t).$$

Бесспорно, такую функцию $y(t)$ можно использовать как пробную для получения решения (2.11). Хорошо известно также, что тригонометрические функции имеют указанное свойство относительно операции дифференцирования любого парного порядка:

$$y_1(t) = A\cos(\alpha t),\ \ y_2(t) = B\sin(\alpha t); \quad (2.14)$$

$$y_1^{(2n)}(t) = A(-1)^n\,\alpha^{2n}\cos(\alpha t),\ \ y_2^{(2n)}(t) = B(-1)^n\,\alpha^{2n}\sin(\alpha t).$$

Таким образом, и тригонометрические функции могут быть использованы как пробные, при стремлении найти решение (2.11). Рассмотрим процедуру получения решения с использованием функции (2.13), т.е. предположим, что искомая функция имеет вид:

$$\xi(t) = A\exp(\alpha t). \qquad (2.15)$$

В этом выражении есть две произвольных величины — A и α, которые следует определить так, чтобы искомая функция удовлетворяла уравнению (2.11). Подставляя выражение (2.15) в (2.11), получаем

$$A\left[\alpha^2+\omega_0^2\right]\exp(\alpha t)=0. \qquad (2.16)$$

Видно, что постоянная A не определяется из полученного соотношения. Что касается постоянной α, то уравнение не может быть удовлетворено при любом действительном значении величины α. Но, допуская возможность комплексных величин α, в частности, в данном случае чисто мнимых величин, легко убедиться, что (2.15) есть решение (2.11) только в случае, если α принимает два значения:

$$\alpha_1=i\omega_0, \quad \alpha_2=-i\omega_0 \qquad .(2.17)$$

Таким образом, для исходного уравнения (2.11) найдено два решения:

$$\xi_1(t)=A\exp(i\omega_0 t), \quad \xi_2(t)=B\exp(-i\omega_0 t). \qquad (2.18)$$

Поскольку само уравнение никаких ограничений на значение множителя при экспоненте не накладывает, то, конечно, в разных решениях эти множители можно брать отличными друг от друга.

Исходное уравнение (2.11) описывает поведение реальных физических систем. По своему физическому смыслу искомая функция $\xi(t)$ есть величина, которая измеряется. В связи с этим комплексная форма решения, на первый взгляд, не пригодна. Но для уравнения с действительными коэффициентами решением является отдельно взятая действительная и мнимая части комплексного решения. Поэтому ясно, что вместо (2.18) в дальнейшем можно использовать решения вида

$$\xi_1(t)=a\cos(\omega_0 t), \quad \xi_2(t)=b\sin(\omega_0 t), \qquad (2.19)$$

где a и b — произвольные действительные постоянные. Такая легкость перехода от комплексных (не физических) к действительным (измеряемым) величинам обуславливает очень широкое использование в акустике комплексных изображений для искомых величин. При этом существенно упрощаются промежуточные выкладки. Это позволяет широко использовать комплексные функции при изложении материала.

Выражения (2.19) представляют собой два конкретные частные решения исходного уравнения. Вследствие линейности уравнения его решением будет любая линейная комбинация частных решений, т.е.

$$\xi(t)=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t). \qquad (2.20)$$

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что любое частное решение уравнения (2.11) может быть получено из выражения (2.20) выбором конкретных значений величин a и b. Именно поэтому его называют *общим решением дифференциального уравнения* (2.11). С физической точки зрения такое математическое утверждение указывает на то, что выбором значений a и b можно описать движение механической или электрической системы при любых начальных условиях. В справедливости этого легко убедиться.

Если в (2.20) задать начальные условия для ξ, как в (2.12), то можно легко найти значение постоянных a и b, и решение будет иметь вид

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\upsilon_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \qquad (2.21)$$

Этому решению можно придать более удобное представление

$$\xi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (2.22)$$

где $A = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{\upsilon_0}{\omega_0}\right)^2}$, $\cos\varphi_0 = \frac{\xi_0}{A}$, $\sin\varphi_0 = -\frac{\upsilon_0}{\omega_0 A}$.

Соответственно скорость осциллятора будет иметь вид

$$\dot{\xi}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (2.23)$$

Таким образом, решение уравнения (2.11), описывающего поведение гармоничного осциллятора, получено. Решена достаточно простая задача динамики — известно состояние системы в определенный момент времени, если известны начальные условия ее движения.

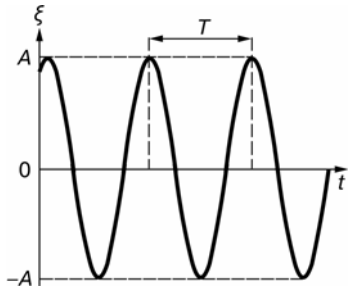


Рис. 2.3. График гармонического колебания

Колебания, которые определяются функцией синуса или косинуса, называются *гармоничными* (от греческого слова αρμονιχος — созвучный). Итак, движение системы (2.11) — это простое гармоничное ко-

лебание (рис. 2.3). В теории колебаний, как части физической акустики, почти не интересуются такими локальными вопросами: где в данный момент находится система. Более важным вопросом является определение *интегральных характеристик движения колебаний системы.*

В решении (2.22) такими интегральными характеристиками есть три величины — амплитуда колебаний (A), угловая частота (ω_0) и начальная фаза (φ_0). Функция $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ называется *фазой колебания.* В соответствии с выражением (2.22) начальная фаза φ_0 определяет сдвиг фазы данного колебания относительно колебания, которое началось при нулевой начальной скорости ($\upsilon_0 = 0$). Частоту ω_0 называют *собственной частотой* осциллятора.

Фаза колебаний $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ возрастает неограниченно со временем. Тем не менее, поскольку функции синуса и косинуса являются периодическими функциями с периодом 2π, то две фазы, которые различаются на 2π, отвечают одному и потому же физическому состоянию колебательной системы. Поэтому часто, для удобства, изменение фазы определяют от 0 до 2π. Поскольку производная $\varphi'(t) = \omega_0$, то понятно, что угловая частота ω_0 определяет скорость изменения фазы колебаний со временем (2.22).

Движение в соответствии с (2.22) является периодическим, т.е. система возвращается в любое из возможных состояние после некоторого промежутка времени T (рис. 2.3). Величина этого временного параметра, который называют *периодом колебаний*, определяется из равенства, вытекающего из свойств тригонометрических функций:

$$\omega_0 T = 2\pi,\ \text{с}^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0},\ \text{с}. \tag{2.24}$$

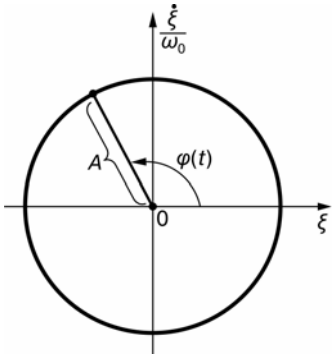


Рис. 2.4. Пример гармонического колебания на плоскости переменных ξ и $\dot{\xi}/\omega_0$

Поскольку переменные $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ полностью описывают поведение осциллятора, то их можно определить как координаты декартовой системы координат $(\xi, \dot{\xi})$. Тогда с изменением времени точка на плоскости $(\xi, \dot{\xi})$ вычерчивает некоторую линию. Понятно, что, когда колебания периодические, то кривая будет замкнутой. Имея выражения (2.22) и (2.23), нетрудно получить уравнения этой кривой: $\xi^2 + \dot{\xi}^2 / \omega_0^2 = A^2$. Если в качестве координат приняты переменные ξ и $\dot{\xi}/\omega_0$, то имеем уравнение окружности (рис. 2.4). Как видим, величины A і $\varphi(t)$ есть не что иное, как полярные координаты точки на плоскости $(\xi, \dot{\xi})$. Эта точка вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 (ведь $\varphi'(t) = \omega_0$), так что за один период колебаний T она выполняет один оборот, и фаза $\varphi(t)$ возрастает на 2π.

Согласно определению угловая частота $\omega_0 = 2\pi/T$ выражается в радианах за секунду. Поскольку радиан есть величина безразмерная, то размерность ω_0, $с^{-1}$, она определяет число колебаний системы за 2π секунд. Вместе с угловой частотой ω_0 при описании колебательных процессов используют такую характеристику, как число колебаний за одну секунду — f_0. Частота f_0 связана с угловой частотой ω_0 равенством $f_0 = 1/T = \omega_0/(2\pi)$, Гц. Единица частоты f_0 — герц, т.е. частота процесса, в котором одно колебание происходит за одну секунду. Конечно, если это не вызывает недоразумений, ω и f имеют одинаковое название — частота.

Перепишем выражение для скорости гармонического осциллятора (2.23) в виде $\dot{\xi}(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2)$. О такой записи можно говорить, что скорость $\dot{\xi}(t)$ опережает по фазе изменение координаты $\xi(t)$ на величину $\pi/2$. Дифференцируя вторично, находим ускорение $\ddot{\xi}(t) = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$. Ускорения $\ddot{\xi}(t)$ изменяется за тем же законом, что и координата $\xi(t)$ осциллятора, но опережает ее по фазе на π. Начертите графики зависимости ξ, $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$ от времени t и подумайте самостоятельно над их фазовыми соотношениями.

Записанные выше формулы для ξ, $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$ устанавливают связь между амплитудами колебаний A, скорости A_υ и ускорение A_a : $A_\upsilon = \omega_0 A$, $A_a = \omega_0^2 A = \omega_0 A_\upsilon$.

Пример 2.2. На платформе, которая выполняет гармонические колебания с частотой 5 Гц в вертикальном направлении, размещен

груз. Показать, что груз потеряет контакт с платформой, когда ее смещение превысит 0,01 м.

Решение. Груз потеряет контакт с платформой, когда ускорение платформы и ускорение силы тяготения g будут иметь одинаковое направление, а ускорение платформы будет больше, чем g. Такие условия могут быть реализованы, когда платформа находится в самом верхнем положении при $a_{\max} = \omega_0^2 A > g$. Подставив численные значения величин, получим очевидное неравенство: $\pi^2 > g$.

В соответствии с уравнением (2.11) квадрат собственной частоты ω_0 входит как коэффициент при обобщенной координате. Поэтому построение уравнения движения системы позволяет сразу определить частоту ω_0. Проиллюстрируем этот важный результат на таком примере.

Пример 2.3. Рассмотрим малые колебания ($x << l$) массы m, помещенной посередине безмассовой струны, натянутой с силой F (рис. 2.5). Положение равновесия соответствует координате $x = 0$. Определить собственную частоту колебаний массы m.

В начале сделаем важное замечание относительно малости колебаний. В процессе колебаний сила упругости F будет изменяться на величину, которая пропорциональна удлинению струны $\Delta l = 2\sqrt{(l/2)^2 + x^2} - l = l\left(\sqrt{1 + (2x/l)^2} - 1\right)$. Разложим функцию $\Delta l(x)$ в ряд по степеням x/l: $\Delta l = l\left(1 + 0{,}5(2x/l)^2 + \ldots - 1\right)$. Поскольку $x/l << 1$, то имеем приближенное равенство $\Delta l \approx 2l(x/l)^2$, т.е. изменение натяжения струны при колебании массы m есть величина второго порядка малости относительно величины отклонения x/l массы m от положения равновесия. Это дает основание считать силу натяжения F в процессе колебаний постоянной.

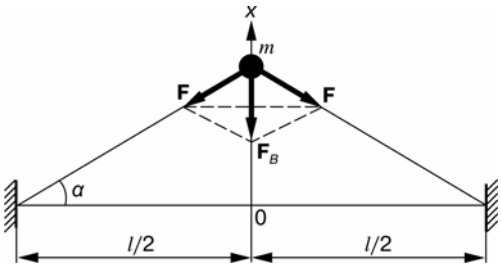


Рис. 2.5. Колебательная система

Решение. Согласно рис. 2.5, восстанавливающая сила F_B, которая обуславливает движение массы вдоль осы Ox, равняется проекции силы

натяжения F на ось Ox: $F_{\text{В}} = -2F\sin\alpha$. Эта формула устанавливает нелинейную связь между восстанавливающей силой $F_{\text{В}}$ и отклонением массы m от положения равновесия (угол α является функцией координаты x), что приводит к нелинейному уравнению движения. Но, учитывая малость колебаний (угол $\alpha << 1$), можно считать, что $\sin\alpha \approx \text{tg}\alpha = 2x/l$. Тогда уравнение движения будет иметь вид $\ddot{x} + 4Fx/(ml) = 0$. Отсюда искомая частота собственных колебаний системы ω_0 будет равна $\omega_0 = \sqrt{4F/(ml)}$. Как видим, ω_0^2 пропорциональна силе натяжения струны F и обратно пропорциональна массе m и длине струны l.

Завершая описание свободных колебаний гармонического осциллятора, нужно обратить внимание на следующее. Из трех указанных характеристик две — амплитуда A и фазовый сдвиг φ_0 — зависят от начальных условий, в то время, как третья характеристика — частота ω_0 — не зависит от этих условий. Частота и период колебаний осциллятора определяются лишь внутренними физическими свойствами системы и не зависят от того, как именно система была приведена в движение. Поэтому при решении вопроса о быстром или медленном влиянии на колебательную систему в течение временного масштаба нужно выбирать именно период собственных колебаний.

Для большинства колебательных процессов, разных по своей природе, характерным есть то, что при малых возмущениях от положения равновесия возникает простое гармоническое движение. Конечно, гармонические колебания могут выполнять не только малые тела, но и тела достаточно значительных размеров, например, мосты под действием порывов ветра. Тем не менее, для нас особенно важным есть то, что природа малых колебаний тесно связана с природой большинства источников звука. Это мы будем подчеркивать при изучении природы звуковых волн. Но уже сейчас, принимая во внимание малость амплитуды колебаний источников звука, которые нас интересуют, мы понимаем, что частоты звуковых волн, которые они излучают, не зависят от амплитуды колебаний источника. Именно это наблюдается в большинстве случаев, когда речь идет о звуках, которые мы слышим в окружающей среде.

2.2. Осциллятор при наличии демпфирования

2.2.1. Свободные колебания

Простейшие колебательные системы в первом параграфе данного раздела рассматривались со слишком сильным абстрагированием от свойств реальных систем. При наблюдении за любой реальной

системой, в которой существуют возбужденные колебания, можно наблюдать постепенное уменьшение амплитуды колебаний. Полученная системой в начальный момент энергия или будет вытекать из системы в окружающие объекты (в частности, таким механизмом истечения может быть излучение звуковой энергии в окружающую среду), или будет превращаться в теплоту в самой системе. Эти обстоятельства описывают с помощью понятия *демпфирования* (от немецкого слова *dëmpfer* — глушитель) колебаний. Механизм рассеяния энергии чрезвычайно разнообразен, и создание соответствующей математической модели нередко является очень сложным делом. В задачах акустики часто удается достаточно точно качественно и количественно описать процессы рассеяния энергии, вводя в рассмотрение силу сопротивления, пропорциональную первый степени скорости:

$$F = -R\,\dot{x}. \tag{2.25}$$

Здесь знак “минус” указывает на тот факт, что сила направлена против вектора скорости; R — коэффициент демпфирования (сопротивления, трения), Н · с/м.

Если теперь учесть, что в колебательной системе (см. рис. 2.1,*а*) на массу действует сила сопротивления (2.25), то второй закон Ньютона будет иметь вид:

$$m\ddot{x} + R\dot{x} + Kx = 0. \tag{2.26}$$

Разделив это уравнение на величину m, изменим размерность коэффициентов уравнения, придав ему стандартный вид уравнения для системы с одной степенью свободы при наличии демпфирования. При этом становится уже не существенным и физическое содержание самой обобщенной координаты, относительно которой записано уравнение. Согласно принятым в первом параграфе обозначениям для гармонического осциллятора уравнение движения системы с демпфированием запишем в виде:

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0,\ 2\delta = R/m,\ \text{с}^{-1}. \tag{2.27}$$

Здесь ω_0 — собственная частота системы при отсутствии демпфирования; δ — коэффициент затухания.

Конкретное движение колебательной системы определяется заданием начальных условий (2.12). Задача нахождения решений обычных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (именно таким есть уравнения (2.27)) относительно простая. Она легко сводится к задаче нахождения корней алгебраических уравнений, степень которых совпадает с порядком дифференциального уравнения. При этом используется тот факт, что экспоненциальная функция инвариантна относительно операции дифференцирования. Если, в

качестве пробного решения, в уравнение подставить искомую функцию $\xi(t)$ в виде

$$\xi(t) = A\exp(\alpha t), \tag{2.28}$$

(где A и α — произвольные величины), то для α будем иметь уравнение:

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0, \tag{2.29}$$

которое в общем случае имеет корни

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \tag{2.30}$$

Понятно, что возможные три случая:

1) если $\delta^2 > \omega_0^2$, то $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$ и решение $\xi(t) = A_1\exp(\alpha_1 t) + A_2\exp(\alpha_2 t)$ не будет описывать колебательное движение. Демпфирование настолько велико, что при смещении системы в начальный момент от положения равновесия она не будет осуществлять колебательное движение, а постепенно будет двигаться к положению равновесия;

2) если $\delta = \omega$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = -\delta$ и $\xi(t) = A_1\exp(-\delta t) + A_2 t\exp(-\delta t)$. В этом случае система также не будет осуществлять колебательное движение. Для акустических систем интересен третий случай, который соответствует малым затуханиям, а именно:

3) если $\delta < \omega_0$, то $\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, и

$$\xi(t) = \exp(-\delta t)\left[A_1\exp\left(i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t\right) + A_2\exp\left(-i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t\right)\right]. \tag{2.31}$$

Полученное решение уравнения является комплексной функцией. Поскольку коэффициенты исходного уравнения (2.26) действительные, то это уравнение удовлетворяется отдельно действительной и мнимой частями решения. Вследствие этого поведение системы с демпфированием можно описать одной из эквивалентных зависимостей:

$$\xi(t) = \exp(-\delta t)\left[a_1\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t\right) + a_2\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t\right)\right], \tag{2.32}$$

или

$$\xi(t) = A\exp(-\delta t)\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t + \varphi\right), \tag{2.33}$$

где $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\cos\ \varphi = a_1/A$, $\sin\ \varphi = -a_1/A$. Подставим (2.32) в начальные условия (2.12) и найдем константы:

$$a_1 = \xi_0,\ a_2 = \frac{\upsilon_0 + \delta\xi_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \tag{2.34}$$

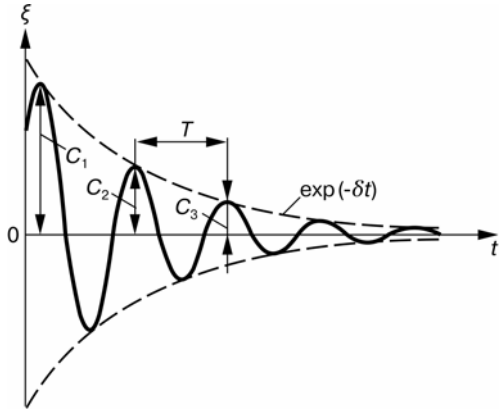


Рис. 2.6. Пример колебания затухающего осциллятора

Решение (2.33) описывает затухающее колебательное движение, амплитуда которого уменьшается согласно закону $\exp(-\delta t)$ (рис. 2.6). Понятно, что функция $\xi(t)$, как и функция $\dot{\xi}(t)$, не является периодической, поскольку для любого T очевидно, что $\xi(t) \neq \xi(t+T)$. Поэтому в строгом понимании слова периода не существует. Тем не менее, время между двумя последовательными прохождениями системы через положение равновесия (в одном направлении), или между двумя последовательными максимальными отклонениями, есть постоянная величина. Это обстоятельство позволяет ввести понятие периода для затухающего осцилляторного процесса:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega},\ \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \tag{2.35}$$

где Ω — угловая частота затухающего колебания. Видно, что наличие демпфирования увеличивает период колебаний сравнительно с периодом колебаний системы без демпфирования. Уменьшение частоты собственных колебаний можно было ожидать, ведь трение вообще задерживает движение. Скорость демпфирования колебаний зависит от коэффициента затухания δ, при этом отношение максимальных отклонений, отстоящих на период, имеет вид

$$\frac{C_n}{C_{n+1}} = \frac{A\exp(-\delta t)\cos(\Omega t + \varphi)}{A\exp\left[-\delta(t+T)\right]\cos\left[\Omega(t+T)+\varphi\right]} = \exp(\delta T).$$

Величину $\theta = \delta T$ называют *логарифмическим декрементом затухания* и определяют из формулы

$$\theta = \ln\frac{C_n}{C_{n+1}} = \delta T. \qquad (2.36)$$

Величина θ характеризует затухание амплитуды колебаний за один период. Важной особенностью (2.36) есть постоянство отношения C_n/C_{n+1} (для любого n) — это характерная особенность принятой нами модели демпфирования.

Формулу (2.36) можно использовать для экспериментального определения θ. Для этого необходимо определить из эксперимента отношения двух соседних амплитуд колебаний. Но большая точность достигается при использовании отношения двух амплитуд, отдаленных на N периодов. При этом (2.36) приобретает вид $\theta = \frac{1}{N}\ln\frac{C_n}{C_{n+N}}$.

Согласно выражению (2.33) демпфирование влияет на изменение амплитуды колебаний осциллятора и собственную частоту системы по сравнению с отсутствием демпфирования. Но, и это является характерной чертой для колебательных систем, которые нас интересуют, влияние демпфирования со временем на амплитуду является более весомым, чем на период колебаний. Чтобы убедиться в этом, запишем формулу (2.36) в виде

$$\theta = \delta T = \delta\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\delta^2} - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} - 1}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 - 1}. \qquad (2.37)$$

Тогда, например, при условии $\Omega/\omega_0 = T_0/T = 1/1{,}1$, т.е. когда T отличается от T_0 лишь на $0{,}1T_0$, имеем $\theta \approx 2{,}879$ и $\exp(\delta T) \approx 17{,}8$. За два периода колебаний амплитуда уменьшается почти в 316 раз, т.е. колебания практически прекращаются.

Обозначим буквой τ промежуток времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Тогда $\exp(-\delta\tau) = e^{-1} \approx 0{,}368$, откуда имеем

$$\delta\tau = 1,\ \delta = 1/\tau. \qquad (2.38)$$

Время τ называют *постоянной времени затухания*. Итак, δ — величина, обратная времени затухания. Пусть N — число периодов, после

которых амплитуда уменьшается в e раз. Тогда $\tau = NT$ и $\theta = \delta T = T/\tau = 1/N$. Таким образом, θ — величина, обратная числу периодов, после которых амплитуда уменьшается в e раз. Если, например, $\theta = 0{,}01$, то это означает, что амплитуда уменьшается в e раз после 100 периодов.

2.2.2. Вынужденные колебания

Вынужденные колебания системы — это такие ее движения, которые обусловлены действием внешней силы. При математическом моделировании такой ситуации необходимо построить определенную модель внешней силы. При этом часто считают, что внешняя сила не зависит ни от обобщенной координаты $\xi(t)$, ни от обобщенной скорости $\dot{\xi}(t)$ системы, т.е. от характера движения системы. Как будет показано ниже, такое предположение — это довольно грубая модель для любого реального источника колебаний. Суть дела в том, что это предположение эквивалентно предположению о неограниченной мощности источника движения.

Следует отметить, что в механических колебательных системах не так просто с технической точки зрения влиять периодической силой непосредственно на массу, которая двигается. Значительно проще это сделать в электрических или оптических колебательных системах, например, в колебательном контуре, при подключении его к внешнему источнику переменного напряжения (рис. 2.7, *б)*. Но нетрудно понять, что поддерживать колебание системы, которая изображена, например, на рис. 2.1, *а*, можно, не прикладывая непосредственно внешнюю силу $F(t)$ к массе тела, достаточно эту силу приложить к свободному кольцу пружины, как это изображено на рис. 2.7, *а*.

Итак, пусть правый конец пружины на рис. 2.7, *а* выполняет заданное движение в горизонтальном направлении согласно закону $\tilde{x}(t)$. В состоянии покоя пружина не деформирована и $\tilde{x} = 0$. Тогда уравнение движения системы записывается аналогично выражению (2.2). Однако в данном случае упругая сила пропорциональна относительному перемещению концов пружины (рис. 2.7,*а*), а именно, $x - \tilde{x}(t)$. Итак, уравнение движения будет иметь вид $m\ddot{x} = -R\dot{x} - K(x - \tilde{x}(t))$, или

$$m\ddot{x} + R\dot{x} + Kx = F(t), \qquad (2.39)$$

где $F(t) = K\tilde{x}(t)$. Имеем уравнение осциллятора, в правой части которого вместо нуля стоит заданная функция независимой переменной $F(t)$. Эта функция определяет внешнее силовое влияние на систему.

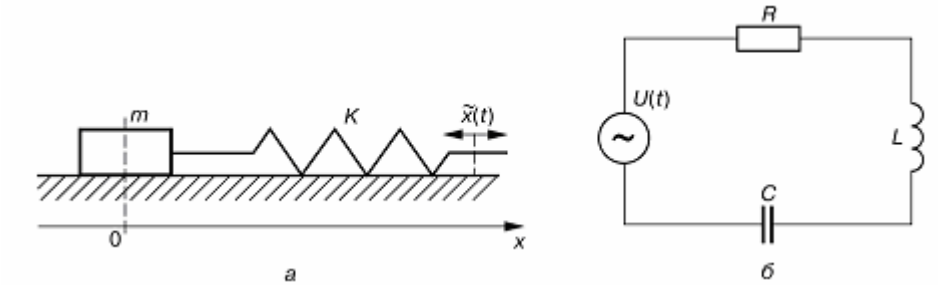


Рис. 2.7. Примеры осцилляторов под внешним воздействием

Второй пример рассматривает электрический контур на рис. 2.7,*б*. В электрический контур последовательно с другими элементами включен источник напряжения. Закон Кирхгоффа для контура, записанный относительно заряда q, будет иметь вид

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = U(t). \qquad (2.39а)$$

После деления (2.39) или (2.39а) на коэффициент при второй производной, получаем уравнение осциллятора с демпфированием при внешнем воздействии. Для уравнения (2.39) будем иметь:

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{1}{m}F(t), \qquad (2.40)$$

где $2\delta = R/m$, а $\omega_0^2 = K/m$.

Поскольку общее решение однородного уравнения известно, то при помощи метода вариации произвольных постоянных можно легко найти частное решение неоднородного уравнения (2.40) с произвольной функцией $F(t)$. Это можно сделать как упражнение. Остановимся более детально на случае действия на систему периодической внешней силы $F(t) = F_0\cos(\omega t)$:

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t), \qquad (2.41)$$

где ω — частота внешней силы.

В общем случае решение этого уравнения должно удовлетворять начальным условиям (2.12). Поскольку уравнение линейное, то его решение может иметь вид суммы общего решения однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения.

При нахождении частного решения неоднородного уравнения можно использовать несколько приемов. Рассмотрим тот, который приводит к формированию новых важных в акустике понятий. При этом используем описанную в предыдущем разделе особенность экспоненциальных функций. Известно, что:

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\big(\exp(i\omega t)\big) = \mathrm{Re}\big(\exp(-i\omega t)\big). \qquad (2.42)$$

Здесь обозначение Re(...) указывает на то, что выделена действительная часть комплексной величины. Поскольку коэффициенты уравнения (2.41) действительные, то при поиске его частного решения можно сначала найти комплексное решение уравнения

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{F_0}{m}\exp(-i\omega t), \qquad (2.43)$$

а потом для отыскания зависимости, которая описывает поведение реальной физической системы, выделить его действительную часть. Фактическое выполнение такой операции в задачах акустики, когда основной интерес представляет изучение интегральных характеристик движения, часто не требуется. *Все необходимые сведения удается получить непосредственно из комплексного решения.*

Особое внимание нужно обратить на такое обстоятельство. Как видно из (2.42), $\cos(\omega t)$ есть действительная часть двух разных экспонент, которые различаются знаком показателя степени. Если потом, анализируя решение, выделить действительную часть, то различие между двумя возможными решениями исчезает; если рассматривать решения в комплексной форме, то можно увидеть, что они существенно различаются. В акустической литературе используются обе возможные формы комплексного решения. Важно лишь при этом быть последовательным, — выбрав одну из возможных форм зависимости, нужно сохранять ее на протяжении всего рассмотрения. В дальнейшем будем использовать временную зависимость $\exp(-i\omega t)$.

Частное решение (2.43) получаем в виде:

$$\xi(t) = A\exp(-i\omega t). \qquad (2.44)$$

После подстановки (2.44) в уравнение (2.43) легко определить амплитудную характеристику A, тогда решение приобретает вид

$$\xi(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i2\delta\omega)}\exp(-i\omega t). \qquad (2.45)$$

Действительная часть комплексной функции (2.45) определяется выражением:

$$\xi(t) = \frac{F_0\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos(\omega t) + 2\delta\omega\sin(\omega t)\right]}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2\right]} = \frac{F_0\cos(\omega t + \varphi)}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \qquad (2.46)$$

где

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\delta\omega\right)^2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{2\delta\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\delta\omega\right)^2}}. \qquad (2.47)$$

После получения частного решения уравнения движения общее движение системы при произвольных начальных условий описывается выражением:

$$\xi(t) = \exp\left(-\delta t\right)\left[a_1 \cos(\Omega t) + a_2 \sin(\Omega t)\right] + A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (2.48)$$

где

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\delta\omega\right)^2}}. \qquad (2.49)$$

Качественный анализ (2.48) дает достаточно простую картину поведения системы. Но при этом анализе формируются те фундаментальные понятия, которыми описываются разные ситуации в теории колебаний и акустике. Именно с точки зрения раскрытия сути этих понятий мы и выполняем дальнейший анализ. Из формулы (2.48) прежде всего, видим неравноценный вклад отдельных слагаемых. Первый из них имеет экспоненциальный множитель, который обусловливает затухание собственных колебаний системы. Поэтому можно выделить два интервала времени. Сначала существенными могут быть собственные колебания системы. Процесс постепенного затухания собственных колебаний называют процессом *установления колебаний* в системе. Для его количественной характеристики можно принять интервал времени, за который амплитуда собственных колебаний уменьшается на 99 %. В дальнейшем движение системы полностью определяется вторым слагаемым выражения (2.48). Говорят, что система находится *в режиме стационарных вынужденных колебаний*. При этом, чем сильнее проявляется эффект демпфирования в системе, тем быстрее заканчивается переходной процесс. Конкретная картина развития колебательного процесса в системе зависит от соотношения частоты внешней силы и собственной частоты системы.

Рассмотрим процесс установления колебаний в случае, когда в начале осциллятор покоится ($\xi_0 = 0$, $\upsilon_0 = 0$ в условиях (2.12)), и в момент времени $t = 0$ на него начинает действовать сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$, т.е. имеем $\omega = \omega_0$. Из формул (2.47) следует, что вынужденные колебания имеют сдвиг фазы $\varphi = -\pi/2$ относительно внешней силы, а согласно выражению (2.49) амплитуда вынужденных колебаний в установившемся режиме $A = F_0/(R\omega_0)$. Из начальных условий (2.12) находим по-

стоянные: $a_1 = 0$, $a_2 = -\omega_0 A/\Omega$ (получите самостоятельно). Тогда решение (2.48) можно записать в виде

$$\xi(t) = A\left[\sin(\omega_0 t) - \frac{\omega_0}{\Omega}\exp(-\delta t)\cdot\sin(\Omega t)\right].$$

Поскольку коэффициент затухания $\delta << \omega_0$ (что практически всегда наблюдается для осцилляторов, которые нас интересуют), то частоты $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ и ω_0 мало отличаются одна от одной. Поэтому погрешность, которая накапливается в фазе колебаний за время установления вследствие такого изменения, будет малой. Итак, положив $\Omega \approx \omega_0$, в итоге получим такой результат:

$$\xi(t) = \frac{F_0}{R\omega_0}\left(1 - \exp(-\delta t)\right)\sin(\omega_0 t), \qquad (2.50)$$

типичный вид зависимости (2.50) отображен на рис. 2.8. Как видим, в начале происходит рост амплитуды колебаний, которая в установившемся режиме выходит на стационарный уровень $A = F_0/(R\omega_0)$. Время наращивания колебаний можно оценить так: δ^{-1}.

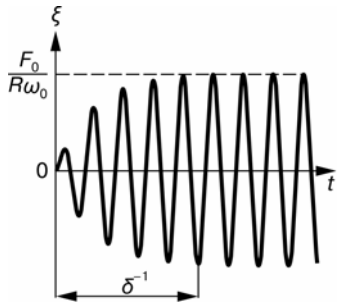


Рис. 2.8. График установления колебаний в осцилляторе под действием гармонической внешней силы при нулевых начальных условиях

Вынужденные колебания в системе будут поддерживаться бесконечно долго благодаря действию периодической силы. Собственные колебания после окончания определенного интервала времени затухают. Начальные условия возмущения колебаний влияют лишь на амплитудные и фазовые характеристики собственных колебаний. Система, которая находится в режиме установившихся вынужденных колебаний, “не помнит” начало колебаний. Эта возможность — абстрагироваться от начальных условий при рассмотрении вынужденных колебаний — позволяет существенно упростить ряд сложных задач физической акустики. Сосредоточим наше внимание на установившихся колебаниях осциллятора.

В соответствии с (2.48) в режиме установившихся колебаний изменение со временем обобщенной координаты представлено зависимостью

$$\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{2.51}$$

для скорости имеем

$$\dot{\xi}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \pi/2\right). \tag{2.52}$$

Поскольку колебания осуществляются с частотой внешней силы, то анализу подлежат лишь две интегральные характеристики колебательного процесса: амплитуда A и фаза φ. Величина φ есть сдвиг фазы между внешней силой $F(t)$ и откликом на нее осциллятора $\xi(t)$. Итак, величина $\varphi + \pi/2$ определяет сдвиг фазы между внешней силой $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ и скоростью в системе $\dot{\xi}(t)$.

Согласно формулам (2.49) и (2.52) зависимость амплитуд смещения A и скорости A_υ от частоты внешнего воздействия представляется такими выражениями:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\delta\omega\right)^2}}, \tag{2.53}$$

$$A_\upsilon(\omega) = \omega A(\omega) = \frac{\omega F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\delta\omega\right)^2}}. \tag{2.54}$$

Отсюда легко найти значение скорости и смещения в предельных случаях малых и больших частот. Если $\omega << \omega_0$, то

$$A(\omega) \to \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{K} = \xi_{\text{ст}}. \tag{2.55}$$

Отклонение системы от положения равновесия стремится к значению статического отклонения $\xi_{\text{ст}}$ под действием заданной силы, а скорость — к нулю. Обратим внимание на то, что в качестве масштаба, относительно которого рассматривается малая или большая частота, здесь берем величину ω_0, которая является собственной частотой соответствующей системы без демпфирования. Если, наоборот, $\omega >> \omega_0$, то амплитуды смещения и скорости стремятся к нулю.

Особый интерес имеет определение тех частот, при которых амплитуды смещения и скорости достигают максимальных значений. Из уравнений $\dfrac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$, $\dfrac{dA_\upsilon(\omega)}{d\omega} = 0$ находим, соответственно:

$$\omega_{\mathrm{I}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad \omega_{\mathrm{II}} = \omega_0 . \tag{2.56}$$

При этом максимальные значения амплитуд имеют вид:

$$A(\omega_{\mathrm{I}}) = \frac{F_0}{\Omega R}, \quad A_{\upsilon}(\omega_{\mathrm{II}}) = \frac{F_0}{R}. \tag{2.57}$$

Здесь $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — собственная частота свободных колебаний системы с демпфированием.

На рис. 2.9 показаны частотные зависимости амплитуд смещения и скорости. Когда амплитудная характеристика рассматриваемой величины достигает максимального из всех возможных значений, говорят о возникновении *резонанса* в системе. Вследствие указанного обстоятельства можно говорить о существовании в системе с демпфированием резонанса по смещению и резонанса по скорости.

Итак, для системы с демпфированием имеем три характерных частоты, а именно:

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — собственных колебаний;

$\omega_{\mathrm{I}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ — резонанса по смещению;

$\omega_{\mathrm{II}} = \omega_0$ — резонанса по скорости.

Во многих практически важных случаях демпфирование в системе незначительное: $\delta^2 << \omega_0^2$, поэтому количественные различия между указанными характерными частотами малы. По этой причине в дальнейшем, без специальных оговорок, мы будем говорить о резонансной частоте осциллятора, как о частоте ω_0.

Для характеристики резонансных явлений важно обратить внимание на фазовые соотношения. Согласно формуле (2.47) для любой частоты ω имеем $\sin\varphi < 0$, т.е. $-\pi < \varphi < 0$. Итак, отклик всегда отстает по фазе от внешней силы. Из выражения (2.47) имеем:

$$\mathrm{tg}\varphi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{2.58}$$

Если $\omega << \omega_0$, то $\mathrm{tg}\varphi \approx \varphi \approx -2\delta\omega/\omega_0^2$; если $\omega >> \omega_0$, то $\mathrm{tg}\varphi \approx 2\delta/\omega$ и $\varphi \approx -\pi + \ +2\delta/\omega$. Таким образом, вне области резонанса колебания осциллятора происходят или в фазе с внешним воздействием ($\omega << \omega_0$), или в противофазе с ним ($\omega >> \omega_0$). Переход из одного состояния в другого при изменении частоты воздействия происходит в узкой полосе шириной порядка 2δ вблизи резонансной частоты ω_0. Точно на резонансе ($\omega = \omega_0$) сдвиг фазы равняется $\varphi = -\pi/2$.

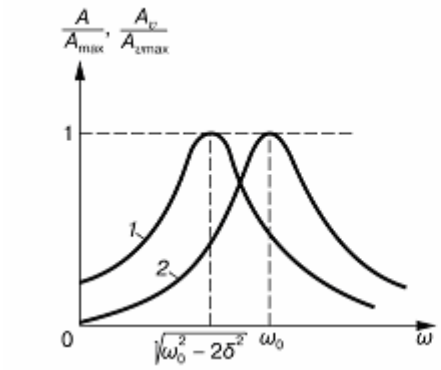


Рис. 2.9. Нормированные частотные зависимости амплитуд смещения (кривая *1*) и скорости осциллятора (кривая *2*)

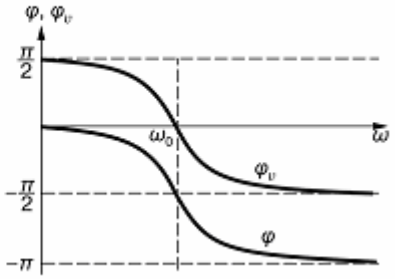


Рис. 2.10. Частотные зависимости $\varphi(\omega)$ и $\varphi_v(\omega)$

Явление резонансного усиления колебаний можно осознать, если обратить внимание на сдвиг фазы φ_v между внешней силой и скоростью. Согласно формуле (2.52) $\varphi_v = \varphi + \pi/2$. На рис. 2.10 приведены частотные зависимости $\varphi(\omega)$ и $\varphi_v(\omega)$. Если $\omega \neq \omega_0$, то между внешней силой и скоростью существует некоторый сдвиг фазы. Поэтому в пределах некоторой части каждого периода внешняя сила направлена против скорости, т.е. старается замедлить движение, вместо того, чтобы ускорить его. На резонансе ($\omega = \omega_0$) сдвиг фазы между внешней силой и скоростью φ_v будет равен нулю (рис. 2.10), таким образом, сила всегда действует в направлении движения, постоянно “подталкивая” его. Здесь есть наилучшая согласованность между внешней силой и внутренними свойствами колебательной системы.

Пример 2.4. Осциллятор двигается по закону $x(t) = x_0\sin(\omega t)$, а его возбуждающая сила определяется зависимостью $F(t) = F_0\cos(\omega t)$. Найти коэффициент затухания осциллятора. Масса осциллятора m.

Решение. В режиме установившихся колебаний при $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ смещение осциллятора определяется законом (см. (2.46)) $x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi)$. По условию задачи $x(t) = x_0\sin(\omega t)$. Отсюда понятно, что сдвиг фазы $\varphi = -\pi/2$. Такой сдвиг фазы между смещением и силой бывает при условии резонанса, т.е. когда частота внешней силы равняется собственной частоте осциллятора $\omega = \omega_0$. Согласно формуле (2.53) амплитуда смещения на резонансной частоте $A = F_0/(2\delta\omega m)$. Отсюда коэффициент затухания $\delta = F_0/(2x_0\omega m)$.

Рассматривая процесс вынужденных колебаний системы с демпфированием, мы использовали модель источника внешней силы, как

источника с неограниченной мощностью. Поэтому согласно формуле (2.53) на резонансе (при $\omega \to \omega_0$) и при условии $\delta \to 0$ (осциллятор без демпфирования) амплитуда колебаний системы стремится к бесконечности, т.е. система потребляет неограниченную энергию. Тем не менее, решение (2.51), (2.53) записано в соответствии с предположением о наличии установившихся колебаний с постоянной амплитудой, что не имеет место при таких предположениях. В этом случае нужно быть более осторожными.

Рассмотрим осциллятор без демпфирования ($\delta \to 0$), на который в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, при начальных условиях $\xi(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = 0$. Согласно (2.47)—(2.49) при $\delta = 0$ имеем такое выражение для общего движения системы:

$$\xi(t) = a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t).$$

Определяя a_1 и a_2 из начальных условий, получаем

$$\xi(t) = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right].$$

Как видим, колебание системы состоят из двух гармонических движений (вынужденного и собственного), причем амплитуды этих колебаний одинаковы. Поэтому результирующее колебание в общем случае не будет гармоническим. Раскачивание (амплитуда колебаний) системы зависит от соотношения частот ω и ω_0. При $\omega \to \omega_0$ нужно раскрыть неопределенность типа 0/0. Таким образом, получим

$$\xi(t) = \lim_{\omega\to\omega_0}\left[\frac{F_0}{m}\frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega^2}\right] = \frac{F_0 t}{2\omega_0 m}\sin(\omega_0 t).$$

В записанном резонансном решении амплитуда колебаний линейно возрастает со временем. Для любого момента времени решение остается конечным, но колебание некогда не выходят на установившийся уровень. Итак, наличие демпфирования в системе приводит к интересному результату, ни при каких условиях невозможен бесконечный рост амплитуды. Амплитуда колебаний на резонансе ограничивается именно наличием в системе демпфирования.

В конце этого параграфа еще раз обратим внимание на аспект, который вытекает из проведенного анализа: для раскачивания колебательной системы недостаточно иметь источник с большой мощностью. Даже при неограниченной мощности источника колебания в системе могут быть очень малы, если характер действия источника не согласован с внутренними свойствами колебательной системы. По-

этому, цель — максимальное возбуждение колебаний, что важно при создании излучающих акустических систем, достигнута не будет.

2.2.3. Добротность

При изучении колебательной системы без демпфирования были определены три интегральные характеристики: амплитуда, частота собственных колебаний, начальная фаза. Для системы с демпфированием введем четвертую характеристику, которая служит количественной мерой демпфирования, *добротность колебательной системы* Q. Рассмотрим вынужденные колебания системы в установившемся режиме. В соответствии с формулой (2.54) амплитуда колебательной скорости

$$A_\upsilon(\omega) = \frac{\omega F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}}. \qquad (2.59)$$

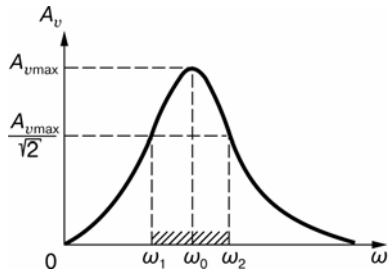


Рис. 2.11. Частотная зависимость скорости осциллятора

Амплитудно-частотная характеристика $A_\upsilon(\omega)$ приведена на рис. 2.11. Здесь частотный интервал $\omega_1 \le \omega \le \omega_2$ определяет частоты, на которых кинетическая энергия системы не более, чем в 2 раза меньше, чем на частоте ω_0. Интервал $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ называют *шириной резонансной кривой*. Добротность системы определяется в виде

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}. \qquad (2.60)$$

Выразим величину $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ через параметры колебательной системы. Для этого, подставив в уравнение $A_\upsilon(\omega_0)/\sqrt{2} = A_\upsilon(\omega)$ выражение (2.54), получим соотношение $\omega_0^2 - \omega^2 = \pm 2\delta\omega$. Решение этих уравнений дает такие корни: $\omega = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$; $\omega = \delta \pm \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$. Физическое содержание имеют лишь положительные корни. Поэтому пред-

полагаем, что $\omega_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$, $\omega_2 = \delta + \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$. Тогда $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta$ и добротность имеет такой вид:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}, \ \left(2\delta = \frac{R}{m}\right). \tag{2.61}$$

Итак, добротность системы — это отношение двух ее временных характеристик. Уменьшение амплитуды собственных колебаний системы характеризуется постоянной времени затухания $\tau = 1/\delta$ (см. (2.38)). Учитывая этот факт, из формул (2.60) и (2.61) имеем важное соотношение между шириной резонансной кривой вынужденных колебаний и постоянной времени затухания свободных колебаний:

$$\Delta\omega\tau = 2. \tag{2.62}$$

Как видим, они связаны обратно пропорциональной зависимостью. Это есть общий результат в том понимании, что указанная зависимость характерна для колебательных систем разной физической природы. Уравнение (2.62) имеет практическое значение. Часто экспериментально легче изучить поведение системы вблизи резонанса в режиме вынужденных колебаний, чем наблюдать время затухания. В этом случае, определив $\Delta\omega$, из формулы (2.62) легко найти τ.

Запишем одно полезное соотношение между логарифмическим декрементом затухания θ и добротностью Q:

$$\theta = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\Omega} = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(2Q)^2 - 1}}. \tag{2.63}$$

При $Q = 1/2$ имеем $\theta \to \infty$. Это наблюдается на границе колебательного режима. При $Q < 1/2$ собственные движения в системе не колебательные. В случае высокой добротности ($Q >> 1$) (2.63) заменяется простым приближенным соотношением

$$\theta \approx \frac{\pi}{Q}, \ Q \approx \frac{\pi}{\theta}. \tag{2.64}$$

В качестве примера приведем порядок величины добротности некоторых типов осцилляторов:

электрический контур — 50...500;
громкоговоритель (на низких частотах) — 3...10...10;
рояльная или скрипичная струна — 1000;
камертон — 3000;
кристалл кварца — 500 000.

Формулы (2.53), (2.54) для амплитуды смещения и скорости осциллятора можно переписать, используя понятие добротности, в таком виде:

$$A(\omega) = \frac{\xi_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{Q^2}}}, \qquad (2.65)$$

$$A_\upsilon(\omega) = \frac{\omega \xi_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{Q^2}}}, \quad \xi_{ст} = \frac{F_0}{K}, \qquad (2.66)$$

а также согласно формуле (2.58) и соотношению $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\left(\varphi_\upsilon - \frac{\pi}{2}\right) = -1/\mathrm{tg}\,\varphi_\upsilon$ выражение для сдвига фаз между $F(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ в таком:

$$\mathrm{tg}\varphi_\upsilon = Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad \varphi = \varphi_\upsilon - \frac{\pi}{2}. \qquad (2.67)$$

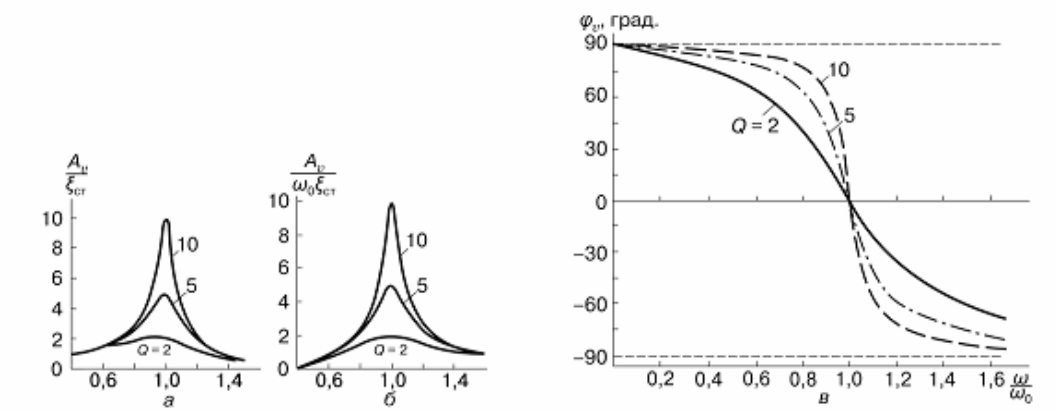


Рис. 2.12. Частотные зависимости амплитуды смещения (*а*), амплитуды скорости (*б*), сдвига фазы между внешней силой и скоростью осциллятора (*в*)

На рис. 2.12 приведены графики зависимостей A, A_υ, φ_υ от частоты внешней силы ω при различных значениях добротности Q. Кривые на рис. 2.12, *а*, *б* показывают, что чем выше добротность системы, тем “острее” резонансная кривая, т.е. вблизи резонансной частоты ω_0 поведение графиков определяется демпфированием. За пределами резонансной зоны поведение графиков совпадает, что связано с малым

влиянием демпфирования на колебательный процесс в окрестности этих частот. Эти характерные особенности осциллятора мы еще рассмотрим в следующем параграфе.

Фазовые соотношения отображены на рис. 2.12, *в*. Как видим, сдвиг фазы между скоростью и силой определяется неравенством $-\pi/2 < \varphi_\upsilon < \pi/2$; сдвиг фазы между откликом и силой изменяется в пределах $-\pi < \varphi < 0$, т.е. отклик всегда отстает от воздействия. Еще раз укажем, что для осцилляторов с $Q >> 1$ (скажем, $Q > 10$) при $\omega << \omega_0$ колебания осциллятора происходят практически в фазе с внешним воздействием, а при $\omega >> \omega_0$ — в противофазе. Переход с одного состояния в другое при изменении частоты внешнего воздействия наблюдается в довольно узкой полосе вблизи резонансной частоты ω_0. Точно на резонансе ($\omega = \omega_0$) сдвиг фазы $\varphi = -\pi/2$, а $\varphi_\upsilon = 0$. Укажем, что при увеличении добротности кривые на рис. 2.12, *в* все больше приближаются к функции-ступеньке. Для осциллятора без демпфирования ($Q \to \infty$) $\varphi = 0$ и $\varphi_\upsilon = \pi/2$ если $\omega < \omega_0$ и $\varphi = -\pi$, $\varphi_\upsilon = -\pi/2$ если $\omega > \omega_0$.

<u>*Пример 2.5.*</u> Монокристалл сапфира в вакууме при низкой температуре имеет добротность $Q = 10^8 \ldots 10^9 \ldots$ Частота собственных колебаний монокристалла $\omega_0 = 10^4$ с$^{-1}$. Оцените, во сколько раз изменится амплитуда свободных колебаний за сутки.

<u>*Решение.*</u> Добротность $Q = \omega_0/(2\delta)$, отсюда коэффициент затухания δ при $Q = 10^8$ равен $\delta = 5 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, а при $Q = 10^9$ имеем $\delta = 5 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$. Амплитуда колебаний кристалла через сутки, т.е. за промежуток времени $t = 8{,}64 \cdot 10^4$ с, изменится в $\exp(\delta t)$ раз. При $Q = 10^8$ это составляет приблизительно 75, а при $Q = 10^9$ — приблизительно 1,5 раза.

Амплитуду колебания системы на частоте ω_0 называют *динамическим откликом системы* $\xi_д$, т.е. $\xi_д = A(\omega_0)$. Тогда из формулы (2.65) будем иметь соотношение:

$$\xi_д = \xi_{ст} Q. \qquad (2.68)$$

Таким образом, амплитуду установившегося вынужденного колебания на частоте резонанса ω_0 можно определить, умножив величину перемещения при статической нагрузке $\xi_{ст}$ на добротность системы Q. Понятно, что когда добротность системы $Q >> 1$, то амплитуда резонансных колебаний может достигать значительных величин! Система, устойчивая к внешнему статическому влиянию, может быть разрушена, если внешняя сила удерживает частотные компоненты, которые совпадают с резонансной частотой системы. Именно поэтому необходимым есть точный расчет резонансных частот разнообразных сложных колебательных систем; например, мосты, корпусы самолетов и кораблей, сложные электрические схемы, мощные электроакустические преобразователи.

2.2.4. Комплексное механическое сопротивление

Из анализа поведения колебательной системы под влиянием внешней периодической силы видно, что реакция системы зависит не только от амплитуды внешней силы, но и от частоты воздействия. Как новая важная интегральная характеристика процесса вынужденных колебаний системы используется *комплексный механический импеданс* (от латинского слова *impedio* — препятствую), или *комплексное механическое сопротивление*. Эта величина определяется как отношение комплексных амплитуд силы и скорости в режиме установившихся колебаний системы. Если учесть (2.45) для $\xi(t)$, то выражение для комплексного механического импеданса, который обозначается как Z, Н · с · м$^{-1}$ = кг · с$^{-1}$, будет иметь вид

$$Z = \frac{F}{\dot{\xi}} = \frac{m\left[\omega_0^2 - \omega^2 - i2\delta\omega\right]}{-i\omega} = m\left[2\delta + i\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right]. \qquad (2.69)$$

Если частота $\omega_0^2 = K/m$ и характеристика демпфирования $2\delta = R/m$, то последнее выражение записываем так:

$$Z = R + i\left(\frac{K}{\omega} - \omega m\right). \qquad (2.70)$$

Как любую комплексную величину, импеданс можно представить в виде $Z = |Z|\exp(i\varphi_\upsilon)$, где

$$|Z| = \frac{|F|}{|\dot{\xi}|} = m\sqrt{(2\delta)^2 + \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2}, \quad \mathrm{tg}\varphi_\upsilon = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega} \qquad (2.71)$$

или

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{K}{\omega} - \omega m\right)^2}, \quad \mathrm{tg}\varphi_\upsilon = \frac{1}{R}\left[\frac{K}{\omega} - \omega m\right]. \qquad (2.72)$$

Итак, модуль $|Z|$ равен отношению амплитуд внешней силы и колебательной скорости, а величина φ_υ определяет разность фаз между внешней силой и колебательной скоростью в системе.

Рассмотрим зависимость импеданса системы от частоты внешней силы ω:

- если ω мала $\left[\frac{\omega_0^2}{\omega} >> \omega;\ m\frac{\omega_0^2}{\omega} >> R\right]$, то $Z \approx i\frac{K}{\omega}$. Импеданс чисто мнимый и положительный; он обратно пропорционален частоте ω и

не зависит от R. Такой импеданс называют импедансом упругого типа и говорят, что система управляется упругостью;

- если $\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \approx 0$, $\left[m\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right) << R \right]$, то $Z \approx R$. Импеданс действительный и зависит только от R. Говорят, что система управляется демпфированием;
- если ω велика $\left[\omega >> \frac{\omega_0^2}{\omega}; m\omega >> R \right]$, то $Z \approx -i\omega m$. Импеданс чисто мнимый и отрицательный; он пропорционален частоте ω и не зависит от R. Это импеданс массового типа, и говорят, что система управляется массой.

Полученные результаты можно пояснить наглядными физическими соображениями. Если частота внешнего действия ω мала по сравнению с частотой ω_0, то в левой части уравнения (2.39) главную роль сыграет только слагаемое Kx и потому $Kx \approx F_0\cos(\omega t)$. Внешняя сила тратится главным образом на преодоление упругой силы. Смещение совпадает по фазе с внешней силой.

Наоборот, когда частота ω значительно больше частоты ω_0, то главную роль играет слагаемое ($m\ddot{x}$) и $m\ddot{x} \approx F_0 \cos(\omega t)$. В этом случае внешняя сила, главным образом, тратится на то, чтобы придать массе ускорение. Ускорение совпадает по фазе с внешней силой (а смещение противоположно по фазе).

В области резонанса слагаемые ($m\ddot{x}$) и (Kx), хотя и велики каждый в отдельности, но приблизительно равны по величине и противоположны по знаку. Действительно, поскольку сдвиг фазы между внешней силой и смещением $\varphi \approx -\pi/2$ при $\omega \approx \omega_0$, колебания происходят по закону $x(t) = A\sin(\omega t)$. Если ω близка к частоте $\omega_0 = \sqrt{K/m}$, то слагаемые $m\ddot{x} = -m\omega^2 A\sin(\omega t)$ и $Kx = KA\sin(\omega t)$ в уравнении (2.39) компенсируют друг друга. Таким образом, $R\dot{x} \approx F_0 \cos(\omega t)$. Внешняя сила направлена только на преодоление силы демпфирования. Амплитуда скорости $A_\upsilon(\omega_0) = F_0/R$ и, если демпфирование мало, то $A_\upsilon(\omega_0)$ велика; скорость совпадает по фазе с внешней силой.

Проведенный анализ свойств величины Z наглядно отображается в частотных характеристиках рис. 2.12. Как видим, в окрестности частоты резонанса ω_0 поведение осциллятора определяется демпфированием, т.е. величиной добротности Q. За пределами резонансной зоны поведение графиков совпадает. Это есть принципиальный момент, ведь вне резонансной зоны влияние демпфирования на колебательное движение практически несущественно.

2.3. Энергетические характеристики процесса колебаний

Рассмотрим свободные колебания. Энергия осциллятора равна сумме кинетической $E_К$ и потенциальной $E_П$ энергий. Кинетическая энергия $E_К = m\dot{\xi}^2/2$, а потенциальная определяется работой упругих сил $F = K\xi$ при отклонении системы от положения равновесия $\xi = 0$: $E_П = \int_0^{\xi} K\xi d\xi = K\xi^2/2$. Наличие силы трения в уравнении движения осциллятора приводит к уменьшению амплитуды колебаний во времени вследствие диссипации энергии. Поэтому производная dE/dt, где $E = E_К + E_П$, должна быть отличной от нуля и отрицательной. Действительно, $dE/dt = \dot{\xi}\left(m\ddot{\xi} + K\xi\right)$, а используя уравнение $m\ddot{\xi} + R\dot{\xi} + K\xi = 0$, получаем $dE/dt = -\left(R\dot{\xi}\right)\dot{\xi}$, где $R\dot{\xi} = F_{\text{тертя}}$. Итак, скорость уменьшения энергии по величине равна мощности сил трения.

Рассмотрим вынужденные колебания в установившемся режиме. Для описания процесса обмена энергией между источником силы и колебательной системой удобно ввести понятие *потока мощности*, определив его как скалярное произведение вектора силы на вектор скорости в точке приложения силы:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{2.73}$$

В каждом конкретном случае речь идет о произведении проекций вектора силы и обобщенной скорости на избранную координатную ось. При таком определении при вычислении значения W возможны два случая: $W > 0$ и $W < 0$, т.е. случай совпадения направления силы и скорости и случай, когда направления этих векторов противоположны. Физически это означает, что в первом случае энергия перетекает от источника к колебательной системе, а во втором — от системы к источнику. Приведенное соотношение позволяет проанализировать поведение W со временем при произвольном законе изменения силы $F(t)$. Детально остановимся на случае периодической внешней силы. Поскольку речь идет о вычислении квадратичных характеристик колебательного смещения, то прямое использование комплексного решения уже невозможно. Причина этого ясна и связана с тем, что: $\mathrm{Re}(P_1P_2) \neq \mathrm{Re}\,P_1\,\mathrm{Re}\,P_2$, где P_1 и P_2 — некоторые комплексные величины. В связи с этим в приведенных выражениях для внешней силы и кинетических характеристик колебательного процесса используем лишь действительные части комплексных функций.

Для внешней силы $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ смещение и скорость в системе такие (см. (2.46)):

$$\xi(t) = \frac{F_0}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2\right]}\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos(\omega t) + 2\delta\omega\sin(\omega t)\right], \quad (2.74)$$

$$\dot{\xi}(t) = \frac{\omega F_0}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2\right]}\left[-\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin(\omega t) + 2\delta\omega\cos(\omega t)\right]. \quad (2.75)$$

Тогда мгновенная мощность $W(t) = F(t)\dot{\xi}(t)$, которая обусловлена источником движения, определяется соотношением:

$$W(t) = \frac{F_0^2\left[-\omega\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin(\omega t)\cos(\omega t) + 2\delta\omega^2\cos^2(\omega t)\right]}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2\right]}. \quad (2.76)$$

Как следует из (2.76), в системе с демпфированием мощность, потребляемая системой от источника энергии, является суммой двух слагаемых. Для первого слагаемого характерно наличие сдвига фаз, который равняется 90°, между внешней силой $F(t)$ и скоростью системы $\dot{\xi}(t)$. Второе слагаемое — синфазное, т.е. фазовый сдвиг между $F(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ равен нулю. Следует отметить, что первое слагаемое в (2.76) пропорционально мнимой части импеданса (см. (2.69)), а второе — действительной части импеданса.

Вместе с тем, поток мощности определяет скорость изменения полной энергии системы L: $W(t) = dL/dt$. Полная энергия L состоит из кинетической энергии $E_К = m\dot{\xi}^2/2$, потенциальной $E_П = K\xi^2/2 = m\omega_0^2\xi^2/2$ и внутренней U энергий. Внутренняя энергия U определяется работой внешней силы против силы трения: $U = \int_0^t \left(R\dot{\xi}\right)\dot{\xi}dt$. Итак, поток мощности

$$W(t) = \frac{d\left(E_К + E_П + U\right)}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{dU}{dt}, \quad (2.77)$$

где $E = E_К + E_П$, или

$$W(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\xi^2\right] + \left(R\dot{\xi}\right)\dot{\xi}.. \quad (2.78)$$

Выражение в квадратных скобках есть сумма кинетической и потенциальной энергий $E = E_К + E_П$. По сути, это энергия E, которую накапливает колебательная система к моменту времени t. Назовем ее *энергией накопления* или просто *энергией системы*. Производная по времени от энергии накопления определяет скорость ее изменения. Второе слагаемое в выражении (2.78) представляет собой мощность сил демпфирования, которые преодолевает внешняя сила.

Таким образом, сравнивая выражения (2.76) и (2.78), можно придать двум слагаемым в формуле (2.76) указанный выше физический смысл, а именно: первое слагаемое обуславливает скорость изменения энергии накопления E, а второе — мощность сил демпфирования. Согласно формуле (2.76) производная по времени от энергии накопления dE/dt может быть больше и меньше нуля в некоторый момент времени. Если $dE/dt > 0$, то это обуславливает поток энергии от источника в систему, а при $dE/dt < 0$ — наоборот, т.е. имеем энергообмен между источником и системой. Интересно, что на резонансе, когда $\omega = \omega_0$, имеем $dE/dt = 0$, т.е. энергия накопления сконцентрирована в системе, а работа источника связана только с преодолением сил демпфирования. Второе слагаемое в формулах (2.76) и (2.78) всегда больше от нуля $(R\dot{\xi}^2) > 0$, что определяет поток энергии от источника к системе в любой момент времени.

Существенная разница между двумя слагаемыми мгновенной мощности видна при рассмотрении среднего во времени потока мощности. Найдем среднюю за период $T = 2\pi/\omega$ мощность $\langle W \rangle$, , используя выражение (2.76). Учитывая, что

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T W(t)dt, \tag{2.79}$$

при этом $\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt = 0, \quad \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \frac{1}{2}$, имеем

$$\langle W \rangle = \frac{F_0^2\omega^2\delta}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2\right]} = \frac{F_0^2 R}{2|Z|^2}. \tag{2.80}$$

Как видим, первое слагаемое в (2.76), где наблюдается сдвиг фаз между $F(t)$ и $\dot{\xi}(t)$, равный 90°, не влияет на $\langle W \rangle$. Средний поток мощности определяется синфазной составляющей в выражении для $W(t)$, т.е. вторым слагаемым.

Теперь запишем среднюю мощность $\langle W \rangle$, используя выражение (2.78) для мгновенной мощности $W(t)$. Средняя за период энергия накопления равняется

$$\langle E_{\text{К}} + E_{\Pi} \rangle = \frac{m}{2}\langle \dot{\xi}^2 \rangle + \frac{m\omega_0^2}{2}\langle \xi^2 \rangle = \frac{mA_{\upsilon}^2}{4} + \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}, \qquad (2.81)$$

где A_{υ} и A — амплитуды скорости и смещения в системе. Учитывая, что $A_{\upsilon} = \omega A$, можно переписать выражение (2.81) в виде:

$$\langle E_{\text{К}} + E_{\Pi} \rangle = \frac{m}{4}\left(\omega^2 + \omega_0^2\right)A^2. \qquad (2.82)$$

Отметим, что слагаемое с ω^2 определяет среднее значение кинетической энергии, а слагаемое с ω_0^2 — среднее значение потенциальной энергии. Обе энергии равны между собой только в случае, когда $\omega = \omega_0$.

В установившемся режиме среднее значение энергии $\langle E_{\text{К}} + E_{\Pi} \rangle$ есть величина постоянная, поэтому $d(\langle E_{\text{К}} + E_{\Pi} \rangle)/dt = 0$. Учитывая этот факт, согласно выражению (2.78) имеем

$$\langle W \rangle = \frac{A_{\upsilon}^2}{2}R = \frac{\omega^2 A^2}{2}R. \qquad (2.83)$$

Понятно, что формулы (2.80) и (2.83) совпадают, поскольку согласно (2.71) амплитуда скорости $A_{\upsilon} = F_0/|Z|$.

Значение среднего за период потока мощности от источника к системе в установившемся режиме колебаний определяется демпфированием (R). Как правило, считается, что потери энергии на преодоление сопротивления являются вредными. Фактически же это не всегда так. В акустических системах введением демпфирования R часто моделируют процессы, связанные с излучением звука колебательной системой. В этом случае в системе за период теряется мощность, связанная с мощностью, которая переносится созданными звуковыми волнами. Это обстоятельство обусловливает специальные названия, принятые в акустике, для двух составляющих мгновенного потока мощности в (2.76). Для синфазной (скорость—сила) составляющей $W(t) \sim 2\delta\omega^2\cos^2(\omega t)$ принято название *активная мощность*. Составляющая, которая отвечает за часть колебательного движения, где сила и скорость имеют сдвиг фазы на 90°, называется *реактивной мощностью*. При сравнении (2.76) и (2.69) оказывается, что активная мощность пропорциональна действительной части импеданса, а реактивная — мнимой. В связи с этим вводятся понятия *активной* ($\operatorname{Re} Z$) и *реактивной* $(\operatorname{Im} Z)$ *частей импеданса*.

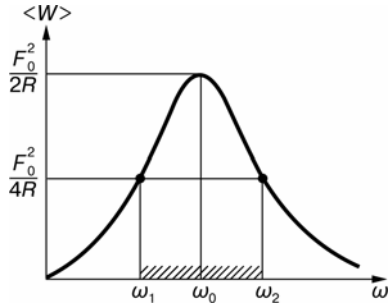


Рис. 2.13. Кривая поглощения осциллятора

На рис. 2.13 изображена кривая зависимости $\langle W \rangle$ от частоты ω внешней силы. По аналогии с рис. 2.11 этот рисунок характеризует реакцию осциллятора на действие внешней силы. Изображенная кривая называется *кривой поглощения осциллятора.* Острота максимума определяется коэффициентом демпфирования *R.* Максимум приходится на частоту резонанса скорости ω_0, когда энергия, которая отнимается системой у внешней силы, максимальна. Если система высокодобротная и частота ω близка к частоте ω_0, то амплитуды скорости A_υ и смещения *A* приобретают большие значения, что обуславливает значительное накопление энергии. При этом средний поток мощности $\langle W \rangle$ наибольший, и внешняя сила выполняет наибольшую работу по преодолению сил демпфирования; это происходит при совпадении направления движения в системе и действия внешней силы (разность фаз между $\dot{\xi}(t)$ и $F(t)$ равна нулю). Наоборот, когда ω существенно отличается от ω_0, направление движения в системе в течение одной части периода колебаний совпадает с направлением внешней силы, а в течение другой части периода противоположно ему. Внешняя сила выполняет как положительную ($W > 0$), так и отрицательную ($W < 0$) работу, и за весь период робота будет небольшой, т.е. происходит энергообмен между источником и системой. Таким образом, с энергетической точки зрения явление резонанса обусловлено тем, что при совпадении частот ω и ω_0 реактивная мощность равна нулю, тогда имеем наилучшие условия для перехода энергии от источника к системе. Явление резонанса можно рассматривать как случай, когда под действием гармонической внешней силы система выполняет почти собственные колебания. При этом роль внешней силы сводится главным образом к компенсации действующих в системе сил демпфирования.

Интересно отметить, что накопленная энергия $\langle E_К + E_П \rangle$ по сравнению с работой $\langle W \rangle T$, которую выполняет внешняя сила за период

колебаний $T = 2\pi/\omega$, характеризует добротность системы. Действительно, в соответствии с (2.82) и (2.83) имеем

$$\frac{\langle E_К + E_П \rangle}{\langle W \rangle T} = \frac{\frac{m}{4}\left(\omega^2 + \omega_0^2\right)A^2}{\frac{\omega^2}{2}A^2 R\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2\pi 2\omega 2\delta}. \qquad (2.84)$$

Как видим, отношение $\frac{\langle E_К + E_П \rangle}{\langle W \rangle T}$ зависит от частоты ω. Но вблизи резонансной частоты, когда $\omega \approx \omega_0$, выражение (2.84) с учетом (2.61) приобретает вид

$$\frac{\langle E_К + E_П \rangle}{\langle W \rangle T} = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{Q}{2\pi}. \qquad (2.85)$$

Соотношение (2.85) позволяет определить добротность системы Q, если известны энергия колебаний $\langle E_К + E_П \rangle$ и затраты энергии ($\langle W \rangle T$) за период, которые расходуются на преодоление сил демпфирования.

Пример 2.6. При каком отклонении от резонансной частоты энергия вынужденных колебаний осциллятора уменьшается в два раза, если добротность системы Q равна 50 или 500?

Решение. На рис. 2.13 частоты ω_1 и ω_2 — это те самые частоты, которые были введены при определении добротности (см. рис. 2.11). Итак, $\omega_{1,2} = \mp\delta + \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$. Разделив это выражение на ω_0, а также учитывая равенство $Q = \omega_0/2\delta$, имеем $\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} = \mp\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{(2Q)^2}}$. Пренебрегая малыми величинами порядка $\frac{1}{Q^2}$ по сравнению с единицей ($Q >> 1$), получаем $\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} \approx 1 \mp \frac{1}{2Q}$. Итак, при $Q = 50$ (данная величина не очень велика) энергия вынужденных колебаний уменьшается в 2 раза при отклонении частоты внешней силы на 1% от частоты ω_0, при Q = 500 — на 0,1%.

2.4. Примеры колебательных систем с двумя степенями свободы

В предыдущих параграфах изучалось поведение колебательных систем с одной степенью свободы. Полученные знания служат основой для изучения более сложных механических и акустических

систем, которые имеют две и более степеней свободы. Их число определяется количеством независимых переменных (обобщенных координат), которые необходимы для полного описания движения системы. Сосредоточим внимание на изучении системы с двумя степенями свободы. Примеров таких систем можно привести множество. Некоторые из них представлены на рис. 2.14. Важным моментом при изучении сложной системы есть возможность рассматривать ее как систему, которая состоит из отдельных подсистем с одной степенью свободы, связанных одна с другой. Например, систему, изображенную на рис. 2.14, *а*, можно рассматривать как систему, состоящую из двух осцилляторов, соединенных между собой с помощью пружины. Отдельные системы с одной степенью свободы, из которых составляется исследуемая система, называют *парциальными*. Принятый способ выделения парциальных систем определяет и выбор обобщенных координат для описания движения. Например, для системы на рис. 2.14, *б* — это углы θ_1 и θ_2. Следует отметить, что выделенные парциальные системы в этом случае имеют общий элемент — пружину, которая соединяет маятники. Выбор парциальных систем (как и обобщенных координат) неоднозначный. Так, для системы на рис. 2.14, *в* равноправными есть такие пары координат: x_1, x_2 и x_0, θ.

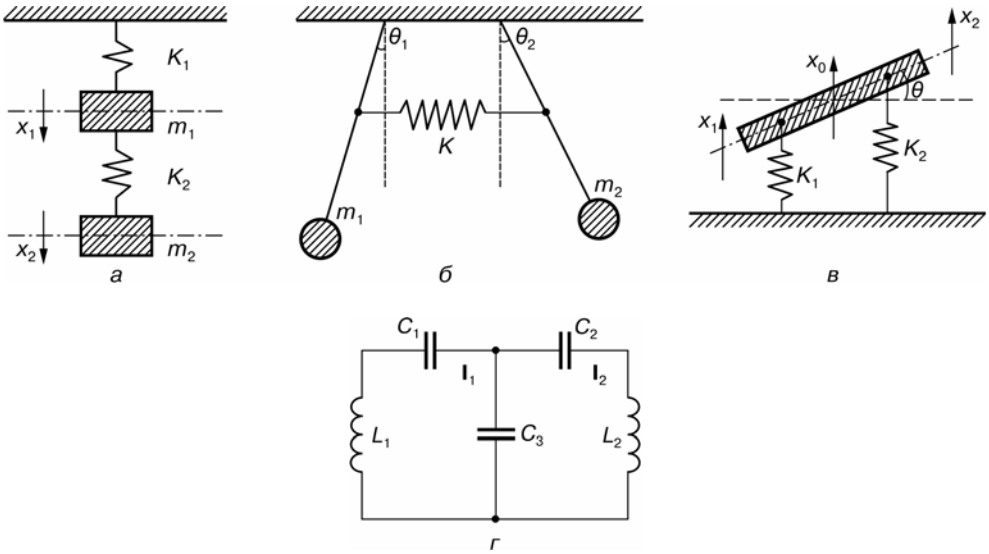


Рис. 2.14. Примеры колебательных систем с двумя степенями свободы

Соответствие между парциальными системами и обобщенными координатами устанавливается таким образом: парциальная система, которая соответствует данной координате, образуется из полной системы в ситуации , когда все координаты системы, кроме данной,

равны нулю (т.е. неподвижны). При этом нулевое значение обобщенных координат отвечает положению равновесия. Для системы на рис. 2.14, *в* обобщенным координатам x_1 и x_2, соответствуют такие парциальные системы: для x_1 — это вращение балки вокруг точки *2* закрепленного конца пружины K_2, для x_2 — это вращение балки вокруг точки *1* закрепленного конца пружины K_1. Координаты x_0, θ определяют такие парциальные системы: x_1 — поступательное вертикальное движение балки; θ — вращательное движение вокруг оси, которая проходит через центр масс балки.

2.5. Свободные колебания в системе с двумя степенями свободы

Колебания системы с двумя степенями свободы исследуем на модели (рис. 2.15), которая состоит из двух масс m_1 и m_2, двух пружин K_1 и K_2 и соединяющей пружины K_3. Пусть демпфирование в системе отсутствует. При нахождении смещений масс m_1 и m_2 с помощью обобщенных координат x_1 и x_2 получаем следующие парциальные системы:

1) масса m_1 закреплена между пружинами K_1 и K_3;
2) масса m_2 закреплена между пружинами K_2 и K_3.

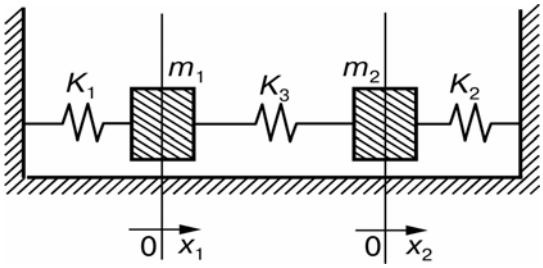


Рис. 2.15. Колебательная система

Рассмотрим свободные колебания исходной системы. Наличие двух степеней свободы приводит к появлению двух уравнений, которые описывают движение системы. Первое уравнение будем иметь, используя второй закон Ньютона, в проекции на горизонтальную ось для массы m_1: $m_1\ddot{x}_1 = F$, где F — сумма двух сил: силы упругости пружины K_1, равной K_1x_1, и силы упругости пружины K_3, равной $K_3\left(x_1 - x_2\right)$. Итак, $m_1\ddot{x}_1 = -K_1x_1 - K_3(x_1 - x_2)$. Аналогично, уравнение движения массы m_2 приобретает вид $m_2\ddot{x}_2 = -K_2x_2 - K_3\left(x_2 - x_1\right)$. Перепишем полученные уравнения:

$$m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_3)x_1 - K_3x_2 = 0, \qquad m_2\ddot{x}_2 + (K_2 + K_3)x_2 - K_3x_1 = 0$$

или

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \frac{K_3}{m_1} x_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \frac{K_3}{m_2} x_1 = 0, \qquad (2.86)$$

где $\omega_1^2 = \dfrac{K_1 + K_3}{m_1}$ и $\omega_2^2 = \dfrac{K_2 + K_3}{m_2}$ — собственные частоты первой и второй парциальных систем. При дальнейшем изложении для определенности будем считать, что $\omega_1 \le \omega_2$.

Уравнения (2.86) описывают свободные колебания системы с двумя степенями свободы. Чтобы выделить конкретную колебательную ситуацию, необходимо задать начальные условия:

$$x_1(0) = x_1^{(0)}, \quad \dot{x}_1(0) = \upsilon_1,$$

$$x_2(0) = x_2^{(0)}, \quad \dot{x}_2(0) = \upsilon_2. \qquad (2.87)$$

2.5.1. Нормальные колебания

Система дифференциальных уравнений (2.86) имеет только четные производные от искомых функций. В связи с этим ее можно свести к алгебраической системе, используя в качестве пробных решений выражения

$$x_1(t) = a\cos(\omega t - \varphi_1), \qquad x_2(t) = b\cos(\omega t - \varphi_2),$$

или

$$x_1(t) = A_1 \exp(-i\omega t), \qquad x_2(t) = A_2 \exp(-i\omega t). \qquad (2.88)$$

Последние выражения более удобны с точки зрения учета фазовых соотношений, их и будем использовать. При этом, конечно, физическое содержание в полученном комплексном решении будет иметь его действительная часть.

Выражение (2.88) имеет три произвольные величины: A_1, A_2, ω. Их нужно выбирать так, чтобы эти выражения удовлетворяли исходной системе уравнений (2.86). После подстановки (2.88) в (2.86) и сокращения на $\exp(-i\omega t)$ получаем такую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left(\omega_1^2 - \omega^2\right) A_1 - \frac{K_3}{m_1} A_2 = 0,$$

$$-\frac{K_3}{m_2}A_1+\left(\omega_2^2-\omega^2\right)A_2=0. \tag{2.89}$$

Соображения, которые обусловили выбор искомого решения в виде (2.88), носили формальный математический характер. Искомое решение — периодические функции от времени — не соответствует интуитивному представлению о разнообразии возможных типов движения в системе с двумя степенями свободы. В связи с этим можно говорить, что *на данном этапе мы стараемся найти достаточно частный случай движения системы — периодическое движение.*

Система уравнений (2.89) является линейной и однородной относительно неизвестных величин A_1 и A_2. Нетривиальное решение такой системы существует только при условии равенства нулю ее определителя. Это условие приводит к такому уравнению для определения частоты возможного периодического движения в системе:

$$\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)-\mu^4=0, \qquad \mu^4=\frac{K_3^2}{m_1m_2}. \tag{2.90}$$

Коэффициент

$$\mu^2=\frac{K_3}{\sqrt{m_1m_2}} \tag{2.91}$$

называют *коэффициентом связи*, поскольку в формуле присутствует жесткость соединительной пружины K_3, которая определяет упругие силы связи между парциальными системами.

Характер решений этого уравнения проще интерпретировать геометрически. На рис. 2.16 изображен график функции $g\left(\omega^2\right)=\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)-\mu^4$. Поскольку $g\left(\omega_1^2\right)<0$, $g\left(\omega_2^2\right)<0$ и $g(0)>0$, $g\left(\omega^2\right)\to\infty$ при $\omega^2\to\infty$, уравнение $g\left(\omega^2\right)=0$ всегда имеет два действительных корня, которые далее будем обозначать ω_-^2 и ω_+^2. Как правило, больший корень уравнения превышает значение квадрата большей парциальной частоты $\omega_+^2 > \omega_2^2$. Для меньшего корня ω_-^2 всегда выполняется неравенство $\omega_-^2 < \omega_1^2$. Уравнение (2.90) довольно простое, и его решение запишем так:

$$\omega_\pm^2=\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)^2+4\mu^4}. \tag{2.92}$$

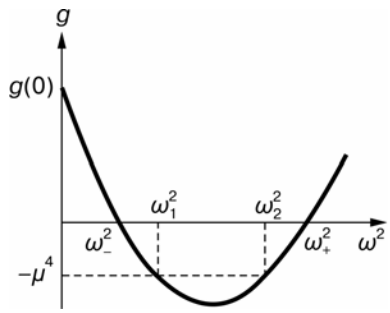


Рис. 2.16. График функции $g\left(\omega^2\right)$

Таким образом, в рассмотренной системе с двумя степенями свободы возможные два периодические движений с частотами ω_- и ω_+. Эти частоты определяются только внутренними свойствами колебательной системы, и их можно назвать ее *собственными частотами*, а соответствующие колебания — *собственными колебаниями*. Эти особые типы свободного движения в системе называют также *нормальными колебаниями,* или *модами*. Каждое нормальное колебание характеризуется не только соответствующим значением частоты, а и соотношением амплитуд колебаний, которые определяются равенствами (2.89). Так, для нормального колебания с частотой ω_+ из первого уравнения (2.89) имеем

$$A_1^+ = A_2^+ \frac{K_3}{m(\omega_1^2 - \omega_+^2)}.$$

Поскольку определитель системы (2.89) равен нулю, такая же связь между значениями A_1^+ и A_2^+ вытекает и из второго уравнения (2.89).

Итак, исходная система имеет два периодические решения:

$$\begin{gathered} x_1^-(t) = A_1^- \exp(-i\omega_- t), \quad x_2^-(t) = A_2^- \exp(-i\omega_- t); \\ x_1^+(t) = A_1^+ \exp(-i\omega_+ t), \quad x_2^+(t) = A_2^+ \exp(-i\omega_+ t). \end{gathered} \tag{2.93}$$

Амплитудные характеристики таких движений произвольные. Теория дифференциальных уравнений обосновывает утверждение о том, что представление искомых функций в виде

$$x_1(t) = x_1^-(t) + x_1^+(t), \quad x_2(t) = x_2^-(t) + x_2^+(t) \tag{2.94}$$

является общим решением системы (2.86). Поэтому любое решение системы (2.86) всегда можно представить в виде суммы частных решений (2.93). С физической точки зрения это означает, что любое свободное движение системы, т.е. движение при произвольных начальных условиях, представляет суперпозицию двух нормальных колебаний. Конкретные значения их амплитудных характеристик будут определяться начальными условиями (2.87). Если собственные частоты системы некратные (т.е. $\omega_+ \neq n\omega_-$, где n — целое число), то колебания, строго говоря, будут непериодическими.

Установленные свойства свободных колебаний системы с двумя степенями свободы являются конкретным проявлением общей закономерности в теории колебаний. Для любой колебательной системы свободное движение есть суперпозиция нормальных колебаний (периодических движений), число которых равняется числу степеней свободы системы. Итак, нормальные колебания являются важной общей характеристикой системы, которые определяются только свойствами самой колебательной системы.

Полная характеристика нормального колебания в системе предполагает не только задание его частоты. Как видно из соотношения (2.89), каждое нормальное колебание имеет специфическое распределение амплитуд по степеням свободы. Некоторые их свойства устанавливаются с помощью данных о частотах нормальных колебаний. Так, исходя из первой формулы (2.89) и принимая во внимание (2.91), имеем:

$$A_1^- = A_2^- \frac{K_3}{m_1} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_-^2} = A_2^- \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \frac{\mu^2}{\omega_1^2 - \omega_-^2}, \qquad \omega = \omega_-,$$

$$A_1^+ = A_2^+ \frac{K_3}{m_1} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_+^2} = A_2^+ \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \frac{\mu^2}{\omega_1^2 - \omega_+^2}, \qquad \omega = \omega_+. \tag{2.95}$$

Итак, подставив (2.95) в формулы (2.93), получаем частные решения уравнений (2.86), которые описывают нормальные колебания системы.

На частоте ω_-:

$$x_1^- = A_2^- \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cdot \frac{\mu^2}{\omega_1^2 - \omega_-^2} \exp(-i\omega_- t),$$

$$x_2^- = A_2^- \exp(-i\omega_- t). \tag{2.96}$$

Поскольку всегда $\omega_- < \omega_1$, движение парциальных систем происходит в фазе (рис. 2.17). Такие колебания называют *симметричной модой.*

На частоте ω_+:

$$x_1^+(t) = A_2^+\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\frac{\mu^2}{\omega_1^2-\omega_+^2}\exp(-i\omega_+ t),$$

$$x_2^+ = A_2^+\exp(-i\omega_+ t). \qquad (2.97)$$

Поскольку всегда $\omega_+ > \omega_1$, движение парциальных систем происходит в противофазе (рис. 2.18). Имеем *антисимметричную моду*.

Если $m_1 = m_2$, $K_1 = K_2$, то $\omega_1 = \omega_2$, и согласно (2.95) соотношение амплитуд колебаний парциальных систем для симметричной моды имеет вид $A_1^- = A_2^-$, а для антисимметричной: $A_1^+ = -A_2^+$.

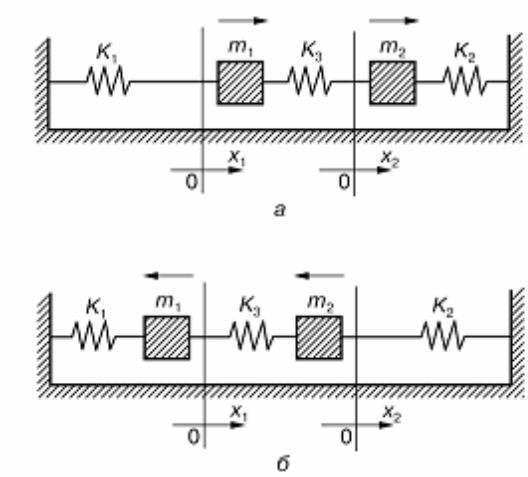


Рис. 2.17. Примеры симметричной моды:
а — синфазное движение системы вправо; *б* — влево

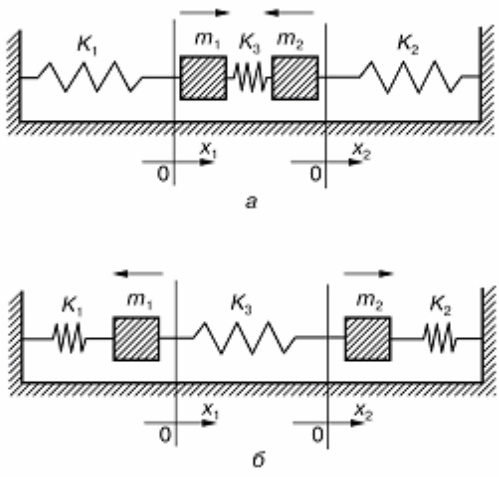


Рис. 2.18. Примеры антисимметричной моды:
а — противофазное движение масс на сближение; *б* — отдаление

Частные решения (2.96) и (2.97) определяют возможные периодические движения в системе с двумя степенями свободы. Понятно, что они возникают при особых начальных условиях, которые соответствуют данному нормальному колебанию. Если, например, при $m_1 = m_2$, $K_1 = K_2$ в начальный момент времени сместить массы m_1 и m_2 в одном направлении на одинаковую величину, а потом отпустить их, то система начнет колебаться с частотой ω_- (рис. 2.17). Если сделать то же самое, но при этом массы m_1 и m_2 сместить в противоположных направлениях, то в системе начнут возбуждаться колебание с частотой ω_+ (рис. 2.18).

2.5.2. Характеристики связи в системе

Рассмотрим влияние коэффициента связи μ^2 на характеристики колебательной системы. Проанализируем формулу (2.92) для нормальных частот системы. Если $\mu \to 0$, то $\omega_- \approx \omega_1$, а $\omega_+ \approx \omega_2$. Чем больше коэффициент связи, тем больше нормальные частоты отдаляются от парциальных частот. Вместе с этим отличие ω_1 от ω_2 влияет на степень близости нормальных и парциальных частот. Если парциальные частоты равны одна другой ($\omega_1 = \ = \omega_2$), то $\omega_-^2 = \omega_1^2 - \mu^2$, $\omega_+^2 = \omega_1^2 + \mu^2$, и имеем наибольшее влияние μ^2 на разность между нормальными и парциальными частотами. Если ω_1 и ω_2 значительно различаются ($\omega_1 << \omega_2$ или $\omega_1 >> \omega_2$), то нормальные частоты близки к парциальным.

Для более полного описания влияния связи в системе целесообразно ввести такие характеристики нормальных колебаний, как *коэффициенты распределения амплитуд* k^- *и* k^+, которые равны отношениям амплитуд колебаний парциальных систем в каждом из нормальных колебаний. Из формул (2.95) имеем:

$$k^- = \frac{A_1^-}{A_2^-} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cdot \frac{\mu^2}{\omega_1^2 - \omega_-^2},$$
$$k^+ = \frac{A_1^+}{A_2^+} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cdot \frac{\mu^2}{\omega_1^2 - \omega_+^2}. \qquad (2.98)$$

Поскольку на частоте ω_- происходит синфазное движение масс m_1 и m_2, то коэффициент k^- всегда положительный. Если, наоборот, на частоте ω_+ имеем противофазное движение масс m_1 и m_2, то коэффициент k^+ всегда отрицательный.

При равенстве парциальных частот ($\omega_1 = \ \omega_2$) коэффициенты распределения амплитуд определяются так: $k^- = \sqrt{m_2 / m_1}$, $k^+ = -\sqrt{m_2 / m_1}$. Таким образом, если системы неидентичные, то амплитуды колебаний в парциальных системах разные даже при одинаковых парциальных частотах. Если системы идентичные ($m_1 = m_2$, $K_1 = K_2$), то коэффициенты распределения по модулю равны единице. Это означает равенство амплитуд колебаний в обеих парциальных системах для двух нормальных колебаний.

Используя выражения (2.98), переписываем (2.96) и (2.97) в виде

$$x_1^-(t) = A_2^- k^- \exp(-i\omega_- t), \quad x_2^-(t) = A_2^- \exp(-i\omega_- t); \qquad (2.99)$$

$$x_1^+(t) = A_2^+ k^+ \exp(-i\omega_+ t), \quad x_2^+(t) = A_2^+ \exp(-i\omega_+ t). \qquad (2.100)$$

Как следует из (2.99), (2.100), *в каждом из нормальных колебаний амплитуды имеют постоянное отношение k^- или k^+, которое не зависит от начальных условий.*

Проведенные исследования показывают, что характер взаимодействия между парциальными системами определяет не только сила связи (μ^2), но и степень близости парциальных частот. Именно степень близости собственных частот парциальных систем, т.е. ($\omega_1 - \omega_2$), дает тот внутренний масштаб, по которому необходимо оценивать величину связи в системе. В соответствии с этими рассуждениями Мандельштам ввел понятие "связанности" [32, с. 254—255], параметром которого является *коэффициент связанности:*

$$\sigma = \frac{2\mu^2}{\left|\omega_2^2 - \omega_1^2\right|}. \qquad (2.101)$$

С учетом (2.92) запишем формулы для коэффициентов распределения амплитуд (2.98) через коэффициент связанности:

$$k^- = \frac{A_1^-}{A_2^-} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2} - 1},$$

$$k^+ = \frac{A_1^+}{A_2^+} = -\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2} + 1}. \qquad (2.102)$$

Согласно формуле (2.102) для малой связанности, когда $\sigma \to 0$ ($\sqrt{1+\sigma^2} \approx 1 + \ + \sigma^2/2$), имеем $k^- \to \infty$, $k^+ \to 0$. Это означает: если в первой парциальной системе колебания частоты ω_- имеют конечную амплитуду, то во второй парциальной системе амплитуда колебания той же самой частоты практически равна нулю, поэтому $k^- \to \infty$. Если во второй парциальной системе наблюдаются колебание частоты ω_+, то в первой парциальной системе колебания той же частоты практически равны нулю, откуда следует, что $k^+ \to 0$. Итак, передача энергии от одной парциальной системы к другой будет очень мала, т.е. колебания будут считаться разделенными (можно пренебрегать связью между парциальными системами), если связанность (но не связь μ^2) мала ($\sigma \to 0$).

Следует отметить, что в случае малой связанности ($\sigma \to 0$), нормальные частоты приближаются к парциальным. Действительно, как видно из (2.92), при условии $\sigma \to 0$ $\left(\left|\omega_2^2 - \omega_1^2\right| \gg \mu^2\right)$ имеем $\omega_- \approx \omega_1$, $\omega_+ \approx \omega_2$. Итак, малая связанность между системами дает основание рассматривать нормальное колебание в двух взаимодействующих

системах как собственное колебание одной из парциальных систем с большой амплитудой, что служит причиной слабых колебаний во второй системе.

Для каждого нормального колебания та парциальная система имеет большую амплитуду, в которой парциальная частота приближается к нормальной частоте рассматриваемого колебания. Очевидно, что при приближении к равенству парциальных частот ω_1 і ω_2 коэффициент связанности (2.101) значительно возрастает даже при малых значениях связи (μ^2). Незначительные силы связи существенно влияют на процессы, когда парциальные частоты близки. Наоборот, в случае значительного отличия в парциальных частотах, даже относительно большие силы связи не влияют на колебание каждой отдельной парциальной системы.

Если парциальные частоты равны, т.е. связанность $\sigma \to \infty$, то амплитуды колебаний одинаковы по обеим координатам. Действительно, при условиях $\omega_1 = \omega_2$, $m_1 = m_2$ формулы (2.98) и (2.102) определяют $k^- = 1$ и $k^+ = -1$.

В конце параграфа, посвященного анализу нормальных колебаний в системе с двумя степенями свободы, обратим внимание на такое обстоятельство. Мы определили и охарактеризовали частоты нормальных колебаний как некоторые собственные фундаментальные характеристики системы. Вместе с тем они выражаются через собственные частоты парциальных систем, выбор которых, как отмечалось, является достаточно произвольным. В связи с этим возникает вопрос: изменяются ли нормальные колебания при изменении выбора парциальных систем. Общий ответ теории колебаний отрицательный. Для того чтобы проверить этот вывод на конкретной системе, нужно рассмотреть приведенную выше систему — балка на двух пружинах (рис. 2.14, *в*) — с использованием двух разных способов выделения парциальных систем.

2.5.3. Движение при заданных начальных условиях

Выражения (2.99) и (2.100) определяют частные решения уравнений (2.86). Складывая (2.99) и (2.100) вследствие линейности уравнений (2.86), получаем их общее решение, которое зависит от двух комплексных постоянных A_2^- и A_2^+:

$$x_1(t) = x_1^-(t) + x_1^+(t), \quad x_2(t) = x_2^-(t) + x_2^+(t). \qquad (2.103)$$

Поскольку физическое содержание имеют действительные части в (2.103) то, принимая во внимание (2.99), (2.100), записываем выражения для колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в действительной форме:

$$x_1(t) = a^- k^- \cos\left(\omega_- t + \varphi^-\right) + a^+ k^+ \cos\left(\omega_+ t + \varphi^+\right),$$

$$x_2(t) = a^- \cos\left(\omega_- t + \varphi^-\right) + a^+ \cos\left(\omega_+ t + \varphi^+\right), \tag{2.104}$$

где постоянные a^-, a^+, φ^-, φ^+ определяются из начальных условий. Из общего решения (2.104) следует, что движение каждой из координат $x_1(t)$ и $x_2(t)$ является следствием суперпозиции двух нормальных колебаний с частотами ω_- и ω_+. Поскольку эти частоты в общем случае не кратные, то в результате движение будет непериодическим. Но в этом и заключается значимость нормальных колебаний: с их помощью сложное произвольное движение можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний, которыми являются нормальные колебания.

Рассмотрим движение в системе при таких начальных условиях: $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Из условия $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ вытекает, что $\varphi^- = \varphi^+ = 0$. Из условия $x_1(0) = 0$ имеем $a^- = -a^+$. Тогда формулы (2.104) приобретают вид

$$x_1(t) = a^+\left[k^+ \cos(\omega_+ t) - k^- \cos(\omega_- t)\right],$$

$$x_2(t) = a^+\left[\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\right]. \tag{2.105}$$

Используя начальное условие $x_1(0) = x_0$, находим $a^+ = x_0 / \left(k^+ - k^-\right)$. С учетом этого запишем (2.105) так:

$$x_1(t) = \frac{x_0}{k^+ - k^-}\left[k^+ \cos(\omega_+ t) - k^- \cos(\omega_- t)\right],$$

$$x_2(t) = \frac{x_0}{k^+ - k^-}\left[\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\right]. \tag{2.106}$$

Если парциальные частоты одинаковые ($\omega_1 = \omega_2$) и ($m_1 = m_2$), то согласно (2.98) имеем $k^+ = -1$, $k^- = 1$. В этом случае формулы (2.106) имеют вид

$$x_1(t) = x_0 \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right),$$

$$x_2(t) = x_0 \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right)\sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right). \tag{2.107}$$

Особенно интересными являются движения в системе, когда при условии $\omega_1 = \omega_2$ имеем $\omega_+ - \omega_- \ll \omega_+ + \omega_-$. Если $\omega_+ - \omega_- \ll \omega_+ + \omega_-$, то колебания имеют вид, приведенный на рис. 2.19 в качестве примера. Здесь графики иллюстрируют, что в момент времени $t = 0$ энергия

вносится в первую парциальную систему путем отклонения массы m_1 на величину x_0. Со временем колебания массы m_1 ослабляются, а колебания массы m_2 постепенно увеличиваются. Таким образом, энергия перетекает из первой парциальной системы во вторую. Спустя некоторое время $t' = \ = \pi/(\omega_+ - \omega_-)$, здесь $\cos[(\omega_+ - \omega_-)t'/2] = 0$, вся энергия колебаний полностью перетечет в другую парциальную систему, и начнется движение энергии в противоположном направлении. Графики на рис. 2.19 построены при таких условиях: $\omega_+/\omega_- = 1{,}1$; тогда имеем $t'/T_- = 5$, где $T_- = 2\pi/\omega_-$.

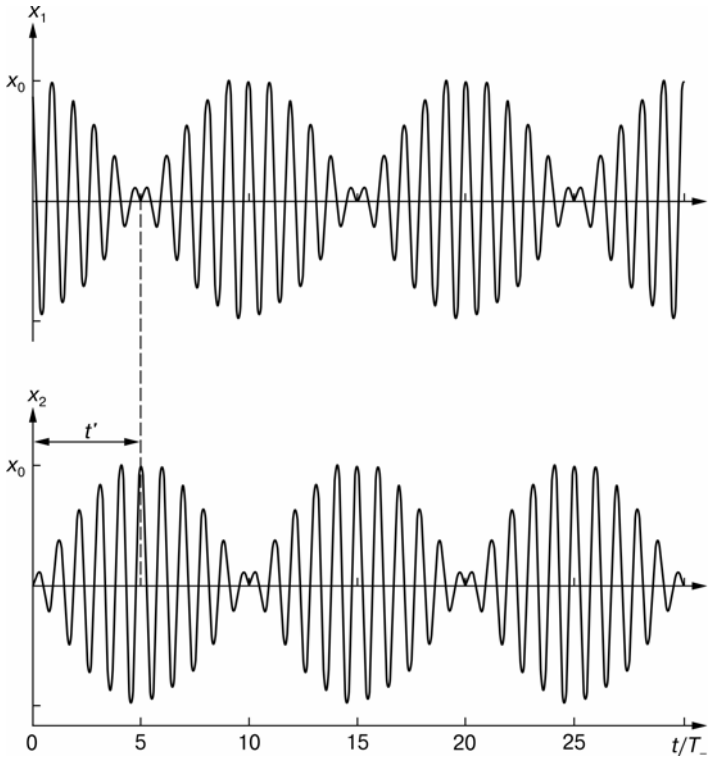


Рис. 2.19. Графики свободных колебаний в системе с двумя степенями свободы ($\omega_1 = \omega_2$, $m_1 = m_2$) при начальных условиях:
$x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$; $\omega_+/\omega_- = 1{,}1$

Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то энергия, накопленная первоначально в одной парциальной системе, никогда не будет передаваться полностью второй парциальной системе. Это наглядно отображают формулы (2.106), ведь, если парциальные частоты значительно различаются (малая связанность), то один из коэффициентов распределения амплитуд становится намного больше второго. Эту

ситуацию иллюстрирует рис. 2.20, для которого $k^- \gg \left|k^+\right|$. Здесь $\omega_+ / \omega_- = 1{,}1$, а коэффициент связанности $\sigma = 0{,}5$; тогда при условии $m_1 = m_2$, $k^- \approx 4{,}24$, $k^+ \approx -0{,}24$. Согласно (2.106) минимальное значение амплитуды первой парциальной системы равно величине $x_0 \dfrac{k^- - \left|k^+\right|}{k^- + \left|k^+\right|}$, т.е. амплитуда первой парциальной системы изменяется мало, а максимальная амплитуда второй парциальной системы равняется $2x_0 / \left(k^- + \left|k^+\right|\right)$, т.е. значительно меньше амплитуды первой парциальной системы (на рис. 2.20 соответственно имеем значение 0,9 и 0,45 при x_0 = 1).

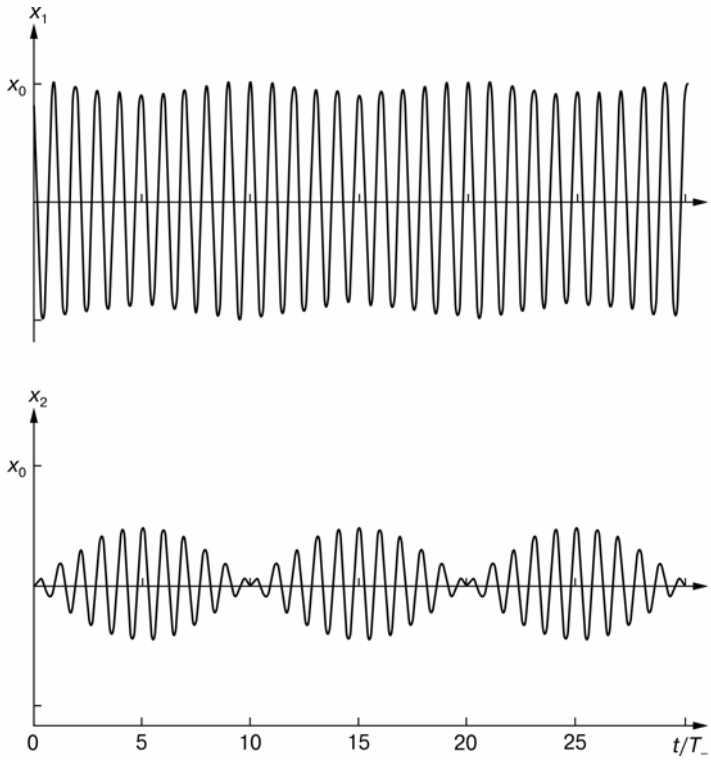


Рис. 2.20. Графики свободных колебаний в системе с двумя степенями свободы ($\omega_1 \neq \omega_2$, $\dot{m}_1 = m_2$) при начальных условиях:

$x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$; $\omega_+ / \omega_- = 1{,}1$; $\sigma = 0{,}5$

Время перетекания энергии из одной парциальной системы в другую зависит от величины связи между системами. Действительно, при

$\omega_1 = \omega_2$ в соответствии с формулой (2.92) имеем $\omega_{\mp}^2 = \omega_1^2 \mp \mu^2$. Тогда $\omega_+ - \omega_- = \sqrt{\omega_1^2 + \mu^2} - \sqrt{\omega_1^2 - \mu^2}$; если $\mu^2 << \omega_1^2$, то $\omega_+ - \omega_- \approx \mu^2 / \omega_1$. Отсюда при условии $\omega_1 = \omega_2$ получаем

$$t' = \frac{\pi}{\omega_+ - \omega_-} \approx \frac{\pi\omega_1}{\mu^2}, \quad \left(\mu^2 << \omega_1^2\right). \tag{2.108}$$

Итак, время перетекания энергии обратно пропорционально коэффициенту связи: чем меньше сила связи (μ^2), тем медленнее происходит перетекание энергии из первой парциальной системы во вторую парциальную систему, и наоборот. Отметим, что наличие даже малого демпфирования в системе радикально изменяет картину колебаний, поскольку по истечении значительного промежутка времени $\left(t' = \pi/(\omega_+ - \omega_-)\right)$ колебания в первой парциальной системе могут затухнуть намного раньше, прежде чем будут способны хотя бы сколько-нибудь заметно раскачать вторую парциальную систему. Таким образом, только тогда, когда время перетекания t' намного меньше постоянной времени парциальной системы, будут наблюдаться колебания, приведенные на рис. 2.19, 2.20.

2.6. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы

Рассмотрим действие гармонических внешних сил на систему с двумя степенями свободы (рис. 2.21). Считаем, что источники внешней силы имеют бесконечную мощность, а их частоты одинаковы. Поскольку уравнения, которые описывают движение системы, линейные, то, зная решение задачи о гармоническом влиянии на систему и используя принцип суперпозиции, можно исследовать воздействие произвольной внешней силы.

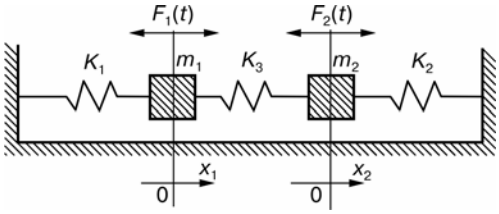


Рис. 2.21. Колебательные системы под действием внешних сил

Пусть частота внешнего воздействия ω, тогда гармонические внешние силы $F_1(t) = F_1 \cos(\omega t)$, $F_2(t) = F_2 \cos(\omega t)$. Уравнения движения системы имеют такой вид:

$$m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_3)x_1 - K_3x_2 = F_1\cos(\omega t),$$

$$m_2\ddot{x}_2 + (K_2 + K_3)x_2 - K_3x_1 = F_2\cos(\omega t),$$

или

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x_1 - \frac{K_3}{m_1}x_2 = \frac{F_1}{m_1}\cos(\omega t),$$

$$\ddot{x} + \omega_2^2 x_2 - \frac{K_3}{m_2}x_1 = \frac{F_2}{m_2}\cos(\omega t). \qquad (2.109)$$

Вынужденные колебания системы будем искать в виде

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t), \qquad x_2(t) = A_2\cos(\omega t). \qquad (2.110)$$

Подставляя (2.110) в (2.109), получаем:

$$\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)A_1 - \frac{K_3}{m_1}A_2 = \frac{F_1}{m_1},$$

$$-\frac{K_3}{m_2}A_1 + \left(\omega_2^2 - \omega^2\right)A_2 = \frac{F_2}{m_2}, \qquad (2.111)$$

откуда

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad (2.112)$$

где

$$\Delta_1 = \left(\omega_2^2 - \omega^2\right)\frac{F_1}{m_1} + \frac{K_3F_2}{m_1m_2}, \quad \Delta_2 = \left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\frac{F_2}{m_2} + \frac{K_3F_1}{m_2m_1},$$

$$\Delta(\omega) = \left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^3 - \omega^2\right) - \mu^4.$$

Анализируя полученное решение, отмечаем, что явление резонанса возникает при выполнении двух условий:

1) если $\Delta(\omega) = 0$. Поскольку условие $\Delta(\omega) = 0$ совпадает с (2.90), то это означает, что явление резонанса наблюдается при равенстве частоты внешней силы и одной из нормальных частот системы, т.е. при $\omega = \omega_-$ или $\omega = \omega_+$. Таким образом, на резонансе амплитуды колебаний по обеим координатам с течением времени стремятся к бесконечности (в системе отсутствует демпфирование);

2) чтобы такое явление имело место, необходимо также выполнение неравенств $\Delta_1(\omega_-) \neq 0, \Delta_2(\omega_-) \neq 0$ или $\Delta_1(\omega_+) \neq 0, \Delta_2(\omega_+) \neq 0$. Из формулы (2.112) видно, что выполнение этого условия зависит от со-

отношения амплитуд F_1 и F_2. Итак, возникновение резонанса в системе с двумя степенями свободы при действии двух сил зависит от распределения амплитуд внешних сил F_1 и F_2. Поэтому возможна ситуация, когда частота внешней силы совпадает с одной из частот нормальных колебаний, но резонансное раскачивание системы при этом не наблюдается. Таким образом, для возникновения резонанса в системе необходимо, но не достаточно, чтобы частота внешней силы совпадала с одной из собственных частот.

Практически важен случай, когда на систему действует одна сила. Пусть $F_1 \neq 0$ и $F_2 = 0$. Тогда, согласно формуле (2.112) амплитуды колебаний имеют вид

$$A_1 = \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\Delta(\omega)} \cdot \frac{F_1}{m_1},$$

$$A_2 = \frac{K_3/m_2}{\Delta(\omega)} \cdot \frac{F_1}{m_1}. \qquad (2.113)$$

На рис. 2.22, *а, б* приведены зависимости амплитуд колебаний A_1 и A_2 парциальных систем от частоты внешней силы ω. На графиках можно увидеть интервалы частот, где изменение координаты $x_1(t)$ или $x_2(t)$ происходит в фазе с внешней силой или в противофазе. На частотах резонанса $\omega = \omega_-$ и $\omega = \omega_+$ кривые для A_1 и A_2 стремятся в бесконечность; при $\omega \to \infty$ обе зависимости стремятся к нулю. В то время, как A_2 для всех значений ω отлична от нуля, A_1 приобретает нулевое значение при $\omega = \omega_2$. Физически это объясняется тем, что при определенной настройке масса m_2 колеблется в противофазе с внешней силой и именно с такой амплитудой, что сила, с которой пружина K_3 действует на массу m_1, уравновешивает внешнюю силу. Для этого амплитуда колебаний массы m_2, как следует из (2.113), должна быть равной

$$A_2(\omega_2) = \frac{K_3/m_2}{\Delta(\omega_2)} \frac{F_1}{m_1} = -\frac{F_1}{K_3}. \qquad (2.114)$$

Этот эффект используется при конструировании разных глушителей колебаний. Понятно, что такие глушители способны ослаблять колебания определенной частоты или частоты, которая мало изменяется. Отметим, что в реальной системе, где есть демпфирование, идеальный характер гашения нарушается.

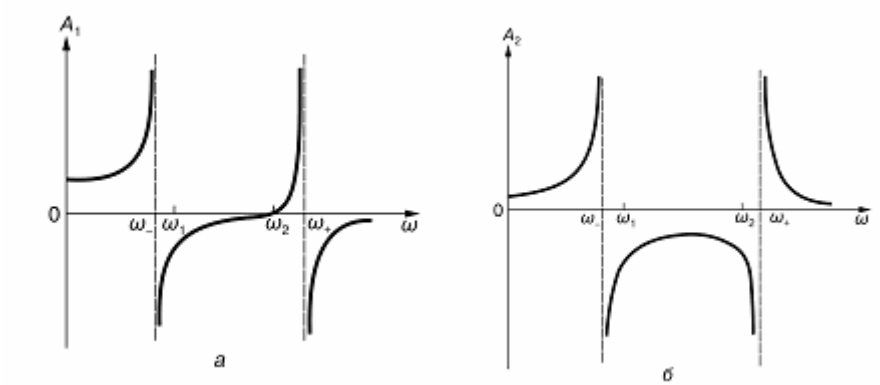


Рис. 2.22. Зависимости амплитуд колебаний A_1 (*а*) и A_2 (*б*) от частоты внешней силы ω

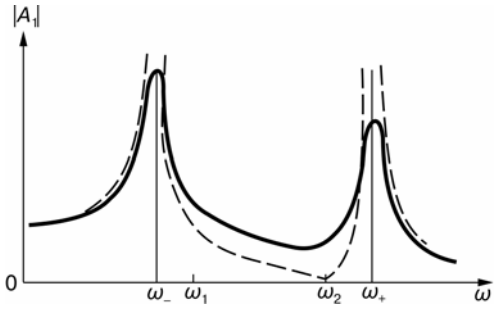


Рис. 2.23. Частотная зависимость $|A_1|$

На рис. 2.23 сплошной кривой изображена зависимость модуля амплитуды колебания координаты x_1 (t) от частоты внешней силы ω при наличии демпфирования в системе, а штриховой — такая же зависимость, но без демпфирования. Как видно на рис. 2.23, демпфирование влияет, прежде всего на то, что разрывы резонансных кривых заменяются конечными пиками. Вместе с тем исчезает нуль для зависимости A_1 (ω) массы m_1.

В конце параграфа выделим два таких момента.

1. Была рассмотрена система с двумя степенями свободы на примере двух парциальных систем, соединенных между собой упругой связью (пружина K_3). Возможны другие типы связи: с помощью массы, трения или комбинированная. Каждая из таких систем нуждается в своем анализе, хотя, конечно, возможно построение общей теории.

2. Если колебательная система состоит из N парциальных систем, связанных одна с одной, то ничего принципиально нового в задаче не возникает. Такая система имеет N нормальных частот и N нормальных колебаний. Тогда свободные колебания системы при лю-

бых начальных условиях определяются суперпозицией N нормальных колебаний. Амплитуды отдельных нормальных колебаний определяются из начальных условий, которые, естественно, записываются для каждой обобщенной координаты отдельно. В случае воздействия на систему в некоторый момент времени t гармонической силы, приложенной к одной из частей системы, во всей системе возбуждаются сложные колебания, которые состоят из собственных колебаний с частотами, равными нормальным частотам системы, и вынужденных колебаний с частотой внешней силы. При наличии демпфирования в системе собственные колебания за некоторое время затухают и в системе остаются вынужденные колебания. Конечно, исследование систем, которые имеют N степеней свободы, становится более трудоемким.

2.7. Биения

Во многих физических явлениях наблюдается суперпозиция двух и больше гармонических колебаний с разными частотами. В качестве примера приведем колебания системы с двумя степенями свободы, которые представляют собой суперпозицию двух нормальных колебаний системы. Примером другого рода будут гармонические колебания, вызванные внешними силами. Источниками таких внешних сил могут быть, например, два камертона разной частоты. Каждый камертон дает свою “ноту”, которая распространяется в воздухе как звуковая волна. Движение воздуха, которое воспринимается нашей барабанной перепонкой, и является суперпозицией гармонических колебаний.

Математическое описание процессов в приведенных примерах одинаково. Запишем суперпозицию гармонических колебаний $\xi_1(t) = a_1\cos(\omega_1 t)$ и $\xi_2(t) = a_2\cos(\omega_2 t)$:

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) = a_1\cos(\omega_1 t) + a_2\cos(\omega_2 t). \qquad (2.115)$$

Перепишем (2.115) в другом виде. Для этого введем разностную частоту:

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 \qquad (2.116)$$

(пусть, для определенности, $\omega_2 \geq \omega_1$). Если подставить соотношение $\omega_2 = \omega_1 + \Omega$ в (2.115), то будем иметь

$$\xi(t) = \left(a_1 + a_2\cos(\Omega t)\right)\cos(\omega_1 t) - a_2\sin(\Omega t)\sin(\omega_1 t). \qquad (2.117)$$

Всегда можно найти такие действительные величины $A(t)$ и $\psi(t)$, чтобы удовлетворить уравнения

$$a_1 + a_2\cos(\Omega t) = A(t)\cos\left(\psi(t)\right), \qquad (2.118)$$

$$a_2 \sin(\Omega t) = A(t)\sin(\psi(t)). \qquad (2.119)$$

Рассматривая (2.118), (2.119) как два уравнения с двумя неизвестными: $A(t)$ и $\psi(t)$, находим их, возводя в квадрат и складывая, а затем делим второе на первое:

$$A^2(t) = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\Omega t), \qquad (2.120)$$

$$\psi(t) = \operatorname{arctg}\frac{a_2\sin(\Omega t)}{a_1 + a_2\cos(\Omega t)}. \qquad (2.121)$$

Итак, (2.117) будет иметь вид:

$$\xi(t) = A(t)\cos\left[\omega_1 t + \psi(t)\right]. \qquad (2.122)$$

Выражение (2.122) можно рассматривать как колебания, которые происходят с угловой частотой ω_1, при этом огибающая $A(t)$ и фаза $\psi(t)$ изменяются со временем согласно (2.120) и (2.121). Запись суперпозиции двух колебаний в виде (2.122) удобна, если частоты ω_1 и ω_2 являются близкими. В этом случае выполняется условие $\Omega << \omega_1$, $\Omega >> \omega_2$, поэтому огибающая $A(t)$ и фаза $\psi(t)$ незначительно будут изменяться за время нескольких периодов колебаний $\cos(\omega_1 t)$. Если условие $\Omega \ll \omega_1$ не выполняется, то запись (2.122), конечно, остается справедливой, но она перестает быть полезным математическим инструментом, поскольку огибающая перестает существовать как характерная кривая. Представление суперпозиции колебаний в форме (2.122) имеет название *биения*. Согласно (2.120) огибающая $A(t)$ в общем случае есть периодическая, но не синусоидальная функция времени, основная частота изменения которой равна разностной частоте Ω. Частоту Ω называют *частотой биений*. Колебание, которое заполняет огибающую, описывается функцией $\cos(\omega_1 t + \psi(t))$. Его можно интерпретировать как колебание, которые происходит с частотой ω_1, где фаза $\psi(t)$ изменяется со временем с частотой Ω. Другими словами, у колебания, которое заполняет огибающую: $\cos(\omega_1 t + \psi(t))$, частота не является постоянной, а изменяется на периоде $2\pi/\Omega$. Говорят, что при биениях колебания модулировано по частоте (или по фазе).

Следует отметить, что при равенстве амплитуд складываемых колебаний огибающая $A(t)$ становится синусоидальной функцией времени, а указанное изменение частоты отсутствует. Действительно, при $a_1 = a_2 = a$ формула (2.122) превращается в выражение:

$$\xi(t) = 2a\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right). \qquad (2.123)$$

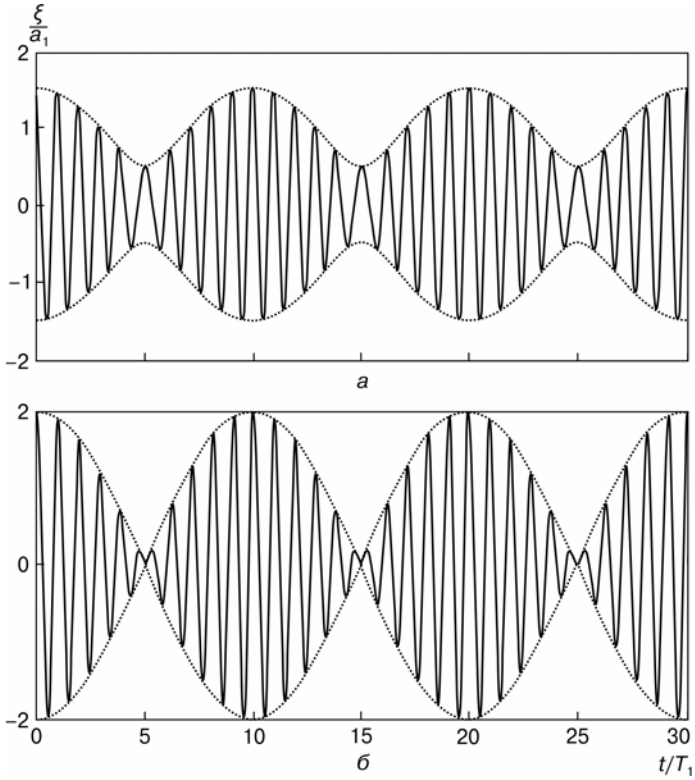


Рис. 2.24. Графики биений (Ω/ω_1= 0,1): *а* — $a_2 = a_1/2$, *б* — $a_2 = a_1$

На рис. 2.24 приведены графики суперпозиции двух колебаний, характерных для биений; соотношение между частотами складываемых колебаний: $\Omega/\omega_1 = 0{,}1$.

Итак, две формы записи суперпозиции колебаний (2.115) и (2.122) математически эквивалентны, и можно лишь говорить об удобстве записи (2.122) при анализе колебательного процесса. Но с точки зрения физики может быть так, что эти две формы записи принципиально будут различаться. Ситуация будет определяться конкретным приемником звуковых колебаний.

Пусть таким приемником будет ухо человека. Если разностная частота $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ достаточно велика, то мы слышим звучание двух тонов, и математическим отображением такой ситуации есть формула (2.115). Прослушивая акустические сигналы с близкими частотами, высота тона которых заметно различается при их раздельном прослушивании, возникает впечатление звучания одного чистого тона с

громкостью, которая изменяется. При этом изменение высоты тона, т.е. частотная модуляция при прослушивании, не проявляется. Это и есть восприятие биений, математическое описание которого определяется (2.122). Следует отметить, что предельное значение Ω, которое отделяет область восприятия биений от восприятия звучания двух тонов, зависит от положения ω_1 и ω_2 в частотном диапазоне. В области средних частот биения можно наблюдать вплоть до $\Omega/(2\pi) = 100$ Гц. При дальнейшем увеличении разности частот ω_1 и ω_2 возникает ощущение звучания двух сигналов.

Опытные музыканты используют явление биений для настройки инструментов за счет изменения частоты одного из инструментов до тех пор, пока биения не исчезнут. Наличие биения в музыкальных звуках делает их более приятными для слуха. Каждая струна среднего и верхнего регистров рояля на самом деле представляет собой *триплекс* (от латинского слова *triplex* — тройной), каждую струну можно настраивать отдельно, изменяя ее натяжение. Если частоты отдельных струн триплекса немного разные, то будут возникать биения. Этот эффект не очень заметен, когда частота биений не превышает нескольких циклов за секунду. Если же струны сильно расстроены, то они создают резкие несозвучные звуки.

Явление биения используют живые существа, которые ориентируются в пространстве с помощью звука. Например, дельфины и летучие мыши. Эти животные вместо простых сигналов постоянной частоты излучают сложные импульсные сигналы. Они плавно изменяют частоту колебаний, которые заполняют каждый импульс излучения. Теперь вообразим себе, что летучая мышь принимает отраженные волны, которые прошли разные пути. Скажем, первый сигнал — это волна, отраженная от насекомого, а второй — который приходит позднее, — это волна, отраженная от дерева, рядом с которым пролетело насекомое. Суперпозиция таких акустических волн приводит к тому, что во время приема они складываются с разными частотами и возникают биения. При излучении колебаний частота может изменяться таким образом, что при приеме волн, которые пришли разными путями, период биения будет не больше временной продолжительности импульса. Понятно, что частота биения характеризует запаздывание второй волны относительно первой, которая прошла более короткий путь. По частоте биений летучая мышь может оценить удаление насекомого от дерева.

Другим примером является подключение стрелочного вольтметра к двум последовательно соединенным генераторам синусоидальных колебаний. При приближении частот генераторов к определенному значению $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ стрелка вольтметра начинает колебаться в некоторых границах и тем медленнее, чем меньше Ω. Наблюдаются биения.

При этом значение частоты Ω определяется конструкцией прибора. Если взять вольтметр с большей инерцией индикатора, то частота Ω, при которой возникают биения, уменьшится.

В заключении, вспомним систему с двумя степенями свободы. Теперь понятно, что свободные колебания в системе, которые представляются в виде суперпозиции двух нормальных колебаний с частотами ω_+ и ω_- (рис. 2.22), представляют собой явление биения. Энергия переходит от одной системы к другой с частотой биения.

2.8. Цепочка идентичных осцилляторов

Систему связанных осцилляторов, в которой они размещены таким образом, что каждый из осцилляторов соединен только с двумя соседними (за исключением, возможно, крайних), называют цепочкой осцилляторов. Исследование процессов в цепочке связанных осцилляторов имеет большое значение, как в теоретическом плане, так и с точки зрения практических применений. Например, широкое распространение получили радиотехнические, механические и акустические цепочки, которые используют как фильтры для выделения или гашения сигналов с частотами в определенной полосе частот. Для построения современной теории твердого тела большую роль сыграла модель кристалла, в которой периодически расположенные атомы были изображены шариками, соединенными между собой пружинами, которые заменяли межатомные силы.

Большое значение имеет тот факт, что в случае цепочки связанных идентичных осцилляторов можно осуществить полный теоретический анализ. Рассмотрим цепочку в виде безмассовой струны длиной l, на которой размещены $N+2$ шариков массой m каждый (рис. 2.25). Пусть на концах струны $x = 0$ и $x = l$ шарики закреплены. Все шарики размещены вдоль струны равномерно в точках $x = 0, a, 2a, \ldots, Na, (N+1)a$, то есть, длина струны $l = (N+1)a$. Натяжение струны в равновесии равно F. Шарики выполняют поперечные колебания в плоскости рисунка.

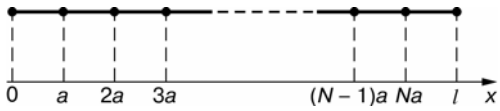


Рис. 2.25. Равновесное положение струны с шариками

В примере п. 2.3 (см. рис. 2.5) рассмотрено колебание одного шарика на безмассовой струне. Согласно приведенным соображениям в случае малых отклонений шарика от положения равновесия силу натяжения F можно считать постоянной в ходе колебательного процес-

са. Используем этот факт при исследовании малых поперечных колебаний шариков в системе на рис. 2.25.

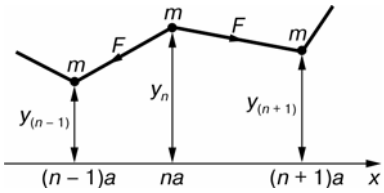


Рис. 2.26. Элемент струны с тремя шариками

Обозначим смещение шарика с некоторым номером n от положения равновесия так: $y_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Рассмотрим три соседних шарика с номерами $n-1, n, n+1$ (рис. 2.26). Предлагаем читателю показать, что при малых колебаниях шариков $y_n(t) << a$ согласно второму закону Ньютона можно записать такие уравнения движения:

$$y_0 = 0,$$

$$m\frac{d^2 y_n}{dt^2} = F\frac{y_{n+1} - y_n}{a} - F\frac{y_n - y_{n-1}}{a}, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.124}$$

$$y_{N+1} = 0.$$

Цепочка с шариками (рис. 2.25) является системой с N степенями свободы. Для ее исследования, как и в случае системы с двумя степенями свободы, нужно определить нормальные колебания (моды) цепочки осцилляторов. Итак, искомое решение имеет вид:

$$y_n(t) = Y_n \exp(-i\omega t), \qquad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.125}$$

где Y_n — комплексная амплитуда колебаний n-го шарика. Понятно, что физический смысл имеет $\mathrm{Re}\left[y_n(t)\right]$. Подставляя (2.125) в (2.124), получаем такие уравнения для Y_n:

$$Y_0 = 0, \tag{2.126а}$$

$$-\omega^2 m Y_n = \frac{F}{a}\left(Y_{n+1} - 2Y_n + Y_{n-1}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.126б}$$

$$Y_{N+1} = 0. \tag{2.126в}$$

Попробуем определить решение этих уравнений в виде

$$Y_n = A\sin(kan), \tag{2.127}$$

где A и k — некоторые постоянные. Как видим, решение (2.127) удовлетворяет уравнениям (2.126а) автоматически, а, подставляя (2.127) в (2.126б), имеем

$$-\omega^2 m \cdot \sin(kan) = \frac{F}{a}\left[\sin\left(ka(n+1)\right) - 2\sin(kan) + \sin\left(ka(n-1)\right)\right],$$

откуда, после ряда тригонометрических преобразований, получим

$$\omega^2(k) = \frac{4F}{ma}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right). \qquad (2.128)$$

Остается использовать условие (2.126в). Подставляя в это условие выражение (2.127), имеем равенство $\sin\left(ka(N+1)\right) = 0$, из которого вытекает, что

$$k_j a = \frac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \qquad (2.129)$$

Укажем, что максимальное значение j равно N, т.е. числу степеней свободы в системе на рис. 2.25. Уравнения (2.128) и (2.129) определяют собственные частоты колебаний цепочки осцилляторов

$$\omega_j = 2\sqrt{\frac{F}{ma}}\sin\left(\frac{\pi j}{2(N+1)}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N. \qquad (2.130)$$

В соответствии с формулами (2.127) и (2.129) получим

$$Y_n^{(j)} = A_j \sin\left(\frac{\pi j}{N+1} n\right), \quad j=1,2,\ldots,N, \quad n = 0,1,2,\ldots,N,N+1, \qquad (2.131)$$

что задает распределение амплитуд колебаний осцилляторов вдоль цепочки для j-й моды.

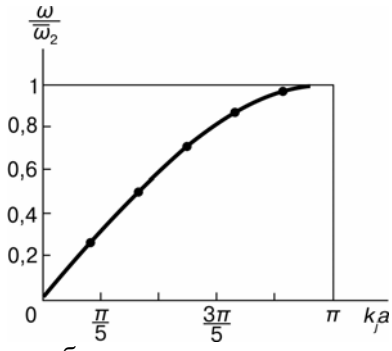


Рис. 2.27. Распределение собственных частот системы связанных идентичных осцилляторов (N = 5)

Распределение собственных частот удобно изобразить графически так, как показано на рис. 2.27. Здесь построен график функции, которая задается уравнением (2.128). Положение собственных частот на графике отмечено точками, координаты которых на оси абсцисс определяются формулой (2.129). На рис. 2.27 приведен случай, когда N = 5.

Все частоты размещены на интервале значений $\bar{\omega}_1 = 0$ и $\bar{\omega}_2 = 2\sqrt{F/(ma)}$, причем числа $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ в данном случае не являются собственными частотами.

Каждое нормальное колебание определяется собственной частотой и соответствующим распределением амплитуд колебаний шариков. Определим это распределение амплитуд в исследуемой системе, анализируя формулу (2.131). Если в системе возбуждено одно из нормальных колебаний, то его амплитуду A_j можно рассматривать как действительную величину, тогда из (2.131) имеем, что все $Y_n^{(j)}$ есть действительные величины. Колебания всех осцилляторов в цепочке происходят или в фазе, или в противофазе один по отношению к другому. На рис. 2.28 показано распределение амплитуд колебаний осцилляторов вдоль цепочки в модах системы, если цепочка состоит из пяти осцилляторов (N = 5).

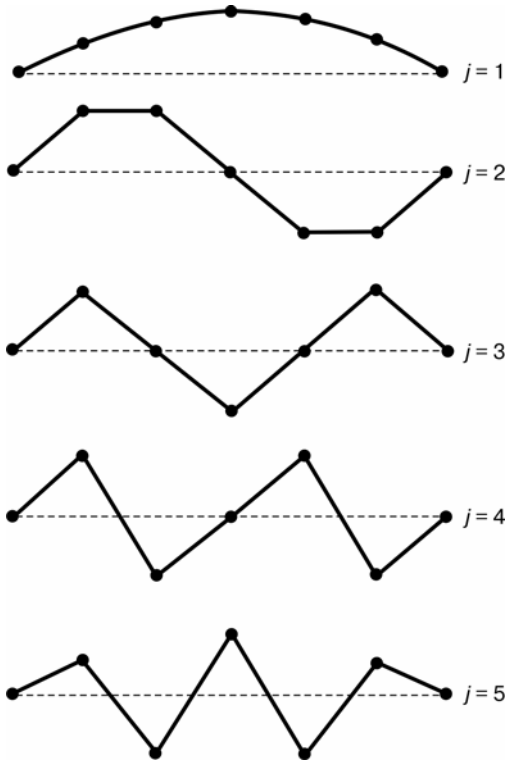


Рис. 2.28. Распределение амплитуд колебаний осцилляторов вдоль цепочки для мод цепочки с N = 5

Для первой моды, которая имеет наименьшую собственную частоту, все осцилляторы колеблются в фазе. Для второй моды осцилляторы разделяются на две группы, колебания которых происходят в противофазе. Для третьей моды таких групп три, и так далее. В последней моде (на рис. 2.28 — это $j = N = 5$) соседние шарики на струне колеблются в противофазе, поэтому при целых значениях $j > N$ в формулах (2.130) и (2.131) не возникает новых типов колебаний. Итак, в системе (рис. 2.25) существует N нормальных колебаний, что совпадает с числом степеней свободы. Понятно, что это утверждение имеет общий характер и не зависит от конкретного строения цепочки.

В конце раздела отметим, что на практике часто необходимо исследовать колебания в системах с большим числом степеней свободы. Аналитическое исследование такой ситуации очень сложное. Для построения решения этой важной и сложной задачи вычислительной алгебры в последние годы приложены значительных усилий. Были разработаны алгебраические алгоритмы и на их основе созданы эффективные программы для ЭВМ, которые позволяют практически исследовать системы с большим числом степеней свободы.

2.9. Задачи

2.1. Груз закрепили на нижнем конце вертикальной пружины и начали постепенно опускать его вниз, пока он не остановился. Пружина при этом растянулась на величину Δx. Найдите частоту собственных колебаний груза ω_0.

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{g/\Delta x}$.

2.2. Тело массой m, подвешенное на пружине, колеблется так, что наибольшее значение скорости равно υ_0, а наибольшее отклонение от положения равновесия равно x_0. Найдите жесткость пружины K.

Ответ: $K = m\upsilon_0^2 / x_0^2$.

2.3. Круглое деревянное бревно (радиусом 0,1м) с грузом на одном конце плавает в воде вертикально. Если на верхний конец бревна надавить и отпустить, то она будет осуществлять колебание с периодом 4 с. Определить массу бревна с грузом?

Ответ: $m \approx 124$ кг.

2.4. Пуля массой m, летящая со скоростью υ, попадает в тело массой M, какое связано со стеной пружиной жесткости K, и застревает в нем. Приняв момент попадания пули за начало отсчета времени, найдите зависимость скорости и координаты тела от времени.

Ответ: $\dot{x}(t) = \dfrac{m\upsilon}{M+m}\cos(\omega_0 t)$, $x(t) = \dfrac{m\upsilon}{\sqrt{K(M+m)}}\sin(\omega_0 t)$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{M+m}}$.

2.5. Масса, которая свободно колеблется на пружине, за промежуток времени 0,01 с сместилась с расстояния 0,5 см от положения равновесия на наибольшее расстояние, которое равняется 1 см. Какой период колебаний?

Ответ: T = 0,06 с.

2.6. В момент времени t_0 координата массы, которая выполняет гармонические колебания с частотой ω, равна x_0, а скорость — υ_0. Покажите, что зависимость координаты массы от времени можно записать в виде:

$$x(t) = x_0 \cos\left[\omega\left(t - t_0\right)\right] + \frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\left[\omega\left(t - t_0\right)\right].$$

2.7. Потенциальная энергия частицы массой m равна $U = -2b\left(\dfrac{a}{x} - \dfrac{a^2}{2x^2}\right)$, где a и b — положительные постоянные, x — координата частицы. Нарисуйте график этой зависимости; определите значение координаты, которая определяет положение равновесия; найдите частоту малых собственных колебаний частицы.

Ответ: a; $\sqrt{2b/(ma^2)}$.

2.8. Амплитуда затухающих колебаний маятника за две минуты уменьшилась в два раза. Определите коэффициент затухания.

Ответ: $5{,}78 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$.

2.9. Логарифмический декремент затухающих колебаний равен 0,01. Определите количество периодов колебаний маятника, после которых его амплитуда уменьшиться в три раза.

Ответ: 110.

2.10. Маятник длиной 5 м выполняет малые колебания так, что их амплитуда уменьшается в два раза за 100 периодов. Найдите добротность колебаний, логарифмический декремент и коэффициент затухания.

Ответ: 455; $6{,}9 \cdot 10^{-3}$; $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$.

2.11. Собственная частота колебаний системы равняется 500 Гц. Определите частоту затухающих колебаний этой системы, если резонансная частота по смещению равняется 499 Гц.

Ответ: 499,5 Гц.

2.12. Убедитесь в том, что энергия, которая тратится за один период колебаний из-за наличия силы трения $R\dot{x}$, равна $\pi R\omega x_{\text{макс}}^2$, где ω — угловая частота колебаний.

2.13. Найдите разность фаз между смещением и внешней силой на резонансе смещения, если собственная частота колебаний системы равна 50 с$^{-1}$, а коэффициент затухания — 5,2 с$^{-1}$.

Ответ: 84^0.

2.14. Колебательная система состоит из массы 0,2 кг и пружины с коэффициентом жесткости 19,6 Н/м. На массу действует внешняя сила с угловой частотой ω = 14 с$^{-1}$ и сила трения $F_{\text{т}} = -49\dot{x}\,\text{Н}$. Определите сдвиг фазы между вынужденными колебаниями и внешней силой.

Ответ: $91^\circ 38'$.

2.15. Масса m закреплена на струне на расстоянии a от ее конца; длина струны l, а сила натяжения F. Масса выполняет малые поперечные колебания. Определите частоту собственных колебаний массы (массой струны пренебрегать). Для какого расстояния a эта частота будет минимальной.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{Fl}{m(l-a)a}}$; $\dfrac{l}{2}$.

2.16. Два тела с одинаковой массой (рис. 2.29) колеблются в вертикальном направлении. Покажите, что частоты нормальных колебаний определяются так: $\omega_{\pm}^2 = \left(3 \pm \sqrt{5}\right)K/(2m)$ и что отношение амплитуды смещения верхнего тела к амплитуде смещения нижнего тела равно в случае медленных колебаний: $\left(\sqrt{5}-1\right)/2$; в случае быстрых колебаний $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$.

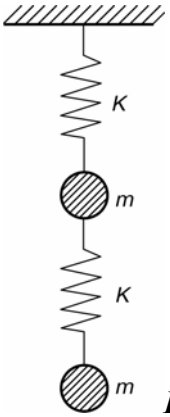


Рис. 2.29. К задаче 2.16

2.17. Сила $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ действует на тело массой M (рис. 2.30), которое присоединено к телу массой m пружиной жесткости K. Покажите, что тело массой M недвижно, если $\omega^2 = K/m$; определите амплитуду колебаний тела массой m.

Ответ: F_0/K.

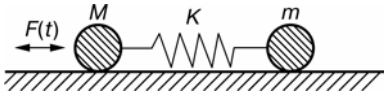


Рис. 2.30. К задаче 2.17

2.18. Исследуйте систему (рис. 2.31, *а*): на струне (массой струны пренебречь) закреплены два тела массой m каждое. Натяжение струны F считать постоянным. Тела осуществляют малые колебания в вертикальной плоскости. Определите нормальные частоты системы. Начертите графики смещения (с течением времени) каждой из двух масс, если начальные условия $y_1(0) = a$, $y_2(0) = \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$ (рис. 2.31, *б*).

Ответ: $\omega_- = \sqrt{3}F/(ml)$; $\omega_+ = 3F/(ml)$.

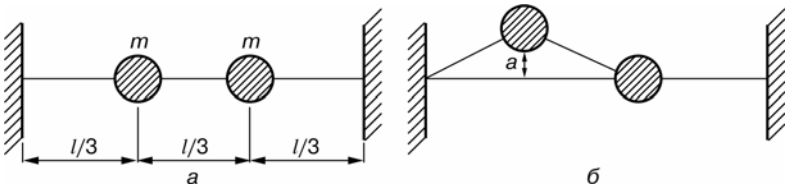


Рис. 2.31. К задаче 2.18

2.19. Для системы, изображенной на рис. 2.31, *а*, построить графики смещения для каждой из двух масс, если $y_1(0) = a$, $y_2(0) = 0{,}5a$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$.

2.20. Три шарика размещены вдоль прямой линии и соединены между собой пружинами с коэффициентом жесткости K, причем крайние шарики имеют массу m, а средний — $2m$. Найдите собственные моды колебаний такой системы.

Ответ: $\omega_1^2 = 0, [1,1,1]$; $\omega_2^2 = \dfrac{k}{m}, [1,0,-1]$; $\omega_3^2 = \dfrac{2k}{m}, [1,-1,-1]$.

РАЗДЕЛ 3

КОЛЕБАНИЕ И ВОЛНЫ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Смотрю на волны; их неверных линий
Не угадав, смущен их вечной меной...
Приходят волны к нам из дали синей,
Взлетают в брызгах, умирают пеной.

В.Я. Брюсов[*]

3.1. Переход к сплошной одномерной среде в цепочке связанных осцилляторов

Во втором разделе закономерности колебательных движений рассматривались в рамках довольно грубых модельных представлений. Элементами колебательных систем были такие объекты, как абсолютно твердое тело с определенной массой, и идеальная пружина, масса которой не учитывалась. Можно констатировать, что такие модели являются значительным упрощением физических представлений о строении материи, и искать в этом основу для построения новых, более сложных моделей. Тем не менее, такой стимул, хотя и обоснованный, но не единственный. Более существенным стимулом к развитию теории колебаний было то, что результаты, полученные в рамках простейших моделей, часто не отвечали результатам опыта.

Именно в связи с требованием согласования результатов наблюдения и расчета формировались глубокие модельные представления о колебательных системах с *распределенными параметрами* или о *сплошной среде*.

Представлению об атомном строении вещества в теории колебаний отвечают модельные представления о системах с большим, но конечным числом степеней свободы. В рамках таких представлений, возможно предусмотреть поведение системы в очень широком диапазоне изменения параметров внешних воздействий. Однако трудности анализа систем, которые содержат в себе 10^{25} атомов, слишком вели-

[*] Брюсов Валерий Яковлевич (1873—1924) — российский писатель.

ки. Упрощение этой сложной задачи возможно за счет введения представления о сплошной среде, в рамках которой, абстрагируясь от атомного строения вещества, будем говорить, что плотность и упругость в среде есть непрерывные функции пространственных координат. Характеризуя такой подход, который реализовал Дебай* в 1912 г. при анализе теплоемкости кристаллов, Мандельштам отметил, что "он сделал, очевидно, неправильную, но гениальную вещь" [32, с. 294].

Проиллюстрируем переход от дискретной системы к модели сплошной среды на примере цепочки идентичных осцилляторов (рис. 2.25). Предположим, что пространственный период волнового движения в дискретной цепочке намного больший, чем расстояние между шариками. В этом случае, возможно осуществить переход от дискретной пространственной координаты к непрерывной, выполнив при этом такие замены:

$$y_n(t) \to y(x,t),$$

$$y_{n+1}(t) \to y((x+a),t) = y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}a^2 + \ldots,$$

$$y_{n-1}(t) \to y((x-a),t) = y(x,t) - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}a^2 - \ldots .$$

Используя эти замены в уравнении (2.124) и отбрасывая малые величины, получаем уравнение в частных производных

$$\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \upsilon^2 = \frac{Fa}{m}. \tag{3.1}$$

Ниже будет показано, что любая одномерная волна может быть описана с помощью решения уравнения (3.1), где $\upsilon = \text{const}$ и имеет размерность скорости. Интересным есть комментарий Мандельштама в связи с таким переходом от дискретной системы к непрерывной [32, с. 339]: в исходном уравнении (2.124) функция y "...определена лишь для дискретных точек, а следовательно, у нее нет производных по x! Дифференцирование по x — очень сомнительное средство, хотя и дает верный результат... Тем не менее в физике везде приходится делать такие вещи".

Следует понимать, что упрощения не бывают "без проблем". Вводя упрощенные представления о сплошной среде, мы, конечно, ограничиваем область применения таких модельных изображений. Они остаются справедливыми лишь для тех движений реальных тел, где

---

* Дебай (Debye) Петер Йозеф Вильгельм (1884—1966) — голландский физик, лауреат Нобелевской премии (1936).

можно выделить элементы с довольно большим числом атомов, которые двигаются практически одинаково. (К таким элементам можно применять законы механики.) Внешние влияния при этом не должны быть очень высокочастотными, и на их пространственную изменяемость тоже накладываются определенные ограничения.

3.2. Модель струны. Уравнение движения элемента струны

В рамках представлений о сплошной среде можно построить большое количество моделей колебательных систем разной степени сложности. Начнем с простейшей одномерной модели — модели струны. Суть модельных представлений легко понять при сравнении реальной и идеальной струн. Реальная струна всегда имеет какую-то конечную толщину. Если рассматривать относительно низкочастотные движения струны, то можно сказать, что все точки ее поперечного сечения двигаются одинаково. Поэтому модельная струна считается бесконечно тонкой и имеет такую характеристику, как линейная плотность. Если известна плотность ρ_0 материала струны и площадь поперечного перереза S, то линейная плотность $\rho = \rho_0 S$, кг/м.

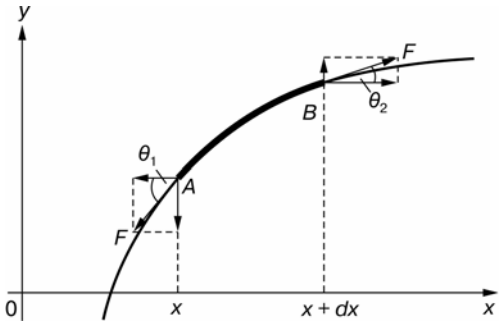


Рис. 3.1. Элемент идеально гибкой струны

Здесь можно сказать, что, формируя модельные представления о струне, мы используем, в сущности, те же абстракции, что и при введении понятия материальной точки, но не по трем, а лишь по двум пространственным измерениям.

Реальная струна всегда имеет определенную изгибную жесткость, т.е. некоторую способность оказывать сопротивление изгибу. Однако способность реальной струны восстанавливать форму обеспечивается не изгибной жесткостью, а натяжением F.

Итак, модельная струна — это идеально гибкая бесконечно тонкая нить, которая характеризуется двумя физическими параметрами: линейной плотностью ρ и натяжением F. Такая модельная струна, как

и реальная струна, при отклонении от положения равновесия стремится вернуться к нему. Наличие инерционности и упругости и обусловливают возникновение колебаний.

Для описания колебаний струны введем декартову систему координат xOy (рис. 3.1). Пусть в состоянии покоя струна размещена вдоль оси Ox. На рис. 3.1 изображен элемент струны в состоянии отклонения от положения равновесия. Для характеристики отклонения используем функцию $y(x, t)$, которая определяет смещение точек струны в направлении, перпендикулярном равновесному состоянию, т.е. вдоль оси Oy. При этом предполагаем, что все точки струны после отклонения находятся в одной плоскости. Физически ясно, что после отклонения элемента струны из равновесного состояния в нем изменяются линейная плотность и натяжение. Тем не менее, будем рассматривать лишь такие движения струны, при которых эти изменения незначительны, и ими можно пренебречь.

Получим уравнение движения выделенного элемента струны. При этом для общности будем предполагать, что, кроме сил, связанных с натяжением F, на выделенный элемент могут действовать силы сопротивления и некоторые внешние вынуждающие силы. Для двух последних сил принимаем уже известные модели — силы сопротивления задаются своей плотностью, т.е. силой на единицу длины $-R\partial y/\partial t$, а плотность вынуждающих сил задается некоторой функцией $g(x,t)$, которая не зависит от характера движения струны. Каждая из этих сил направлена вдоль оси Oy. Считается, что силы сопротивления пропорциональны скорости, а коэффициент пропорциональности R – постоянная величина.

Теперь можно записать уравнение движения элемента струны. Это, в сущности, соотношение второго закона Ньютона, взятого в проекции на ось Oy (см. рис. 3.1):

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -R\frac{\partial y}{\partial t}dx + g(x,t)dx + F\sin\theta_2 - F\sin\theta_1. \qquad (3.2)$$

Для получения уравнения, которое имеет лишь одну неизвестную функцию $y(x,t)$, необходимо выразить через нее синусы углов θ_1 и θ_2. С учетом соотношения $\sin\theta = \mathrm{tg}\theta \Big/ \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}$ в соответствии с геометрическим содержанием производной находим:

$$\sin\theta_1 = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)}{\sqrt{1+\left[\dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right]^2}}, \quad \sin\theta_2 = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t)}{\sqrt{1+\left[\dfrac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t)\right]^2}}. \qquad (3.3)$$

Эти довольно сложные выражения пригодны для любых отклонений струны от положения равновесия. В дальнейшем ограничимся малыми отклонениями, при которых профиль струны есть достаточно гладкий, т.е. углы $\theta(x)$, образованные между направлением касательной в любой точке профиля струны и осью Ox, настолько малы, что можно пренебречь квадратами производных от y по сравнению с единицей. Тогда выражение (3.2) приобретает вид:

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -R\frac{\partial y}{\partial t}dx + g(x,t)dx + F\left[\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right]. \qquad (3.4)$$

Используя правило разложения в ряд Тейлора с точностью до величин второго порядка малости по dx, записываем

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)dx + \ldots \qquad (3.5)$$

С учетом (3.5) уравнение (3.4) приобретает вид

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - R\frac{\partial y}{\partial x} + g(x,t). \qquad (3.6)$$

Это и есть искомое уравнение неизвестной функции $y(x, t)$, которое описывает движение струны. В отличие от рассмотренных раньше, это уравнение является уравнением в частных производных. Именно в этом отразился тот факт, что рассматривается движение системы с распределенными параметрами.

Вместе с поперечным смещением частичек струны в ней возможно и продольное смещение частичек. Действительно, как видно из рис. 3.1, проекции силы натяжения в точках A и B на ось Ox (соответственно $F\cos\theta_1$ и $F\cos\theta_2$) не равны между собой. Это должны привести к деформации участка AB вдоль оси Ox, что было бы причиной возникновения так называемых продольных волн. Но мы рассматриваем малые колебания, для которых характерна малость углов θ_1 и θ_2. Поскольку $\cos\theta = [1+\mathrm{tg}^2\alpha]^{-1/2} = [1+(\partial y/\partial x)^2]^{-1/2}$, то с учетом неравенства $(\partial y/\partial x)^2 << 1$, можно записать $\cos\theta_1 \approx \cos\theta_2 \approx 1$. Это позволяет пренебречь деформацией длины участка AB в процессе колебаний.

В случае отсутствия внешних сил и демпфирования уравнение движения струны (3.6) будет иметь вид $\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, или

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad c^2=\frac{F}{\rho}. \tag{3.7}$$

Как видим, уравнение (3.7) совпадает с уравнением (3.1), которое было получено вследствие перехода от дискретной системы к непрерывной. Уравнение (3.7) — это частный случай хорошо изученного в математической физике *волнового уравнения.* Уравнение такого вида и его обобщение на двумерные и трехмерные случаи в книге будут встречаться часто. Уравнение (3.7) можно интерпретировать так: ускорение струны $\partial^2 y/\partial t^2$, обусловленное натяжением в каждой точке, тем больше, чем больше кривизна струны $\partial^2 y/\partial x^2$. При принятых условиях постоянная величина c в этом уравнении имеет размерность скорости, c, м/с. Ее значение определяется только внутренними свойствами системы (F и ρ), а физическое содержание будет определено ниже.

3.3. Общее решение уравнения движения струны. Движение при заданных начальных условиях

3.3.1. Решение Д'Аламбера для бесконечной струны

Уравнение движения струны (3.7) было впервые получено в 1747 г. Д'аламбером*. Он нашел его общее решение, которое раскрывает главные черты поведения такой колебательной системы, как струна.

Для построения решения (3.7) введем новые пространственно-временные координаты

$$\xi = x + ct,\qquad \eta = x - ct. \tag{3.8}$$

Ясно, что такие соотношения устанавливают взаимно однозначное соответствие между парами чисел (x,t) и (ξ,η). Используя правила вычисления производных в новых координатах, получаем $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}$. Тогда исходное волновое уравнение (3.7) приобретает особенно простой вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}=0. \tag{3.9}$$

Решение уравнения (3.9), очевидно, будет иметь вид

---

* Д'Аламбер (D'Alembert) Жан Лерон (1717—1783) — французский математик и философ.

$$y(\xi,\eta) = \psi(\xi) + \varphi(\eta), \tag{3.10}$$

где ψ и φ — произвольные, непрерывные, двукратно дифференцируемые функции своих аргументов. Из этого математического факта можем сделать важный физический вывод. Если струна выведена из положения равновесия, а потом оставлена в свободном движении, то в любой момент времени положения ее точек будут определяться суммой двух функций со специальными аргументами:

$$y(x,t) = \psi(x+ct) + \varphi(x-ct). \tag{3.11}$$

Формулу (3.11) называют *решением Д'Аламбера.* Нетрудно убедиться, что выражение

$$y(x,t) = \psi\left[a(x+ct)\right] + \varphi\left[a(x-ct)\right], \tag{3.12}$$

где a — постоянная величина, также является решением (3.7).

Выясним физическое содержание функций в (3.11). Рассмотрим, например, функцию $\varphi(x-ct)$ в некоторой фиксированной точке $x = x_1$ в момент времени $t = t_1$ (рис. 3.2). Затем в момент времени $t_2 = t_1 + \Delta t$ будем проводить наблюдение в точке $x_2 = x_1 + \Delta x$. Очевидно, что выполняется равенство $x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2$, если $t_2 = t_1 + \Delta x/c$. Это означает, что возмущенное состояние в струне, которое наблюдается в точке x_1 в момент t_1, будет оставаться таким же самым в точке $x_2 = x_1 + \Delta x$ через интервал времени $\Delta t = \Delta x/c$ (рис. 3.2).

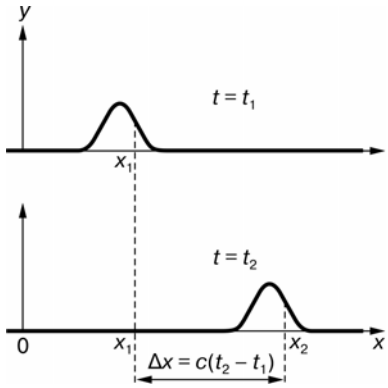


Рис. 3.2. Графики перемещения возмущения вдоль струны

Итак, функция $\varphi(x-ct)$ описывает распространение возмущенного состояния по струне в направлении увеличения x со скоростью c. Аналогично, функция $\varphi(x+ct)$ описывает перенесение состояния в направлении уменьшения x с такой же скоростью c. Физическое явление, которое описывается такой математической зависимостью,

называется *бегущей волной*. Еще раз подчеркнем, что функции φ и ψ есть произвольные, т.е. вдоль струны распространяется возмущение любого профиля, сохраняя этот профиль на протяжении всего времени распространения. Аргументы функций φ и ψ $(x-ct)$ и $(x+ct)$, которые однозначно определяют отклонение точек струны от положения равновесия, называют *фазой волны*. Поскольку профиль волны на струне не изменяется в процессе движения волны, то любая точка профиля волны однозначно определяется значением фазы, которая должна остаться неизменной $\theta(x,t)=x-ct=\text{const}$, или $\frac{d\theta}{dt}=\frac{dx}{dt}-c=0$. Отсюда скорость любой точки профиля волны на струне, т.е. скорость распространения фазы возмущения, а следовательно, и самой волны, равна постоянной c:

$$\upsilon_{\text{ф}} \equiv \frac{dx}{dt} = c. \tag{3.13}$$

Скорость $\upsilon_{\text{ф}}$ называют *фазовой скоростью* волны на струне. Таким образом, соотношение (3.11) показывает, что в определенный момент времени возмущение в струне, которое свободно движется, есть сумма (физики говорят суперпозиция, интерференция) двух бегущих волн.

Как уже говорилось, постоянная c зависит лишь от внутренних параметров системы F и ρ. Кроме скорости распространения возмущений, важной характеристикой процесса является *скорость частичек струны*. Ясно, что скорость частичек в каждый момент времени в данной точке определяется соотношением

$$\upsilon(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}. \tag{3.14}$$

Скорость движения частичек струны направлена перпендикулярно к равновесному положению. Волновое возмущение распространяется вдоль струны. Такое соотношение между направлением распространения возмущений и скоростью (направлением) движения частичек в струне обуславливает то, что волны, которые распространяются в ней, называются *поперечными*.

Далее следует определить вид функций φ и ψ в (3.11) по заданному начальному состоянию струны. Это состояние определяется значением в начальный момент времени $t=0$ начального отклонения и начальных скоростей точек струны:

$$\begin{aligned} &y(x,0) = Q_1(x), \\ &\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = Q_2(x). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Подставляя решение (3.11) в выражения (3.15), получаем уравнения

$$\varphi(x)+\psi(x)=Q_1(x), \quad -\varphi'(x)\cdot c+\psi'(x)\cdot c=Q_2(x). \tag{3.16}$$

Во втором уравнении (3.16) использована формула

$$\frac{\partial\varphi(x-ct)}{\partial t}=\varphi'(x-ct)\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}=\varphi'(x-ct)(-c), \tag{3.17}$$

где $\varphi'(x-ct)=\partial\varphi(x-ct)/\partial(x-ct)$. Интегрируя второе уравнение (3.16), получаем

$$-\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}Q_2(\xi)d\xi+\frac{\text{const}}{c}, \tag{3.18}$$

где x_0 и const — постоянные. Сложим (3.18) и первое уравнение (3.16):

$$\psi(x)=\frac{1}{2}Q_1(x)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}Q_2(\xi)d\xi+\frac{\text{const}}{2c}, \tag{3.19}$$

и соответственно вычтем:

$$\varphi(x)=\frac{Q_1(x)}{2}-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}Q_2(\xi)d\xi-\frac{\text{const}}{2c}=\frac{Q_1(x)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x}^{x_0}Q_2(\xi)d\xi-\frac{\text{const}}{2c}. \tag{3.20}$$

Подставляя (3.19) и (3.20) в решение (3.11), получаем формулу Д'аламбера

$$y(x,t)=\frac{Q_1(x-ct)+Q_1(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}Q_2(\xi)d\xi, \tag{3.21}$$

которая определяет движение струны согласно начальным условиям (3.15). Как видно из (3.19) и (3.20), волны $\varphi(x-ct)$ и $\varphi(x+ct)$ неоднозначно определены из начальных условий (3.15), с точностью до постоянных, а решение (3.21) однозначно.

Итак, с получением соотношений (3.21) полностью решена задача определения состояния бесконечной струны, энергия к которой была подведена некоторой системой начальных условий. Форма волн, которые возникают в струне, довольно просто изображается по заданным пространственным характеристикам начального возмущения.

Для предоставления большей наглядности формуле (3.21) рассмотрим конкретные примеры, которые отвечают двум характерным случаям возмущения. Пусть задано начальное отклонение $Q_1(x)$ на струне, как на рис. 3.3, и начальная скорость $Q_2(x) = 0$. В случае функции $Q_1(x)$, а также в дальнейших примерах начальных условий на струне, положим, что график на рис. 3.3 в угловых точках немного скруглен,

что свидетельствует о принадлежности функции $Q_1(x)$ к классу двукратно дифференцируемых функций.

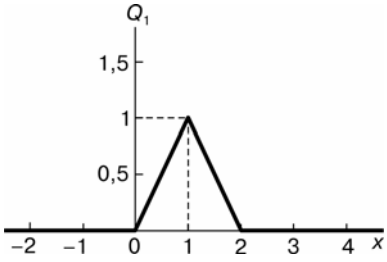


Рис. 3.3. Начальная форма отклонения на струне

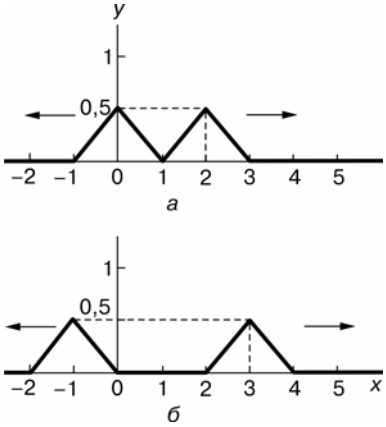


Рис. 3.4. Графики перемещения возмущения на струне в разные моменты времени: *а* — $t = 1$, *б* — $t = 2$

Если начертить форму струны при $t > 0$, то согласно формуле Д'-аламбера (3.21) имеем $y(x,t) = \frac{1}{2}Q_1(x - ct) + \frac{1}{2}Q_1(x + ct)$. Итак, один пик начального возмущения (рис. 3.3) распался на два пика высотой в два раза меньше начального, которые перемещаются вправо и влево со скоростью c (рис. 3.4, здесь $c = 1$). Попробуйте начертить форму струны при $t = 1/4$, $t = 1/2$, $t = 3$.

Далее рассмотрим, как развивается волновое движение в струне, вызванное ударом или, правильнее, равномерным распределением скорости на некотором конечном участке струны (рис. 3.5); при этом начальное отклонение $Q_1(x)$ будет равно нулю. Согласно формуле Д'-аламбера (3.21) решение $y(x,t) = \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} Q_2(\xi)d\xi = \Phi(x + ct) - \Phi(x - ct)$, где

$\Phi(x) = \frac{1}{2c}\int_0^x Q_2(\xi)d\xi$. В соответствии с рис. 3.5 графическое изображение функции $\Phi(x)$ приведено на рис. 3.6.

Начертим форму струны при $t > 0$, пусть $c = 1$. Полученное решение означает, что график функции $\Phi(x)$ нужно сместить вправо и влево, а результаты вычесть (рис. 3.7). Далее эта трапеция будет перемещаться вправо и влево со скоростью $c = 1$. Начертите форму струны при $t = 1/4$, $t = 1/2$, $t = 3$.

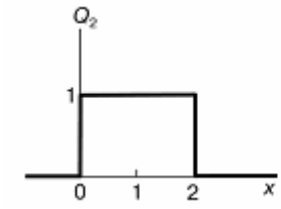


Рис. 3.5. Начальная форма распределения скорости на струне

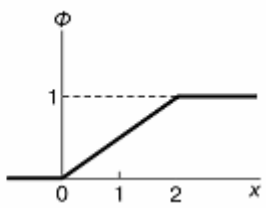


Рис. 3.6. График функции $\Phi(x)$

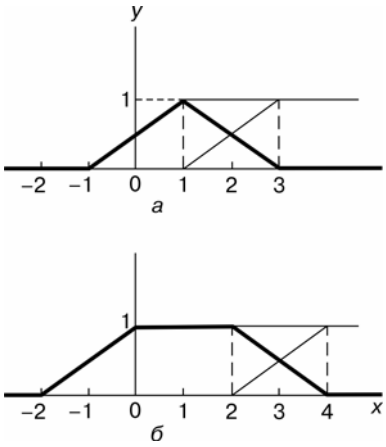


Рис. 3.7. Графики перемещения возмущения на струне в разные моменты времени: *а* — $t = 1$, *б* — $t = 2$

Следует отметить существенную разницу в распространении возмущения вдоль струны в случае, когда задано начальное отклонение (рис. 3.4) и, соответственно, начальная скорость (рис. 3.7). Пусть имеем некоторую точку наблюдения x^* на струне, которая находится вне зоны начального возмущения (рис. 3.3 и 3.5), скажем, в области $x > 0$. Согласно рис. 3.4 точка x^* будет неподвижной пока к ней не дойдет передний фронт возмущения, которое перемещается в положительном направлении оси Ox со скоростью c. *Передний фронт волны* на струне в заданный момент времени t есть точка, которая отделяет

точки, которые еще не начали колебаться, от точек, которые уже колеблются. *Задний фронт волны* в заданный момент t есть точка, которая отделяет точки, которые еще колеблются, от точек, в которых колебания прекратились. Когда через точку x^* на рис. 3.4 пройдет задний фронт возмущения, то она станет неподвижной. Таким образом, начальное возмущение (рис. 3.3), которое локализовано в пространстве (на струне), обусловит в каждой точке x^* струны пространственное действие, локализованное во времени. При этом происходит распространение волны с четко определенными передним и задним фронтами.

Другая ситуация будет наблюдаться, когда задана начальная скорость (рис. 3.7). В этом случае имеем два передних фронта возмущения, которые перемещаются вдоль струны со скоростью c вправо и влево, соответственно. За передним фронтом наблюдается возмущение во все последующие моменты времени (в данном случае оно постоянное, рис. 3.7), а задний фронт отсутствует. Итак, начальное возмущение, которое локализовано в пространстве (рис. 3.5), не локализовано во времени для любой точки x^* струны.

При качественном анализе кинематической картины поведения струны на рис. 3.2-3.7 нужно обратить внимание еще на такое обстоятельство. В обоих случаях возмущения волн отсутствует переход точек струны через положение равновесия. В случае статического начального отклонения во время движения точки струны доходят до положения равновесия и в дальнейшем остаются в состоянии покоя. При задании начальной скорости во время движения точки струны достигают определенного максимального отклонения от положения равновесия и дальше остаются в состоянии покоя. Такое поведение точек струны находится в противоречии с повседневным опытом и жизненными наблюдениями. Это противоречие легко устранить, учитывая, что на практике мы имеем дело всегда с конечной струной, закрепленной на концах. Поведение волны в струне при отражении от закрепленного сечения, т.е. сечения, в котором всегда $y(x,t)=0$, рассмотрим на примере полубесконечной струны.

3.3.2. Волновое движение в полубесконечной струне

Итак, постановка задачи такова: построить решение волнового уравнения (3.7) при начальных условиях (3.15), заданных на пространственном интервале $(0,\infty)$, и с учетом условия в точке закрепления струны $x = 0$. Условие в точке $x = 0$ называют *граничным* и оно заключается в равенстве нулю смещения частичек струны при $x = 0$ в любой момент времени, т.е.

$$y(0,t)=0. \qquad (3.22)$$

Как применить решение Д'Аламбера (3.11) для бесконечной струны в случае полубесконечной струны с граничным условием (3.22)? На помощь приходят такие соображения: пусть струна будет бесконечной, а точка $x = 0$ будет обычной точкой на струне. Обозначим $\tilde{y}(x,t)$ — решение для бесконечной струны. Тогда, чтобы волновые процессы в бесконечной струне в интервале $(0,\infty)$ отвечали волновым процессам в реальной полубесконечной струне с граничным условием (3.22), нужно определить начальные условия на бесконечной струне таким образом, чтобы равенство $\tilde{y}(0,t)=0$ выполнялось для любого момента времени. Выполнение этого равенства для бесконечной струны отвечает условию (3.22) для полубесконечной струны. При таких условиях искомое решение $y(x,t)$ для полубесконечной струны определяется так: $y(x,t)\equiv\tilde{y}\left(x\geq 0,t\right)$.

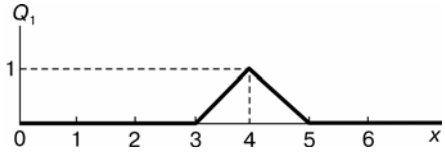


Рис. 3.8. Начальная форма отклонения на полубесконечной струне

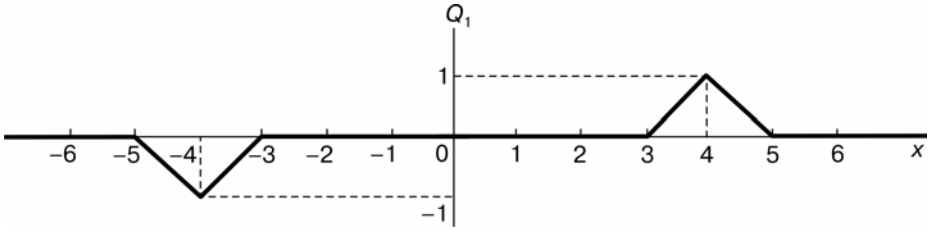


Рис. 3.9. Начальная форма отклонения на бесконечной струне

Итак, определение начальных условий для бесконечной струны связано с продолжением функций $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ на интервале $(-\infty,0)$. Рассмотрим задачу, когда задано начальное отклонение $Q_1(x)$ (рис. 3.8), а начальная скорость $Q_2(x) = 0$. Соответствующее решение $\tilde{y}(x,t)$ для бесконечной струны определим при нечетном продолжении функции $Q_1(x)$ (рис. 3.9):

$$\tilde{y}(x,0)=\tilde{Q}_1(x)=\begin{cases} Q_1(x), & x\geq 0, \\ -Q_1(-x), & x<0, \end{cases} \qquad \frac{\partial\tilde{y}(x,0)}{\partial t}=\tilde{Q}_2(x)\equiv 0.$$

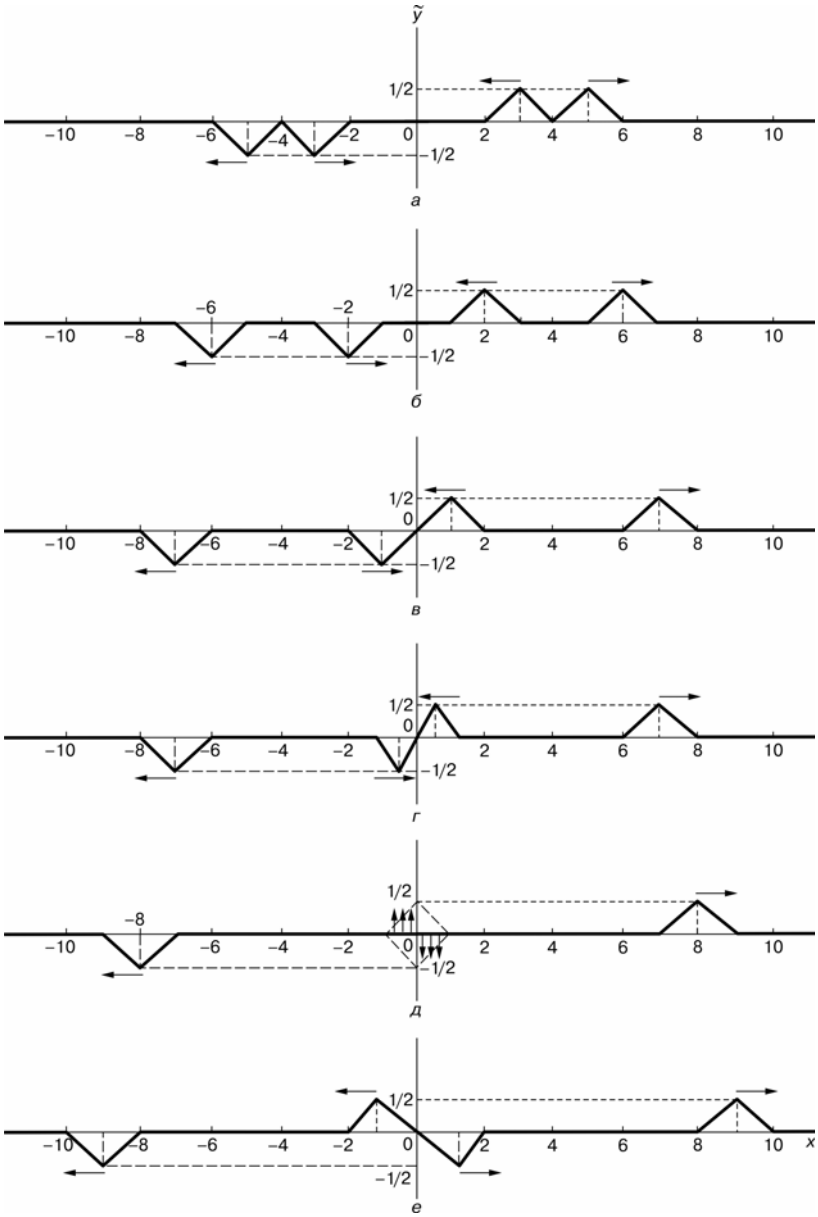


Рис. 3.10. Графики перемещения возмущения на струне в разные моменты времени:
а — $t = 1$, *б* — $t = 2$, *в* — $t = 3$, *г* — $t = 3{,}5$, *д* — $t = 4$, *е* — $t = 5$

Точка $x = 0$ на бесконечной струне есть обычная точка струны, но для которой, согласно (3.22), выполняется условие $y(0,t) = \tilde{y}(0,t) = 0$

для $t \geq 0$. Решение Д'Аламбера (3.21) описывает движение в бесконечной струне $\tilde{y}(x,t) = \dfrac{\tilde{Q}_1(x-ct)}{2} + \dfrac{\tilde{Q}_1(x+ct)}{2}$.

На рис. 3.10 при скорости $c = 1$ показана форма струны в разные моменты времени $t > 0$; стрелки указывают направление движения возмущений. Начало процесса полностью отвечает случаю бесконечной струны: начальное отклонение разделяется на две бегущие волны, которые распространяются в разные стороны. Итак, образуется четыре волны, две из которых движутся к точке $x = 0$. При их прохождении через точку $x = 0$ происходит процесс наложения волн. На рис.3.10, *в* ($t = 3$) показано, что возмущения на физической ($x \geq 0$) и нефизической ($x < 0$) частях струны подошли к точке $x = 0$. Как видим, и далее точка $x = 0$ остается неподвижной. Так, на рис. 3.10, *д* отклонение на отрезке $x = [-1,1]$ равно нулю, стрелками показаны скорости точек струны. Смещение точки $x = 0$ всегда равно нулю, поскольку две волны полностью гасят друг друга. Потом, после того, как волны пройдут одна сквозь другую, волна, которая раньше была на нефизической части струны, перейдет на физическую часть струны, и наоборот (рис. 3.10, *е)*. Начертите форму струны при $t = 3{,}25$.

Возвращаясь к полубесконечной струне, можно отметить, что волна, которая падает на препятствие справа, отражается от препятствия в точке $x = 0$ и перемещается в противоположном направлении, сохраняя при этом свою первоначальную форму, но изменяя знак. Другими словами, фаза волны изменила свой знак. Таким образом, наличие граничного условия при $x = 0$ приводит к возникновению отраженной волны. Понятно, что вид отраженной волны будет определяться граничными условиями в точке $x = 0$.

Аналогично рассмотрим случай, когда начальное отклонение $Q_1(x) = 0$, а задана начальная скорость $Q_2(x)$ (рис. 3.11). Вновь определим начальные условия для бесконечной струны, используя нечетное продолжение функции $Q_2(x)$ для $x < 0$ (рис. 3.12):

$$\tilde{y}(x,t) = \tilde{Q}_1(x) \equiv 0, \qquad \tilde{y}(x,0) = \tilde{Q}_2(x) = \begin{cases} Q_2(x), & x \geq 0, \\ -Q_2(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Решение для бесконечной струны, согласно формуле (3.21), имеет вид $\tilde{y}(x,t) = \tilde{\Phi}(x+ct) - \tilde{\Phi}(x-ct)$, где $\tilde{\Phi}(x) = \dfrac{1}{2c}\int\limits_0^x Q_2(\xi)d\xi$, график функции $\tilde{\Phi}(x)$ представлен на рис. 3.13. На рис. 3.14 показана форма струны при $t > 0$ и $c = 1$. Можно видеть, что форма струны в некоторый момент времени есть результат суперпозиции двух волн $\tilde{\Phi}(x+ct)$ и $-\tilde{\Phi}(x-ct)$. При $t > 6$ на физической части струны ($x \geq 0$) трапеция

распространяется вправо, а на нефизической ($x < 0$) — влево. Граничное условие (3.22) выполняется для любого момента времени $t \geq 0$. Нарисуйте форму струны при $t = 3{,}5$; $t = 4{,}5$.

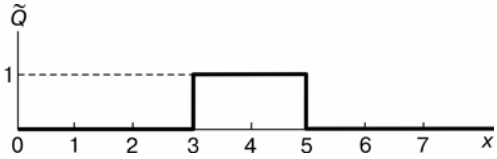


Рис. 3.11. Начальное распределение скорости в полубесконечной струне

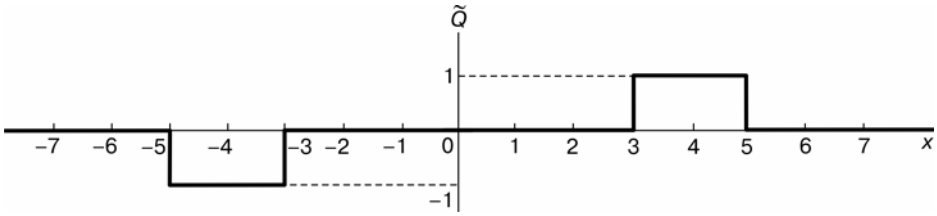


Рис. 3.12. Начальное распределение скорости в бесконечной струне

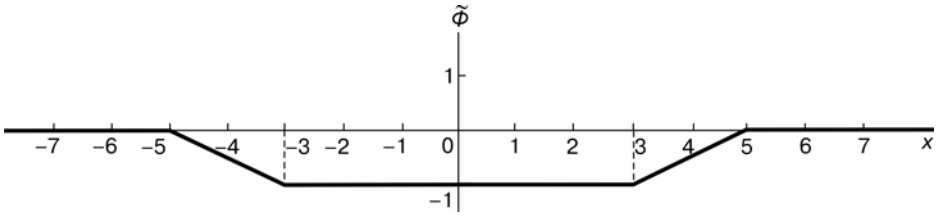


Рис. 3.13. График функции $\tilde{\Phi}(x)$

3.3.3. Волновое сопротивление струны

Проведенный анализ показывает, что малые возмущения на струне могут распространяться в виде волн, фазовая скорость которых не зависит от начальных условий. Для характеристики систем, в которых могут распространяться волны, часто используют величину, в некотором смысле аналогичную введенному ранее импедансу колебательной системы. В каждом сечении система с распределенными параметрами характеризуется отношением внутренней силы к скорости движения точки приложения силы. В отличие от рассмотренного ранее импеданса колебательной системы, который характеризует реакцию системы на внешнюю силу, здесь речь идет о свободных волновых движениях. Такая характеристика сплошной среды называется ее *волновым сопротивлением*. Определим его для струны.

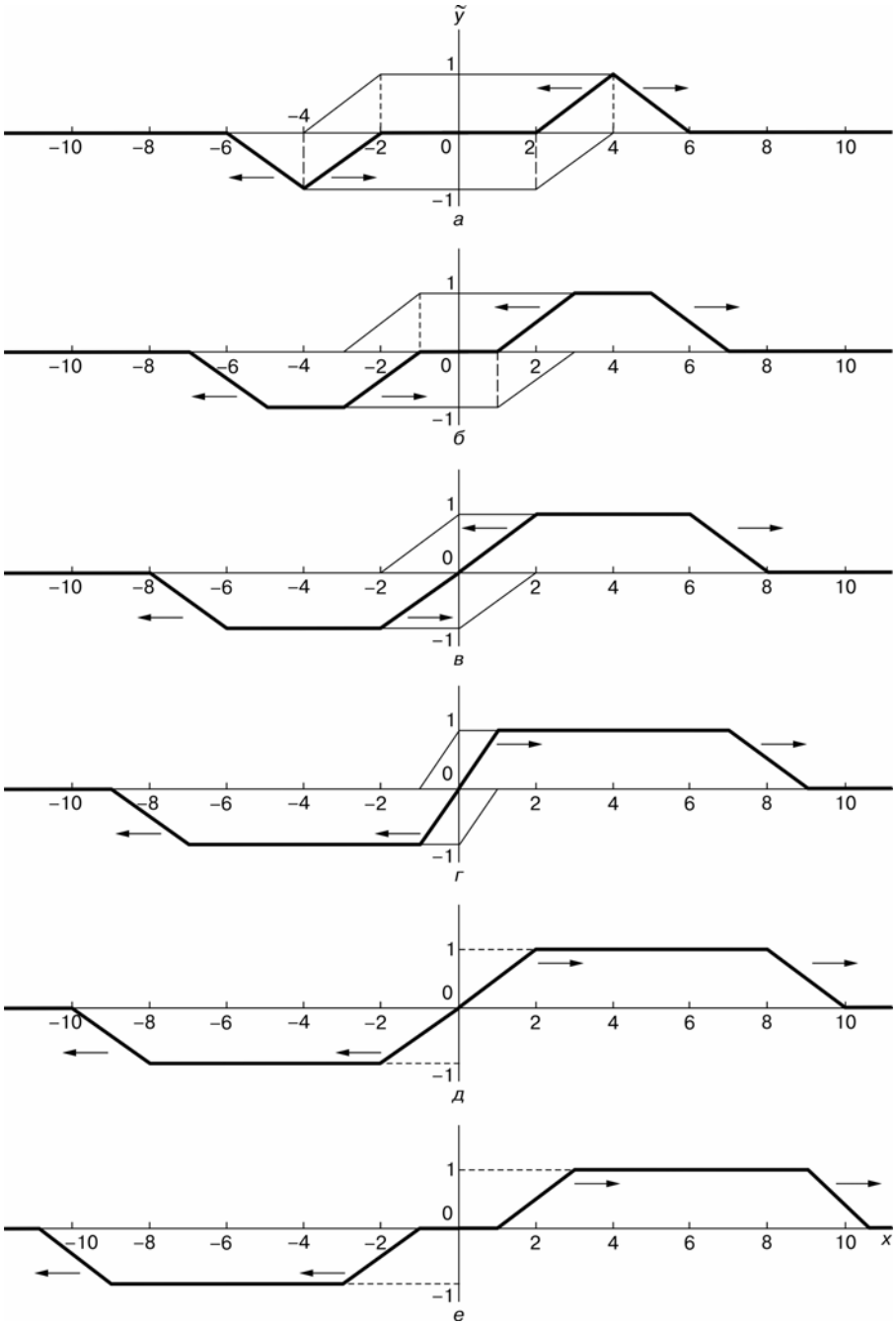


Рис. 3.14. Графики перемещения возмущения на струне в разные моменты времени:

а — $t = 1$, *б* — $t = 2$, *в* — $t = 3$, *г* — $t = 4$, *д* — $t = 5$, *е* — $t = 6$

Рассматривая движение струны при распространении вдоль нее волны, считаем в первом приближении, что точки струны двигаются лишь перпендикулярно к равновесному положению струны. Итак, скорость точек струны в этом направлении $\upsilon = \partial y / \partial t$. Что касается сил взаимодействия между элементами струны, то они всегда направлены по касательной к согнутой струне. В каждом сечении струны составляющая силы по направлению скорости равна $F_y = -F\partial y / \partial x$. Вследствие этого волновое сопротивление струны имеет вид:

$$Z = \frac{-F\partial y / \partial x}{\partial y / \partial t}. \qquad (3.23)$$

Для каждого из двух возможных типов волн в струне $y_1 = \psi(x + ct)$, $y_2 = \varphi(x - ct)$ имеем значение $Z_1 = -F / c$, $Z_2 = F / c$. С учетом значения для фазовой скорости волн в струне $c^2 = F/\rho$ записываем

$Z_{1,2} = \pm\rho c.$ (3.24)

Как видим, в общем случае значение волнового сопротивления характеризует и направление распространения волны. Поскольку выбор направления осей допускает некоторую произвольность, то, говоря о волновом сопротивлении среды, имеют ввиду абсолютное значение Z, т.е. в данном случае ρc. Как будет видно из дальнейшего изложения, произведение плотности среды на скорость волны характеризует волновое сопротивление самых разных сред.

3.4. Энергетические характеристики волнового движения струны

Принятая модель струны означает, что подведенная к ней извне энергия накапливается и существует лишь как кинетическая и потенциальная энергии. Кинетическая энергия элементарного участка струны dx имеет вид

$$E_{\text{К}} = \frac{1}{2}\rho dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2. \qquad (3.25)$$

Эта величина является квадратичной относительно скорости точек струны $\partial y/\partial t$.

Для вычисления потенциальной энергии струны также нужно учитывать квадратичные величины относительно y. Эта энергия равна той работе, которую надо выполнить при смещении элемента струны из состояния равновесия в отклоненное положение. Для малых отклонений от положения равновесия натяжение струны считается неиз-

менным. В процессе деформации элемент струны растягивается до некоторой длины Δs; итак, прирост длины представляет $\Delta s - dx$. Именно на этом пути неизменное натяжение осуществляет работу. Поэтому потенциальная энергия, накопленная в деформированном элементе, имеет вид

$$E_{\Pi} = F(\Delta s - dx). \tag{3.26}$$

Длина элемента струны после деформации

$$\Delta s = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx. \tag{3.27}$$

Итак, потенциальная энергия элемента струны

$$E_{\Pi} = F\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1\right) dx. \tag{3.28}$$

При выводе уравнения движения струны, при условиях малости отклонений от положения равновесия, получили оценку $(\partial y/\partial x)^2 << 1$. При вычислении тригонометрических функций углов наклона касательной к струне величинами $(\partial y/\partial x)^2$ по сравнению с единицей пренебрегали. Ясно, что в (3.28) этого сделать нельзя. Но учет малости $(\partial y/\partial x)^2$ по сравнению с единицей дает возможность получить более удобное для вычисления выражение для потенциальной энергии. Используя соотношение

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 + \ldots \tag{3.29}$$

и оставляя лишь главные по порядку величины, находим, что

$$E_{\Pi} = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{3.30}$$

Отсюда полная энергия элемента струны имеет вид

$$E_{\text{К}} + E_{\Pi} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{3.31}$$

Энергию, отнесенную к единице длины, называют *плотностью энергии* в струне:

$$E = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \tag{3.32}$$

Рассматривая движение систем с конечным числом степеней свободы, мы исследовали основные закономерности колебательных движений. При этом энергетические соотношения довольно просты — полная энергия $E_К + E_П$ при свободных колебаний системы остается постоянной величиной.

Поскольку в принятой модели струны отсутствуют потери энергии, общая энергия, подведенная к струне в начальный момент времени, остается тоже постоянной. Однако возмущение в струне существует в виде бегущих волн и это, конечно, обусловливает поиск новых характеристик. Здесь нужно выделить те характеристики, которые описывают потоки энергии, и определить скорость переноса энергии.

Определим полную энергию, которая содержится в некотором конечном от $x = a$ до $x = b$ участке струны:

$$H = \int_a^b \left[\frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \qquad (3.33)$$

Тогда скорость изменения энергии, которая содержится в выделенном участке, приобретает вид

$$\frac{dH}{dt} = \int_a^b \left[\rho \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right] dx. \qquad (3.34)$$

Поскольку $\rho \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, это соотношение можно представить так:

$$\frac{dH}{dt} = F \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} \right] dx = F \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} \bigg|_{x=b} - F \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} \bigg|_{x=a}. \qquad (3.35)$$

Итак, скорость изменения энергии, накопленная участком струны, однозначно определяется величинами, которые вычисляются на концах данного участка. Рассматривая полученный результат относительно выбранной системы координат, считаем, что величина

$$L = -F \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (3.36)$$

определяет проекцию на ось Ox *вектора потока энергии* в струне. Тогда равенство (3.35) определяет основное энергетическое соотношение для струны — скорость изменения полной энергии участка струны равняется разности потоков энергии на концах участка.

В правильности придания физического содержания величине L в (3.36) можно легко убедиться, размышляя следующим образом. На рис. 3.1 видно, что величина $-F\partial y / \partial x$ есть проекция на ось Oy силы, действующей в сечении x со стороны левой отброшенной части стру-

ны. Произведение силы на скорость $\partial y/\partial t$ дает мощность, которая развивается в сечении x при распространении возмущения. Для поперечных волн, которыми являются волны в струне, сила и скорость вычисляются в направлении оси Oy. Поток энергии направлен вдоль оси Ox.

При анализе волновых явлений важным есть вопрос о скорости переноса энергии волной. В данном случае ответить на этот вопрос можно, рассматривая выражение или для плотности энергии в струне E (3.32), или для потока мощности L (3.36). Для определенности считаем, что смещение точек струны $y(x,t)$ связано с бегущей волной в положительном направлении оси Ox, т.е. $y(x,t)=\varphi(x-ct)$. Понятно, что при этом функциями аргумента $(x-ct)$ будут и плотность энергии $E=E(x-ct)$, и поток энергии $L=L(x-ct)$. Таким образом, эти обе энергетические характеристики удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}. \tag{3.37}$$

Это обстоятельство указывает на то, что энергия бегущей волны вдоль струны также переносится со скоростью $c=\sqrt{F/\rho}$. Поскольку при распространении вдоль струны форма возмущения не изменяется, такой вывод есть физически довольно очевидным.

Если в струне одновременно распространяются две волны: $y_1=\varphi_1(x-ct)$ и $y_2=\varphi_2(x-ct)$, то общее смещение струны — это сумма смещений данных волн, т.е.

$$y=y_1+y_2=\varphi_1(x-ct)+\varphi_2(x-ct). \tag{3.38}$$

При этом величина y удовлетворяет волновому уравнению. *Это положение составляет сущность принципа суперпозиции, справедливого для любых линейных дифференциальных уравнений. Что касается энергетических характеристик волнового движения, то для них принцип суперпозиции в общем случае уже не выполняется.* Это следствие квадратичного характера величин E и L относительно y. Для смещения, заданного (3.38), согласно формуле (3.32) будем иметь:

$$\begin{aligned} E(\varphi_1+\varphi_2)&=\frac{\rho c^2}{2}\left[(\varphi_1')^2+2\varphi_1'\varphi_2'+(\varphi_2')^2\right]+\frac{F}{2}\left[(\varphi_1')^2+2\varphi_1'\varphi_2'+(\varphi_2')^2\right]= \\ &=E(\varphi_1)+E(\varphi_2)+2F\varphi_1'\varphi_2'. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Здесь штрих в функциях φ_1 и φ_2 означает производную по полному аргументу и учитывается, что $\rho c^2 = F$. Видно, что в зависимости от

знака величины $2F\varphi_1'\varphi_2'$ плотность энергии в струне может быть больше или меньше суммы плотностей энергий, которые соответствуют отдельным составляющим волнового движения.

Если рассматривать возмущения от бегущих волн, которые направляются навстречу друг другу,

$$y(x,t) = \psi(x+ct) + \varphi(x-ct), \tag{3.40}$$

то имеем

$$E(\psi+\varphi) = \frac{1}{2}\rho c^2\left[\psi' - \varphi'\right]^2 + \frac{1}{2}F\left[\psi' + \varphi'\right]^2 = E(\psi) + E(\varphi). \tag{3.41}$$

Используя выражение для y (3.40) и исходя из определения потока энергии (3.36), находим

$$L(\psi+\varphi) = L(\varphi) - L(\psi). \quad (3.42)$$

Таким образом, поток энергии в таком волновом движении равен разности потоков энергий, которые переносятся отдельными волнами.

3.5. Волновое движение в конечной струне. Нормальные колебания

Теперь задачей является изучение закономерностей поведения возмущений в конечной струне длиной l. Концы струны $x = 0$ и $x = l$ считаются закрепленными, т.е. $y(0,t) = y(l,t) = 0$. Энергию от внешнего источника к струне подводим, задавая начальное отклонение точек струны и их начальные скорости:

$$y(x,0) = Q_1(x), \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = Q_2(x). \tag{3.43}$$

Внешние силы отсутствуют. Искомая функция $y(x,t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{3.44}$$

Решение общей задачи о волновом движении в бесконечной струне и установленные закономерности отражения волн от закрепленного конца дают возможность полностью описать волновое движение в конечной струне, представляя искомую функцию как суперпозицию прямых и отраженных волн. Но такое решение, которое называется решением Д'аламбера, будет довольно громоздким. Поэтому для решения поставленной задачи, как правило, применяют другой подход.

Говоря о разных возможных подходах к решению задачи о свободных движениях струны, не следует ограничиваться лишь их фор-

мальными отличиями. Использование решений, отличных от даламберовськой формы, в значительной мере обусловлено также спецификой постановки задач в теории колебаний и в акустике. Решение Д'аламбера, хотя и громоздкое, но дает возможность точно ответить на такой вопрос: где в данный момент находится определенная точка струны и какова ее скорость. И хотя из такого решения можно получить данные обо всех интегральных характеристиках колебательной системы, сам процесс получения таких данных довольно сложен. Существенного упрощения выкладок можно достичь, если сразу поставить задание об определении некоторых интегральных характеристик движения.

В определенном понимании идейную основу для дальнейшего построения дают результаты, полученные при рассмотрении свободных колебаний системы с двумя степенями свободы. Было найдено, что при *любых начальных условий дальнейшее движение системы с двумя степенями свободы — это суперпозиция двух определенным образом уравновешенных периодических движений — нормальных колебаний.* Следует ожидать, что такое же утверждение будет справедливым и для струны с тем лишь отличием, что нормальных колебаний там должно быть бесконечно много.

Используя такую аналогию, решение поставленной общей задачи нужно начинать с поиска периодических решений уравнения (3.44):

$$y(x,t) = Y(x)\exp\left(-i\omega t\right), \tag{3.45}$$

которые будут удовлетворять условиям на концах струны:

$$Y(0) = Y(l) = 0. \tag{3.46}$$

После подстановки (3.45) в волновое уравнение (3.44) для определения амплитудной характеристики $Y(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}Y = 0. \tag{3.47}$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$Y(x) = A\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right). \tag{3.48}$$

Здесь, как и в (3.45), величина ω — произвольная. Для определения допустимых значений частоты нормальных колебаний нужно использовать граничные условия (3.46). Первое из них дает значение $B = 0$, второе приводит к такому условию существования нетривиального решения:

$$\sin\left(\frac{\omega}{c}l\right)=0. \qquad (3.49)$$

Отсюда находим множество значений частот нормальных колебаний в струне:

$$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}, \qquad f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{nc}{2l}. \qquad (3.50)$$

Эти частоты обычно называют *собственными* или *нормальными частотами* струны. Соответствующие периоды собственных колебаний имеют вид

$$T_n=\frac{2l}{c}\frac{1}{n} \qquad (3.51)$$

и представляют целые части от времени, необходимого волне для пробега двойной длины струны. Собственные частоты нормальных колебаний струны, которые определяются (3.50), относятся одна к другой, как целые числа. Именно это обстоятельство обусловливает широкое использование струн в музыкальных инструментах. Совместное *звучание тонов, частоты которых относятся одна к другой как небольшие целые числа, вызывает приятное ощущение в слуховом восприятии человека.* При этом говорят о гармоничном отношении частот, а нормальные колебания струны называют *гармониками* (от греческого слова *armonicox* — созвучный). Прояснить их особое взаимодействие с мозгом человека с точки зрения только физики, конечно, нельзя. Тем не менее, возможно, говоря словами Пушкина*, "*поверить алгеброй гармонию*".

Таким образом, задачу поиска нормальных колебаний струны можно считать решенной. *Каждое нормальное колебание — свободное периодическое движение струны, которое удовлетворяет граничным условиям, характеризуется соответствующей собственной частотой и собственной формой колебаний.* Все нормальные колебания пронумерованы по возрастанию частоты, и когда говорят про *n-тое* нормальное колебание, то имеют в виду следующую совокупность величин: ω_n — нормальная частота и $Y_n(x)$ — собственная форма колебаний:

$$\left\{\omega_n=\frac{n\pi c}{l},\ Y_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right\}. \qquad (3.52)$$

На рис. 3.15 изображены первые четыре собственных формы колебаний струны. Характеристики нормального колебания не зависят

* Пушкин Александр Сергеевич (1799—1837) — российский писатель.

от начальных условий и, поэтому, *совокупность нормальных колебаний есть важная интегральная характеристика внутренних свойств колебательной системы.*

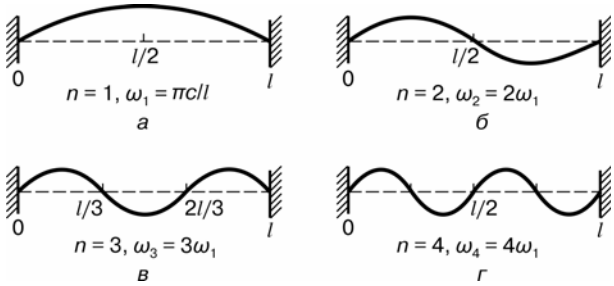


Рис. 3.15. Первые четыре собственные формы колебаний струны

Исходя из (3.45), зависимость прогиба струны от времени и координаты в n-ом нормальном колебании определяется функцией

$$y_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\exp\left(-i\omega_n t\right). \qquad (3.53)$$

Если сделать обобщение результата, полученного при рассмотрении системы с двумя степенями свободы, то можно сформулировать такое утверждение: *какими бы ни были функции* $Q_1(x)$ *и* $Q_2(x)$ *при начальных условиях* (3.43), *дальнейшее свободное движение струны будет представлять собой определенную совокупность нормальных колебаний.* Это утверждение записывается в виде соотношения

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\exp\left(-i\omega_n t\right). \qquad (3.54)$$

Здесь неопределенные коэффициенты A_n указывают на степень возбуждения соответствующего номера нормального колебания и в общем случае являются комплексными величинами. Исходя из (3.54), легко получить выражение для физического (измеряемого) прогиба. Для этого достаточно выделить в (3.54) его действительную часть. Если принять $A_n = a_n + ib_n$, то действительная часть (3.54) будет иметь вид

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right]. \qquad (3.55)$$

Таким образом, задача о свободном движении струны будет полностью определена, если постоянные a_n и b_n, входящие в (3.55), определить по заданным функциям $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ в (3.43). Подстановка выражения для $y\ (x,t)$ (3.55) в начальные условия приводит к двум равенствам:

$$Q_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$$Q_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \qquad (3.56)$$

Отсюда легко определить коэффициенты a_n и b_n на основе свойства ортогональности функций $\sin(n\pi x/l)$, $n = 1, 2, \ldots$, согласно которому имеем

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx = \begin{cases} \frac{l}{2}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \qquad (3.57)$$

Тогда, умножая (3.56) на $\sin(n\pi x/l)$ и интегрируя на интервале $(0, l)$, получаем:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l Q_1(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

$$b_n\omega_n = \frac{2}{l}\int_0^l Q_2(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (3.58)$$

Таким образом, с математической точки зрения, собственные формы конечной струны длиной l с закрепленными концами $\sin(n\pi x/l)$, $1, 2, 3, \ldots$, представляют собой *полную* и *ортогональную систему функций*. Свойство полноты этой системы функций позволяет записать произвольную (осмысленную с физической точки зрения) функцию на отрезке $[0, l]$ в виде ряда (3.56), а, следовательно, изобразить колебания струны при любых начальных условий как суперпозицию нормальных колебаний (гармоник) (3.55).

Подчеркнем, что данный способ определения коэффициентов a_n и b_n имеет особенно формальный характер. Относительно того, представляют ли ряды в формулах (3.56) действительно заданные функции $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, возникала знаменитая дискуссия между Д'Аламбером и Ейлером*, с одной стороны, и Д. Бернулли**, с другой. Следует отметить, что частное решение $y_n(x,t) = a_n \sin(n\pi x/l)\cos(\omega_n t)$ исследуемой задачи было получено еще в 1713—1715 годах Тейлором***, который был убежден, что никакие другие решения здесь не-

---

* Ейлер (Euler) Леонард (1707—1783) — швейцарский математик, физик, механик и астроном; 1727—1741 и 1766—1783 жил и работал в Петербурге.

** Бернулли (Bernoulli) Даниил (1700—1782) — швейцарский физик и математик.

*** Тейлор (Taylor) Брук (1685—1731) — английский математик и философ.

возможны. Достижение Д. Бернулли определялось его пониманием того, что суперпозиция нормальных колебаний (3.55) описывает реальное движение струны. Именно богатство физического содержания решения (3.55) задачи о колебаниях струн, а также совпадение полученных таким образом результатов с физическими экспериментами, побуждало Д. Бернулли так настойчиво отстаивать свою мысль и отбрасывать критику глубоко им почитаемых Ейлера (он был его другом) и Д'Аламбера.

Дальнейшее усовершенствование методики Д. Бернулли связано с исследованиями Фурье*. Фурье впервые изложил общую теорию разложения функций в тригонометрические ряды, основанную на формулах (3.58) для определения коэффициентов ряда; он привел также много примеров разложения конкретных функций. Но еще более важным было применение подобного рассмотрения к конкретным задачам физики; например, к задаче о распространении тепла. И не случайно, несмотря на то, что разложение функций в тригонометрические ряды до Фурье рассматривалось многими учеными, сегодня все эти ряды принято называть *рядами Фурье*. Процедура разложения функции в ряд Фурье (или в тригонометрический ряд) носит название *спектрального анализа*. Ныне в рамках углубленной теории рядов Фурье вопрос о возможности разложения (3.56) решено в пользу Д. Бернулли.

Предложенный подход для определения коэффициентов a_n и b_n не единственно возможный. Разницу между подходами можно наглядно проиллюстрировать, рассматривая вопрос об аппроксимации функции рядом. Рассмотрим, например, вместе с функцией $Q(x)$ функцию $\tilde{Q}(x)$, которая задается отрезком ряда

$$\tilde{Q}(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right). \tag{3.59}$$

Выберем коэффициенты a_n так, чтобы функция $\tilde{Q}(x)$ была как можно ближе к заданной функции $Q(x)$ на отрезке $[0, l]$. Значение коэффициентов a_n и способ их определения зависят от того, как определяется степень близости заданной функции $Q(x)$ и ее аппроксимации $\tilde{Q}(x)$. Здесь можно поступить по-разному. Один подход, когда вводят величину

$$I_1 = \int_0^l \left|Q(x) - \tilde{Q}(x)\right| dx \tag{3.60}$$

---

* Фурье (Fourier) Жан Батист Жозеф (1768—1830) — французский математик.

и выбирают значение постоянных a_n такими, чтобы при заданном N величина I_1 была наименьшей.

Возможен другой подход, когда вводят в рассмотрение величину

$$I_2 = \int_0^l \left[Q(x) - \tilde{Q}(x) \right]^2 dx, \qquad (3.61)$$

и коэффициенты a_n определяют из условия минимума величины I_2.

Получение алгебраических соотношений для a_n из условия минимума величины I_1 является достаточно сложной задачей. В то же самое время из условия минимума $\partial I_2 / \partial a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, для коэффициентов a_n имеем выражение, которое совпадает с первым уравнением в (3.58).

Таким образом, можно говорить, что отрезок ряда Фурье — лучшее приближение функции в понимании минимальности среднего квадратичного отклонения значения функции и аппроксимирующего выражения. Широкое использование такого типа аппроксимаций в теории колебаний и вообще в физике обусловлено не только относительной легкостью определения коэффициентов рядов, но и тем, что квадратичные по кинематическим характеристикам процесса величины имеют значение энергии колебательного процесса и, следовательно, указанный способ аппроксимации наиболее приемлем с энергетической точки зрения.

3.6. Анализ движения струны

3.6.1. Бегущие и стоячие волны

Таким образом, при любых начальных условиях (3.43) свободное движение струны определяется рядом (3.55), т.е. суперпозицией нормальных колебаний. Поскольку все собственные частоты нормальных колебаний относятся как целые числа, движение струны в общем случае является периодическим.

Выражение $y(x,t)$ для прогиба струны в каждый момент времени при свободном движении должно удовлетворять волновому уравнению (3.44). Из сказанного выше следует, что общее решение этого уравнения — это суперпозиция двух бегущих волн, которые направляются навстречу друг другу. На первый взгляд, форма решения (3.55) кажется такой, которая не отвечает этому утверждению. Тем не менее, в отсутствии противоречия легко убедиться, преобразовав (3.55) с помощью известных тригонометрических соотношений:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\omega_n t\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)\right],$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin(\omega_n t)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)\right].$$

При этом решение общей задачи о свободном движении струны по заданным начальным условиям приобретает вид совокупности *бегущих волн*:

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\,b_n\left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)\right]\right\}. \qquad (3.62)$$

Выражения для $y\,(x,t)$ (3.55) и (3.62) количественно приводят к тождественным результатам. Первый из них — это прогиб струны в виде суперпозиции так называемых *стоячих волн*. Этот термин говорит о том, что в решении волнового уравнения в виде

$$y_n(x,t)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos(\omega_n t)$$

можно указать точки (например, $x = l/n$), где функция $y_n(x,t)$ равна нулю для всех моментов времени. Эти точки называют *узлами*. Точки струны между соседними узлами двигаются синфазно по гармоническому закону, каждая со своей амплитудой (рис. 3.15). Вообще вся длина струны делится узловыми точками на участки, причем движение струны в соседних участках является противофазным, т.е. сдвиг фаз равен 180^0.

Отдельное решение волнового уравнения в виде гармонической волны

$$y_n(x,t)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)$$

представляет собой бегущую волну, которая распространяется в отрицательном направлении вдоль оси *Ox*, очевидно, указанных свойств не имеет. Интересно, что при наблюдении в обеих волнах за колебанием одной частички струны невозможно отличить стоячую волну от бегущей. В обоих случаях отдельные частички струны колеблются по гармоническому закону (кроме узловых точек в стоячей волне). Отличие между бегущей и стоячей волнами проявляется, если сравнить движение двух разных частичек струны. В случае бегущей волны разные частички колеблются с одинаковыми амплитудами, но с разными фазами. В случае стоячей волны разные частички струны колеблются в одинаковой фазе или противофазе, но с разными амплитудами. Из сравнения (3.55) и (3.62) видно, *что стоячая волна* —

это суперпозиция двух гармонических бегущих волн с одинаковой амплитудой, которые распространяются навстречу друг другу.

Перепишем выражения для стоячей и бегущей волн в виде

$$y_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos(\omega_n t) = \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda_n}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{T_n}\right), \qquad (3.63)$$

$$y_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) = \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda_n} + 2\pi\frac{t}{T_n}\right), \qquad (3.64)$$

где $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{l}$, $\quad T_n = \dfrac{2\pi}{\omega_n} = \dfrac{2l}{cn}$, $\lambda_n = \dfrac{2l}{n}$.

Термин “гармоническая волна” указывает, прежде всего, на периодическое изменение характеристик волн со временем. Тем не менее, из предыдущих выкладок видно, что для такой волны характерна периодичность и по пространственной координате. Характеристикой периодичности во времени есть период $T_n = 2\pi/\omega_n$, а пространственным периодом является *длина волны* $\lambda_n = 2l/n$. Величина λ определяет расстояние между соседними максимумами (минимумами) функции $\sin(2\pi x/\lambda)$. Для характеристики гармонических волн часто используют также понятие *волнового числа* $k = 2\pi/\lambda$ — величины, которая обратно пропорциональна длине волны. Величина k характеризует колебание в пространстве, аналогично тому, как круговая частота ω характеризует колебание во времени. Действительно, если записать гармоническую бегущую волну в виде $\sin(\omega t - kx)$, то ω определяет скорость изменения фазы $(\omega t - kx)$ волны во времени, а величина k определяет скорость изменения фазы в пространстве. По сути, волновое число представляет собой пространственную частоту, в соответствии с которой характеристики волны изменяются в пространстве в фиксированный момент времени.

Таким образом, из всех возможных типов волн в конечной струне возникают лишь те, которые соответствуют дискретным временным характеристикам (частота, период):

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, \quad f_n = \frac{nc}{2l}, \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2l}{cn} \qquad (3.65)$$

и дискретным пространственным характеристикам (длина волны, волновое число):

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l}. \qquad (3.66)$$

Понятно, что именно такое соотношение между длиной волны λ_n и длиной струны l определяется граничными условиями на концах струны. Концы струны неподвижны, и в них естественно размещаются узловые точки гармоник. А расстояние между узловыми точками в стоящей волне равно $\lambda_n/2$. Итак, на длине струн размещается целое число полуволн (рис. 3.15).

Гармоничная волна как простейший тип волнового движения часто используется в акустике при анализе колебательных процессов в механических системах, процессов генерации и распространения звука. При этом часто используют комплексное представление для основных характеристик волны. В рассматриваемом одномерном случае струны комплексное представление для гармонической бегущей волны имеет вид

$$y(x,t) = A\exp[-i(\omega t - kx)]. \tag{3.67}$$

Определим фазовую скорость $\upsilon_ф$ гармонической бегущей волны (3.67). Зафиксируем любое значение фазы $(\omega t - kx) = \text{const}$ и проследим за перемещением соответствующего возмущения в пространстве. В таком случае изменение фазы вследствие приращений dt и dx должно равняться нулю: $d(\omega t - kx) = \omega dt - kdx = 0$. Это условие выполняется, если скорость перемещения фазы в бегущей гармоничной волне имеет вид

$$\upsilon_ф \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}, \tag{3.68}$$

итак, фазовая скорость гармонической волны равна отношению круговой частоты ω к волновому числу k. Поскольку $\omega = 2\pi f$, $k = 2\pi/\lambda$ и $f = 1/T$, то имеем такой ряд формул:

$$\upsilon_ф = \lambda f, \quad \upsilon_ф = \frac{\lambda}{T}, \quad \lambda = \upsilon_ф T. \tag{3.69}$$

По сути, длина волны λ определяет путь, который проходит бегущая волна за время равное периоду T. Вместе с тем период волны T есть интервал времени, за которое через некоторую точку струны проходят два гребня волны.

3.6.2. Дисперсионное соотношение

Очень важно подчеркнуть, что частота ω и волновое число k в выражении для гармонической волны $\cos(\omega t - kx)$ не являются произвольными постоянными. Они связаны между собой некоторой функциональной зависимостью, вид которой определяется уравнением, описывающим волновое движение. Чтобы ее определить, нужно

подставить выражение для гармонической волны в соответствующее уравнение движения. Полученное алгебраическое уравнение, которое устанавливает функциональную зависимость между ω и k (или f и λ) гармонической волны, называется *дисперсионным соотношением*, или *дисперсионным уравнением* (от латинского слова *dicpersio* — рассеяние). Термин “дисперсия” сначала появился в оптике, он означает разложение света с помощью призмы на отдельные цветные лучи. В дальнейшем это понятие было распространено на волны разной физической природы.

В общем виде дисперсионное уравнение можно записать таким образом:

$$D(\omega, k) = 0. \tag{3.70}$$

Если решение дисперсионного уравнения $D(\omega, k) = 0$ получено, т.е. известна зависимость $\omega = \omega(k)$ или $k = k(\omega)$, то фазовая скорость гармонической волны согласно (3.68) определяется соотношением

$$\upsilon_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad \text{или} \quad \upsilon_{\text{ф}} = \frac{\omega(k)}{k}, \tag{3.71}$$

как функция частоты ω или волнового числа k.

Необходимо сразу отметить, что дисперсионное уравнение $D(\omega, k) = 0$ может иметь несколько корней, тогда говорят о нескольких “ветвях” дисперсионных кривых, которые соответствуют разным волнам. Для изотропной среды такие “ветви” появляются симметричными парами: $\omega_{1,2} = \pm\omega(k)$, что отвечает бегущим волнам, которые распространяются в противоположных направлениях.

Определим дисперсионное уравнение для гармонических бегущих вдоль струны волн. Для этого подставим выражение $y(x,t) = \cos(\omega t - kx)$ в уравнение движения струны (3.7). Итак, получим такое дисперсионное соотношение:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 \quad \text{или} \quad \frac{\omega}{c} = \pm k. \tag{3.72}$$

Тогда фазовая скорость волны имеет вид

$$\upsilon_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = c \equiv \sqrt{\frac{F}{\rho}} = \text{const}. \tag{3.73}$$

Полученное дисперсионное уравнение (3.72) устанавливает именно такую связь между ω и k, которая определяет выражение $\cos(\omega t \mp kx)$ как гармоническую бегущую волну вдоль струны. Из него следует, что скорость такой волны не зависит от частоты (или длины волны), а зависимость между ω и k имеет линейный характер; это свидетельству-

ет об *отсутствии дисперсии*. Поскольку произвольное возмущение на струне определяется как суперпозиция гармонических составляющих, то отсутствие дисперсии определяет неизменность формы возмущения при распространении вдоль струны. Что касается стоячей волны, то мы не вводим понятие фазовой скорости, поскольку стоячие волны никуда не “бегут”. Они “стоят и колеблются”, как большой “размазанный” гармонический осциллятор. Здесь можно говорить об устойчивом характере отношения ω/k и его независимости от длины волны.

Если для некоторой среды связь между ω и k нелинейная, то фазовая скорость зависит от частоты (или волнового числа), и разные гармонические составляющие возмущения распространяются с разными фазовыми скоростями. Вследствие этого форма возбуждения при распространении изменяется; только гармонические волны будут распространяться в такой среде без искажения. В этом случае говорят о *дисперсионной среде* или *дисперсии волн*.

В качестве примера рассмотрим цепочку связанных осцилляторов (рис. 2.28) бесконечной длины. Пусть вдоль цепочки распространяется гармоническая волна с частотой ω, тогда поперечное отклонение n-го шарика запишем в виде

$$y_n(t) = A\exp\left(-i\left(\omega t - kan\right)\right), \tag{3.74}$$

где a — расстояние между шариками, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны. Подставив (3.74) во второе уравнение (2.124), получим $\omega^2 m = \dfrac{2F}{a}(1-\cos(ka))$. Итак, дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{F}{ma}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right). \tag{3.75}$$

Уравнение (3.75) можно переписать, используя постоянную c в формуле (3.73) для фазовой скорости волны в непрерывной струне. Пусть $m/a = \rho$, тогда помножив и разделив (3.75) на $ka/2$, получим

$$\omega(k) = ck\frac{\sin\left(ka/2\right)}{ka/2}, \tag{3.76}$$

где $c = \sqrt{F/\rho}$, $\rho = m/a$, значение c равно фазовой скорости волны в непрерывной струне с линейной плотностью ρ и натяжением F.

Вследствие нелинейной зависимости $\omega(k)$, которая определяется (3.76), фазовая скорость гармонической волны в цепочке $\upsilon_ф = \omega/k$ зависит от ω (или от k):

$$\upsilon_ф = c\frac{\sin\left(ka/2\right)}{ka/2}. \tag{3.77}$$

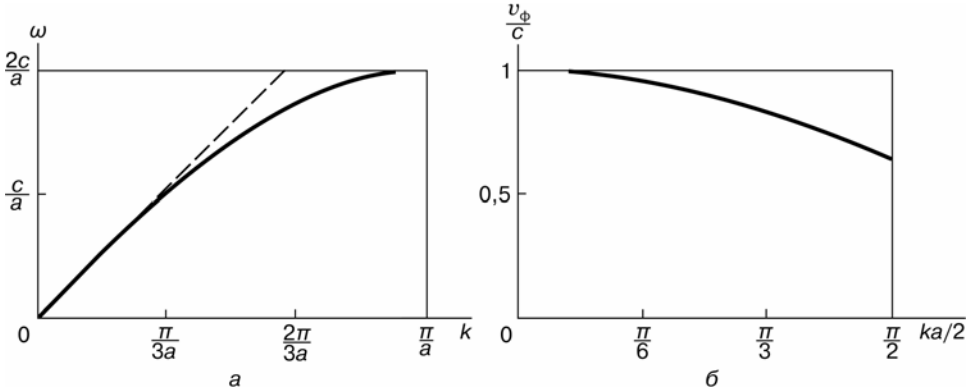


Рис. 3.16. Дисперсионные зависимости: *а* — $\omega(k)$, *б* — $\upsilon_{ф}(k)$

Зависимости $\omega(k)$ и $\upsilon_{ф}(k)$ изображены на рис. 3.16. Приведенные результаты позволяют высказать такие соображения.

1. Для малого волнового расстояния между шариками $(ka << 1)$, иначе, для большой длины волны по сравнению с величиной a $(a << \lambda)$, дисперсия практически отсутствует, и согласно (3.76), (3.77) имеем $\omega \approx ck$ и $\upsilon_{ф} \approx c$.

2. С увеличением волнового числа k (а значит и ω) скорость $\upsilon_{ф}$ (см. рис. 3.16, *б)* уменьшается. Такую зависимость фазовой скорости от частоты называют *нормальной дисперсией*. Для некоторых физических явлений возможна ситуация, когда фазовая скорость возрастает с увеличением частоты. В этом случае дисперсию называют *аномальной*.

3. Дисперсионная кривая (рис. 3.16, *а*) заканчивается, когда волновое число и частота достигают максимального значения, а именно, $k_{max} = \pi/a$ и $\omega_{max} = 2c/a$. Действительно, при $\omega = \omega_{max}$ длина волны $\lambda_{min} = 2\pi/k_{max} = 2a$. Волны длиной $\lambda < \lambda_{min}$ не могут существовать в цепочке, ведь на длине волны, которая распространяется, должно находиться не меньше двух шариков, которые колеблются.

Возникновение явления дисперсии обусловлено свойствами среды, в которой распространяются волны. В случае цепочки идентично связанных осцилляторов это обусловлено наличием пространственного периода как расстояния a между шариками. Если $a << \lambda$, то волновой процесс в непрерывной струне и в цепочке будет практически одинаковый (обдумайте это утверждение, принимая во внимание то, что в цепочке шарики соединяются один с другим отрезками прямой). Если же неравенство $a << \lambda$ не выполняется, то восстанавливающая сила

будет существенно зависеть от количества шариков, которые размещаются на длине волны.

Интересно отметить, что для реальной струны пианино дисперсионное соотношение имеет такое приближенное выражение [24, с. 67]:

$$\frac{\omega^2}{k^2} \approx \frac{F}{\rho} + \alpha k^2, \tag{3.78}$$

где α — малая положительная постоянная, равная нулю для идеально гибкой струны. Слагаемое αk^2 в формуле (3.78) определяется наличием в реальной струне изгибной жесткости. Причем ее влияние тем больше, чем выше частота колебаний струны. Действительно, более высокие моды имеют более короткие длины волн, и им соответствует большая кривизна струны. Это приводит к тому, что восстанавливающая сила, которая обусловлена изгибной жесткостью, возрастает с увеличением величины $k = 2\pi/\lambda$ с большей скоростью, чем восстанавливающая сила, определяемая натяжением струны. Последняя согласно (3.6) равна $F\partial^2 y/\partial x^2$ и пропорциональна k^2, а восстанавливающая сила, которая обусловлена изгибной жесткостью, как оказывается, пропорциональна k^4. Собственные формы реальной струны совпадают с конфигурацией мод идеально гибкой струны (рис. 3.15), т.е. $\lambda_1 = 2l$, $\lambda_2 = \lambda_1/2$, $\lambda_3 = \lambda_1/3, \ldots$, поскольку граничные условия в обоих случаях одинаковы. Итак, имеем одинаковые волновые числа $k_n = 2\pi/\lambda_n$ у реальной и идеальной струн, но частоты нормальных колебаний реальной струны не отвечают “гармонической” последовательности: $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1, \ldots$ У струны пианино или рояля, частоты высоких мод согласно (3.78) имеют несколько большие значения, чем частоты гармонической последовательности. Таким образом, можно сделать вывод, что модель струны с шариками хуже модели непрерывной, идеально гибкой, струны, поскольку дает поправку, знак которой не соответствует реальной струне.

В дальнейшем будем рассматривать случаи других дисперсионных соотношений, которые возникают благодаря специфическим свойствам среды или условиям распространения волн.

Рассмотренная задача о колебании струны с шариками позволяет получить весомые аргументы в пользу использования модели сплошной среды в задачах акустики. Действительно, пусть шарики на струне — это атомы в кристаллической решетке кристалла. В кристалле постоянная упругой силы F/a имеет порядок 15 Н $\cdot$м$^{-1}$, а типичное значение атомной массы равно 60 $\cdot 10^{-27}$ кг [39, с. 142]. Тогда, согласно (3.75), квадрат максимальной угловой частоты равен

$\omega^2{}_{\max} = \dfrac{4F}{ma} \approx 10^{27}\,\text{с}^{-2}$, а соответствующее значение частоты $f_{\max} = \omega_{\max}/2\pi \approx 5\cdot 10^{12}\,\text{Гц}$. Эта частота значительно больше, чем частоты, которые наблюдаются в акустике. Поэтому действительно, в задачах акустики реальные среды, несмотря на их атомную структуру, можно рассматривать как сплошные.

3.6.3. Энергия колебаний конечной струны

Определим энергию струны длиной l, которая свободно колеблется, с учетом того факта, что колебание струны представлено как суперпозиция нормальных колебаний (3.55). Подставим (3.55) в (3.33) и проинтегрируем по всей длине струны, т.е. пределами интегрирования будут $a = 0,\ b = l$. Вследствие этого получим такое выражение для энергии струны, которая свободно колеблется (сделайте выкладки самостоятельно):

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n, \tag{3.79}$$

где

$$H_n = \frac{1}{2}\frac{\rho l}{2}\omega_n{}^2 A_n{}^2, \quad A_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}. \tag{3.80}$$

Величину H_n можно интерпретировать как энергию, которая приходится на отдельную гармоническую составляющую, тогда энергия колеблющейся струны будет определяться как сумма энергий нормальных колебаний струны.

3.6.4. Примеры колебаний конечной струны при разных начальных условиях

В музыкальных инструментах возбуждаются поперечные колебания струн. Различают три типа струнных инструментов: щипковые, ударные и смычковые. В ударных инструментах (например, рояль) колебания возбуждаются ударом, который придает струне начальную скорость без начального отклонения. В щипковых инструментах (например, арфа, гитара) колебания возбуждаются вследствие предоставления струне некоторого начального отклонения без начальной скорости.

Рассмотрим колебания струны при разных начальных условиях. Пусть для струны с закрепленными концами $x = 0$, $x = l$ начальное отклонение (рис. 3.17) определяется оттягивания струны в точке $x = \xi$ на величину h, т.е. $y(\xi, 0) = h$. Начальная скорость при этом равна нулю. Такая задача может рассматриваться как основа простой теории

возбуждения струн щипковых инструментов. Итак, начальные условия (3.15) будут иметь вид

$$y(x,0)=Q_1(x)=\begin{cases} hx/\xi, & 0\le x\le \xi,\\ h(l-x)/(l-\xi), & \xi\le x\le l.\end{cases} \tag{3.81}$$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=Q_2(x)=0.$$

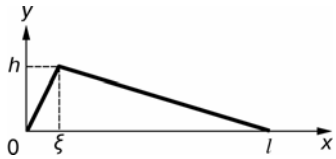


Рис. 3.17. Начальное отклонение струны

Согласно формуле (3.58) находим коэффициенты a_n и b_n:

$$a_n=\frac{2hl^2}{n^2\pi^2\xi(l-\xi)}\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right),\ \ b_n=0,\quad n=1,2,3,\ldots \tag{3.82}$$

Подставив формулу (3.82) в выражение (3.55), получим искомое решение

$$y(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2\xi(l-\xi)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos(\omega_n t). \tag{3.83}$$

Энергия n-ой гармоники согласно (3.80) равна

$$H_n=\frac{1}{4}\rho l\omega_n{}^2a_n{}^2=\frac{\rho l^3h^2c^2}{n^2\pi^2\xi^2(l-\xi)^2}\sin^2\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) \tag{3.84}$$

и уменьшается обратно пропорционально n^2.

Если величины ξ и n такие, что $\sin(n\pi\xi/l)=0$, т.е. точка ξ является узлом n-ой гармоники, то $a_n=0$, и в полученном решении соответствующая гармоника отсутствует. Например, если струна оттянута в средней точке $\xi=l/2$, то $n\pi\xi/l=n\pi/2$ и для всех четных значений n точка $l/2$ есть узел. Тогда в решении будут присутствовать только нечетные гармоники. Итак, в случае $\xi=l/2$ решение (3.83) приобретает вид

$$y(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{l}\right)\cos(\omega_{2n-1}t).$$

Рассмотрим второй пример. Струна возбуждается при задании начальной скорости υ_0 на участке $[\xi-\delta,\xi+\delta]$. Такая ситуация соответствует удару по струне в точке ξ плоским жестким молоточком шириной 2δ. Решение поставленной задачи можно рассматривать как простейшую теорию ударного возбуждения струны. Итак, начальные условия имеют вид

$$Q_1(x)=0,\quad Q_2(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\xi-\delta,\\ \upsilon_0, & \xi-\delta\le x\le\xi+\delta,\\ 0, & \xi+\delta<x\le l.\end{cases}$$

Из общих формул (3.58) находим:

$$a_n=0,\ \ b_n=\frac{2l\upsilon_0}{n^2\pi^2c}\left[\cos\left(\frac{n\pi(\xi-\delta)}{l}\right)-\cos\left(\frac{n\pi(\xi+\delta)}{l}\right)\right],\quad n=1,2,\ldots$$

Таким образом, процесс колебаний описывается функцией

$$y(x,t)=\frac{4l\upsilon_0}{\pi^2c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin(\omega_n t),\qquad(3.85)$$

а энергии отдельных гармоник равны

$$H_n=\frac{4\rho l\upsilon_0{}^2}{n^2\pi^2}\sin^2\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right).\qquad(3.86)$$

В частном случае, когда начальные скорости приданы всем точкам струны $(\xi=l/2,\ \delta=l/2)$, закон движения струны имеет вид

$$y(x,t)=\frac{4l\upsilon_0}{\pi^2c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{l}\right)\sin(\omega_{2n-1}t),\qquad(3.87)$$

что соответствует возбуждению только нечетных гармоник. Как видим, амплитуды гармоник A_n уменьшаются так: $1/n^2$, тогда распределение энергии между гармониками согласно (3.86) происходит по закону $H_n\sim 1/n^2$. Для этого частного случая энергия также сосредоточена, в основном, в первой гармонике. Здесь всем точкам струны придается движение в одном направлении, которое характерно только для первой гармоники.

Рассмотрим ситуацию, когда ширина молоточка 2δ стремится к нулю, т.е. струна возбуждается ударом очень острого молоточка, который дает струне импульс I в точке ξ. Это задача о влиянии на струну сосредоточенного импульса. Сначала предположим, что импульс

равномерно распределен на некотором малом участке струны $(\xi-\delta),(\xi+\delta)$, который окружает точку ξ, т.е. $I=2\delta\rho\upsilon_0$. Откуда

$$\upsilon_0=\frac{I}{2\delta\rho}. \tag{3.88}$$

Далее, перейдя к пределу $\delta\to 0$, определим искомое решение. Подставив (3.88) в формулу (3.85), получим

$$y(x,t)=\frac{2lI}{\pi^2\rho c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\frac{\sin(n\pi\delta/l)}{\delta}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin(\omega_n t). \tag{3.89}$$

Поскольку $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\sin(n\pi\delta/l)}{\delta}=\frac{n\pi}{l}$, то имеем такое решение задачи о колебании струны под влиянием сосредоточенного импульса:

$$y(x,t)=\frac{2I}{\pi\rho c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin(\omega_n t), \tag{3.90}$$

соответственно, энергии отдельных гармоник имеют вид

$$H_n=\frac{I^2}{\rho l}\sin^2\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right). \tag{3.91}$$

Таким образом (см. (3.91)), при возбуждении струны ударом, который сконцентрирован на небольшом участке длиной 2δ (δ имеет малое значение по сравнению с расстоянием между узлами) энергии разных гармоник незначительно различаются между собой, и звук, который издает струна, будет насыщен высшими гармониками. Этот вывод легко проверить экспериментально. Если по натянутой струне ударить лезвием ножа, то струна зазвенит: звук будет насыщен высшими гармониками.

Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что на энергию гармоник существенно влияют значение координаты ξ, которая определяет место удара молоточка, и ширина отрезка δ, на котором выполняется удар. Кроме того, наличие множителя $\sin(n\pi\xi/l)$ в формуле (3.86) приводит к тому, что в случае, когда центр удара молоточка совпадает с узлом n-ой гармоники, то энергия соответствующей гармоники равна нулю. Эти выводы иллюстрируются рис. 3.18, на котором показаны относительные значения энергий гармоник $H_n/H_{\max}$ при разных величинах ξ и δ, здесь $H_{\max}$ определяет наибольшую энергию соответствующей гармоники.

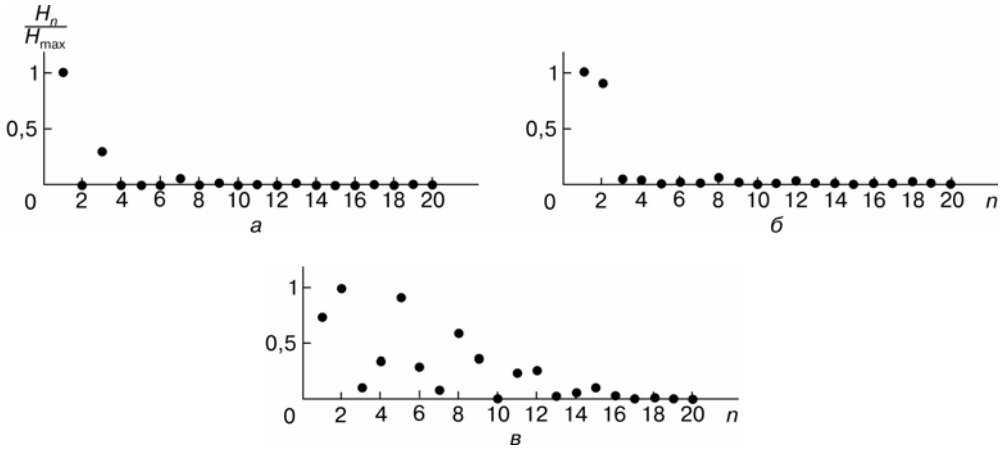


Рис. 3.18. Относительные значения энергии гармоник H_n / H_{max}:
а — $\xi = 0,5l$, $\delta = 0,2l$; *б* — $\xi = 0,3l$, $\delta = 0,2l$; *в* — $\xi = 0,3l$, $\delta = 0,05l$

Указанные особенности учитывают при создании музыкальных инструментов. Наличие высоких гармоник (начиная с 7-ой) нарушает гармоничность звука и вызывает ощущение *диссонанса* (от латинского слова *dissonans* — неблагозвучие). Наличие низких гармоник, наоборот, вызывает чувство полноты звука. В рояле место удара молоточка выбирают вблизи точки закрепления струны между узлами 7-ой и 8-ой гармоник, чтобы уменьшить их энергию. Регулируя ширину молоточка и его жесткость (для этого его ударную часть обтягивают кожей), стремятся увеличить энергию низких (3-ей и 4-ой) гармоник. В старых конструкциях рояля, которые имеют более резкий звук, даже до некоторой степени звон, использовали узкие и жесткие молоточки [52, с. 143].

3.7. Вынужденные колебания струны

Рассмотрим струну длиной l, которая закреплена на концах. Пусть функция $g(x, t)$ характеризует внешнюю силу на единицу длины струны и не зависит от движения струны, т.е. имеем источник силы бесконечной мощности. Силы сопротивления отсутствуют ($R = 0$). Тогда уравнение движения струны приобретает вид (см. (3.6)):

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g(x,t), \text{ или } \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{g(x,t)}{F}. \qquad (3.92)$$

Пусть внешняя сила периодическая во времени $g(x, t) = g(x)\exp(-i\omega t)$. Рассмотрим только вынужденные колебания; для этого необходимо найти частное решение уравнения (3.92). Колебание струны во вре-

мени будут отвечать действию внешней силы, поэтому частное решение уравнения (3.92) будем искать в виде

$$y(x,\ t) = Y(x)\exp(-i\omega t). \tag{3.93}$$

Подставим (3.93) в (3.92) и получим уравнение для амплитудной функции $Y(x)$ искомого решения

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}Y = -\frac{g(x)}{F}. \tag{3.94}$$

Используя свойства нормальных колебаний струны, можно довольно просто найти решение уравнения (3.94). Действительно, поскольку собственные формы колебаний струны $\sin(n\pi x/l) = \sin(\omega_n x/c)$ образуют полную и ортогональную систему функций на отрезке $[0,\ l]$, то мы имеем возможность, представить амплитудную функцию внешней силы $g(x)$ рядом Фурье по собственным формам струны $\{\sin(\omega_n x/c),\ n = 1,2,\ldots\}$в виде

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right), \tag{3.95}$$

где коэффициенты ряда $g_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)dx$. С учетом (3.95) перепишем (3.94) таким образом:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}Y = -\frac{1}{F}\sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right). \tag{3.96}$$

Представим функцию $Y(x)$, которая определяет амплитуду колебаний частичек струны, также в виде ряда по собственным формам колебаний струны:

$$Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right).$$

Тогда уравнение (3.96) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_n^2}{c^2}\right)\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) = -\frac{1}{F}\sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right).$$

Откуда искомые коэффициенты $y_n = \frac{-g_n c^2}{F\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)}$. Итак, вынужденные колебания струны определяются рядом

$$y(x,t) = -\frac{c^2}{F}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{\omega_n^2-\omega^2}\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\exp(-i\omega t). \qquad (3.97)$$

Решение в виде ряда (3.97) наглядно раскрывает природу явления резонанса. Согласно (3.97) для возникновения резонанса необходимо выполнение двух условий:

1) приближение частоты внешней силы ω к одной из собственных частот струны ω_n, т.е. $\omega \to \omega_n$;

2) наличие в пространственном распределении внешней силы составляющей, которая соответствует n-ой форме колебаний, т.е. $g_n \neq 0$. Например, когда $\omega \to \omega_2$, то необходимо, чтобы выполнялось условие $f_2 \neq 0$.

Если эти два условия выполняются, то амплитуда движения во времени неограниченно возрастает (поскольку анализируем систему без демпфирования), и сумма ряда (3.97) определяется фактически одним слагаемым, для которого $\omega \to \omega_n$. Физически это означает, что при резонансе струна приобретает форму колебаний, которая соответствует гармонике с номером n.

Итак, эффективность возбуждения той или другой гармоники зависит не только от соотношения частоты внешней силы и собственной частоты гармоники, но и от функции $g(x)$, которая определяет распределение амплитуды внешней силы вдоль струны. Так, если гармоническая сила сосредоточено прикладывается в узловой точке одной из гармоник струны, и частоты внешнего воздействия и гармоники совпадают, то явление резонанса все же не наблюдается.

3.8. Влияние демпфирования на движение струны

Рассмотрим влияние демпфирования на колебания струны. Как и в случае систем с сосредоточенными параметрами, воспользуемся простейшей физической моделью демпфирования, предполагая, что сила сопротивления на единицу длины пропорциональна скорости движения элемента струны с коэффициентом пропорциональности R.

Рассматривая движение струны с учетом демпфирования, необходимо также обратить внимание на некоторые особенности в поведении коэффициента демпфирования R. Физические процессы, которые служат причиной появления демпфирования в колебательных системах, чрезвычайно разнообразны. Относительно рассматриваемого случая движения струны можно вспомнить несколько существенных механизмов рассеяния энергии. Это, прежде всего, процессы преобразования механической энергии в теплоту при деформации

элемента струны. Иногда такие процессы характеризуют, вводя понятие внутреннего трения в материале. Соответствующая физическая характеристика материала — коэффициент потерь — обычно определяется по циклической деформации образцов и является паспортной характеристикой материала. Практически все материалы имеют существенную зависимость коэффициента потерь от частоты деформирования.

Для многих колебательных систем в акустике существенным механизмом рассеяния энергии есть потери на излучение, т.е. потери энергии за счет звуковых бегущих волн от колеблющегося тела. Во многих практически важных акустических системах такие потери на излучение существенно превышают потери энергии в материале. В случае тонкой струны потери на излучение очень малы. Более существенными потерями в реальной струне есть потери в опорах, т.е. потери, связанные с переходом энергии от колеблющейся струны к тому объекту, на котором закреплена струна. В музыкальных инструментах именно за счет таких потерь создается звук в окружающей среде. Здесь необходимо указать, что и для этого последнего механизма важной есть зависимость скорости потерь энергии от частоты. Это обстоятельство должно учитываться при анализе влияния демпфирования на характер движения струны.

Рассмотрим такую ситуацию для вынужденных колебаний струны под действием периодической силы

$$g(x,\ t) = g(x)\ \exp(-i\omega t). \tag{3.98}$$

Для установившихся колебаний струны, т.е. ее движения в те моменты времени, когда свободные колебания уже затухли, необходимо найти частное решение уравнения (3.6), принимая во внимание (3.98):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -2\delta(\omega)\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{g(x)}{F}\exp(-i\omega t), \tag{3.99}$$

где $c^2 = F/\rho$, $2\delta(\omega) = R(\omega)/F$. Очевидно, что изменение во времени функции $y(x,t)$ будет повторять зависимость от времени внешней силы, т.е. будет иметь вид $y(x,t) = Y(x)\ \exp(-i\omega t)$. Фазовые сдвиги при этом учитываются тем, что функция $Y(x,t)$ комплексная. Для ее определения из (3.99) получим обыкновенное дифференциальное уравнение с коэффициентом демпфирования, который соответствует заданной частоте колебаний ω:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - i2\delta(\omega)\right]Y + \frac{g(x)}{F} = 0. \tag{3.100}$$

Частное решение этого уравнения должен удовлетворять граничным условиям на концах струны. Именно поэтому при его построении целесообразно использовать свойства собственных форм колебаний идеальной струны $\sin(n\pi x/l)$, $n = 1, 2, 3\ldots$ Запишем ряды Фурье по собственным формам струны:

$$Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \tag{3.101}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \tag{3.101a}$$

Здесь g_n — известные при заданном распределении внешней силы коэффициенты:

$$g_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \tag{3.102}$$

величины Y_n должны быть определены. После подстановки формул (3.101) и (3.101а) в уравнение (3.100) получим

$$Y_n\left[\frac{\omega^2}{c^2} - i2\delta(\omega) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right] = -\frac{g_n}{F}. \tag{3.103}$$

Это соотношение будет определять значения Y_n через заданные коэффициенты g_n разложения внешней силы в ряд Фурье. Таким образом, вынужденное движение струны описывается таким выражением:

$$y(x,t) = -\frac{1}{F}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{(\omega/c)^2 - i2\delta(\omega) - (n\pi/l)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\exp(-i\omega t). \tag{3.104}$$

Здесь хорошо видно, что степень возбуждения каждой собственной формы колебаний зависит от степени близости заданного волнового числа ω/c и волнового числа собственной формы $\omega_n/c = n\pi/l$. В случае резонанса, т.е. при $\omega/c = n\pi/l$, где n — некоторый фиксированный номер, амплитуда колебаний струны остается конечной. Следует отметить, что влияние демпфирования на вынужденные колебания струны будет отражаться на тех формах, для которых можно полагать

$$\left|(\omega/c)^2 - (n\pi/l)^2\right| \approx 2\delta(\omega). \tag{3.105}$$

Для тех собственных форм, у которых $\left|(\omega/c)^2 - (n\pi/l)^2\right| >> 2\delta(\omega)$, наличие демпфирования несущественно. Следует также обратить вни-

мание, что знаменатель в (3.104) аналогичен введенному во втором разделе комплексному механическому импедансу Z системы с одной степенью свободы. В случае системы с распределенными параметрами можно говорить о комплексном импедансе каждого нормального колебания.

Несколько сложнее учитывать демпфирование при свободных колебаниях струны. Здесь необходимо найти решение однородного уравнения (3.99) ($g(x) \equiv 0$), которое удовлетворяет граничным и заданным начальным условиям:

$$y(0,t) = 0,\ y(l,t) = 0, \tag{3.106}$$

$$y(x,0) = Q_1(x),\ \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = Q_2(x).$$

Представим функции $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, которые определяют начальное возмущение, в виде рядов по собственным формам колебаний струны:

$$Q_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\ \ q_n = \frac{2}{l}\int_0^l Q_1(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx;$$

$$Q_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\ \ \beta_n = \frac{2}{\omega_n l}\int_0^l Q_2(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx. \tag{3.107}$$

Если в этих рядах отличными от нуля являются два или более коэффициентов — q_n и β_n, то это означает, что энергия начального возмущения распределяется по нескольким собственным формам колебаний, и при дальнейшем движении струны будут присутствовать несколько нормальных колебаний. Каждое из них характеризуется собственной частотой, и это нужно учитывать при рассмотрении демпфирования, которое зависит от частоты.

Рассмотрим начальное возмущение, которое соответствует некоторой конкретной форме $\sin(N\pi x/l)$. В основу дальнейшего изложения положено предположение, что заданная форма колебаний будет оставаться неизменной; изменяется лишь амплитуда. Это означает, что решение однородного уравнения (3.99) для $y(x,t)$ будем искать в виде

$$y(x,t) = Y(t)\sin\left(\frac{N\pi}{l}x\right). \tag{3.108}$$

После подстановки в выражение (3.99) при $g(x) \equiv 0$ решения (3.108) получим обычное дифференциальное уравнение для функции времени:

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2Y}{dt^2}+2\delta(\omega)\frac{dY}{dt}+\left(\frac{N\pi}{l}\right)^2 Y=0. \qquad (3.109)$$

Это достаточно простое дифференциальное уравнение, решение которого нужно искать в виде

$$Y(t)=A_N\exp(i\alpha t). \qquad (3.110)$$

Для показателя экспоненты получим равенство

$$\left(\frac{N\pi}{l}\right)^2-\frac{\alpha^2}{c^2}+i2\alpha\delta(\omega)=0. \qquad (3.111)$$

Решение квадратного уравнения $\alpha^2-i2\alpha\delta(\omega)c^2-\omega_N^2=0$ несложно найти в виде

$$\alpha=i\delta(\omega)c^2\pm\sqrt{\omega_N^2-\delta^2(\omega)c^4}. \qquad (3.112)$$

Если демпфирование отсутствует, то будем иметь $\alpha=\pm\omega_N$, т.е. система осуществляет незатухающие колебания с собственной частотой ω_N. В общем случае при отличном от нуля $\delta(\omega)$ колебание струны описывается произведением экспонент:

$$Y(t)=A_N\exp\left(-\delta(\omega)c^2t\right)\exp\left(\pm i\sqrt{\omega_N^2-\delta^2(\omega)c^4}\cdot t\right). \qquad (3.113)$$

В случае демпфирования, меньше критического $\delta^2(\omega)c^4<\omega_N^2$, имеем колебательное движение с амплитудой, которая уменьшается. Для того чтобы правильно оценить количественные характеристики такого движения в формальном решении (3.113) нужно указать, при каком значении ω надо вычислять показатель демпфирования. При этом допускают $\delta^2(\omega)c^4<<\omega_N^2$, и в (3.113) можно положить $\omega=\omega_N$ в качестве первого приближения, т.е. $\delta(\omega)=\delta(\omega_N)$. Физически это означает, что делается предположение о том, что демпфирование незначительно изменяет собственную частоту N-ой формы колебаний.

В случае необходимости полученный результат можно уточнить: вычисляем первое приближение для собственной частоты N-ой формы

$$\omega_N^{(1)}=\sqrt{\omega_N^2-\delta^2(\omega_N)c^4}, \qquad (3.114)$$

а в окончательном результате полагаем $\omega=\omega_N^{(1)}$:

$$Y(t) = A_N \exp\left(-\delta\left(\omega_N^{(1)}\right)c^2 t\right)\exp\left(\pm i\sqrt{\omega_N^2 - \delta^2\left(\omega_N^{(1)}\right)c^4}\cdot t\right). \qquad (3.115)$$

Этот процесс последовательного уточнения можно продолжать. Необходимость в таком продолжении возникает лишь в случае существенного демпфирования, т.е. тогда, когда невозможно допустить, что $\delta^2(\omega_N)c^4 << \omega_N^2$.

Сделанные выкладки касаются одной определенной формы колебаний. После этого легко получить выражение для функции $y(x,t)$ в общем случае произвольных начальных условий. Итак, движение струны — это полная сумма нормальных колебаний с неопределенными комплексными амплитудами:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\delta\left(\omega_n^{(1)}\right)c^2 t\right)\exp\left(\pm i\sqrt{\omega_n^2 - \delta^2\left(\omega_n^{(1)}\right)c^4}\cdot t\right). \qquad (3.116)$$

Действительная часть комплексного решения (3.116) имеет вид

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\exp\left(-\delta\left(\omega_n^{(1)}\right)c^2 t\right)\times$$

$$\times\left[a_n \cos\left(\sqrt{\omega_n^2 - \delta^2\left(\omega_n^{(1)}\right)c^4}\cdot t\right) + b_n \sin\left(\sqrt{\omega_n^2 - \delta^2\left(\omega_n^{(1)}\right)c^4}\cdot t\right)\right]. \qquad (3.117)$$

Выбирая значения действительных постоянных a_n и b_n, можно удовлетворить произвольным начальным условиям, эта процедура не отличается от описанной в параграфе 3.5.

Таким образом, влияние трения обусловлено в каждом нормальном колебании множителем $\exp(-\delta(\omega)c^2 t)$, который определяет затухание колебаний. Вместе с тем частоты собственных колебаний (3.114) близки к $\omega_n = n\pi c/l$, если коэффициент затухания $\delta(\omega)$ мал. Конечно, с увеличением номера n нормального колебания коэффициент затухания $\delta(\omega)$ увеличивается, поэтому высшие нормальные колебания затухают быстрее низших.

3.9. Свойства мембраны. Уравнение движения элемента мембраны

Рассмотрение простейших колебательных систем и систем, поддерживающих волновое движение, позволило раскрыть содержание волновых физических понятий, которыми описываются акустические процессы, т.е. процессы распространения волн в жидкостях и газах. Перед тем как приступить к изучению акустических процес-

сов, полезно рассмотреть примеры двумерных волновых движений. При изучении закономерностей этих движений рассмотрим такую систему, как мембрана. Оказывается, добавление еще одного пространственного измерения приводит к возникновению новых волновых явлений. Изучая их, необходимо помнить, что при переходе к новой колебательной системе важно понять новые факторы и явления, но при этом быть максимально убежденным в глубоком внутреннем единстве и схожести всех волновых процессов.

Построим математическую модель мембраны. Мембрана — это идеально гибкая, бесконечно тонкая плоская поверхность. Для того чтобы такая плоскость поддерживала волновое движение, она должна иметь два свойства. Прежде всего, элемент этой плоскости должен иметь массу. Это свойство поверхности будем характеризовать величиной ρ, кг · м$^{-2}$ — поверхностной массой мембраны. Считаем ее заданной. Понятно, что $\rho = \rho_0 h$, где ρ_0 — удельная плотность материала мембраны, h — толщина мембраны. Кроме того, должна существовать восстанавливающая сила, т.е. сила, которая стремится возвратить элемент мембраны в равновесное состояние, если он был каким-то образом из него выведен. Эта сила возникает за счет всестороннего натяжения мембраны, которое характеризуется F, Н · м$^{-1}$ — силой на единицу длины элемента мембраны. Такая абстрактная модель мембраны довольно близка по свойствам к мембране барабана.

Интуитивно ясно, что в мембране с такими свойствами возможно существование волны, для которой состояние с одинаковой фазой возникает вдоль прямой, перпендикулярной к направлению распространения волны. Здесь поведение мембраны подобно поведению системы параллельных струн с одинаковыми характеристиками. Указанные волны распространяются с постоянной скоростью без изменения формы. Но, кроме этой простейшей формы волнового движения, в мембране могут существовать еще и другие. Если начальное возмущение приходится на некоторую круговую область, то в мембране будут распространяться круговые волны. Волновое движение можно генерировать, задавая начальное возмущение в области любой формы. Понятно, что в такой ситуации при распространении волн их форма уже не будет оставаться неизменной. Вообще, картина может стать такой сложной, что мы не сможем ее легко проанализировать. Поэтому здесь ограничимся лишь случаями прямоугольной и круговой мембран.

Прежде всего, выведем уравнение движения элемента мембраны. При этом реализуется процедура, подобная той, которая использовалась при выводе уравнения движения элемента струны. Пусть поверхность недеформированной мембраны совпадает с плоскостью xOy декартовой системы координат x, y, z. Отклонение элемента мембраны от положения равновесия происходит вдоль осы Oz пер-

пендикулярно плоскости xOy. Это отклонение, которое обозначим $w(x,y,t)$, является функцией двух пространственных координат x,y и времени t.

Тогда частные производные $\partial w/\partial t$ и $\partial^2 w/\partial t^2$ определяют соответственно скорость и ускорение колеблющейся мембраны. Если зафиксировать момент времени $t = t_0$, то функция $w(x,y,t_0)$ будет определять форму колеблющейся мембраны при $t = t_0$. Зададим нормаль к поверхности мембраны и определим направляющие косинусы нормали [8]:

$$\cos\alpha = \frac{-\partial w/\partial x}{\sqrt{(\partial w/\partial x)^2 + (\partial w/\partial y)^2 + 1}},$$

$$\cos\beta = \frac{-\partial w/\partial y}{\sqrt{(\partial w/\partial x)^2 + (\partial w/\partial y)^2 + 1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{(\partial w/\partial x)^2 + (\partial w/\partial y)^2 + 1}}.$$

Здесь α, β, γ — углы между нормалью и осями декартовой системы координат соответственно x, y, z.

Сделаем важное предположение: изучая малые колебания мембраны, считаем угол γ отклонения нормали от оси Oz настолько малым, что $\cos\gamma \approx 1$. Итак, будем считать малыми не только смещения $w(x,y,t)$, но и частные производные $\partial w/\partial x$ и $\partial w/\partial y$. Отсюда вытекает, что можно пренебречь квадратами частных производных: $(\partial w/\partial x)^2 << 1$, $(\partial w/\partial y)^2 << 1$. Понятно, что этот вывод целиком аналогичен условию малости колебаний для струны. Из полученного условия малости вытекают важные следствия. Поскольку площадь поверхности мембраны определяется интегралом [8]: $S = \iint\limits_{(S)} \sqrt{1 + (\partial w/\partial x)^2 + (\partial w/\partial y)^2}\,dxdy$, то по условию малости имеем, что изменением площади поверхности мембраны в процессе колебаний можно пренебречь. Естественно, это касается как всей мембраны, так и любой ее части. Отсюда, поскольку площадь определенной части мембраны за все время колебаний считается неизменной, силу натяжения F можно считать постоянной на любом выделенном элементе мембраны (естественно при условии равномерного натяжения мембраны).

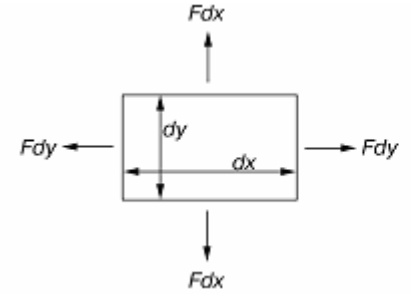


Рис. 3.19. Силы, действующие на элемент мембраны

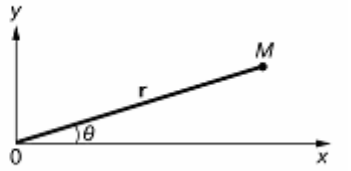


Рис. 3.20. Декартова и полярная системы координат

Для вывода уравнения движения рассмотрим бесконечно малый элемент поверхности мембраны (рис. 3.19). Действие отброшенной части мембраны нужно заменить силами, которые распределены вдоль контура выделенного элемента мембраны. Поскольку мембрана не сопротивляется изгибу (идеально гибкая), эти силы будут действовать в касательных плоскостях к мембране, перпендикулярно к контуру выделенного элемента. Запишем взятое в проекции на ось Oz соотношение второго закона Ньютона для элемента мембраны со сторонами dx и dy. Поскольку справедливо предположение о неизменности площади колеблющейся мембраны, силы натяжения на рис. 3.19 имеют вид Fdx и Fdy. Как и в случае струны, проекция на ось Oz сил, которые действуют на сторонах y и $y + dy$ выделенного элемента, равна

$$Fdx\frac{\partial w}{\partial y}(x, y+dy) - Fdx\frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = F\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dxdy. \qquad (3.118)$$

Аналогично вычисляем и вклад сил, которые действуют на сторонах x и $x + dx$ элемента. Кроме указанных сил, связанных с наличием натяжения, на мембрану может влиять дополнительная внешняя сила, которую характеризуем поверхностной плотностью $g(x,y,t)$, т.е. на выделенный элемент действует сила $g(x,y,t)dxdy$, направленная вдоль оси Oz.

С учетом того, что масса выделенного элемента равна $\rho dxdy$, получаем уравнение его движения:

$$F\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + g(x, y, t) = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (3.119)$$

Для дифференциального оператора, который является множитель при F в этом уравнении, в математической физике принятое специальное обозначение:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \qquad (3.120)$$

Этот оператор называется *оператором Лапласа*[*]. Согласно принятым обозначениям уравнения движения элемента мембраны записываем в виде

$$F\Delta w + g(x,y,t) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (3.121)$$

Такая запись понятна не только своей лаконичностью. Дело в том, что во многих случаях целесообразно рассматривать движение мембраны не в декартовой, а в другой системе координат. При этом, конечно, можно используя связь между координатными системами, вывести выражение для оператора Лапласа в новой системе координат. Но такая работа довольно громоздкая. Поскольку оператор Лапласа встречается во многих задачах математической физики, его выражения для ряда координатных систем, которые встречаются на практике, приведены в справочной математической литературе [8]. Приведем, необходимое в дальнейшем, выражение оператора Лапласа в полярной системе координат (r,θ) в виде

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \qquad (3.122)$$

В этом случае положение точки $M(r,\theta)$ на плоскости определяется расстоянием r от некоторой фиксированной точки O и углом между отрезком OM и некоторым фиксированным направлением. Если одновременно на плоскости вводятся полярная и декартова системы координат, то, точка O совмещается с началом координат, а направление отсчета угла θ определяется осью Ox (рис. 3.20).

В случае, когда внешние силы не действуют на мембрану ($q(x,y,t) = 0$), выражение (3.121) приобретает вид стандартного волнового уравнения для случая двух пространственных координат:

$$\Delta w = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad c^2 = \frac{F}{\rho}. \qquad (3.123)$$

---

[*] Лаплас (Laplace) Пьер Симон (1749—1827) — французский математик, физик и астроном.

3.10. Особенности волнового движения в мембране

Раньше было указано, что в мембране возможны волновые движения такого характера, как и для системы параллельных струн. Например, выражение

$w(x,y,t) = F(x\cos\theta + y\sin\theta - ct)$ (3.123а)

удовлетворяет волновому уравнению (3.123) (убедитесь в этом). Такое выражение представляет собой волну, распространяющуюся со скоростью c в направлении, которое образует угол θ с осью Ox. Волновые фронты представляют собой линии постоянной фазы $x\cos\theta + y\sin\theta - ct = \text{const}$, перпендикулярные этому направлению. Такие волны называются *линейчатыми*.

Если бы волновое движение типа (3.123а) было единственно возможным в мембране, то здесь не было бы ничего нового. Но, поскольку волновое уравнение (3.123) - линейное, то сумма любого числа его решений также является решением. При этом определенные комбинации волновых движений типа (3.123а) могут обусловить намного более сложные волны. Так, исходя из решения типа (3.123а), можно построить выражение

$$w(x,y,t) = \int_0^{2\pi} F(x\cos\theta + y\sin\theta - ct)\,d\theta,$$

которое также удовлетворяет волновому уравнению. Но такое решение уже не является линейчатой волной.

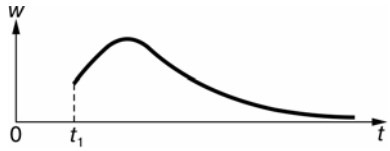


Рис. 3.21. График изменения возмущения в точке M в зависимости от времени t

Другая особенность волнового движения в мембране связана с распространением начального возмущения. Пусть начальное возмущение задано в некоторой области S_0 на плоскости xOy. Рассмотрим изменение состояния мембраны в точке M, которая находится вне области S_0. Для моментов времени $t > 0$ начальное возмущение распространяется вдоль поверхности мембраны. Но пока оно не подойдет к точке M, эта точка остается неподвижной. Пусть в момент времени $t = t_1$ передний фронт возмущения дошел к точке M. В дальнейшем оказывается [52, с. 412], что при $t > t_1$, имеем $w(M,t) \neq 0$. Это означает,

что с момента $t = t_1$, в точке M возникает возмущение, которое сначала возрастает, а потом, начиная с некоторого момента, постепенно уменьшается до нуля (при $t \to \infty$) (рис. 3.21). В этом *явлении последействия* и есть отличие плоского (двумерного) случая от пространственного (трехмерного), для которого волна, образованная вследствие некоторого начального возмущения, всегда имеет передний и задний фронты. Начальное возмущение, которое локализовано на плоскости мембраны, оказывается не локализованным во времени и характеризуется продолжительным последействием в виде остаточного возмущения. Мгновенная картина возмущения на плоскости имеет резко очерченный передний фронт, и не имеет заднего фронта. Эти особенности характерны для двумерных волн разной физической природы. Наверно сложно представить себе жизнь в таком двумерном мире, ведь каждое произнесенное слово звучало бы здесь очень долго!

3.11. Свободные колебания в прямоугольной мембране

Задача, которая будет рассматриваться далее, формулируется так. Пусть есть прямоугольная мембрана со сторонами l_x и l_y (рис. 3.22), которая закреплена на краях. В момент времени $t = 0$ известны начальные отклонения и скорости точек мембраны:

$$w(x, y, 0) = Q_1(x, y); \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x,y,0) = Q_2(x,y). \tag{3.124}$$

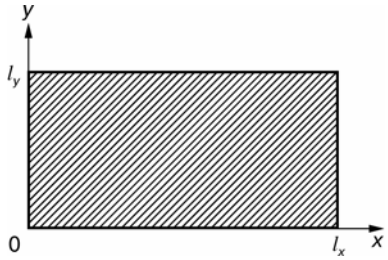


Рис. 3.22. Прямоугольная мембрана

Надо определить дальнейшее движение мембраны, если на нее не влияют никакие внешние силы. Поставленная задача будет решена, если отыщется такая функция $w(x, y, t)$, которая будет удовлетворять уравнению

$$\Delta w = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.125}$$

с граничными условиями:

$$w(0, y, t) = w(l_x, y, t) = 0,$$
$$w(x, 0, t) = w(x, l_y, t) = 0 \qquad (3.126)$$

и начальными условиями (3.124). Само описание постановки задачи показывает, что целесообразнее рассматривать ее в декартовых координатах.

Задачи в такой постановке уже рассматривались для струны, как одномерной колебательной системы. Поэтому следующий шаг в данной ситуации очевиден — необходимо искать нормальные колебания мембраны, т.е. периодические движения в ней, которые согласованы с граничными условиями.

3.11.1. Нормальные колебания

Таким образом, необходимо начинать с поиска решений вида

$$w(x, y, t) = W(x, y)\exp(-i\omega t). \qquad (3.127)$$

Подставляя (3.127) в волновое уравнение (3.125), получаем *уравнение Гельмгольца** для амплитудной характеристики $W(x, y)$:

$$\Delta W + k^2 W = 0, \quad k^2 = \omega^2/c^2. \qquad (3.128)$$

Функция $W(x, y)$ в соответствии с граничными условиями (3.126) должна обладать такими свойствами:

$$W(0, y) = W(l_x, y) = 0,$$
$$W(x, 0) = W(x, l_y) = 0. \qquad (3.129)$$

Эти требования проще всего можно было бы удовлетворить, если бы саму функцию $W(x, y)$ можно было записать в виде

$$W(x, y) = X(x)Y(y). \qquad (3.130)$$

Рассмотрим равенство (3.130), где искомая функция от двух координат представлена в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной координаты, как предположение о структуре искомого решения. Если, учитывая это допущение, рассмотреть (3.128), то получим соотношение

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} + k^2XY = 0,$$

или

* Гельмгольц (Helmholtz) Герман Людвиг Фердинанд (1821—1894) — немецкий физик и математик.

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\left[k^2 Y + \frac{d^2 Y}{dy^2}\right]. \qquad (3.131)$$

Левая сторона этого уравнения есть функция только x, а правая — только y. Причем это равенство должно сохраняться при любых значениях x и y. При таком условии единственная допустимая возможность заключается в том, чтобы считать эти выражения независимыми ни от x, ни от у, т.е. они могут равняться некоторой постоянной величине. Обозначим эту постоянную: $-\alpha^2$. Вообще сама величина α может быть комплексной и потому введение знака минус перед α^2 не имеет принципиального значения. Это сделано лишь для удобства.

Таким образом, исходя из (3.131), можно сделать вывод, что решение уравнения Гельмгольца в виде (3.130) существует, причем функции, которые входят в него, определяются из обычных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left(k^2 - \alpha^2\right) Y = 0.$$

Их общие решения имеют такой вид:

$X(x) = a_1\cos(\alpha x) + a_2\sin(\alpha x)$,

$$Y(y) = b_1 \cos\left(\sqrt{k^2 - \alpha^2} \cdot y\right) + b_2 \sin\left(\sqrt{k^2 - \alpha^2}\, y\right). \qquad (3.132)$$

Итак, установлено, что уравнение Гельмгольца (3.128) в декартовых координатах имеет решение вида (3.130). Это обстоятельство является основой утверждения о том, что уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных в декартовых координатах. Факт разделения переменных очень важен для построения решения уравнения в частных производных. Именно поэтому при математическом моделировании волновых процессов разной физической природы широко используются координатные системы, в которых разделяются переменные в уравнении Гельмгольца.

Выражения (3.132) дают решение исходного уравнения (3.128) при произвольном значении α и частоты колебаний ω (волнового числа k). Однако они не удовлетворяют краевым условиям. Согласно (3.129) должны выполняться равенства

$$X(0) = X(l_x) = 0,$$

$$Y(0) = Y(l_y) = 0. \qquad (3.133)$$

Отсюда получим такие значения произвольных величин в (3.132) (сделайте самостоятельно):

$$a_1 = 0;\ \ b_1 = 0;\ \ \alpha_n = \frac{n\pi}{l_x},\ \ n = 1, 2, \ldots,$$

$$k_{nm}^2 - \alpha_n^2 = \left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2,\ \ m = 1, 2, \ldots,\ \ n = 1, 2, \ldots \qquad (3.134)$$

Величины a_2 и b_2 остаются произвольными.

Теперь можно сказать, что нормальные колебания мембраны найдены. Периодическое движение мембраны с частотой $\omega_{nm} = ck_{nm}$ может быть описано функцией

$$w_{nm}(x, y, t) = A_{nm}W_{nm}(x, y)\exp(-i\omega_{nm}t). \qquad (3.135)$$

Действительная часть полученного комплексного решения (3.135) имеет вид

$$w_{nm}(x, y, t) = W_{nm}(x, y)[a_{nm}\cos(\omega_{nm}t) + b_{nm}\sin(\omega_{nm}t)]. \qquad (3.136)$$

Здесь A_{nm} — произвольная комплексная постоянная; a_{nm}, b_{nm} — произвольные действительные постоянные. Собственные формы и собственные частоты определяются так:

$$W_{nm}(x,y) = \sin\left(\frac{n\pi}{l_x}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l_y}y\right),$$

$$\omega_{nm} = c\pi\sqrt{\left(\frac{n}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{l_y}\right)^2},\ \ n, m = 1, 2, \ldots \qquad (3.137)$$

Проанализируем полученное решение. Как видно из (3.135)—(3.137), нормальное колебание прямоугольной мембраны, закрепленной по контуру, есть стоячая волна. Рассмотрим сначала простейшее колебание, которое соответствует случаю $n = m = 1$:

$$w_{11}(x,y,t) = A_{11}\sin\left(\frac{\pi x}{l_x}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{l_y}\right)\exp(-i\omega_{11}t).$$

Его частота $\omega_{11} = \pi c\sqrt{1/l_x^2 + 1/l_y^2}$ есть наименьшая нормальная частота, она характеризует основной тон мембраны. При колебании мембраны контур ее остается неизменным, а все точки отклоняются вместе или с одной стороны плоскости xOy, или из другой. Наибольшую амплитуду колебаний имеет точка с координатами $x = l_x/2$, $y = l_y/2$, т.е. центр мембраны. Как и для струны, такие точки называются *точками вспучивания.* Линии, точки которых не колеблются, называются *узловыми линиями.* Для нормального колебания $w_{11}(x, y, t)$ уз-

ловые линии совпадают с контуром мембраны. На рис. 3.23, *а* изображена мембрана, когда все ее точки достигают наибольшего отклонения вверх. Потом все отклонения уменьшаются и становятся равными нулю, после чего мембрана начинает прогибаться вниз.

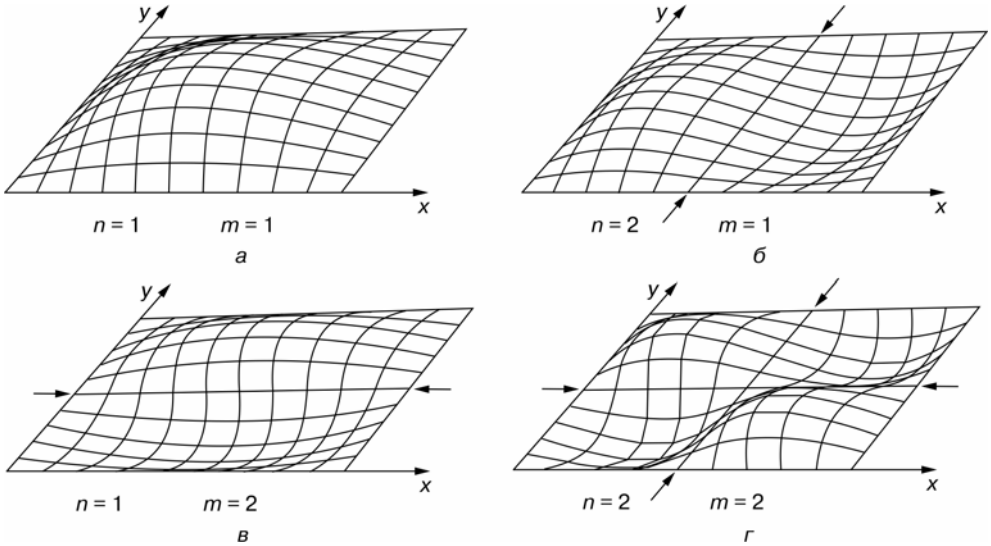


Рис. 3.23. Собственные формы первых четырех нормальных колебаний прямоугольной мембраны (стрелки указывают на узловые линии)

Рассмотрим теперь нормальное колебание $w_{21}(x, y, t)$. Узловые линии определяются из уравнений $\sin(2\pi x/l_x) = 0$ и $\sin(\pi y/l_y) = 0$. Кроме линий контура, это будет отрезок прямой $x = l_x/2$. При условии $0 < x < l_x/2$ функция $\sin(2\pi x/l_x)$ положительная, а при условии $l_x/2 < x < l_x$ — отрицательная. Поэтому левая и правая половины мембраны будут прогибаться в разные стороны (рис. 3.23, *б)*. Итак, будет две точки вспучивания. Это точки пересечения прямой $y = l_y/2$ с прямыми $x = l_x/4$, $x = 3l_x/4$. Проанализируйте самостоятельно нормальные колебания $w_{12}(x, y, t)$, $w_{22}(x, y, t)$ (рис. 3.23, *в*, *г)*.

Для всех нормальных колебаний $w_{nm}(x,y,t)$ прямоугольной мембраны можно выделить такую закономерность: кроме линий контура, количество узловых линий, параллельных оси Oy, равняется $(n - 1)$. Количество узловых линий, параллельных оси Ox, равняется $(m - 1)$. Эти линии разбивают мембрану на nm прямоугольников, причем в двух смежных (тех, что имеют общую границу) отклонения направлены в разные стороны. Центр каждого такого прямоугольника является точкой вспучивания.

Частоты собственных колебаний пропорциональны $c = \sqrt{F/\rho}$, как и в случае струны. Среди набора частот могут быть частоты, кратные

основной частоте ω_{11}, но вообще собственные частоты мембраны не находятся в гармоническом соотношении.

Обратим внимание на одну важную особенность колебания мембраны. При колебаниях струны каждой нормальной частоте соответствует одна собственная форма колебаний, которая целиком определяет форму струны. При колебаниях мембраны одной нормальной частоте может соответствовать несколько собственных форм. Такие ситуации возникают, когда отношение сторон мембраны равняется целым числам. Пусть, например, $l_x = 2l_y$, тогда

$$\omega_{nm} = \frac{\pi c}{l_y}\sqrt{\frac{n^2}{4} + m^2}. \qquad (3.138)$$

Отсюда имеем $\omega_{44} = \omega_{82}$. И таких ситуаций может быть множество. При рассмотрении нормальных колебаний такие случаи называются *вырожденными*.

Эта возможность, однако, не обусловливает какие-либо трудности в процессе определения движения мембраны по заданным начальным условиям. Степень возбуждения каждой из собственных форм W_{nm} однозначно определяется заданными функциями $Q_1(x, y)$, $Q_2(x, y)$ в выражении (3.124). Однако при решении важной в инженерном плане задачи экспериментального определения собственных форм колебаний следует помнить об указанной особенности двумерных (пространственных) колебательных систем.

Полученное решение (3.135) представляет собой стоячую волну. Аналогичное решение волнового уравнения для струны (3.53), как было показано, можно представить в виде суперпозиции двух бегущих волн, которые распространяются в противоположных направлениях. Представим также нормальное колебание мембраны как суперпозицию бегущих волн. Понятно, что два вида решений являются полностью равноправными. Используя формулу Эйлера $\exp(\pm i\xi) = \cos\xi \pm i\sin\xi$, перепишем решение (3.135) в виде:

$$w_{nm} = -\frac{A_{nm}}{4}\left[\exp\left[-i\left(\omega_{nm}t - \frac{n\pi x}{l_x} - \frac{m\pi y}{l_y}\right)\right] - \exp\left[-i\left(\omega_{nmt}t + \frac{n\pi x}{l_x} - \frac{m\pi y}{l_y}\right)\right] - \right.$$

$$\left. -\exp\left[-i\left(\omega_{nm}t - \frac{n\pi x}{l_x} + \frac{m\pi y}{l_y}\right)\right] + \exp\left[-i\left(\omega_{nm}t + \frac{n\pi x}{l_x} + \frac{m\pi y}{l_y}\right)\right]\right]. \qquad (3.139)$$

А что представляют собой каждое из слагаемых в формуле (3.139)? Очевидно, это обобщение гармонической бегущей волны на двумерный случай. Рассмотрим, например, волну

$$\exp\left[-i\left(\omega_{nm}t-\frac{n\pi x}{l_x}-\frac{m\pi y}{l_y}\right)\right] \tag{3.140}$$

с единичной амплитудой. Для характеристики волны введем понятие “фронт волны”. *Фронт волны* — это (для двумерного случая) линия, вдоль которой точки мембраны колеблются в фазе. Напомним, что фазу колеблющейся точки мембраны определяет функция, которая находится под знаком экспоненты. Отсюда уравнение фронта волны (3.140) имеет такой вид:

$$\frac{n\pi}{l_x}x+\frac{m\pi}{l_y}y-\omega_{nm}t_0=\text{const}, \tag{3.141}$$

где $t = t_0$ и фиксирует определенный момент времени. Уравнение (3.141) — уравнение прямой линии [8]. Итак, фронт бегущей волны вдоль мембраны (3.140) — это прямая линия. Запишем (3.141) иначе, что позволит наглядно изобразить направление движения фронта волны; поскольку $k_{nm} = \omega_{nm}/c$, то имеем

$$k_{nm}\left[\frac{n\pi}{l_x k_{nm}}x+\frac{m\pi}{l_y k_{nm}}y-ct_0\right]=\text{const}. \tag{3.142}$$

По аналогии с одномерной волной $f(x - ct)$ первое и второе слагаемые в квадратных скобках должны определить направление движения волны. Действительно, в соответствии с выражением (3.134) $k_{nm}^2=(n\pi/l_x)^2+(m\pi/l_y)^2$, поэтому

$$\frac{n\pi}{l_x k_{nm}}=\cos\alpha,\quad \frac{n\pi}{l_y k_{nm}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\,; \tag{3.143}$$

это есть проекции единичного вектора **N** на оси координат Ox и Oy, соответственно, а α — угол между вектором **N** и осью Ox. Тогда (3.142) перепишем так:

$$k_{nm}(x\cos\alpha + y\sin\alpha - ct_0) = \text{const}. \tag{3.144}$$

Поскольку x и y в (3.144) — это координаты точки наблюдения на фронте волны, то их можно определить как проекции некоторого вектора **r**, который связывает начало координат и точку наблюдения. Итак, (3.144) определяет скалярное произведение двух векторов $\mathbf{N} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ и $\mathbf{r} = \{x, y\}$:

$$k_{nm}(\mathbf{Nr} - ct_0) = k_{nm}(x\cos\alpha + y\sin\alpha - ct_0) = \text{const}. \tag{3.145}$$

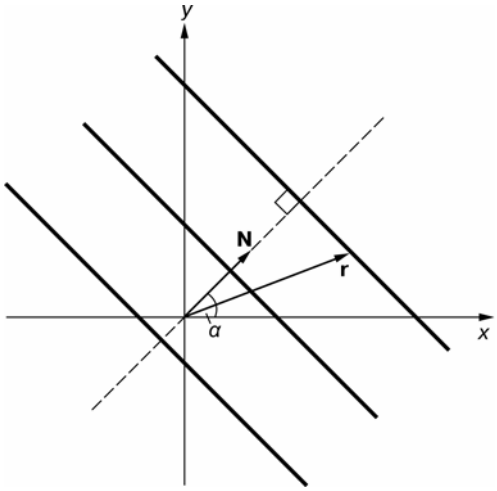


Рис. 3.24. Фронты линейчатой волны, которая двигается в направлении вектора **N**

Согласно (3.145) скалярное произведение векторов **N** и **r** есть величина постоянная при перемещении вектора **r** вдоль фронта волны. Поэтому, вектор **N** перпендикулярен к линии фронта волны и определяет тем самым направление движения фронта волны. Укажем, что $|\mathbf{r}|\cos\left(\mathbf{N},\hat{}\,\mathbf{r}\right)$ определяет расстояние вдоль направления вектора **N** от начала координат к фронту волны. Эти соображения иллюстрирует рис. 3.24.

Таким образом, для прямоугольной мембраны, как и в случае струны, *возникновение стоячих волн можно считать следствием суперпозиции бегущих волн, которые распространяются под разными углами.*

3.11.2. Движение мембраны при задании начальных условий

Найдем решение, которое удовлетворяет начальным условиям (3.124). Как и для струны, будем искать его в виде ряда, составленного из частных решений (3.136), которые определяют нормальные колебания мембраны. Каждое нормальное колебание зависит от двух индексов — n и m, поэтому нужно записывать двойную сумму:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}W_{nm}(x,y)\left[a_{nm}\cos(\omega_{nm}t)+b_{nm}\sin(\omega_{nm}t)\right]. \qquad (3.146)$$

Если индексы n и m пробегут все значения независимо друг от друга, то будут учтены все нормальные колебания.

Подставив (3.146) в начальные условия (3.124), получим

$$w(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}W_{nm}(x,y)=Q_1(x,y), \qquad (3.147)$$

$$\frac{\partial w(x,y,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{nm}b_{nm}W_{nm}(x,y)=Q_2(x,y). \qquad (3.148)$$

Формулы (3.147) и (3.148) — это разложение функции двух переменных в двойные ряды Фурье. Для определения искомых коэффициентов a_{nm}, b_{nm} воспользуемся ортогональностью собственных форм прямоугольной мембраны:

$$\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}W_{nm}(x,y)W_{pq}(x,y)dxdy=\begin{cases}\dfrac{l_xl_y}{4}, & n=p,\ m=q,\\ 0, & n\neq p \text{ або } m\neq q.\end{cases} \qquad (3.149)$$

Убедитесь самостоятельно в справедливости соотношения (3.149). Используя (3.149), находим искомые коэффициенты:

$$a_{nm}=\frac{4}{l_xl_y}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}Q_1(x,y)W_{nm}(x,y)dxdy; \qquad (3.150)$$

$$b_{nm}=\frac{4}{l_xl_y\omega_{nm}}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}Q_2(x,y)W_{nm}(x,y)dxdy. \qquad (3.151)$$

В качестве примера рассмотрим колебание мембраны, которая в начальный момент $t=0$ получила удар, вследствие которого маленькая площадка вокруг центральной точки начала двигаться вниз. В этом случае начальное отклонение $Q_1(x, y)$ везде равно нулю, а начальная скорость $Q_2(x, y)$ также равна нулю за исключением малой окрестности вокруг точки $x=l_x/2$, $y=l_y/2$, где $Q_2(x,y)=\upsilon_0$. Тогда с учетом малости площадки, к которой был приложен удар, искомые коэффициенты определяются таким образом:

$$a_{nm}=0,\quad b_{nm}=\frac{4}{l_xl_y\omega_{nm}}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}Q_2(x,y)W_{nm}(x,y)dxdy=\frac{4V}{l_xl_y\omega_{nm}}W_{nm}\left(\frac{l_x}{2},\frac{l_y}{2}\right),$$

где $\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}\upsilon_0dxdy=V$. Итак, закон движения мембраны (3.146) для определенных выше начальных условий приобретает вид

$$w(x,y,t)=\frac{4V}{l_xl_y}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{nm}}W_{nm}\left(\frac{l_x}{2},\frac{l_y}{2}\right)W_{nm}(x,y)\sin(\omega_{nm}t). \qquad (3.152)$$

Следует отметить, что в отличие от струны, собственные частоты мембраны не кратны основной частоте ω_{11}. Поэтому движение мембраны не будет периодическим.

Анализ вынужденных колебаний мембраны полностью аналогичен рассмотрению задачи о вынужденных колебаниях струны (см. параграф 3.7), поэтому предлагаем читателю провести его самостоятельно.

3.12. Свободные колебания круглой мембраны

Рассмотрим задачу о колебании круглой мембраны радиуса a, закрепленной по внешнему контуру. Техника получения решения данной задачи полностью аналогична случаю колебаний прямоугольной мембраны и базируется на общих свойствах нормальных колебаний.

Для изучения свойств нормальных колебаний круглой мембраны используют полярные координаты r, θ, начало которых размещено в центре окружности контура мембраны. Искомая функция $w(r, \theta, t)$ определяется из уравнения (3.123), которое с учетом (3.122) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (3.153)$$

Искомая функция $w(r, \theta, t)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$W(a, \theta, t) = 0, \qquad (3.154)$$

и начальным условиям:

$$w(r, \theta, 0) = Q_1(r, \theta), \ \frac{\partial w(r,\theta,0)}{\partial t} = Q_2(r,\theta). \qquad (3.155)$$

Чтобы определить нормальные колебания мембраны, представим искомую функцию в виде

$$w(a, \theta, t) = W(r, \theta)\exp(-i\omega t). \qquad (3.156)$$

Для амплитудной характеристики по тем же самым соображениям, что и для прямоугольной мембраны, естественно предположить существование решения в виде

$$W(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta). \qquad (3.157)$$

После подстановки (3.156), (3.157) в волновое уравнение (3.153) получим такое уравнение:

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} + k^2r^2 + \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0, \ \ k = \frac{\omega}{c}. \qquad (3.158)$$

Здесь видим уже знакомую из предыдущего параграфа ситуацию: сумма двух функций (одна зависит от r, а вторая — от θ) должна равняться нулю при любых значениях аргументов. Единственная возможность удовлетворить такому требованию это, когда слагаемые — постоянные — одинаковые по величине и противоположные по знаку. Обозначив эту постоянную γ^2, будем иметь два уравнения:

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -\gamma^2 \text{ или } \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \gamma^2\Theta = 0; \tag{3.159}$$

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} + k^2r^2 = \gamma^2 \text{ или } \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\gamma^2}{r^2}\right)R = 0. \tag{3.160}$$

Решение уравнения (3.159) очень просто получить, а именно:

$$\Theta(\theta) = A\cos(\gamma\theta) + B\sin(\gamma\theta). \tag{3.161}$$

Поскольку рассматривается круговая мембрана ($0 \le \theta \le 2\pi$), то решение в виде (3.161) должно быть периодической функцией угла θ с периодом 2π. Это возможно, когда постоянная γ равна целому числу, т.е. $\gamma = n = 0,1,2, \ldots$ В случае секторной мембраны, рассмотрение которой предлагается как задача в конце раздела, условия на сторонах $\theta = \text{const}$ можно свести к некоторому трансцендентному уравнению для определения γ.

После определения набора допустимых значений $\gamma = n$ уравнение (3.160) для радиальной функции $R(r)$ приобретает вид

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0. \tag{3.162}$$

Такое уравнение возникает во многих физических задачах, впервые оно (середина XVII ст.) появилось в математической литературе в работе Эйлера по колебаниям круговой мембраны. Систематически исследовал свойства решений этого уравнения Бессель*, поэтому уравнение (3.162) носит его имя, а специальные функции, которые являются его решениями, называются *функциями Бесселя*.

В наше время решения (3.162) хорошо изучены с точки зрения, как их аналитических свойств, так и вычисления их значений для разных аргументов. Существуют подробные таблицы, хотя сейчас важнее то, что для их вычисления есть простые алгоритмы, реализованные на ЭВМ.

Уравнение (3.162) является уравнением второго порядка и должно иметь два линейно независимых решения. Существуют два таких

---

* Бессель (Bessel) Фридрих Вильгельм (1784—1846) — немецкий астроном.

решения, для которых приняты специальные обозначения $J_n(kr)$, $N_n(kr)$ (иногда $Y_n(kr)$). Первое из них называется функцией Бесселя первого рода, а второе — функцией Бесселя второго рода (иначе функцией Неймана*) n-го порядка. Величина kr определяет аргумент функции Бесселя.

О характере функций, которые являются решениями (3.162), можно судить, сравнивая представления в виде ряда по степеням аргумента функции Бесселя первого рода $J_n(x)$ и такой простой и обычной функции, как синус:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(n+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \ldots\right], \qquad (3.163)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Отсюда видно, что функции Бесселя достаточно близки по своей природе к хорошо известным тригонометрическим функциям.

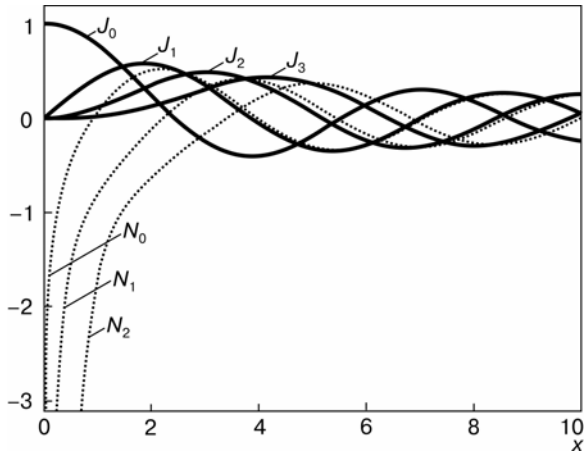


Рис. 3.25. Графики функций Бесселя $Y_n(x)$, $N_n(z)$, $n = 0, 1, 2$

Некоторое представление о характере поведения этих функций и об отличии в поведении функций первого и второго рода дает рис. 3.25, где изображены графики этих функций. Характерно, что все функции второго рода при приближении x к нулю стремятся в минус бесконечность. Характер стремления определяется главными членами в их представлениях вблизи нуля [49]:

---

* Нейман (Neumann) Франц Ернст (1798—1895) — немецкий физик и математик.

$$N_n(x) \underset{x\to 0}{=} \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\ln(x), & n=0, \\ -\dfrac{(n-1)!}{\pi}\left(\dfrac{2}{x}\right)^n, & n>0. \end{cases} \tag{3.164}$$

Для дальнейших выкладок необходимо привести некоторые свойства функций Бесселя, которые представим как краткую сводку формул для функций Бесселя первого рода [49]:

$$J_n(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x),$$

$$\frac{d}{dx}J_n(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right],$$

$$\int J_n^2(x)xdx = \frac{x^2}{2}\left[J_n^2(x) - J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)\right], \tag{3.165}$$

$$\int x^n J_{n-1}(x)dx = x^n J_n(x),$$

$$\int J_n(\alpha x)J_n(\beta x)xdx = \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\left[\alpha J_{n+1}(\alpha x)J_n(\beta x) - \beta J_n(\alpha x)J_{n+1}(\beta x)\right].$$

Поскольку $N_n(kr)$ неограниченно возрастает при приближении к центру мембраны, выражение для искомой амплитуды прогиба мембраны (т.е. собственной формы мембраны) следует записать в виде

$$W(r,\theta) = J_n(kr)\left[A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right],\ n = 0,1,2,\ldots \tag{3.166}$$

Если выделить симметричные колебания мембраны (относительно направления $\theta = 0$), то формы колебаний, которые соответствуют $\cos(n\theta)$ и $\sin(n\theta)$, будут полностью идентичны и лишь повернуты на 90° одна относительно другой. В связи с этим в дальнейшем при рассмотрении нормальных колебаний будем ограничиваться выражением

$$W(r,\ \theta) = AJ_n(kr)\cos(n\theta), \tag{3.167}$$

где $k = \omega/c$ пока произвольная величина. Набор собственных частот и полную определенность в характере собственных форм получим, подставив решение (3.167) в граничное условие $W(a,\ \theta) = 0$. Это приводит к трансцендентному уравнению

$$J_n(ka) = 0. \tag{3.168}$$

Рассматривая асимптотическое выражение для $J_n(ka)$ (первое соотношение в (3.165)), можно установить, что (3.168) имеет для каждого n бесконечное множество корней с номерами m=1,2,... Отсюда, корни с высокими номерами m можно определить так:

$$k_{nm}a = \frac{(2m-1)\pi}{2} + \frac{(2n+1)\pi}{4}, \ (m >> 1). \qquad (3.169)$$

Для первых номеров m корни (3.168) определяют численными методами, приведем несколько первых корней $k_{nm}a = \pi\beta_{nm}$, где:

$$\begin{aligned} &\beta_{01} = 0{,}7655; \quad \beta_{02} = 1{,}7571; \quad \beta_{03} = 2{,}7546; \\ &\beta_{11} = 1{,}2197, \quad \beta_{12} = 2{,}2331, \quad \beta_{13} = 3{,}2383, \\ &\beta_{21} = 1{,}6348, \quad \beta_{22} = 2{,}6792, \quad \beta_{23} = 3{,}6988. \end{aligned} \qquad (3.170)$$

Бесконечный набор корней (3.168) определяет бесконечный набор собственных частот и собственных форм нормальных колебаний:

$$\begin{aligned} &\omega_{nm} = ck_{nm}, && n = 0,1,2,... \\ &W_{nm}(r,\theta) = J_n(k_{mn}r)\cos(n\theta), && m = 1,2,.... \end{aligned} \qquad (3.171)$$

Понятно, что формы колебаний определяются с точностью до постоянного множителя.

Используя значение интегралов в (3.165), можно доказать ортогональность собственных форм мембраны:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} W_{nm}(r,\theta)W_{pq}(r,\theta)rdrd\theta = \begin{cases} \varepsilon\pi a^2[J_n'(k_{nm}a)]^2, & n = p, m = q, \\ 0, & n \neq p \ \text{ або } \ m \neq q. \end{cases} \qquad (3.172)$$

Здесь $\varepsilon = 1$ при $n = 0$ и $\varepsilon = 0{,}5$ при $n \neq 0$. Запись $J_n'(k_{nm}\alpha)$ означает производную от функции Бесселя по полному аргументу.

Ортогональность собственных форм колебаний мембраны дает возможность решить задачу об определении движения мембраны по заданным начальным условиям. Согласно общему свойству нормальных колебаний определим движение мембраны при произвольных начальных условий как суперпозицию нормальных колебаний:

$$w(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(r,\theta)[a_{nm}\cos(\omega_{nm}t) + b_{nm}\sin(\omega_{nm}t)]. \qquad (3.173)$$

Постоянные a_{nm} и b_{nm} этих рядов находим уже по хорошо известной процедуре:

$$a_{nm} = \frac{1}{\varepsilon\pi a^2[J_n'(k_{nm}a)]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} Q_1(r,\theta)W_{nm}(r,\theta)rdrd\theta,$$

$$b_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}\varepsilon\pi a^2[J'_n(k_{nm}a)]^2}\int_0^a\int_0^{2\pi} Q_2(r,\theta)W_{nm}(r,\theta)rdrd\theta. \qquad (3.174)$$

Записывая (3.171) для собственных форм колебаний мембраны, ограничиваемся лишь функцией $\cos(n\theta)$ при определении угловой зависимости. Ясно, что выражение для $W_{nm}(r, \theta)$, будет удовлетворять уравнение Гельмгольца в полярных координатах, если заменить $\cos(n\theta)$ на $\cos(n\theta + \alpha_{nm})$. Возможность такой замены указывает на то, что мембрана имеет для одной собственной частоты бесконечное множество собственных форм, т.е. наблюдаются указанные для прямоугольной мембраны случаи вырождения. Понятно, что это не вызывает затруднений при решении задачи, поскольку вся неопределенность устраняется заданием конкретного вида функций $Q_1(r, \theta)$ и $Q_2(r, \theta)$.

Как и в случае прямоугольной мембраны, каждая собственная форма колебаний мембраны характеризуется своими узловыми линиями. В данном случае такими линиями являются узловые окружности и узловые диаметры, которые определяются соответствующими уравнениями:

$$J_n(k_{nm}r) = 0, \quad \cos(n\theta + \alpha_{nm}) = 0. \qquad (3.175)$$

Первое из этих уравнений определяет m окружностей, концентрических с контуром мембраны; радиусы r_q этих окружностей определяются соотношением: $k_{nm}r_q = k_{nq}a$, отсюда

$$r_q = k_{nq}a/k_{nm}, \quad q = 1, 2, \ldots, m. \qquad (3.176)$$

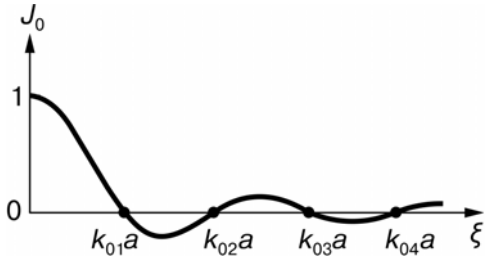


Рис. 3.26. График функции $J_0(\xi)$

Понятно, что корни k_{nq} должны удовлетворять неравенству: $k_{nq} \le k_{nm}$, а при $q = m$ радиус r_m должен совпадать с радиусом мембраны a. В качестве примера на рис. 3.26 приведен график функции Бесселя нулевого порядка. Корнями уравнения $J_0(k_{0m}a) = 0$ есть $k_{01}a$, $k_{02}a$, $k_{03}a$, $k_{04}a$, … Если рассматривать собственную форму колебаний W_{03}, то, кроме контура мембраны, собственная форма этого колебания имеет две узловых окружности, радиусы которых находим из равенств $k_{03}r_1 = k_{01}a$ и $k_{03}r_2 = k_{02}a$; итак, $r_1 = k_{01}a/k_{03}$ и $r_2 = k_{02}a/k_{03}$.

Второе из уравнений (3.175) определяет n узловых диаметров мембраны: действительно, $(n\theta + \alpha_{nm}) = (2p - 1)\pi/2$, отсюда находим $\theta_p = (2p - 1)\pi/(2n) - \alpha_{nm}/n$, $p = 1, 2, \ldots, n$. На рис. 3.27 изображены собственные формы первых нормальных колебаний круглой мембраны. Белый и черный цвета на рис. 3.27 указывают на то, что смежные участки мембраны колеблются в противофазе.

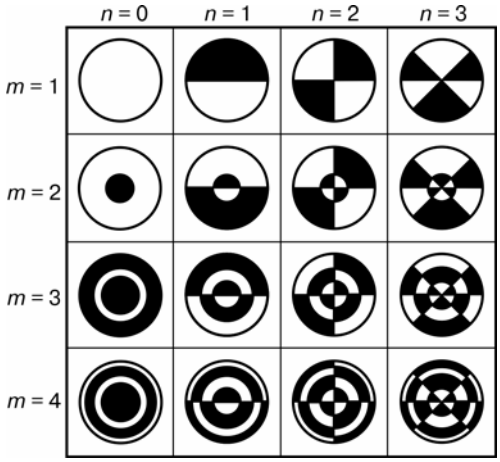


Рис. 3.27. Собственные формы первых нормальных колебаний круглой мембраны

Понятно, что мембрана любой формы имеет характерную совокупность собственных форм колебаний. Это утверждение справедливо и для таких объектов, как тонкая пластинка. Модель тонкой пластинки можно построить подобно модели мембраны, с той разницей, что восстанавливающая сила при ее колебании определяется изгибной упругостью, а сила натяжения отсутствует. Мы заговорили о пластинках, чтобы рассказать об экспериментах, которые впервые провел Хладни*. Он заметил, что, когда на металлическую или стеклянную пластинку насыпать слой мелкого песка и потом возбуждать колебания, проводя по краю пластинки смычком, то песчинки выстроятся в геометрические фигуры. Ситуация для нас понятна: песчинки ссыпаются с частей пластинки, которые колеблются, и накапливаются вдоль узловых линий. Полученные таким образом картины распределения узловых линий называют *фигурами Хладни*. Возможность “сделать звук видимым” волновала не только ученых того времени, но и многих людей. В связи с этим есть интересный исторический факт. В 1809 г. во время пребывания в Париже Хладни был приглашен продемонстрировать свои

* Хладни (Chladni) Ернст Флоренс Фридрих (1756—1827) — немецкий физик.

эксперименты в присутствии Наполеона* и всего двора. Вот как описывает свои впечатления Хладни [**, с. 26-27]:

“Когда я вошел, он находился в центре комнаты, очень доброжелательно поздоровался со мной. Наполеон проявил большую заинтересованность к моим экспериментам и разъяснениям, и как эксперт по математическим вопросам попросил все объяснить более подробно, что мне было нелегко сделать. Он был хорошо осведомлен не только о том, что пока невозможно выполнить все необходимые расчеты для пластин неправильной формы, но и о том, что когда это и можно будет сделать, результаты будут очень полезны и для многих других объектов”.

Наверное, император был поражен увиденным: на следующий день Хладни получил вознаграждение в размере 6000 франков и, кроме этого, был назначен приз в 3000 франков за адекватное математическое описание фигур Хладни. В 1816 г. это вознаграждение получила французская женщина-математик Софи Жермен***. Фактически эксперименты Хладни обусловили постановку новой задачи математической физики — задачи о колебаниях мембраны и пластины.

В наши дни фигуры Хладни продолжают использоваться для изучения колебаний подвижной поверхности электроакустического преобразователя (например, диффузора громкоговорителя), колебаний в деках фортепиано, струнных музыкальных инструментов и, в частности, тонкой настройки скрипок высокого качества. Но теперь в большинстве случаев для визуализации фигур Хладни вместо песчинок используется голографическая техника.

3.13. Задачи

3.1. Найдите частоту колебаний струны длиной 10 см прямоугольного сечения $0{,}2 \times 0{,}4$ мм^2. Удельная плотность материала струны $\rho_0 = 7{,}8$ г/см^3, натяжение $F = 10$ Н.

Ответ: ≈ 633 Гц.

3.2. Определите натяжение стальной струны длиной $l = 0{,}8$ м и диаметром 0,3 мм, чтобы ее основная частота была равна 200 Гц.

Ответ: ≈ 56 Н.

---

* Наполеон I, Наполеон Бонапарт (Napoleon Bonaparte) (1769—1821) — французский государственный деятель и полководец, первый консул Французской республики (1799—1804), император французов (1804—1814 и март—июнь 1815).

** Штокман Х.-Ю. Квантовый хаос. — М.: Физматлит, 2004. — 376 с.

*** Жермен (Germain) София (1776—1831) — французский математик и механик.

3.3. Определите длину волны у стальной бесконечной струны диаметром 0,2 мм и натяжением 10 Н, если частота возбуждающей силы 200 Гц.

Ответ: ≈ 1 м.

3.4. Определите сдвиг фаз колебаний в точках стальной бесконечной струны, отдаленных одна от другой на 12 см, которая возбуждается на частоте 60 Гц. Диаметр струны 0,1 мм, натяжение 10 Н.

Ответ: ≈ 6,48°.

3.5. Импульс треугольной формы, который имеет длину l, отражается от закрепленного конца струны, по которой он распространяется. Нарисуйте форму импульса после отражения части его длиной: а) $l/4$, б) $l/2$, в) $3l/4$, г) l. Начертите график изменения скорости частиц вдоль отраженного импульса в каждом случае.

3.6. Найдите собственные колебания конечной струны длиной l, закрепленной на концах, если начальные условия таковы:

$$y(x,0)=\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)+0,5\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right),\ \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=0\,.$$

Постройте графики решения для разных моментов времени. Является ли это решение периодическим по времени? Каков его период?

Ответ: $y(x,0)=\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi c}{l}t\right)+0,5\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{3\pi c}{l}t\right)$.

3.7. Найдите решения задачи 3.6 при начальных условиях

$$y(x,0)=0,\ \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right).$$

Ответ: $y(x,0)=\frac{l}{3\pi c}\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{3\pi c}{l}t\right)$.

3.8. Веревка массой 0,85 кг натянута между двумя опорами, размещенными на расстоянии 30 м одна от другой. Сила натяжения веревки равна 1950 Н. Чему равно время прохождения импульс от одной опоры до другой?

Ответ: 0,11 с.

3.9. Покажите, что работа, которая необходима для отклонения центра струны на некоторое расстояние, равна сумме энергий гармоник, которые возбуждаются, когда струну отпустить.

3.10. Вдоль струны навстречу друг другу распространяются две одинаковые волны; энергия каждой равна E. Какой будет кинетическая $E_К$ и потенциальная $E_П$ энергии в момент полного падения волн одна на другую, если отклонение частиц струны в двух волнах: а) одинаково по направлением, б) противоположно.

Ответ: а) $E_К = 0$, $E_П = 2E$, б) $E_К = 2E$, $E_П = 0$.

3.11. Стальная струна (масса 0,01 кг, длиной 2 м, сила натяжения 10 Н) колеблется на частоте первой гармоники. Определите частоту колебаний и амплитуду скорости в точке 0,5 м от каждого конца струны, если амплитуда отклонения в центре струны равняется 0,02м. Определите полную энергию основной моды колебаний.

Ответ: 11,2 Гц; 0,99 м/с; 0,00494 Дж.

3.12. Скорость волны в струне равна 480 м/с. На каком расстоянии друг от друга находятся узлы стоячей волны с частотой 86 Гц.

Ответ: 2,79 м.

3.13. Скрипичная струна колеблется с частотой 196 Гц. С какой частотой она будет колебаться, если ее прижать на расстоянии 1/4 от конца?

Ответ: 261 Гц.

3.14. Точечная масса M прикреплена в некоторой точке к бесконечной струне, которая имеет волновое сопротивление ρc. При распространении вдоль струны поперечной волны с частотой ω она частично отражается от этой массы, а частично проходит. Граничные условия состоят в том, что смещение струны в непосредственной близости справа и слева от массы одинаковы, а разность поперечных сил в этих самых точках равняется произведению массы на ее ускорение. Обозначив A_1, B_1 и A_2 амплитуды соответственно падающей, отраженной и прошедшей волн покажите, что

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{-iq}{1+iq}; \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1+iq}; \quad q = \frac{\omega M}{2\rho c}.$$

3.15. Определите частоту основного колебания прямоугольной мембраны с поверхностной плотностью материала $5{,}4 \cdot 10^{-2}$ кг/м^2 и натяжением по контуру 50 Н/м, если ее размеры 4×6 см.

Ответ: 456 Гц.

3.16. Мембрана размером $a \times b$ возбуждается на наиболее низкой собственной частоте, которая равняется 500 Гц, с амплитудой смещения в центре 2 мм. Определите амплитуду смещения и скорости в точке $A(a/4,\ b/4)$.

Ответ: 10^{-3} м, π м/с.

3.17. Определите частоту колебаний круглой мембраны диаметром 3 см, если скорость распространения волн $c = 60$ м/с.

Ответ: 766 Гц.

3.18. Прямоугольная мембрана размером 3×4 см возмущается так, что на ее большей стороне помещается три узловые линии. Опре-

делите частоту колебаний мембраны, если ее натяжение по контуру равняется 10 Н/м, а поверхностная плотность — $2 \cdot 10^{-3}$ кг/м^2.

Ответ: 3940 Гц.

3.19. Определите собственную частоту колебаний круглой мембраны в двух случаях: первый — мембрана имеет один узловой диаметр, второй — одну узловую окружность; диаметр мембраны равен 10 см, натяжение по контуру 50 Н/м, а поверхностная плотность материала — $5 \cdot 10^{-3}$ кг/м^2.

Ответ: $f_{01} = 610$ Гц, $f_{02} = 879$ Гц.

3.20. Убедитесь в том, что полная энергия круговой мембраны при ее колебании на основной моде равняется $0{,}135\pi a^2\rho\omega^2 A^2$, где a — радиус, ρ — поверхностная плотность, ω — угловая частота колебаний, A — амплитуда в центре мембраны.

3.21. Найдите колебание круглой мембраны радиусом a с такими начальными условиями: $w(r, 0) = 0$; $\dfrac{\partial w(r,0)}{\partial t} = \begin{cases} \upsilon_0, & 0 \le r \le a_1, \\ 0, & a_1 < r \le a. \end{cases}$

Ответ: $w(r,t) = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\upsilon_0 a_1 J_1(k_n a_1)}{\omega_n{}^2 a^2 J_1{}^2(k_n a)} J_0(k_n r)\sin(\omega_n t)$,

где k_n, $n = 1, 2, \ldots$ — корни уравнения $J_0(k_n r) = 0$, $k_n = \omega_n / c, c = \sqrt{F/\rho}$.

3.22. Найдите колебание круглой мембраны радиусом a (F — сила натяжения, ρ — поверхностная плотность), если в начальный момент $t = 0$ мембрана оттянута так, что имеет форму параболоида вращения, т.е. $w(r, 0) = A(1 - r^2/a^2)$. Начальная скорость равна нулю: $\partial w(r, 0)/\partial t = 0$. При нахождении решения воспользуйтесь формулами:

$$\int_0^x xJ_0(x)dx = xJ_1(x); \int_0^x x^3 J_0(x)dx = 2x^2 J_1(x) + (x^3 - 4x)J_1(x).$$

Ответ: $w(r,t) = 8A\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0(k_n r)}{a^3 k_n{}^3 J_1(k_n a)}\cos(\omega_n t)$,

где k_n, $n = 1, 2, \ldots$ — корни уравнения $J_0(k_n a) = 0$, $k_n = \omega_n / c$, $c = \sqrt{F/\rho}$.

3.23. Квадратная (со стороной b) мембрана, которая имеет в начальный момент $t = 0$ форму $Axy(b - x)(b - y)$, где $A > 0$ — достаточно малое число, начинает колебание без начальной скорости. Исследуйте свободные колебания мембраны.

Ответ: $w(x,y,t)=\dfrac{64Ab^4}{\pi^6}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{b}\sin\dfrac{(2m-1)\pi y}{b}}{(2n-1)^3(2m-1)^3}\times$

$$\times\cos\left[\sqrt{(2n-1)^2+(2m-1)^2}\cdot\frac{c\pi t}{b}\right].$$

3.24. Определите нормальные частоты и собственные формы колебания мембраны (F — сила натяжения, ρ — поверхностная плотность) в виде сектора (рис. 3.28). Мембрана закреплена по контуру.

Ответ: нормальные частоты ω_{nm} определяются из уравнения

$J_{\frac{n\pi}{\theta_0}}\left(\omega_{nm}a/c\right)=0;\ W_{nm}(r,\theta)=J_{\frac{n\pi}{\theta_0}}\left(\omega_{nm}a/c\right)\sin\left(n\pi\theta/\theta_0\right),\ (n,\ m=1,2,\ldots),$

$c=\sqrt{F/\rho}$.

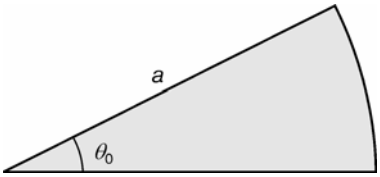


Рис. 3.28. К задаче 3.24

РАЗДЕЛ 4

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

> Линейные уравнения очень важны. Они *настолько* важны, что физики и инженеры, пожалуй, половину своего времени тратят на решение линейных уравнений. Главная причина заключается в том, что *основные законы физики часто линейны.* Если мы поняли линейные уравнения, мы готовы в принципе понимать очень многие вещи.
>
> *Г. Фейнман** [29, вып. 2, с. 422]

Явление распространения волн с давних времен побуждало ученых к размышлениям. Леонардо да Винчи** в XV ст. писал о волнах [***,с. 350]: “Импульс намного быстрее воды, потому что многочисленны случаи, когда волна бежит от места своего возникновения, а вода не двигается с места, - подобие волн, образуемых в мае на нивах течением ветров; волны кажутся бегущими по полю, между тем нивы со своего места не сходят”.

Наш мир наполнен волнами. Образно говоря, волны “разбежались” из физики и охватили много процессов в живой и неживой природе. Акустические, иначе упругие, звуковые волны представляют процесс распространения колебаний в упругой среде.

Четвертый раздел посвящен построению математической модели акустической среды и соответствующих уравнений, с помощью которых можно будет изучать упругие волны в жидкостях и газах. Акустику жидкостей и газов будем рассматривать совместно: возмущение и в жидкости, и в газе одинаково передается силами давления, которые возникают при сжатии или расширении некоторой части жидкости или газа. Поэтому термин “жидкость”, естественно, обозна-

---

* Фейнман (Feynman) Ричард Филипп (1918—1988) — американский физик, лауреат Нобелевской премии (1965).

** Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci) (1452—1519) — итальянский художник, скульптор, ученый и инженер.

*** Леонардо да Винчи. Избранные естественнонаучные произведения. — М.: Изд-во АН СССР, 1955. — 1027 с.

чает как капельные жидкости, так и газы. В упругих твердых телах возникают, кроме давления, еще и сдвиговые силы при изменении формы тела. В отличие от упругих твердых тел жидкости и газы не способны сдерживать силы сдвига, поэтому жидкости и газы не имеют своей формы, а принимают форму сосуда. Вследствие этого есть важные отличия в акустическом поведении твердых тел и жидкостей. (Упругие волны в твердых телах рассмотрим в шестом разделе.)

4.1. Полная система уравнений акустики и ее линеаризация

Мир звуков настолько разнообразен и его роль столь велика в нашей жизни, например, многочисленные технические применения звуковых колебаний, что кажется удивительной возможность описать все это многообразие одной или несколькими математическими формулами. Вместе с тем при определенных ограничениях это возможно. Именно такая задача будет предметом исследования данного раздела. Его результатом будет получение так называемого волнового уравнения, в решении которого содержится много конкретных волновых процессов: хорошо известных по опыту, и других, менее очевидных, и даже мало изученных. Конечно, для решения поставленной задачи будет необходимо осуществить идеализацию и тем самым ограничить круг рассматриваемых явлений.

4.1.1. Модель акустической среды

Начнем с идеализации среды, в которой распространяются звуковые волны, т.е. с построения ее математической модели. Основные свойства математической модели среды такие.

1. Среда (полагаем) сплошная, несмотря на то, что реальные среды состоят из атомов и молекул, и, следовательно, дискретные. Под частицей среды, следует понимать не отдельный атом или молекулу, а малый, по сравнению с расстоянием, где состояние среды изменяется существенно (например, длина волны), “кусочек” среды, который состоит из очень большого числа атомов или молекул. Для газов это требование еще более жесткое: частица должна быть большой по сравнению с длиной свободного пробега молекул. Сплошная среда характеризуется плотностью $\rho(\mathbf{r},t)$, кг/м^3.

2. Среда (предположим) идеально сжимаемая — это означает, что частица среды под влиянием внешних сил изменяет свой объем, а при снятии нагрузки возвращается к прежнему объему. При этом можно считать степень сжатия постоянной на всем протяжении частицы, а силы взаимодействия между соседними частичками перпендикулярными к поверхности их раздела; такую силу, которая действует на единице площади, называют *давлением*. Давление считается

положительным, когда оно сжимающее. Такая ситуация с взаимодействием между частицами характерна для жидкости и газообразных сред. Как отмечалось, в твердых телах, кроме давления, возникают еще и упругие напряжения сдвига при изменении формы частиц. Поэтому существуют важные отличия в акустическом поведении твердых тел и жидкостей.

3. Среда (считаем) не проводит теплоту и, следовательно, теплообмен между ее отдельными частицами исключен. Таким образом, при распространении звуковых волн в среде, объемные деформации этой среды происходят без теплообмена. Это является важным моментом. Ведь, конечно, всякая среда при сжатии нагревается, а при расширении охлаждается, а давление зависит не только от степени сжатия среды, но и от ее температуры. Отсюда понятно, что восстанавливающая упругая сила будет зависеть от того, успевают ли выравниваться температурные разности, которые возникают в звуковой волне.

На самом деле, разности температур, в области звуковых частот (обычно это диапазон частот от 20 Гц до 20 кГц), практически не успевают выравниваться, т.е. справедливо предположение об отсутствии теплообмена. Как известно, такие процессы называют *адиабатическими*. Тем не менее, укажем, что к адиабатичности процесса сжатия-растяжение среды в области очень высоких частот нужно относиться осторожно. Действительно, для гармонической волны такие параметры среды, как плотность и температура (T), изменяются вдоль пространственной координаты x по гармоническому закону, т.е. $T \sim \sin(kx)$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны. Отсюда градиент температур $\partial T/\partial x \sim (2\pi/\lambda)\cos(kx)$. Как видим, он возрастает при увеличении частоты волны f (или уменьшении $\lambda = c/f$, c — скорость звука). Но поток теплоты Q между частичками среды пропорционален градиенту температуры $Q \sim \partial T/\partial x$ и, соответственно, Q возрастает с увеличением f.

Можно предположить, что при уменьшении частоты, когда процесс деформации среды происходит довольно медленно, адиабатический закон не выполняется. На практике это предположение не выполняется, поскольку участки с небольшим отличием температур размещаются на расстоянии половины длины волны одна от другой, и при уменьшении частоты одновременно с отрезком времени возрастает и это расстояние, т.е. уменьшается градиент температуры. Поэтому адиабатические условия не нарушаются даже на наиболее низких (инфразвуковых) частотах.

Построенная модель среды получила название *идеально сжимаемой жидкости*, или коротко — *идеальная жидкость,* или *идеальная акустическая среда.*

Следует отметить, что модель акустической среды не описывает такого важного свойства реальных сред, как поглощение звука при распространении звуковой волны. Поглощение звука — это явление необратимого перехода энергии звуковой волны в другие виды энергии, в частности, в тепловую. Это обусловлено такими свойствами реальных сред, как объемная вязкость, вязкость сдвига и теплопроводность среды. Например, при наличии вязкости сдвига сила, которая действует на поверхность частицы, уже не строго нормальна к ней, а имеет еще касательную компоненту. Понятно, что в этом случае частички не могут свободно проскальзывать. Поэтому часть работы, которая выполняется волной над средой, идет на преодоление касательной компоненты необратимо — и звук затухает. Нужно сказать, что поглощение звука существенно зависит от частоты и на высоких частотах становится значительным. Это, конечно, характерно для ультразвуковых волн, частоты которых больше, чем 20 кГц. В звуковом диапазоне частот тоже возникают задачи, где нужно учитывать затухание звука вследствие поглощения. Например, при акустическом проектировании концертного зала для частот свыше 2000 Гц уже нужно принимать во внимание поглощение звука в воздухе, которое возрастает с увеличением частоты.

Вообще физика механизма поглощения звука сложна, и не рассматривается в нашей книге (рекомендуем работы [20, 31, 33]). При необходимости можно учесть эффект поглощения энергии звука, не выходя за границы построенной модели акустической среды (см. параграф 5.3). Это является очень важным моментом для модели идеально сжимаемой жидкости, ведь она действительно содержит в себе основные свойства реальных жидкостей и газов, что позволяет изучать распространение звуковых волн в широком диапазоне частот.

Укажем еще на одно важное ограничение, а именно, будем считать, что колебания частиц среды имеют малую амплитуду. Это означает, что отклонения частиц среды от положения равновесия должны быть малыми по сравнению с длиной волны, а изменения давления и плотности среды — малыми по сравнению со значениями этих параметров для покоящейся среды. Конечно, выбор идеализированной модели среды и ограничение на допустимую амплитуду колебаний не позволяет рассматривать многие акустические явления, и все же диапазон звуковых процессов, который остается в поле зрения, еще очень велик.

Приступим теперь к выводу волнового уравнения. На первой стадии сформулируем основные закономерности, которые лежат в основе различных (произвольных) движений идеальной жидкости. Далее опишем их математическими формулами (стадия формализации). Как будет видно, полученные уравнения, которые описывают произвольные движения идеальной жидкости, будут нелинейными, что значи-

тельно усложняет нахождение их решений. На этой стадии следует предположение о малости амплитуды колебаний частиц среды. Это позволяет перейти от полученных нелинейных уравнений к соответствующим линейным уравнениям. Такой процесс называют *линеаризацией*. В конце концов, после ряда преобразований окончательно получим волновое уравнение.

Итак, определим основные закономерности движений идеальной жидкости. В случае звуковых колебаний сплошная среда испытает деформации сжатия и растяжения. Тем не менее, когда умозрительно разделить ее на малые частицы (малые по сравнению с размерами зоны сжатия или растяжения), то можно считать, что каждая такая частица движется, как единое целое. Тогда ее движение должно подчиняться второму закону Ньютона. Это первая закономерность.

Вторая закономерность заключается в том, что частицы сплошной среды не могут полностью двигаться произвольно, а только сохраняя среду сплошной. Например, две соседние частицы не могут двигаться с конечными скоростями в противоположные стороны. Это утверждение имеет название принцип непрерывности.

Наконец следует учесть, что сжатие или растяжение некоторого объема жидкости (газа), подчиняется закономерностям, сформулированным в термодинамике. В случае отсутствия теплообмена расширение (сжатие) происходит по адиабатическому закону, который устанавливает определенное соотношение между давлением и плотностью некоторого объема среды.

Каждую из трех закономерностей можно описать соответствующим уравнением. Таким образом, получим одно векторное и два скалярных уравнения (или пять скалярных) относительно таких параметров, которые описывают звуковое поле в среде:

$\mathbf{v}(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ — колебательная скорость частиц,

p — акустическое давление,

$\rho_{\sim}$ — переменная плотность среды,

т.е. получим пять уравнений для пяти функций.

4.1.2. Уравнение движения

Уравнение движения для одной из частиц жидкости в соответствии со вторым законом Ньютона имеет вид

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{4.1}$$

где m — масса частицы, $\mathbf{v}$ — вектор скорости частицы среды, $\mathbf{F}$ — сумма всех сил, которые действуют на частицу со стороны окружающей среды.

Дальнейшее преобразование (4.1) зависит от выбора системы координат (если не использовать обозначения векторной алгебры). При решении конкретных акустических задач выбирают наиболее удобную систему координат. Скажем, при изучении поля сферического излучателя, конечно, удобно пользоваться сферическими координатами, цилиндрического излучателя — цилиндрическими и т.п.; в связи с этим вспомним задачу о колебании круговой мембраны, где для описания нормальных колебаний мембраны была применена полярная система координат.

Получим искомые уравнения в декартовых координатах, как наиболее простых и наглядных. Полученные уравнения запишем также в векторной форме (подобно (4.1)), что позволит, используя справочник по математике [8], переписывать их в другой системе координат. Координатными поверхностями в декартовых координатах есть взаимно перпендикулярные плоскости. С их помощью можно поделить все пространство на шестигранные частицы.

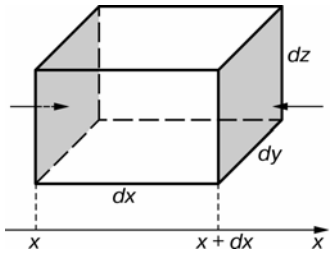


Рис. 4.1. Воображаемая элементарная частица акустической среды

Будем рассматривать движение частицы среды в виде элементарного прямоугольного параллелепипеда (рис. 4.1). Длина ребер прямоугольного параллелепипеда — dx, dy, dz. Площадь грани равна произведению длин соответствующих двух ребер, а объем — произведению трех взаимно перпендикулярных ребер. Запишем уравнение (4.1) в проекциях на оси координат. Так, для оси Ox имеем

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = F_x. \tag{4.2}$$

Массу рассматриваемой частицы находим как произведение объема на плотность среды (в пределах объема частицы считаем плотность постоянной):

$$m = \rho dxdydz. \tag{4.3}$$

Сила F_x возникает в результате разности давлений со стороны соседних частиц, которые действуют на выделенный объем. Она равняется

произведению разности давлений на площадь соответствующей грани: $[p(x)-p(x+dx)]dxdy$. Применяя формулу Лагранжа для приращения функции [8] и подставляя полученные выражения вместе с (4.3) в (4.2), после сокращения общих множителей получаем

$$\rho\frac{d\upsilon_x}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (4.4)$$

Здесь имеем частную производную от давления p, поскольку давление зависит не только от координаты x, а и от двух других пространственных координат и времени.

Уравнение (4.4) является нелинейным, поскольку искомые функции ρ и υ_x входят в него в виде произведения. До сих пор не использовалось предположение о малости амплитуды колебаний, поэтому формула (4.4) пригодна для волн любой амплитуды. Если рассматривать только малые колебания, то можно указать, что каждый из множителей в левой части (4.4) состоит из двух неравноценных слагаемых. В самом деле, $\rho=\rho_0+\rho_\sim$, причем $\rho_\sim \ll \rho_0$, где ρ_0 — плотность невозмущенной среды, $\rho_\sim$ —переменная плотность, обусловленная движением частиц среды. Пренебрежем $\rho_\sim$ по сравнению с ρ_0.

Ускорение, которое определяется полной производной $d\upsilon_x/dt$, также состоит из двух составляющих (при нахождении производной учитываем, что скорость υ_x является функцией координат x, y, z и времени t):

$$\frac{d\upsilon_x}{dt}=\frac{\partial\upsilon_x}{\partial t}+\left[\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right].$$

Поскольку $dx/dt=\upsilon_x$, $dy/dt=\upsilon_y$, $dz/dt=\upsilon_z$, имеем

$$\frac{d\upsilon_x}{dt}=\frac{\partial\upsilon_x}{\partial t}+\left[\upsilon_x\frac{d\upsilon_x}{dx}+\upsilon_y\frac{d\upsilon_x}{dy}+\upsilon_z\frac{d\upsilon_x}{dz}\right]. \qquad (4.5)$$

Первая составляющая — это *локальное ускорение* $\partial\upsilon_x/\partial t$. Оно определяется явной зависимостью колебательной скорости от времени, а все другие определяют *ускорение переноса*, которое связано с переходом частицы из положения равновесия в новую точку пространства, где скорость (как функция координат) может быть другой. Так, рассмотрим протекание жидкости в трубе переменного сечения. Если оно не является стационарным, то скорость в фиксированной точке будет изменяться со временем и потому локальное ускорение не будет равно нулю. Но, если протекание стационарное, то скорость в данной точке остается постоянной. В этом случае локальное ускорение $\partial\upsilon_x/\partial t$ будет равно нулю. При этом компоненты ускорения переноса будут отличными от нуля, поскольку скорость частичек жидкости при перемеще-

нии в трубе переменного сечения изменяется в местах изменения площади поперечного сечения трубы.

Оценим соотношение локального ускорения и ускорения переноса в (4.5). Рассмотрим гармоническую волну, в которой скорость частиц среды изменяется по закону $\upsilon_x = \upsilon_0 \sin\left[\omega\left(t - x/c\right)\right]$, где υ_0 — амплитудное значение υ_x. (Полученный результат будет иметь общий характер.) Итак, максимальное значение локального ускорения будет $\omega\upsilon_0$, а максимальное значение ускорения переноса $\upsilon_x \partial\upsilon_x / \partial x$ будет равно $\omega\upsilon_0^2 / c$. Тогда отношение этих величин будет иметь вид

$$\frac{\upsilon_x \partial\upsilon_x / \partial x}{\partial\upsilon_x / \partial t} \sim \frac{\omega\upsilon_0^2 / c}{\omega\upsilon_0} = \frac{\upsilon_0}{c} = \frac{x_0}{\lambda}, \quad (x_0 = \upsilon_0 T,\ \lambda = cT),$$

где T — период колебаний частиц. Итак, полученный результат зависит от соотношения максимального смещения частиц $x_0 = \upsilon_0 T$ и длины звуковой волны $\lambda = cT$, или амплитуды колебательной скорости частиц υ_0 и скорости звука c. Поскольку $\upsilon_0 \ll c$ и $x_0 \ll \lambda$, то и ускорение переноса мало по сравнению с локальным ускорением. Поэтому в (4.4) можно полную производную заменить на частную. Рассуждая аналогично для уравнения в проекции на две других оси, получим похожие результаты. Таким образом, имеем

$$\rho_0 \frac{\partial\upsilon_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \rho_0 \frac{\partial\upsilon_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \rho_0 \frac{\partial\upsilon_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{4.6}$$

В векторных обозначениях (4.6) приобретает вид:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathrm{grad}p, \tag{4.7}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{i}\upsilon_x + \mathbf{j}\upsilon_y + \mathbf{k}\upsilon_z$ здесь $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные орты декартовой системы координат, Оператор градиента (grad) определяется в декартовой системе координат таким образом: $\mathrm{grad}p = \mathbf{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z}$. Известно [8], что в каждой точке скалярного поля (в нашем случае, это поле давления), для которой $\mathrm{grad}p \neq 0$, существует единственное направление самого быстрого роста функции p (x, y, z). Это направление совпадает с направлением вектора $\mathrm{grad}p$, а модуль вектора $\mathrm{grad}p$ равен скорости роста величины p в этом направлении. Нужно подчеркнуть, что градиент скалярного поля зависит лишь от самого поля, а не от выбора системы координат. Знак минус в правой части уравнения (4.7) имеет ясное физическое содержание: ускорение каждой частицы

жидкости направлено в сторону уменьшения давления, т.е. против градиента *p*.

В качестве иллюстрации проведенных предположений приведем такие соотношения: для звуковых давлений порядка 0,1 Па (громкий разговор) плотность воздуха изменяется лишь на одну миллионную часть статической плотности, при этом звуковое давление 0,1 Па также составляет миллионную часть атмосферного давления 10^5 Па. В воздухе на частоте порядка 2000 Гц (длина волны $\lambda = 0{,}17$ м) на “болевом пороге” (звуковое давление ≈ 100 Па), когда слуховое восприятие звука сопровождается ощущением боли, перемещение частиц достигает 0,1 мм, а амплитуда скорости доходит до 1 м/с. Громкий разговор на расстоянии 1 м от разговаривающего человека создает колебание с амплитудой лишь в сотню-другую ангстрем, причем скорость частиц меньше, чем 1 м/год [20, с. 41].

4.1.3. Уравнение неразрывности

Для математического оформления принципа непрерывности рассмотрим протекание жидкости сквозь элементарный участок пространства (рис. 4.1). Содержание рис. 4.1 теперь изменилось; если при выводе уравнения движения рассматривались элементарные частицы подвижной среды, то теперь на рис. 4.1 представлена неподвижная ячейка среды, через которую протекает жидкость. Если жидкость непрерывная, то разность масс жидкости, которая вытекает и втекает, может быть связана лишь с изменениями во времени ее плотности внутри ячейки. Итак, изменение массы за время *dt* составляет

$$\Delta m = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydzdt. \qquad (4.8)$$

Вычислим теперь количество жидкости, которая втекает и вытекает, а ее разницу приравняем к формуле (4.8). Разделим поток массы на три компоненты (вдоль каждой из координатных осей) и рассмотрим каждую проекцию отдельно. Начнем с проекции на ось Ox. Жидкость, которая втекает через левую границу, проходит вдоль оси Ox за время dt расстояние $\upsilon_x dt$ и занимает часть объема ячейки, которая равна $\upsilon_x dydzdt$. Умножая объем на плотность, получаем массу жидкости которая втекает. Аналогично можно найти массу жидкости, которая вытекает через правую границу. Нужно лишь помнить: и плотность, и скорость течения вблизи правой границы отличаются от аналогичных величин для левой границы. Тогда разность масс жидкости, которая втекает и вытекает вдоль оси *Ox,* равняется

$$\Delta m_x = [(\rho\upsilon_x)_x - (\rho\upsilon_x)_{x+dx}]dydzdt = -\frac{\partial(\rho\upsilon_x)}{\partial x}dxdydzdt.$$

Рассчитывая потоки жидкости вдоль двух других осей, и определяя приращение массы, получаем

$$\Delta m = -\left[\frac{\partial(\rho\upsilon_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\upsilon_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\upsilon_z)}{\partial z}\right]dxdydzdt. \qquad (4.9)$$

Как и (4.4), уравнение (4.9) является нелинейным, поскольку функции, которые исследуются (ρ і $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$), входят в виде произведения. Однако $\rho = \rho_0 + \rho_\sim$, а для малых колебаний $\rho_\sim \ll \rho_0$, поэтому в (4.9) можно заменить ρ на ρ_0. Приравнивая (4.8) и (4.9), получаем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho_\sim}{\partial t} = -\rho_0\left[\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial\upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right]. \qquad (4.10)$$

Выражение, которое стоит в квадратных скобках (4.10), называют дивергенцией (div) вектора **v**, т.е. $\mathrm{div}\mathbf{v} = \frac{\partial\upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial\upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}$. Поэтому компактная запись уравнения (4.10) будет иметь такой вид:

$$\frac{\partial\rho_\sim}{\partial t} = -\rho_0\mathrm{div}\mathbf{v}. \qquad (4.11)$$

Снова сделаем математическое замечание [8]: каждому векторному полю (в нашем случае, это поле колебательной скорости **v**), компоненты которого непрерывны и имеют непрерывные частные производные, можно поставить в соответствие скалярную функцию div**v**. Значение div**v** не зависит от выбора системы координат.

Физическое содержание уравнения (4.11) очевидно: истечение некоторого количества жидкости из элементарного объема (div**v** > 0) обусловливает уменьшение плотности жидкости в середине этого объема ($\partial\rho_\sim/\partial t < 0$). Наоборот, приток некоторого количества жидкости в элементарный объем (div**v** < 0) приводят к увеличению плотности жидкости ($\partial\rho_\sim/\partial t > 0$). В этом есть причина наличия знака минус в уравнении (4.11).

4.1.4. Уравнение состояния

В среде есть определенная связь между давлением *P*, плотностью ρ и температурой *T*. Эта связь определяется уравнением состояния. Уравнение состояния не имеет какого-либо стандартного виду

для всех веществ, подобно уравнению движения или уравнению неразрывности. Поэтому запишем его в общей форме:

$$f(P, \rho, T) = 0. \tag{4.12}$$

Конкретный вид этой функции определяется свойствами среды. Примером такого уравнения можно назвать уравнение состояния идеального газа

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}, \tag{4.13}$$

где $R =$ 8,314 Дж/(моль · К) — газовая постоянная, M — молярная масса, T — температура, К.

Возвращаясь к общему виду уравнения состояния (4.12), мы констатируем наличие нового параметра — температуры T. Это означает, что при формировании полной системы уравнений акустики, которая описывает движение частиц среды, необходимо принять во внимание еще одно уравнение, которое было бы связано с температурой среды. В большинстве задач акустики можно ограничиться более простым соотношением, чем (4.12), такое соотношение устанавливает однозначную связь между давлением и плотностью:

$$P = P(\rho) \text{ или } \rho = \rho(P). \tag{4.14}$$

Тем не менее, это не означает, что тепловые эффекты не важны в акустике. Их надо учитывать, принимая во внимание зависимость от температуры коэффициентов в соотношении, которое устанавливает связь между P и ρ.

Учитывая условия сжатия и свойства среды, зависимость $P(\rho)$ имеет тот или другой конкретный вид и вообще является нелинейной. Поскольку плотность $\rho = \rho_0 + \rho_\sim$, то зависимость (4.14) можно разложить в ряд Тейлора по степенями $\rho_\sim$ в окрестности $\rho = \rho_0$:

$$P(\rho) = P(\rho_0 + \rho_\sim) = P(\rho_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0} \rho_\sim + \ldots \tag{4.15}$$

Принимая во внимание неравенство $\rho_\sim \ll \rho_0$, осуществим линеаризацию нелинейного уравнения (4.15):

$$P(\rho) = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0} \rho_\sim,$$

здесь $P_0 = P(\rho_0)$ — давление в невозмущенной среде, а $P = P_0 + p$, где p — акустическое давление, т.е. величина, на которую изменяется P_0 при распространении звуковой волны. Отсюда получим уравнение состояния для волн малой амплитуды:

$$p = P - P_0 = c^2 \rho_{\sim}, \tag{4.16}$$

где

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho = \rho_0}. \tag{4.17}$$

Величина c^2 представляет собой постоянную величину, физическое содержание которой будет объяснено далее. Только по ее размерности можно определить, что она является квадратом некоторой скорости.

Зависимость (4.16) часто представляют в таком виде:

$$p = \chi s, \tag{4.18}$$

где $\chi = \rho_0 c^2$ — *упругость среды*, $s = \frac{\rho_{\sim}}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{V - V_0}{V_0}$ — *акустическое сжатие* (ρ_0, V_0 — плотность и объем невозмущенной среды, ρ, V — соответствующие величины для возмущенной волной среды). Величину, обратную к упругости χ, называют *сжимаемостью*: $\beta = 1/\chi$. Линеаризованная связь между давлением p и акустическим сжатием s в уравнении (4.18) можно рассматривать как закон Гука для объемного сжатия среды с коэффициентом упругости $\chi = \rho_0 c^2$.

Определим постоянную c для идеального газа как акустической среды. Для идеального газа адиабатические процессы сжатия определяются уравнением

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma}, \tag{4.19}$$

где $\gamma = C_p / C_v$ — отношение теплоемкостей (показатель адиабаты) представляет собой характерную для каждого газа величину. Согласно (4.17) и (4.13), дифференцируя (4.19) по ρ, нетрудно получить такие формулы для постоянной c:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}, \tag{4.20}$$

где T_0 — температура, К.

Для воздуха при нормальных условиях: $P_0 = 10^5$ Па; $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3; γ = 1,4, значение постоянной $c \approx 330$ м/с. Наверное, эта величина многим читателям известна. Это скорость звука в воздухе. И действительно, дальнейший анализ показывает, что постоянная c является скоростью звука в среде.

Таким образом, (4.7), (4.11), (4.16) образуют полную линеаризованную систему акустических уравнений для определения трех неизвестных функций времени и координат, которые описывают звуковое поле: p, $\rho_{\sim}$, $\mathbf{v}$. Запишем полученные уравнения так:

уравнение движения $\rho_0 \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\, p,$

уравнение непрерывности $\dfrac{\partial \rho_{\sim}}{\partial t} = -\rho_0 \mathrm{div}\mathbf{v};$ (4.21)

уравнение состояния $p = c^2 \rho_{\sim}.$

Учитывая простую связь между звуковым давлением p и переменной плотностью $\rho_{\sim}$ в уравнении состояния, обычно, в качестве параметров, которые характеризуют звуковое поле, используют звуковое давление p и колебательную скорость частиц среды $\mathbf{v}$. Поэтому систему (4.21), которая состоит из трех уравнений, можно легко свести к системе двух уравнений, исключая переменную плотность $\rho_{\sim}$:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\, p, \tag{4.22}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 \mathrm{div}\mathbf{v}. \tag{4.23}$$

4.2. Волновое уравнение

Часто удобно вместо полной системы акустических уравнений (4.21) для функций p, $\rho_{\sim}$, $\mathbf{v}$ иметь одно дифференциальное уравнение относительно одной из функций. Такое дифференциальное уравнение содержит в себе производные второго порядка по времени и координатам и называется *волновым уравнением для данной функции*. Найдем волновое уравнение для акустического давления p.

Продифференцировав уравнение (4.23) по времени, получим

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0 \mathrm{div}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \tag{4.24}$$

Подставим в (4.24) соотношение (4.22). Тогда искомое уравнение будет иметь вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\, p. \tag{4.25}$$

Оператор, который стоит в правой части уравнения (4.25), называют оператором Лапласа, он имеет специальное обозначение: Δ. Нетрудно убедиться, что в декартовых координатах

$$\Delta p = \text{div grad} p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \qquad (4.26)$$

Итак, волновое уравнение для давления имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p. \qquad (4.27)$$

Поскольку и дивергенция, и градиент не зависят от выбора системы координат, то и Δp зависит только от поля давления p, но не от системы координат.

Физический смысл волнового уравнения для давления можно объяснить так. Оператор Лапласа характеризует разность между концентрацией некоторой величины в любой точке и вокруг нее. Итак, правая часть уравнения (4.27) обусловлена сжатиям частиц среды, а левая — инерцией. Волновое уравнение (4.27) выражает тот факт, что при увеличении давлении в некоторой точке над равновесным состоянием, оно стремиться со временем уменьшиться, а при уменьшении — увеличиться.

Волновое уравнение для скорости частиц среды $\mathbf{v}$ можно получить, дифференцируя уравнение (4.22) по времени и подставляя потом в него (4.23), исключив тем самым давление p. Итак, получим такое векторное уравнение: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \text{grad div}\mathbf{v}$. Оператор grad div отличается от оператора div grad, причем [8] grad div ≡ div grad + rot rot, поэтому волновое уравнение для колебательной скорости частиц приобретет вид $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \Delta\mathbf{v} + \text{rot rot}\mathbf{v}$, здесь в декартовых координатах ротор вектора $\mathbf{v}$ имеет вид $\text{rot}\mathbf{v} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)$.

Таким образом, волновое уравнение (4.27) дает возможность найти звуковое (акустическое) давление p (x, y, z, t). Для отыскания колебательной скорости $\mathbf{v}$ (x, y, z, t) можно или провести интегрирование по времени векторного уравнения движения (4.22), или решить векторное волновое уравнение относительно вектора $\mathbf{v}$. Оба варианта являются непростыми. Поэтому, по возможности, стремятся упростить поиск решения. Это удается сделать для модели акустической среды, об этом идет речь в следующем параграфе.

4.3. Потенциал скорости

Сначала сделаем замечания о характере движения частиц в звуковой волне. Применим операцию rot к обеим частям уравнения движения (4.22). Благодаря непосредственным вычислениям получим такое равенство: $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,p = 0$. Отсюда имеем, что rot**v** = 0. Укажем, что операция rot, как и grad, div, Δ, не зависит от выбора системы координат. Физически rot**v** характеризует "вращательную компоненту" поля скоростей частиц среды. Иначе говоря, в акустической среде в виде идеальной сжимаемой жидкости при распространении звуковой волны равнодействующая сил, которые действуют на частицу (рис. 4.1), проходит через ее центр и, как следствие, вращательный момент равняется нулю. Такие векторные поля (в нашем случае векторное поле колебательной скорости частиц), называют *потенциальными*, или *безвихревыми*. Действительно, звуковые волны в жидкостях и газах практически всегда являются безвихревыми, т.е. колебание частиц среды происходят вдоль прямой, которая характеризует направление распространения акустических волн. Другими словами, звуковые волны в идеальных жидкостях и газах являются *продольными*.

Известно [8], что любое потенциальное векторное поле можно представить как градиент некоторого скалярного поля. При этом скалярное поле называют *потенциалом векторного поля*. В нашем случае мы имеем векторное поле колебательной скорости **v**. Итак, его можно определить как градиент некоторого скалярного поля, которое обозначим φ. Функция φ называется *потенциалом скорости*. Для определения потенциала скорости рассмотрим уравнение движения (4.22). Проинтегрировав его по времени t, получим

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho_0}\int_{t_0}^{t} \mathrm{grad}\,p\,dt, \tag{4.28}$$

где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$. Пусть момент времени $t_0 = 0$ соответствует невозмущенной среде, т.е. $\mathbf{v}_0 = 0$. Изменяя порядок интегрирования и дифференцирования в (4.28), имеем

$$\mathbf{v} = -\mathrm{grad}\left[\frac{1}{\rho_0}\int_{0}^{t} p\,dt\right]. \tag{4.29}$$

Итак, потенциал скорости

$$\varphi(x,y,z,t) = \frac{1}{\rho_0}\int_{0}^{t} p(x,y,z,t)\,dt. \tag{4.30}$$

Дифференцируя (4.30) по времени t, находим такое выражение для давления:

$$p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{4.31}$$

Для колебательной скорости $\mathbf{v}$ в соответствии с (4.29) и (4.30) имеем

$$\mathbf{v} = -\mathrm{grad}\varphi. \tag{4.32}$$

В декартовых координатах проекции вектора скорости в соответствии с определением оператора grad имеют вид

$$\upsilon_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \upsilon_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \upsilon_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{4.33}$$

Нужно помнить, что физическое содержание имеет не сам потенциал, а величины p, $\mathbf{v}$ и $\rho_\sim$, которые выражаются через него. Применение потенциала скорости дает возможность однозначно и к тому же довольно просто описать состояние акустического поля с помощью только одной скалярной функции, которая зависит от координат и времени. Большинство задач теоретической акустики связано с определением потенциала скорости в звуковом поле. Определив потенциал скорости, и дифференцируя его по времени согласно (4.31), найдем давление p. В свою очередь, дифференцируя выражение для потенциала по координатам (см. (4.33)), получаем все три компоненты вектора скорости частиц.

Теперь нужно получить волновое уравнение для потенциала скорости φ. Нетрудно убедиться, что по виду оно совпадает с волновым уравнением для давления (4.27). Действительно, подставив соотношение (4.31) и (4.32) в уравнение (4.23), получим волновое уравнение для потенциала скорости:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi. \tag{4.34}$$

Для гармонических волн с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ формула (4.31) приобретает простой вид:

$$p = -i\omega\rho_0\varphi. \tag{4.35}$$

Соотношения (4.35) и (4.33) позволяют установить для гармонических волн простую связь между давлением p и компонентами колебательной скорости $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$:

$$\upsilon_x = \frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \upsilon_y = \frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \upsilon_z = \frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{4.36}$$

Следовательно, что для гармонических волн потенциал скорости φ, как промежуточную величину, можно вообще не использовать, а, получив решение волнового уравнения для давления p, определить по формулам (4.36) колебательную скорость частиц среды $\mathbf{v} = (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$.

Итак, волновое уравнение получено, но это, конечно, не является самоцелью. Волновое уравнение представляет собой инструмент исследования звуковых полей. В связи с этим приведем такие общие соображения. Пусть в среду помещен излучатель, т.е. тело, которое колеблется относительно положения равновесия (например, круглый диск). Скорость движения всех точек поверхности задана. Также заданы расположения и свойства поверхностей всех других тел, которые являются препятствиями на пути распространения звука (например, стены помещения). Задано начальное (до момента включения источника) состояние всех частиц среды (обычно состояние покоя). Тогда расчет звукового поля излучателя представляет собой математическую задачу отыскания такого решения волнового уравнения, которое давало бы на поверхности излучателя скорость, которая совпадает с действительной скоростью движения всех точек его поверхности, и удовлетворяло бы условиям на поверхности всех других тел (так называемые граничные условия), а также начальным условиям. При исследовании приема звука обычно интересуются распределением звукового давления на чувствительной части поверхности приемника звука. Здесь заданными являются падающее поле (т.е. поле в среде при отсутствии приемника звука) и свойства поверхности приемника. Таким образом, при расчете звукового поля нужно сначала сформировать все граничные и начальные условия, а потом решить при этих условиях волновое уравнение. Если бы была возможность перебрать все возможные граничные и начальные условия, то можно было бы рассмотреть все звуковые поля как частные решения волнового уравнения.

4.4. Уравнение Гельмгольца

В основном, в дальнейшем будем рассматривать так называемые установившиеся (стационарные) звуковые поля, т.е. когда момент включения источника звука весьма отдален ($t_{\text{вкл}} \to -\infty$) от момента наблюдения. В этом случае целесообразно зависимость параметров поля p, $\rho_{\sim}$, $\mathbf{v}$ от времени представлять с помощью интеграла или ряда Фурье в виде совокупности гармонических составляющих, и рассматривать поле каждой такой составляющей отдельно (с такой техникой исследования задач акустики мы в дальнейшем озна-

комимся). Итак, пусть давление звукового поля изменяется во времени по гармоническому закону, т.е.

$$p(x,y,z,t) = p(x,y,z)\exp(-i\omega t). \tag{4.37}$$

Здесь принята комплексная форма записи, которая уже применялась ранее. Множитель $p(x, y, z)$ представляет собой комплексную амплитуду давления в точке с координатами x, y, z. Для давления и его комплексной амплитуды будем использовать одинаковое обозначение: p.

Подставляя (4.37) в волновое уравнение (4.27), получаем *уравнение Гельмгольца* для комплексной амплитуды давления:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0, \tag{4.38}$$

или

$$\Delta p + k^2 p = 0, \qquad k = \omega / c, \tag{4.39}$$

где k определяют как отношение угловой частоты ω к скорости звука c, называют *волновым числом*.

4.5. Граничные условия

Если в поле звуковой волны находится некоторое тело, то для определения этого поля нужно задать граничные условия на поверхности тела. Конечно, задание граничных условий является задачей более сложной, чем построение модели среды. Ведь именно с помощью характеристик среды p и $\mathbf{v}$ нужно описать поведение границы тела, а это не всегда удается сделать довольно точно. Приведем несколько моделей граничных условий, которые используются в акустике для описания реальных объектов.

1. Модель акустически (абсолютно) жесткой границы соответствует ситуации, когда поверхность границы S не деформируется, т.е. неподвижна в поле звуковой волны. Тем не менее, это не означает, что колебательная скорость частиц среды, которые находятся вблизи границы, равна нулю. Ведь согласно построенной модели акустической среды невозможно зафиксировать касательное смещение (среда не сопротивляется сдвигу). Отсюда условие на границе состоит в том, что нулю равняется нормальная, к поверхности S, составляющая υ_n скорости частиц среды, которые находятся близ границы тела S:

$$\upsilon_n |_S = 0. \tag{4.40}$$

Реальное построение такой границы возможно с достаточной точностью лишь для газов: в нормальных условиях довольно большое

твердое тело или поверхность жидкости для звуковых волн в газе почти всегда можно считать абсолютно жесткими. Для жидкости или твердых тел построить абсолютно жесткую границу довольно сложно, но в ряде случаев такое приближение оказывается возможным и для этих сред.

Если рассматривается задача излучения звука поверхностью S, то условие $\upsilon_n|_S = V(\mathbf{r},t)$ определяет равенство нормальной составляющей скорости частиц среды $\upsilon_n|_S$, которые размещены вблизи поверхности S, и скорости частиц поверхности S, которая описывается функцией $V(\mathbf{r},t)$; т.е. в процессе движения поверхность S не деформируется под действием среды.

2. Модель акустически (абсолютно) мягкой границы — это поверхность S, которая не способна оказывать сопротивление давлению, т.е. поверхность S повторяет движение частиц среды, размещенных вблизи нее. Отсюда граничное условие заключается в равенстве нулю давления на поверхности:

$$p|_S = 0. \tag{4.41}$$

Это граничное условие выполняется на границе жидкости или твердого тела с вакуумом. С достаточной точностью абсолютно мягкая граница моделирует случай падения звуковой волны, которая распространяется в воде, на границу раздела вода-воздух.

3. Модель границы сопряжения двух идеальных жидкостей. Здесь задают два условия:

1) кинематическое условие, которое свидетельствует о том, как двигаются частицы двух сред, которые располагаются вблизи границы (это условие отражает принцип непрерывности среды);

2) силовое условие — это, по сути, есть требование выполнения третьего закона Ньютона.

Поскольку идеально сжимаемые жидкости не оказывают сопротивление сдвигу, то кинематическое условие будет заключаться в равенстве нормальных составляющих скоростей частиц первой и второй сред, которые располагаются вблизи границы, т.е.

$$\upsilon_n^{(1)}|_S = \upsilon_n^{(2)}|_S\,. \tag{4.42}$$

Силовое условие заключается в равенстве давления, которые оказывают частицы первой и второй сред одна на другую вдоль границы S:

$$p^{(1)}|_S = p^{(2)}|_S\,. \tag{4.43}$$

Другие типы граничных условий будем определять в случае необходимости, когда они будут встречаться в конкретных задачах.

4.6. Энергетические характеристики звуковых волн

При анализе излучения и распространение звуковых волн большое значение имеют энергетические характеристики. Характерным свойством волн является возможность переносить энергию, не перемещая вещество. Под акустической энергией понимают часть полной энергии среды, которая обусловлена наличием в ней звуковых волн. Выбор характеристики зависит от модели среды. Для модели идеально сжимаемой жидкости акустическая энергия возможна в виде кинетической и потенциальной энергий. Других видов энергии при распространении звуковой волны не возникает.

4.6.1. Плотность энергии

Определим плотность энергии (энергия единицы объема) среды $E = E_{\text{К}} + E_{\Pi}$. Плотность кинетической энергии $E_{\text{К}} = \rho_0 |\mathbf{v}|^2/2$, а плотность потенциальной энергии $E_{\Pi} = ps/2$, где s — акустическое сжатие (формула аналогична выражению для потенциальной энергии гармонического осциллятора (см. параграф 2.3)). Учитывая линейную связь между акустическим сжатием и давлением $p = \chi s$ (см. (4.18)), получим соотношение $E_{\Pi} = \chi s^2/2 = p^2/2\chi$. Таким образом, плотность акустической энергии среды

$$E = \frac{\rho_0 |\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{p^2}{2\chi}. \qquad (4.44)$$

Единица измерения плотности энергии есть E, дж · м$^{-3}$.

При линеаризации уравнений акустики, величины которые описывают звуковое поле в среде (p, $\rho_{\sim}$, $\mathbf{v}$) считались малыми, поэтому можно было пренебречь их квадратами в системе уравнений акустики (принимая также во внимание, что произведение двух таких величин является величиной, которой также пренебрегают). Но, как видим, другое правило используется для выражения энергии, в котором первые степени малых величин p и $\mathbf{v}$ отсутствуют. Поэтому следует сохранять квадраты и произведения двух малых величин, а пренебрегать их кубами (понимая при этом, что произведение трех и более таких величин является величиной, которой также пренебрегают).

Рассмотрим детальнее плотность энергии в гармонической волне, т.е. волне, для которой давление и скорость частиц в некоторой точке среды изменяются по гармоническому закону. Для определения плотности энергии в гармонической волне запишем давление и скорость частиц в действительном виде (экспоненциальная форма записи не может быть использована, поскольку в формулах присутствуют квад-

ратичные величины; напомним, что для комплексных чисел z_1 и z_2 имеем $\mathrm{Re}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Re}\, z_1\, \mathrm{Re}\, z_2$):

$$\upsilon = \upsilon_0 \cos(\omega t - \psi), \qquad p = p_0 \cos(\omega t), \tag{4.45}$$

где p_0 и υ_0 — амплитуды соответственно давления и скорости в данной точке; величина ψ определяет сдвиг фаз между звуковым давлением и скоростью частиц среды. Тогда плотность энергии в данной точке имеет вид

$$E(t) = \frac{\rho_0 \upsilon_0^2}{2} \cos^2(\omega t - \psi) + \frac{{p_0}^2}{2\chi} \cos^2(\omega t).$$

Как следует из данного выражения, плотности кинетической и потенциальной энергий осциллируют между нулем и максимальными значениями $\rho_0 \upsilon_0^2 / 2$, ${p_0}^2 / 2\chi$. Интерес представляет среднее значение плотности энергии за один период T колебаний частиц среды:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{4.46}$$

Поскольку интеграл от квадрата косинуса за период равен 1/2, то искомое среднее таково:

$$\langle E \rangle = \frac{\rho_0 \upsilon_0^2}{4} + \frac{p_0^2}{4\chi}. \tag{4.47}$$

Плотность звуковой энергии является малой величиной по обычным масштабам энергетики даже для очень громких звуков. Так, плотность звуковой энергии при обычном разговоре на расстоянии 1м от разговаривающего (давление при этом равняется приблизительно 0,02 Па), составляет приблизительно $1{,}4 \cdot 10^{-9}$Дж/м^3. В зале (20 000 м^3) при фортиссимо оркестра суммарная звуковая энергия достигает порядка 0,1 Дж [20, с. 111], что приблизительно равняется работе силы тяготения при подъеме груза массой 10 г на высоту 1 м. Тем не менее, очень часто применяют ультразвук (звуки с частотой более 20 кГц), вследствие возможности концентрации его энергии на очень ограниченных участках среды.

4.6.2. Плотность потока мощности. Интенсивность

Рассмотрим теперь перенос энергии звуковой волной, которая распространяется в среде. Поскольку в процессе распространения волны изменяется энергия частиц среды, то можно говорить о потоке энергии в звуковой волне. Выделим в среде некоторую по-

верхность A. Тогда энергию, которая переносится, можно определить как работу, которую выполняют движущиеся частицы, расположенные слева от A, над неподвижными частицами, расположенными справа от A. При этом на единичной площадке с нормалью $\mathbf{n}$ будет развиваться мощность

$$\mathbf{W} = p\mathbf{v}. \tag{4.48}$$

Величину $\mathbf{W}$ называют *плотностью потока мощности*. Зная направление вектора $\mathbf{n}$, говорят о модуле плотности потока мощности $|\mathbf{W}| = W_n$. Поскольку вектор скорости частиц определяется своими координатами, т.е. $\mathbf{v}(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$, то можно определить плотность потока мощности вдоль любой оси декартовой системы координат; например, вдоль оси Ox имеем $W_x = p\upsilon_x$. Вообще при необходимости можно определить плотность потока мощности вдоль произвольного направления.

Остановимся подробнее на гармонических волнах. Рассмотрим общий случай в соответствии с формулами (4.45), когда между исходными величинами p и υ_n есть некоторый сдвиг фазы ψ. Мгновенный поток мощности имеет вид

$$W_n(t) = p_0\upsilon_0 \cos(\omega t)\cos(\omega t - \psi), \tag{4.49}$$

или

$$W_n(t) = p_0\upsilon_0 \cos\psi \cos^2(\omega t) + p_0\upsilon_0 \sin\psi \sin(\omega t)\cos(\omega t). \tag{4.50}$$

Обычно при рассмотрении гармонических волн не интересуются мгновенным потоком мощности $W_n(t)$. Более содержательным для гармонической волны есть средний за период поток мощности, который называется *интенсивностью* и обозначается I_n. Итак,

$$I_n = \langle W_n \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T W_n(t)dt, \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right). \tag{4.51}$$

Подставим формулу (4.50) в выражение (4.51) и вычислим интегралы. Тогда получим, что

$$I_n = \frac{p_0\upsilon_0}{2}\cos\psi. \tag{4.52}$$

В случае синфазности величин p и υ_n $(\psi = 0)$ интенсивность $I_n = p_0\upsilon_0/2$ является наибольшей. В случае, когда p и υ_n, сдвинуты по фазе на 90°, интенсивность равняется нулю. Эти важные частные случаи еще будут обсуждаться нами при анализе волновых процессов.

Рассмотрим выражение (4.50) для плотности потока мощности. Как видим, в общем случае $W_n(t)$ состоит из двух частей. Для первой

части при вычислении среднего потока мощности за период получаем формулу (4.52). Она характеризуется постоянным знаком при изменении t от 0 до T и определяет, как видим, поток энергии в направлении вектора **n**. Вторая составляющая при определении среднего потока мощности за период равна нулю. Это означает, что за период T частицы, которые находятся слева от поверхности A, сначала отдают часть энергии частицам справа от поверхности A, а потом ее отбирают у них. Понятно, что эта составляющая $W_n(t)$ не связана с распространением энергии в среде — здесь происходит локальное перераспределение энергии между частицами среды, которые находятся слева и справа от поверхности A.

Если говорить об источнике звука, то, естественно, первая составляющая $W_n(t)$ в выражении (4.50) будет полезной с точки зрения воспроизведения звукового поля далеко от источника, а вторая составляющая — бесполезной. Отсюда возникли такие названия: для первой составляющей $W_n(t)$ — *активная мощность*, а для второй составляющей — *реактивная мощность*.

Оказывается, интенсивность можно определить, используя преставление давления и колебательной скорости в комплексном виде:

$$\tilde{p} = p_0 \exp(-i\omega t) \text{ и } \tilde{\upsilon} = \upsilon_0 \exp(-i\omega t + i\psi).$$

Для действительных частей давления и колебательной скорости, как физических величин, имеем такие выражения:

$$p = \operatorname{Re}\tilde{p} = \left(\tilde{p} + \tilde{p}^*\right)/2 \text{ и } \upsilon = \operatorname{Re}\tilde{\upsilon} = (\tilde{\upsilon} + \tilde{\upsilon}^*)/2.$$

Тогда мгновенная плотность потока мощности приобретет вид

$$W(t) = \frac{\tilde{p} + \tilde{p}^*}{2}\frac{\tilde{\upsilon} + \tilde{\upsilon}^*}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\tilde{p}\tilde{\upsilon}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\tilde{p}\tilde{\upsilon}^*\right) =$$

$$= \frac{p_0\upsilon_0}{2}\cos(2\omega t - \psi) + \frac{p_0\upsilon_0}{2}\cos\psi. \qquad (4.53)$$

Понятно, что (4.50) и (4.53) тождественные выражения. Согласно формулам (4.53) и (4.51) определяем интенсивность

$$I_n = \langle W_n(t)\rangle = \frac{p_0\upsilon_0}{2}\cos\psi. \qquad (4.54)$$

Как видим, выражения (4.52) и (4.54) совпадают. Итак, имеем искомую формулу для интенсивности

$$I_n = \frac{1}{4}\left(p\upsilon_n^* + p^*\upsilon_n\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(p\upsilon_n^*\right), \qquad (4.55)$$

где давление p и скорость υ_n записаны в комплексной форме. Единица измерения плотности потока мощности и интенсивности I_n, Вт/м^2.

Между плотностью звуковой энергии E и плотностью потока мощности $\mathbf{W}$ существует важное соотношение, которое можно определить, помножив уравнение движения (4.22) скалярно на вектор $\mathbf{v}$, а уравнение неразрывности (4.23) на давление p. Складывая эти уравнения, получаем выражение $\partial E/\partial t = -\mathrm{div}\mathbf{W}$. Интегрируем это уравнение по некоторому объему Ω, ограниченному поверхностью S. При интегрировании правой части уравнения можно преобразовать объемный интеграл в поверхностный. Итак, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(\Omega)} E d\Omega = -\int\limits_{(S)} \mathbf{W} d\mathrm{S}. \qquad (4.56)$$

Соотношение (4.56) выражает интегральный закон сохранения энергии для звуковой волны. Физическая суть формулы (4.56) понятна: изменение звуковой энергии в некотором объеме среды Ω пропорционально плотности потока звуковой энергии через поверхность S, которая окружает объем Ω.

4.7. Задачи

4.1. Получите приближенную формулу для скорости звука в воздухе, учитывая, что γ = 1,4 и M = 28,8 г/моль.

Ответ: $c \approx 20\sqrt{T_0}$, где T_0 — температура, К.

4.2. Определите скорость звука в середине цилиндра двигателя внутреннего сгорания сразу после зажигания, если давление равно 200 атм, температура 1000 °С; для газовой смеси γ = 1,35, а плотность смеси при 0 °С и атмосферном давлении 10^5 Па равняется 0,0014 г/см^3. Считать процесс адиабатическим.

Ответ: приблизительно 680 м/с.

4.3. Убедитесь в том, что средняя, за большой отрезок времени, плотность энергии суммы двух гармоничных волн $\langle E \rangle$ равняется сумме плотностей энергий составляющих волн $\langle E_1 \rangle$ и $\langle E_2 \rangle$.

РАЗДЕЛ 5

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Невозмутимый строй во всем,
Созвучье полное в природе, —
Лишь в нашей призрачной свободе
Разлад мы с нею сознаем.

Ф.И. Тютчев[*]

5.1. Гармоничные волны

В предыдущих разделах при исследовании колебаний различных систем важную роль играла гармоническая зависимость от времени. Это было связано с поиском нормальных колебаний линейных систем, т.е. периодических колебаний системы с гармонической зависимостью от времени. После нахождения нормальных колебаний появилась возможность представить произвольное колебание системы как суперпозицию нормальных колебаний. На основе этого важного результата был проведен анализ свободных и вынужденных колебаний системы. Если внешняя сила, которая действует на систему, имеет произвольную зависимость от времени, то с помощью ряда (или интеграла) Фурье ее можно представить в виде суперпозиции сил с одной-единственной гармонической зависимостью от времени, а потом, изучив действие гармонической силы на систему, снова возвратиться к заданной силе, используя ряд (или интеграл) Фурье.

В вопросах распространения волн гармоническая зависимость от времени имеет аналогичные преимущества: для сред, в которых волны удовлетворяют линейным уравнениям, сохраняется синусоидальная зависимость параметров волны (давление, скорость частиц среды) от времени при распространении волны, при ее отражении и проникновении сквозь какую-либо границу, при рассеянии от препятствия и тому подобное. Волны с другой зависимостью от времени такого свойства не имеют. Поскольку для линейных уравнений акустики справедлив принцип суперпозиции, то волну практически с

[*] Тютчев Федор Иванович (1803—1873) — российский поэт.

произвольной зависимостью от времени можно представить в виде суперпозиции гармонических волн разных частот. Такое представление позволяет вместо волн с произвольной зависимостью от времени изучать волны с одной-единственной зависимостью — гармонической. В зависимости от того периодическая во времени или нет данная волна, получаем соответственно или ряд, или интеграл Фурье. Если размышления продолжить дальше, то следует указать, что поле гармонической волны зависит, в общем случае, и от трех пространственных координат. При одинаковой частоте зависимость от координат может быть самой разной. Возникает вопрос о дальнейшем упрощении изучения волн: имеется в виду возможность представить для гармонических во времени волн их пространственную зависимость также в виде суперпозиции некоторого набора гармонических волн (естественно, такой же частоты).

Итак, зная поведение гармонических волн разных частот при тех или иных условиях распространения, методом Фурье можно найти закон распространения волны любого типа. Все это обусловливает важность изучения гармонических волн.

5.2. Плоские гармонические волны

Рассмотрим простейший случай, когда давление и колебательная скорость зависят лишь от одной декартовой пространственной координаты x, т.е. в этом случае волновое уравнение (4.27) имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{5.1}$$

Для гармонической временной зависимости с частотой ω звуковое давление можно определить так:

$$p(x,t) = p(x)\exp(-i\omega t), \tag{5.2}$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период колебаний частиц среды; $p(x)$ — комплексная амплитуда давления. Такое звуковое поле можно, например, создать в трубе с идеально гладкими жесткими стенками (рис. 5.1), в которой по гармоническому закону с частотой ω колеблется плоский жесткий диск.

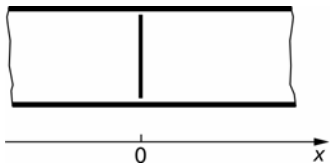


Рис. 5.1. Плоский диск в трубе

Подставив (5.2) в (5.1), получим уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды давления $p(x)$:

$$\frac{d^2p}{dx^2} + k^2 p = 0, \;\; k = \frac{\omega}{c}. \tag{5.3}$$

Решение уравнения (5.3) ищем в виде $\exp(\alpha x)$; тогда получаем алгебраическое уравнение $\alpha^2 + k^2 = 0$, откуда $\alpha_{1,2} = \pm ik$. Итак, решение волнового уравнения (5.1) имеет вид

$$p(x,t) = A\exp(-i(\omega t - kx)) + B\exp(-i(\omega t + kx)), \tag{5.4}$$

где A и B — произвольные постоянные. Понятно, что действительная или мнимая части решения (5.4) также является решением волнового уравнения (5.1).

Обсудим физическую суть каждого из слагаемых. Укажем, что ряд свойств бегущих и стоячих волн уже обсуждался при анализе волнового движения в струне и мембране, но, начиная изучение звуковых волн, рассмотрим еще раз основные понятия волнового движения. Обратимся к первому слагаемому в решении (5.4). Пусть в точке x' в момент времени t' имеем некоторое значение звукового давления. Очевидно, что то же самое значение давления будет и в следующий момент времени $t'' > t'$ в другой точке пространства $x'' > x'$, если $t' - x'/c = t'' - x''/c$; отсюда $x'' = x' + c(t'' - t')$. Полученное соотношение показывает: состояние частиц среды, которые характеризуются определенным давлением и колебательной скоростью, передается от одних частиц среды к другим с постоянной скоростью c в положительном направлении оси Ox. Такой процесс перемещения состояния среды имеет название *бегущей волны*. Не трудно убедиться в том, что второе слагаемое в решении (5.4) определяет волну, которая распространяется в отрицательном направлении оси Ox. Очевидно, *в самом общем случае можно определить волну как пространственно-временную эволюцию некоторого состояния среды.*

Для гармонической волны состояние среды определяется величиной $(\omega t \pm kx)$, которая называется *фаза*. В фиксированный момент времени t' части среды, которые имеют одинаковые значения фазы $(\omega t' - kx) = \text{const}$, образовывают поверхность, которую называют *фронт волны*. Для волн (5.4) фаза зависит от одной пространственной координаты x, поэтому фронт волны есть плоскость, к которой перпендикулярна ось Ox, вдоль которой фронт волны перемещается. Волны, с фронтом в виде плоскости, называют *плоскими*.

Обращаясь к выражению Эйнштейна [*, с. 424], сделаем важное замечание: “Понятие плоской волны, подобно многим другим физическим понятиям, есть не больше как абстракция, которую мы можем осуществить лишь с известной степенью точности. Тем не менее, это — полезное понятие, и оно нам понадобиться в дальнейшем”. Действительно, понятие плоской волны широко используется не только в акустике, а и в других физических науках, где рассматриваются волновые процессы.

В соответствии с решением (5.4) гармоническая зависимость бегущей волны (давление, колебательная скорость) существует как во времени, так и в пространстве. В связи с этим, еще раз внимательно посмотрим на выражение для фазы гармонической бегущей волны, которое запишем в виде функции $\psi(x,t) = \omega t - kx$. Как видим, с физической точки зрения волновое число k определяет количество радиан фазы на единицу смещения вдоль направления оси Ox, а частота ω — количество радиан фазы на единицу времени. Иначе говоря, волновое число k определяет скорость изменения фазы в пространстве, а частота ω — скорость изменения фазы во времени. Величины ω и k — это не произвольные постоянные, они связаны между собой функциональной зависимостью $\omega = \omega(k)$. Такая зависимость имеет название *дисперсионного соотношения* (см. параграф 3.6). Так, для нашего случая, подставляя первое частное решение (5.4) в уравнение (5.1), получаем соотношение $k = \omega / c$, что определяет линейную связь между волновым числом k и частотой ω с коэффициентом пропорциональности в виде постоянной c.

Зафиксируем некоторое значение фазы бегущей волны, т.е. пусть функция $\psi(x,t) = \text{const}$. Это означает, что мы определили для себя соответствующий фронт волны, т.е. соответствующее возмущение среды. В ходе волнового процесса это возмущение (фронт волны) перемещается в среде. Поскольку фаза определенного фронта волны остается постоянной: $\psi(x,t) = \text{const}$, то изменение фазы, вследствие приращения времени dt и пространственной координаты dx (дифференциал функции $\psi(x,t)$), должно равняться нулю: $d\psi = \omega dt - kdx = 0$. Это условие выполняется, если скорость перемещения фазы (фронта волны) в бегущей волне равняется $\upsilon_ф \equiv dx/dt = \omega / k$. Принимая во внимание равенство $k = \omega / c$, получаем, что фазовая скорость плоской гармонической волны в идеальной среде равняется постоянной c, т.е. $\upsilon_ф = c = \text{const}$.

Таким образом, отношение частоты ω к волновому числу k определяет фазовую скорость гармонической волны. Это равенство, в сущ-

---

* Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 4. — М.: Наука, 1967. — 599 с.

ности, является другой записью дисперсионного уравнения. Как видим, фазовая скорость $\upsilon_ф$ равна постоянной c и не зависит от частоты ω, что указывает на отсутствие дисперсии в идеальной акустической среде.

Для гармонических плоских волн (см. (5.4)) изменение состояния параметров звукового поля в пространстве также происходит по гармоническому закону. Поэтому вместе с временным периодом T вводят понятие пространственного периода λ, на котором фаза волны изменяется на 2π, а параметры среды для плоской волны приобретают те же самые значения. Итак, для фиксированного момента времени t' имеем $[\omega t' - k(x + \lambda)] - [\omega t' - kx] = 2\pi$, откуда $k\lambda = 2\pi$, или

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f} = cT. \qquad (5.5)$$

Рассмотрим другие свойства плоской бегущей волны. Запишем давление и колебательную скорость волны, которая распространяется в положительном направлении оси Ox:

$$p = A\exp\left(-i\left(\omega t - kx\right)\right), \quad \upsilon_x = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{k}{\omega\rho}p = \frac{p}{\rho c}. \qquad (5.6)$$

Для волны, которая распространяется в отрицательном направлении оси Ox, имеем $\upsilon_x = -p/(\rho c)$. Поскольку $\partial p/\partial y = \partial p/\partial z = 0$, то скорость колебаний частиц направлена вдоль оси Ox, т.е. в направлении распространения волны. Такая волна является *продольной*. Это естественный результат, поскольку еще при выводе волнового уравнения была исключена возможность взаимодействия частиц среды при сдвиге, а, следовательно, и возможность появления *поперечных* волн.

Во втором разделе было введено понятие комплексного механического сопротивления Z, которое характеризует противодействие механической системы приложенной силе. Аналогичное понятие оказывается полезным и при изучении свойств волн. *Удельным акустическим сопротивлением среды* называют величину

$$\zeta = \frac{p}{\upsilon_n}, \qquad (5.7)$$

где p и υ_n записаны в комплексной форме, т.е. выражение (5.7) определяет отношение комплексных амплитуд давления и скорости частиц. Подставляя (5.6) в (5.7), определяем удельное акустическое сопротивление среды для плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox:

$$\zeta = \rho c. \qquad (5.8)$$

Соответственно, для волны, которая распространяется в отрицатель-

ном направлении оси Ox, $\zeta = -\rho c$. Произведение ρc является важной характеристикой среды, его называют *волновым сопротивлением среды.*

Схожесть определений механического и удельного акустического сопротивлений побуждает к подобному толкованию их физического содержания, а именно к тому, чтобы считать, что ζ характеризует противодействие среды звуковому давлению, которое заставляет частицы среды двигаться. Тогда, чем больше p нужно "приложить", чтобы получить заданное υ, тем большим будет сопротивление ζ. От такого объяснения, несмотря на его внешнюю убедительность, следует отказаться, поскольку давление и колебательная скорость — равноправные характеристики звуковой волны. Отдадим предпочтение другому объяснению. При распространении звуковой волны робота, которая осуществляется движущими частицами над ближайшими неподвижными, определяется энергией, передаваемой неподвижным частицам. Согласно принятой модели среды, как идеальной сжимаемой жидкости, полученная энергия состоит из потенциальной и кинетической энергий. Потенциальная энергия $E_П = p^2/(2\chi)$ связана со сжимаемостью среды, причем, чем больше упругость среды χ, тем большие давления необходимы при заданной энергии для сжатия среды. Кинетическая энергия $E_К = \rho|\mathbf{v}|^2/2$ связана со скоростью $\mathbf{v}$ и плотностью ρ, причем, чем большее инерционное противодействие среды колебаниям (ρ), тем меньше будет $|\mathbf{v}|$. Таким образом, отношение p/υ тем больше, чем большие упругое и инерционное противодействия среды колебанием.

Приведем числовые значения акустических параметров воздуха и воды. Воздух: $\rho = 1{,}24$ кг · м$^{-3}$, $c = 340$ м · с$^{-1}$, $\rho c = 420$ кг · м$^{-2}$ · с$^{-1}$. Вода: $\rho = 1000$ кг · м$^{-3}$, $c = 1500$ м · с$^{-1}$, $\rho c = 1{,}5 \cdot 10^6$ кг · м$^{-2}$ · с$^{-1}$.

Обратим внимание еще на одно важное обстоятельство. Удельное акустическое сопротивление среды для плоской волны оказывается действительной величиной. Это следствие совпадения фаз давления и колебательной скорости. Комплексный характер ζ должен свидетельствовать о наличии угла сдвига фаз между давлением и колебательной скоростью.

Рассмотрим общий случай, когда давление в плоской волне зависит от трех пространственных координат. В приведенном выше случае (зависимости давления от одной пространственной координаты) фазовый фронт двигался вдоль оси Ox. Линию, перпендикулярную к фронту волны, вдоль которой движется фронт волны, называют *лучом.* Характеризуя волновой процесс, говорят или о фронте бегущей волны, или о лучах, вдоль которых фронт волны распространяется. Если движение фазового фронта происходит не вдоль одной из координатных осей, то его путь определяется скалярным произведением

вектора **r**, который определяет положение любой точки на плоскости фронта волны, и вектора нормали **n** к фронту волны (рис. 5.2). Равенство **rn** = l является уравнением плоскости, которая представляет собой волновой фронт. Таким образом, путь фазового фронта можно записать в таком виде:

$$\mathbf{rn} = \cos\theta_x \cdot x + \cos\theta_y \cdot y + \cos\theta_z \cdot z, \tag{5.9}$$

где x, y, z — координаты вектора **r**; θ_x, θ_y, θ_z — углы, которые образует единичный вектор **n** с осями координат Ox, Oy, Oz (при этом выполняется соотношение [8]: $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$).

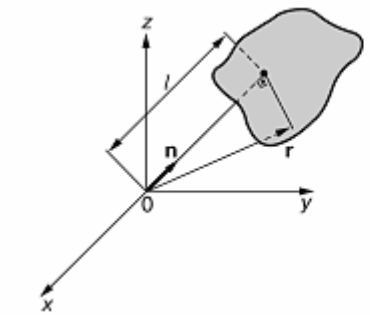


Рис. 5.2. Участок фронта плоской бегущей волны в направлении вектора **n**

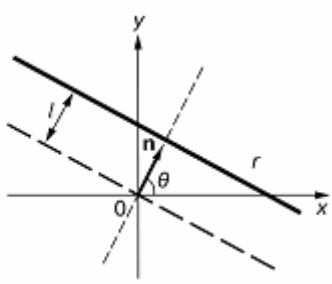


Рис. 5.3. Фронт плоской волны (плоская задача)

Если фронт плоской волны перпендикулярен к плоскости xOy, то $\gamma = 0$ и фазовый путь зависит только от двух пространственных координат x и y. В такой ситуации говорят, что рассматривается так называемая *плоская задача*. Например, см. рис. 5.3, где $\theta_x = \theta$:

$$\mathbf{rn} = x\cos\theta + y\cos(\pi/2 - \theta) = x\cos\theta + y\sin\theta. \tag{5.10}$$

Запишем выражение плоской волны, которая двигается в произвольном направлении:

$$p(\mathbf{r},t) = a\cos(\omega t - k\mathbf{nr}) = a\cos(\omega t - \mathbf{kr}). \tag{5.11}$$

Вектор **k** = k**n** называют *волновым вектором*. Его направление совпадает с вектором **n**, а модуль |**k**| равен волновому числу k. Координаты вектора **k** = (k_x, k_y, k_z) — это его проекции на соответствующие координатные оси. Перепишем выражение для волны давления (5.11), используя координатную форму записи скалярного произведения **kr**:

$$p(x,y,z,t) = a\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z). \tag{5.12}$$

При распространении волна оставляет на координатных осях или координатных плоскостях так называемый *след*. Например, согласно (5.12), след на оси Ox имеет вид $p(x, 0, 0, t) = a\cos(\omega t - k_x x)$, его можно рассматривать как одномерную волну, которая распространяется

вдоль оси Ox. Волновое число следа $k_x = k\cos\theta_x$ — проекция волнового вектора **k** на ось Ox. В этом случае фазовая скорость следа равна

$$\upsilon_{фx} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k\cos\theta_x} = \frac{c}{\cos\theta_x}. \qquad (5.13)$$

Аналогично след волны на любой координатной плоскости, например плоскости $x = 0$, $p(0, y, z, t) = a\cos(\omega t - k_y y - k_z z)$, можно рассматривать как двумерную бегущую волну на плоскости $x = 0$. Временная зависимость всех следов такая же, как и в исходной волне (5.12), но волновые векторы следов разные: они определяются проекциями волнового вектора исходной волны (5.11) на соответствующие оси или плоскости. Так, волновое число следа на оси Ox есть $k_x = k\cos\theta_x$, а на плоскости $x = 0$ имеем

$$\sqrt{k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{k^2\cos\theta_y^2 + k^2\cos\theta_z^2} = \sqrt{k^2(1-\cos^2\theta_x)} = k\sin\theta_x.$$

Соответствующая фазовая скорость следа на плоскости $x = 0$ равняется $\upsilon_ф = \dfrac{\omega}{k\sin\theta_x} = \dfrac{c}{\sin\theta_x}$. Если $\theta_x = 0$, т.е. фронт волны (5.12) параллелен плоскости $x = 0$, то фазовая скорость следа $\upsilon_ф = \infty$; если $\theta = 90°$, здесь фронт волны (5.12) перпендикулярен к плоскости $x = 0$, то $\upsilon_ф = c$.

Поскольку волновое число определяет скорость изменения фазы вдоль пространственной координаты, то можно также говорить и о длине волны следа. Например, для следа вдоль оси Ox $p(x,0,0,t) = a\cos(\omega t - k_x x)$ имеем $\lambda_x = \dfrac{2\pi}{k_x} = \dfrac{2\pi}{k\cos\theta_x} = \dfrac{\lambda}{\cos\theta_x}$, где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны (5.12). Вообще след волны можно определить на любой плоскости, которая пересекает пространство, в котором распространяется волна.

Таким образом, для любого следа гармоничной плоской волны выполняются следующие соотношения между характеристиками исходной волны и следа:

1) длина волнового вектора следа $\mathbf{k}_{сл}$ не превышает длину волнового вектора исходной волны **k**, ведь $\mathbf{k}_{сл}$ является проекцией **k** на плоскость следа;

2) фазовая скорость и длина волны следа не меньше, чем фазовая скорость и длина волны в исходной волне.

Рассмотрим энергетические характеристики волны. В бегущей плоской волне давление и колебательная скорость связаны простым соотношением: $p/\upsilon = \rho c$. Отсюда согласно (4.44) для плотности кинетической и потенциальной энергий имеем равенство $E_К = E_П$, тогда плотность полной энергии в плоской звуковой волне можно определить так:

$$E = \frac{p^2}{\rho c^2} = \rho \left| \mathbf{v}^2 \right|. \qquad (5.15)$$

Для плоской волны, которая распространяется в направлении вектора **n**, запишем вектор плотности мощности:

$$\mathbf{W} = p\mathbf{v} = \frac{p^2}{\rho c}\mathbf{n} = \left(\rho \upsilon_n{}^2\right) c\mathbf{n} = Ec\mathbf{n}. \qquad (5.16)$$

Направление вектора **W** совпадает с направлением распространения волны, а его модуль равен плотности энергии, умноженной на скорость волны, т.е. $|\mathbf{W}| = W_n = Ec$. Другими словами, энергия в плоской волне переносится в среде со скоростью звука. Это обусловлено отсутствием сдвига фаз между давлением и колебательной скоростью, что приводит к отсутствию реактивной составляющей в потоке мощности (4.50). Итак, в плоской волне вся энергия, присущая подвижным частицам, передается неподвижным, что и отображается соотношением (5.16).

Наконец, запишем формулу для среднего потока мощности (интенсивности) в плоской волне. Согласно (4.52) положив $\psi = 0$, имеем максимально возможное значение интенсивности

$$I_n = \frac{p_0 \upsilon_0}{2} = \frac{p_0^2}{2\rho c} = \frac{\upsilon_0^2}{2}\rho c, \qquad (5.17)$$

где p_0 и υ_0 — амплитуды давления и колебательной скорости частиц среды в плоской волне.

5.3. Поглощение звука

При распространении звуковой волны в идеальной однородной среде уменьшение интенсивности звука обусловлено расширением волнового фронта (вспомним круговые волны на поверхности озера от брошенного камешка). В реальной среде происходит также затухание звука вследствие его поглощения, т.е. переход звуковой энергии в тепловую энергию. Такие процессы в физике называют *диссипативними* (от латинского слова *dissipatus* — разбросанный) и о среде говорят как о *среде с диссипацией*.

Вопрос о возможности пренебрежения поглощением нужно решать в каждом конкретном случае— общего критерия здесь нет. Ответ зависит и от самой постановки задачи исследуемого явления, и от необходимой точности при решении задачи. Природа поглощения звука довольно сложна, поскольку определяется молекулярной структурой вещества среды, и исследование этих явлений выходит за рам-

ки нашей книги. Укажем только, что диссипативные силы, которые возникают в реальной среде при распространении волны, практически всегда малы по сравнению со звуковым давлением. Например, на частоте 3 МГц диссипативные силы в воде представляют только одну трехсоттысячную от упругого давления [20, с. 389]. Но действие диссипативных сил накапливается в процессе распространения волны, в результате, рано или поздно вся энергия волны переходит в тепло и волна постоянно затухает.

Покажем, что затухание гармонических волн, как результат поглощения звуковой энергии, происходит по экспоненциальному закону [20, с. 390]. Обозначим плотность звуковой энергии через E. Тогда мощность, которая поглощается в единице объема среды, составляет $-dE/dt$. Она равна мощности диссипативных сил в этом объеме, т.е. произведению этих сил на соответствующую скорость деформации объема. В гармонической волне обе эти величины пропорциональны амплитуде звукового давления. Итак, величина $-dE/dt$ пропорциональна квадрату амплитуды давления в волне. Но плотность энергии E волны также пропорциональна квадрату амплитуды давления, поэтому обе величины пропорциональные одна другой. Обозначая коэффициент пропорциональности через 2α, имеем $-dE/dt = 2\alpha E$, откуда находим экспоненциальный закон затухания звуковой энергии во времени

$$E(t) = E_0 \exp(-2\alpha t), \tag{5.18}$$

где E_0 — плотность звуковой энергии в начальный момент $t = 0$. Понятно, что амплитуда давления также уменьшается по экспоненциальному закону

$$p(t) = p_0 \exp(-\alpha t), \tag{5.19}$$

где p_0 — амплитуда давления при $t = 0$. По тому же закону уменьшается скорость и ускорение частиц среды.

Из формулы (5.18) определим величину

$$\alpha = -\frac{1}{2E}\frac{dE}{dt}, \tag{5.20}$$

которую называют *временным коэффициентом затухания по амплитуде* (коэффициент затухания по энергии равен 2α). Его размерность совпадает с размерностью частоты: α, c^{-1}.

Из (5.19) видим, что за 1 с амплитуда волны уменьшается как $\exp(-\alpha)$. За это время волна пробегает расстояние c. Из этого следует, что в плоской волне амплитуда уменьшается с расстоянием по закону

$$p(x) = p_0 \exp(-\alpha x/c) = p_0 \exp(-\delta x), \tag{5.21}$$

где p_0 — амплитуда давления в начальной точке $x = 0$. Величину

$$\delta = \frac{\alpha}{c} = -\frac{1}{2cE}\frac{dE}{dt} \tag{5.22}$$

называют *пространственным коэффициентом затухания*. Его размерность такая же, как и у волнового числа: δ, м$^{-1}$.

Укажем, что согласно свойству экспоненциальной функции на некоторой длине пробега волны Δx, поглощается, независимо от расстояния x до начальной точки, одинаковое количество энергии. Действительно, отношение

$$\frac{p_0 \exp(-\delta x) - p_0 \exp(-\delta(x + \Delta x))}{p_0 \exp(-\delta x)} = 1 - p_0 \exp(-\delta \Delta x) \tag{5.23}$$

остается постоянной величиной, не зависит от расстояния x и определяется коэффициентом затухания δ.

Учет эффекта поглощения при распространении плоской гармонической волны можно провести довольно формально. Временной коэффициент затухания соответствует такой ситуации: пусть в начальный момент времени $t = 0$ в среде есть распределение давления $p_0 \exp(ikx)$. Тогда при $t > 0$ имеем волну

$$p = p_0 \exp(-\alpha t - i\omega t + ikx). \tag{5.24}$$

Такой же коэффициент определяет поведение стоячих волн, если, например, в начальный момент распределение давления равно $p_0 \cos(kx)$, то при $t > 0$

$$p = p_0 \cos(kx) \exp(-\alpha t - i\omega t). \tag{5.25}$$

Согласно (5.24) и (5.25) в обоих случаях можно формально определить частоту как комплексную величину: $\tilde{\omega} = \omega - i\alpha$, тогда

$$p = p_0 \exp(-i(\omega - i\alpha)t + ikx) = p_0 \exp(-i\tilde{\omega} t + ikx),$$

$$p = p_0 \cos(kx) \exp(-i(\omega - i\alpha)t) = p_0 \cos(kx) \exp(-i\tilde{\omega} t). \tag{5.26}$$

Понятно, что комплексной будет и скорость плоской волны

$$\tilde{c} = \frac{\tilde{\omega}}{k} = \frac{\omega - i\alpha}{k} = c - i\frac{\alpha}{k} = c\left(1 - i\frac{\alpha}{\omega}\right) \left(k = \frac{\omega}{c}\right), \tag{5.27}$$

где действительная часть $\tilde{c}$ определяет фазовую скорость плоской волны $\upsilon_ф = c$, а мнимая — затухание.

Пространственный коэффициент затухания соответствует плоской волне, которая возникает, например, благодаря колебаниям диска (рис. 5.1). При амплитуде давления p_0 на диске, расположенном в точке $x = 0$, излучаемая волна имеет вид

$$p = p_0 \exp(-i\omega t + ikx - \delta x). \tag{5.28}$$

В этом случае волновое число можно считать комплексным, а именно $\tilde{k} = k + i\delta$, где действительная часть $\tilde{k}$ определяет фазовую скорость плоской волны, а мнимая — затухание. Перепишем выражение (5.28) в виде

$$p = p_0 \exp\left(-i\omega t + i(k + i\delta)x\right) = p_0 \exp\left(-i\omega t + i\tilde{k}x\right). \qquad (5.29)$$

Это комплексное волновое число $\tilde{k}$ можно использовать при исследовании других задач об излучении звука.

Поглощение звука в среде определяют, измеряя пространственный или временной коэффициент затуханиям звука. Выбор способа зависит от величины затухания. На высоких частотах, где поглощение звука довольно значительное, определяют пространственный коэффициент затухания. Для этого измеряют амплитуду давления в двух точках на расстоянии l вдоль линии распространения плоской волны. Из формулы (5.29) пространственный коэффициент затухания выражается через амплитуды давления $|p_1|$ и $|p_2|$ в этих точках и расстояние l: $\delta = \frac{1}{l}\ln\frac{|p_1|}{|p_2|}$.

Такой способ неприемлем для низких частот и слабо поглощающих жидкостей, поскольку для достаточно точного измерения надо брать большое расстояние l. В этих случаях измеряют временной коэффициент затухания α резонансных колебаний (стоячих волн) в сосуде. Здесь нужно учитывать поглощение звука стенками сосуда при отражении волн, иначе получим значение коэффициента затухания большее, чем оно есть на самом деле.

Для газов и жидкостей теоретические и экспериментальные исследования указывают на увеличение коэффициента поглощения с частотой, такую зависимость в определенных границах можно оценить как квадратичную. Это приводит к тому, что при распространении в реальной среде сложного звукового сигнала первыми затухают высшие гармоники, в то время как звуки низкой частоты распространяются со сравнительно малым затуханием. Например, в большом концертном зале ясно ощущается изменение тембра скрипки (это относительно высокочастотный музыкальный инструмент), если перейти из первых рядов партера в конец зала. Вторым примером из архитектурной акустики является звучание музыкального фрагмента в зале с большим временем реверберации, скажем около 10 с. (Время реверберации — это временной промежуток, за который в помещении после отключения источника энергия звука уменьшается в 10^6 раз.) Это может быть церковное помещение или большой зал для органной музыки. Здесь слушатель ощущает изменение тембра звука: сначала затухают высокочастот-

ные звуки, а низкие частоты продолжают звучать. Это производит сильное впечатления даже на человека, который не имеет музыкального слуха.

5.4. Принцип суперпозиции

В четвертом разделе была получена полная система уравнений акустики. В общем случае это нелинейные уравнения, но процедура линеаризации позволила получить линейные уравнения для акустических волн. Главная особенность линейного уравнения состоит в том, что если φ_1 и φ_2 — два частных решения уравнения, то $\varphi_3 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$, где a_1, a_2 — постоянные величины, также является решением этого уравнения. Для нелинейного уравнения, как правило, φ_3 — не будет решением. То, что любая линейная комбинация решений линейного уравнения также является решением данного линейного уравнения, и есть *принцип суперпозиции.*

Относительно акустических волн это означает, что при распространении в пространстве нескольких волн, общее давление или общая колебательная скорость определяется как сумма соответствующих величин в составляющих волнах. Понятно, что для давления речь идет о складывании скалярных величин, а в случае колебательной скорости — векторных величин. Однако энергетические характеристики в подобной ситуации не могут быть получены складыванием отдельных составляющих. Например, пусть две плоские волны распространяются вдоль оси Ox в одном направлении. Плотность потока мощности в этих волнах составляет $W_{x1} = p_1\upsilon_{x1} = \rho c\upsilon_{x1}^2$ и $W_{x2} = p_2\upsilon_{x2} = \rho c\upsilon_{x2}^2$. Тогда суммарную плотность потока мощности можно определить так:

$$W_x = \left(p_1 + p_2\right)\left(\upsilon_{x1} + \upsilon_{x2}\right) = \rho c(\upsilon_{x1} + \upsilon_{x2})^2 = W_{x1} + W_{x2} + 2\rho c\upsilon_{x1}\upsilon_{x2}. \qquad (5.30)$$

Как видим, здесь принцип суперпозиции не применяется. В последнем выражении появилось слагаемое $2\rho c\upsilon_{x1}\upsilon_{x2}$, которое может быть или положительным, или отрицательным. Как исключение, плотность потока мощности двух плоских бегущих волн, которые распространяются навстречу друг другу, равняется разности плотностей потоков мощностей этих волн, т.е. принцип суперпозиции работает. В самом деле,

$$W_x = (p_1 + p_2)(\upsilon_{x1} - \upsilon_{x2}) = \rho c(\upsilon_{x1} + \upsilon_{x2})(\upsilon_{x1} - \upsilon_{x2}) = W_{x1} - W_{x2}. \qquad (5.31)$$

Принцип суперпозиции является мощным инструментом в решении такого важного вопроса, как удовлетворение граничных условий. Объясним это примере: пусть имеем две плоские бегущие волны $p_1 = A\exp(-i(\omega t - kx\cos\theta - ky\sin\theta))$ и $p_2 = A\exp(-i(\omega t - kx\cos\theta + ky\sin\theta))$. На рис. 5.4 показано направление волновых векторов $\mathbf{k}_1 = (k\cos\theta,$

$k\sin\theta$) и $\mathbf{k}_2 = (k\cos\theta, -k\sin\theta)$, вдоль которых двигаются фронты плоских волн p_1 и p_2 со скоростью c. Решением волнового уравнения будет суперпозиция этих волн

$$p_3 = p_1 + p_2 = 2A\exp\left(-i\left(\omega t - kx\cos\theta\right)\right)\cos(ky\sin\theta). \qquad (5.32)$$

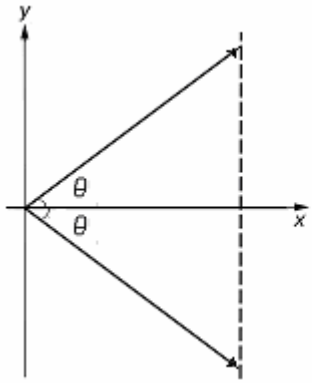


Рис. 5.4. Направления волновых векторов $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$

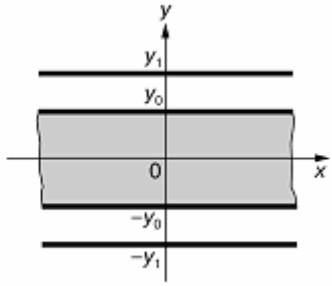


Рис. 5.5. Пример поверхности нулевого давления в волне p_3

Возникает вопрос: что же представляет собой волна p_3. Согласно (5.32) — это волна, которая бежит вдоль оси Ox, причем волновое число $k\cos\theta = k_x$ есть проекция волнового вектора $\mathbf{k}_1$ или $\mathbf{k}_2$ на ось Ox. Определим фазовую скорость движения волны вдоль оси Ox. Поскольку $k\cos\theta = \omega/\upsilon_{\text{ф}x}$, то фазовая скорость волны вдоль оси Ox определяется так:

$$\upsilon_{\text{ф}x} = \frac{\omega}{k\cos\theta} = \frac{c}{\cos\theta}. \qquad (5.33)$$

Вдоль оси Oy образовывается стоячая волна. В ней можно выделить линии, вдоль которых давление p_3 равно нулю. Эти линии определяются уравнением

$$y_n k\sin\theta = \pm\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (5.34)$$

На рис. 5.5 изображены поверхности нулевого давления в поле волны p_3. Согласно (5.34) существует совокупность параллельных оси Ox линий, вдоль которых давление p_3 равно нулю.

Таким образом, суперпозиция двух волн дала возможность получить волну, которая распространяется между двумя параллельными акустически мягкими поверхностями (координаты $-y_0$ и y_0),

или, другими словами, были удовлетворены требования граничного условия на акустически мягкой поверхности (т.е. давление равно нулю). Еще одним важным применениям принципа суперпозиции есть возможность изображения волны в виде суммы или интеграла других волн, которые проще изучать, чем исходную волну. Далее будем это использовать.

В конце параграфа еще раз подчеркнем, что принцип суперпозиции справедлив в той же мере, в которой выполнена линеаризация уравнений акустики для звуковых волн. Для звуков большой амплитуды принцип суперпозиции непригоден.

5.5. Отражение и прохождение звука на границе раздела двух акустических сред

В этом параграфе рассмотрим очень важную, с точки зрения теории и практики, задачу о взаимодействии звуковой волны с границей раздела двух сред.

5.5.1. Постановка и решения задачи

Пусть две среды, которые представляют собой идеальную сжимаемую жидкость, разделены плоской границей $x = 0$ (рис. 5.6). Параметры первой среды ρ_1 и c_1, второй — ρ_2 и c_2. В первой среде вдоль луча, который образовывает с осью Ox угол θ, распространяется плоская гармоническая волна давления

$$p_0 = A_0 \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x \cos\theta - k_1 y \sin\theta\right)\right), \tag{5.35}$$

где амплитуда A_0 и волновое число $k_1 = \omega / c_1$ считаются заданными, ω — частота.

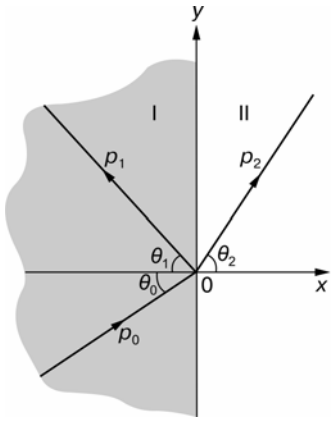


Рис. 5.6. Пример падающей плоской волны на границу двух сред

При падении волны p_0 на границу раздела $x = 0$ часть энергии волны отразится, а часть — пройдет в другую среду. Сделаем предположение: будем считать, что отраженная волна p_1 и прошедшая волна p_2 в другую среду — это плоские гармонические волны, частоты которых совпадают с частотой ω падающей волны p_0.

На рис. 5.6 углы θ_1 и θ_2 определяют направления лучей, вдоль которых распространяются отраженная и прошедшая волны. Согласно принципу суперпозиции звуковое поле в первой среде определяется суммой падающей и отраженной волн, т.е. $p^{(\mathrm{I})} = p_0 + p_1$, а во второй среде есть только прошедшая волна $p^{(\mathrm{II})} = p_2$. Сумма волн $p_0 + p_1 = p^{(\mathrm{I})}$ удовлетворяет волновому уравнению для первой среды

$$\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 p^{(\mathrm{I})}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p^{(\mathrm{I})}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{(\mathrm{I})}}{\partial y^2}, \tag{5.36}$$

а прошедшая волна во вторую среду, — уравнению

$$\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 p^{(\mathrm{II})}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p^{(\mathrm{II})}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{(\mathrm{II})}}{\partial y^2}. \tag{5.37}$$

На границе раздела $x = 0$ должны выполняться два условия: силовое и кинематическое, т.е. равенство давлений и нормальной составляющей скорости частиц по обе стороны от границы $x = 0$: $p^{(\mathrm{I})} = p^{(\mathrm{II})}$, $\upsilon_x^{(\mathrm{I})} = \upsilon_x^{(\mathrm{II})}$, при $x = 0$. Принимая во внимание формулы (4.36), перепишем эти условия в виде

$$p_0 + p_1 = p_2,\ x = 0, \tag{5.38}$$

$$\frac{1}{i\omega\rho_1}\frac{\partial\left(p_0 + p_1\right)}{\partial x} = \frac{1}{i\omega\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial x},\ x = 0. \tag{5.39}$$

Запишем давление в отраженной p_1 и прошедшей p_2 волнах:

$$p_1 = A_1 \exp\left(-i\left(\omega t + k_1 x\cos\theta_1 - k_1 y\sin\theta_1\right)\right), \tag{5.40}$$

$$p_2 = A_2 \exp\left(-i\left(\omega t - k_2 x\cos\theta_2 - k_2 y\sin\theta_2\right)\right), \tag{5.41}$$

где A_1 и A_2 — неизвестные амплитуды давления отраженной и прошедшей волн; $k_2 = \omega / c_2$ — волновое число волны p_2.

В формулах (5.40) и (5.41) учтен важный момент, связанный с направлением распространения отраженной и прошедшей волн. В этом направлении осуществляется перенос энергии от границы раздела в бесконечность, а не наоборот. Дело в том, что, изменив направление распространения волны p_1 или p_2, можно было бы удовлетворить граничные условия (5.38), (5.39), но при этом возникла бы бессмыслен-

ная физическая ситуация. Правильный выбор направления распространения волн исключает подобные случаи. Сделанный в этом случае анализ носит название *условия на бесконечности* (или *условия излучения*).

Подставим (5.35), (5.40) и (5.41) в граничное условие (5.38):

$$A_0 \exp\left(ik_1 y \sin\theta\right) + A_1 \exp\left(ik_1 y \sin\theta_1\right) = A_2 \exp\left(ik_2 y \sin\theta_2\right). \qquad (5.42)$$

Это равенство должно выполняться при любом значении координаты y, т.е. вдоль всей границы раздела сред. Но достичь этого, подбирая лишь A_1 и A_2, невозможно. Отсюда следует, что необходимо приравнять показатели экспонент:

$$k_1 \sin\theta = k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2. \qquad (5.43)$$

Эти уравнения наполнены глубоким физическим содержанием, суть которого состоит в том, что при падении плоской волны на границу раздела сред проекции волновых векторов падающей, отраженной и прошедшей волн должны быть одинаковыми для любого угла падения θ падающей волны. Соотношение (5.43) можно переписать через длины волн $\lambda_1 = 2\pi / k_1$ и $\lambda_2 = 2\pi / k_2$ (см. (5.5)):

$$\frac{\sin\theta}{\lambda_1} = \frac{\sin\theta_1}{\lambda_1} = \frac{\sin\theta_2}{\lambda_2}. \qquad (5.44)$$

Другими словами, следы, которые оставляют волны p_0, p_1, p_2 на границе $x = 0$ совпадают. Согласно (5.43) $\theta = \theta_1$, т.е. угол падения волны равен углу отражения, и связь между углами θ и θ_2 имеет вид

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta} = \frac{c_2}{c_1}. \qquad (5.45)$$

Уравнение (5.44) называется *закон Снеллиуса**. С учетом соотношения (5.43) граничные условия (5.38) и (5.39) можно свести к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных A_1 и A_2 (сделайте самостоятельно):

$$A_0 + A_1 = A_2, \quad \frac{\cos\theta}{\rho_1 c_1}\left(A_0 - A_1\right) = \frac{\cos\theta_2}{\rho_2 c_2} A_2.$$

Откуда

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{\rho_2 c_2 \cos\theta - \rho_1 c_1 \cos\theta_2}{\rho_2 c_2 \cos\theta + \rho_1 c_1 \cos\theta_2}, \qquad (5.46)$$

---

* Снеллиус (Snellius) Виллеброрд (1580—1626) — голландский астроном и математик.

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{2\rho_2 c_2 \cos\theta}{\rho_2 c_2 \cos\theta + \rho_1 c_1 \cos\theta_2}. \qquad (5.47)$$

Согласно (5.46) и (5.47), эффект отражения и проникновения звуковой волны не зависит от частоты ω.

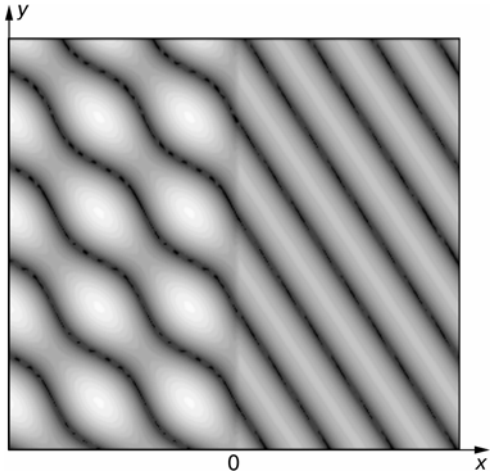


Рис. 5.7. Распределение амплитуды давления в первой и второй средах: $\rho_2 c_2 / \rho_1 c_1 = 0{,}8$, $c_2 / c_1 = 0{,}7$, $\theta = 60°$, $\theta_2 \approx 37°$

Отношение A_1/A_0 определяет коэффициент отражения по давлению, а A_2/A_0 — коэффициент прохождения по давлению. Как пример, на рис. 5.7 показано распределение амплитуды давления в первой и второй средах в случае, когда, $\rho_2 c_2 / \rho_1 c_1 = 0{,}8$; $c_2 / c_1 = 0{,}7$; угол падения волны $\theta = 60°$, угол прохождения $\theta_2 \approx 37°$. Как видим, в первой среде наблюдается картина интерференции двух волн p_0 и p_1 (значение амплитуды возрастает согласно изменению оттенка — от черного до белого), а во второй среде светлые и темные полосы, которые перемежаются, соответствуют бегущей волне p_2. Не сложно понять, что расстояние между двумя ближайшими темными или светлыми полосами равно половине длины волны. Обратим особое внимание на границу раздела сред $x = 0$, где четко видно, что следы волн p_0, p_1, p_2 на границе $x = 0$ совпадают, т.е. выполняется равенство (5.44).

5.5.2. Анализ нормального падения волны

Рассмотрим сначала частный случай, когда угол падения $\theta = 0$. Это так называемое *нормальное падение волны* на границу раздела сред. Согласно закону Снеллиуса, имеем $\theta_2 = 0$. Запишем выражения для коэффициентов отражения V_p и прохождения W_p по дав-

лению в случае нормального падения звуковой волны на границу раздела двух сред:

$$V_p = \frac{A_1}{A_0} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \quad \xi = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}, \tag{5.48}$$

$$W_p = \frac{A_2}{A_0} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{2\xi}{\xi + 1} = 1 + V_p; \tag{5.49}$$

соответственно, принимая во внимание, что $\upsilon_x = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$, определим коэффициент отражения V_υ и прохождения W_υ по колебательной скорости:

$$V_\upsilon = -V_p = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \tag{5.50}$$

$$W_\upsilon = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\frac{A_2}{A_0} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = \frac{2}{1 + \xi} = 1 + V_\upsilon. \tag{5.51}$$

Если $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$ (говорят, второй среда акустически более жесткая, чем первая), то V_υ будет отрицательным. Это означает, что у скорости частиц при отражении изменяется фаза на π, или отраженная волна колебательной скорости имеет противоположную фазу по сравнению с колебательной скоростью в падающей волне. При этом фаза давления отраженной волны остается неизменной. Если $\rho_2 c_2 < \rho_1 c_1$ (вторая среда акустически более мягкая, чем первая), то фаза скорости частиц при отражении остается без изменения, в то время как давление изменяет свою фазу на π. В волне, которая прошла через границу, фазы давления и скорости совпадают с фазой в падающей волны независимо от того, будет $\rho_2 c_2$ больше или меньше, чем $\rho_1 c_1$. Проведенный анализ отражают графики на рис. 5.8, *а*, *б*.

При условии $\rho_2 c_2 = \rho_1 c_1$ отраженной волны не будет, и прохождение звука в другую среду происходит без препятствий. Таким образом, при нормальном падении плоская волна не ощутит изменение свойств сред, если их волновые сопротивления оказываются равными. Если волновые сопротивления сред существенно различаются ($\rho_2 c_2 >> \rho_1 c_1$ или $\rho_2 c_2 << \rho_1 c_1$), то наблюдается значительное отражение звука на границе раздела сред.

Сумма коэффициентов отражения и прохождения по давлению и скорости не равняется единице, как это можно было предположить, а, соответственно, $1 + 2V_p$ и $1 + 2V_\upsilon$. Коэффициенты прохождения через границу с противоположных сторон не равны друг другу.

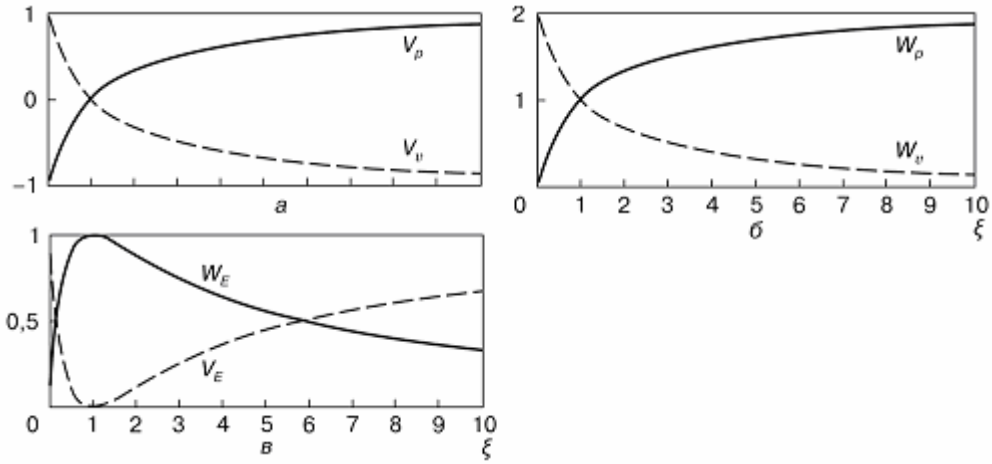


Рис. 5.8. Графики коэффициентов отражения и проникновение при $\theta = 0$

Такие особенности процесса отражения и прохождения звука через границу становятся понятными после определения энергетических соотношений. Энергетическим коэффициентом прохождения назвают отношение интенсивности прошедшей волны к интенсивности падающей волны. Используя формулу (5.17), получаем

$$W_E = \frac{I_2}{I_0} = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} W_\upsilon^2 = \frac{4\xi}{(1+\xi)^2}. \qquad (5.52)$$

Тогда коэффициент отражения по энергии можно определить так:

$$V_E = \frac{I_1}{I_0} = V_\upsilon^2 = \left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^2. \qquad (5.53)$$

Согласно (5.52) и (5.53) справедливым будет соотношение

$$V_E + W_E = 1. \qquad (5.54)$$

Значение энергетических коэффициентов не зависит от того, в какой среде распространяется падающая на границу волна. Например, при переходе из воды в воздух (или наоборот) $W_E = 0{,}0011$, т.е. 0,9989 всей падающей энергии отражается назад от границы. На рис. 5.8, *в* приведена зависимость V_E и W_E от параметра ξ. Согласно (5.54) сумма ординат кривых равна единице, что выражает закон сохранения энергии. При условиях $\xi << 1$ или $\xi >> 1$ почти вся энергия отражается. Интересно отметить, что энергия делится пополам между отраженной и прошедшей волнами при условии $\xi = 3 \mp 2\sqrt{2}$, т.е. когда $\xi \approx 0{,}172$ или $\xi \approx 5{,}83$.

Итак, как следует из (5.48)—(5.51), отражение и прохождение волны при нормальном падении определяется лишь величиной

$\xi = \rho_2 c_2 / (\rho_1 c_1)$, т.е. отношением волновых сопротивлений сред. Если $\xi \to \infty$ (абсолютно жесткая поверхность отражения), то имеем $V_p \to 1$, $V_\upsilon \to -1$. Как следствие, давление на границе увеличивается вдвое, а колебательная скорость равняется нулю. Реальным примером, близким к такой ситуации, может быть отражения волны от границы воздух-вода ($\xi \approx 3{,}5 \cdot 10^3$). Если $\xi \to 0$ (акустически мягкая поверхность отражения), то $V_p \to -1$, $V_\upsilon \to 1$. Здесь колебательная скорость увеличивается вдвое, а давление равняется нулю. Реальным примером, такого отражения, может служить отражение от границы вода-воздух ($\xi \approx 2{,}8 \cdot 10^{-4}$). Эти примеры показывают, когда можно переходить от задачи сопряжения звуковых полей на границе радела двух сред к более простой задаче отражения от идеальных границ.

5.5.3. Анализ наклонного падения волны

Вернемся к общему случаю наклонного падения волны. Согласно (5.46) и (5.47) выражения для коэффициентов отражения и прохождения по давлению имеют вид

$$V_p = \frac{A_1}{A_0} = \frac{\rho_2 c_2 \cos\theta - \rho_1 c_1 \cos\theta_2}{\rho_2 c_2 \cos\theta + \rho_1 c_1 \cos\theta_2}, \tag{5.55}$$

$$W_p = \frac{A_2}{A_0} = \frac{2\rho_2 c_2 \cos\theta}{\rho_2 c_2 \cos\theta + \rho_1 c_1 \cos\theta_2}. \tag{5.56}$$

Равенство плотностей и скоростей звука в двух средах гарантирует отсутствие отраженной волны при наклонном угле ее падения (тогда как при нормальном падении достаточным условием было равенство $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$). Однако, как следует из (5.55), при наклонном падении возможно полное прохождение, если $\rho_2 c_2 \cos\theta = \rho_1 c_1 \cos\theta_2$. Используя закон Снеллиуса, находим формулу для угла θ, при котором происходит полное проникновение звука в другую среду:

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{(\rho_1 c_1 / \rho_2 c_2)^2 - 1}{(\rho_1 / \rho_2)^2 - 1}}. \tag{5.57}$$

Это возможно, если выполняются такие два условия:

$$1)\ \frac{(\rho_1 c_1 / \rho_2 c_2)^2 - 1}{(\rho_1 / \rho_2)^2 - 1} > 0,$$

$$2)\ \frac{(\rho_1 c_1 / \rho_2 c_2)^2 - 1}{(\rho_1 / \rho_2)^2 - 1} \le 1. \tag{5.58}$$

Условие 1 выполняется в двух случаях: а) $\rho_1 c_1 / (\rho_2 c_2) > 1$, $\rho_1/\rho_2 > 1$; б) $\rho_1 c_1 / (\rho_2 c_2) < 1$, $\rho_1/\rho_2 < 1$. Эти случаи вместе с условием 2 дают искомые условия полного прохождения звука при наклонном падении под углом θ (см. (5.57)): из “а” условия 1 и условия 2 получаем

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} > \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} > 1 \text{ или } 1 > \frac{c_1}{c_2} > \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

из “б” условия 1 и условия 2 имеем

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} < \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} < 1 \text{ или } 1 < \frac{c_1}{c_2} < \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

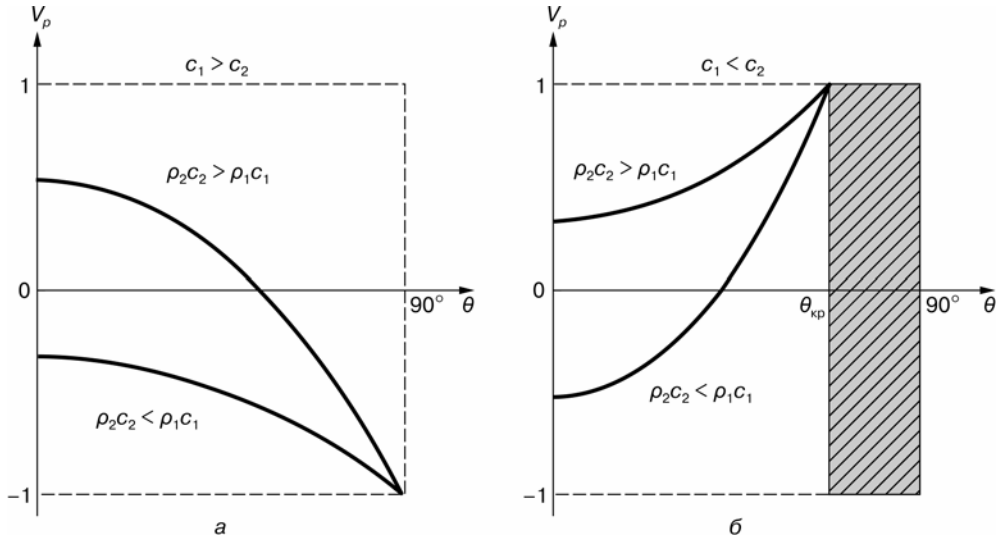


Рис. 5.9. Зависимость коэффициента отражения V_p от угла падения θ: *а* — $c_1 > c_2$; *б* — $c_1 < c_2$

Итак, полное прохождение звука возможно, если большее удельное акустическое сопротивление имеет среда с меньшей скоростью распространения звука. В этом случае возможно полное прохождение как из первой среды во вторую, так и наоборот.

Перепишем формулы (5.55) и (5.56) несколько иначе, исключив из них угол преломленной волны θ_2 с помощью (5.45). Тогда, используя обозначения

$$m = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad n = \frac{c_1}{c_2}, \tag{5.59}$$

получим

$$V_p = \frac{m\cos\theta - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{m\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}, \tag{5.60}$$

$$W_p = \frac{2m\cos\theta}{m\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}. \tag{5.61}$$

Как видим, характер зависимости коэффициентов V_p и W_p от угла падения θ существенно зависит от отношения скоростей звука n. Если $n > 1$, т.е. $c_1 > c_2$, то согласно (5.45) угол преломленной волны

$$\sin\theta_2 = \frac{c_2}{c_1}\sin\theta \tag{5.62}$$

всегда меньший, чем угол падения ($\theta_2 < \theta$). На рис. 5.9, *а* приведена зависимость коэффициента отражения V_p от угла падения θ при $c_1 > c_2$: значение коэффициента V_p монотонно падает от $V_p = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$ при $\theta = 0$ до $V_p = -1$ при $\theta = 90°$, причем ход кривой зависит от соотношения волновых сопротивлений $\rho_1 c_1$ и $\rho_2 c_2$.

Если $n < 1$, т.е. $c_1 < c_2$, то имеем $\theta_2 > \theta$. Как следует из формулы (5.62), существует такой угол падения θ, когда угол преломления $\theta_2 = 90°$. Этот угол падения называют *критическим,* и определить его можно так:

$$\theta_{кр} = \arcsin\frac{c_1}{c_2}, \quad c_1 < c_2. \tag{5.63}$$

На рис. 5.9, *б* представлена ситуация, когда $c_1 < c_2$. Здесь значение коэффициента V_p монотонно возрастает от $V_p = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$ при $\theta = 0$ до $V_p = +1$ при $\theta = \theta_{кр.}$

Возникает естественный вопрос, какой волновой процесс будет происходить в случае $c_1 < c_2$ при углах падения волны $\theta > \theta_{кр.}$

5.5.4. Звуковое поле при закритических углах падения волны

Для ответа на этот вопрос вернемся к решению задачи. При рассмотрении граничных условий на плоскости $x = 0$ были получены соотношения (5.43). Физическая суть этих соотношений заключается в утверждении, согласно которому, проекции волновых векторов на ось Oy падающей, отраженной и прошедшей волн должны быть одинаковыми. Поскольку частота падающей, отраженной и прошедшей волн одинаковая, то и пространственный период (т.е.

длина волны следа) на плоскости $x = 0$ для всех волн должен быть одинаковым. Иллюстрацией к сказанному есть рис. 5.10, на котором изображено распределение амплитуды давления в падающей и прошедшей волне (отраженная волна не показана).

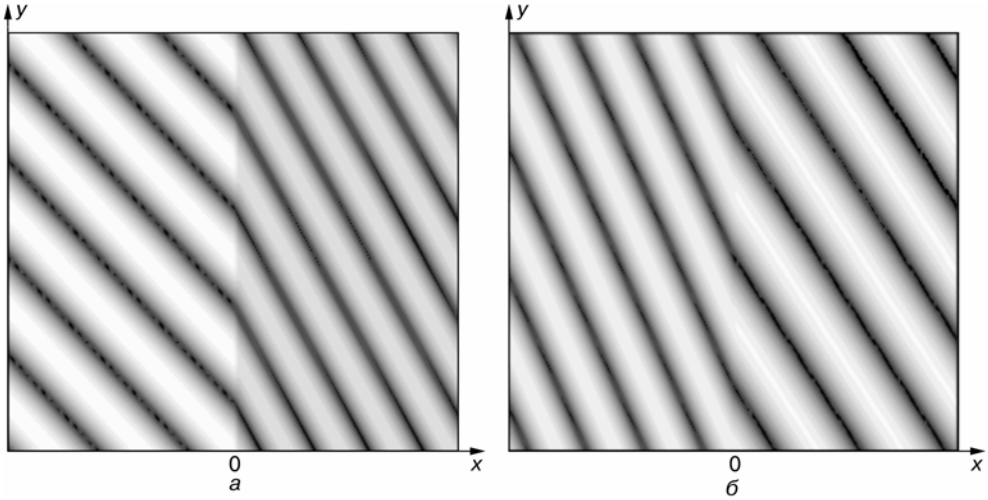


Рис. 5.10. Распределение амплитуды давления в падающей и прошедшей волне:

а — $\xi = 0{,}8$, $c_2 / c_1 = 0{,}6$, $\theta = 60°$, $\theta_2 \approx 31°$; *б* — $\xi = 1{,}5$, $c_2 / c_1 = 1{,}45$, $\theta = 40°$, $\theta_2 \approx 69°$, $\theta_{кр} \approx 44°$

Из равенства (5.43) $k_1 \sin\theta = k_2 \sin\theta_2$ также следует, что фазовые скорости следов всех трех волн вдоль оси Oy также одинаковы, и их можно определить так:

$$\upsilon_{фy}^{(0)} = \upsilon_{фy}^{(1)} = \upsilon_{фy}^{(2)} = \frac{\omega}{k_1 \sin\theta} = \frac{c_1}{\sin\theta}. \qquad (5.64)$$

Как уже отмечалось, нарушение этих соотношений приводит к невозможности выполнения граничных условий на всей поверхности границы $x = 0$. В случае критического угла падения волновой вектор следа прошедшей волны достигает максимального значения, т.е. волновой вектор во второй среде параллелен границе $x = 0$ и, при дальнейшем увеличении угла падения проекция волнового вектора падающей волны увеличивается, а для прошедшей волны дальнейшее увеличение проекции волнового вектора невозможно.

Таким образом, при условии $\theta > \theta_{кр}$ представление прошедшей волны в виде плоской бегущей волны, а именно

$$p_2 = A_2 \exp\left(-i\left(\omega t - k_2 x \cos\theta_2 - k_2 y \sin\theta_2\right)\right), \qquad (5.65)$$

не соответствует сложившейся ситуации. Единственно, о чем можно пока говорить, так это о характере волнового процесса вдоль оси Oy. Эта зависимость определяется следом падающей волны на ось Oy, т.е. функцией $\exp(-ik_1 y \sin\theta)$. Итак, для углов $\theta > \theta_{кр}$ прошедшую волну можно представить в таком виде:

$$p_2 = A_2 F(x) \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 y \sin\theta\right)\right), \tag{5.66}$$

где $F(x)$ — функция, которая определяет волновой процесс вдоль оси Ox, пока неизвестная. Поскольку волна (5.66) должна удовлетворять уравнению (5.37), то, подставив (5.66) в (5.37), получим дифференциальное уравнение для функции $F(x)$:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + (k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta)F = 0. \tag{5.67}$$

Его решение хорошо известно; оно определяется суперпозицией функций

$$\exp\left(i\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta} \cdot x\right), \quad \exp\left(-i\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta} \cdot x\right).$$

Поскольку при условии $\theta > \theta_{кр}$ имеем $k_1 \sin\theta > k_2$, то целесообразно их записать так:

$$\exp\left(-\sqrt{k_1^2 \sin^2\theta - k_2^2} \cdot x\right), \quad \exp\left(\sqrt{k_1^2 \sin^2\theta - k_2^2} \cdot x\right).$$

Вторая экспонента будет определять волну, в которой с увеличением координаты x, т.е. при отдалении от границы раздела сред, бесконечно возрастает энергия волны. Это противоречит физической сути. Поэтому, отбросив второе решение и оставляя первое, запишем прошедшую волну при условии $\theta > \theta_{кр}$ в виде

$$p_2 = A_2 \exp\left(-\sqrt{(k_1 \sin\theta)^2 - k_2^2} \cdot x\right) \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 y \sin\theta\right)\right). \tag{5.68}$$

Возвратимся снова к граничным условиям (5.38), (5.39) с учетом нового представления волны p_2 в виде (5.68). Подставляя выражения (5.35), (5.40) и (5.68) в уравнения (5.38), (5.39), получим систему алгебраических уравнений:

$$A_0 + A_1 = A_2,$$

$$\frac{k_1}{\omega\rho_1} \cos\theta \cdot (A_0 - A_1) = -\frac{1}{i\omega\rho_2} \sqrt{(k_1 \sin\theta)^2 - k_2^2} A_2. \tag{5.69}$$

Решая эту систему, находим

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{k_1 \cos\theta - i\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\sqrt{(k_1 \sin\theta)^2 - k_2^2}}{k_1 \cos\theta + i\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\sqrt{(k_1 \sin\theta)^2 - k_2^2}}, \tag{5.70}$$

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{2k_1 \cos\theta}{k_1 \cos\theta + i\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\sqrt{(k_1 \sin\theta)^2 - k_2^2}}. \tag{5.71}$$

Напомним, что при условии $\theta > \theta_{\text{кр}}$ (при $c_2 > c_1$) имеем неравенство $k_1 \sin\theta > k_2$ или, иначе, $\sin\theta > n$. Переписываем формулы (5.70), (5.71), используя обозначения (5.59) и соотношения $k_1 = \omega / c_1$, $k_2 = \omega / c_2$, имеем

$$V_p = \frac{A_1}{A_0} = \frac{m\cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{m\cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}, \tag{5.72}$$

$$W_p = \frac{A_2}{A_0} = \frac{2m\cos\theta}{m\cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}. \tag{5.73}$$

Как видим, V_p *и* W_p являются комплексными величинами. Учитывая то, что $|V_p| = 1$, запишем (5.72) и (5.73) в виде

$$V_p = \exp(-i2\varepsilon), \tag{5.74}$$

$$W_p = \frac{2m\cos\theta}{\sqrt{(m\cos\theta)^2 + \sin^2\theta - n^2}}\exp(-i\varepsilon), \tag{5.75}$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{m\cos\theta}. \tag{5.76}$$

Итак, давление звукового поля в первой среде можно представить так:

$$p^{(\mathrm{I})} = p_0 + p_1 = A_0 \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x\cos\theta - k_1 y\sin\theta\right)\right) +$$
$$+A_0 \exp\left(-i\left(\omega t + k_1 x\cos\theta - k_1 y\sin\theta + 2\varepsilon\right)\right), \tag{5.77}$$

а во второй среде

$$p^{(\mathrm{II})} = p_2 = \frac{2A_0 m\cos\theta\exp\left(-k_1\sqrt{\sin^2\theta - n^2}\cdot x\right)}{\sqrt{(m\cos\theta)^2 + \sin^2\theta - n^2}}\exp\left(-i\left(\omega t - k_1 y\sin\theta + \varepsilon\right)\right). \tag{5.78}$$

Таким образом, при условии $\theta > \theta_{кр}$ имеем $|V_p| = 1$, т.е. волна полностью отражается. Это явление получило название *полного внутреннего отражения.* Во второй среде будем иметь бегущую вдоль оси *Oy* плоскую волну, причем ее амплитуда с отдалением от границы спадает вдоль волнового фронта (вдоль оси *Ox*) по экспоненциальному закону. Эта особенность определяет название такой волны — *неоднородная плоская волна,* в отличие от "обычных" плоских волн, которые называют *однородными.* Графической иллюстрацией к описанию неоднородной волны есть рис. 5.11, на котором изображено распределение амплитуды давления в падающей на границу однородной и прошедшей неоднородной волн.

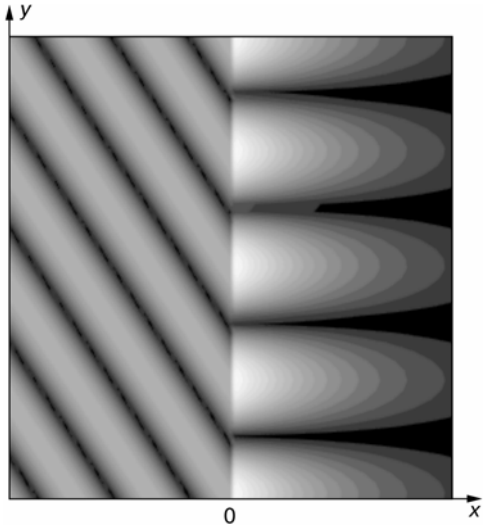


Рис. 5.11. Распределение амплитуды давления в падающей и прошедшей волне при $\theta > \theta_{кр}$:
$m = 1{,}3$, $n = 0{,}8$, $\theta_{кр} \approx 53°$, $\theta = 54{,}5°$

Другой особенностью является то, что неоднородная плоская волна распространяется вдоль оси *Oy* с фазовой скоростью $\upsilon_{фy}$, меньшей, чем скорость звука c_2 во второй среде. В самом деле, поскольку, $\upsilon_{фy} = \dfrac{\omega}{k_1 \sin\theta} = \dfrac{c_1}{\sin\theta}$, $c_2 = \dfrac{\omega}{k_2}$, а при $\theta > \theta_{кр}$ имеем $k_1 \sin\theta > k_2$, то

$$\upsilon_{фy} = \frac{c_1}{\sin\theta} < c_2. \qquad (5.79)$$

Рассмотрим, например, случай падения волны на поверхность раздела воздух-вода. Здесь $\rho_1 = 1{,}3$ кг/м^3, $\rho_2 = 10^3$ кг/м^3, $c_1 = 333$ м/с, $c_2 = 1500$ м/с. Итак, $m \approx 800$, $n = 0{,}22$. Полное внутреннее отражение

наблюдается при углах падения $\theta > \theta_{кр} = \arcsin(0{,}22) \approx 14°$. Тогда, скажем, для угла падения волны $\theta = 30°$ имеем такое соотношение: $k_1\sqrt{\sin^2\theta - n^2} = (2\pi/\lambda_1)\sqrt{\sin^2\theta - n^2} \approx 3/\lambda_1$. Таким образом, на расстоянии $x = \lambda_1$ волна во второй среде уменьшается в $e^3 \approx 20$ раз.

Приведенный пример показывает также, что характер уменьшения амплитуды неоднородной волны с увеличением x связан с ее частотой ω. Как видим, быстрее с удалением от границы уменьшается амплитуда волны, которая характеризуется большей частотой. Можно сказать, что в действительности неоднородная волна, которая образуется при падении плоской волны на границу под углом $\theta > \theta_{кр}$, распространяясь вдоль границы, возмущает некоторый приграничный слой среды. Теперь понятным становится название этого явления — *полное внутреннее отражение*. Подтверждением термина есть существование в другой среде своеобразного волнового процесса. Эта ситуация кардинально отличается от случая падения волны на абсолютно жесткую или мягкую поверхность, ведь в этом случае волнового процесса за идеальной границей не существует.

Перепишем выражение (5.78) для давления p_2 в таком виде:

$$p_2 = B\exp(-\alpha x)\exp\left[-i(\omega t - k_1 y\sin\theta + \varepsilon)\right], \tag{5.80}$$

где

$$B = \frac{2A_0 m\cos\theta}{\sqrt{(m\cos\theta)^2 + \sin^2\theta - n^2}}, \quad \alpha = k_1\sqrt{\sin^2\theta - n^2}. \tag{5.81}$$

Очевидно, неоднородная волна не может существовать во всем бесконечном пространстве, ведь ее амплитуда возрастает в некотором направлении (для волны (5.80) это отрицательное направление оси Ox) бесконечно. Для $\alpha > 0$ в полупространстве $x \geq 0$ не может существовать неоднородная волна $\exp(ik_1 y\sin\theta + \alpha x)$. В слое, ограниченном двумя плоскостями, параллельными плоскости $x = 0$, могут существовать две неоднородные волны.

Неоднородная волна не является чисто продольной волной: колебательная скорость $\mathbf{v}_2$ частиц имеет компоненту, которая перпендикулярна к направлению распространения волны. Действительно, компоненты колебательной скорости $\mathbf{v}_2 = (\upsilon_{x2}, \upsilon_{y2})$ определяются в виде

$$\upsilon_{x2} = \frac{1}{i\omega\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial x} = i\frac{\alpha}{\omega\rho_2}p_2, \tag{5.82}$$

$$\upsilon_{y2} = \frac{1}{i\omega\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial y} = \frac{k_1\sin\theta}{\omega\rho_2}p_2. \tag{5.83}$$

Тогда компоненты смещения частиц вдоль осей Ox и Oy определяются соотношениями $u_{x2} = \frac{\upsilon_{x2}}{-i\omega} = -\frac{\alpha}{\omega^2\rho_2} p_2$ и $u_{y2} = \frac{\upsilon_{y2}}{-i\omega} = i\frac{k_1 \sin\theta}{\omega^2\rho_2} p_2$. Переходя к действительной форме записи, имеем

$$u_{x2} = -\frac{\alpha}{\omega^2\rho_2} B\exp(-\alpha x)\cos(\omega t - k_1 \sin\theta y + \varepsilon),$$

$$u_{y2} = \frac{k_1 \sin\theta}{\omega^2\rho_2} B\exp(-\alpha x)\sin(\omega t - k_1 \sin\theta y + \varepsilon).$$

Отсюда находим уравнение траектории частиц:

$$\frac{u_{x2}^2}{\left[\frac{B\alpha}{\omega^2\rho_2}\exp(-\alpha x)\right]^2} + \frac{u_{y2}^2}{\left[\frac{Bk_1 \sin\theta}{\omega^2\rho_2}\exp(-\alpha x)\right]^2} = 1.$$

Итак, частицы в неоднородной волне двигаются по эллипсам с полуосями $\frac{Bk_1 \sin\theta}{\omega^2\rho_2}\exp(-\alpha x)$ и $\frac{B\alpha}{\omega^2\rho_2}\exp(-\alpha x)$. Большая ось лежит в направлении самого быстрого изменения фазы, т.е. в направлении распространения волны (вдоль оси Oy), малая ось — в направлении самого быстрого изменения амплитуды (вдоль оси Ox).

Несколько слов об отраженной волне при условии $\theta > \theta_{кр.}$ Согласно (5.77) модуль коэффициента отражения $|V_p| = 1$, а фаза коэффициента отражения одинакова для любой частоты падающей гармонической волны. Эта дополнительная фаза эквивалентна уменьшению длины пробега отраженной волны в среде на величину $2\varepsilon/k_1 = 2\varepsilon c_1/\omega$, эта величина будет разной для волн разных частот. Можно сказать, что отражение при условии $\theta > \theta_{кр}$ сопровождается “сосредоточенной” (на границе) дисперсией. Поэтому при падении плоской негармонической волны при условии $\theta > \theta_{кр}$ формы отраженной и падающей волн будут различаться.

Заметим, что при угле падения волны, который точно равняется критическому, отражение подобно отражению от акустически жесткой поверхности. В самом деле, согласно полученным результатам, при $\theta = \theta_{кр}$ нормальная составляющая скорости частиц на границе равна нулю, коэффициент отражения по давлению — +1, а коэффициент прохождения по давлению достигает 2.

5.5.5. Энергетические соотношения при наклонном падении волны

Рассмотрим теперь энергетические соотношения в падающей, отраженной и прошедшей волнах. Выделим в поле падающей волны некоторую трубку, площадь поперечного сечения S которой лежит в плоскости фронта волны (рис. 5.12). Согласно закону сохранения энергии $IS = I_1S_1 + I_2S_2$, где I, I_1, I_2 — интенсивности в падающей, отраженной и прошедшей волнах. Поскольку $S = S_1$, то

$$IS = I_1S + I_2S_2, \tag{5.84}$$

мощность падающей волны равняется сумме мощностей отраженной и преломленной волн.

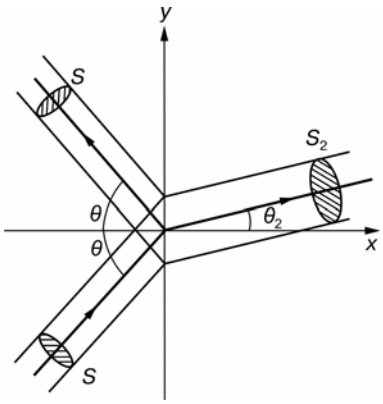


Рис. 5.12. Пример определения энергетического соотношения (5.85)

Из геометрии задачи (см. рис. 5.12) следует, что $S_2 = S\dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta}$, тогда (5.84) приобретет вид

$$I = I_1 + I_2\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta} \tag{5.85}$$

или, разделив (5.85) на I, получим

$$1 = V_E + W_E\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta},$$

где $V_E = I_1/I$; $W_E = I_2/I$. Как видим, при наклонном падении волны на границу в энергетическое соотношение коэффициентов отражения и прохождения (5.85) входят углы θ и θ_2. Это следует из модели акустической среды, ведь на границе раздела сред фиксируется лишь нормальная составляющая колебательной скорости частиц. Равенство

$1 = V_E + W_E$ справедливо для нормального падения волны или для наклонного падения при $c_1 = c_2$ (в этом случае $\theta_2 = \theta$).

Обратимся к закритическим углам падения волны. Определим вектор плотности потока мощности во второй среде $\mathbf{W}_2$ при $\theta > \theta_{\text{кр.}}$ Вычислим его составляющие вдоль оси Ox W_{x2} и вдоль оси Oy W_{y2}. В соответствии с (5.80)-(5.83) имеем

$$W_{x2} = \operatorname{Re} p_2 \operatorname{Re} \upsilon_{x2} = \frac{\alpha}{\omega\rho_2} B^2 \exp(-2\alpha x) \times$$

$$\times \cos(\omega t - k_1 \sin\theta y + \varepsilon) \cos(\omega t - k_1 \sin\theta y + \varepsilon + \pi/2), \qquad (5.86)$$

$$W_{y2} = \operatorname{Re} p_2 \operatorname{Re} \upsilon_{y2} = \frac{k_1 \sin\theta}{\omega\rho_2} B^2 \exp(-2\alpha x) \cos^2(\omega t - k_1 \sin\theta y + \varepsilon).$$

Тогда средний за период поток мощности равен

$$I_{x2} = \langle W_{x2} \rangle = 0,$$

$$I_{y2} = \langle W_{y2} \rangle = \frac{k_1 \sin\theta \cdot B^2}{2\omega\rho_2} \exp(-2\alpha x). \qquad (5.87)$$

Итак, волна во второй среде не переносит энергию от границы вдоль оси Ox, хотя плотность энергии во второй среде не равна нулю. Иначе говоря, при условии $\theta > \theta_{\text{кр}}$ энергия падающей волны полностью отражается от границы раздела сред, возмущая при этом некоторый приграничный слой во второй среде. Такая особенность в энергетике неоднородной волны обусловлена кинематикой частиц среды в волне: вдоль оси Ox происходит синфазное движение частиц по эллиптическим траекториям с амплитудой, которая уменьшается с расстоянием от границы по экспоненциальному закону $\exp(-\alpha x)$. При этом сдвиг фаз между давлением p_2 и составляющей колебательной скорости υ_{x2} вдоль оси Ox равняется $\pi/2$. Согласно (5.79) фазовая скорость неоднородной волны вдоль оси Oy $\upsilon_{\text{ф}y}$ меньше скорости звука в среде c_2. Итак, можно сказать, что возмущения, которые распространяются вдоль границы со скоростью, меньшей скорости звука в среде, не излучают акустическую энергию в среду.

Для однородной плоской волны (например, падающей волны (5.35)) расчет среднего за период потока мощности приводит выражениям

$$I_x = I\cos\theta, \quad I_y = I\sin\theta, \quad \text{где} \quad I = \frac{|A_0|^2}{2\rho_1 c_1}, \qquad (5.88)$$

которые определяют перенос энергии вдоль координатных осей Ox и Oy. (Убедитесь в справедливости (5.88) самостоятельно.)

5.6. Отражение звука от подвижной границы

На практике довольно часто бывают ситуации, когда звуковая волна падает на подвижное препятствие. Возникает вопрос: в чем особенность такой ситуации по сравнению со случаем неподвижного препятствия. Исследование этого вопроса проведем на простой модели.

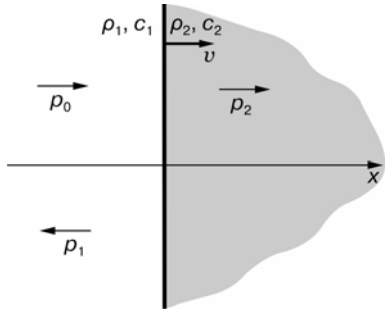


Рис. 5.13. Пример падающей волны на подвижную границу двух сред

Пусть плоская граница раздела двух сред двигается с постоянной скоростью υ вдоль положительного направления оси Ox (рис. 5.13), причем в момент времени $t = 0$ ее координата $x = 0$. Слева от границы расположена акустическая среда с параметрами ρ_1, c_1, справа — другая среда с параметрами ρ_2, c_2. На границу слева нормально к ней падает плоская гармоническая волна

$$p_0 = A_0 \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x\right)\right) = A_0 \exp\left(-i\omega\left(t - x/c_1\right)\right). \qquad (5.89)$$

При взаимодействии волны с границей образуются отраженная волна p_1 и прошедшая в другую среду волна p_2. Запишем их в виде плоских гармонических волн со своими амплитудами:

$$p_1 = A_1 \exp\left(-i\omega\left(t + x/c_1\right)\right), \quad p_2 = A_2 \exp\left(-i\omega\left(t - x/c_2\right)\right). \qquad (5.90)$$

Понятно, что p_0, p_1, p_2 удовлетворяют волновому уравнению, но они также должны удовлетворять граничным условиям на подвижной границе, которая изменяет свою координату согласно уравнению $x = \upsilon t$. Итак, граничные условия имеют вид

$$p_0 + p_1 = p_2, \quad x = \upsilon t, \qquad (5.91)$$

$$\upsilon_{x0} + \upsilon_{x1} = \upsilon_{x2}, \quad x = \upsilon t. \qquad (5.92)$$

Подставим (5.90) в граничное условие (5.91):

$$A_0 \exp\left(-i\omega t\left(1-\upsilon/c_1\right)\right)+A_1 \exp\left(-i\omega t\left(1+\upsilon/c_1\right)\right)=A_2 \exp\left(-i\omega t\left(1-\upsilon/c_2\right)\right). \tag{5.93}$$

Соотношения (5.93) должны выполняться для любого момента времени t. Приравнять показатели экспоненты, по аналогии с уравнением (5.42), нельзя, поскольку очевидно, что $1-\upsilon/c_1 \neq 1+\upsilon/c_1$. Вместе с тем, выбирая амплитуды A_1 и A_2 можно удовлетворить равенство (5.93), но только для конкретного момента времени t. Такая ситуация говорит о том, что запись отраженной и прошедшей волн в виде (5.90) не является правильной. В связи с этим, сделаем предположение: пусть отраженная и прошедшая волны остаются плоскими гармоническими волнами, но их частоты отличаются от частоты ω падающей на границу волны. Итак, запишем волны p_1 и p_2 в виде

$$p_1 = A_1 \exp\left(-i\omega_1\left(t+x/c_1\right)\right),$$

$$p_2 = A_2 \exp\left(-i\omega_2\left(t-x/c_2\right)\right). \tag{5.94}$$

Снова распишем граничное условие (5.91) с учетом формул (5.94), получим

$$A_0 \exp\left(-i\omega t\left(1-\upsilon/c_1\right)\right)+A_1 \exp\left(-i\omega_1 t\left(1+\upsilon/c_1\right)\right)=$$

$$=A_2 \exp\left(-i\omega_2 t\left(1-\upsilon/c_2\right)\right). \tag{5.95}$$

Понятно, что для выполнения равенства (5.95) в любой момент времени t нужно приравнять показатели экспонент:

$$\omega\left(1-\upsilon/c_1\right)=\omega_1\left(1+\upsilon/c_1\right)=\omega_2\left(1-\upsilon/c_2\right). \tag{5.96}$$

Отсюда определяем искомые частоты

$$\omega_1=\frac{1-\upsilon/c_1}{1+\upsilon/c_1}\omega, \qquad \omega_2=\frac{1-\upsilon/c_1}{1-\upsilon/c_2}\omega. \tag{5.97}$$

Дальнейший поиск амплитуд A_1 и A_2 не вызывает трудностей.

Как видим, если граница двигается в направлении распространения волны p_0 (скорости υ и c_1 по направлению совпадают), то $\omega_1 < \omega$; если граница двигается навстречу падающей волне (скорости υ и c_1 противоположны по направлению), то $\omega_1 > \omega$. Изменение частоты звука, отраженного от подвижного объекта, называется *эффектом Доплера*[*]. Понятно, что этот эффект имеет место и в ситуации когда источник двигается, а наблюдатель неподвижен. Эффект Доплера находит широкое применение при создании гидроакустических лока-

[*] Доплер (Doppler) Кристиан (1803—1853) — австрийский физик и астроном.

торов и медицинской диагностической аппаратуры, которая использует акустические волны.

5.7. Входное сопротивление препятствия

При решении задачи об отражении гармонической волны от препятствия (например, границы раздела двух сред) часто не интересуются прошедшей волной в препятствие. В таких случаях, при условиях, о которых речь будет идти ниже, можно облегчить решение задачи об отражении звука. Для этого вводится понятие *входного сопротивления* (*входного импеданса*) *препятствия* $Z_{вх}$, которое определяется как отношение комплексных амплитуд звукового давления p и нормальной составляющей колебательной скорости υ_n на границе среды и препятствия S:

$$Z_{вх} = \left.\frac{p}{\upsilon_n}\right|_S, \tag{5.98}$$

причем нормаль **n** к границе S направлена во внутреннюю область препятствия. В этом случае при положительном звуковом давлении (сжатие) возле границы, она будет стремиться прогнуться во внутреннюю область препятствия, при этом положительное значение колебательной скорости также будет направлено во внутреннюю область препятствия. Если нормаль к границе является внешней для препятствия, то формулу (5.98) нужно записать со знаком минус. Величину, обратную к $Z_{вх}$, называют *входной проводимостью препятствия*, т.е. $Y_{вх} = 1/Z_{вх}$.

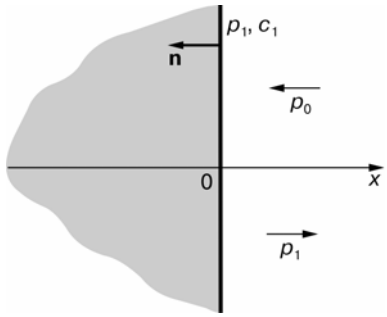


Рис. 5.14. Пример падающей плоской волны на препятствие

Для осознания нового понятия рассмотрим две задачи:

1) как использовать знание величины $Z_{вх}$ для определения поля перед препятствием;

2) как, измерив, параметры звукового поля перед препятствием, определить его входной импеданс $Z_{вх}$.

Пусть плоская граница S разделяет среду ($x > 0$) с параметрами ρ_1, c_1 и препятствие ($x < 0$) (рис. 5.14). На границу S нормально падает плоская гармоническая волна $p_0 = A_0 \exp(-i(\omega t + k_1 x))$, тогда давление в отраженной волне $p_1 = A_1 \exp(-i(\omega t - k_1 x))$, $k_1 = \omega / c_1$.

Рассмотрим первую задачу. Согласно определению входного импеданса препятствия на ее поверхности S (координата $x = 0$) выполняется соотношение

$$\left.\frac{p_0 + p_1}{\upsilon_{x0} + \upsilon_{x1}}\right|_{x=0} = Z_{\text{вх}}. \tag{5.99}$$

Подставив в (5.99) выражения для давления и колебательной скорости в падающей и отраженной волнах при $x = 0$, получим, что $Z_{\text{вх}} = \dfrac{\rho_1 c_1 (A_0 + A_1)}{(A_0 - A_1)}$. Поскольку отношение $A_1 / A_0 = V_p$ определяет коэффициент отражения, выражение для входного сопротивления препятствия можно записать так:

$$Z_{\text{вх}} = \rho_1 c_1 \frac{1 + V_p}{1 - V_p}. \tag{5.100}$$

Отсюда получим выражение для коэффициента отражения V_p через известное входное сопротивление препятствия $Z_{\text{вх}}$:

$$V_p = \frac{Z_{\text{вх}} - \rho_1 c_1}{Z_{\text{вх}} + \rho_1 c_1}. \tag{5.101}$$

Итак, первая задача решена. Часто используют понятие относительного входного сопротивления препятствия $\zeta_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}} / (\rho_1 c_1)$, тогда (5.101) приобретает вид

$$V_p = \frac{\zeta_{\text{вх}} - 1}{\zeta_{\text{вх}} + 1}. \tag{5.102}$$

В случае, когда препятствием является другая среда с параметрами ρ_2, c_2, имеем $Z_{\text{вх}} = \rho_2 c_2$ (подумайте, почему?). В этом случае формула (5.101) совпадает с формулой (5.48), которая определяет коэффициент отражения при нормальном падении плоской волны на границу раздела двух сред.

Таким образом, при определении отраженной волны, вместо задачи сопряжения звуковых полей на границе раздела двух сред (см. (4.42), (4.43)), т.е. удовлетворения граничных условий по давлению и колебательной скорости, используется одно условие (5.99). Такое упрощение возможно в ситуациях:

• если граница препятствия является бесконечной плоскостью и на нее нормально падает плоская волна;

• если, в силу тех или других причин, свойства другой среды таковы, что угол прохождения волны во вторую среду $\theta_2 \approx 0$ при любых значениях угла падения θ. Это означает, что преломленная волна распространяется практически вдоль оси *Ox*. В этом случае условие (5.99) называют *импедансным граничным условием*, а саму границу — *импедансной границей*. Модель импедансной границы хорошо описывает такую реальную ситуацию, когда $c_2 << c_1$, тогда действительно, согласно закону Снеллиуса (5.45), имеем $\theta_2 \approx 0$ при любом θ. Другим примером служат пористые звукопоглощающие материалы, в которых поры расположены в направлении, перпендикулярном к поверхности раздела. Здесь затухание звука при распространении в поглотителе в направлении вдоль границы существенно превышает затухание при распространении в перпендикулярном к границе направлении.

Как следствие, можно сказать, что импедансное граничное условие (5.98) определяет модель препятствия, для которого колебательная скорость в некоторой точке ее поверхности зависит лишь от давления в этой же точке и не зависит от давления в других точках на поверхности. О таком препятствии еще говорят, что она характеризуется *локальным* (т.е. в точке) импедансом. Другими словами, если рассматривать модель импедансной границы в виде пор (капилляров), расположенных в направлении, перпендикулярном к поверхности раздела, то нормальный импеданс фактически является мерой противодействия со стороны жидкости в капилляре колебаниям среды на границе препятствия. Понятно, что при падении волны на импедансное препятствие возникают новые явления по сравнению с взаимодействием волны с акустически мягкими и жесткими телами. Если нормальный импеданс обусловлен трением о стенки капилляров, то колебания будут частично поглощаться и это приведет к оттоку энергии из окружающей среды. Здесь нормальный импеданс является действительной величиной. Но он может быть и мнимой величиной, что определяет или инерционный характер, обусловленный массой жидкости в капиллярах, или упругий характер, если эта жидкость упруго деформируется. В общем случае величина $Z_{вх}$ является комплексной величиной, что обусловлено комбинацией разных приведенных выше факторов. Понятно, что импедансное условие имеет определенные границы применения. Так, оно не может выступить как модель для границы раздела жидкости и пластинки, поскольку в этом случае смещение в некоторой точке зависит от распределения сил по всей пластинке вследствие возможности распространения из-

гибных волн вдоль пластинки. Но такие сложные ситуации не будут рассматриваться в данной работе.

Перейдем ко второй задаче: определение импеданса препятствия при известном поле звуковой волны перед препятствием. Пусть p_0 — амплитуда давления в падающей волне на препятствие, а V_p — коэффициент отражения. Поле перед препятствием запишем в виде суммы падающей и отраженной волн:

$$p = p_0 \exp\left(-i\left(\omega t + k_1 x\right)\right) + p_0 V_p \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x\right)\right).$$

Представим V_p в виде $V_p = |V_p| \exp(i\varepsilon)$. Здесь $|V_p|$ будет определять амплитуду отраженной волны давления, а наличие угла ε определяет тот факт, что в общем случае фазы падающей и отраженной волн могут не совпадать. Тогда

$$p = p_0 \exp\left(-i\left(\omega t + k_1 x\right)\right) + p_0 \left|V_p\right| \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x - \varepsilon\right)\right). \qquad (5.103)$$

Определим амплитуду звукового давления в звуковом поле перед препятствием. Для этого найдем модуль выражения (5.103):

$$\left|p\right| = \sqrt{pp^*} = p_0 \sqrt{1 + \left|V_p\right|^2 + 2\left|V_p\right| \cos(2k_1 x + \varepsilon)}. \qquad (5.104)$$

Для акустически жесткой поверхности ($|V_p| = 1$, $\varepsilon = 0$) имеем обычную стоячую волну перед препятствием:

$$\left|p\right| = p_0 \sqrt{2\left(1 + \cos\left(2k_1 x\right)\right)} = 2p_0 \left|\cos\left(k_1 x\right)\right|.$$

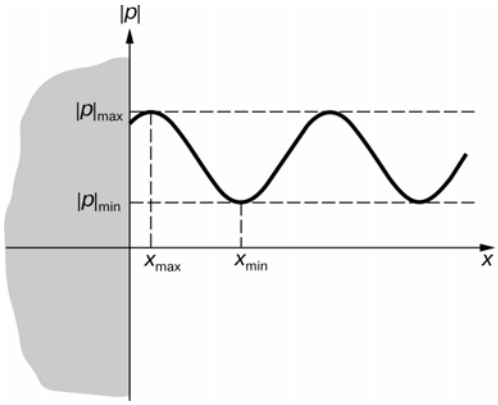


Рис. 5.15. Зависимость амплитуды давления $|p|$ от координаты x

На рис. 5.15 изображена периодическая зависимость амплитуды $|p|$ от координаты x. Как следует из (5.104), при условии $\cos(2k_1 x + \varepsilon) = 1$ имеем максимальное значение амплитуды давления $|p|_{\max} = p_0(1 + |V_p|)$, а при условии $\cos(2k_1 x + \varepsilon) = -1$ получим минимальное значение амплитуды $|p|_{\min} = p_0(1 - |V_p|)$.

Итак, измеряя $|p|_{\max}$ и $|p|_{\min}$, получаем два уравнения $p_0(1 + |V_p|) = |p|_{\max}$ и $p_0(1 + |V_p|) = |p|_{\min}$. Отсюда, исключив амплитуду падающей волны p_0, находим модуль коэффициента отражения

$$\left|V_p\right| = \frac{|p|_{\max} - |p|_{\min}}{|p|_{\max} + |p|_{\min}} = \frac{|p|_{\max} / |p|_{\min} - 1}{|p|_{\max} / |p|_{\min} + 1}. \qquad (5.105)$$

Фазовую характеристику коэффициента отражения V_p определяют, фиксируя значение расстояния от препятствия, где наблюдается максимум или минимум амплитуды давления:

$$2k_1 x_{\max}^{(n)} + \varepsilon = 2\pi(n-1), \;\; n = 1, 2, \ldots,$$

$$2k_1 x_{\min}^{(m)} + \varepsilon = \pi(2m-1), \;\; m = 1, 2, \ldots, \qquad (5.106)$$

где $x_{\max}^{(n)}$ — координата n-го максимума амплитуды давления; $x_{\min}^{(m)}$ — координата *m-го* минимума амплитуды давления. Перемещая микрофон вдоль оси *Ox*, начиная от препятствия ($x = 0$), фиксируют расстояние или до первого минимума $x_{\min}$, или до первого максимума $x_{\max}$. Согласно (5.106) эти расстояния (полагаем $n = m = 1$) можно определить так:

$$x_{\max} = -\frac{\varepsilon}{2k_1} = -\frac{\lambda_1}{4}\frac{\varepsilon}{\pi}, \quad x_{\min} = \frac{\pi - \varepsilon}{2k_1} = \frac{\lambda_1}{4}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi}\right), \qquad (5.107)$$

где $\lambda_1 = 2\pi / k_1$ — длина звуковой волны в среде. Отсюда получим такие формулы для аргумента коэффициента отражения:

$$\varepsilon = -2k_1 x_{\max} = -4\pi x_{\max} / \lambda_1 \qquad (5.108)$$

или

$$\varepsilon = -2k_1 x_{\min} + \pi = -4\pi\left(x_{\min} / \lambda_1 - 1/4\right). \qquad (5.109)$$

Согласно формуле (5.100) находим искомую величину входного сопротивления препятствия через измеренный коэффициент отражения:

$$Z_{\text{вх}} = \rho_1 c_1 \frac{1 + V_p}{1 - V_p}. \qquad (5.100)$$

Если препятствие акустически жесткое ($\upsilon_x = 0$, $V_p = 1$), то $Z_{\text{вх}} = \infty$; если препятствие акустически мягкое ($p = 0$, $V_p = -1$), то $Z_{\text{вх}} = 0$.

Среда препятствия определяет комплексный характер коэффициента отражения. И здесь интересными являются такие детали. Рассмотрим две ситуации. Пусть при измерении поля перед препятствием получили, что $|p|_{\max} / |p|_{\min} = 2$, $x_{\max} = \lambda_1 / 10$. Согласно (5.105) и

(5.108) получим значение модуля $|V_p| = 1/3$ и аргумента $\varepsilon = -0{,}4\pi$ коэффициента отражения, итак, $V_p = (1/3)\exp(-i0{,}4\pi)$. Далее по формуле (5.110) определяем сопротивление препятствия $Z_{вх} \approx (0{,}78 - i0{,}77)\rho_1 c_1$. Если теперь на расстоянии $x_{min} = \lambda_1/10$ находится минимум амплитуды давления, то согласно (5.109) имеем $\varepsilon = 0{,}4\pi$ и коэффициент отражения $V_p = (1/3)\exp(i0{,}4\pi)$. Тогда входной импеданс препятствия $Z_{вх} \approx (0{,}78 + i0{,}77)\rho_1 c_1$. Таким образом, знак мнимой части $Z_{вх}$ изменился.

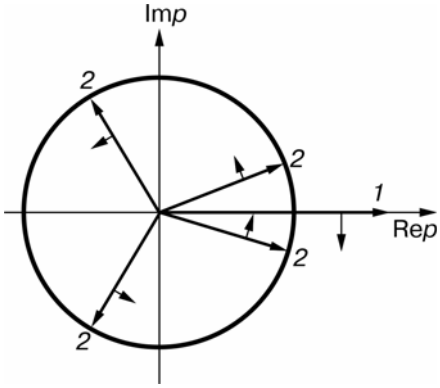


Рис. 5.16. Векторное изображение комплексных амплитуд давления падающей (*1*) и отраженной (*2*) волн

Чтобы сделать обобщение обратимся к графическому изображению комплексных амплитуд давления падающей и отраженной волн в виде векторов (рис. 5.16). На этом рисунке вдоль оси абсцисс отложена действительная часть давления Re p, а вдоль оси ординат — мнимая Im p. Вектор *1* обозначает комплексную амплитуду давления падающей волны $A_0\exp(-i\omega t - ikx)$ на поверхности препятствия $x = 0$ в момент времени $t = 0$. При удалении от препятствия вдоль оси Ox (рис. 5.14) вектор *1* (на рис. 5.16), который определяется комплексной амплитудой падающей волны $A_0\exp(-ikx)$, будет вращаться вокруг начала координат по часовой стрелке.

Вектор *2*, который соответствует комплексной амплитуде отраженной волны $p_0|V_p|\exp(i\varepsilon)$ на поверхности препятствия ($x = 0$), располагается в одном из квадратов плоскости (ReV_p, ImV_p). Это зависит от аргумента ε коэффициента отражения V_p. Понятно, что при удалении от препятствия вектор $p_0|V_p|\exp(ikx + i\varepsilon)$ вращается против часовой стрелки. Полное обращение вектора означает изменение фазы волны на величину 2π, что соответствует перемещению точки наблюдения вдоль оси Ox на расстояние, которое равняется длине волны. Четверть полного оборота соответствует расстоянию в пространстве $\lambda/4$. Таким образом,

если $\mathrm{Im}\,V_p < 0$, то на расстоянии $0\ldots\lambda/4$ от препятствия получим первым максимум, ведь, когда векторы *1* и *2* при вращении становятся коллинеарными, их направления совпадают. Если $\mathrm{Im}\,V_p > 0$, то на расстоянии $0\ldots\lambda/4$ от препятствия получим первым минимум, поскольку, когда векторы *1* и *2* при вращении становятся коллинеарными, их направления противоположны.

Полученные результаты можно положить в основу метода измерения коэффициента отражения при нормальном падении звука и акустического импеданса материала. Действительно, если плоская звуковая волна падает на поверхность, которая характеризуется некоторым входным импедансом, то из отношения максимума и минимума амплитуд звукового давления имеем модуль коэффициента отражения, а его аргумент можно найти по расстоянию к ближайшему минимуму или максимуму амплитуды звукового давления. Для получения точных результатов измерения звуковые волны должны быть плоскими. Плоские волны легко возбуждаются в трубах с акустически жесткими стенками на частотах, для которых диаметр трубы меньше, чем половина длины волны (см далее параграф 5.10). В такой трубе на одном конце размещают излучатель звука, а на втором — образец исследуемого материала. Существенное преимущество метода — небольшие размеры образцов.

5.8. Входное сопротивление жидкого плоского слоя, опирающегося на препятствие

Изучение процесса падения звуковой волны на слой является очень важной задачей с точки зрения, как теории, так и практики. Действительно, взаимодействие звука со слоем или структурой, которая состоит из нескольких слоев, встречается довольно часто в разных технических устройствах и, наверное, на каждом шагу в природной среде.

В этом параграфе рассмотрим нормальное падение плоской гармонической волны на плоский жидкий слой, который опирается на некоторое препятствие с входным импедансом Z (рис. 5.17). Среда ($x < 0$) характеризуется плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1, а плоский слой ($0 < x < h$), соответственно, — ρ_2 и c_2. Импеданс препятствия Z считаем заданным.

Звуковое давление в волне падающей нормально к слою запишем так:

$$p_0 = A_0 \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x\right)\right), \;\; k_1 = \omega / c_1. \qquad (5.111)$$

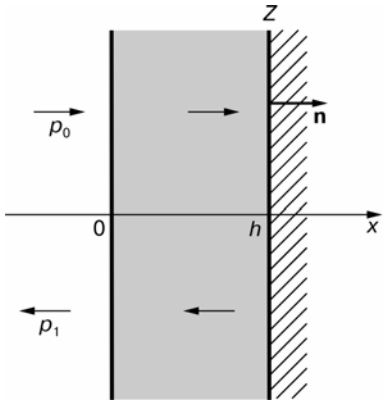


Рис. 5.17. Пример падающей волны на слой, который опирается на препятствие с входным импедансом Z

Процесс прохождения звука через слой можно представить в виде бесконечного процесса отражения и прохождение волны на границах слоя $x = 0$ и $x = h$. Тем не менее, математически это выглядит просто:

$$p_1 = A_1 \exp\left(-i\left(\omega t + k_1 x\right)\right), \tag{5.112}$$

$$p_{ш} = a_1 \exp\left(-i\left(\omega t - k_2 x\right)\right) + a_2 \exp\left(-i\left(\omega t + k_2 x\right)\right), \quad k_2 = \omega / c_2, \tag{5.113}$$

где амплитуды A_1, a_1, a_2 можно записать в виде бесконечных сумм амплитуд волн, которые возникают вследствие отражения и прохождения волны (сделайте вспомогательный рисунок и обдумайте эту ситуацию самостоятельно).

На границах слоя (рис. 5.17) имеем такие граничные условия:

$$p_0 + p_1 = p_{ш}, \quad x = 0, \tag{5.114}$$

$$\frac{1}{i\omega\rho_1}\frac{\partial(p_0 + p_1)}{\partial x} = \frac{1}{i\omega\rho_2}\frac{\partial p_{ш}}{\partial x}, \quad x = 0, \tag{5.115}$$

$$\frac{p_{ш}}{\dfrac{1}{i\omega\rho_2}\dfrac{\partial p_{ш}}{\partial x}} = Z, \quad x = h. \tag{5.116}$$

Условия (5.114) и (5.115) определяют равенство давлений и колебательных скоростей на границе $x = 0$, а условие (5.116) записано согласно определению входного сопротивления препятствия Z.

Определим входное сопротивление слоя $Z_{вх}$, разделив (5.114) на (5.115):

$$Z_{\text{вх}} = \frac{p_{\text{ш}}}{\frac{1}{i\omega\rho_2}\frac{\partial p_{\text{ш}}}{\partial x}}, \quad x = 0. \tag{5.117}$$

Подставим (5.113) в (5.117):

$$Z_{\text{вх}} = \rho_2 c_2 \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}. \tag{5.118}$$

Подставив (5.113) в (5.116), получим такое соотношение между амплитудами a_1 и a_2:

$$a_1 = a_2 \frac{Z + \rho_2 c_2}{Z - \rho_2 c_2} \exp\left(-i2k_2 h\right). \tag{5.119}$$

С учетом (5.119) формула (5.118) после ряда преобразований примет вид

$$Z_{\text{вх}} = \rho_2 c_2 \frac{Z - i\rho_2 c_2 \operatorname{tg}(k_2 h)}{\rho_2 c_2 - iZ\operatorname{tg}(k_2 h)}. \tag{5.120}$$

Итак, (5.120) определяет входной импеданс слоя, который опирается на препятствие с входным импедансом Z. Согласно (5.101) и знания $Z_{\text{вх}}$ полностью определяем поле перед препятствием. Как видим, в общем случае $Z_{\text{вх}}$ — комплексная величина, причем независимо от Z входной импеданс слоя $Z_{\text{вх}}$ является периодической функцией волновой толщины слоя $k_2 h = 2\pi h/\lambda_2$, где λ_2 — длина звуковой волны в среде слоя.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть препятствием является другая среда с параметрами ρ_3 и c_3, тогда $Z = \rho_3 c_3$. В этом случае

$$Z_{\text{вх}} = \rho_2 c_2 \frac{\rho_3 c_3 - i\rho_2 c_2 \operatorname{tg}(k_2 h)}{\rho_2 c_2 - i\rho_3 c_3 \operatorname{tg}(k_2 h)}. \tag{5.121}$$

Интересной и важной является такая задача: найти условия полного прохождения звука из одной среды в другую через слой толщиной h. Понятно, что нужно подобрать значения $\rho_2 c_2$ и h такими, чтобы $Z_{\text{вх}} = \rho_1 c_1$, тогда отраженной волны не будет. При условии $Z_{\text{вх}} = \rho_1 c_1$ выражение (5.121) принимает вид

$$\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2 \frac{\rho_3 c_3 - i\rho_2 c_2 \operatorname{tg}(k_2 h)}{\rho_2 c_2 - i\rho_3 c_3 \operatorname{tg}(k_2 h)}. \tag{5.122}$$

Существует две возможности, при которых равенство (5.122) будет справедливым:

1) если $\operatorname{tg}(k_2 h) = 0$, то $k_2 h = n\pi$, $n = 1,2,\ldots$; $2\pi h/\lambda_2 = n\pi$, $h = n\lambda_2/2$, имеем $\rho_1 c_1 = \rho_3 c_3$. Таким образом, если слой разделяет среды с одинаковыми

удельными акустическими сопротивлениями ($\rho_1 c_1 = \rho_3 c_3$), то полное прохождение звука через слой будет иметь место при толщине h, которая кратна целому числу полуволн в слое. На рис. 5.18 в соответствии с (5.101) и (5.121) изображены зависимости модуля коэффициента отражения

$$\left|V_p\right| = \left|\frac{Z_{\text{вх}} - \rho_1 c_1}{Z_{\text{вх}} + \rho_1 c_1}\right|, \tag{5.123}$$

как функции волновой толщины слоя при разных значениях величины $q = \rho_2 c_2 / \rho_1 c_1$. Если на толщине слоя укладывается целое число половин длин волн $\lambda_2/2$, отражение не наблюдается и звук проходит сквозь слой полностью, т.е. слой становится звукопроницаемым. При этом, чем больше значение q, тем более резко изменяется модуль $|V_p|$ в области звукопроницаемости слоя, т.е. при значительных величинах q малые изменения толщины слоя резко ухудшают эффект звукопрозрачности слоя;

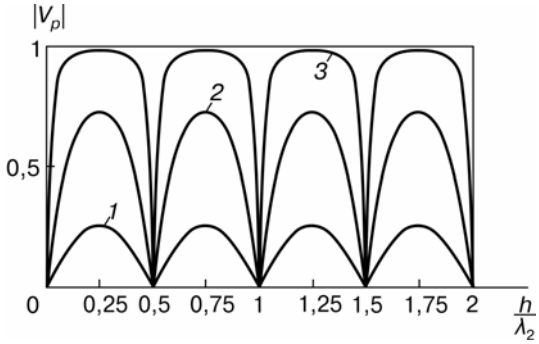


Рис. 5.18. Зависимость $|V_p|$ от h/λ_2 для разного значения q при $\rho_1 c_1 = \rho_3 c_3$: *1* — $q = 1{,}3$; *2* — $q = 2{,}5$; *3* — $q = 10$

2) если $\text{tg}(k_2 h) = \infty$, то $k_2 h = (2n - 1)\pi/2$, $n = 1,2,\ldots$, $h=(2n-1)\lambda_2/4$, имеем $\rho_2 c_2 = \sqrt{\rho_1 c_1 \rho_3 c_3}$, т.е. полное прохождение звука будет наблюдаться при толщине слоя, которая кратна нечетному числу четверти длины волны в слое и при $\rho_2 c_2 = \sqrt{\rho_1 c_1 \rho_3 c_3}$. Таким образом, подбирая параметры слоя ρ_2, c_2, h, можно решить важную практическую проблему полного прохождения звуковой энергии из одной среды в другую, параметры которых (плотность и скорость звука) разные. Отметим, что если акустические сопротивления сред $\rho_1 c_1$ и $\rho_3 c_3$ существенно различаются, то малые изменения толщины слоя служат причиной резкого снижения звукопроницаемости слоя.

Теперь рассмотрим два особых случая. Пусть за слоем будет вакуум, т.е. $Z = 0$, тогда согласно (5.120) $Z_{\text{вх}} = -i\rho_2 c_2 \text{tg}(k_2 h)$. Как видим,

входной импеданс слоя чисто мнимый и отрицательный. Если волновая толщина $k_2h = 2\pi h/\lambda_2 << 1$, то $\mathrm{tg}(k_2h) \approx k_2h$, тогда

$$Z_{\text{вх}} \approx -i\rho_2 c_2 k_2 h = -i\omega(\rho_2 h), \tag{5.124}$$

где $(\rho_2 h)$ — поверхностная плотность слоя. Вспомним механическую колебательную систему с одной степенью свободы: такой характер ее механического импеданса указывает на то, что система управляется массой. По аналогии с механической колебательной системой говорят, что слой ведет себя как сосредоточенная масса. Пусть за слоем существует абсолютно жесткая преграда, т.е. $Z = \infty$. Тогда $Z_{\text{вх}} = i\rho_2 c_2 \,\mathrm{ctg}(k_2h)$ — импеданс чисто мнимый и положительный. Если $k_2h << 1$, то

$$Z_{\text{вх}} \approx i\frac{\rho_2 c_2}{k_2 h} = i\frac{\rho_2 c_2^2}{\omega h} = \frac{i}{\omega}\frac{\chi}{h}, \tag{5.125}$$

где $\chi = \rho_2 c_2^2$ — модуль упругости среды слоя; χ/h —приведенная жесткость слоя. Итак, по аналогии с механической колебательной системой с одной степенью свободы говорят, что слой ведет себя как сосредоточенная упругость.

5.9. Прохождение звуковой волны через жидкий плоский слой

Рассмотрим случай наклонного падения плоской звуковой волны на жидкий плоский слой, который разделяет акустическую среду на две области. Отметим, что решение такой задачи можно использовать для расчета коэффициента прохождения звука через слои, среды, которых хотя и являются твердыми телами, но по акустическим характеристикам ведут себя как жидкость, т.е. в них практически отсутствуют волны сдвига. К таким материалам принадлежат, например, резина и некоторые мягкие пластмассы [60, с. 206-212].

5.9.1. Постановка и решения задачи

Пусть на слой идеальной жидкости с параметрами ρ_2 и c_2 под углом θ падает плоская гармоническая волна с частотой ω. Оба полупространства, которые разделяет слой, заполнены средой с параметрами ρ_1 и c_1. Как и в предыдущей задаче, в слое образовывается система отраженных волн, направление которых обусловливается углом θ_2 (рис. 5.19, *а*). Угол θ_2 определяется в соответствии с соотношению (5.43), а именно

$$k_1 \sin\theta = k_2 \sin\theta_2, \;\; k_1 = \omega/c_1, \;\; k_2 = \omega/c_2\,. \tag{5.126}$$

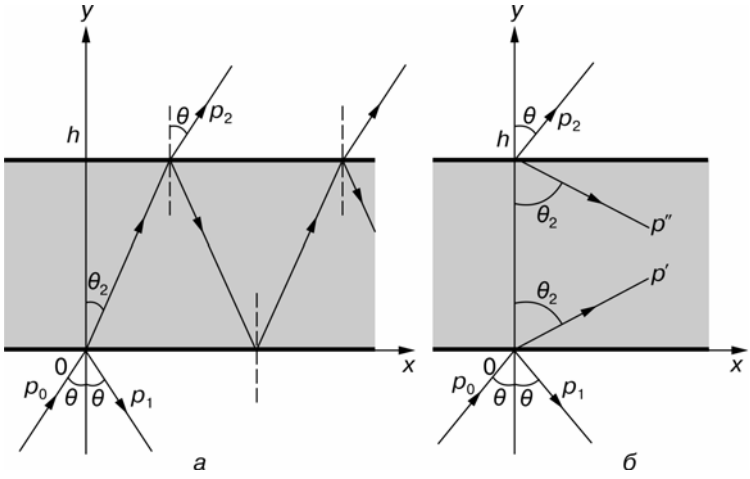


Рис. 5.19. Пример падающей волны на плоский жидкий слой

Обозначим сумму всех бегущих волн, которые распространяются в слое в направлении, образующем острый угол с осью Oy, через p', а сумму волн, направление распространения которых образует тупой угол с осью Oy, — p'' (рис. 5.19, *б)*.

Запишем звуковое давление падающей p_0, отраженной p_1 и прошедшей p_2 волн в виде

$$p_0 = \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x \sin\theta - k_1 y \cos\theta\right)\right),$$

$$p_1 = V \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x \sin\theta + k_1 y \cos\theta\right)\right),$$

$$p_2 = W \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x \sin\theta - k_1 y \cos\theta\right)\right), \qquad (5.127)$$

где V — коэффициент отражения; W — коэффициент прохождения. Поле $p_ш$ в слое запишем в виде суммы волн p' и p'' (см. рис. 5.19, *б)*:

$$p_{сл} = C \exp\left(-i\left(\omega t - k_2 x \sin\theta_2 - k_2 y \cos\theta_2\right)\right) +$$

$$+ D \exp\left(-i\left(\omega t - k_2 x \sin\theta_2 + k_2 y \cos\theta_2\right)\right). \qquad (5.128)$$

Согласно формуле (5.126) имеем $k_2 \sin\theta_2 = k_1 \sin\theta$, тогда формула (5.128) примет вид

$$p_{сл} = \left[C \exp\left(ik_2 y \cos\theta_2\right) + D \exp\left(-ik_2 y \cos\theta_2\right)\right] \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x \sin\theta\right)\right). \qquad (5.129)$$

На границах слоя должны выполняться равенства звуковых давлений и колебательных скоростей

$$p_0 + p_1 = p_{сл},\ \frac{1}{i\omega\rho_1}\frac{\partial(p_0+p_1)}{\partial y} = \frac{1}{i\omega\rho_2}\frac{\partial p_ш}{\partial y},\ \ y = 0,$$

$$p_2 = p_{сл},\ \frac{1}{i\omega\rho_1}\frac{\partial p_2}{\partial y} = \frac{1}{i\omega\rho_2}\frac{\partial p_ш}{\partial y},\ \ y = h.$$

Подставив (5.127) и (5.129) в граничные условия, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных W, V, C, D:

$$\begin{aligned}
&1 + V = C + D,\\
&q(1-V) = C - D,\\
&W\exp(i\beta) = C\exp(i\eta) + D\exp(-i\eta),\\
&qW\exp(i\beta) = C\exp(i\eta) + D\exp(-i\eta),
\end{aligned} \tag{5.130}$$

в которой введены обозначения

$$\beta = k_1 h\cos\theta,\ \ \eta = k_2 h\cos\theta_2,\ \ q = \frac{\rho_2 c_2\cos\theta}{\rho_1 c_1\cos\theta_2}, \tag{5.131}$$

причем в соответствии с (5.126)

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{1-\left((k_1/k_2)\sin\theta\right)^2}. \tag{5.132}$$

Из системы уравнений (5.130) находим коэффициенты отражения V и прохождения W по давлению:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{i(1/q-q)\sin\eta}{2\cos\eta - i(1/q+q)\sin\eta},\\
W &= \frac{2\exp(-i\beta)}{2\cos\eta - i(1/q+q)\sin\eta}.
\end{aligned} \tag{5.133}$$

Очевидно, что полное прохождение волны через слой будет при $q = 1$. Для нормального падения (см. (5.131)) это происходит при равенстве волновых сопротивлений $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$. Полное прохождение звука будет наблюдаться также при выполнении условия $\sin\eta = 0$, что отвечает равенству $k_2 h\cos\theta_2 = n\pi$ или

$$\frac{2h\cos\theta_2}{\lambda_2} = n,\quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{5.134}$$

где λ_2 — длина звуковой волны в слое. При нормальном падении звука последнее условие соответствует слою, толщина которого кратна половине длине волны в слое.

5.9.2. Нормальное падение плоской волны на слой с поглощением

Рассмотрим нормальное падение волны, т.е. $\theta = 0$. В этом случае величины в формулах (5.131) равняются:

$$\beta = k_1 h, \quad \eta = k_2 h, \quad q = \rho_2 c_2 / (\rho_1 c_1). \tag{5.135}$$

Тогда решение (5.133) будет иметь вид

$$V = \frac{i(1-q^2)\mathrm{tg}(k_2 h)}{2q - i(1+q^2)\mathrm{tg}(k_2 h)}, \tag{5.136}$$

$$W = \frac{2q\exp(-ik_1 h)}{2q\cos(k_2 h) - i(1+q^2)\sin(k_2 h)}. \tag{5.137}$$

Понятно, что формула для коэффициента отражения (5.136) совпадает с полученной в предыдущем параграфе формулой (5.123), после подстановки в нее выражения (5.120) (убедитесь в этом).

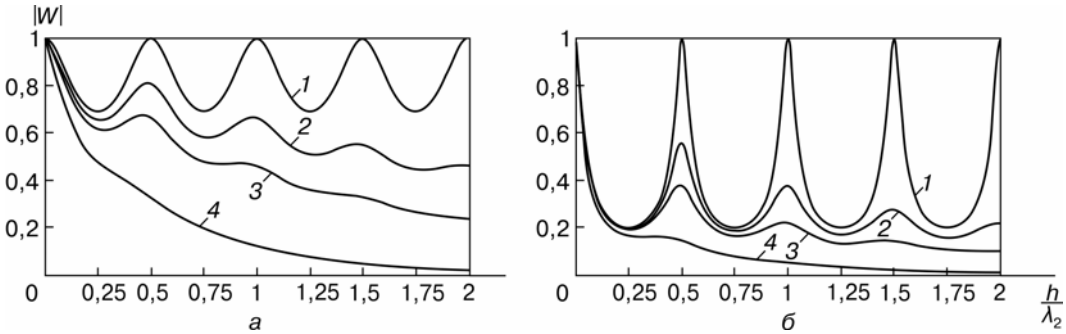


Рис. 5.20. Зависимость модуля коэффициента прохождения $|W|$ звука через слой с поглощением от волновой толщины слоя h/λ_2 при нормальном падении волны, δ: *1* — *0*; *2* — 0,05; *3* — 0,1; *4* — 0,3; *а* — q = 2,5; *б* — q = 10

Формулы (5.136) и (5.137) можно использовать и для расчета коэффициентов прохождения и отражения звука через слой с поглощением. Согласно параграфу 5.3 наличие поглощения в слое можно учесть, если ввести в выражения (5.136) и (5.137) вместо действительной величины k_2 комплексное волновое число $k_2 = k(1 + i\delta)$, где $k_2 = \omega / c_2$, δ — пространственный коэффициент затухания.

На рис. 5.20 приведены зависимости модуля коэффициента прохождения $|W|$ через слой от его волновой толщины h/λ_2 при разном поглощении звука в слое. Как видим, с ростом поглощения, т.е. увеличением величины δ, коэффициент прохождения звука уменьшается. При небольших значениях δ влияние поглощения в основном проявля-

ется близи области максимального прохождения звука; при $\delta = 0$ (слой без поглощения) имеем $|W| = 1$. Это явление можно назвать пространственным резонансом слоя. Вообще в зоне резонансов влияние поглощения наиболее весомое, что отмечалось при изучении системы с одной степенью свободы при наличии демпфирования. Но при $\delta > 0{,}1$ поглощение существенно влияет на коэффициент прохождения звука даже при относительно малых волновых размерах слоя. Можно сказать, что при $\delta > 0{,}1$ резонансные явления в слое практически отсутствуют.

Из сравнения кривых на рис. 5.20, *а*, *б* видно, что чем больше различие в волновых сопротивлениях $\rho_2 c_2$ и $\rho_1 c_1$, тем более выразительный характер имеют резонансные эффекты звукопроницаемости слоя. Другими словами при значительном отличии $\rho_2 c_2$ от $\rho_1 c_1$ незначительное отклонение от резонансной толщины $k_2 h = n\pi$, $n = 1,2,\ldots$, приводит к существенному уменьшению коэффициента прохождения звука. Подобную зависимость мы уже наблюдали при анализе рис. 5.18.

5.9.3. Прохождение звука через слой при закритических углах падения волны

Возвратимся к общим формулам (5.133) при наклонном падении волны на слой без поглощения. Рассмотрим ситуацию, когда $c_2 > c_1$, здесь справедливо неравенство $\theta_2 > \theta$ и критический угол падения $\theta_{\text{кр}} = \arcsin(c_1/c_2)$. На границе раздела двух полубесконечных сред при $\theta > \theta_{\text{кр}}$ происходит полное внутреннее отражение падающей волны (см. параграф 5.5). Оказывается, что при закритических углах падения волны на слой конечной толщины полное отражение не наблюдается.

В этом не сложно убедиться. При наклонном падении волны на границу раздела двух сред при углах падения $\theta < \theta_{\text{кр}}$ бегущая волна во второй среде имеет вид $\exp(-i(\omega t - k_2 x \sin\theta_2 - k_2 y \cos\theta_2))$, или с учетом соотношения (5.126)

$$\exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x \sin\theta - k_2 y \cos\theta_2\right)\right), \tag{5.138}$$

где $k_2 \cos\theta_2 = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta}$. При углах падения $\theta > \theta_{\text{кр}}$ ($k_2 < k_1 \sin\theta$) прошедшая волна запишется так:

$$\exp\left(-\sqrt{(k_1 \sin\theta)^2 - k_2^2} \cdot y\right) \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x \sin\theta\right)\right). \tag{5.139}$$

Это неоднородная волна, которая представляет собой бегущую волну вдоль оси Ox с фазовой скоростью

$$\upsilon_{\text{ф}x} = \frac{\omega}{k_1 \sin\theta} = \frac{c_1}{\sin\theta}, \tag{5.140}$$

при этом вдоль оси Oy амплитуда волнового процесса затухает по экспоненциальному закону. Сравнивая (5.138) и (5.139), можно отметить, что формально выражение для неоднородной волны можно получить, считая $\cos\theta_2$ мнимой величиной. Действительно, при $\theta > \theta_{\text{кр}}$, ($k_2 < k_1 \sin\theta$) соотношение $k_2 \cos\theta_2 = \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin\theta)^2}$ следует записать в виде

$$k_2 \cos\theta_2 = +i\sqrt{(k_1 \sin\theta)^2 - k_2^2}. \tag{5.141}$$

Перед корнем квадратным поставлен именно знак плюс, поскольку при этом обеспечивается уменьшение амплитуды волны при удалении от границы $x = 0$ вдоль положительного направления оси Oy (рис. 5.19).

Согласно полученным результатам звуковое поле в слое при $\theta > \theta_{\text{кр}}$ в отличие от (5.129) будет иметь вид

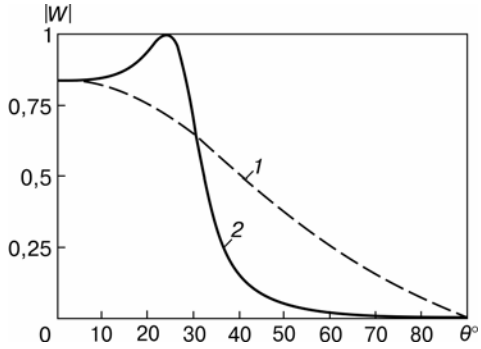
$$p_{\text{сл}} = \left[C \exp\left(-\sqrt{(k_1 \sin\theta)^2 - k_2^2} \cdot y \right) + D \exp\left(\sqrt{(k_1 \sin\theta)^2 - k_2^2} \cdot y \right) \right] \times$$
$$\times \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x \sin\theta \right) \right). \tag{5.142}$$

Итак, поле в слое можно представить в виде двух неоднородных волн бегущих вдоль оси Ox (рис. 5.19). При этом амплитуда первой волны вдоль оси Oy затухает от границы $y = 0$ к $y = h$, а для второй — наоборот, амплитуда затухает от границы $y = h$ к $y = 0$. Понятно, что при $y = h$ формула (5.142) будет определять распределение давления с пространственным периодом $\frac{2\pi}{k_1 \sin\theta} = \frac{\lambda_1}{\sin\theta}$, который распространяется вдоль границы $y = h$ с фазовой скоростью (5.140):

$$p_{\text{сл}} = \left[C \exp\left(-\sqrt{(k_1 \sin\theta)^2 - k_2^2} \cdot h \right) + D \exp\left(\sqrt{(k_1 \sin\theta)^2 - k_2^2} \cdot h \right) \right] \times$$
$$\times \exp\left(-i\left(\omega t - k_1 x \sin\theta \right) \right). \tag{5.143}$$

Такое же пространственно-временное распределение давления, но с другой амплитудой, имеет след падающей волны p_0 (см. (5.127)) на границе $y = 0$. Отсюда понятно, что в полупространстве $y > h$ под углом θ к оси Oy будет распространяться однородная плоская волна p_2 (см. (5.127)), которая определяет поток энергии в среде $y > h$ при углах падения θ падающей волны p_0, больших, чем критический: $\theta > \theta_{\text{кр.}}$

Таким образом, с помощью формулы (5.132) для $\cos\theta_2$ при $\theta < \theta_{кр}$ и формулы (5.141) — при $\theta > \theta_{кр}$ можно рассчитать коэффициенты отражения и прохождения, используя равенства (5.133).



5.21. Зависимость $|W|$ от угла падения θ: $(\rho_2 c_2/(\rho_1 c_1) = 1{,}9$, $c_2/c_1 = 1{,}7$, $\theta_{кр} \approx 36°$; h/λ_2: *1* - *0*,3; *2* — 0,7

На рис. 5.21 приведена зависимость модуля коэффициента прохождения через слой от угла падения θ падающей волны. Здесь принято $\rho_2 c_2/(\rho_1 c_1) = 1{,}9$, $c_2/c_1 = 1{,}7$, тогда $\theta_{кр} \approx 36°$. Из рисунка видно, что вблизи критического угла коэффициент прохождения звука начинает уменьшаться, причем, чем больше волновая толщина слоя, тем быстрее уменьшается коэффициент прохождения звука. Однако за слоем всегда имеем поток звуковой энергии. При угле падения $\theta \approx 24°$ (кривая *2*) наблюдается полное прохождение звука через слой. В этой ситуации в соответствии с условием (5.134) выполняется соотношение $h\cos\theta_2 = \lambda_2/2$.

5.10. Спектральное разложение звукового поля

Здесь рассмотрим так называемое *спектральное разложение* звукового поля. Идея представления произвольного колебательного процесса в виде суперпозиции простых периодических движений уже использовалась в нашей работе. Будем продолжать изучать этот подход к исследованию колебательных и волновых процессов, который очень широко применяется в акустике.

В общем случае спектральное разложение — это представление данной функции в виде линейной суперпозиции (ряда или интеграла) набора функций с более простыми свойствами. Если эти вспомогательные функции изучены, то исследование других функций сводится к определению коэффициентов в спектральном разложении. В акустике (и других волновых науках) в качестве такого набора функций используют гармонические функции, которые в теории линейных колебаний и волн играют фундаментальную роль. Иногда говорят, что

это обусловлено тем, что синусы и косинусы — это самые “простейшие” из периодических функций. Но “простота” является произвольным критерием. Дело в том, что в акустике (и вообще физике и технике) много колебательных систем описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, частным решением которых являются гармонические колебания. Кроме того, однородные линейные среды с постоянными параметрами допускают в общем случае лишь один тип стационарных волн, т.е. волн бегущих без искажения формы — это и есть гармонические волны. Но если перейти, например, к так называемым параметрическим системам, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, то гармонические функции теряют свое особое значение и их место занимают несинусоидальные периодические функции.

Остановимся на основных моментах процедуры спектрального разложения звукового поля [20, глава 3]. Пусть имеем волну $\varphi(x,t)$ с произвольной временной зависимостью (для простоты будем писать одну пространственную координату x). При выполнении известных математических условий [8] (конечно, они выполняются в ситуациях интересных для физики) периодическую во времени функцию $\varphi(x,t)$ раскладывают в ряд Фурье, а не периодическую — в интеграл Фурье. Пусть волна $\varphi(x,t)$ — периодическая во времени с периодом $T = 2\pi/\omega$, тогда она раскладывается в ряд, в котором составляющими есть гармонические волны. Будем использовать комплексную запись волн:

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\exp(-in\omega t), \tag{5.144}$$

где

$$\varphi_n(x) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^T \varphi(x,t)\exp(in\omega t)\,dt. \tag{5.145}$$

Каждая составляющая удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta\varphi_n + k_n^2\varphi_n = 0$, где $k_n = n\omega/c$ (если φ_n зависит только от x, то оператор $\Delta \equiv d^2/dx^2$).

Итак, спектральный подход освобождает нас от необходимости исследовать каждую волну со своей временной зависимостью отдельно: волна с произвольной временной зависимостью заменяется суперпозицией волн со стандартной временной зависимостью — гармонической.

Но поле гармонической волны зависит вообще от трех пространственных координат и при одинаковой частоте зависимость от координат может существенно различаться. Возникает вопрос о возмож-

ности дальнейшего упрощения изучения волн: записать произвольную от координат и гармоническую во времени функцию также в виде суперпозиции некоторого набора гармоничных волн (конечно, той же частоты), которые стандартным образом зависят от координат. Этот вопрос является вопросом о *пространственном спектре* гармоничной волны.

Ответ на него зависит от акустической ситуации. Если известно поле данной гармонической волны на плоскости, то в качестве стандартного набора можно взять плоские гармонические волны; если известно поле на сфере, то удобно проводить разложение в спектр по набору сферических волн (см. раздел 7) и т.п. Сейчас рассмотрим разложение поля по плоским волнам.

Пусть на некоторой плоскости задано распределение давления или нормальных скоростей частиц. “Тогда, как известно из теории дифференциальных уравнений, в отсутствие волн, приходящих из бесконечности, поле в полупространстве, прилегающем к плоскости и не содержащем источников звука, определяется по заданному полю на границе единственным образом” [20, с. 87].

Приведем схему нахождения поля в полупространстве в виде суперпозиции плоских волн. Пусть на плоскости $z = 0$ задано гармоническое поле (давления или нормальной колебательной скорости) как некоторая функция двух координат x и y. Разложим это распределение давления или нормальной скорости в двойной ряд (или интеграл) Фурье. Компоненты разложения будут иметь вид (амплитуды не пишем) $\exp(-i\omega t + i\varsigma x + i\eta y)$, т.е. представляют собой двумерные плоские бегущие волны одинаковой частоты, которые распространяются по плоскости $z = 0$ с разными фазовыми скоростями. К каждой такой двумерной волне нужно *достроить* трехмерную бегущую волну от плоскости. Это можно сделать, ведь каждая такая волна создает на плоскости двумерную волну как свой след. Итак, суперпозиция всех полученных бегущих волн в полупространстве, которые имеют на плоскости заданное распределение давления (или нормальной скорости), является искомым разложением поля в полупространстве.

Реализуем эту схему. Пусть на плоскости $z = 0$ имеем периодическое распределение давления, которое изменяется во времени по гармоническому закону с частотой ω. Рассмотрим ситуацию, когда давление на плоскости $z = 0$ зависит только от одной координаты x с пространственным периодом L:

$$p(x,t) = p(x)\exp(-i\omega t) = p(x + L)\exp(-i\omega t). \qquad (5.146)$$

Запишем разложение в ряд Фурье функции $p(x)$. Формула (5.144) являет собою разложение некоторой периодической во времени функции в ряд по гармоническим составляющим с частотами $n\omega$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $\omega = 2\pi/T$, T — период функции. Аналогично запишем

функцию $p(x)$ в виде ряда Фурье по гармониками с волновыми числами $n\varsigma$, $\varsigma = 2\pi/L$:

$$p(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \exp(in\varsigma x), \tag{5.147}$$

где

$$p_n = \frac{\varsigma}{2\pi}\int_0^L p(x)\exp(-in\varsigma x)\,dx. \tag{5.148}$$

Теперь к каждому слагаемому ряда (5.147) $p_n \exp(in\varsigma x)$ нужно достроить в пространстве бегущую волну, которая оставляет на плоскости след $p_n \exp(in\varsigma x)$. Волновой вектор $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| = k = \omega/c$) пространственной волны имеет проекцию $n\varsigma$ на плоскость $z = 0$, тогда его проекция на ось Oz должна быть $\sqrt{k^2 - (n\varsigma)^2}$. Тогда пространственную волну, которая имеет на плоскости $z = 0$ след $p_n \exp(in\varsigma x)$, можно представить так:

$$p_n \exp(in\varsigma x + i\sqrt{k^2 - (n\varsigma)^2}\cdot z). \tag{5.149}$$

Таким образом, поле в пространстве, которое создает на плоскости $z = 0$ гармоническое во времени распределение давления $p(x)\exp(-i\omega t)$, имеет вид

$$p(x,z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \exp\left(-i\left(\omega t - n\varsigma x - \sqrt{k^2 - (n\varsigma)^2}\cdot z\right)\right). \tag{5.150}$$

Поле $p(x, z, t)$ записано в виде набора плоских волн. Но, как видим, не все волны являются бегущими однородными, а только те, для которых $n\varsigma \le k$. Направляющий косинус волны относительно оси Ox равен

$$\cos\theta_{nx} = \frac{n\varsigma}{k},\ \ \sin\theta_{nx} = \sqrt{1 - \left(\frac{n\varsigma}{k}\right)^2}. \tag{5.151}$$

Итак, чем больше номер n, тем меньше угол θ_{nx}. Если $n = 0$, то $\theta_{0x} = 90°$. Составляющая $n = 0$ соответствует постоянной составляющей в разложении давления $p(x)$ на плоскости, которая в свою очередь соответствует плоской волне с фронтом, параллельным плоскости $z = 0$. Волны, в которых $n\varsigma > k$, — неоднородные бегущие волны, которые распространяются вдоль оси Ox и затухают экспоненциально вдоль оси Oz. Понятно, что чем выше номер n неоднородной волны, тем быстрее затухает волна. Неоднородные волны образовывают “ближнее поле”, которое локализовано вблизи плоскости $z = 0$. Поле вдали от плоскости, или “дальнее поле”, будут определять однородные волны, для которых проекция волнового вектора $\mathbf{k}$ на плоскость $z = 0$

$n\varsigma \le k$ и, соответственно, длины волн следа $\lambda_{сл} = 2\pi/n\varsigma$ на плоскости $z = 0$ больше длины волны в среде $\lambda = 2\pi/k$. Если вся структура давления на плоскости $z = 0$ мала по сравнению с длиной звуковой волны $\lambda = 2\pi/k$, т.е. $n\varsigma > k$, $\lambda_{сл} < \lambda$, то от плоскости будет распространяться только нулевая волна $p_0\exp(-i\omega t + kz)$.

Таким образом, рассмотрена общая схема построения звукового поля по известному периодическому распределению давления на некоторой плоскости. Аналогично строится пространственный спектр для распределения нормальных скоростей на плоскости. (Предлагаем читателю самостоятельно записать поле в пространстве, если оно оставляет на плоскости $z = 0$ пространственный периодический след, который зависит от обеих координат x и y (см. задачу 5.22).)

5.11. Волноводы

5.11.1. Волноводное распространение звука

Волноводное распространение акустических колебаний происходит в условиях, когда акустические волны возбуждаются в среде, ограниченной незамкнутой поверхностью, по обе стороны от которой среда имеет разные акустические свойства. В отличие от свободной среды, для которой характерно ослабление звукового поля вследствие распространения волн во все стороны, при волноводном распространении этого ослабления не возникает.

Волноводное распространение звука происходит как в естественных условиях, так и в разнообразных технических устройствах. К естественным волноводам принадлежат разные среды, которые ограничены поверхностями, которые хорошо отражают звуковые волны. Это моря и океаны, для которых верхней границей является воздух, а нижней — донные грунты. Кроме того, в природе встречаются также волноводы, в которых границы определены не резко. Эти волноводы образовываются в толще атмосферы, а также в океане за счет особого распределения значений скорости звука с высотой. Так, в океане на некоторой глубине (обычно это несколько сотен метров) могут возникать условия, когда скорость звука будет минимальная. Она возрастает вверх, где размещены слои воды, которые прогреваются солнечной энергией, и вниз вследствие повышения гидростатического давления (скорость звука в воде увеличивается с повышением давления и температуры). Слой вокруг уровня, где скорость минимальна, является волноводом. Действительно, лучи, вдоль которых распространяются звуковые волны, искривляются вследствие изменения скорости звука при распространении. Это явление носит название *рефракции*. Поэтому, лучи, расположенные под относительно малыми углами к уровню, где скорость звука минимальна, рефрагируя в более высоких и более глубоких слоях водной толщи

океана, возвращаются к этому уровню. На рис. 5.22 приведена типичная зависимость скорости звука от глубины и соответствующая картина лучей, вдоль которых распространяются звуковые волны.

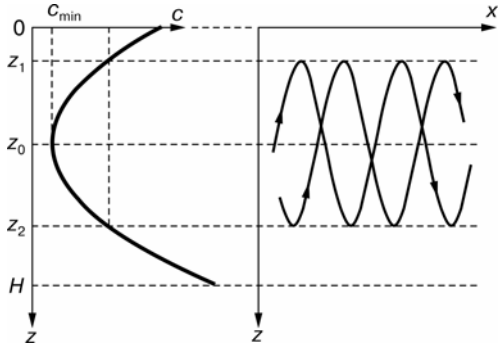


Рис. 5.22. Зависимость скорости звука от глубины и соответствующая картина лучей, вдоль которых распространяются звуковые волны

Осмыслите самостоятельно явление рефракции звука в океане (рис. 5.22). Для этого поделите среду на узкие параллельные поверхности океана слои, считая скорость звука внутри каждого слоя постоянной, но от слоя до слоя значения скорости будет изменяться на некоторую малую величину. Выпустив из плоскости с минимальной скоростью звука луч под некоторым углом, проследите, как изменяется путь луча от слоя к слою. При относительно небольших углах выхода луча создается ситуация, когда в некотором слое угол падения луча становится критическим и возникает явление полного отражения в толще водной среды, т.е. образуется *подводный звуковой канал.* Лучи, которые удерживаются подводным волноводом, не доходят ни до дна, где бы они частично перешли в грунт, ни до поверхности океана, где бы они испытали рассеяние; поглощение звуковой энергии в воде достаточно мало, и поэтому звук в волноводе распространяется на большие расстояния с малым ослаблением. Аналогичные волноводы возникают и в атмосфере вблизи уровня минимальной температуры воздуха, где располагается минимум скорости звука.

В инженерной практике волноводные системы имеют очень широкое применение, например, простейшие из них это – трубы и щели с жесткими границами.

Характер волнового распространения довольно сложный: он определяется геометрической конфигурацией волновода, свойствами граничных поверхностей и средством возбуждения акустических колебаний. При этом волноводное распространение звука имеет несколько особенностей, для детального ознакомления с которыми рассмот-

рим простую волноводную систему в виде слоя, ограниченного двумя жесткими плоскими поверхностями.

5.11.2. Нормальные волны плоского волновода

Пусть волновод образован двумя параллельными жесткими поверхностями (рис. 5.23), которые расположены на расстояния h одна от другой. Волновод заполнен идеальной жидкостью с параметрами: плотность ρ, скорость звука c.

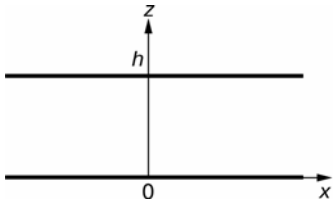


Рис. 5.23. Пример плоского волновода

Вспомним, как мы проводили исследование колебания струны конечной длины. Сначала искали периодические (по гармоническому закону) движения струны. Оказывается, что произвольное движение струны можно представить в виде суперпозиции нормальных колебаний. Этот важный результат дает возможность провести эффективный анализ колебаний струны при произвольных начальных условиях.

Попробуем реализовать подобный подход при исследовании звукового поля в волноводе. Здесь следует искать возможность распространения в волноводе гармонической бегущей волны с частотой ω, которая движется вдоль волновода без изменения формы. Такие волны называют *нормальными волнами* или *модами* волновода. Итак, запишем давление в искомой волне:

$$p(x, z, t) = p(x, z)\exp(-i\omega t). \qquad (5.152)$$

Считаем, что параметры звукового поля не зависят от координаты y, т.е. имеем так называемую плоскую задачу. Комплексная амплитуда давления $p(x, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \qquad (5.153)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям на жестких поверхностях волновода, которые заключаются в том, что составляющая колебательной скорости вдоль оси Oz равняется нулю, т.е. $\upsilon_z = 0$ при $z = 0$ и $z = h$, или

$$\frac{\partial p(x,0)}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial p(x,h)}{\partial z}=0. \tag{5.154}$$

Запишем искомую функцию $p(x, z)$ в виде произведения двух функций, каждая из которых является функцией одной переменной:

$$p(x, z) = X(x)Z(z). \tag{5.155}$$

Тогда граничные условия (5.154) можно записать так:

$$\frac{dZ(0)}{dz}=0, \quad \frac{dZ(h)}{dz}=0. \tag{5.156}$$

Для определения уравнений для $X(x)$ и $Z(z)$ подставим (5.155) в уравнение Гельмгольца (5.153): $X''Z + XZ'' + k^2XZ = 0$, или, сократив на XZ, имеем $\frac{Z''}{Z}+k^2=-\frac{X''}{X}$. Поскольку левая часть этого уравнения не зависит от x, а правая — от z, то равенство справедливо только при условии, когда обе части отдельно равны некоторой постоянной величине, которую обозначим γ^2. Укажем, что размерность γ должна совпадать с размерностью волнового числа k. Таким образом, получим два уравнения: $-\frac{X''}{X}=\gamma^2$, $\frac{Z''}{Z}+k^2=\gamma^2$, или

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\gamma^2X=0, \tag{5.157}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(k^2-\gamma^2)Z=0. \tag{5.158}$$

Решение уравнения (5.157) запишем в виде

$$X(x) = C_1 \exp(i\gamma x) + C_2 \exp(-i\gamma x). \tag{5.159}$$

Это решение определяет бегущие волны вдоль оси Ox в противоположных направлениях. В дальнейшем рассмотрим бегущую волну, которая движется в положительном направлении оси Ox, т.е.

$$X(x) = \exp(i\gamma x). \tag{5.160}$$

Здесь принято $C_1 = 1$, поскольку необходимый постоянный множитель можно учесть при решении уравнения (5.158). Общее решение уравнения (5.158) запишем таким образом:

$$Z(z)=A\sin\left(\sqrt{k^2-\gamma^2}\cdot z\right)+B\cos\left(\sqrt{k^2-\gamma^2}\cdot z\right). \tag{5.161}$$

Такая запись решения для функции $Z(z)$ несколько упрощает дальнейшие выкладки (понятно, что поиск решения в виде суперпозиции экспоненциальных функций также возможен).

Для определения неизвестных постоянных в решении (5.161) используем граничные условия. Так, первое условие (5.156) устанавливает, что коэффициент $A = 0$. Из второго условия (5.156) получим равенство

$$\sin\left(\sqrt{k^2-\gamma^2}\cdot h\right)=0. \tag{5.162}$$

Отсюда

$$\sqrt{k^2-\gamma^2}\cdot h = n\pi, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{5.163}$$

По сути, уравнение (5.163) является дисперсионным уравнением. Оно устанавливает связь между волновым числом γ моды волновода и заданной частотой $\omega = kc$. Из уравнения (5.163) находим возможные значения волновых чисел γ, которые соответствуют граничным условиям (5.156):

$$\gamma_n = \sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} = k\sqrt{1-\left(\frac{n\pi}{kh}\right)^2}, \quad n = 0,1,2\ldots, \tag{5.164}$$

а выражение (5.161) приобретет вид

$$Z(z) = B_n\cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right). \tag{5.165}$$

Таким образом, частное решение уравнения Гельмгольца, которое описывает нормальную волну волновода с жесткими границами, можно представить так:

$$p_n(x,z,t) = X(x)Z(z)\exp(-i\omega t) = B_n\cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp\left(-i\left(\omega t-\gamma_n x\right)\right). \tag{5.166}$$

Целое число $n = 0, 1, 2,\ldots$называют *номером нормальной волны.*

Изучим свойства нормальных волн. Выражение (5.166) описывает волну, которая распространяется в направлении оси Ox с волновым числом γ_n (и соответствующей фазовой скоростью $c_n = \omega/\gamma_n$), при этом амплитуда давления изменяется вдоль фронта волны по закону косинуса. Множитель B_n, который также характеризует амплитуду волны, определяется не граничными условиями на границах волновода, а свойствами источника звука. Если ввести обозначение

$$\omega_{\text{кр}n} = \frac{n\pi c}{h}, \tag{5.167}$$

то волновое число моды

$$\gamma_n = k\sqrt{1-\frac{\omega_{\text{кр}n}^2}{\omega^2}}, \quad k=\frac{\omega}{c}, \tag{5.168}$$

где $\omega_{\text{кр}n}$— называют *критической частотой n-й нормальной волны.* Тогда фазовую скорость нормальной волны запишем так:

$$c_{\text{ф}n} = \frac{\omega}{\gamma_n} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_{\text{кр}n}^2}{\omega^2}}}. \tag{5.169}$$

Как видим поведение данной нормальной волны существенно зависит от частоты ω. Если $\omega > \omega_{\text{кр}n}$, то γ_n и $c_{\text{ф}n}$ есть действительные величины и имеем бегущую волну вдоль оси Ox; при $\omega < \omega_{\text{кр}n}$ величины γ_n и $c_{\text{ф}n}$ — мнимые и нормальная волна представляет собой неоднородную волну, амплитуда которой вдоль ос Ox уменьшается по экспоненциальному закону. Действительно, при $\omega < \omega_{\text{кр}n}$ формула (5.166) принимает вид

$$p_n(x,z,t) = B_n \cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp\left(-i\omega t - |\gamma_n| x\right). \tag{5.170}$$

На самой критической частоте $\omega = \omega_{\text{кр}n}$ имеем $\gamma_n = 0$; в этом случае происходят синфазные колебания частиц среды по всей длине волновода.

Количество бегущих нормальных волн определяется соотношением $n \le N$, где N находим из условия $\omega_{\text{кр}} = \omega$, т.е. $N\pi c/h = \omega$; откуда

$$N = \left[\frac{\omega h}{\pi c}\right] = \left[\frac{kh}{\pi}\right] = \left[\frac{2h}{\lambda}\right], \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{5.171}$$

(скобки означают целую часть числа).

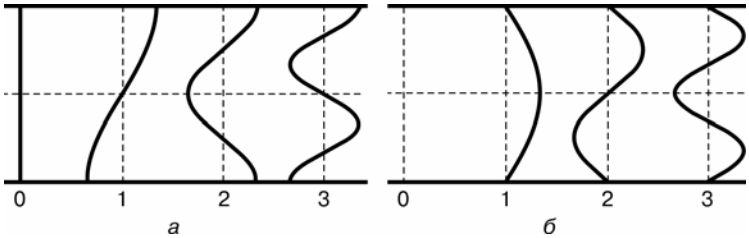


Рис. 5.24. Графики распределения амплитуд p_n и υ_{xn} (*а*) и υ_{zn} (*б*) вдоль координаты z для первых номеров мод волновода

Найдем составляющие колебательной скорости в нормальной волне:

$$p_n = B_n \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) \exp\left(-i\omega t + i\gamma_n x\right), \tag{5.172}$$

$$\upsilon_{xn} = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_n}{\partial x} = \frac{1}{\omega\rho}\gamma_n B_n \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) \exp\left(-i\omega t + i\gamma_n x\right), \tag{5.173}$$

$$\upsilon_{zn} = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_n}{\partial z} = i\frac{1}{\omega\rho}\left(\frac{n\pi}{h}\right) B_n \sin\left(\frac{n\pi}{h} z\right) \exp\left(-i\omega t + i\gamma_n x\right). \tag{5.174}$$

На рис. 5.24, *а* показано распределение амплитуд давления и υ_{xn} — компоненты колебательной скорости частиц для первых номеров мод, которое определяется функцией $\cos(n\pi z/h)$, а на рис. 5.24, *б* приведено распределение υ_{zn} — компоненты колебательной скорости в соответствии с функцией $\sin(n\pi z/h)$. Для нулевой моды $\upsilon_{z0} = 0$, поскольку нулевая мода $n = 0$ в волноводе с жесткими границами является обычной плоской волной, которая распространяется вдоль оси *Ox*.

Формулы (5.173) и (5.174) для компонент скорости частиц позволяют понять характер движения частиц среды. Поскольку фазы υ_{xn} и υ_{zn} имеют сдвиг на 90°, то траектории частиц есть эллипсы с осями, которые лежат вдоль осей *Ox* и *Oz*. В узлах давления ($\cos(n\pi z/h) = 0$) эллипсы вырождаются в вертикальные отрезки, а в максимумах давления ($\sin(n\pi z/h) = 0$, рис. 5.24) — в горизонтальные отрезки. В неоднородной моде, где $\gamma_n = i|\gamma_n|$ является мнимой величиной, фазы υ_{xn} и υ_{zn} совпадают, поэтому траекториями частиц будут прямые линии, наклон которых изменяется по высоте волновода — от горизонтального до вертикального. Укажем, что для обычных плоских волн ситуация противоположная: в однородных волнах траектории частиц есть отрезки прямых, а в неоднородных плоских волнах — эллипсы.

Нормальную волну можно представить в виде суперпозиции двух плоских бегущих волн, которые распространяются под одинаковыми углами к оси волновода. Действительно, используя равенство $2\cos(n\pi z/h) = \exp(in\pi z/h) + \exp(-in\pi z/h)$, запишем (5.172) как суперпозицию двух плоских волн $p_n(x,z,t) = p_{\mathrm{I}} + p_{\mathrm{II}}$, т.е. (см. рис. 5.25)

$$p_n = \frac{B_n}{2}\exp\left(-i\left(\omega t - \frac{n\pi z}{h} - \gamma_n x\right)\right) + \frac{B_n}{2}\exp\left(-i\left(\omega t + \frac{n\pi z}{h} - \gamma_n x\right)\right), \tag{5.175}$$

где $n\pi/h$ и γ_n — проекции волнового вектора **k** на координатные оси *Oz* и *Ox*. Угол наклона волнового вектора **k** к оси *Oz* (рис. 5.25) определяется уравнением

$$\cos\theta_{zn} = \frac{n\pi/h}{k} = \frac{n\pi c/h}{\omega} = \frac{\omega_{\text{кр}n}}{\omega}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \tag{5.176}$$

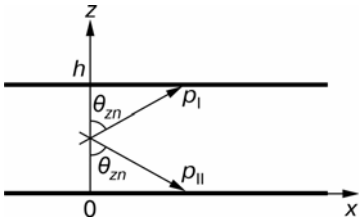


Рис. 5.25. Пример суперпозиции двух плоских волн в волноводе

Если частота n-й моды $\omega >> \omega_{\text{кр}n}$, то угол θ_{zn} приблизительно равен 90°; если частота ω близка к частоте $\omega_{\text{кр}n}$, то угол $\theta_{zn} \approx 0$ и образовывается стоячая волна вдоль оси Oz.

Возвратимся к формулам (5.168) и (5.169). Как видим, волновое число γ_n и фазовая скорость $c_{\text{ф}n}$ n-ой моды зависят от частоты, т.е. наблюдается явление дисперсии. Вообще существование дисперсии в среде обусловлено наличием в ней собственных, независимых от параметров волны пространственных или временных масштабов. В случае цепочки связанных осцилляторов (см. п. 3.6.2) пространственным масштабом является расстояние между шариками. Когда это расстояние значительно меньше длины бегущей волны в цепочке, явление дисперсии практически отсутствует. Собственным пространственным масштабом для волновода (рис. 5.23) есть его ширина h.

Согласно формуле (5.169), если $\omega >> \omega_{\text{кр}n}$, то фазовая скорость n-ой моды $c_{\text{ф}n} \approx c$, т.е. практически равна скорости в среде, заполняющей волновод. В этом случае плоские волны p_{I} и p_{II} (см. рис. 5.25) распространяются вдоль оси Ox. Если $\omega \approx \omega_{\text{кр}n}$, то фазовая скорость n-ой моды $c_{\text{ф}n} \to \infty$; здесь плоские волны p_{I} и p_{II} (см. рис. 5.25) практически распространяются вдоль оси Oz, образуя стоячую волну.

Из приведенных соображений можно сделать вывод, что в зависимости от частоты ω, поток энергии в волноводе существенно изменяется. Понятно, что в случае, когда $\omega >> \omega_{\text{кр}n}$, поток энергии вдоль оси Ox будет максимальный, а когда ω близка к $\omega_{\text{кр}n}$ — минимальный, хотя при этом фазовая скорость $c_{\text{ф}n}$ стремится к бесконечности. Таким образом, фазовая скорость моды не характеризует скорость переноса энергии в волноводе. Оказывается, что скорость переноса энергии в любой волне можно оценить, используя новое фундаментальное понятие теории волн — *групповая скорость*. Поскольку этот вопрос очень важен для процесса обучения будущего исследователя акустика, остановимся на нем несколько подробнее.

5.12. Понятие групповой скорости

Относительная простота нормальных волн в плоском волноводе с идеальными границами позволяет без громоздких выкладок раскрыть сущность нового и очень важного понятия в акустике — групповой скорости. К этому понятию можно прийти разными путями. Один из них связан с анализом перенесения энергии модой в волноводе.

5.12.1. Энергетическое определение групповой скорости

Как мы уже знаем, в волноводе с жесткими границами без изменения формы может распространяться нормальная волна (5.172). Поскольку будем вычислять энергетические (квадратичные) характеристики волны, то нужно использовать не комплексные выражения для давления и компонент колебательной скорости, а их действительные части. Принимая во внимание, что коэффициент $B_n = a_n + ib_n$ является комплексным, записываем действительные части от соотношений (5.172)-(5.174) в таком виде:

$$p_n = |B_n| \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \cos(\omega t - \gamma_n x - \alpha_n), \tag{5.177}$$

$$\upsilon_{xn} = \frac{\gamma_n}{\omega\rho} |B_n| \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \cos(\omega t - \gamma_n x - \alpha_n), \tag{5.178}$$

$$\upsilon_{zn} = \frac{1}{\omega\rho} \frac{n\pi}{h} |B_n| \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \sin(\omega t - \gamma_n x - \alpha_n), \tag{5.179}$$

где $|B_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\cos\alpha_n = a_n / |B_n|$.

Сначала вычислим плотность звуковой энергии E. Согласно (4.44) плотность энергии n-ой моды можно определить по формуле

$$E_n(x,z,t) = \frac{\rho |\mathbf{v}_n|^2}{2} + \frac{p_n^2}{2\chi} = \frac{\rho \upsilon_{xn}^2}{2} + \frac{\rho \upsilon_{zn}^2}{2} + \frac{p_n^2}{2\chi}, \tag{5.180}$$

здесь $\chi = \rho c^2$ — упругость среды. Подставим (5.177)-(5.179) в (5.180) и интегрируем по ширине волновода, тем самым определяем энергию в волноводе на единицу длины (будем говорить о плотности энергии в волноводе):

$$E_n(x,t) = \int_0^h E_n(x,z,t)\,dz = \frac{\rho h \delta_n}{2} \left(\frac{\gamma_n}{\omega\rho}\right)^2 |B_n|^2 \cos^2(\omega t - \gamma_n x - \alpha_n) +$$

$$+\frac{\rho h\delta_n}{2}\frac{|B_n|^2}{(\omega\rho)^2}\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\sin^2(\omega t-\gamma_n x-\alpha_n)+\frac{h\delta_n}{2\chi}|B_n|^2\cos^2(\omega t-\gamma_n x-\alpha_n),$$

где $\delta_0 = 1$, $\delta_n = 0{,}5$, при $n > 0$. Принимая во внимание, что $(n\pi/h)^2 = k^2 - \gamma_n^2$, и выполняя преобразования, получаем формулу для плотности энергии участка волновода:

$$E_n(x,t)=\frac{h\delta_n}{2\chi}|B_n|^2\left[1+\frac{\gamma_n^2\chi}{\omega^2\rho}\cos(2\omega t-2\gamma_n x-2\alpha_n)\right]. \qquad (5.181)$$

Средняя за период $T = 2\pi/\omega$ плотность энергии на участке волновода равна

$$\langle E_n\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T E_n(x,t)\,dt=\frac{h\delta_n}{2\chi}|B_n|^2. \qquad (5.182)$$

Как видим, величина $\langle E_n\rangle$ является постоянной и не зависит от координаты x. Это означает, что в такой волне должен быть постоянным и средний поток энергии вдоль оси Ox.

Вычислим средний поток плотности мощности, т.е. интенсивность вдоль координатных осей Ox и Oz. Выкладки упростятся, если используем формулу для интенсивности (4.55) и комплексные выражения (5.172)-(5.174). Итак,

$$I_{xn}(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(p\upsilon_{xn}^*)=\frac{\gamma_n}{2\omega\rho}|B_n|^2\cos^2\left(\frac{\pi nz}{h}\right), \qquad (5.183)$$

$$I_{zn}(z) = 0.$$

Понятно, что для неоднородной моды $I_{xn}(z) = 0$ (проверьте!). Средний поток мощности через сечение волновода в n-ой моде можно найти, проинтегрировав (5.183) вдоль сечения волновода:

$$\langle P_{xn}\rangle=\int_0^h I_{xn}(z)\,dz=\frac{h\delta_n\gamma_n}{2\omega\rho}|B_n|^2=\frac{h\delta_n}{2\omega\rho}|B_n|^2 k\sqrt{1-\frac{\omega_{\text{кр}n}^2}{\omega^2}}. \qquad (5.184)$$

Величина среднего за период T потока мощности $\langle P_{xn}\rangle$ определяет перенос энергии в n-ой моде вдоль оси Ox с некоторой скоростью, которую называют групповой. В общем случае *групповая скорость* $\upsilon_{\text{гр}}$ *или скорость переноса энергии в гармонической волне — это отношение среднего за период потока мощности к средней по объему на длине волне* λ *плотности энергии*:

$$\upsilon_{\text{гр}} = \frac{\langle P_x \rangle}{\frac{1}{\lambda}\langle E(x, x+\lambda)\rangle}. \qquad (5.185)$$

В случае нормальных волн плоского волновода средняя плотность энергии не зависит от координаты x (см. (5.182)). Подставляя (5.182) и (5.184) в формулу (5.185), определяем групповую скорость $\upsilon_{\text{гр}n}$ n-ой моды волновода:

$$\upsilon_{\text{гр}n} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{кр}n}^2}{\omega^2}}. \qquad (5.186)$$

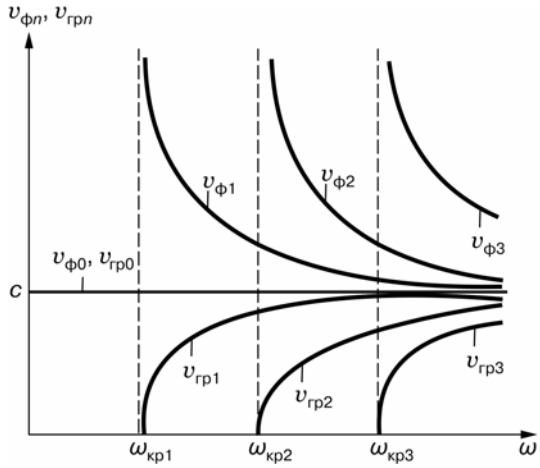


Рис. 5.26. Дисперсионные кривые фазовых и групповых скоростей плоского волновода с жесткими границами

На рис. 5.26 приведены зависимости фазовых и групповых скоростей от частоты ω для нескольких первых мод волновода. Эти кривые еще называют *дисперсионными кривыми*. Для всех мод с номерами $n > 0$ фазовые скорости больше скорости звука c в среде, а групповые — меньше, чем эта скорость. При увеличении частоты фазовая скорость монотонно уменьшается и стремится к c асимптотически сверху, а групповая — увеличивается и стремится к c снизу. При критической частоте фазовая скорость моды бесконечно возрастает, а групповая равняется нулю. Предлагаем читателю обдумать такой характер зависимости, опираясь на возможность представления мод в виде суперпозиции двух плоских волн (рис. 5.25). Для нулевой моды, которая является обычной плоской волной, фазовая и групповая скорости равны скорости звука c в среде и не зависят от частоты. Вообще нулевая мода не типична для волноводов, ведь дисперсия для

нее отсутствует; она существует только в волноводах с жесткими границами.

5.12.2. Кинематическое определение групповой скорости

Гармоническая волна является полезной математической идеализацией, но в природе не существует. Реальный процесс, строго говоря, некогда не сводится к одной синусоиде, хотя бы потому, что источник возбуждения работает ограниченное время и в волне есть “начало” и “конец”. Передача сигналов с помощью гармонической волны также невозможна, поскольку она однородная в пространстве и времени. Очевидно, чтобы передать информацию, нужно каким-то образом изменять амплитуду или фазу волны. Итак, реальный процесс — это не гармоническая волна, а, например, локализованное возбуждение (волновой пакет), которое можно рассматривать как набор гармонических волн с амплитудами и фазами, которые зависят от частоты. Другими словами, волновой пакет может быть представлен рядом или интегралом Фурье.

Сначала рассмотрим процесс, который состоит из двух гармонических волн с близкими частотами ω_1 и ω_2 ($|\omega_2 - \omega_1| << \omega_{1,2}$) и волновыми числами k_1 и k_2 ($|k_2 - k_1| << k_{1,2}$):

$$p(x,t) = a\cos(\omega_1 t - k_1 x) + a\cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$= 2a\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right). \qquad (5.187)$$

Как видно, получили известное выражение для биений двух волн (см. параграф 2.7), которое можно описать произведением двух периодических функций: одна из них — $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$, где $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ и $k_0 = (k_1 + k_2)/2$, — определяет быстро осциллирующую (несущую) волну, а вторая —

$$A(x,t) = 2a\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right), \qquad (5.188)$$

описывает медленное изменение амплитуды несущей волны, или, другими словами, огибающую.

Итак, при условии $|\omega_2 - \omega_1| << \omega_{1,2}$ и $|k_2 - k_1| << k_{1,2}$ результатом суперпозиции двух волн есть ряд периодически повторяющихся групп (такое повторение существует как во времени, так и вдоль пространственных координат; графической иллюстрацией являются рисунки к параграфу 2.7).

Несущая волна передвигается с фазовой скоростью $\upsilon_ф = \omega_0/k_0$, а поверхность, на которой амплитуда группы остается постоянной, оп-

ределяется уравнением $\Delta\omega t - \Delta kx = \text{const}$ ($\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\Delta k = k_2 - k_1$), откуда вытекает, что сами группы распространяются со скоростью

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \text{ при } \Delta k \to 0.$$

Таким образом, для характеристики модулированной волны необходимо ввести еще одно понятие — скорость огибающей, или, иначе говоря, группы волн — *групповую скорость*. В общем случае групповая скорость модулированной волны определяется выражением

$$\upsilon_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\text{Приращение частоты волны в группе}}{\text{Приращение волнового числа в группе}}. \qquad (5.189)$$

При таком ее определении отношение конечных разностей $\Delta\omega/\Delta k$ заменяется производной $d\omega/dk$.

Подобный волновой процесс можно получить, если рассматривать суперпозицию ряда гармонических волн:

$$p(x,t) = A_0 \exp\left(-i\left(\omega_0 t - k_0 x\right)\right) + A_1 \exp\left(-i\left(\omega_1 t - k_1 x\right)\right) +$$

$$+A_2 \exp\left(-i\left(\omega_2 t - k_2 x\right)\right) + \ldots, \qquad (5.190)$$

при условии, что для произвольной пары n и m имеем неравенства $|\omega_m - \omega_n| << \omega_0$, $|k_m - k_n| << k_0$, n, $m = 0,1,2,\ldots$ Запишем суперпозицию волн (5.190) в виде

$$p(x,t) = \exp\left(-i\left(\omega_0 t - k_0 x\right)\right)\Big[A_0 + A_1 \exp\left(-i\left(\omega_1 - \omega_0\right)t + i\left(k_1 - k_0\right)x\right) +$$

$$+A_2 \exp\left(-i\left(\omega_2 - \omega_0\right)t + i\left(k_2 - k_0\right)x\right) + \ldots\Big]. \qquad (5.191)$$

Учитывая близость частот и волновых чисел (т.е. спектр модулированной волны (5.190) является узкополосным), можно записать

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{k_1 - k_0} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{k_2 - k_0} = \ldots = \frac{d\omega}{dk} = \upsilon_{\text{гр}} \qquad (5.192)$$

(уравнение выполняется тем точнее, чем уже спектр) и, соответственно

$$p(x,t) = \exp\left(-i\omega_0 t + ik_0 x\right)\Big[A_0 + A_1 \exp\left(-i\left(k_1 - k_0\right)\left(\upsilon_{\text{гр}} t - x\right)\right) +$$

$$+ A_2 \exp\left(-i\left(k_2 - k_0\right)\left(\upsilon_{\text{гр}} t - x\right)\right) + \ldots\Big] = \exp\left(-i\omega_0 t + ik_0 x\right) F(\upsilon_{\text{гр}} t - x). \qquad (5.193)$$

Выражение в квадратных скобках определяет огибающую $F(\upsilon_{\text{гр}} t - x)$ суперпозиции волн, распространяющуюся без изменения своей формы со скоростью $\upsilon_{\text{гр}}$, которая является групповой скоростью, в то время

как несущая волна $\exp(-i\omega_0 t + ik_0 x)$ распространяется в середине огибающей с фазовой скоростью $\upsilon_ф = \omega_0/k_0$.

Если в дисперсионном уравнении связь между ω и k линейная и однородная $\left(\frac{d^2\omega}{dk^2} = 0\right)$, то $\frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} = \upsilon_ф$ и волновой пакет распространяется так же, как отдельная монохромная волна. Это означает, что дисперсия в среде отсутствует, волна будет не дисперсионной и $\upsilon_ф = \upsilon_{гр}$.

Если $\frac{d^2\omega}{dk^2} \neq 0$, то групповая скорость отличается от фазовой скорости. При этом волны разной длины распространяются с разными фазовыми и групповыми скоростями. Итак, в системе присутствует дисперсия. Возникает вопрос, как влияет дисперсия на распространение возмущения типа (5.190), которое возникло, скажем, вблизи $x = 0$ в момент $t = 0$. Поскольку компоненты возмущения с разными волновыми числами распространяются с разными скоростями, то начальное возмущение спустя некоторое время распространяется на некоторый пространственный интервал, который будет увеличиваться со временем (т.е. со временем огибающая $F(\upsilon_{гр}t - x)$ в (5.193) реального сигнала будет изменять форму); очевидно, чем уже спектр в волне (5.190), тем дольше во времени огибающая $F(\upsilon_{гр}t - x)$ реального сигнала будет сохранять свою форму.

Подобные соображения можно провести для суперпозиции не только дискретного, но и непрерывного множества гармонических волн, т.е. для возмущения со сплошным, но довольно узким спектром. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ возмущение определяется функцией $p(x, t = 0)$. Запишем функцию $p(x, 0)$ в виде суперпозиции составляющих через интеграл Фурье:

$$p(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)\exp(ikx)\,dk, \qquad (5.194)$$

где $\Phi(k) \approx 0$ при $|k - k_0| > |\Delta k|$ и $|\Delta k| << k_0$ — эти неравенства определяют факт близости волновых чисел гармонических волн к некоторому волновому числу k_0.

При $t > 0$ эта совокупность гармонических составляющих будет распространяться каждая со своей фазовой скоростью $\upsilon_ф$. Итак, при $t > 0$ имеем

$$p(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)\exp(-i\omega(k)t + ikx)\,dk. \qquad (5.195)$$

Выполним преобразование этого общего выражения с учетом узости спектра начального возмущения. Положив $k = k_0 + \xi$, разложим функцию $\omega(k)$ в ряд Тейлора в окрестности k_0 по степеням ξ:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \xi + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k_0} \xi^2 + \ldots \qquad (5.196)$$

Обозначив $\omega(k_0) = \omega_0$, подставим (5.196) в интеграл (5.195):

$$p(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_0 + \xi)\exp\left\{-i\left[\omega_0 t + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \xi t + \ldots - k_0 x - \xi x\right]\right\} d\xi. \qquad (5.197)$$

Поскольку интегрирование проводится практически в области малых значений ξ, то для не очень больших t имеем возможность ограничиться линейным членом в разложении (5.196) для $\omega(k)$:

$$p(x,t) \approx \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_0 + \xi)\exp\left\{-i\left[\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} t - x\right]\xi\right\} d\xi. \qquad (5.198)$$

Величина $\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$ — это скорость отдельной гармонической составляющей, но по своему определению — это групповая скорость, которая, как видим, для всех составляющих интеграла имеет одно значение. Таким образом, интеграл в (5.198) соответствует огибающей суперпозиции гармонических волн, которая распространяется без изменения формы со скоростью $\upsilon_{\text{гр.}}$ Поэтому (5.198) можно переписать в виде, аналогичном случаю суперпозиции дискретного набора гармонических волн (5.193):

$$p(x,t) = \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x) F(\upsilon_{\text{гр}} t - x), \quad \upsilon_{\text{гр}} = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}, \qquad (5.199)$$

где $F(\upsilon_{\text{гр}} t - x)$ — огибающая, которая определяется интегралом (5.198).

Понятно, что неизменность формы огибающей $F(\upsilon_{\text{гр}} t - x)$ будет наблюдаться только на ограниченном интервале времени, пока отброшенный в разложении частоты $\omega(k)$ (см. (5.196)) следующий член обусловливает малое изменение фазы. С учетом следующего члена в ряде (5.196) для $\omega(k)$ экспонента под знаком интеграла в формуле (5.198) будет иметь вид

$$\exp\left\{-i\left[\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k_0} \xi\right) t - x\right]\xi\right\}. \qquad (5.200)$$

Выражение в круглых скобках определяет фазовую скорость отдельной гармонической составляющей, которая уже зависит от волнового числа k, ведь $\xi = k - k_0$. Итак, малость набега фазы за счет указанного слагаемого определяется неравенством

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}\bigg|_{k_0} \Delta k^2 t << \pi. \qquad (5.201)$$

Отсюда, зная ширину спектра Δk, можно оценивать время t и путь $L = \upsilon_{\text{гр}} t$, на котором можно пренебрегать изменением формы огибающей.

Исторически, скорость — это понятие, которое возникло при описании движения частиц. Оно является понятным и имеет смысл при условии, что существует возможность отождествления частицы при ее движении, т.е. о любой точке пространства можно утверждать, что здесь находится одна и та же частица.

При распространении волн имеют дело с перемещением не частицы, а состояния среды. Чтобы говорить о скорости нужно иметь возможность и средства для отождествления состояния. В среде без дисперсии, когда фазовая скорость не зависит от волнового числа, любое возмущение распространяется без изменения формы, поэтому здесь такая возможность очевидна. Но в среде с дисперсией возмущение в процессе распространения деформируется, и здесь уже без дальнейшего анализа нельзя определить, чему равна скорость. Сначала следует выяснить, что в данном случае называют скоростью распространения волны. Такой общий комментарий есть, наверное, целесообразным дополнением к полученным выше результатам.

В сущности, понятие групповой скорости можно ввести только для определенного типа возмущений, которые имеют довольно узкий спектр гармонических волн, и только при наличии определенных свойств среды, в которой происходит распространение. Эти свойства должны быть такими, чтобы для тех длин волн, которые обусловливают исходное возбуждение, с достаточным приближением можно было считать частоту ω линейной функцией волнового числа k (см. (5.196)-(5.198)). При таких условиях деформация группы (огибающая суперпозиции гармонических волн) в процессе распространения происходит медленно, и тогда для не очень больших расстояний групповая скорость приближенно описывает распространение группы.

Важно отметить, что групповая скорость может существенно отличаться от фазовых скоростей всех гармонических волн, которые входят в состав спектра данного возмущения, несмотря на то, что в узкополосном возмущении все составляющие имеют близкие фазовые скорости.

Между групповой и фазовой скоростями существует простая зависимость; приняв во внимание, что $\upsilon_ф = \omega/k$, перепишем (5.189) в виде

$$\upsilon_{гр} = \frac{d\left(k\upsilon_ф\right)}{dk} = \upsilon_ф + k\frac{d\upsilon_ф}{dk}, \tag{5.202}$$

или, учитывая $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны,

$$\upsilon_{гр} = \upsilon_ф - \lambda\frac{d\upsilon_ф}{d\lambda}. \tag{5.203}$$

Выражение (5.202) или (5.203) называют *формулой Релея**. Из (5.202) видно, что групповая и фазовая скорости совпадают, когда $\upsilon_ф$ не зависит от волнового числа, т.е. при отсутствии дисперсии. При наличии дисперсии групповая скорость может быть как больше, так и меньше фазовой скорости в зависимости от знака производной $d\upsilon_ф/dk$. Дисперсию называют *нормальной*, если $\upsilon_{гр} < \upsilon_ф$ ($d\upsilon_ф/dk < 0$), и *аномальной*, если $\upsilon_{гр} > \upsilon_ф$ ($d\upsilon_ф/dk > 0$).

Вернемся к плоскому волноводу с жесткими границами (рис. 5.23) и вычислим групповую скорость нормальных волн, опираясь на кинематическое определение групповой скорости (5.189). Связь между волновым числом γ_n n-ой моды и частотой ω установлена соотношением (5.164), которое перепишем в виде

$$k^2 - \gamma_n^2 = \frac{n\pi}{h}. \tag{5.204}$$

Продифференцируем это соотношение, приняв во внимание, что правая часть не зависит от частоты ω: $k\dfrac{dk}{d\omega} - \gamma_n\dfrac{d\gamma_n}{d\omega} = 0$. Итак, учитывая $dk/d\omega = 1/c$ и формулу (5.168), получаем

$$\upsilon_{грn} = \frac{d\omega}{d\gamma_n} = \frac{c\gamma_n}{k} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_{крn}^2}{\omega^2}}. \tag{5.205}$$

Сравнивая формулы (5.186) и (5.205), видим, что значения групповой скорости мод плоского волновода, вычисленные в соответствии с энергетическим и кинематическим определениями, совпадают. Для данного случая такое совпадение естественно, ведь понятно, что энергия возмущения сконцентрирована в области пространства, которое охватывает огибающая (точнее, наверное, в центре группы, где амплитуда огибающей максимальна). Скорость огибающей определя-

* Лорд Рэлей (Rayleigh) Стретт Джон Вильям (1842—1919) — английский физик, лауреат Нобелевской премии (1904 г.).

ется групповой скоростью, поэтому при распространении узкополосных возмущений энергия переносится также с групповой скоростью. Нужно подчеркнуть, что значения групповых скоростей, вычисленные согласно кинематическому и энергетическому определениям, совпадают для самых разнообразный волновых полей.

Задача. Проведите самостоятельный анализ волновода с двумя мягкими границами и волновода с жесткой и мягкой границами. Обратите внимание на отсутствие нулевой моды в этих волноводах. Наличие нулевой моды, которая, в сущности, является плоской волной, присуща только волноводу с жесткими границами.

5.13. Создание гармонического поля в волноводе

Нормальные волны (5.166) являются частными решениями волнового уравнения для плоского волновода с жесткими границами. Физически они определяют гармонические волны, которые распространяются в волноводе без изменения формы. Суперпозиция нормальных волн определяет общее решение волнового уравнения, а, следовательно, позволяет представить любое поле в волноводе в виде соответствующей суммы мод с подобранными определенным образом коэффициентами:

$$p(x,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(-i\omega t+i\gamma_n x). \qquad (5.206)$$

Эта сумма состоит из бегущих и неоднородных нормальных волн. Поэтому выражение (5.206) можно переписать в виде

$$p(x,z,t)=\sum_{n=0}^{N} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(-i\omega t+i\gamma_n x)+$$

$$+\sum_{n=N+1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(-i\omega t-|\gamma_n|x), \qquad (5.207)$$

где N — количество бегущих мод, которое определяется условием (5.171).

При изучении колебаний струны или мембраны мы вели поиск нормальных колебаний, т.е. периодических движений в системе по гармоническому закону. Суперпозиция нормальных колебаний, которая определяла общее решение задачи, позволяла описывать колебания системы при произвольных начальных условиях и достаточно легко находить решение для вынужденных колебаний.

В волноводе звуковые волны возникают как следствие деятельности некоторых “источников”, т.е. постороннего влияния. Другими словами, если в некотором сечении волновода заданы силы или ско-

рости частиц, то в волноводе создается звуковое поле — это задача об излучении звука в волноводе. Понятно, что в этом случае, подобно случаю колебаний струны или мембраны под действием внешней силы, получаем решение неоднородного волнового уравнения с заданными граничными условиями на границах волновода. Однако возможен другой подход, который основывается на свойствах нормальных волн. Его суть в том, что так же, как и суперпозиция нормальных колебаний определяла произвольное движение струны или мембраны, так и суперпозиция нормальных волн (5.206) дает возможность описать звуковое поле в волноводе при произвольном источнике его возбуждения. Таким образом, задача излучения звука в волноводе сводится к определению коэффициентов возмущения нормальных волн.

Пусть в сечении волновода $x = 0$ (рис. 5.23) задано распределение x-компонент скоростей частиц $\upsilon_x = V(z)$, которое изменяется во времени по гармоническому закону с частотой ω. Разложим $V(z)$ в ряд Фурье по функциям, которые определяют поперечное распределение составляющей скорости частиц в нормальных волнах (см. формулу (5.173)), т.е. по функциям $\cos(n\pi z/h)$, $n = 0,1,2,\ldots$ Как известно из теории рядов Фурье, эти косинусы образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $[0,h]$, и поэтому любое распределение скорости частиц можно единственным образом представить в виде такого ряда. Вообще функция $V(z)$ при этом должна удовлетворять некоторым условиям [8], которые обычно выполняются в ситуациях, представляющих физический интерес. Итак, разложение в ряд имеет вид

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right), \tag{5.208}$$

где

$$V_n = \frac{\delta_n}{h} \int_0^h V(z) \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) dz, \quad \delta_0 = 1,\ \delta_n = 2 \text{ при } n > 0.$$

Согласно (5.172) и (5.173) давление p_n и составляющая скорости частиц υ_{xn} связаны соотношением $\upsilon_{xn} = \dfrac{\gamma_n p_n}{\omega\rho}$. Тогда каждому слагаемому в ряде (5.208) можно поставить в соответствие нормальную бегущую волну давления, которая распространяется в положительном направлении оси Ox, т.е.

$$p_n(x,z,t) = \frac{\omega\rho}{\gamma_n} V_n \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t + i\gamma_n x). \tag{5.209}$$

Таким образом, источник в виде распределения x-компонент скоростей $\upsilon_x = V(z)$ в сечении $x = 0$ создает поле, которое можно представить в виде суперпозиции нормальных волн

$$p^{(\upsilon)}(x,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n}{\gamma_n} \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) \exp\left(-i\omega t + i\gamma_n x\right). \quad (5.210)$$

Для понимания процессов, которые происходят в волноводе, нужно сравнить поле (5.210) с полем источника в виде распределения давления $P(z)$ в сечении $x = 0$. Очевидно поле источника давления будет иметь вид

$$p^{(p)}(x,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) \exp\left(-i\omega t + i\gamma_n x\right), \quad (5.210а)$$

где P_n - коэффициенты разложения функции $P(z)$ в ряд по собственным формам волновода $\cos(n\pi z/h)$. Верхние индексы υ и p в выражениях (5.210) и (5.210а) указывают на тип источника.

Запишем x-компоненты колебательной скорости в определенных выше полях:

$$\upsilon_x^{(\upsilon)}(x,z,t) = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p^{(\upsilon)}}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) \exp\left(-i\omega t + i\gamma_n x\right), \quad (5.211)$$

$$\upsilon_x^{(p)}(x,z,t) = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p^{(p)}}{\partial x} = \frac{1}{\omega\rho} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \gamma_n \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) \exp\left(-i\omega t + i\gamma_n x\right). \quad (5.211а)$$

Представленные выражения говорят о существенном отличии характера поля в волноводе для разных источников, в случае, когда частота источника ω близка к критической частоте $\omega_{\text{кр}n}$.

Если задан источник колебательной скорости, то при $\omega \to \omega_{\text{кр}n}$, т.е. $\gamma_n \to 0$, согласно формулам (5.210), (5.211), давление $p^{(\upsilon)} \to \infty$, а колебательная скорость $\upsilon_x^{(\upsilon)}$ не зависит от частоты.

Если задан источник давления, то при $\omega \to \omega_{\text{кр}n}$, т.е. $\gamma_n \to 0$, согласно формулам (5.210а), (5.211а), давление $p^{(p)}$ не зависит от частоты, а колебательная скорость $\upsilon_x^{(p)} \to 0$.

Для объяснения этих результатов нужно исходить из того, что при $\omega \to \omega_{\text{кр}n}$ удельное акустическое сопротивление волновода в направлении распространения n-ой моды, т.е. отношение $p_n / \upsilon_{xn} \to \infty$. По-

этому, чтобы это отношение имело место, в случае источника скорости давление $p^{(\upsilon)} \to \infty$, а в случае источника давления $\upsilon_x^{(p)} \to 0$.

Такая ситуация сложилась потому, что рассматривались идеальные источники колебательной скорости или давления, т.е. источники с неизменной амплитудой при любых условиях. Поэтому, определение поля, которое создается источником в волноводе при $\omega \to \omega_{\text{кр}n}$ возможно лишь при условии учета параметров реального источника.

Рассмотренный метод расчета звукового поля можно использовать и для случая волновода с идеально мягкими границами или одной мягкой границей, а другой жесткой, да и вообще с локально-реагирующими (т.е. импедансными) границами [20, с. 255].

Действительно, можно показать, что в волноводе с импедансными границами функции распределения давления или x-компоненты скорости частичек для всех нормальных волн образовывают полную ортогональную систему функций на отрезке $[0,h]$. Эти функции имеют вид $\cos(\zeta z + \alpha)$, где все значения ζ и α определяются из граничных условий на поверхностях волновода. Например, рассмотрим плоский волновод (рис. 5.8) с идеально мягкой $(x = 0)$ и импедансной $(x = h)$ границами. На импедансной границе выполняется условие: $\left.\dfrac{p}{\upsilon_z}\right|_{z=h} \equiv i\omega\rho \left.\dfrac{p}{\partial p/\partial z}\right|_{z=h} = \eta$. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что собственные формы мод имеют вид $\sin(\zeta z)$, где значения ζ определяются из уравнения $\operatorname{tg}(\zeta h) = \dfrac{\eta}{i\omega\rho}\zeta$.

Полнота системы обеспечивает возможность представить данное распределение давления (или x-компоненты скорости частичек) в сечении волновода в виде суперпозиции собственных форм нормальных волн данного волновода. Ортогональность системы обуславливает единственность такого представления.

Легко доказать ортогональность двух различных нормальных волн $p_n = A_n g_n(z)\exp(i\gamma_n x)$, $n = 1,2,\ldots$ ($g_n(z)$ — собственные формы мод) в волноводе с импедансными границами. Для этого, подставив выражение $p_n = A_n g_n(z)\exp(i\gamma_n x)$ в уравнение Гельмгольца $\Delta p_n + k^2 p_n = 0$, запишем такие уравнения, которым удовлетворяют эти волны:

$$\frac{\partial p_n^2}{\partial z^2} + \left(k^2 - \gamma_n^2\right) p_n = 0, \quad \frac{\partial p_m^2}{\partial z^2} + \left(k^2 - \gamma_m^2\right) p_m = 0, \quad n \neq m.$$

Умножим первое уравнение на p_m, а второе на p_n, вычтем и интегрируем вдоль координаты z от 0 к h; тогда будем иметь

$$\int_0^h \left(p_m \frac{\partial p_n^2}{\partial z^2} - p_n \frac{\partial p_m^2}{\partial z^2} \right) dz + \left(\gamma_m^2 - \gamma_n^2 \right) \int_0^h p_n p_m dz =$$

$$= \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} \left(p_m \frac{\partial p_n}{\partial z} - p_n \frac{\partial p_m}{\partial z} \right) dz + \left(\gamma_m^2 - \gamma_n^2 \right) \int_0^h p_n p_m dz =$$

$$= \left(p_m \frac{\partial p_n}{\partial z} - p_n \frac{\partial p_m}{\partial z} \right) \Bigg|_0^h + \left(\gamma_m^2 - \gamma_n^2 \right) \int_0^h p_n p_m dz = 0 .$$

Первый член равняется нулю благодаря импедансному условию на границах волновода. С другой стороны, величины γ_n и γ_m разные для разных нормальных волн. Отсюда, необходимо чтобы интеграл $\int_0^h p_n p_m dz = 0$, что и требовалось доказать, ведь равенство нулю данного интеграла и есть условие ортогональности нормальных волн p_n и p_m при $n \neq m$. Доказательство полноты данной системы функций рассматривать не будем.

В полученной суперпозиции нормальных волн (5.210) или (5.211) бегущими волнами являются только несколько волн с первыми номерами, для которых $n\pi/(kh) < 1$ (см. формулу (5.164)), или с учетом того, что $k = 2\pi/\lambda$ (λ — длина волны) имеем $h > n\lambda/2$. Все волны высших номеров экспоненциально затухают и заметны только вблизи сечения $x = 0$. Поэтому на большие расстояния будет передаваться не вся структура поля в исходном сечении $x = 0$ со всеми деталями, а только ее наиболее гладкая часть, которую определяют первые члены ряда (5.210) или (5.211). Мелкие детали — “тонкая” структура — распределения $V(z)$ оказываются “срезанными”.

Если ширина волновода меньше $\lambda/2$, то при любом распределении давления или v_x-компоненты скорости частиц в данном сечении далее будет распространяться только плоская волна. Такой волновод называют *узким*. Узкие трубы используют с целью получения плоской волны. Такие трубы применяют в измерительной технике, например, для измерения коэффициента поглощения и входного сопротивления препятствия (методика эксперимента описана в параграфе 5.7).

Если говорить о волноводе, в котором бегущими являются несколько нормальных волн, то даже довольно гладкая поперечная структура звукового поля изменяется при переходе от одного сечения к другому вдоль координаты x. Это связано с тем, что разные нормальные волны распространяются с разными фазовыми скоро-

стями и, как следствие, на пути пробега имеют разные изменения фазы

$$\gamma_n x = \frac{\omega}{c} x \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{\omega h}\right)^2} \,. \qquad (5.212)$$

Поэтому воссоздать с высокой точностью исходное распределение $V(z)$ сечения $x = 0$ на расстоянии $x > 0$ не удается.

5.14. Плоскопараллельный волновод с поглощающими границами

В параграфе 5.3 мы исследовали возможность учета поглощения звуковой энергии, которое имеет место в самой среде. Оказалось, что угасающие волны можно получить из решения задачи для идеальной среды простой заменой действительного волнового числа на волновое число с соответствующей мнимой добавкой. При этом наблюдается экспоненциальный закон уменьшения звуковой энергии волны.

Рассмотрим плоскопараллельный волновод, который заполнен идеальной средой с плотностью ρ и скоростью звука c, но границы волновода частично поглощают звуковую энергию. Пусть, для простоты, верхняя граница есть идеально мягкая, а нижняя – импедансная (рис. 5.27), причем величина импеданса есть вещественная положительная величина. (Вернитесь к параграфу 5.7 и вспомните, что при чисто мнимом входном сопротивлении препятствия модуль коэффициента отражения падающей на препятствие волны равняется единице.) Убедимся в том, что и в таком волноводе параметры нормальной волны экспоненциально убывают в процессе своего распространения.

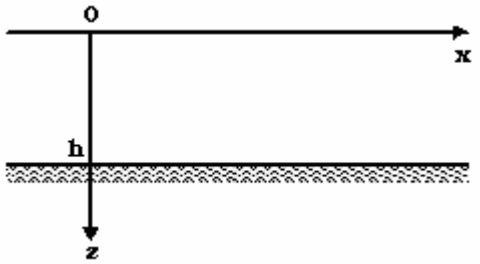


Рис. 5.27. Плоскопараллельный волновод с идеально мягкой ($z = 0$) и поглощающей ($z = h$) границами

Данная модель является наиболее простой моделью водного слоя с учетом поглощающих свойств дна. Нужно отметить, что свойства морского дна не всегда можно описать на основе модели импедансной границы. Но, для частного случая, когда скорость звука в грунте

мала по сравнению со скоростью звука в воде, такое приближение допустимо (вспомните почему?).

Итак, граничные условия на границах волновода имеют вид

$$p\big|_{z=0} = 0\,, \quad \left.\frac{p}{\upsilon_z}\right|_{z=h} = \alpha\rho c\,, \tag{5.213}$$

где α – безразмерный коэффициент.

Нормальную волну данного волновода будет искать в виде

$$p = B\sin(\xi z)\exp(-i\omega t + i\gamma x)\,, \tag{5.214}$$

где $\gamma = \sqrt{k^2 - \xi^2}$, $k = \omega / c$.

Первому условию (5.213) выражение (5.214) удовлетворяет автоматически, для второго условия определим z-компоненту скорости частиц среды

$$\upsilon_z = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{B\xi}{i\omega\rho}\cos(\xi z)\exp(-i\omega t + i\gamma x). \tag{5.215}$$

Подставляя (5.214) и (5.215) во второе условие (5.213), приходим к уравнению

$$\xi \operatorname{ctg}(\xi h) = i\frac{k}{\alpha}\,. \tag{5.216}$$

В случае слоя с идеально жесткой нижней границей нужно положить $\alpha = \infty$. Тогда уравнение (5.216) будет иметь вид $\operatorname{ctg}(\xi h) = 0$, откуда

$$\xi h = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{5.217}$$

Используя выражение (5.217) для волновода с идеальными границами, будем искать решение уравнения (5.216) в виде

$$\xi h = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \beta_n, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{5.218}$$

Подставляя (5.218) в (5.216), получим уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \beta_n\right) = i\frac{kh}{\alpha\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \beta_n\right)}\,,$$

или, используя тригонометрическое соотношение для котангенса, будем иметь такое уравнение относительно неизвестных величин β_n:

$$\operatorname{tg}(\beta_n) = i\frac{kh}{\alpha\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \beta_n\right)}\,. \tag{5.219}$$

Итак, выражение (5.214) для нормальной волны перепишем в виде

$$p_n = B_n \sin\left\{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \beta_n\right]\frac{z}{h}\right\}\exp\left(-i\omega t + i\gamma_n x\right),$$

где

$$\gamma_n^2 = k^2 - \xi_n^2 = k^2 - \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h} - \frac{\beta_n}{h}\right]^2,$$

или, записав решение уравнения (5.219) в виде $\beta_n = a_n + ib_n$, будем иметь такое выражение для постоянной распространения

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h} - \frac{a_n}{h} - i\frac{b_n}{h}\right]^2}.$$

Рассмотрим интересную с практической точки зрения ситуацию, когда в уравнении (5.219) величины $a_n, b_n \ll (n+0,5)\pi$. Тогда можно переписать уравнение (5.219) в приближенном виде

$$\mathrm{tg}(\beta_n) \approx i\frac{kh}{\alpha(n+0,5)\pi}.$$

Положив $\beta_n \approx ib_n$, $b_n > 0$, получим уравнение относительно величины b_n:

$$\mathrm{th}(b_n) \approx \frac{kh}{\alpha(n+0,5)\pi},$$

откуда

$$b_n = \mathrm{arth}\left(\frac{kh}{\alpha(n+0,5)\pi}\right). \qquad (5.220)$$

Таким образом, постоянная распространения γ_n нормальной волны, в пределах принятых приближений, определяется выражением

$$\gamma_n \approx \sqrt{k^2 - \left(\frac{(n+0,5)\pi}{h}\right)^2}\left[1 + i\frac{(n+0,5)\pi b_n}{k^2h^2 - (n+0,5)^2\pi^2}\right].$$

В данном приближении, формула (5.214) для поля давления однородной нормальной волны примет вид

$$p_n = B_n \sin\left(\frac{(n+0.5)\pi z}{h}\right)\exp\left(-\frac{(n+0,5)\pi b_n x}{kh^2\sqrt{1-\frac{\omega_{\text{кр}n}^2}{\omega^2}}}\right)\exp\left(-i\omega t + ik\sqrt{1-\frac{\omega_{\text{кр}n}^2}{\omega^2}}x\right), \qquad (5.221)$$

где $\omega_{\text{кр}n} = (n+0,5)\pi c/h$ – критическая частота n-ой моды в волноводе с идеально мягкой и идеально жесткой границами. Используя

определение фазовой скорости нормальной волны (5.169), перепишем (5.221) следующим образом:

$$p_n = B_n \sin\left(\frac{(n+0.5)\pi z}{h}\right)\exp\left(-\frac{(n+0,5)\pi b_n \upsilon_{фn} x}{\omega h^2}\right)\exp\left(-i\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon_{фn}}\right)\right).$$

Если в формуле (5.220) положить величину $\frac{kh}{\alpha(n+0,5)\pi} \ll 1$, то можно считать, что

$$b_n \approx \frac{kh}{\alpha(n+0,5)\pi},$$

тогда поле давления нормальной волны будет иметь вид

$$p_n = B_n \sin\left(\frac{(n+0.5)\pi z}{h}\right)\exp\left(-\frac{\upsilon_{фn}}{\alpha ch} x\right)\exp\left(-i\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon_{фn}}\right)\right). \quad (5.222)$$

Как видим, давление в нормальной волне убывает по экспоненциальному закону, причем для данной частоты пространственный коэффициент поглощения возрастает при увеличении номера нормальной волны.

Часто в различных конструкциях искусственно создают поглощение на стенках волноводных структур. Например, стенки вентиляционных каналов покрывают изнутри звукопоглощающим материалом, чтобы уменьшить передачу шума вдоль каналов. Однако и в таких каналах нулевая мода поглощается слабо и может передать шум на большое расстояние вдоль канала. В тот же время волны высших порядков угасают быстро. Поскольку передача звука в вентиляционных каналах есть нежелательное явление, то нужно принимать специальные меры по преобразованию нормальной нулевой волны в волны высших номеров, которые убывают быстрее. В параграфе 10.6 мы расскажем об одной возможности простого решения этой проблемы.

5.15. Распространение звукового импульса в плоском волноводе

В третьем разделе, исследуя волновые процессы в струне, мы обратили внимание на то, что возмущения произвольной формы распространяются вдоль струны без изменения своей формы. Такой результат понятен, ведь в модели струны, как идеальной сплошной одномерной среде, дисперсия отсутствует, поэтому гармонические волны разных частот распространяются с одинаковой скоростью. Как следствие, возмущения произвольной формы распространяются вдоль струны без изменения своей формы.

В волноводе, который заполнен идеальной жидкостью, ситуация иная. При распространении импульсного сигнала в волноводе его пространственно-временная структура испытывает воздействие со стороны волновода вследствие двух основных факторов. Один из них обусловлен тем, что волновод является фильтром, поскольку на частотах ниже критической частоты данная нормальная волна становится неоднородной. Другой фактор определяется дисперсией волн, которые распространяются в волноводе. Природа дисперсии в волноводе обусловлена наличием граничных поверхностей. Такую дисперсию называют *геометрической*, ведь волновод наполнен идеальной жидкостью. Явление дисперсии скорости звуковой волны возможно и в свободном пространстве при условии, когда сама среда обладает соответствующими свойствами. Такую дисперсию называют *физической*.

Вернемся к волноводу, который заполнен идеальной жидкостью. Реальный сигнал всегда имеет конечную во времени продолжительность, т.е., другими словами, представляет собой некоторый импульс. Это вызывает большой интерес к изучению именно нестационарных процессов в волноводах. Принимая это во внимание, рассмотрим прохождение импульсного сигнала в волноводе с наиболее простой геометрией границ, а именно плоско-параллельном волноводе.

5.15.1. Математическая модель импульсного сигнала

В качестве временной зависимости исходного сигнала возьмем бесконечную периодическую последовательность импульсов в виде отрезка синусоиды (рис. 5.28). Можно выделить две причины, которые обуславливают использование в качестве математической модели импульсного сигнала не одиночный импульс, а бесконечную периодическую последовательность импульсов в виде отрезка синусоиды. Во-первых, это дает возможность рассматривать волновой процесс на интервале периода следования импульсов T_i. Во-вторых, такой сигнал имеет широкое применение в локационных устройствах разного назначения, например, в локаторах с использованием упругих или электромагнитных волн, медицинских сканерах и т. д. Часто такой сигнал называют *радиоимпульсом*. Такая модель позволяет наиболее просто использовать данные о распространении гармонического сигнала для получения количественных оценок распространения импульса.

Как уже отмечалось во введении, при распространении импульсного сигнала в волноводе его пространственно-временная структура подвергается воздействию со стороны волновода посредством двух основных механизмов. Один из них обусловлен тем, что волновод является фильтром, поскольку на частотах меньше критической часто-

ты данная нормальная волна является неоднородной. Другой механизм определяется дисперсией волн, которые распространяются в волноводе. Проявление этих двух механизмов может иметь свои особенности при распространении различных импульсных сигналов. Эти обстоятельства стимулируют рассмотрение более общей, чем на рис. 5.28, ситуации, при которой частота несущей изменяется, иначе говоря, имеем модулированный импульсный сигнал.

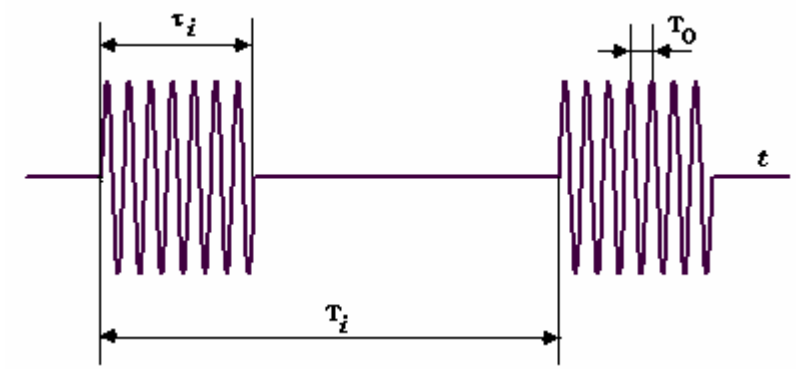


Рис. 5.28. Временная зависимость давления в исходном сигнале

Итак, введем в рассмотрение три варианта временной зависимости давления в исходном сигнале:

сигнал 1 – частота несущей ω_0 на временном промежутке продолжительности импульса τ_i является постоянной величиной –

$$p(t)=\begin{cases}\sin(\omega_0 t) & , \quad 0\le t\le \tau_i \\ 0 & , \quad \tau_i\le t\le T_i\end{cases}, \tag{5.223}$$

сигнал 2 – частота несущей на временном промежутке продолжительности импульса τ_i увеличивается от ω_0 до частоты $\omega_0(1+\alpha\tau_i)$ –

$$p(t)=\begin{cases}\sin\left(\omega_0 t(1+\alpha t)\right) & , \quad 0\le t\le \tau_i \\ 0 & , \quad \tau_i\le t\le T_i\end{cases}, \tag{5.224}$$

сигнал 3 – частота несущей на временном промежутке продолжительности импульса τ_i уменьшается от $\omega_0(1+\alpha\tau_i)$ до частоты ω_0 –

$$p(t)=\begin{cases}\sin\left[\omega_0(\tau_i-t)\left(1+\alpha(\tau_i-t)\right)\right] & , \quad 0\le t\le \tau_i \\ 0 & , \quad \tau_i\le t\le T_i\end{cases}, \tag{5.225}$$

где $T_i=2\pi/\Omega_i$, Ω_i и T_i – частота и период следования импульсов, постоянная α определяет скорость изменения несущей со временем. Очевидно, амплитудный спектр сигналов 2 и 3 будет одинаков, поскольку эти сигналы являются “зеркально отраженными” во времени.

Введем параметры, которые широко используются в импульсной технике, а именно скважность q и количество N периодов T_0 несущей с неизменной частотой $\omega_0 = 2\pi / T_0$, которые образовывают импульс продолжительностью τ_i:

$$q = \frac{T_i}{\tau_i}, \quad N = \frac{\tau_i}{T_0}, \text{ тогда } \quad Nq = \frac{T_i}{T_0}. \tag{5.226}$$

Представим исходный сигнал (5.213), или (5.214), или (5.215) в виде ряда Фурье

$$p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t) \right], \tag{5.227}$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются по известным формулам, величины $p_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ имеют смысл амплитуд отдельных гармонических составляющих. Частоты гармоник $\omega_k = 2\pi f_k = k\omega_1 = k\Omega_i$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ кратны частоте следования импульсов Ω_i. Согласно формулам (5.223)-(5.225) постоянная составляющая ($k = 0$) в ряде (5.227) отсутствует.

При проведении численных расчетов удобно оперировать безразмерными величинами N, q. Безразмерное время определим как время t, нормированное к продолжительности импульса $\tau_i = NT_0$, т.е. $t' = \dfrac{t}{\tau_i}$, а пространственные величины будем нормировать к длине звуковой волны $\lambda_0 = cT_0$ на частоте несущей ω_0: $x' = \dfrac{x}{\lambda_0}$, $z' = \dfrac{z}{\lambda_0}$, $h' = \dfrac{h}{\lambda_0}$. Тогда формулы (5.223)-(5.225) и (5.227) можно переписать в виде

$$p(t') = \begin{cases} \sin(2\pi N t') & , \quad 0 \le t' \le 1 \\ 0 & , \quad 1 \le t' \le q \end{cases}, \tag{5.228}$$

$$p(t') = \begin{cases} \sin\left(2\pi N t'(1 + \beta t')\right) & , \quad 0 \le t' \le 1 \\ 0 & , \quad 1 \le t' \le q \end{cases}, \tag{5.229}$$

$$p(t') = \begin{cases} \sin\left[2\pi N(1 - t')\left(1 + \beta(1 - t')\right)\right] & , \quad 0 \le t' \le 1 \\ 0 & , \quad 1 \le t' \le q \end{cases}, \tag{5.230}$$

$$p(t') = \sum_{k=1}^{K}\left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{q}kt'\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{q}kt'\right)\right], \qquad (5.231)$$

здесь $\beta = \alpha\tau_i$. Положим в численных расчетах следующие значения параметров: $N = 10$, $q = 10$, тогда величина $Nq = 100$. Такой выбор величины N позволяет, как показано ниже, рассматривать сигнал 1 как сигнал с узким спектром. Величина скважности $q = 10$ определяет временной интервал между импульсами в исходном сигнале, который вполне достаточен для последующего исследования формы сигнала при его распространении в волноводе.

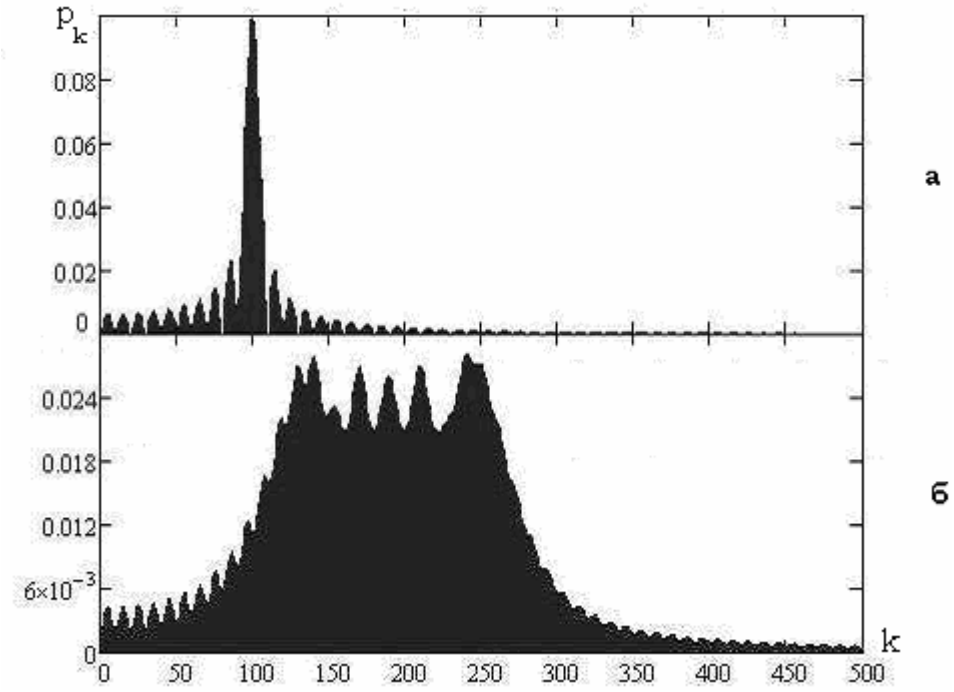


Рис. 5.29. Амплитудный спектр исходного сигнала, $N = 10$, $q = 10$, $K = 500$:
а – сигнал 1, б – сигналы 2 и 3 ($\beta = 0,9$)

На рис. 5.29 представлены величины амплитудных коэффициентов $p_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $k = 1,2,\ldots,K$ гармоничных составляющих ряда (5.217), другими словами, показан амплитудный спектр исходного сигнала. При этом на рис. 5.29, *а* имеем спектр сигнала 1, а на рис. 5.29, *б* – спектр частотно модулированного сигнала 2 или 3 для вели-

чины $\beta = 0,9$. Количество членов K конечного ряда (5.227) взято равным $K = 500$.

Для сигнала 1, согласно рис. 5.29, *а*, максимальную амплитуду имеет сотая гармоника, которая отвечает частоте несущей ω_0 (действительно, из равенства $\omega_k \equiv k\Omega_i = \omega_0$, принимая во внимание формулы (5.216), имеем $k = T_i / T_0 = Nq = 100$). Частотный отрезок $\Delta\omega$ сигнала 1 между частотами $\omega_0 - 2\pi/\tau_i$ и $\omega_0 + 2\pi/\tau_i$ называется *эффективной полосой спектра*. Номера гармоник, которые определяют крайние частоты этой полосы, находятся из соотношений $\omega_0 \pm \dfrac{2\pi}{\tau_i} = k\Omega_i$. Отсюда, используя безразмерные параметры N и q, получаем $k = q(N \pm 1)$, т.е. $k = 90$ и $k = 110$. Поскольку отношение $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{110 - 90}{100} = 0,2 < 1$, то имеем так называемый *узкополосный сигнал*. Для данного сигнала в эффективной полосе спектра содержится 90% всей его энергии.

Спектр сигнала 2 или 3, отображенный на рис. 5.29, *б*, является более широким. Если для сигнала 1 (рис. 5.29. *а*) 90% энергии сигнала удерживает полоса частот $[\omega_{90}, \omega_{110}]$, то соответственно для частотно модулированного сигнала 2 или 3 такой полосой является отрезок на шкале частот $[\omega_{90}, \omega_{260}]$.

Оценку погрешности аппроксимации формы исходного сигнала (5.228)-(5.230) конечным рядом Фурье (5.231) проведем с помощью такого энергетического соотношения:

$$\delta = \frac{\int\limits_0^q \left[p(t') - \sum\limits_{k=1}^{K} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{q} k t'_k \right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{q} k t'_k \right) \right) \right]^2 dt'}{\int\limits_0^1 \left[p(t') \right]^2 dt'}, \qquad (5.232)$$

здесь $p(t')$ – исходный сигнал, определяемый одной из формул (5.228)-(5.230). Согласно выбранным численным величинам N, q, K, для сигнала 1 погрешность $\delta \approx 7,5 \cdot 10^{-6}$, а для частотно модулированного сигнала 2 или 3 имеем $\delta \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$. Понятно, что это очень малая погрешность. Если резко снизить количество составляющих ряда (5.231), например взять $K = 200$, то для сигнала 1 величина $\delta \approx 5,8 \cdot 10^{-4}$, что является вполне приемлемой погрешностью, а для частотно модулированного сигнала 2 или 3 ситуация совсем другая – здесь величина $\delta \approx 0,44$.

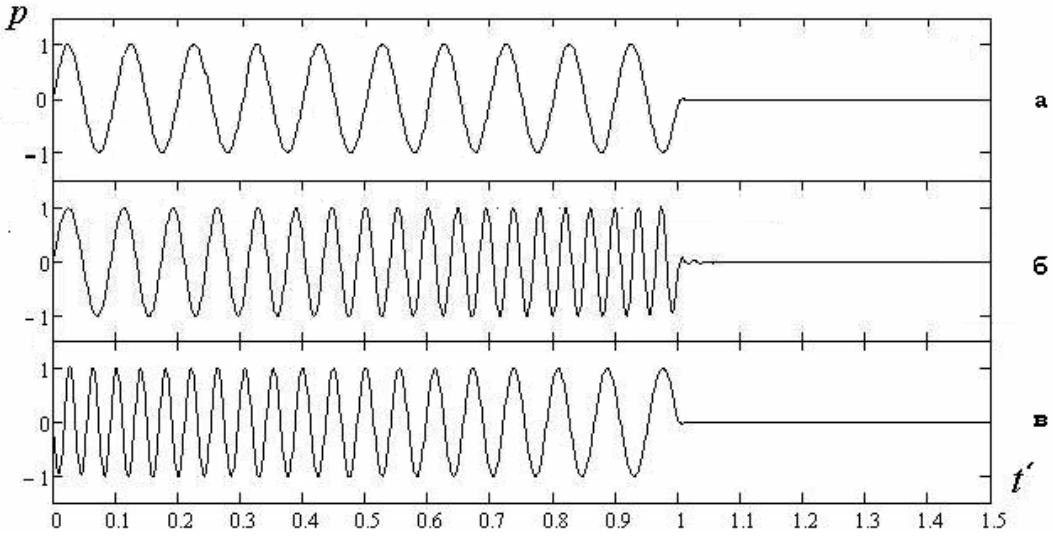


Рис. 5.30. График исходного сигнала, образованного конечным рядом Фурье (5.221) при удержании $K = 500$ составляющих ряда: а – сигнал 1, б – сигнал 2 ($\beta = 0,9$), в – сигнал 3 ($\beta = 0,9$)

На рис. 5.30 представлены графики исходного сигнала, образованного конечной суммой гармоник ряда (5.231) ($K = 500$). Для сигнала 1 (рис. 5.30. *а*) имеем десять периодов $T_0 = 2\pi/\omega_0$ несущей на продолжительности импульса τ_i, а сигналы 2 (рис. 5.30, *б*) и 3 (рис. 5.30, *в*) удерживают по девятнадцать периодов переменной величины на том же отрезке времени τ_i.

Заметим, что предлагаемая модель сигнала не позволяет рассматривать задачу распространения импульса в волноводе на произвольном отрезке времени. Имея в виду наличие в нем дисперсии можно сказать, что такое представление импульса пригодно до тех пор, пока запаздывание импульса не сравнится с периодом следования импульсов.

5.15.2. Распространение в волноводе импульсного сигнала с одномодовой пространственной структурой

Пусть в плоскопараллельном волноводе с акустически мягкими границами (рис. 5.31, *а*) в сечении $x = 0$ задается распределение давления по сечению, которое отвечает первой моде волновода с временной зависимостью (5.223), (5.224) или (5.225). Например, для сигнала 2 в сечении $x = 0$ давление изменяется согласно закону

$$p(z,t)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi z}{h}\right)\sin\left(\omega_0 t(1+\alpha t)\right) & , \quad 0\le t\le \tau_i,\\ 0 & , \quad \tau_i\le t\le T_i,\end{cases} \tag{5.233}$$

где h – ширина волновода. Волновод заполнен идеальной жидкостью с плотностью ρ и скоростью звука c. Задача симметрична относительно сечения $x=0$, поэтому далее будем исследовать волновой процесс для координат $x\ge 0$.

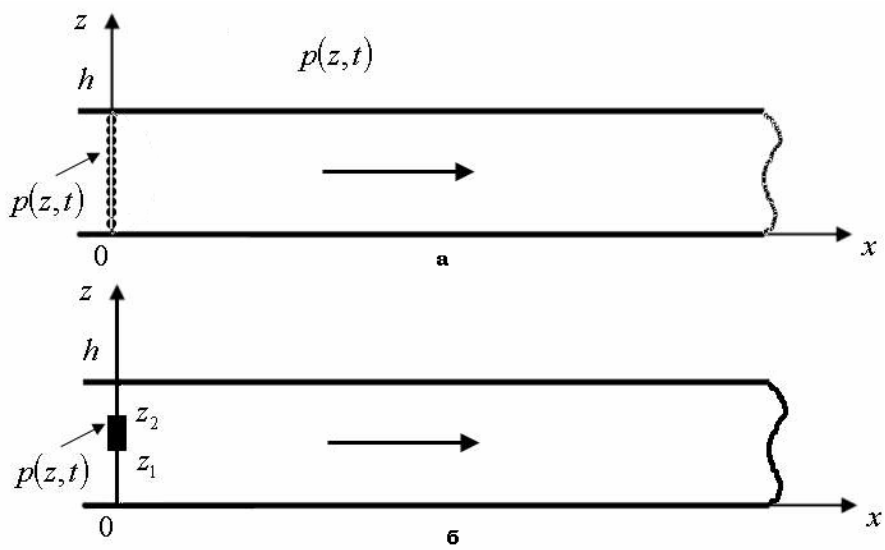


Рис. 5.31. Плоскопараллельный волновод:
а – в сечении $x=0$ задается распределение амплитуды давления, соответствующее первой моде волновода,
б – в сечении $x=0$ на отрезке $z=[z_1,z_2]$ задается равномерное распределение амплитуды давления; вне этого отрезка давление равно нулю

Представим исходный сигнал 1, 2 или 3 в сечении $x=0$ в виде конечного ряда Фурье

$$p(z,t)=\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\sum_{k=1}^{K}\left[a_k\cos(\omega_k t)+b_k\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega_k t\right)\right]. \tag{5.234}$$

Каждая составляющая этой суммы образует в волноводе первую моду с частотой $\omega_k=k\omega_1=k\Omega_i$. Поэтому поле в волноводе будет иметь вид суперпозиции первых мод с соответствующими частотами ω_k, $k=1,2,\ldots,K$:

$$p(x,z,t)=\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\sum_{k=1}^{K}(a_k+ib_k)\exp\left[-i(\omega_k t-\gamma_k x)\right], \tag{5.235}$$

где постоянная распространения k-ой моды

$$\gamma_k = \frac{\omega_k}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_{\text{кр}1}^2}{\omega_k^2}}\,, \tag{5.236}$$

здесь $\omega_{\text{кр}1} = \dfrac{\pi c}{h}$ – критическая частота первой моды. Используя безразмерные параметры, представим выражение $\omega_k t - \gamma_k x$ в формуле (5.235) следующим образом:

$$\omega_k t - \gamma_k x = \frac{2\pi}{q}kt' - \frac{2\pi}{Nq}kx'\sqrt{1-\left(\frac{1}{k}\frac{\omega_{\text{кр}1}}{\Omega_i}\right)^2}\,, \tag{5.237}$$

где отношение $\dfrac{\omega_{\text{кр}1}}{\Omega_i} \equiv \dfrac{\omega_{\text{кр}1}}{\omega_1} = \dfrac{Nq}{2h'}$ будет в дальнейшем представлять собой новый безразмерный параметр данной задачи.

Понятно, что из-за наличия дисперсии первой моды, в процессе распространения сигнала в нем будут накапливаться характерные искажения. Очевидно, что их характер будет существенно зависеть от нормированной критической частоты первой моды $\dfrac{\omega_{\text{кр}1}}{\Omega_i} \equiv \dfrac{\omega_{\text{кр}1}}{\omega_1}$, ведь величина этого параметра будет определять количество нормальных волн, которые являются неоднородными. Нормальные волны, для которых номер $k > \dfrac{\omega_{\text{кр}1}}{\Omega_i}$ будут однородными.

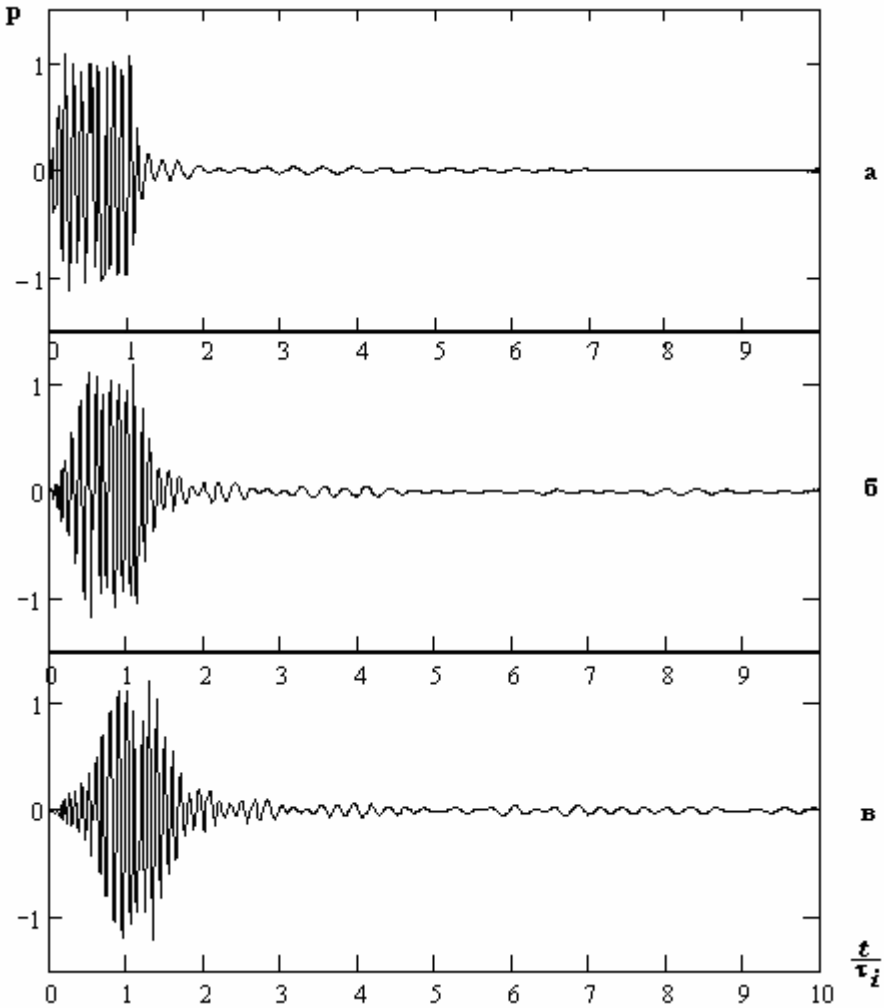


Рис. 5.32. Временные зависимости давления при распространении сигнала 1, $\frac{\omega_{кр1}}{\Omega_i} = 20$, $z/h = 0{,}5$:

а - $x' = 50$, б - $x' = 150$, в - $x' = 300$

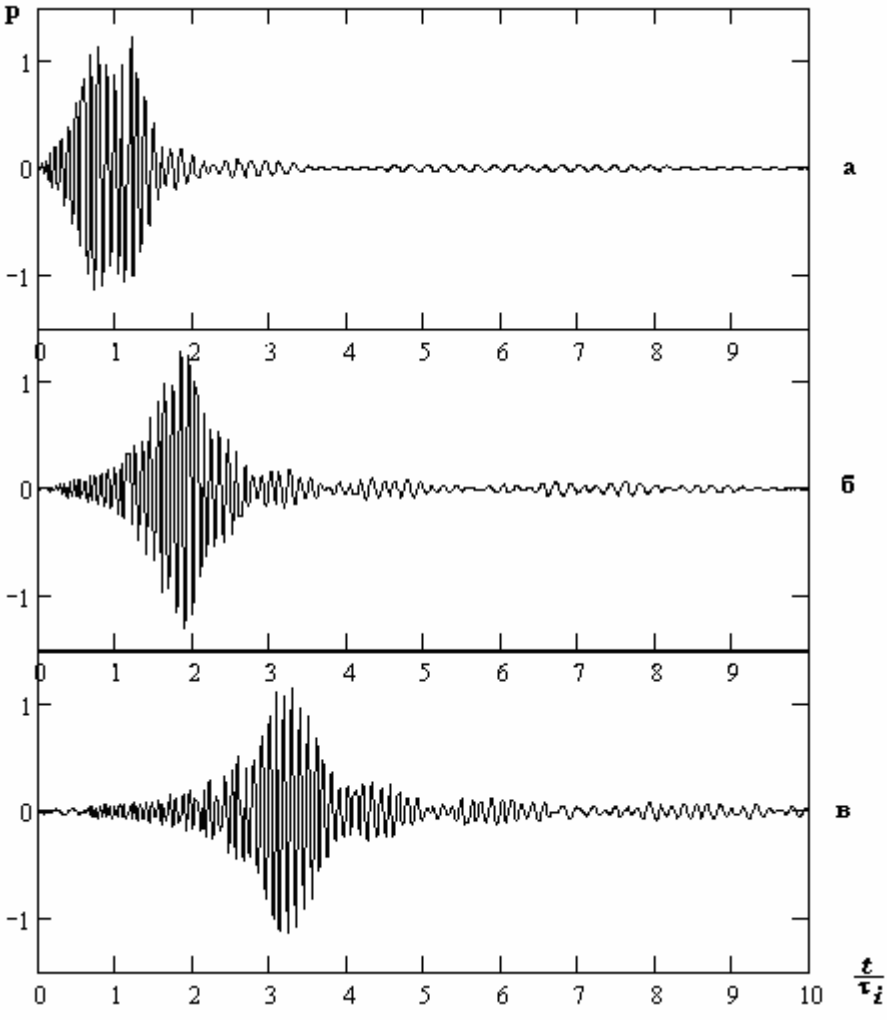


Рис. 5.33. Временные зависимости давления при распространении сигнала 1, $\frac{\omega_{кр1}}{\Omega_i} = 40$, $z/h = 0{,}5$:

а - $x' = 50$, б - $x' = 150$, в - $x' = 300$

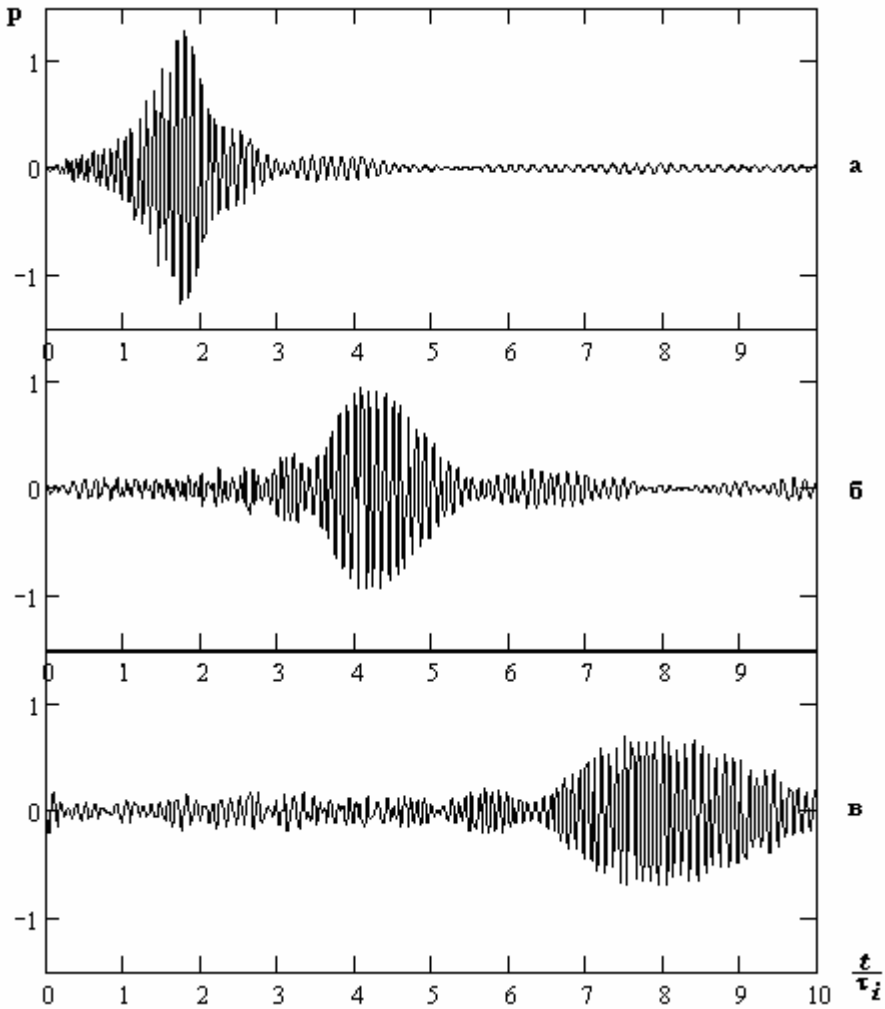


Рис. 5.34. Временные зависимости давления при распространении сигнала 1, $\frac{\omega_{кр1}}{\Omega_i} = 60$, $z/h = 0{,}5$:

а - $x' = 50$, б - $x' = 150$, в - $x' = 300$

Сосредоточим наше внимание на распространении сигнала 1. На рис. 5.32, 5.33 и 5.34 показаны временные зависимости давления в точках наблюдения с координатами $x' = 50{,}150{,}300$, $z/h = 0{,}5$ при разных значениях параметра $\frac{\omega_{кр1}}{\Omega_i} = 20{,}40{,}60$. Вдоль оси абсцисс отложено нормированное время $t' = t/\tau_i$. При этом отброшено время

распространения импульса со скоростью c, т.е. величина $\tilde{t}' = \frac{x}{c} \cdot \frac{1}{\tau_i} = \frac{x'}{N}$. Анализируя графики на рис. 5.32-5.34, можно отметить две характерные особенности в изменении структуры исходного сигнала 1, которые накапливаются при его распространении. Первая особенность – это задержка сигнала в сравнении со временем распространения $\tilde{t}$, вторая – растягивание во времени продолжительности сигнала в сравнении с начальной длительностью импульса τ_i.

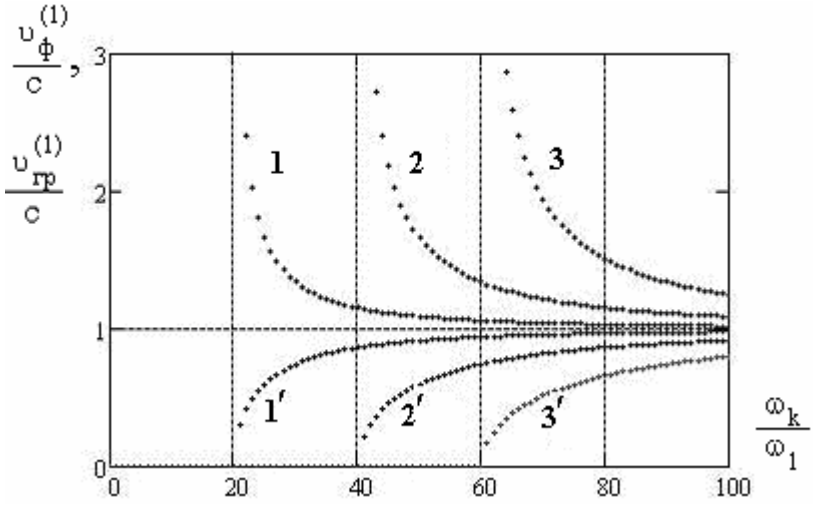


Рис. 5.35. Значения фазовой $\upsilon_{ф}^{(1)}/c$ (кривые 1,2,3) и групповой $\upsilon_{гр}^{(1)}/c$ (кривые $1',2',3'$) скоростей первой моды составляющих сигнала (5.225) при разной величине параметра $\omega_{кр1}/\Omega_i$:
$1,1'$ - $\omega_{кр1}/\Omega_i = 20$, $2,2'$ - 40, $3,3'$ - 60

Как видно, отмеченные эффекты существенно зависят от величины критической частоты первой моды $\omega_{кр1}/\Omega_i$. Для объяснения этой зависимости обратимся к графикам на рис. 5.35, которые определяют фазовую $\upsilon_{ф}^{(1)}$ и групповую $\upsilon_{гр}^{(1)}$ скорости первой моды составляющих сигнала (5.225) при разных величинах параметра $\omega_{кр1}/\Omega_i$. Напомним, что в полосе частот $[\omega_{90}, \omega_{110}]$ сосредоточенно 90% всей энергии сигнала 1 (рис. 5.29, *а*). Как видим, чем меньше величина параметра $\omega_{кр1}/\Omega_i$, тем в меньшей степени изменяются значения

скоростей $\upsilon_{ф}^{(1)}$ и $\upsilon_{гр}^{(1)}$ в окрестности частоты несущей $\omega_0 = \omega_{100}$, и, следовательно, тем дольше будет сохраняться исходная форма сигнала 1 при его распространении.

Проведем количественную оценку эффекта задержки во времени сигнала 1 при его распространении в сравнении со временем $\tilde{t}$. Здесь возможны различные подходы, поскольку возникает необходимость фиксировать момент прихода импульсного сигнала, который претерпевает изменение своей формы в процессе распространения. Проведем эту процедуру, опираясь на понятие групповой скорости. Поскольку сигнал 1 (см. рис. 5.29, *а*) можно считать узкополосным, то его групповую скорость определим как групповую скорость первой моды на частоте несущей ω_0, т.е.

$$\upsilon_{гр} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_{кр1}^2}{\omega_0^2}} = c\sqrt{1 - \left(\frac{1}{Nq}\frac{\omega_{кр1}}{\Omega_i}\right)^2}\,. \qquad (5.238)$$

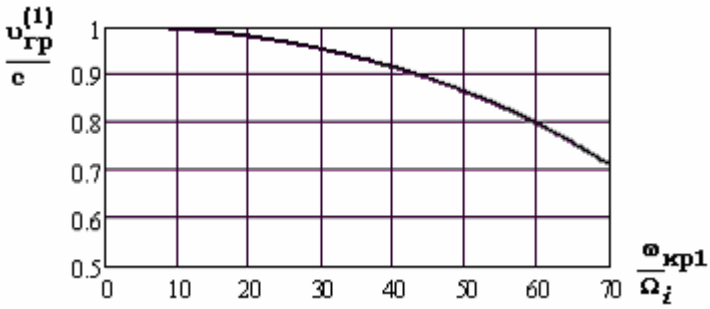


Рис. 5.36. Зависимость групповой скорости $\upsilon_{гр}/c$ распространения сигнала 1 от параметра $\omega_{кр1}/\Omega_i$ при величине $Nq = 100$

Зависимость групповой скорости $\upsilon_{гр}$ от параметра $\omega_{кр1}/\Omega_i$ показана на рис. 5.36, она позволяет оценить уменьшение $\upsilon_{гр}$ при увеличении величины $\omega_{кр1}/\Omega_i$. Тогда временную задержку Δt прихода импульсного возмущения в точку наблюдения с координатой x', в сравнении со временем распространения $\tilde{t}$, можно определить так:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\tau_i} = \tilde{t}' - t'_{гр}\,, \qquad (5.239)$$

где

$$\tilde{t}' = \frac{x}{c} \cdot \frac{1}{\tau_i} = \frac{x'}{N}, \quad t'_{\text{гр}} = \frac{x}{\upsilon_{\text{гр}}} \cdot \frac{1}{\tau_i} = \frac{x'}{N\sqrt{1 - \left(\frac{1}{Nq}\frac{\omega_{\text{кр1}}}{\Omega_i}\right)^2}}. \qquad (5.240)$$

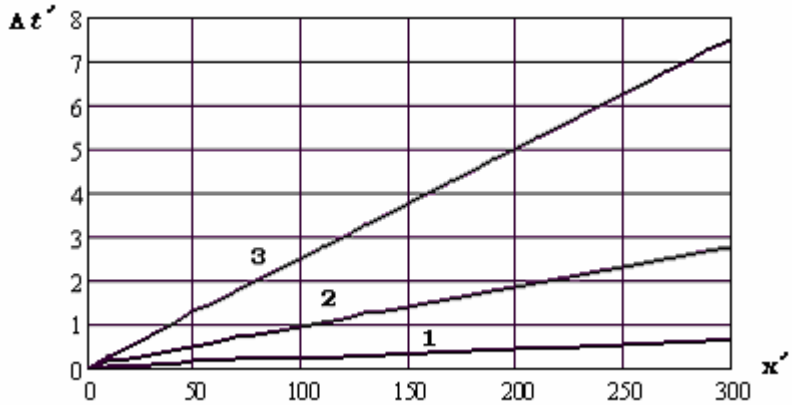


Рис. 5.37. Зависимость временной задержки $\Delta t'$ от расстояния пробега x' сигнала 1 для разных значений параметра $\omega_{\text{кр1}}/\Omega_i$; $Nq = 100$:
1 - $\omega_{\text{кр1}}/\Omega_i = 20$, 2 - 40, 3 - 60

На рис. 5.37 показана зависимость временной задержки $\Delta t'$ от нормированного расстояния $x' = x/\lambda_0$ пробега сигнала 1 для разных значений параметра $\omega_{\text{кр1}}/\Omega_i$. Как видим, рост величины $\omega_{\text{кр1}}/\Omega_i$ существенно увеличивает задержку сигнала $\Delta t'$ и растягивает его во времени (см. рис. 5.32-5.34).

Теперь рассмотрим распространение в волноводе частотно модулированных сигналов 2 и 3 (рис. 5.30, *б, в*), которые не являются узкополосными (рис. 5.29, *б*). На рис. 5.38, *а, в,* показаны временные зависимости давления при распространении сигнала 2, а на рис. 5.38, *б, г* - соответствующие зависимости для сигнала 3 в точках наблюдения с координатами $x' = 50$ (рис. 5.38, *а, б*) и $x' = 150$ (рис. 5.38, *в, г*), $z/h = 0{,}5$ при значении критической частоты первой моды $\omega_{\text{кр1}}/\Omega_i = 60$. Сравнивая эти рисунки можно заметить следующее:

1) наблюдается формирование резкого переднего фронта сигнала 2; при этом, как видно на рис. 5.38, *а, в*, пиковые значения давления превышают амплитуду давления исходного сигнала 2 в сечении $x = 0$ более чем в два раза. Расчеты показывают, что пиковые значения давления, которые превышают амплитуду исходного сигнала более чем в два раза, наблюдаются, при выбранных параметрах волновода, на расстояниях $x' \approx 40...200$;

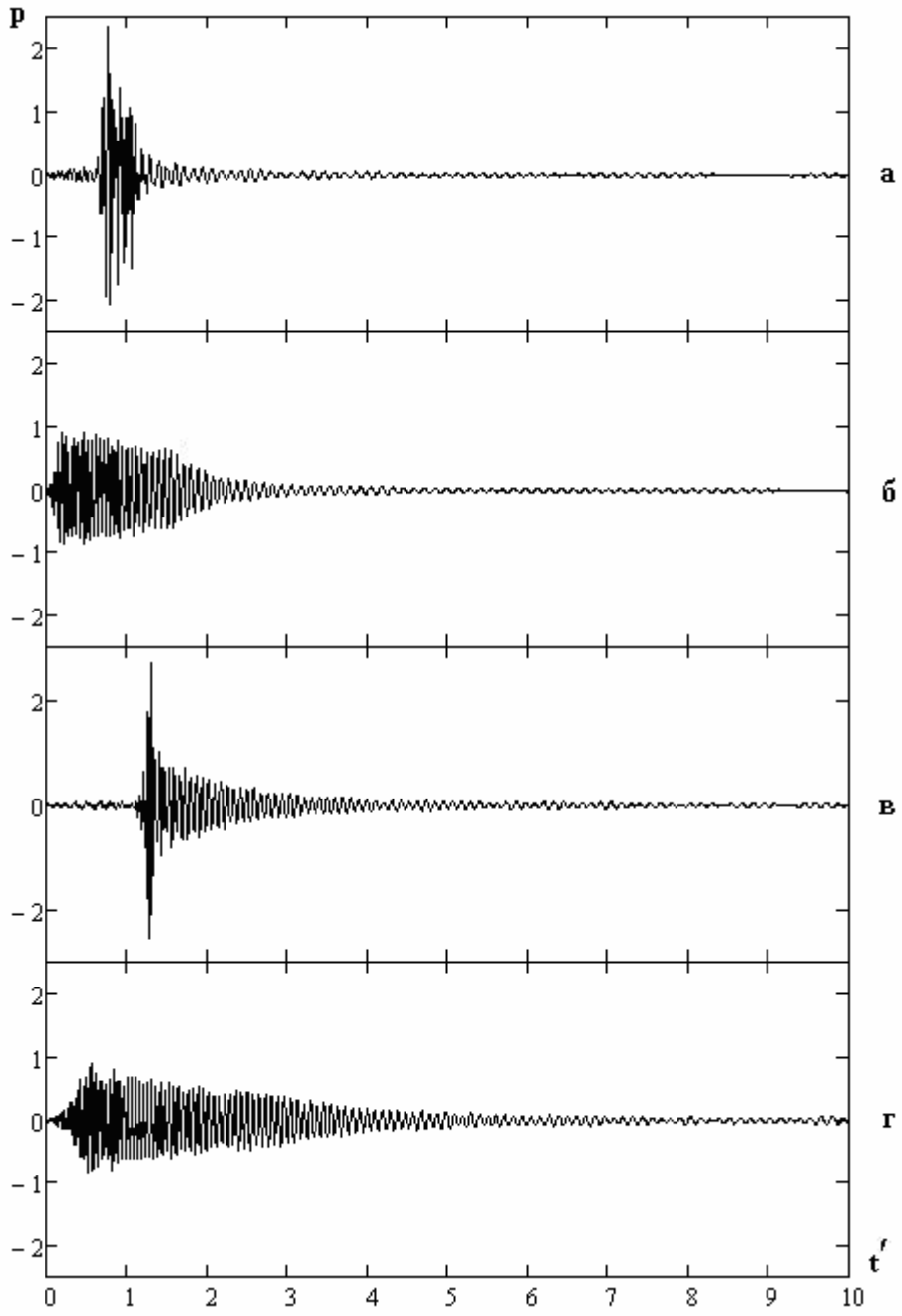


Рис. 5.38. Временные зависимости давления при распространении сигнала 2 (а, в) и сигнала 3 (б, г) в точке с координатой x'; $\omega_{кр1}/\Omega_i = 60$, $z/h = 0{,}5$: а, б - $x' = 50$, в, г - $x' = 150$

2) пространственное “размывание” импульсного сигнала 2 значительно меньше, чем для сигнала 3, при этом на относительно небольших расстояниях x' можно наблюдать сжатие во времени и пространстве сигнала 2;

3) скорость распространения переднего фронта сигнала, в котором сосредоточенная основная часть энергии, для сигнала 3 больше, чем сигнала 2.

Объяснение этим особенностям распространения сигналов 2 и 3 можно найти, анализируя частотные зависимости фазовой и групповой скоростей первой моды на рис. 5.35. Как видим, с ростом частоты первой моды ω (при $\omega > \omega_{кр1}$) групповая скорость увеличивается. Вследствие этого пространственно-временная эволюция сигнала 2, на некотором пути распространения, приводит к его “сжатию” (рис. 5.38, *а, в*). Понятно, что с увеличением пути распространения сигнала 2 дисперсия, которая по началу привела к его пространственно-временному сжатию, в дальнейшем все ж таки приведет к его “размыванию”. Для сигнала 3 имеем пространственно-временное “размывание” сигнала (рис. 5.38, *б, г*) на протяжении всего пути его распространения. Понятно, что при этом скорость переднего фронта сигнала 3 будет большей, чем сигнала 2.

Заметим, что эффект формирования резкого переднего фронта в процессе распространения частотно модулированного сигнала, который сопровождается аномальным ростом его амплитуды, хорошо известен в лазерной оптике и называется *дисперсионным фокусированием*[*]. Такой термин был введен, чтобы не путать этот эффект с геометрическим фокусированием, которое можно обеспечить, например, за счет использования параболического отражателя волн или линзы. Теперь мы можем убедиться, что дисперсионное фокусирование можно наблюдать также и в акустике.

Интересно отметить, что эффекты подобного рода наблюдаются также и при распространении гравитационных волн на морской поверхности. Неоднократно было зафиксировано, что на поверхности моря внезапно возникают аномально высокие одиночные волны, которые имеют большую разрушительную силу. Такие волны часто называют волнами-убийцами. Известные случаи, когда их столкновенье с морскими судами приводило к катастрофическим последствиям[**].

---

[*] Casperson L.V., Yariv A. Gain and dispersion focusing in a high gain laser // Appl. Opt. – 1972. – **11**, № 2. – P. 462–466.

[**] Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В. «Фрики» – морские волны-убийцы // Природа. – 2007. – № 3. – С. 14–23.

5.15.3. Распространение в волноводе импульсного сигнала с многомодовой пространственной структурой

Теперь пусть в плоскопараллельном волноводе в сечении $x = 0$ задано равномерное распределение амплитуды давления на некотором отрезке $[z_1, z_2]$ (см. рис. 5.31, *б*):

$$p(z) = \begin{cases} 1, & z = [z_1, z_2], \\ 0, & z \neq [z_1, z_2], \end{cases} \tag{5.241}$$

а временная зависимость определяется формулой (5.223), т.е. рассматриваем сигнал 1.

Представим исходное распределение давления (5.241) в виде ряда Фурье по собственным формам $g_m(z)$ мод плоскопараллельного волновода:

$$p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m g_m(z), \tag{5.242}$$

где для волновода с акустически мягкими границами $g_m(z) = \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right)$, а для волновода с акустически жесткими границами $g_m(z) = \cos\left(\frac{m\pi z}{h}\right)$; коэффициенты d_m определяются по известным формулам с использованием свойства ортогональности собственных форм $g_m(z)$ на отрезке $z = [0, h]$.

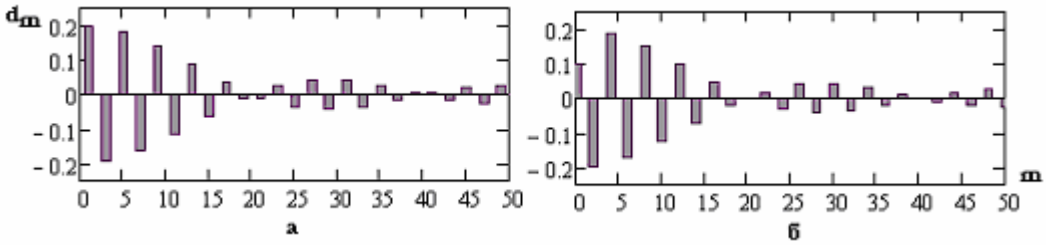


Рис. 5.39. Значение первых пятидесяти коэффициентов ряда Фурье (5.232): а - акустически мягкий волновод, б - акустически жесткий волновод

Будем считать, что функция (5.241) симметрична относительно плоскости $z = h/2$ волновода, полагая конкретно $z_1 = 0{,}45h$ и $z_2 = 0{,}55h$. На рис. 5.39 отображены значения первых пятидесяти коэффициентов d_m, $m = 0, 1, \ldots, 50$. Как видим, для волновода с акустически мягкими границами (рис. 5.39, *а*) коэффициенты $d_m = 0$, $m = 0, 2, 4, \ldots$. Для волновода с акустически жесткими

$m = 0,2,4,\ldots$. Для волновода с акустически жесткими границами (рис. 5.39, *б*) $d_m = 0$ при $m = 1,2,3,\ldots$. Понятно, что этот факт является следствием акустических свойств границ волновода и симметрии относительно плоскости $z = h/2$ функции (5.241).

Поле давления в волноводе будет иметь вид двойной суммы, а именно

$$p(x,z,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} d_m(a_k + ib_k)g_m(z)\exp\left[-i(\omega_k t - \gamma_{mk}x)\right], \quad (5.243)$$

где постоянная распространения $\gamma_{mk} = \sqrt{\dfrac{\omega_k^2}{c^2} - \left(\dfrac{m\pi}{h}\right)^2}$. Таким образом каждая m-тая собственная форма $g_m(z)$ определяет создание m-ой моды с частотами ω_k, $k = 1,2,\ldots$ и соответствующими амплитудными множителями $d_m p_k = d_m\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$. Перепишем выражение $(\omega_k t - \gamma_{mk}x)$ в формуле (5.243), используя безразмерные параметры:

$$\omega_k t - \gamma_{mk}x = k\frac{2\pi}{q}t' - k\frac{2\pi}{Nq}x'\sqrt{1 - \left(\frac{m}{k}\cdot\frac{Nq}{2h'}\right)^2}. \quad (5.244)$$

Согласно соотношению (5.244) условие того, что m-тая нормальная волна с частотою ω_k будет распространяющейся, примет вид

$$\frac{m}{k}\cdot\frac{Nq}{2h'} < 1. \quad (5.245)$$

Итак, будет ли нормальная волна однородной или неоднородной зависит (при фиксированной величине $Nq = 100$) от номера моды m, числа k, которое определяет частоту волны $\omega_k = k\Omega_i$ и волновой ширины волновода $h' = h/\lambda_0$, ($\lambda_0 = cT_0$ - длина волны на частоте ω_0).

Попробуем разобраться в особенностях волноводного распространения сигнала 1, последовательно увеличивая величину волновой ширины волновода h'. Пусть $h' = 0,7$. Введем вспомогательную функцию $G_m(k) = \dfrac{m}{k}\cdot\dfrac{Nq}{2h'}$, которая при заданных величинах m и h' ($Nq = 100$) определяет принадлежность m-той моды к однородной или неоднородной. На рис. 5.40 показаны графики функции $G_m(k)$, $m = 1,2,3,4$ от аргумента $k = \omega_k/\omega_1$. Напомним, что непарные моды ($m = 1,2,\ldots$) определяют поле в волноводе с акустически мягкими границами, а парные ($m = 0,2,4,\ldots$) – в волноводе с акустически жесткими границами. Для нулевой моды ($m = 0$) дисперсия отсутствует, т. к. она является обычной однородной плоской волной на любой частоте.

Точка пересечения кривой с прямой на уровне единицы определяет число $\xi_m = \omega_{\text{кр}m} / \omega_1$ и соответственно критическую частоту m-ой моды $\omega_{\text{кр}m}$. Таким образом волны для которых $k > \xi_m$, а значит $\omega_k > \omega_{\text{кр}m}$, будут однородными.

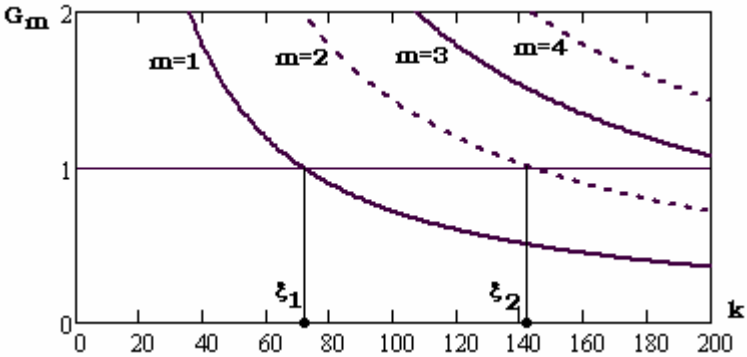


Рис. 5.40. График функции $G_m(k)$ при величине $h' = 0,7$; $m = 1,2,3,4$

Напомним, что амплитуда давления m-той моды с частотой ω_k определяется произведением $d_m p_k$, здесь коэффициенты d_m представлены на рис. 5.39 и согласно рис. 5.29, *а* девяносто процентов энергии сигнала 1 сосредоточенно в составляющих с частотами ω_k, $k = 90,91,...,100$.

Анализируя рис. 5.40, можно сделать вывод: в случае волновода с акустически мягкими границами энергонесущими будут первые моды с частотами ω_k, $k \geq 72$, (здесь $\xi_1 \approx 71,4$), а для волновода с акустически жесткими границами фактически вся энергия будет сосредоточена в нулевой моде ($\xi_0 = 0$) (вторая мода будет однородной только на частотах ω_k, $k \geq 143$, (здесь $\xi_2 \approx 142,9$)). Как следствие, звуковые поля в этих волноводах будут существенно отличаться, рис. 5.41. Действительно, если в акустически жестком волноводе дисперсионные явления практически отсутствуют (рис. 5.41, *б*), то для акустически мягкого волновода (рис. 5.41, *а*) они проявляются в полной мере.

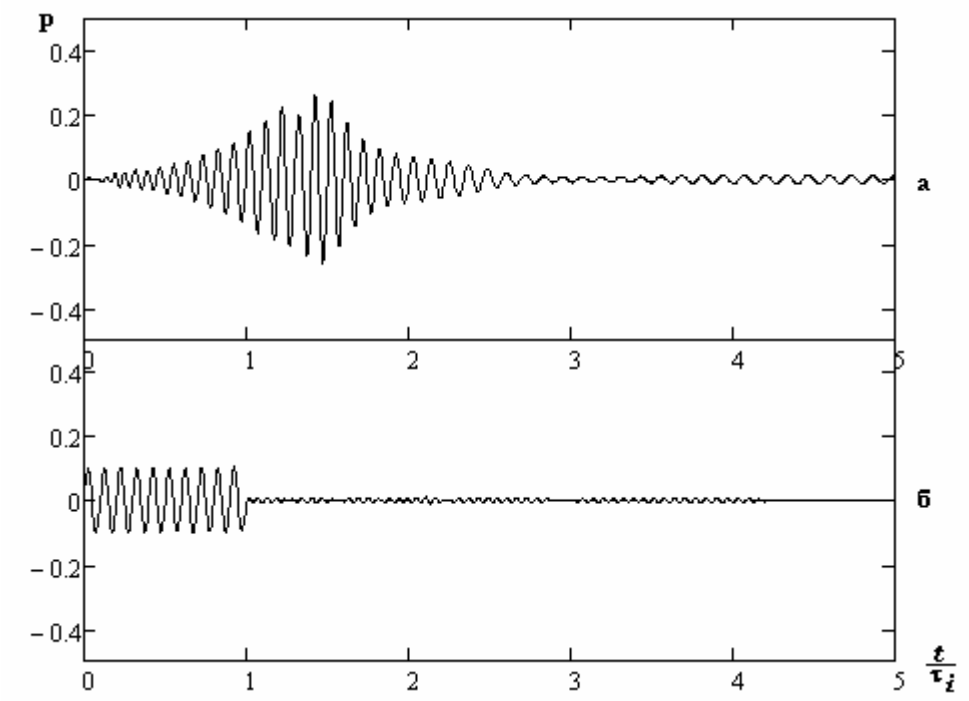


Рис. 5.41. Временная зависимость давления при распространении сигнала 1, $h' = 0,7$, $x' = 20$, $z/h = 0,5$:
а - акустически мягкий волновод, б - акустически жесткий волновод

Увеличим размер волновода до величины $h' = 1,7$ и обратимся к рис. 5.42, где представлены графики функции $G_m(k)$. Как видим, теперь волновой процесс далеко от источника возмущения ($x = 0$) практически формируют две моды: для акустически мягкого волновода - первая ($\xi_1 \approx 29,4$) и третья ($\xi_3 \approx 88,2$), а для акустически жесткого волновода – нулевая ($\xi_0 = 0$) и вторая ($\xi_2 \approx 58,8$), поскольку $\xi_4, \xi_5 > 110$. Поэтому, наряду с эффектом “размывания” сигнала, возможны и более существенные изменения формы импульсного сигнала. Иллюстрацией к сказанному являются графики на рис. 5.43. Для акустически мягкого волновода на расстоянии всего $x' = 1$ (рис. 5.43, *а*) имеем деструктивную интерференцию волн разных частот первой и третьей моды, а на расстоянии $x' = 7$ (рис. 5.43, *в*) интерференция тех же волн образовывает своеобразный “двойной” импульс. В тоже время в акустически жестком волноводе на указанных расстояниях (рис. 5.43, *б, г*) удается удержать форму исходного сигнала 1 за счет доминирования нулевой моды.

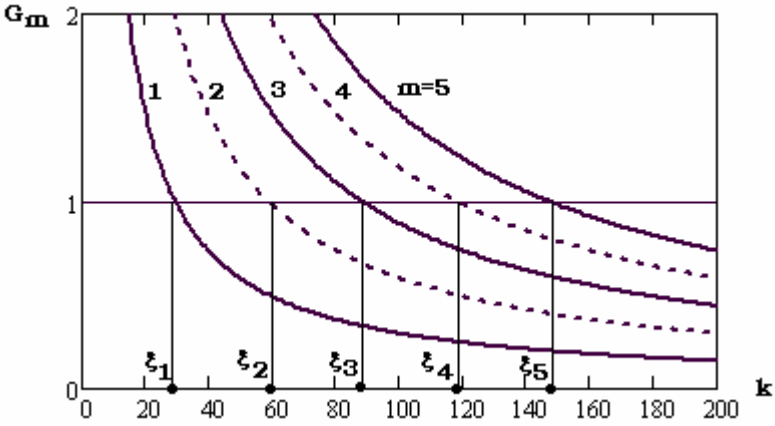


Рис. 5.42. График функции $G_m(k)$ при величине $h' = 1,7$; $m = 1,2,3,4,5$

Дальнейшее увеличение величины h' еще более усложняет анализ структурных изменений импульсного возмущения в процессе его распространения. Поскольку существенный вклад будут вносить моды более высоких номеров, то явление деструктивной интерференции можно будет наблюдать и в акустически жестком волноводе. Вообще, сохранить форму исходного сигнала в процессе его распространения в многомодовом волноводе практически невозможно.

Таким образом, при распространении импульсного сигнала в волноводе его пространственно-временная структура, вследствие дисперсии и особенности волновода как фильтра, претерпевает изменения. Представленные расчеты временных зависимостей давления в волноводе дают наглядную картину характера и степени искажения формы исходного сигнала в процессе его распространения.

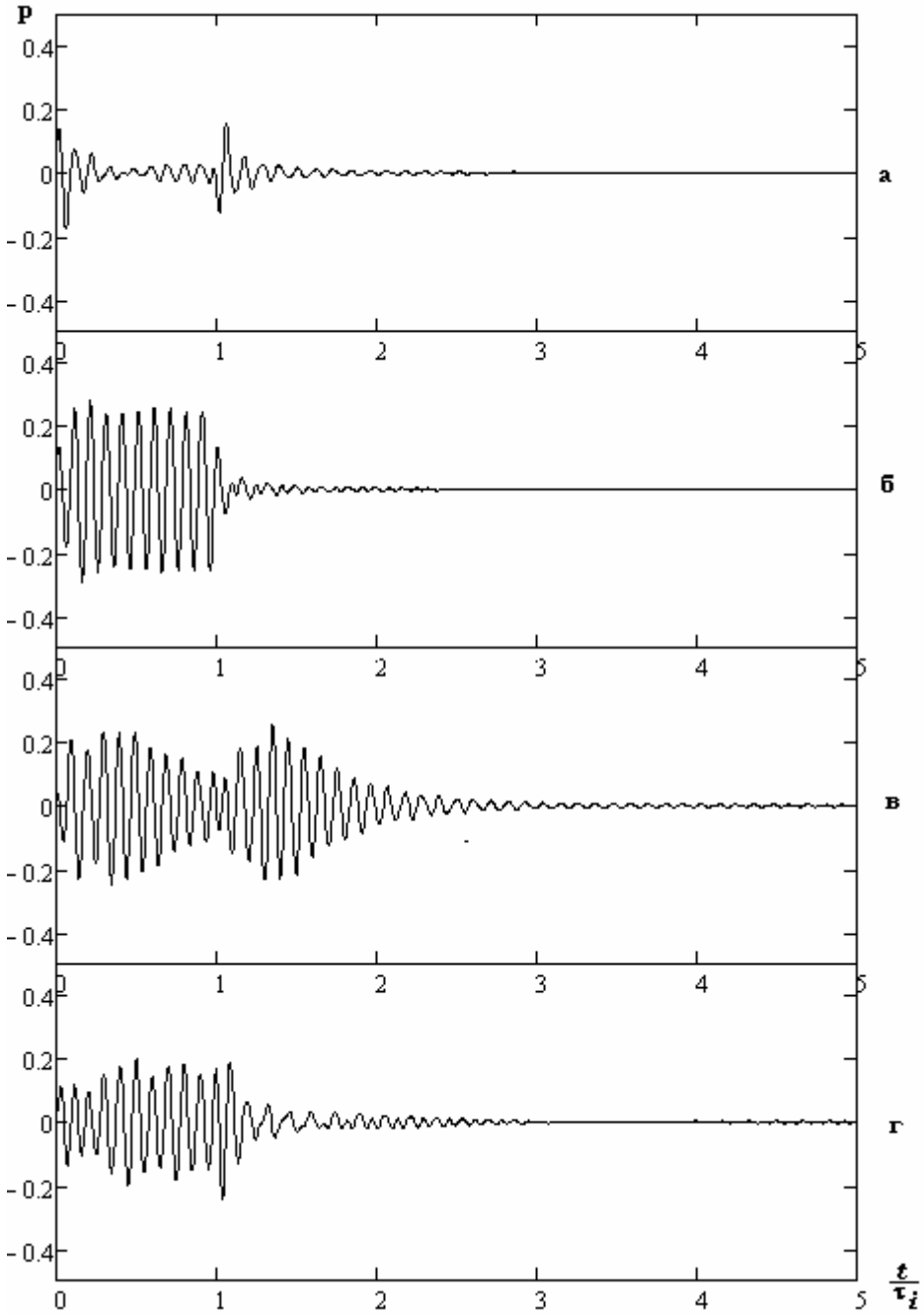


Рис. 5.43. Временные зависимости давления при распространении сигнала 1, $h' = 1{,}7$, $z/h = 0{,}5$:

а, в – акустически мягкий волновод; б, г – акустически жесткий волновод;
а, б – $x' = 1$; в, г – $x' = 7$

5.16. Особенности распространения звука в движущейся жидкости

До сих пор мы рассматривали распространения звука в неподвижной среде, т. е. при отсутствии течений. Однако есть немало практически важных ситуаций, когда акустические устройства различного назначения излучают звук в среду с течениями. Соответствующие примеры дает воздушная акустика в пространстве вне помещения, морская акустика, медицинская акустика. Как влияет движение среды на законы распространения звука? Конечно, можно предвидеть, что звуковые волны будут сноситься течением. Но это не все, ведь в движущейся жидкости давление и плотность зависят от скорости течения (точнее от векторного поля течения, которое в общем случае изменяется в пространстве и времени). От давления и плотности зависит скорость звука, поэтому при наличии течения среда становится неоднородной. Изучение данной проблемы начнем с вывода уравнений для звуковых волн в движущейся среде.

5.16.1. Уравнения звуковых волн в движущейся жидкости

Исходными, для поставленной задачи, являются общие уравнения акустики (см. раздел 4). Перепишем их с использованием *оператора Гамильтона*[*] $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$, здесь $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные орты декартовой системы координат. Таким образом, исходные нелинейные уравнения имеют вид

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla P = 0\,, \tag{5.246}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{V}) = 0\,, \tag{5.247}$$

$$P = P(\rho)\,, \tag{5.248}$$

где $P = P_0 + p$, $\rho = \rho_0 + \rho_\sim$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}$. Здесь давление P_0, плотность ρ_0 и скорость течения $\mathbf{V}_0$ определяют состояние среды при отсутствии звуковой волны. Величины $p, \rho_\sim, \mathbf{v}$ — переменные составляющие давления P, плотности ρ и скорости $\mathbf{V}$ соответственно, которые обусловлены присутствием звуковой волны в среде. Как и в разделе 4 полагаем, что имеют место такие неравенства:

$$p \ll P_0, \quad \rho_\sim \ll \rho_0, \quad \mathbf{v} \ll \mathbf{V}_0\,. \tag{5.249}$$

---

[*] Гамильтон (Hamilton) Уильям Роуан (1805-1865) — ирландский математик.

Колебательные величины $p, \rho_{\sim}, \mathbf{v}$ полагаем величинами первого порядка малости. Если они перемножаются, то образуется величина второго порядка малости. Далее будем пренебрегать величинами второго порядка малости (как мы делали при выводе волнового уравнения в разделе 4). Кроме того, ограничимся рассмотрением только таких течений, в которых скорость течения $\mathbf{V}_0$ не зависит от времени, и, кроме того, изменяется в пространстве настолько медленно, что градиент этой скорости является величиной второго порядка малости и им можно пренебрегать в сравнении с градиентом колебательной скорости в звуковой волне. Другими словами, мы ограничиваемся рассмотрением таких течений и частот звука, для которых на протяжении длины звуковой волны скорость течения изменяется очень мало. Вследствие этого можно пренебрегать также градиентами среднего давления P_0 и средней плотности ρ_0 (которые возникают именно за счет изменения скорости течения). Можно также пренебрегать градиентами величин производных от среднего давления и средней плотности, например градиентом скорости звука (см. формулы (4.17), (4.20)). Когда мы говорим, что градиентами разных величин пренебрегаем, у читателя не должно складываться впечатление, что мы полагаем эти величины постоянными. Нет, они и в дальнейшем рассматриваются как функции координат, но достаточно медленные, чтобы пространственными производными от них можно пренебрегать, если они присутствуют как члены суммы вместе с другими слагаемыми.

Перейдем к выводу уравнения звуковых волн в среде при наличии течения. Обратимся к уравнению (5.246). В нем присутствует полная производная по времени и ее следует вычислять с учетом движения среды. Итак,

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla\mathbf{V} = \frac{\partial\left(\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}\right)}{\partial t} + \left(\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}\right)\nabla\left(\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}\right) =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{V}_0\nabla\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}\nabla\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}\nabla\mathbf{v} + \mathbf{V}_0\nabla\mathbf{v}\right) \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{V}_0\nabla\mathbf{v}\,. \qquad (5.250)$$

Мы пренебрегли первыми тремя членами в скобках в соответствии с принятыми выше приближениями. Таким образом, и далее будем полагать, что вычисление полной производной по времени от некоторой величины определяется по формуле

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_0\nabla\,. \qquad (5.251)$$

Принимая во внимание формулу (5.250) и, пренебрегая градиентом среднего давления, запишем уравнение (5.246) в виде

$$\rho_0\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = 0\,. \qquad (5.252)$$

Упростим уравнение (5.247), пренебрегая градиентом средней плотности и другими величинами второго порядка:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\left(\rho\mathbf{V}\right)\approx\frac{\partial\rho_{\sim}}{\partial t}+\mathbf{V}_0\nabla\rho_{\sim}+\rho_0\nabla\mathbf{v}=\frac{d\rho_{\sim}}{dt}+\rho_0\nabla\mathbf{v}=0\,. \qquad (5.253)$$

Линеаризированное уравнение (5.248) имеет вид (см. (4.26), (4.2 7))

$$p=c^2\rho_{\sim}\,, \qquad (5.254)$$

где $c=\sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$ — скорость звука в среде.

Учитывая (5.254), перейдем от трех уравнений (5.252)-(5.254) к системе из двух уравнений:

$$\rho_0\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla p=0\,, \qquad (5.255)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt}+\rho_0\nabla\mathbf{v}=0\,. \qquad (5.256)$$

Получим из этих двух уравнений одно уравнение относительно давления. Для этого (5.255) дифференцируем по координатам (или, что то же самое, формально умножаем на оператор Гамильтона ∇), а (5.256) дифференцируем по времени (имеется в виду полная производная) и вычитаем из первого уравнения второе. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что члены $\nabla\left(\rho_0\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)$ и $\frac{d}{dt}\left(\rho_0\nabla\mathbf{v}\right)$, в рамках принятых приближений, при вычитании дают нуль. В результате получаем уравнение для звукового давления в виде

$$\Delta p-\frac{1}{c^2}\frac{d^2p}{dt^2}=0\,. \qquad (5.257)$$

Это уравнение отличается от обычного волнового уравнения (4.27) (и весьма существенно) тем, что в нем присутствует полная вторая производная по времени (которую следует вычислить по правилу (5.251)) вместо частной производной как в уравнении (4.27).

5.16.2. Волны в движущемся жидком полупространстве, возбуждаемые пространственной гармоникой

В параграфе 5.10 мы рассмотрели задачу определения звукового поля в жидком полупространстве при заданном гармоническом во времени и пространстве давлении на его поверхности. Было установлено, что в результате такого воздействия на поверхность жидкости в ней возникает плоская волна, которая распространяется вглубь жидкости под некоторым углом к поверхности, зависящем от пространственного периода гармонической составляющей давления на поверхности.

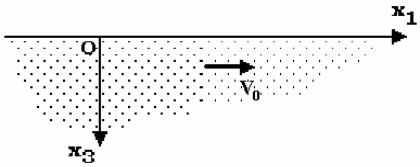


Рис. 5.44. Жидкое полупространство движется с постоянной скоростью V_0 в положительном направлении оси Ox

Рассмотрим подобную плоскую задачу, но в случае, когда жидкость движется с постоянной скоростью V_0 в положительном направлении оси Ox, которая совпадает с поверхностью жидкости (рис. 5.44). На поверхности жидкости задано давление

$$p(x,t) = \exp\left(-i(\omega t - \beta x)\right), \tag{5.258}$$

где $\beta = 2\pi / L$ — пространственная частота, L — пространственный период возбуждения на поверхности жидкой среды.

Перепишем волновое уравнение (5.257) таким образом:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dz^2} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2 p}{dt^2} = 0. \tag{5.259}$$

Будем искать его решение в виде

$$p(x,z,t) = B(z)\exp\left(-i(\omega t - \beta x)\right). \tag{5.260}$$

После подстановки (5.260) в (5.259) получим уравнение для пока неизвестно функции $B(z)$. Но вначале выясним, что представляет собой вторая производная по времени в уравнении (5.259). Обратимся к формуле (5.251) и учтем, скорость течения имеет одну компоненту (вдоль оси Ox). Тогда

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Rightarrow \left(-i\omega + i\beta V_0\right)^2 \tag{5.261}$$

и, согласно волновому уравнению (5.259), получаем

$$\frac{d^2 B}{dz^2} + \left[\left(k - \frac{\beta V_0}{c}\right)^2 - \beta^2\right] B = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \tag{5.262}$$

Общее решение уравнения (5.262), как нам уже известно, состоит из двух экспонент, в показателях которых стоит величина $\gamma = \pm\sqrt{\left(k - \frac{\beta V_0}{c}\right)^2 - \beta^2}$. Следует выбрать такой знак, который соответствует волне уходящей вглубь полупространства. Таким образом, решением уравнения (5.259) будет волна

$$p(x,z,t)=\exp\left(-i\left(\omega t-\beta x-\sqrt{\left(k-\frac{\beta V_0}{c}\right)^2-\beta^2}z\right)\right). \qquad (5.263)$$

Если $\left(k-\frac{\beta V_0}{c}\right)>\beta$, или иначе волновое число $k>\beta\left(1+\frac{V_0}{c}\right)$, то имеем однородную волну, которая распространяется в полупространстве под углом θ к оси Oz, таким что

$$\sin\theta=\frac{\beta}{k-\beta V_0/c}. \qquad (5.264)$$

Если $\left(k-\frac{\beta V_0}{c}\right)<\beta$, то волна будет неоднородной, т. е. экспоненциально затухающей вглубь полупространства.

Как видно с формулы (5.264), чем больше скорость течения, тем больше угол наклона направления распространения волны к оси Oz, т. е. волна сносится течением. При достаточно большой скорости течения $\frac{V_0}{c}>\frac{k}{\beta}-1=\frac{L}{\lambda}-1$ волна становится неоднородной.

Введем лучевую координату r, которую будем отсчитывать вдоль направления распространения волны. Относительно этой координаты волна (5.263) примет вид

$$p(r,t)=\exp\left(-i\omega t+i\left(k-\frac{\beta V_0}{c}\right)r\right). \qquad (5.265)$$

Отсюда следует, что набег фазы на фиксированном пути r равен

$$\psi=\left(k-\frac{\beta V_0}{c}\right)r \qquad (5.266)$$

и, как видим, зависит от скорости течения. Эта зависимость используется в ультразвуковых приборах для измерения скорости течения. Обратите внимание на тот факт, что частота волны (частота сигнала, который принимается в точке на расстоянии r) равна частоте излучения, т. е. в данном случае эффект Доплера не наблюдается. Это естественно, ведь излучатель и точка наблюдения не движутся один относительно другого, движется только жидкость.

5.17. Задачи

5.1. Две плоские звуковые волны — одна в воде, другая в воздухе — имеют одинаковую интенсивность. Покажите, что отношение их амплитуд давления приблизительно равняется 60. Покажи-

те, что при равенстве амплитуд давлений отношение интенсивностей приблизительно составляет 0,0003.

5.2. Определите амплитуду колебательной скорости частиц среды, амплитуду давления и интенсивность звука, если известно, что потенциал скорости определяется выражением $\varphi = 5 \cdot 10^{-3} \cos(1256t - kx)$. Среда — воздух.

Ответ: $1{,}9 \cdot 10^{-2}$ м/с, 8 Па, $7{,}6 \cdot 10^{-2}$ Вт/м^2.

5.3. Определите амплитуду перемещения частиц среды в поле плоской волны, если частота колебаний равняется 1000 Гц, а эффективное давление — 0,2 Па. Среда - воздух.

Ответ: $1{,}1 \cdot 10^{-7}$ м.

5.4. Отношение удельных акустических сопротивлений двух сред составляет 100. На плоскую границу их раздела нормально падает волна из менее жесткой среды с амплитудой давления 5 Па. Определите давление в прошедшей волне. Найдите давление в прошедшей волне, если волна с давлением 5 Па падает из более жесткой среды.

Ответ: 9,9 Па, 0,099 Па.

5.5. Какой должна быть амплитуда скорости движения излучателя плоской волны, если он создает волну с интенсивностью 10^{-4} Вт/м^2. Среда — воздух.

Ответ: $6{,}8 \cdot 10^{-4}$ м/с.

5.6. Определите отношение амплитуд колебательной скорости бегущей плоской волны в воде и воздухе при одинаковом акустическом давлении.

Ответ: 3600.

5.7. Амплитуда колебательной скорости в плоской гармонической волне в воде равняется $5 \cdot 10^{-5}$ см/с. Определите амплитуду смещения и звуковое давление на частоте 100 Гц. Как изменятся эти величины, если ту же самую колебательную скорость будет иметь волна в воздухе.

Ответ: $8 \cdot 10^{-10}$ м; 0,75 Па; $2{,}1 \cdot 10^{-4}$ Па.

5.8. Определите критический угол падения плоской волны на границу раздела масло (скорость звука 1350 м/с, плотность 850 кг/м^3) — вода. Определите коэффициент прохождения звука в воду, если угол падения равняется сорок пять градусов.

Ответ: $65{,}6^0$; 0,96.

5.9. Чем отличается отражение плоской негармонической волны от границы раздела двух сред при падении под углом $\theta > \theta_{кр}$ и $\theta < \theta_{кр}$?

5.10. Почему неоднородная волна не может существовать в бесконечном пространстве?

5.11. При угле падения волны $\theta > \theta_{кр}$ на границу раздела в другой среде возникает неоднородная волна. В ней частицы двигаются по эллипсам. Определите зависимость отношения диаметров эллипсов от угла падения θ. Постройте график этой зависимости для сред вода-воздух.

5.12. Покажите, что для чисто мнимого входного импеданса слоя звук полностью отражается от слоя.

5.13. Найдите выражение для интенсивности звука при суперпозиции двух плоских гармонических волн одинаковой частоты, которые имеют интенсивности I_1 и I_2 и разность фаз α, в случае одинакового направления обеих волн; противоположного направления волн.

Ответ: $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\alpha$, $I = I_1 - I_2$.

5.14. Самолет летит к вертикальной скале со скоростью, которая равна половине скорости звука, и излучает короткие тональные отрезки (цуги) с частотой 1000 Гц. Найдите частоту эхо-сигнала, отраженного от скалы.

Ответ: 3000 Гц.

5.15. Скорость потока крови в аорте приблизительно равняется 0,28 м/с. Вдоль потока направляют ультразвуковые волны с частотой 4,2 Мгц. Эти волны отражаются от эритроцитов. Какой будет частота отраженной волны? Считайте, что скорость звука в крови равняется скорости звука в воде.

Ответ: 1,6 кГц.

5.16. Определите ослабление звука с частотой 1000 Гц при прохождении по нормали сквозь стальную пластину толщиной 2,54 см, которая разделяет два резервуара с водой.

Ответ: 0,86.

5.17. Из воды нормально к границе раздела вода-дно моря набегает плоская гармоническая волна. Определите скорость звука в среде дна моря, если согласно измерениям звукового поля отношения максимума к минимуму звукового давления равняется 3,16, а первый минимум размещен на расстоянии четверти длины волны от поверхности дна. Плотность донной среды — 2,2 г/см^3.

Ответ: 2160 м/с.

5.18. Найдите решение задачи 5.17 при условии, что первый минимум расположен на поверхности дна.

Ответ: 216 м/с.

5.19. Определите фазовую скорость гармонической с частотой ω неоднородной волны, которая распространяется вдоль плоской гра-

ницы, если известно, что при отдалении от границы на расстояние l амплитуда волны уменьшается в e раз.

Ответ: $\upsilon_{\text{ф}} = \dfrac{c}{\sqrt{1+(kl)^{-2}}}$, где $k = \dfrac{\omega}{c}$, c — скорость звука.

5.20. На одном конце ($x = 0$) трубы (длина 30 см, площадь сечения 10 см^2) размещен поршень, который создает в трубе гармоническое звуковое поле. На втором конце ($x = 30$ см) трубы, которая заполнена воздухом, размещена заглушка. Измерение звукового давления показало, что в точках $x = 3$, 15, 27 см имеем максимум амплитуды давления, которое равняется 1 Па. Минимальная амплитуда давления составляет 0,657 Па и наблюдается в точках $x = 9$, 21 см. Найдите входное сопротивление заглушки и частоту звука.

Ответ: $420\dfrac{1-i0{,}207}{1+i0{,}207}$, 1440 Гц.

5.21. Для данных волновых уравнений получите дисперсионные уравнения:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 u = 0$, б) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} - \alpha\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$,

в) $i\dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Ответ: а) $\omega^2 = \omega_0^2 + c^2k^2$, б) $\omega = ck - \alpha k^3$, в) $\omega = \alpha k^2$.

5.22. Определите гармоническое звуковое поле в полупространстве $z > 0$, если на плоскости $z = 0$ оно имеет след в виде двойного ряда Фурье:

$$p(x,y) = \sum_m\sum_n g_{mn}\exp(im\xi x + in\eta y).$$

Ответ: $p(x,y,z) = \sum_m\sum_n g_{mn}\exp\left(im\xi x + in\eta y + i\sqrt{k^2-(m\xi)^2-(n\eta)^2}\,z\right)$.

5.23. Плоская гармоническая волна падает под углом θ на плоский слой толщиной h, который опирается на акустически жесткую поверхность. Среда слоя представляет собой пористую структуру из капилляров, которые перпендикулярны к поверхностям слоя. Ширина капилляров мала по сравнению с их глубиной h и длиной волны λ. Пренебрегая потерями энергии на стенках капилляров вследствие трения, определите коэффициент отражения по давлению.

Ответ: $V = \dfrac{i\operatorname{ctg}(kh)\cos\theta - 1}{i\operatorname{ctg}(kh)\cos\theta + 1}$, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

5.24. Согласно условию задачи 5.23 плоская гармоническая волна падает в воздухе под углом $\theta = 60°$ на границу пористой среды с капиллярами. Определите коэффициент отражения от такой структуры на частоте 1000 Гц, если $h = 1$ см.

Ответ: $V = |V|\exp(-i\varepsilon)$, $|V| = 1$, $\varepsilon = 0{,}72$.

5.25. Покажите, что полное отражение от поглощающей среды невозможно.

5.26. Камертон звучит и приближается к стене со скоростью 25 см/с. Неподвижный наблюдатель, который воспринимает одновременно прямой и отраженный сигналы, слышит биение с частотой 3 Гц. Определите частоту колебаний камертона.

Ответ: приблизительно 2 кГц.

5.27. Вычислите критические частоты первых трех мод (не считая нулевой) для плоского волновода с идеально жесткими границами толщиной 10 см. Среда волновода — воздух. Будут ли возбуждаться эти моды звуком с частотой 1, 5, 10 кГц? Постройте дисперсионные кривые для фазовой и групповой скоростей указанных мод.

Ответ: звук с частотой 1 кГц не возбуждает ни одну моду; 5 кГц возбуждает первую и другу моды; 10 кГц возбуждает все три моды, а также четвертую и пятую.

5.28. Определите для мод, которые рассматриваются в задаче 5.27, направление лучей, вдоль которых распространяются плоские волны (с их помощью можно представить соответствующую моду (см. рис. 5.25)). В волноводе возбуждается звук частотой 5 кГц.

Ответ: наклон лучей к границам волновода для первой моды составляет приблизительно 20°, а для второй — 43°.

5.29. Слой воды толщиной 15 м находится над идеально жестким плоским дном. Вычислите критические частоты для первых двух нормальных волн.

Ответ: 25 Гц, 75 Гц.

РАЗДЕЛ 6

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Вот уж форма затвердела,
Обожженная огнем.
Веселей, друзья, за дело —
Выльем колокол! Начнем!
...
Пусть раздастся громче, шире
Первый звон его в Мире!

Ф. Шиллер[*]

"Математика тензоров особенно полезна для описания свойств веществ, которые изменяются с направлением, хотя это лишь один из примеров ее использования. Поскольку большинство из вас не собираются стать физиками, а намерены заниматься *реальным миром*, где зависимость от направления весьма сильная, то рано или поздно, но вам понадобится использовать тензор." Такую мысль высказывает Фейнман в своих лекциях [56, вып. 7, с. 24], где речь идет о физике сплошной среды. При исследовании напряженного состояния твердого тела понятия "тензора" действительно является очень полезным. В связи с этим, целесообразно, в начале раздела привести некоторые сведения из теории тензоров [1].

6.1. Некоторые сведения из теории тензоров

В акустике, и в физике вообще, приходится иметь дело с физическими величинами разной математической природы. Это отличие проявляется в характере их аналитического представления и в законах его преобразования при переходе от одной системы координат к другой.

Простейшими физическими величинами, с точки зрения математически, являются *скалярные* величины, например масса тела, объем тела, длина вектора, давление и т.п. Такие величины являются *инвариантными* (от латин-

[*] Шиллер (Schiller) Иоганн Кристоф Фридрих (1759—1805) — немецкий поэт, драматург, историк.

ского слова *invarians* — неизменный) относительно преобразования координат. Каждая такая скалярная величина в любой системе координат выражается одним числом, причем это число не зависит от выбора системы координат.

Далее по сложности математической природы можно указать на *векторные* величины, например скорость, ускорение, сила и т.п. Векторная величина в трехмерном пространстве определяется тремя числами — тремя проекциями вектора на оси системы координат, или, как говорят, тремя координатами вектора в данном базисе. Напомним, что *базисом* системы координат называют тройку единичных векторов, размещенных в определенном порядке и приложенных к точке O — началу системы координат. В качестве примера на рис. 6.1 показана декартова система координат с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ($|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$).

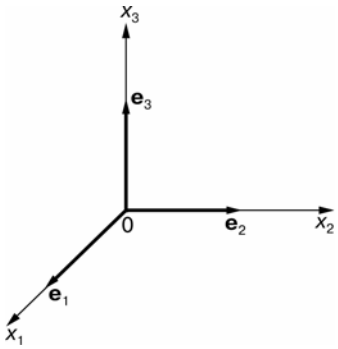


Рис 6.1. Декартова система координат с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

После векторов по сложности математической природы идут физические величины, которые называют *тензорами*. В качестве иллюстрации нового понятия рассмотрим связь между вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и вектором плотности тока $\mathbf{j}$ в проводнике. Пусть имеем однородный и изотропный проводник (однородность означает одинаковые свойства проводника в любой точке, а изотропность — независимость свойств от направления). Тогда согласно закону Ома* вектор $\mathbf{j}$ параллелен вектору $\mathbf{E}$ (рис. 6.2, *а*), а модуль $\mathbf{j}$ — пропорционален модулю $\mathbf{E}$. Таким образом, можно записать

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{6.1}$$

где σ — скалярный множитель ($\sigma > 0$), который называют удельной проводимостью. Если выбрать в пространстве некоторый базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и разложить по нему векторы $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ и $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$:

* Ом (Ohm) Георг Симон (1787—1854) — немецкий физик.

$$\mathbf{E} = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{j} = j_1\mathbf{e}_1 + j_2\mathbf{e}_2 + j_3\mathbf{e}_3, \tag{6.2}$$

то равенство (6.1) можно заменить эквивалентной системой трех скалярных уравнений:

$$j_1 = \sigma E_1, \quad j_2 = \sigma E_2, \quad j_3 = \sigma E_3. \tag{6.3}$$

Каждая компонента **j** пропорциональна соответствующей компоненте **E** с одинаковым коэффициентом пропорциональности σ.

Если проводником является кристалл, то соотношение между компонентами **j** и **E** не будет таким простым, поскольку в общем случае электропроводность кристалла анизотропная. Оказывается, что для кристаллов соотношения (6.3) заменяется такими уравнениями:

$$\begin{aligned} j_1 &= \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3, \\ j_2 &= \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3, \\ j_3 &= \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3, \end{aligned} \tag{6.4}$$

где σ_{11}, σ_{12}, ... — постоянные. Как видим, каждая компонента **j** линейно зависит от трех компонент **E**. Отсюда следует, что вектор **j** не совпадает по направлению с **E** (рис. 6.2, *б)*. Каждый коэффициент в уравнениях (6.4) имеет определенный физический смысл. Например, коэффициент σ_{31} определяет компоненту **j**, которая параллельна оси Ox_3, когда поле **E** имеет составляющую вдоль оси Ox_1.

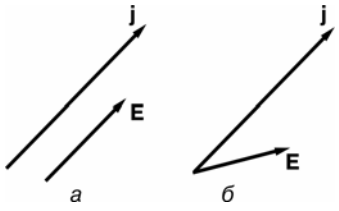


Рис. 6.2. Соотношение между векторами плотности тока **j** и напряженности электрического поля **E**:
а — в изотропном проводнике, *б* — в анизотропном проводнике

Таким образом, чтобы определить электропроводность кристалла, нужно задать девять коэффициентов σ_{11}, σ_{12},... Совокупность этих коэффициентов представляет собой *тензор проводимости* кристалла, а постоянные σ_{ik}, i, $k = 1,2,3$, называют *координатами тензора* в данном базисе. Подобно тому, как три величины (E_1, E_2, E_3) образуют вектор **E**, будем говорить, что девять величин (σ_{11}, σ_{12},...)образуют тензор (σ_{ik}). Укажем, что, в отличие от вектора, тензору нельзя дать простое геометрическое толкование.

В определение тензора, которое будет дано ниже, входит процедура преобразования его координат при переходе от одного базиса к

другому, поэтому в следующем параграфе напомним формулы перехода от одного нормированного ортогонального базиса к другому.

6.1.1. Формулы перехода от одного ортогонального базиса к другому

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве заданы два произвольных ортогональных нормированных базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ с общим началом в некоторой точке. Согласно определению ортогонального нормированного базиса имеем такие соотношения для скалярных произведений базисных векторов:

$$\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \delta_{jk}, \quad \mathbf{e}'_j \mathbf{e}'_k = \delta_{jk}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases} \tag{6.5}$$

Базисы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ будем условно называть старым и новым. Разложив векторы нового базиса по старому, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{6.6}$$

или, коротко,

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\mathbf{e}_j, \quad i = 1,2,3. \tag{6.7}$$

Часто при работе с тензорами, для компактной записи, используют правило суммирования (его предложил Эйнштейн): если в одном и том же члене выражения индекс встречается два раза, то автоматически проводим суммирование по этому индексу. Тогда, выражение (6.7) можно переписать в виде

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_{ij}\mathbf{e}_j, \quad i, j = 1,2,3. \tag{6.8}$$

Индекс j в формуле (6.8) называют *индексом суммирования* (*немым индексом*). Понятно, что для немого индекса можно использовать любую букву (например, $\mathbf{e}'_i = \alpha_{ij}\mathbf{e}_j = \alpha_{ik}\mathbf{e}_k$). Индекс i в уравнениях (6.8) является *свободным индексом.*

Матрица

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \end{Vmatrix} \tag{6.9}$$

называется *матрицей перехода* от старого базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к новому базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

Определим свойства этой матрицы. Умножим вектор $\mathbf{e}'_i = \alpha_{i1}\mathbf{e}_1 + \alpha_{i2}\mathbf{e}_2 + \alpha_{i3}\mathbf{e}_3$ скалярно на вектор $\mathbf{e}'_j = \alpha_{j1}\mathbf{e}_1 + \alpha_{j2}\mathbf{e}_2 + \alpha_{j3}\mathbf{e}_3$ (или, коротко, $\mathbf{e}'_i = \alpha_{ik}\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{e}'_j = \alpha_{je}\mathbf{e}_e$). Принимая во внимание (6.5), получаем

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \alpha_{i3}\alpha_{j3} = \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}, \tag{6.10}$$

т.е., сумма квадратов элементов любой строки матрицы равняется единице, а сумма произведения соответствующих элементов двух разных строк матрицы равняется нулю. Матрица $\|\alpha_{ij}\|$, для которой выполняется условие (6.10), называется *ортогональной*. Таким образом, матрица перехода от одного ортогонального нормированного базиса к другому является ортогональной.

Умножив скалярно (6.7) на $\mathbf{e}_k$, найдем

$$\mathbf{e}'_i\mathbf{e}_k = \alpha_{ik}. \tag{6.11}$$

Очевидно, $\alpha_{ik} = \mathbf{e}'_i\mathbf{e}_k = \cos\left(\mathbf{e}'_i \wedge \mathbf{e}_k\right)$ есть косинус угла между осью Ox_i новой системы координат и осью Ox_k старой системы координат. Хотя $\cos\left(\mathbf{e}'_i \wedge \mathbf{e}_k\right) = \cos\left(\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}'_i\right)$, но порядок индексов в α_{ik} важен: первый индекс соответствует новому базису, а второй — старому. Понятно, что $\alpha_{ik} \neq \alpha_{ki}$.

Теперь разложим векторы старого базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ по новому базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}'_1 + \alpha_{21}\mathbf{e}'_2 + \alpha_{31}\mathbf{e}'_3,\\
\mathbf{e}_2 &= \alpha_{12}\mathbf{e}'_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}'_2 + \alpha_{32}\mathbf{e}'_3,\\
\mathbf{e}_3 &= \alpha_{13}\mathbf{e}'_1 + \alpha_{23}\mathbf{e}'_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}'_3,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

где

$$\alpha_{ji} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}'_j = \cos\left(\mathbf{e}'_j \wedge \mathbf{e}_i\right) \tag{6.13}$$

или более компактно

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji}\mathbf{e}'_j = \alpha_{ji}\mathbf{e}'_j. \quad i = 1,2,3. \tag{6.14}$$

Матрица перехода от нового базиса к старому имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{21}\alpha_{31} \\ \alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{32} \\ \alpha_{13}\alpha_{23}\alpha_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (6.15)$$

Как видим, матрица (6.15) получается из матрицы (6.9) заменой строк на столбцы. Такая матрица называется *транспонированной.*

6.1.2. Определение ортогонального тензора

При построении формальной теории тензоров оказывается, что скалярные величины и векторы можно включить в число тензоров. Так, скалярная величина L, инвариантная относительно перехода от одного ортогонального нормированного базиса к другому, называется ортогональным тензором нулевого ранга. Температура, масса, длина вектора, давление являются ортогональными тензорами нулевого ранга. Проекция вектора, скажем, на первую координатную ось является скалярной величиной, не инвариантной относительно перехода от одного базиса к другому, поэтому она не является тензором нулевого ранга.

Представив вектор как тензор, можно дать такое определение. Пусть величина L определяется в произвольном ортогональном нормированном базисе тремя числами: в базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ числами L_1,L_2,L_3, в базисе $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$ числами L'_1,L'_2,L'_3 и т.д. Если при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$ эти числа преобразуются в соответствии с формулами

$$L'_i = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} L_k \equiv \alpha_{ik} L_k, \qquad (6.16)$$

где $\|\alpha_{ik}\|$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$, то величину L называют ортогональным тензором первого ранга и обозначают символом (L_i), т.е. $L \equiv (L_i)$. Числа L_i, $i = 1,2,3$, называют *координатами тензора* L в базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$, а числа L'_i, $i = 1,2,3$, соответственно, — координатами этого тензора в базисе $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$.

Покажем, что любой вектор $\mathbf{x}$ является ортогональным тензором первого ранга. Разложим $\mathbf{x}$ по базисам $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3. \qquad (6.17)$$

Умножив (6.17) скалярно на $\mathbf{e}'_i$, и учитывая (6.5) и (6.11), получим

$$x'_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}x_k, \quad i = 1,2,3. \tag{6.18}$$

Формулы (6.18) имеют такой же вид, что и формулы (6.16). Таким образом, вектор **x** является ортогональным тензором первого ранга. Очевидно, каждый ортогональный тензор первого ранга можно рассматривать как вектор.

Согласно формуле (6.17) соответственно имеем

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji}x'_j, \quad i = 1,2,3. \tag{6.19}$$

Сформулируем теперь определение тензора второго ранга. Пусть величина L определяется в каждом ортогональном нормированном базисе девятью числами: в базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ числами L_{ij}, $i, j = 1,2,3$, в базисе $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$ числами L'_{ij}, $i, j = 1,2,3$ и т.д. Если при переходе от одного любого базиса $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ к другому любому базису $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$ эти числа преобразуются по формулам

$$L'_{ij} = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} \alpha_{im}\alpha_{jn}L_{mn}, \quad i, j = 1,2,3, \tag{6.20}$$

где $\|\alpha_{ij}\|$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$, то величину L называют ортогональным тензором второго ранга и обозначают символом (L_{ij}), т.е. $L \equiv (L_{ij})$. Числа L_{ij}, $i, j = 1,2,3$, называют координатами тензора L в базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$, а числа L'_{ij}, $i, j = 1,2,3$, — его координатами в базисе $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$.

Аналогично формулируется определение ортогонального тензора произвольного ранга p, который определяется совокупностью 3^p чисел (для тензора второго ранга $p = 2$). Пусть величина L определяется в каждом ортогональном базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ совокупностью 3^p чисел: $L_{i_1i_2\ldots i_p}$, $i_s = 1,2,3$; $s = 1,2,\ldots,p$. Если при переходе к любому другому ортогональному нормированному базису $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$ эти числа преобразуются по закону

$$L'_{i_1i_2\ldots i_p} = \alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2}\alpha_{i_3j_3}\ldots\alpha_{i_pj_p}L_{j_1j_2\ldots j_p}, \tag{6.21}$$

где $\|\alpha_{ij}\|$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$, то величину L называют ортогональным тензором p-го ранга и обозна-

чают символом $\left(L_{i_1 i_2 \ldots i_p}\right)$, т.е. $L \equiv \left(L_{i_1 i_2 \ldots i_p}\right)$. Числа $L_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, называют координатами тензора L в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, а числа $L'_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ — его координатами в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

В определениях мы ограничились лишь множеством ортогональных нормированных базисов и определили соответствующие им ортогональные тензоры. Поскольку никакие другие тензоры, кроме ортогональных, не будут рассматриваться, то дальше всюду они называются просто *тензором*. Отметим также, что определения сформулированы для трехмерного пространства. Аналогично их можно сформулировать и для N-мерного пространства, но это нам не понадобится.

6.1.3. Связь между тензорами второго ранга и линейными операторами

Напомним, что *линейным оператором* или *линейной вектор-функцией* называется функция

$$\mathbf{y} = L(\mathbf{x}), \tag{6.22}$$

которая каждому вектору $\mathbf{x}$ ставит в соответствие вектор $\mathbf{y}$ и для которой выполняется равенство

$$L\left(C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2\right) = C_1 L\left(\mathbf{x}_1\right) + C_2 L(\mathbf{x}_2) \tag{6.23}$$

при любых $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ и любых постоянных C_1 и C_2.

Пусть для некоторого вектора $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$, $i = 1,2,3$, имеем

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} x_i L\left(\mathbf{e}_i\right) \equiv x_i L\left(\mathbf{e}_i\right). \tag{6.24}$$

Разложим векторы $L(\mathbf{e}_1)$, $L(\mathbf{e}_2)$, $L(\mathbf{e}_3)$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$L\left(\mathbf{e}_j\right) = L_{kj}\mathbf{e}_k, \quad j,k = 1,2,3. \tag{6.25}$$

Коэффициенты L_{kj} называют координатами оператора L в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Умножим скалярно обе части уравнения (6.25) на $\mathbf{e}_i$. Принимая во внимание (6.5), получаем

$$L_{ij} = \mathbf{e}_i L\left(\mathbf{e}_j\right), \quad i,j = 1,2,3. \tag{6.26}$$

Аналогично для координат оператора L в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ имеем

$$L'_{ij} = \mathbf{e}'_i L\left(\mathbf{e}'_j\right), \quad i,j = 1,2,3. \tag{6.27}$$

Подставляя в формулу (6.27) выражения

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_{im}\mathbf{e}_m, \quad \mathbf{e}'_j = \alpha_{jn}\mathbf{e}_n, \tag{6.28}$$

и учитывая соотношение (6.26), находим

$$L'_{ij} = \mathbf{e}'_i L\left(\mathbf{e}'_j\right) = \alpha_{im}\mathbf{e}_m \alpha_{jn} L(\mathbf{e}_n) = \alpha_{im}\alpha_{jn}\mathbf{e}_m L(\mathbf{e}_n) = \alpha_{im}\alpha_{jn}L_{mn}. \tag{6.29}$$

Формулы (6.29) совпадают с формулами (6.20); итак, показано, что линейный оператор L является тензором второго ранга. Можно также доказать, что каждому тензору второго ранга (L_{ij}) однозначно ставится в соответствие линейный оператор. Такое представление тензора второго ранга широко используется в физике. Возможно и другое интересное представление тензора, которое рассмотрим в следующем параграфе.

6.1.4. Связь между тензорами и инвариантными полилинейными формами

Пусть задана тройка чисел b_1, b_2, b_3, причем эти числа при переходе от одной системы координат к другой преобразуются так, что величина $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$, где x_1, x_2, x_3 — координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$, остается инвариантной. Выражение $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$, обладающее таким свойством, называют *линейная форма*. Тогда величины b_i, $i = 1,2,3$, образуют тензор первого ранга. Убедимся в этом.

Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеем вектор $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$ и коэффициенты линейной формы b_i, $i = 1,2,3$, а в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ — тот же вектор $\mathbf{x} = x'_i\mathbf{e}'_i$ и коэффициенты линейной формы b'_i, $i = 1,2,3$. Если линейная форма инвариантна, то

$$b'_i x'_i = b_k x_k, \quad i,k = 1,2,3. \tag{6.30}$$

Подставим в правую часть (6.30) выражение $x_k = \alpha_{ik}x'_i$ (см. (6.19)), тогда имеем

$$b'_i x'_i = (\alpha_{ik}b_k)x'_i. \tag{6.31}$$

Отсюда

$$b'_i = \alpha_{ik}b_k, \quad i,k = 1,2,3. \tag{6.32}$$

Как видим, коэффициенты линейной формы b_1, $i = 1,2,3$, преобразуются при переходе от одной системы координат к другой как координаты тензора первого ранга (см. (6.16)).

Аналогично, коэффициенты инвариантной *билинейной формы*

$$b_{ij}x_i y_j, \quad i,j = 1,2,3, \tag{6.33}$$

где x_i и y_j — координаты некоторых векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, образуют тензор второго ранга. Действительно, пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ билинейна форма имеет вид (6.33), а в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ — вид $b'_{ij} x'_i y'_j$ и пусть

$$b'_{ij} x'_i y'_j = b_{mn} x_m y_n \tag{6.34}$$

для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Подставив в правую часть уравнения (6.34) выражение старых координат векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ через новые:

$$x_m = \alpha_{im} x'_i, \;\; y_n = \alpha_{jn} y'_j, \tag{6.35}$$

получим

$$b'_{ij} x'_i y'_j = b_{mn} \alpha_{im} x'_i \alpha_{jn} y'_j = (\alpha_{im} \alpha_{jn} b_{mn}) x'_i y'_j . \tag{6.36}$$

Отсюда имеем соотношение

$$b'_{ij} = \alpha_{im} \alpha_{jn} b_{mn}, \tag{6.37}$$

которое и требовалось доказать (см. (6.20)). Аналогично совокупность коэффициентов инвариантной полилинейной формы ранга $p \geq 1$ образует тензор p-го ранга.

Билинейна форма называется *симметричной*, если $b_{ij} = b_{ji}$. Положив в симметричной билинейной форме $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, получим так называемую *квадратичную форму*:

$$b_{ij} x_i x_j , \quad b_{ij} = b_{ji} , \quad i, j = 1, 2, 3 . \tag{6.38}$$

Коэффициенты b_{ij} инвариантной квадратичной формы образуют *симметричный тензор второго ранга* (b_{ij}), т. е. тензор для которого имеет место соотношение $b_{ij} = b_{ji}$. Таким образом, если имеем симметричный тензор (b_{ij}), то он определяет единственную квадратичную форму $b_{ij} x_i x_j$.

Пусть имеем (b_{ik}) — симметричный тензор второго ранга. Образуем с его помощью квадратичную форму $b_{ij} x_i x_j$ и рассмотрим совокупность векторов $\mathbf{x}$, которые удовлетворяют условию

$$b_{ij} x_i x_j = 1. \tag{6.39}$$

В развернутом виде выражение (6.39) запишется так:

$$b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + 2 b_{12} x_1 x_2 + 2 b_{13} x_1 x_3 + 2 b_{23} x_2 x_3 = 1. \tag{6.40}$$

Уравнение (6.40) является уравнением поверхности второго порядка, которую называют *характеристической поверхностью тензора* (b_{ij}). В частном случае, когда все $b_{ij} > 0$, получим уравнение эллипсоида. Известно [8], что поворотом осей координат уравнение поверхности

второго порядка, которое не имеет первых степеней x_i, можно привести к каноническому виду:

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = 1, \tag{6.41}$$

где x_1', x_2', x_3' координаты вектора **x** в новой системе координат. При повороте системы координат компоненты тензора (b_{ij}) также преобразуются в (b_{ij}') и, таким образом, инвариантная квадратичная форма будет иметь вид

$$b_{ij}' x_i' x_j' = 1. \tag{6.42}$$

Сравнивая (6.41) и (6.42), видим, что в новой системе координат

$$b_{11}' = \lambda_1, \ b_{22}' = \lambda_2, \ b_{33}' = \lambda_3,$$
$$b_{ij}' = 0 \ \text{при} \ i \neq j. \tag{6.43}$$

Другими словами, тензор приобретает диагональный вид. При этом направления осей новой системы координат называют *главными направлениями тензора* (b_{ij}), а λ_u — *главными значениями.*

Пусть теперь вектор **y** коллинеарен любому главному направлению, например, первому. Тогда в системе координат, оси которой совпадают с главными направлениями тензора, преобразование $b_{ij}' y_j$ удлиняет вектор **y** в λ_1 раз. Понятно, что это свойство не должно зависеть от выбора системы координат. Поэтому для вектора **y** = (y_1, y_2, y_3), который совпадает с первым главным направлением тензора, в произвольной системе координат преобразование $b_{ij}y_j$ будет иметь вид $\lambda_1 y_i$, i = 1,2,3.

Приведенные соображения дают возможность определить главные значения и главные направления тензора второго ранга. Для этого нужно найти такие значения λ, при которых однородная система уравнений

$$b_{ij} y_j = \lambda y_i \quad \text{или} \quad (b_{ij} - \delta_{ij}\lambda) y_j = 0, \quad i, j = 1,2,3, \tag{6.44}$$

имеет нетривиальное решение, т.е. те значения λ, при которых равен нулю определитель системы (6.44):

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{6.45}$$

Уравнение (6.45) является уравнением третьей степени относительно λ, три его корня λ_i, i = 1,2,3, будут искомыми главными значениями тензора. Известно, что главные значения действительного симметричного тензора второго ранга всегда являются действитель-

ными числами. Далее последовательно подставляем каждое λ_i, $i = 1,2,3$, в систему уравнений (6.44). Соответствующее для каждого λ_i, $i = 1,2,3$ решение системы (6.44) в виде трех чисел $y_k^{(i)}$, $i,k = 1,2,3$, определяет компоненты вектора $y^{(i)} = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, y_3^{(i)})$, который коллинеарен одному из главных направлений.

Теперь покажем, что три главные направления тензора являются ортогональными. Пусть три главных значения различны по величине: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Рассмотрим два главных направлений, например, $y_k^{(1)}$, что отвечает λ_1 и $y_k^{(2)}$, соответственно, λ_2. Поскольку $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}$ являются решениями системы уравнений (6.44), то $b_{ik}y_k^{(1)} = \lambda_1 y_i^{(1)}$ и $b_{ik}y_k^{(2)} = \lambda_2 y_i^{(2)}$. Умножим первую группу уравнений на $y_i^{(2)}$, а вторую — на $y_i^{(1)}$:

$$b_{ik}y_k^{(1)}y_i^{(2)} = \lambda_1 y_i^{(1)}y_i^{(2)},$$

$$b_{ik}y_k^{(2)}y_i^{(1)} = \lambda_2 y_i^{(2)}y_i^{(1)}, \quad i,k = 1,2,3. \tag{6.46}$$

Вследствие симметрии тензора $b_{ik} = b_{ki}$ левые части уравнений (6.46) будут одинаковыми. Отсюда имеем

$$(\lambda_1 - \lambda_2)y_i^{(1)}y_i^{(2)} = 0, \tag{6.47}$$

что приводит (напомним, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$) к условию ортогональности векторов $\mathbf{y}^{(1)}$ и $\mathbf{y}^{(2)}$: $y_i^{(1)}y_i^{(2)} = \mathbf{y}^{(1)}\mathbf{y}^{(2)} = 0$ (два вектора ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю). Аналогично можно доказать, что $\mathbf{y}^{(1)} \perp \mathbf{y}^{(3)}$ и $\mathbf{y}^{(2)} \perp \mathbf{y}^{(3)}$. Можно показать, что три взаимно перпендикулярные главные направления существуют и в случае, когда уравнение (6.45) имеет кратные корни [1].

Большое значение имеют величины, составленные из компонент тензора, которые не изменяются при переходе к новой системе координат. Их называют *инвариантами тензора.* Определим инварианты тензора второго ранга, пользуясь тем, что решения уравнений (6.45) являются главными значениями тензора, а, следовательно, не зависят от выбора системы координат. Тогда, раскрыв определитель (6.45), можно утверждать, что коэффициенты полученного уравнения, которые выражаются через компоненты тензора b_{ik}, не должны зависеть от системы координат. Таким образом, согласно (6.45) имеем уравнение

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \qquad (6.48)$$

Отсюда искомые инварианты имеют вид

$$I_1 = b_{ii} \equiv b_{11} + b_{22} + b_{33} \quad \text{(след тензора)},$$

$$I_2 = b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33} - b_{12}^2 - b_{13}^2 - b_{23}^2, \qquad (6.49)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что кроме рассмотренных инвариантов, существует множество других, поскольку произвольная от них функция есть также инвариантом. Например, часто используют комбинацию инвариантов I_1 и I_2 вида

$$I = I_1^2 - 2I_2 = b_{11}^2 + b_{22}^2 + b_{33}^2 + 2b_{12}^2 + 2b_{13}^2 + 2b_{23}^2, \qquad (6.50)$$

которая всегда является положительной суммой квадратов элементов тензора.

Инварианты I_1, I_2, I_3 можно выразить через главные значения λ_1, λ_2, λ_3 как корни уравнения (6.48). Поскольку уравнение (6.48) можно записать в виде

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0\,,$$

то отсюда получим такие выражения для инвариантов:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \qquad (6.51)$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Вообще, если некоторая величина представляет собой симметричный тензор второго ранга, то ее физический смысл фактически определяется тремя инвариантами (6.49).

6.2. Твердое упругое тело как акустическая среда

В п. 4.1.1 построена модель акустической среды в виде идеальной сжимаемой жидкости. Подумаем над тем, какими свойствами нужно дополнить эту модель, чтобы ее можно было использовать для описания волновых процессов в твердых телах. Согласно модели идеальной сжимаемой жидкости работа, которая выполняется над

жидкостью (или газом), зависит только от изменения ее объема, и не зависит от формы сосуда, в котором она находится. Жидкости оказывают сопротивление при изменении их объема, но не оказывают сопротивление при изменении формы. Это свойство определяется известным *законом Паскаля*[*], согласно которому давление передается во все стороны одинаково. Например, если сжимать жидкость поршнем, то одинаковое давление будет действовать со стороны жидкости на все стенки сосуда. При этом любая сила давления, которая действует на жидкость или передается ею, всегда перпендикулярна к поверхности стенки: *касательная к поверхности сила, которая не уравновешивается отсутствующим в жидкости сопротивлением изменению формы, не может существовать в условиях равновесия.*

Твердые упругие тела, наоборот, оказывают сопротивление изменению, как объема, так и формы. Как говорят, они оказывают сопротивление любой деформации. Работа должна выполняться и в том случае, когда мы хотим изменить форму тела, не изменяя его объем. Можно считать, что внутренняя энергия твердого тела зависит не только от объема, но и от формы. С этим связано то обстоятельство, что для твердых тел закон Паскаля не выполняется. Давление, которое передается твердым телом, будет различным в разных направлениях. Сила, которая возникает в твердом теле при его деформировании, называется *упругим напряжением.* В отличие от давления в жидкости сила упругих напряжений в твердом теле может иметь любое направление относительно площадки, на которую она действует.

Итак, в твердом теле картина напряженного состояния более сложная и требует более детального анализа картины деформаций. Как увидим далее, здесь вместо скаляров - давления и сжатия - появляются тензор напряжений и тензор деформаций.

6.3. Тензор напряжений

В недеформированном теле распределение частиц среды отвечает его состоянию теплового равновесия. При этом каждый условно выделенный в теле объем находится в состоянии механического равновесия. Внешние силы, которые действуют на физическое тело, можно отнести или к объемным, т.е. распределенным по всему объему тела (например, сила тяготения), или к поверхностным, т.е. распределенным на поверхности (например, давление, действующее на поверхность, которая ограничивает тело). Под действием внешних сил тело деформируется, т.е. происходит относительное перемещение

---

[*] Паскаль (Pascal) Блез (1623—1662) — французский математик, физик и философ.

частиц тела. Вследствие этого в теле возникают *внутренние силы*, которые противодействуют процессу деформирования.

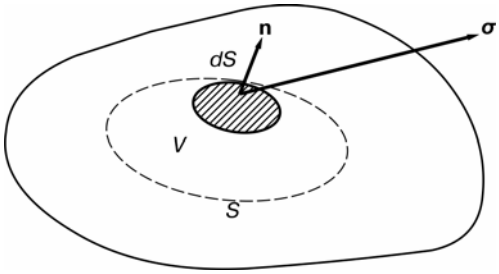


Рис. 6.3. Условно выделенная в теле элементарная площадка

Напомним, что модель акустической среды представляет собой сплошную среду. Поэтому, если условно выделить в деформированном теле область V, которая ограничена поверхностью S (рис. 6.3), то действие внутренних сил на частицы, которые находятся вне области V и наоборот, происходит непосредственно через поверхность S. Выделим на поверхности S малый поверхностный элемент dS; сила, которая действует на него, имеет вид $\boldsymbol{\sigma} dS$, $\boldsymbol{\sigma}$ — некоторый конечный вектор. Точкой приложения вектора $\boldsymbol{\sigma}$ можно считать любую точку, которая принадлежит элементу dS. Итак, вектор $\boldsymbol{\sigma}$ представляет собой вектор внутренних усилий, которые рассчитываются на единицу площади; его называют *вектором напряжения в точке*.

Усилие $\boldsymbol{\sigma} dS$ есть сила взаимодействия частей тела, которые приложены с одной и с другой стороны к поверхностному элементу dS. При этом согласно направлению нормали $\mathbf{n}$ (рис. 6.3) $\boldsymbol{\sigma} dS$ определяет силу, с которой часть среды, которая находится вне V, действует на часть, которая принадлежит V; сила, с которой часть среды в середине V действует на часть тела вне V, на основе принципа равенства действия и противодействия будет равна $-\boldsymbol{\sigma} dS$.

Вообще, любая площадка (т.е. поверхностный элемент), которая условно проведена внутри тела, разделяет две части тела, которые примыкают к площадки. Для того, чтобы различать две части тела, проводят нормаль $\mathbf{n}$ к площадке и приписывают ей некоторое положительное направление (рис. 6.3). Итак, под усилием, которое действует на площадку, мы всегда будем понимать силу, с которой часть тела, которая находится с положительной стороны нормали, действует на часть, которая находится с отрицательной стороны.

Таким образом, когда рассматриваются усилия, которые действуют со стороны окружающей среды на поверхность S, ограничивающую некоторый объем V, нужно провести нормаль к S, которая будет *внешней* относительно V. Другими словами, *растягивающие усилия относительно области V считают положительными, а сжимающие*

(*векторы* **σ** *и* **n** *имеют противоположные направления*) — *отрицательными.* В общем случае, вектор напряжения **σ** в некоторой точке твердого тела зависит от ориентации площадки dS. Поэтому именно совокупность всех векторов напряжений **σ** в точке для всех направлений **n** определяет напряженное состояние в точке. Понятно, что имеем бесконечное множество таких векторов напряжения!

Однако такая ситуация не является безвыходной. Оказывается, напряженное состояние в трехмерном тела записывается в виде тензора. Убедимся в этом. В общем случае напряженное состояние при переходе от точки до точки изменяется, но всегда есть возможность выбрать в окрестности любой точки довольно малую область, для которой напряженное состояние можно считать однородным. Такой подход возможен только в пределах принятой гипотезы сплошной среды, которая позволяет переход к предельно малым объемам.

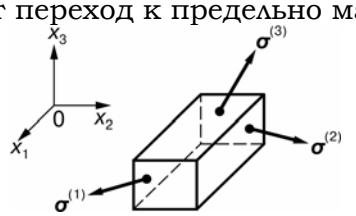


Рис. 6.4. Вектор напряжения на гранях параллелепипеда

Чтобы описать напряженное состояние в точке, представим себе, что через нее проведены три площадки, перпендикулярные к осям координат Ox_1, Ox_2, Ox_3 декартовой системы, причем в качестве положительного направления нормалей к этим площадкам возьмем положительные направления соответствующих осей. Пусть напряжения на этих трех площадках считаются определенными. Для этого в окрестности исследуемой точки выделим элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 6.4). Если размеры параллелепипеда уменьшать, то он будет стягиваться в точку, тогда в пределе все грани параллелепипеда будут проходить через точку. Поэтому напряжение на соответствующих площадках можно рассматривать как напряжение в исследуемой точке.

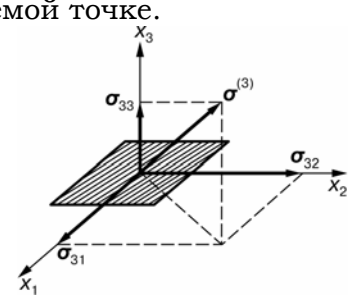


Рис. 6.5. Разложение вектора $\boldsymbol{\sigma}^{(3)}$, который действует на элемент поверхности x_3 = const, на три компоненты

Вектор напряжения на каждой площадке можно разложить на три составляющие по координатным осям Ox_1, Ox_2, Ox_3. Например, для вектора напряжения $\boldsymbol{\sigma}^{(3)}$ на площадке x_3 = const имеем (рис. 6.5):

$$\boldsymbol{\sigma}^{(3)} = \mathbf{e}_1\sigma_{31} + \mathbf{e}_2\sigma_{32} + \mathbf{e}_3\sigma_{33} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k\sigma_{3k} = \mathbf{e}_k\sigma_{3k}. \qquad (6.52)$$

Аналогично получаем выражение

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \mathrm{e}_k\sigma_{1k}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \mathrm{e}_k\sigma_{2k}. \qquad (6.53)$$

Итак, имеем девять чисел:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \qquad (6.54)$$

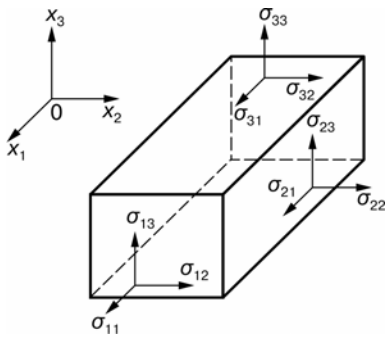


Рис. 6.6. Компоненты вектора напряжения на гранях объемного элемента

На рис. 6.6 показаны составляющие векторов напряжений на трех гранях параллелепипеда (т.е. на трех взаимно перпендикулярных площадках, которые проходят через исследуемую точку тела). Поскольку выделенный параллелепипед находится в состоянии равновесия, то на его противоположных (невидимых) гранях (рис. 6.6) возникают соответственно те же напряжения, но противоположно направленные.

Теперь покажем, что девять величин (6.54) достаточно, чтобы полностью описать внутреннее напряженное состояние и что σ_{ij} — действительно тензор. Для этого нужно убедиться в том, что по известным девяти числам (6.54) для некоторой точки тела можно найти вектор напряжения $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = (\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \sigma_3^{(n)})$ на произвольно ориентированной площадке, которая проходит через исследуемую точку.

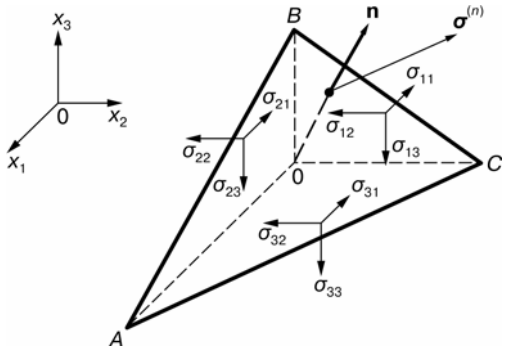


Рис. 6.7. Вектор и компоненты напряжения на поверхностях элементарной пирамиды

Еще раз выделим в окрестности исследуемой точки элементарный объем, но уже не в виде параллелепипеда, а в виде пирамиды (рис. 6.7). Три грани выделенного элемента совпадают с координатными плоскостями декартовой системы координат, а четвертая является плоскостью общего положения. Ее ориентацию в пространстве определяют направляющие косинусы нормали $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 n_1 + \mathbf{e}_2 n_2 + \mathbf{e}_3 n_3. \tag{6.55}$$

Если плоскость грани *ABC* элементарной пирамиды (рис. 6.7) обозначить *dS*, то площади граней *OBC*, *OAB*, *OAC* соответственно будут иметь вид

$$dS_i = \cos\left(\mathbf{n}\hat{}\mathbf{e}_i\right) dS = n_i dS\,,\ i = 1,2,3. \tag{6.56}$$

Элементарная пирамида (рис. 6.7) имеет такие же свойства, что и рассмотренный выше параллелепипед. При уменьшении размеров она стягивается в точку, и, следовательно, все ее грани проходят через эту точку. Поэтому напряжение на гранях элементарной пирамиды можно рассматривать как напряжение в исследуемой точке, но на ориентированных по-разному площадках.

Поскольку выделенный на рис. 6.7 объем в виде пирамиды находится в равновесии, сумма всех сил, которые действуют на грани пирамиды, должна равняться нулю. Объемные силы здесь можно не учитывать, поскольку они пропорциональны $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ и при $\Delta x_i \to 0$ будут бесконечно малыми по сравнению с поверхностными, которые пропорциональны $\Delta x_1 \Delta x_2$, $\Delta x_2 \Delta x_3$ и т.п. Тогда сумма проекций поверхностных сил на каждую координатную ось равна нулю. Например, для оси Ox_1 имеем

$$\sigma_1^{(n)} dS - \sigma_{11} n_1 dS - \sigma_{21} n_2 dS - \sigma_{31} n_3 dS = 0\,. \tag{6.57}$$

Знаки минус в уравнении (6.57) обусловлены тем, что внешние нормали к площадкам *OAB*, *OBC*, *OAC* противоположны базисным векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ координатной системы. Сокращая на dS и записывая аналогичные уравнения для осей Ox_2 и Ox_3, получаем

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(n)} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3,\\ \sigma_2^{(n)} &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3,\\ \sigma_3^{(n)} &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3,\end{aligned} \tag{6.58}$$

или, коротко,

$$\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j. \tag{6.59}$$

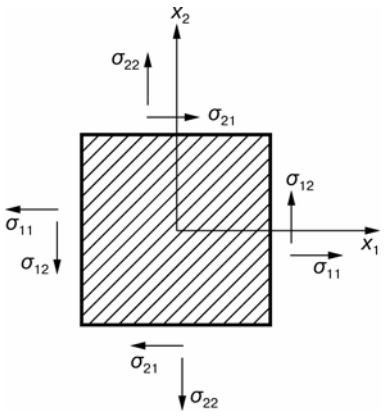


Рис. 6.8. Компоненты сил, которые действуют на грани сечения маленького кубика

Итак, мы действительно можем выразить вектор напряжения $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = (\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \sigma_3^{(n)})$, который действует на произвольно ориентированную площадку с вектором нормали $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ через величины σ_{ij} и полностью описать внутреннее напряженное состояние. Выражение (6.59) позволяет утверждать, что величины σ_{ij} задают тензор второго ранга, ведь $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ и $\mathbf{n}$ — векторы, а коэффициенты σ_{ji} определяют соответствующий линейный оператор (см. п. 6.1.3).

Тензор σ_{ij} называют *тензором напряжений*. Покажем, что тензор напряжений есть *симметричный тензор* ($\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$). Для этого рассмотрим элементарный кубик, ребра которого совпадают с отрезками координатных осей. На рис. 6.8 приведено сечение кубика плоскостью $x_3 = 0$. Стрелками показаны компоненты сил, которые действуют на его грани. Для равновесия кубика необходимо, чтобы суммы дейст-

вующих на него сил и моментов равнялись нулю. Равенство нулю суммы сил обеспечивается тем, что значение сил, которые действуют на противоположных гранях, должны быть равными, а сами силы — противоположными по направлению. Равенство нулю момента, в данном случае относительно оси Ox_3, означает равенство нулю произведения $\sigma_{12} - \sigma_{21}$ на длину ребра кубика. Отсюда получим $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Аналогично доказываются равенства $\sigma_{31} = \sigma_{13}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Итак, симметрия тензора (σ_{ij}) доказана. Таким образом, *тензор напряжений определяется не девятью величинами, а только шестью.* С учетом симметрии тензора σ_{jk} равенство (6.59) можно переписать в виде

$$\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j. \qquad (6.60)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} называют *нормальными напряжениями*, а σ_{12}, σ_{23} и т.д. — *касательными напряжениями.*

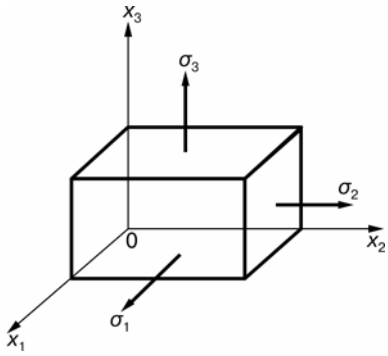


Рис. 6.9. Компоненты вектора напряжения на главных площадках тензора напряжений

Благодаря симметрии тензора σ_{ij} его можно описать характеристической поверхностью в виде эллипсоида с тремя главными осями (см. п. 6.1.4). На площадках, которые перпендикулярны к главным осям (их также называют *главными площадками*), напряженное состояние имеет простой вид (рис. 6.9): здесь напряжение соответствует простому сжатию или растяжению в направлении главных осей. Это главные значения тензора напряжений, которые называют *главными нормальными напряжениями* σ_1, σ_2, σ_3. На этих площадках нет никаких сдвиговых сил. Итак, напряженное состояние полностью определяется главными напряжениями и ориентацией главных плоскостей. Вместо шести составляющих тензора σ_{ij} здесь мы имеем дело с тремя главными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3 и тремя нормальными единичными векторами, которые определяют главные направления тензора напряжений.

Отсюда в системе координат, которые соответствуют главным осям тензора, соотношение (6.60) приобретают простой вид:

$$\sigma_1^{(n')} = \sigma_1 n_1', \ \sigma_2^{(n')} = \sigma_2 n_2', \ \sigma_3^{(n')} = \sigma_3 n_3', \tag{6.61}$$

где $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = (\sigma_1^{(n')}, \sigma_2^{(n')}, \sigma_3^{(n')})$ — вектор напряжения в точке, $\mathbf{n} = (n_1', n_2', n_3')$ — координаты вектора нормали на произвольно ориентированной площадке в системе главных осей. Поскольку $n_1'^2 + n_2'^2 + n_3'^2 = 1$, то из (6.61) получим

$$\left(\frac{\sigma_1^{(n')}}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^{(n')}}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3^{(n')}}{\sigma_3}\right)^2 = 1. \tag{6.62}$$

Уравнению (6.62) можно дать наглядное пояснение, а именно: геометрическое место концов вектора напряжения в исследуемой точке $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = (\sigma_1^{(n')}, \sigma_2^{(n')}, \ \sigma_3^{(n')})$ образовывает эллипсоид, полуоси которого есть главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3. Полученный эллипсоид носит название *эллипсоида напряжений.*

Вообще, тензор напряжений в твердом теле, а также его эллипсоид изменяются от точки к точке, поэтому для описания всего тела следует задать каждую компоненту тензора σ_{ij} как функцию пространственных координат. Таким образом, тензор напряжений является полем. Мы уже встречались со скалярным полем давления и векторным полем скорости, для которого в каждой точке задавались три числа. Теперь имеем пример *тензорного поля*, которое задается в каждой точке пространства девятью числами, из которых для симметричного тензора напряжений σ_{ij} реально остается только шесть. Итак, чтобы полностью описать внутренние силы в произвольном твердом теле, необходимо знать шесть функций пространственных координат x_1, x_2, x_3.

6.4. Тензор деформаций

Если каждая точка твердого тела получила одно и то же смещение, то это означает, что тело переместилось поступательно. В этом случае деформации тела отсутствуют, и никаких внутренних напряжений в теле не возникло. Внутренние напряжения возникают только тогда, когда расстояния между точками тела изменяются. Пусть x_i и $x_i + dx_i$, $i = 1,2,3$, — координаты двух бесконечно близких точек, квадрат расстояния между которыми до деформации равен

$$(dl)^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 = dx_i dx_i = dx_i^2. \qquad (6.63)$$

При деформации точки смещаются; такое смещение будем описывать вектором смещения $\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$. Каждая координата вектора смещения является функцией координат, т.е. $u_i\,(x_1,x_2,x_3) \equiv u_i\,(x_k)$. После деформации координаты определенных точек будут иметь вид

$$x_i + u_i(x_k) \quad \text{и} \quad x_i + dx_i + u_i(x_k + dx_k) \approx x_i + dx_i + u_i\left(x_k\right) + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) dx_k.$$

Тогда квадрат расстояния между точками после деформации равен

$$\left(dl'\right)^2 = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k\right)^2 = dx_i^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_m} dx_k dx_m\,. \qquad (6.64)$$

Поскольку индексы в выражении (6.64) являются немыми, то их можно поменять местами и записать такие соотношения:

$$2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k\,,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_m} dx_k dx_m = \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} dx_i dx_k\,.$$

В результате $\left(dl'\right)^2$ представим в виде

$$\left(dl'\right)^2 = \left(dl\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right) dx_i dx_k. \qquad (6.65)$$

Итак, приращение квадрата расстояния между двумя близкими точками равно

$$\left(dl'\right)^2 - \left(dl\right)^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right) dx_i dx_k \qquad (6.66)$$

или

$$\left(dl'\right)^2 - \left(dl\right)^2 = 2u_{ik} dx_i dx_k, \qquad (6.67)$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right). \qquad (6.68)$$

Поскольку $(dl')^2$ — $(dl)^2$ есть скалярная величина, а dx_i, $i = 1,2,3$— координаты вектора, то (см. п. 6.1.4) выражение (6.67) определяет

квадратичную форму. Следовательно, ее коэффициенты u_{ik} образуют тензор второго ранга, который называется *тензор деформаций*. Очевидно, тензор деформаций симметричный ($u_{ik} = u_{ki}$). Если все компоненты тензора u_{ik} равны нулю, то это означает, что расстояние между частицами тела не изменяется, и оно двигается, как абсолютно жесткое тело.

Практически почти во всех случаях деформирования тел деформации оказываются малыми. Это значит, что изменение любого расстояния в теле оказывается малым по сравнению с самим расстоянием. Ниже мы будем рассматривать все расстояния как малые. Поэтому в выражении (6.68) можно пренебречь последним членом как малой величиной второго порядка и ограничиться линейными относительно u_i членами, тогда

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \qquad (6.69)$$

Определим физический смысл компонент линеаризованного тензора деформаций (6.69). Сначала рассмотрим диагональные компоненты (компоненты с двумя одинаковыми индексами), например $u_{11} = \partial u_1/\partial x_1$. Пусть x_1 и $x_1 + dx_1$ — две близкие точки, которые лежат на оси Ox_1. После деформации эти точки могут сместиться с оси Ox_1, их координаты вдоль оси Ox_1 будут соответственно $x_1 + u_1(x_1, x_2, x_3)$ и $x_1 + dx_1 + u_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3)$. До деформации расстояние между точками было dx_1, а после деформации расстояние вдоль оси Ox_1 стало $dx_1 + u_1(x_1 + dx_1) - u_1(x_1) \approx dx_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)dx_1$. Приращение расстояния между точками равно $(\partial u_1/\partial x_1)dx_1$. Если его поделить на начальное расстояние dx_1, то получим относительное удлинение вдоль оси Ox_1. Итак, диагональные компоненты тензора деформаций (6.69): $u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, $u_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, $u_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ определяют относительное удлинение вдоль координатных осей Ox_1, Ox_2, Ox_3.

Определим изменение объема $V = dx_1dx_2dx_3$ элементарного параллелепипеда с длинами ребер dx_1, dx_2, dx_3. После деформации, как было показано, длины ребер равны $(1 + u_{11})dx_1$, $(1 + u_{22})dx_2$, $(1 + u_{33})dx_3$. Поскольку мы рассматриваем малые деформации, то можно не учитывать квадратичные и кубические по u_i члены, тогда объем параллелепипеда после деформации будет определяться как $V' = (1 + u_{11} + u_{22} + u_{33})dx_1dx_2dx_3$. Для относительного изменения объема имеем

$$\frac{V'-V}{V} = u_{11} + u_{22} + u_{33} = u_{kk}, \tag{6.70}$$

т.е. след тензора (6.69). След тензора является инвариантом, следовательно, относительное изменение объема, как и положено, не зависит от выбора системы координат. Вместе с этим $(V' - V)/V$ равно акустическому сжатию s с противоположным знаком (см. (4.18)), а сумма диагональных компонент тензора деформаций является дивергенцией вектора смещения $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.Таким образом, получаем такое соотношение:

$$u_{kk} = \mathrm{div}(\mathrm{u}) = -s. \tag{6.71}$$

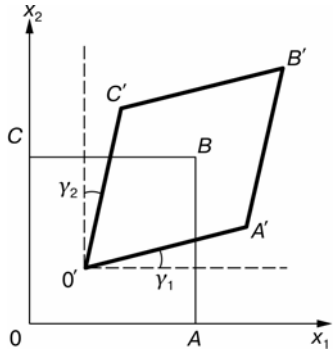


Рис. 6.10. Проекция недеформированного ($OABC$) и деформированного ($O'A'B'C'$) элементов на плоскость x_1Ox_2

Рассмотрим теперь недиагональные компоненты тензора деформаций (компоненты с разными индексами), например u_{12}. Возьмем снова элементарный параллелепипед с ребрами длиной dx_1, dx_2, dx_3, которые параллельны осям координат. На рис. 6.10 изображена грань параллелепипеда, которая до деформации лежала в плоскости x_1x_2. Вследствие деформации вершины O, A, B, C сместились и, в общем случае, вышли из плоскости x_1x_2. Пусть O', A', B', C' — проекции новых положений соответствующих точек на плоскость x_1x_2. Учитывая малость деформаций и, соответственно, углов γ_1, γ_2 (рис. 6.10), получаем

$$\gamma_1 \approx \mathrm{tg}\gamma_1 \approx \frac{u_2(A) - u_2(O)}{dx_1} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \gamma_2 \approx \mathrm{tg}\gamma_2 \approx \frac{u_1(C) - u_1(O)}{dx_2} \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

откуда

$$2u_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \gamma_1 + \gamma_2 = u_{12} + u_{21}. \tag{6.72}$$

Таким образом, сумма симметричных недиагональных компонент тензора деформаций $u_{ik} + u_{ki}$ определяет деформацию прямого угла между соответствующими осями координат. Понятно, что изменение углов является следствием сдвига граней параллелепипеда. Итак, недиагональные компоненты тензора деформаций (u_{ik}) описывают деформации сдвига.

Как мы уже знаем, симметричный тензор имеет систему главных осей. В этой системе координат тензор деформаций приводится к диагональному виду в любой точке среды. Поэтому произвольную деформацию можно описать только за счет удлинения и укорочения вдоль осей координат. Например, однородную деформацию сдвига кубика можно рассматривать как совокупность сжатия вдоль одной из диагоналей и растяжения вдоль другой.

6.5. Закон Гука

Внутренние напряжения в твердых телах определяются деформациями тела, подобно тому, как давление в жидкости определяется ее сжатием. Связь между напряжениями и деформациями может быть разного типа, это определяется моделью исследуемой среды. В дальнейшем будем рассматривать только тела с линейной упругостью, т.е. тела, для которых связь между компонентами напряжения и деформации линейная.

Проводя опыты с проволокой, Гук* установил линейную связь между нагрузкой и перемещением и в 1676 году сформулировал закон "*Ut tension sic vis*" — "*Какая сила, такая деформация*". Обобщением первоначального закона можно считать *обобщенный закон Гука.*

Компоненты напряжения в данной точке тела суть линейные и однородные функции компонент деформации в этой точке (*и наоборот*).

Понятно, что речь идет о малых деформациях. Итак, каждая компонента тензора напряжений линейно связана со всеми компонентами тензора деформаций. Например,

$$\sigma_{11} = C_{1111}u_{11} + C_{1112}u_{12} + C_{1113}u_{13} + C_{1121}u_{21} +$$
$$+C_{1122}u_{22} + C_{1123}u_{23} + C_{1131}u_{31} + C_{1132}u_{32} + C_{1133}u_{33},$$

для других восьми компонент σ_{ij} имеем восемь аналогичных уравнений, где C — постоянные. Таким образом, закон Гука в обобщенной форме запишется в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijke}u_{ke}. \qquad (6.73)$$

---

* Гук (Hooke) Роберт (1635—1703) — английский физик.

Уравнение (6.73) заменяет девять уравнений, в каждом из которых справа имеем девять членов. Всего имеем 81 коэффициент C_{ijke}.

Покажем, что 81 коэффициент C_{ijke} образовывает тензор четвертого ранга. Совокупность из 81 чисел C_{ijke}, образовывает тензор четвертого ранга, если эти числа при изменении системы координат превращаются в числа C'_{ijke} в соответствии с формулой (6.21), а именно

$$C'_{ijke} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kq}\alpha_{ep}C_{mnqp}. \tag{6.74}$$

Для доказательства используем такие соотношения:

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\sigma_{mn}, \tag{6.75}$$

$$\sigma_{mn} = C_{mnqp}u_{qp}, \tag{6.76}$$

$$u_{qp} = \alpha_{qk}\alpha_{pe}u'_{ke}. \tag{6.77}$$

Комбинируя (6.75)-(6.77), получаем

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{qk}\alpha_{pe}C_{mnqp}u'_{ke}. \tag{6.78}$$

Вместе с тем

$$\sigma'_{ij} = C'_{mnke}u'_{ke}. \tag{6.79}$$

Сравнивая коэффициенты в уравнениях (6.78) и (6.79), получаем закон преобразования компонент тензора четвертого ранга (6.74) при изменении системы координат.

Таким образом, $\left(C_{ijke}\right)$ является тензором, который используется как физическая характеристика среды. Его называют *тензором упругости.* Действительно, соотношение (6.73) должно было бы иметь тензорный характер: иначе соотношение, которое справедливо в одной системе координат, оказалось бы несправедливым в другой, в то время как согласно самому содержанию такого соотношения оно должно быть инвариантным относительно выбора системы координат.

Здесь уместно отметить [1, с. 36], что основная задача тензорного исчисления как раз и состоит в том, чтобы научиться отделять результаты, которые принадлежат к самим физическим или геометрическим объектам, оттого, что привнесено случайным выбором системы координат.

Вследствие симметрии тензоров (σ_{ij}) и (u_{ke}) число уравнений (6.73) уменьшается до шести, и компоненты тензора (C_{ijke}) имеют такое свойство:

$$C_{ijke} = C_{jike} = C_{ijek} = C_{jiek}. \tag{6.80}$$

Поэтому тензор модулей упругости имеет только 36 независимых компонент. Матрица его компонент имеет вид

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix}. \qquad (6.81)$$

Дальнейшее уменьшение количества независимых компонент тензора упругости связано с энергетическими соображениями. Вспомним, что если сила F пропорциональна перемещению x, т.е. $F = kx$, то работа при данном перемещении равна $kx^2/2$. Подобным образом, энергия, которая накоплена в единичном объеме (т.е. плотность энергии) деформированной среды, для обобщенного случая линейной связи между напряжением и деформацией (6.73), имеет вид

$$U = \frac{1}{2}\sum_{ijke} C_{ijke} u_{ij} u_{ke} = \frac{1}{2}\sum_{ij} \sigma_{ij} u_{ij}. \qquad (6.82)$$

Напомним, что индексы i, j, k, e изменяются от 1 до 3, что обеспечивает перебор всех компонент матрицы (6.81). После двукратного дифференцирования (6.82) получим $\frac{\partial}{\partial u_{ke}}\left(\frac{\partial U}{\partial u_{ij}}\right) = C_{ijke}$. Поскольку порядок дифференцирования можно изменять, то $\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\left(\frac{\partial U}{\partial u_{ke}}\right) = C_{keij}$, откуда имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u_{ij} \partial u_{ke}} = C_{ijke} = C_{keij}. \qquad (6.83)$$

Благодаря такой симметрии, число независимых компонент тензора упругости уменьшается до 21. Такая ситуация отвечает наиболее общей анизотропии упругого тела.

Сделаем несколько замечаний. В общем случае анизотропии угловые деформации возникают не только под действием касательных напряжений, но и нормальных. В свою очередь линейные деформации зависят не только от нормальных напряжений, но и от касательных. Если оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 являются главными осями напряженного состояния, то касательные напряжения $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. При этом угловые деформации (деформации сдвига) u_{12}, u_{13}, u_{23} не равны нулю. Итак, в анизотропной среде главные оси напряженного

и деформированного состояний в общем случае не совпадают. В общем случае анизотропии упругие свойства тела характеризуются 21 независимыми постоянными. У кристаллов, для которых характерной особенностью есть наличие соответствующей симметрии, количество независимых постоянных упругости уменьшается [58]. Очень важным является использование закона упругости (6.73) при так называемой конструктивной анизотропии. Если в упругой конструкции много раз повторяются конструктивные особенности, то в ряде случаев оказывается возможным рассматривать конструкцию как сплошную среду, наделив ее свойствами анизотропии. В качестве примера можно привести конструкцию, в которой чередуются слои металла и пластика, резины и нитей и т.д. Естественно, что такой подход возможен только в случае, когда общие размеры тела существенно превышают размеры отдельных элементов конструкции.

Много реальных материалов можно изучать в рамках модели однородной и изотропной сплошной среды, для которой механические свойства во всех точках тела и для всех направлений одинаковы. Поэтому, модель идеально изотропного тела является простейшим и вместе с тем очень важным и полезным приближением. В дальнейшем сосредоточим внимание именно на изотропной среде.

Запишем закон упругости (6.73) для изотропного тела. Для этого рассмотрим выражение (6.82) для плотности энергии в деформированной среде. Понятно, что в случае изотропного тела выражение для энергии не должно изменяться при повороте системы координат. Понятно также, что компоненты тензора упругости C_{ijke} в выражении (6.82) для изотропного тела являются инвариантными при повороте системы координат; тензор с такими свойствами называется *изотропным*. Итак, чтобы выражение для энергии не изменялось при повороте системы координат, в нем должны быть только два инварианта I_1 и I_2 (или I) тензора деформаций u_{ke} (так как I_3 имеет третью степень, см. (6.49), (6.50)). Кроме того, выражение для энергии (6.82) представляет собой однородную квадратичную функцию u_{ke}. Поэтому в случае изотропного тела выражение для плотности энергии U представляет собой линейную комбинацию: $U = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I$ или, с учетом (6.49), (6.50), имеем

$$U = \frac{\lambda}{2}\left(u_{11} + u_{22} + u_{33}\right)^2 + \mu(u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2 + 2u_{12}^2 + 2u_{13}^2 + 2u_{23}^2), \qquad (6.84)$$

где λ и μ — две скалярные величины, так называемые *упругие постоянные Ламе*[*]. Поскольку величина U должна быть положительно определенной, то для постоянных Ламе справедливы условия: $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Тогда согласно (6.82) и (6.84) имеем

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial u_{ij}} = \lambda \delta_{ij} u_{kk} + 2\mu u_{ij}. \tag{6.85}$$

Уравнение (6.85) является обобщенным законом Гука для изотропной среды. Запишем (6.85) в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \lambda\left(u_{11} + u_{22} + u_{33}\right) + 2\mu u_{11},\\
\sigma_{22} &= \lambda\left(u_{11} + u_{22} + u_{33}\right) + 2\mu u_{22},\\
\sigma_{33} &= \lambda\left(u_{11} + u_{22} + u_{33}\right) + 2\mu u_{33},\\
\sigma_{12} &= 2\mu u_{12},\\
\sigma_{13} &= 2\mu u_{13},\\
\sigma_{23} &= 2\mu u_{23}.
\end{aligned} \tag{6.86}$$

Сравнивая (6.85) с (6.73), записываем матрицу коэффициентов тензора упругости (6.81) для изотропного тела:

$$\begin{bmatrix}
\lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\
\lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\
\lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu
\end{bmatrix}. \tag{6.87}$$

Как видим, упругие свойства изотропного тела полностью описываются двумя постоянными λ и μ. Понятно, что главные оси тензора напряжений и тензора деформаций для изотропного тела совпадают. Вместо упругих постоянных Ламе часто используют другие постоянные, которые имеют четкий физический смысл и возможность экспериментального измерения. Их вводят при рассмотрении однородных деформаций тела, т.е. деформаций, при которых напряженное состояние среды одинаково во всех точках тела. Выделим такие важные типы однородных деформаций: всестороннее сжатие, чистый сдвиг, растяжение вдоль одной оси.

---

[*] Ламє (Lame) Габриэль (1795—1870) — французский инженер, математик и механик.

Всесторонним растяжением (или всестороннее сжатие в зависимости от знака деформации) называют деформацию, при которой удлинение одинаково вдоль всех трех осей, а деформации сдвига отсутствуют:

$$u_{11} = u_{22} = u_{33}, \quad u_{12} = u_{13} = u_{23} = 0. \tag{6.88}$$

Подставляя (6.88) в (6.86), получаем

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)u_{kk}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \tag{6.89}$$

Отличны от нуля только нормальные напряжения. Величину

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{6.90}$$

называют *модулем всестороннего сжатия* или *объемным модулем упругости.*

Деформация чистого сдвига, скажем, в плоскости x_1x_2, есть деформация, при которой отличны от нуля только компоненты $u_{12} = u_{21}$ тензора деформаций. Из выражения (6.86) получим

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu u_{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \tag{6.91}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \tag{6.92}$$

Таким образом, коэффициент Ламе μ представляет собой *модуль сдвига G*, который определяется при чистом сдвиге из соотношения $\mu = \sigma_{12}/(2u_{12}) = G$. Понятно, что постоянные Ламе λ и μ имеют размерность поверхностных сил.

Теперь рассмотрим однородное растяжение цилиндрического стрежня со свободной боковой поверхностью. Направим ось Ox_1 вдоль оси стрежня. Единственной отличной от нуля компонентой напряжения будет σ_{11}, поскольку на боковых стенках стрежня напряжения равны нулю. В этом случае из уравнений (6.86) получим

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)u_{11} + \lambda u_{22} + \lambda u_{33}, \tag{6.93}$$

$$\sigma_{22} = \lambda u_{11} + (\lambda + 2\mu)u_{22} + \lambda u_{33} = 0, \tag{6.94}$$

$$\sigma_{33} = \lambda u_{11} + \lambda u_{22} + (\lambda + 2\mu)u_{33} = 0. \tag{6.95}$$

Уравнения (6.94) и (6.95) выполняются при условии

$$u_{22} = u_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} u_{11}. \tag{6.96}$$

Подставив (6.96) в уравнение (6.93), получим

$$\sigma_{11} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} u_{11}. \tag{6.97}$$

Величину отношения σ_{11}/u_{11} обозначают

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \tag{6.98}$$

и называют *модулем Юнга* для стрежня*, а величину отношения $-u_{22}/u_{11} = -u_{33}/u_{11}$ обозначают

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{6.99}$$

и называют *коэффициентом Пуассона*. Коэффициент Пуассона связывает деформации в продольном и поперечном направлениях. Знак "минус" в (6.96) характеризует экспериментальный факт: *при растяжении стрежня в продольном направлении происходит уменьшение его поперечного размера*.

Определим физический смысл первого коэффициента Ламе λ. Снова рассмотрим растяжение стрежня вдоль оси Ox_1, но при условии, что боковая поверхность стрежня зажата и, следовательно, неподвижна. В этом случае компоненты тензора деформаций равны нулю, кроме u_{11}. Тогда вместо (6.93)-(6.95) следует записать

$$\sigma_{11} = (\lambda+2\mu)u_{11},$$

$$\sigma_{22} = \lambda u_{11},$$

$$\sigma_{33} = \lambda u_{11}.$$

Таким образом, коэффициент $\lambda = \sigma_{22}/u_{11} = \sigma_{33}/u_{11}$ равен отношению поперечного нормального напряжения к деформации стрежня при растяжении стрежня с зажатыми боковыми гранями.

Поскольку в закон Гука для изотропного тела входят только две независимые характеристики вещества, то между модулями упругости λ, μ, K, E, ν, G может быть только линейная зависимость. Если основными являются постоянные Ламе λ и μ, то

* Юнг (Young) Томас (1773—1829) — английский физик.

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; \tag{6.100}$$

если основной парой есть E и ν, то

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \tag{6.101}$$

если основной парой есть K и G, то

$$\lambda = K - \frac{3}{2}G, \quad E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}; \tag{6.102}$$

если основной парой будет G, ν, то

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu}, \quad E = 2G(1+\nu), \quad K = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}. \tag{6.103}$$

Все модули упругости положительные (действительно, тела “оказывают сопротивление” деформациям, а не “способствуют” им). При этом выполняются неравенства:

$$E < 3K, \quad 2\mu < E < 3\mu, \quad K < \lambda + 2\mu < 3K, \quad 0 < \nu < 0{,}5.$$

Коэффициент Пуассона, близкий к нулю, имеет пробка: при растяжении и сжатии поперечные размеры тела из пробки практически не изменяются. Предельный случай $\nu \to 0{,}5$ соответствует $\mu \to 0$, т.е. переходу от твердого тела к жидкости.

В таблице приведены характерные величины для ряда упругих материалов (о величинах c_e и c_t будем говорить позднее).

Материал	$\rho \cdot 10^{-3}$, кг/м^3	$E \cdot 10^{-10}$, Н/м^2	ν	$G \cdot 10^{-10}$, Н/м^2	c_e, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$	c_t, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$
Алюминий	2,7	7,0	0,35	2,6	6420	3110
Вольфрам	18,7	36,0	0,29	13,3	5230	2860
Железо	7,87	21,0	0,28	8,2	5850	3230
Золото	19,3	8,0	0,42	2,9	3140	1170
Кварц	2,2	7,4	0,17	3,2	5970	3780
Латунь	8,5	9,0	0,33	3,0	4240	2140
Медь	8,9	12,0	0,33	4,6	4560	2250
Олово	7,18	5,4	0,33	2,0	3320	1670
Свинец	11,34	1,6	0,43	0,6	2120	740
Сталь	7,86	2,2	0,29	8,5	5890	3210
Стекло	2,5	7,2	0,25	2,9	5800	3350

6.6. Общие уравнения распространения волн в твердых телах

Получим линеаризованные уравнения движения для твердой изотропной среды. Для этого рассмотрим частицу среды в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами dx_1, dx_2, dx_3. Если бы деформация в среде была однородной, то одноименные компоненты тензора напряжений были бы по модулю одинаковы и, как следствие, частицы оставались бы неподвижными. Однако при неоднородном напряженном состоянии, например в упругой волне, напряжения на противоположных гранях не равны по модулю, что служит причиной движения частицы среды.

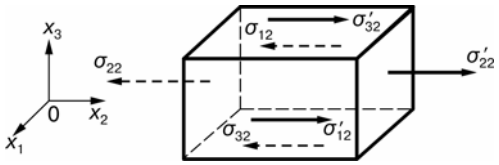


Рис. 6.11. Мысленная элементарная частичка среды твердого тела

Рассмотрим компоненту движения вдоль одной из трех осей координат, например оси Ox_2 (рис. 6.11). Сила, которая действует по второму закону Ньютона, приложена к граням элементарного параллелепипеда из окружающей среды. Она выражается через механические напряжения на гранях параллелепипеда. На рис. 6.11 показаны проекции напряжения на ось Ox_2. Запишем проекцию силы на ось Ox_2: $dF_2 = \left(\sigma'_{12} - \sigma_{12}\right)dx_2dx_3 + \left(\sigma'_{22} - \sigma_{22}\right)dx_1dx_3 + \left(\sigma'_{32} - \sigma_{32}\right)dx_1dx_2$. Поскольку $\sigma'_{12}(x_1 + dx_1, x_2, x_3)$, $\sigma'_{22}(x_1, x_2 + dx_2, x_3)$, $\sigma'_{32}(x_1, x_2, x_3 + dx_3)$, то, применяя формулу Лагранжа о приращении функции при малом изменении аргумента, получаем

$$dF_2 = \left(\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3 = \frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial x_i}dx_1dx_2dx_3. \qquad (6.104)$$

Под действием этой силы частичка будет двигаться вдоль оси Ox_2 с ускорением $\partial^2u_2/\partial t^2$, где u_2 проекция на ось Ox_2 вектора смещения $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ частицы. Масса частицы равна $\rho dx_1dx_2dx_3$, где ρ — плотность среды. Итак, уравнение движения частицы вдоль оси Ox_2 имеет вид $\frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial x_i} = \rho\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}$. Рассматривая аналогично движение частицы вдоль других осей координат, получаем систему из трех уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad k = 1,2,3. \tag{6.105}$$

Это и есть уравнения движения (для ускорения использована частная производная $\partial^2/\partial t^2$ вместо d^2/dt^2, что обусловлено пренебрежением ускорения переноса (см. п. 4.1.2)).

Уравнение (6.105) связывают две функции координат и времени: тензор напряжений $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3, t)$ и вектор смещения $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$. Для того чтобы число уравнений соответствовало числу неизвестных функций, необходимо иметь еще одно уравнение, которое связывает σ_{ik} и $\mathbf{u}$. Таким уравнением является обобщенный закон Гука (см. (6.86)):

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \tag{6.106}$$

Подстановка (6.106) в (6.105) позволяет получить уравнение относительно проекций вектора $\mathbf{u}$:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \right) \delta_{ik} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad k = 1,2,3,$$

или

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad k = 1,2,3. \tag{6.107}$$

Поскольку $\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \equiv \mathrm{div}\mathbf{u}$, $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2} \equiv \Delta u_k$ (провели суммирование по индексу i), то уравнение (6.107) можно переписать в виде

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k} \mathrm{div}\mathbf{u} + \mu \Delta u_k = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad k = 1,2,3. \tag{6.108}$$

Умножим каждое из трех уравнений (6.108) на соответствующий базисный вектор $\mathbf{e}_j$, $j = 1,2,3$, и просуммируем. Поскольку $\mathbf{e}_1 \partial/\partial x_1 + \mathbf{e}_2 \partial/\partial x_2 + \mathbf{e}_3 \partial/\partial x_3 \equiv \mathrm{grad}$, то искомое уравнение запишем в виде

$$(\lambda + \mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \tag{6.109}$$

При решении конкретных задач часто используют другую форму уравнения движения. Учитывая тождество $\Delta\mathbf{u}$ = graddiv$\mathbf{u}$ — rotrot$\mathbf{u}$, переписываем (6.109) так:

$$(\lambda + 2\mu)\text{graddiv}\mathbf{u} - \mu\text{rotrot}\mathbf{u} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}. \qquad (6.110)$$

Известно [8, 52], что любое векторное поле можно представить в виде суммы *потенциального* (от латинского слова *potentia* — сила) вектора, ротор которого равен нулю, и *соленоидального* (от греческого слова *swlhu* (*солен*) — трубка) вектора, дивергенция которого равна нулю. Если записать в таком виде вектор смещения $\mathbf{u}$, то можно получить отдельно уравнение потенциальной и соленоидальной частей смещения. Действительно, пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_t$, считая rot$\mathbf{u}_e = 0$ и div$\mathbf{u}_t = 0$; подставляя в (6.110), получаем

$$(\lambda + 2\mu)\text{graddiv}\mathbf{u}_e - \mu\text{rotrot}\mathbf{u}_t = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}_e}{\partial t^2} + \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}_t}{\partial t^2}. \qquad (6.111)$$

Поскольку разложение вектора на потенциальную и соленоидальную части является единственным, то согласно (6.111) имеем

$$(\lambda + 2\mu)\text{graddiv}\mathbf{u}_e = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}_e}{\partial t^2}, \qquad (6.112)$$

$$-\mu\text{rotrot}\mathbf{u}_t = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}_t}{\partial t^2}. \qquad (6.113)$$

Применяя тождество rotrot = graddiv – Δ к векторам $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_t$, находим graddiv$\mathbf{u}_e = \Delta\mathbf{u}_e$, rotrot$\mathbf{u}_t = -\Delta\mathbf{u}_t$, (6.114)

кроме того, введем обозначения

$$c_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \qquad (6.115)$$

Подставляя (6.114), (6.115) в (6.112), (6.113) получаем волновые уравнения для $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_t$:

$$\Delta\mathbf{u}_e = \frac{1}{c_e^2}\frac{\partial^2\mathbf{u}_e}{\partial t^2}, \quad \Delta\mathbf{u}_t = \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\mathbf{u}_t}{\partial t^2}. \qquad (6.116)$$

Для гармонических волн, т.е. при временной зависимости exp($-i\omega t$), уравнения (6.116) превращаются у уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\mathbf{u}_e + k_e^2\mathbf{u}_e = 0, \quad \Delta\mathbf{u}_t + k_t^2\mathbf{u}_t = 0, \qquad (6.117)$$

где $k_e = \omega / c_e$, $k_t = \omega / c_t$ — волновые числа соответственно для $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_t$.

6.7. Продольные и поперечные волны

В пятом разделе мы исследовали решение волнового уравнения в виде плоской продольной волны в идеальной сжимаемой жидкости. Рассмотрим теперь, что представляют собой плоские волны $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_t$ в твердом теле, как решение уравнений (6.116). Очевидно постоянные c_e и c_t (см. (6.115)) в волновых уравнениях (6.116) имеют смысл скорости распространения волн. Рассмотрим плоские гармонические волны, которые распространяются вдоль оси Ox_1 декартовой системы координат:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{A}^{(e)} \exp\left[-i\omega(t - x_1/c_e)\right], \tag{6.118}$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{A}^{(t)} \exp\left[-i\omega(t - x_1/c_t)\right], \tag{6.119}$$

где $\mathbf{A}^{(e)} = \mathbf{e}_1 A_1^{(e)} + \mathbf{e}_2 A_2^{(e)} + \mathbf{e}_3 A_3^{(e)}$ и $\mathbf{A}^{(t)} = \mathbf{e}_1 A_1^{(t)} + \mathbf{e}_2 A_2^{(t)} + \mathbf{e}_3 A_3^{(t)}$ — векторы амплитуд.

Определим характер колебаний частиц среды в этих волнах, опираясь на основные свойства векторов $\mathbf{u}_e$ ($\mathrm{rot}\mathbf{u}_e = 0$) и $\mathbf{u}_t$ ($\mathrm{div}\mathbf{u}_t = 0$). Используя (6.118), вычисляем $\mathrm{rot}\mathbf{u}_e$ и записываем уравнение

$$\left[-\mathbf{e}_2 A_3^{(e)} + \mathbf{e}_3 A_2^{(e)}\right] \frac{i\omega}{c_e} \exp\left[-i\omega(t - x_1/c_e)\right] = 0.$$

Отсюда имеем $A_3^{(e)} = 0$, $A_2^{(e)} = 0$. Итак, вектор $\mathbf{u}_e$, направлен вдоль оси Ox_1, т.е. движение частиц среды происходит в направлении распространения волны. Таким образом, волна $\mathbf{u}_e(x_1, x_2, x_3, t)$ является продольной волной.

Используя (6.119), вычисляем $\mathrm{div}\mathbf{u}_t$ и записываем уравнение

$$A_1^{(t)} \frac{i\omega}{c_t} \exp\left[-i\omega(t - x/c_t)\right] = 0.$$

Отсюда имеем $A_1^{(t)} = 0$. Итак, вектор $\mathbf{u}_t$ ориентирован перпендикулярно к направлению распространения волны (оси Ox_1). Таким образом, волна $\mathbf{u}_t(x_1, x_2, x_3, t)$ является поперечной волной. Поскольку в поперечной волне частицы среды двигаются в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, то возникает вопрос о характере движения частиц в этой плоскости. Это свойство называют *поляризацией поперечной волны.*

Пусть ось Ox_3 декартовой системы координат совпадает с направлением волнового вектора поперечной волны. Тогда произвольное смещение частиц $\mathbf{u}$ в такой волне можно представить в виде суммы

двух взаимно ортогональных векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, направленных вдоль осей соответственно Ox_1 и Ox_2. При этом возможны ситуации, которые показаны на рис. 6.12.

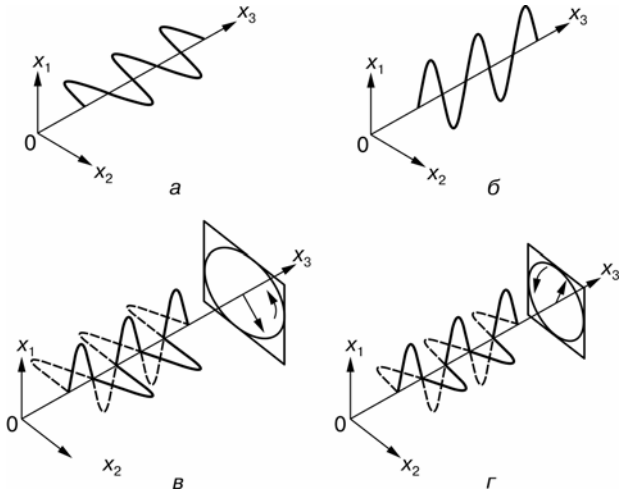


Рис. 6.12. Формы поляризации поперечной волны

Если $\mathbf{u}_1 = 0$, то имеем волну, в которой смещение лежит в плоскости x_2Ox_3 и изменяется по закону (рис. 6.12, *а*):

$$\mathbf{u}_2 = A_2\mathbf{e}_2 \cos(\omega t - k_t x_3), \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_3 = 0. \tag{6.120}$$

Выражение (6.120) определяет линейно поляризованную волну.

Аналогично определяется линейно поляризованная волна, смещение частиц которой лежит в плоскости x_1Ox_3 (рис. 6.12, *б)* и задается выражением

$$\mathbf{u}_1 = A_1\mathbf{e}_1 \cos(\omega t - k_t x_3), \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 = 0. \tag{6.121}$$

Произвольная линейная комбинация выражений (6.120) и (6.121) также определяет волну, которая поляризована в плоскости x_1Ox_2. Если взять суперпозицию движений (6.120) и (6.121) с произвольным сдвигом фаз α, то получим движение в виде

$$\mathbf{u} = A_2\mathbf{e}_2 \cos(\omega t - k_t x_3) + A_1\mathbf{e}_1 \cos(\omega t - k_t x_3 + \alpha), \tag{6.122}$$

где со временем конец вектора смещения описывает эллипс (рис. 6.12, *в)*; имеем поперечную волну с эллиптической поляризацией. В частном случае $A_2 = A_1$, $\alpha = \pm\pi/2$ получим поперечную волну с круговой поляризацией (рис. 6.12, *г)*.

Согласно (6.118) и (6.119) продольные и поперечные волны распространяются с фазовыми скоростями соответственно c_e и c_t. Из формул (6.115) видно, что скорость продольных волн всегда больше

скорости поперечных. В конце параграфа 6.5 в таблице указаны величины скоростей c_e и c_t для некоторых веществ.

Целесообразно привести ряд формул, которые определяют c_e и c_t через различные упругие постоянные:

$$c_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}\frac{(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}} = \sqrt{\frac{3K+4G}{3\rho}} = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}, \quad (6.123)$$

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho}\frac{1}{1+\upsilon}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (6.124)$$

Отсюда между скоростями продольной и поперечной волн существует такая связь:

$$\frac{c_e}{c_t} = \sqrt{2\frac{1-\upsilon}{1-2\upsilon}}. \quad (6.125)$$

Это отношение для разных металлов изменяется довольно существенно, например, для цинка ($\nu \approx 0{,}25$) и свинца ($\nu \approx 0{,}44$) отношение скоростей, вычисленное по (6.125), определяется числами 1,73 и 3,3.

В конце параграфа сделаем важный вывод. Как видим, уравнение движения (6.111) можно заменить двумя волновыми уравнениями (6.116). Решение первого представляет собой продольную волну, а решение второго — поперечную. Таким образом, произвольная плоская волна в упругой изотропной среде может быть представлена в виде суперпозиции продольной и поперечной волн, каждая из которых распространяется со своей фазовой скоростью. Определить фазовую скорость для волнового движения в виде суперпозиции этих волн невозможно. В сущности, здесь имеем два волновые движения, которые не взаимодействуют друг с другом.

6.8. Граничные условия для твердых тел

Очень важным моментом с точки зрения, как усложнения волновой картины, так и возможности практического использования результатов исследования, есть наличие границы в волновых задачах. Введение границы S упругого тела и постановки условий на ее поверхности, по сути, является моделированием процессов взаимодействия упругих тел между собой. В некоторых случаях существенное отличие в физико-механических свойствах взаимодействующих тел позволяет говорить о свободной или закрепленной границе. Вообще выбор правильной модели для описания процессов динамического взаимодействия упругих тел представляет собой очень сложную задачу. Сама граница упругого тела в геометрическом смысле рассматривается как поверхность. На такой поверхности считается возможным за-

давать разные условия для компонентов тензора напряжений, вектора смещения или их комбинаций.

Рассмотрим важные модели граничных условий на границе твердого тела с другими телами или с вакуумом; разнообразие здесь большее, чем для жидкостей. Будем обозначать ось, которая совпадает с нормалью к границе, индексом n, а две взаимно перпендикулярные оси в плоскости границы — индексом α, $\alpha = 1,2$.

1. *Свободная граница.* Компоненты тензора напряжений: равны нулю $\sigma_{nn} = \sigma_{n\alpha} = 0$.

2. *Граница с абсолютно жестким телом при наличии "склеивания".* Все компоненты смещения точек границы равны нулю: $u_n = u_\alpha = 0$.

3. *Граница с абсолютно жестким телом при наличии "смазки".* Нормальное смещение точек границы и касательные напряжения на границе равны нулю: $u_n = 0$, $\sigma_{n\alpha} = 0$.

4. *Граница с жидкостью.* Нормальное напряжение на границе равно давлению в жидкости, взятому с противоположным знаком; касательные напряжения равны нулю; нормальные скорости частиц твердого тела и жидкости на границе равны между собой:

$$\sigma_{nn} = -p, \quad \sigma_{n\alpha} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} = \upsilon_n.$$

5. *Граница с другим твердым телом при наличии "склеивания".* Все компоненты смещения обоих тел на границе и одноименные компоненты тензора напряжения попарно равны: $u_i^{(\mathrm{I})} = u_i^{(\mathrm{II})}$, $i = 1,2,3$; $\sigma_{nn}^{(\mathrm{I})} = \sigma_{nn}^{(\mathrm{II})}$, $\sigma_{n\alpha}^{(\mathrm{I})} = \sigma_{n\alpha}^{(\mathrm{II})}$.

6. *Граница с другим твердым телом при наличии "смазки".* Попарно нормальные смещения и нормальные напряжения обоих тел на границе равны; касательные напряжения в обоих телах равны нулю: $u_n^{(\mathrm{I})} = u_n^{(\mathrm{II})}$, $\sigma_{nn}^{(\mathrm{I})} = \sigma_{nn}^{(\mathrm{II})}$, $\sigma_{n\alpha}^{(\mathrm{I})} = \sigma_{n\alpha}^{(\mathrm{II})} = 0$.

6.9. Отражение плоской гармонической волны от свободной границы полупространства

Рассматривая волновое движение в однородном бесконечном пространстве, мы поняли очень важную вещь: любое волновое движение в твердом теле всегда можно представить в виде суперпозиции продольных и поперечных волн. Наличие двух типов волновых движений в твердом теле значительно усложняет решение конкретных волновых задач по сравнению с подобной ситуацией для акустических волн в жидкой среде. Ярким и очень важным примером является задача падения плоской упругой волны на плоскую границу раз-

дела двух твердых сред. Однако исследование такой задачи в общем случае, как это было сделано для жидких сред в параграфе 5.5, достаточно громоздкое. Поэтому мы остановимся на важном частном случае падения плоской гармонической волны на свободную плоскую границу полупространства.

Падающую волну на границу будем считать или продольной волной (P-волна), или поперечной волной с поляризацией в плоскости падения волны (SV-волна), или поперечной волной с поляризацией, перпендикулярной к плоскости падения (SH-волна). Любую поперечную волну можно представить как суперпозицию волн этих двух линейных поляризаций.

Усложнение поставленной задачи для твердого тела по сравнению с жидкостью состоит в том, что при падении одной волны на границу образуются сразу две отраженные волны — и продольная, и поперечная. Увеличение количества отраженных волн по сравнению с жидкостью обусловлено увеличением числа условий на границе твердой среды.

Исключением является падение SH-волны (в этой волне поляризация перпендикулярна к плоскости падения волны). Если x_1Ox_3 — плоскость падения волны, x_1Ox_2 — плоскость границы, то поляризация SH-волны будет происходить вдоль оси Ox_2. Поскольку частицы среды смещаются вдоль оси Ox_2, то на свободной границе (плоскость x_1Ox_2) можно рассматривать только одно условие — для касательного напряжения $\sigma_{32} = 0$. Поэтому, отражаться от границы, как и в случае жидкого полупространства, будет одна волна с той же поляризацией (SH-волна). Коэффициент отражения по смещению SH-волны от свободной границы равен единице с плюсом, а для жесткой, т.е. границы вдоль которой нет скольжения, единице с минусом. Решение общей задачи о падении SH-волны на границу раздела двух твердых сред можно исследовать самостоятельно.

Рассмотрим теперь более интересный случай падения P-волны или SV-волны на свободную границу твердого тела. Для такой ситуации, характерной особенностью процесса отражении от свободной границы является наличие в общем случае отраженных P- и SV-волн. В бесконечном пространстве P- и SV-волны могут распространяться независимо. Наличие же свободной границы обусловливает связь двух типов волновых движений.

Анализ задачи об отражении и прохождении звука на границе жидких сред (параграф 5.5) позволяет, используя закон Снелиуса, утверждать, что касательные к границе полупространства компоненты волновых векторов всех волн должны быть одинаковыми. На рис. 6.13 изображена лучевая картина взаимодействия P-волны (рис. 6.13, *а*) и SV-волны (рис. 6.13, *б)* со свободной границей; большими стрелками показаны волновые векторы — $\mathbf{k}_e$ для P-волны, $\mathbf{k}_t$

для SV-волны; маленькие стрелочки иллюстрируют условно выбранное положительное направление колебаний частиц среды в соответствующей волне (для P-волны вдоль направления движения волны, а для SV-волны перпендикулярно к направлению движения волны и против часовой стрелки).

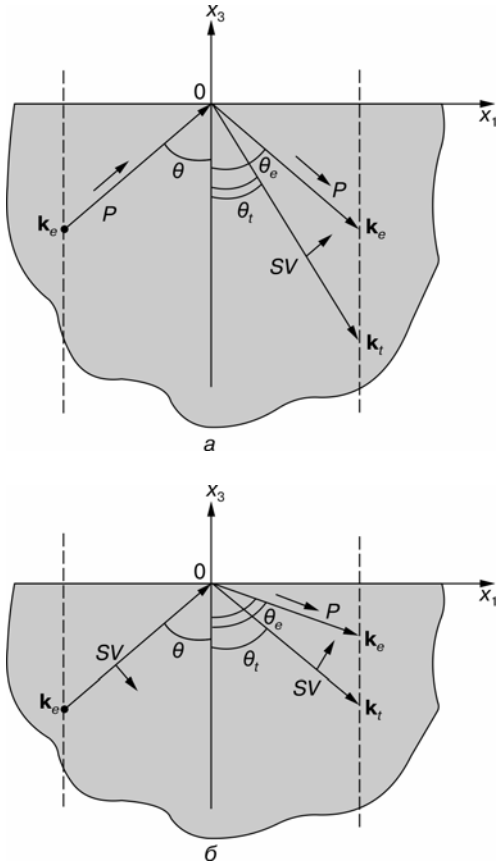


Рис. 6.13. Лучевая картина взаимодействия P-волны (*а*) и SV-волны (*б*) со свободной границей твердого тела (плоскость x_1Ox_2)

В случае падения P-волны на границу (рис. 6.13, *а*) имеем

$$k_e \sin\theta = k_e \sin\theta_e = k_t \sin\theta_t, \qquad (6.126)$$

отсюда $\theta_e = \theta$, а $\sin\theta_t = (k_e/k_t)\sin\theta = (c_t/c_e)\sin\theta$. Поскольку $c_t < c_e$, то $\theta_t < \theta$.

В случае падения SV-волны на границу (рис. 6.13, *б)* получаем

$$k_t \sin\theta = k_t \sin\theta_t = k_e \sin\theta_e, \qquad (6.127)$$

итак, $\theta_t = \theta$, а $\sin\theta_e = (k_t / k_e)\sin\theta = (c_e / c_t)\sin\theta$. Поскольку $c_e > c_t$, то $\theta_e > \theta$.

Пусть на границу падает гармоническая с частотой ω P-волна (рис. 6.13, *а*) единичной амплитуды, которая характеризуется вектором смещения $\mathbf{u}_e = \mathbf{e}_1 u_e^{(1)} + \mathbf{e}_3 u_e^{(3)}$ ($u_e^{(1)}$ и $u_e^{(3)}$ — проекции вектора $\mathbf{u}_e$ на оси координат Ox_1 и Ox_3):

$$\mathbf{u}_e = (\mathbf{e}_1 \sin\theta + \mathbf{e}_3 \cos\theta)\exp\left(ik_e \sin\theta x_1 + ik_e \cos\theta x_3\right). \qquad (6.128)$$

Вектор смещения отраженной P-волны $\mathbf{u}_{ee} = \mathbf{e}_1 u_{ee}^{(1)} + \mathbf{e}_3 u_{ee}^{(3)}$ запишем в виде

$$\mathbf{u}_{ee} = (\mathbf{e}_1 \sin\theta - \mathbf{e}_3 \cos\theta) V_{ee} \exp\left(i(k_e \sin\theta x_1 - k_e \cos\theta x_3)\right), \qquad (6.129)$$

а вектор смещения отраженной SV-волны $\mathbf{u}_{et} = \mathbf{e}_1 u_{et}^{(1)} + \mathbf{e}_3 u_{et}^{(3)}$ — так:

$$\mathbf{u}_{et} = (\mathbf{e}_1 \cos\theta_t + \mathbf{e}_3 \sin\theta_t) V_{et} \exp\left(i(k_e \sin\theta x_1 - k_t \cos\theta_t x_3)\right). \qquad (6.130)$$

Проекции вектора единичной амплитуды волн согласно формулам (6.128)—(6.130) определяются проекциями маленьких стрелочек (см. рис. 6.13, *а*) на оси Ox_1 и Ox_3 системы координат; V_{ee} — коэффициент отражения P-волны, а V_{et} — коэффициент отражения SV-волны при падении на границу продольной волны; $k_e = \omega / c_e$, $k_t = \omega / c_t$ — волновые числа соответственно P-волны и SV-волны.

Перепишем (6.128)—(6.130), используя обозначения $k_e \sin\theta = k$, $k_e \cos\theta = \eta_e$, $k_t \cos\theta_t = \eta_t$. Тогда $\sin\theta = \dfrac{k}{k_e}$, $\cos\theta = \dfrac{\eta_e}{k_e}$, $\cos\theta_t = \dfrac{\eta_t}{k_t}$, $\sin\theta_t = \dfrac{k_e}{k_t}\sin\theta = \dfrac{k}{k_t}$. Итак, векторы смещения приобретают вид

$$\mathbf{u}_e = \left(\mathbf{e}_1 \frac{k}{k_e} + \mathbf{e}_3 \frac{\eta_e}{k_e}\right)\exp\left(i(kx_1 + \eta_e x_3)\right), \qquad (6.131)$$

$$\mathbf{u}_{ee} = \left(\mathbf{e}_1 \frac{k}{k_e} - \mathbf{e}_3 \frac{\eta_e}{k_e}\right) V_{ee} \exp\left(i(kx_1 - \eta_e x_3)\right), \qquad (6.132)$$

$$\mathbf{u}_{et} = \left(\mathbf{e}_1 \frac{\eta_t}{k_t} + \mathbf{e}_3 \frac{k}{k_t}\right) V_{et} \exp\left(i(kx_1 - \eta_t x_3)\right). \qquad (6.133)$$

Для определения искомых коэффициентов отражения по смещению V_{ee} и V_{et} запишем граничные условия на свободной границе:

$$\sigma_{31} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 0, \qquad (6.134)$$

$$\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 0. \tag{6.135}$$

Понятно, что граничное условие $\sigma_{32}\big|_{x_3=0} = 0$ выполняется автоматически. Далее нужно подставить выражения (6.131)—(6.133) в условия (6.134) и (6.135), при этом $u_1 = u_e^{(1)} + u_{ee}^{(1)} + u_{et}^{(1)}$; $u_3 = u_e^{(3)} + u_{ee}^{(3)} + u_{et}^{(3)}$ определяются как суммы соответствующих проекций векторов смещений $\mathbf{u}_e$, $\mathbf{u}_{ee}$, $\mathbf{u}_{et}$. Итак, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов V_{ee}, V_{et}:

$$V_{ee} + \frac{k_t^2 - 2k^2}{2k\eta_e}\frac{k_e}{k_t}V_{et} = 1, \tag{6.136}$$

$$V_{ee} - \frac{2k\eta_t}{k_t^2 - 2k^2}\frac{k_e}{k_t}V_{et} = -1. \tag{6.137}$$

Решая систему (6.136), (6.137), определяем

$$V_{ee} = \frac{4k^2\eta_e\eta_t - (k_t^2 - 2k^2)^2}{4k^2\eta_e\eta_t + (k_t^2 - 2k^2)^2}, \tag{6.138}$$

$$V_{et} = \frac{k_t}{k_e}\frac{4k\eta_e(k_t^2 - 2k^2)}{4k^2\eta_e\eta_t + (k_t^2 - 2k^2)^2}. \tag{6.139}$$

Поскольку $k = k_e \sin\theta$, $\eta_e = k_e \cos\theta$, $\eta_t = k_t \cos\theta_t = k_t\sqrt{1 - (k_e / k_t)^2 \sin^2\theta}$, то коэффициенты V_{ee} и V_{et} можно записать только через угол падения θ P-волны и отношение волновых чисел k_t и k_e (см. (6.125)):

$$q = \frac{k_t}{k_e} = \frac{c_e}{c_t} = \sqrt{2\frac{1-\upsilon}{1-2\upsilon}}. \tag{6.140}$$

Разделив числитель и знаменатель дробей в формулах (6.138) и (6.139) на k_e^4, получим

$$V_{ee} = \frac{4\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{q^2 - \sin^2\theta} - (q^2 - 2\sin^2\theta)^2}{4\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{q^2 - \sin^2\theta} + (q^2 - 2\sin^2\theta)^2}, \tag{6.141}$$

$$V_{et} = \frac{4q\sin\theta\cos\theta(q^2 - 2\sin^2\theta)}{4\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{q^2 - \sin^2\theta} + (q^2 - 2\sin^2\theta)^2}. \tag{6.142}$$

Итак, мы получили формулы, которые позволяют вычислить коэффициенты отражения V_{ee} и V_{et}, если заданы угол падения θ продольной волны и коэффициент Пуассона ν среды. Для нормального падения ($\theta = 0°$) имеем $V_{ee} = -1$, $V_{et} = 0$, т.е. полное отражение P-волны без образования SV-волны. Значение $V_{ee} = -1$ при $\theta = 0°$ определяет удвоенную амплитуду колебаний частиц среды на поверхности свободной границы (убедитесь в этом, расписав, согласно формул (6.128)—(6.130), сумму $\mathbf{u}_e + \mathbf{u}_{ee} + \mathbf{u}_{et}$ при $\theta = 0°$ и $x_3 = 0$).

В случае $\theta = 90°$ (скользящее падение) имеем $V_{ee} = -1$ и $V_{et} = 0$. Если теперь вычислить вектор смещения частиц среды на поверхности свободной границы, то получим $\mathbf{u}_e + \mathbf{u}_{ee} + \mathbf{u}_{et} = 0$ ($\theta = 90°$), т.е. движение отсутствует. Это обстоятельство является указанием на то, что соотношение (6.126) не справедливо в случае скользящего падения P-волны. При оценке указанного парадокса нужно иметь в виду, что рассматривается задача об отражении плоской гармонической волны, и вопрос об источнике плоской волны не обсуждается. Поэтому такая постановка задачи приводит к указанному противоречию при скользящем падении P-волны, но для всех других углов падения дает наглядную картину взаимодействия упругих волн с плоской границей.

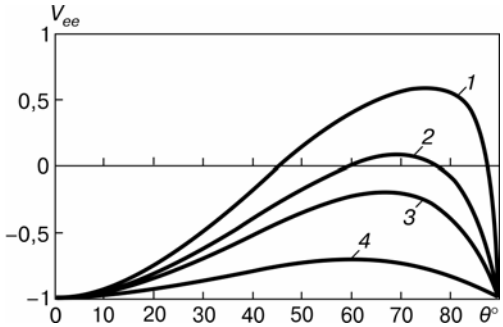


Рис. 6.14. Зависимость коэффициента V_{ee} от угла падения θ при разных значениях коэффициента Пуассона: кривые *1—4* при значениях ν соответственно 0,15; 0,25; 0,3; 0,4

На рис. 6.14 показана зависимость коэффициента V_{ee} от угла падения при разных значениях коэффициента Пуассона. Из рисунка следует, что при некоторых значениях ν и углах падения θ амплитуда отраженной P-волны равна нулю, т.е. падающая P-волна в процессе отражения полностью превращается в поперечную SV-волну. Соответствующий энергетический анализ процесса отражения P-волны позволяет убедиться, что в таких ситуациях энергетический коэффициент отражения для SV-волны равен единице (см. ниже параграф

6.10). Из выражения (6.139) для V_{ee} видно, что это происходит при выполнении равенства

$$4k^2\eta_e\eta_t - (k_t^2 - 2k^2)^2 = 0. \qquad (6.143)$$

Анализ этого соотношения показывает, что существует критическое значение $\tilde{\nu} = 0{,}2637$. Если в среде $\nu < \tilde{\nu}$, то уравнение (6.143) имеет два действительных корня для угла падения в диапазоне (0°, 90°). При $\nu > \tilde{\nu}$ таких корней нет, т.е. при любых углах падения амплитуда отраженной P-волны не равна нулю.

Рассмотренный случай отражения P-волны от границы полупространства характеризуется также тем, что изменение угла падения не приводит к качественному изменению в волновой картине, т.е. мы всегда имеем отражение в виде распространяющихся волн. Другими словами, приведенная на рис. 6.13, *а* лучевая картина процесса отражения продольной волны описывает характерные черты физики явления, за исключением случая скользящего падения (θ = 90°).

Теперь рассмотрим падение на свободную границу полупространства гармонической с частотой ω SV-волны единичной амплитуды. Как увидим в дальнейшем, здесь ситуация может существенно изменится. Запишем выражения для векторов смещения в падающей SV-волне и отраженных SV-и P-волнах (рис. 6.13, *б)*:

$$\mathbf{u}_t = (\mathbf{e}_1\cos\theta - \mathbf{e}_3\sin\theta)\exp\left(i(k_t\sin\theta x_1 + k_t\cos\theta x_3)\right), \qquad (6.144)$$

$$\mathbf{u}_{tt} = (\mathbf{e}_1\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta)V_{tt}\exp\left(i(k_t\sin\theta x_1 - k_t\cos\theta x_3)\right), \qquad (6.145)$$

$$\mathbf{u}_{te} = (\mathbf{e}_1\sin\theta_e - \mathbf{e}_3\cos\theta_e)V_{te}\exp\left(i(k_t\sin\theta x_1 - k_e\cos\theta_e x_3)\right), \qquad (6.146)$$

Перепишем выражения (6.144)—(6.146), используя соотношения $k_t\sin\theta = k$, $k_t\cos\theta = \eta_t$, $k_e\cos\theta_e = \eta_e$, $\sin\theta_e = (k_t/k_e)\sin\theta = k/k_e$:

$$\mathbf{u}_t = \left(\mathbf{e}_1\frac{\eta_t}{k_t} - \mathbf{e}_3\frac{k}{k_t}\right)\exp\left(i(kx_1 + \eta_t x_3)\right), \qquad (6.147)$$

$$\mathbf{u}_{tt} = \left(\mathbf{e}_1\frac{\eta_t}{k_t} + \mathbf{e}_3\frac{k}{k_t}\right)V_{tt}\exp\left(i(kx_1 - \eta_t x_3)\right), \qquad (6.148)$$

$$\mathbf{u}_{te} = \left(\mathbf{e}_1\frac{k}{k_e} - \mathbf{e}_3\frac{\eta_e}{k_e}\right)V_{te}\exp\left(i(kx_1 - \eta_e x_3)\right). \qquad (6.149)$$

Расписывая граничные условия (6.134) и (6.135), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов V_{ee} и V_{et}:

$$V_{tt} + \frac{2k\eta_e}{k_t^2 - 2k^2}\frac{k_t}{k_e}V_{te} = 1, \tag{6.150}$$

$$V_{tt} - \frac{k_t^2 - 2k^2}{2k\eta_t}\frac{k_t}{k_e}V_{te} = -1. \tag{6.151}$$

Отсюда имеем такие формулы:

$$V_{tt} = -\frac{4k^2\eta_e\eta_t - (k_t^2 - 2k^2)^2}{4k^2\eta_e\eta_t + (k_t^2 - 2k^2)^2}, \tag{6.152}$$

$$V_{te} = \frac{k_e}{k_t}\frac{4k\eta_t(k_t^2 - 2k^2)}{4k^2\eta_e\eta_t + (k_t^2 - 2k^2)^2}. \tag{6.153}$$

Как и в случае падения P-волны, запишем коэффициенты V_{tt} и V_{te} как функции угла падения θ *SV*-волны и коэффициента Пуассона ν (при этом принимаем во внимание, что $k = k_t \sin\theta$, $\eta_t = k_t \cos\theta$, $\eta_e = k_e \cos\theta_e = k_e\sqrt{1-(k_t/k_e)^2\sin^2\theta} = k_e\sqrt{1-q^2\sin^2\theta}$, где $q = k_t/k_e$):

$$V_{tt} = -\frac{4\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{1-q^2\sin^2\theta} - q(1-2\sin^2\theta)^2}{4\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{1-q^2\sin^2\theta} + q(1-2\sin^2\theta)^2}, \tag{6.154}$$

$$V_{te} = \frac{4\sin\theta\cos\theta(1-2\sin^2\theta)}{4\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{1-q^2\sin^2\theta} + q(1-2\sin^2\theta)^2}. \tag{6.155}$$

Если $\theta = 0$ (нормальное падение SV-волны), то $V_{tt} = 1$, а $V_{te} = 0$; согласно формулам (6.144)—(6.146) на свободной границе ($x_3 = 0$) имеем удвоенную амплитуду колебаний частиц среды вдоль оси Ox_1. В случае скользящего падения ($\theta = 90°$) также имеем $V_{tt} = 1$, $V_{te} = 0$ и, как следствие, отсутствие движения в среде (см. формулы (6.144)-(6.146)). Этот парадокс обсуждался выше при анализе падения P-волны.

На рис. 6.13, *б* показаны лучи, вдоль которых распространяются плоские гармонические волны. Но, поскольку угол отражения P-волны θ_e больше, чем угол падения θ SV-волны ($\theta_e > \theta$), то такое представление процесса имеет смысл, пока угол θ_e изменяется в диапазоне от 0 до 90°. Угол $\theta_e = 90°$ соответствует критическому углу падения SV-волны

$$\theta_{\text{кр}} = \arcsin\frac{k_e}{k_t} = \arcsin\frac{c_t}{c_e}. \tag{6.156}$$

При $\theta > \theta_{кр}$ процесс отражения поперечной волны уже невозможно объяснить с точки зрения лучевого представления. Это обусловлено тем, что при $\theta > \theta_{кр}$ продольная волна становится неоднородной волной, свойства которой мы детально изучили в п. 5.5.4.

Количественный анализ процесса отражения можно провести согласно формул (6.154), (6.155) и при $\theta > \theta_{кр}$. В ситуации, когда $\theta > \theta_{кр}$ имеем $q \sin \theta > 1$, тогда $\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \theta}$ является мнимой величиной:

$$\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \theta} \xrightarrow[\theta > \theta_{кр}]{} i\sqrt{q^2 \sin^2 \theta - 1}, \qquad (6.157)$$

где q определяется формулой (6.140). При закритических углах падения ($\theta > \theta_{кр}$) физическое решение получается после умножения выражений (6.147)—(6.149) на $\exp(-i\omega t)$ и выделения действительной части в компонентах векторов смещений.

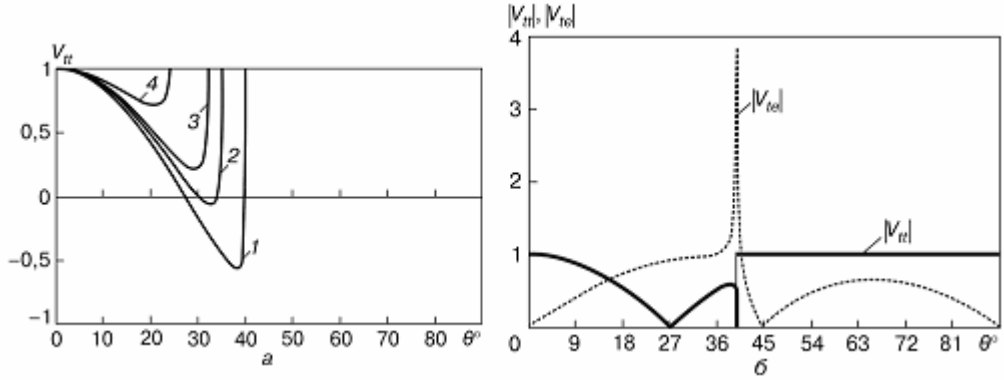


Рис. 6.15. Зависимость коэффициентов отражения V_{tt}(*а* — $\nu = 0{,}15$; 0,25; 0,30; 0,40 — кривые *1—4*) и $|V_{tt}|$, $|V_{te}|$ (*б* — $\nu = 0{,}15$; $\theta_{кр} \approx 39{,}92°$) от угла падения θ

На рис. 6.15, *а* приведены зависимости изменения коэффициента отражения SV-волны V_{tt} от угла падения θ для разных значений коэффициента Пуассона. Вычисления выполнены для углов, меньше критического, поэтому рис. 6.15, *а* характеризует также зависимость критического угла $\theta_{кр}$ от коэффициента Пуассона ν. При $\theta > \theta_{кр}$ согласно выражениям (6.154) и (6.157) имеем $|V_{tt}| = 1$, поскольку, как мы уже знаем, средний поток мощности вдоль оси Ox_3 в неоднородной продольной волне равен нулю.

Как и на рис. 6.14, здесь также наблюдается полная трансформация энергии падающей на границу SV-волны в продольную волну (этому эффекту соответствуют точки пересечения кривых и оси абс-

цисс). Это происходит при значениях коэффициента Пуассона ν, меньших некоторого $\tilde{\nu}$. Величина $\tilde{\nu}$ определяется при анализе того же уравнения (6.143), что и в случае падения P-волны, и равна 0,2637. Но углы падения, при которых происходит полное преобразование поперечной волны в продольную волну, будут, безусловно, другими.

На рис. 6.15, *б* показана зависимость модулей коэффициентов отражения $|V_{tt}|$ и $|V_{te}|$ от угла падения θ при $\nu = 0{,}15$ ($c_e / c_t = 1{,}56$). Интересной особенностью отражения продольной волны является резкий рост величины V_{te} в окрестности критического угла падения $\theta_{\text{кр}} = 39{,}92°$. Такой рост коэффициента V_{te} не должен беспокоить, ведь поток энергии определяется кинематическими и силовыми факторами волнового поля (см. далее параграф 6.10). В отдельных случаях ($\theta \approx$ 27,3°; 39,88° на рис. 6.15, *б*) энергия, которую уносит отраженная SV-волна, равна нулю, а отраженная P-волна переносит всю энергию падающей SV-волны.

Кроме случая полного преобразования одного типа движения в другой в процессе отражения от свободной границы не меньший интерес представляет случай полного сохранения типа движения (ситуация нормального падения волны является очевидной). Если падает P-волна, то согласно (6.142) условием сохранения типа движения будет уравнение $q^2 - 2\sin^2\theta = 0$. Но выполнение этого условия невозможно, поскольку имеем $\sin\theta = q/\sqrt{2} = \sqrt{(1-\upsilon)/(1-2\upsilon)} > 1$ (см. (6.140)), что невозможно. При падении SV-волны в соответствии (6.155) имеем условие: $1 - 2\sin^2\theta = 0$. Отсюда $\theta = 45°$. На рис. 6.15 такое значение угла падения закритическое, и, следовательно, при отражении SV-волны возбуждается неоднородная продольная волна. В качестве примера (рис. 6.15, *б*) при $\theta = 45°$ имеем $|V_{tt}| = 1$ и $V_{te} = 0$, т.е. продольная волна не возбуждается.

Подводя итоги проведенного анализа задачи отражения волны от свободной границы твердого полупространства, следует отметить, что полученные результаты представляют интерес при исследовании волновых и колебательных процессов в твердых телах конечных размеров.

6.10. Энергетический анализ процесса отражения плоской гармоничной волны от свободной границы полупространства

Рассмотрим энергетические характеристики процесса отражения P-волны (рис. 6.13, *а*) и SV-волны (рис. 6.13, *б*) от свободной границы полупространства. Предметом анализа являются энергетиче-

ские коэффициенты отражения, которые характеризуют распределение потока энергии падающей волны между отраженными волнами.

Плотность потока мощности $\mathbf{P}$ в твердом теле определяется соотношением

$$\mathbf{P} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \tag{6.159}$$

где σ - тензор напряжения, $\mathbf{u}$ - вектор смещения. В декартовых координатах, для нашей плоской задачи (рис. 6.13), определение потока мощности будет иметь вид

$$-\mathbf{P} = \mathbf{e}_1 \left(\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \sigma_{13} \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) + \mathbf{e}_3 \left(\sigma_{31} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \sigma_{33} \frac{\partial u_3}{\partial t} \right). \tag{6.160}$$

При записи этих соотношений координаты тензора напряжения и вектора смещения являются действительными функциями.

При анализе гармоничных волновых процессов $(\exp(-i\omega t))$ обычно рассматривают не мгновенное, а среднее за период $T = 2\pi/\omega$ значение потока мощности (см. формулу (4.51)). Тогда используя комплексную форму записи, согласно (4.55), среднее значение плотности потока мощности $\langle \mathbf{P} \rangle$ определяется так:

$$\langle \mathbf{P} \rangle = -\frac{\omega}{2} \mathrm{Re} \left(\hat{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^* \right) = -\frac{\omega}{2} \mathrm{Re} \left(i \hat{\sigma} \mathbf{u}^* \right). \tag{6.161}$$

Компоненты вектора $\langle \mathbf{P} \rangle$ в декартовых координатах будут иметь вид

$$\langle P_1 \rangle = -\frac{\omega}{2} \mathrm{Re} \left(i\sigma_{11} u_1^* + i\sigma_{13} u_3^* \right), \quad \langle P_3 \rangle = -\frac{\omega}{2} \mathrm{Re} \left(i\sigma_{31} u_1^* + i\sigma_{33} u_3^* \right). \tag{6.162}$$

В записанных формулах компоненты вектора $\langle \mathbf{P} \rangle$ выражаются через комплексные амплитуды компонент тензора напряжения и вектора смещения.

Предлагаем читателю убедится самостоятельно в том, что для обоих случаев падения P- и SV-волн оказывается справедливым принцип суперпозиции средних потоков мощности $\langle P_3 \rangle$, которые переносятся отдельными волнами. Таким образом, в направлении нормали к свободной границе (вдоль оси Ox_3) имеют место такие энергетические соотношения:

при падении P-волны $\quad \langle P_3^{(e)} \rangle = \langle P_3^{(ee)} \rangle + \langle P_3^{(et)} \rangle$,

при падении SV-волны $\quad \langle P_3^{(t)} \rangle = \langle P_3^{(tt)} \rangle + \langle P_3^{(te)} \rangle$.

Именно этот факт делает физически обоснованным раздельное вычисление средних потоков мощности в каждой волне с целью наглядного изображения энергетических соотношений.

Также самостоятельно убедитесь в том, что при определении среднего потока мощности вдоль поверхности полупространства (вдоль оси Ox_1) принцип суперпозиции не работает. Для данной задачи наблюдается направленный поток мощности вдоль свободной границы, причем плотность потока зависит от величины пространственной координаты x_3.

Используя выражение для плотности среднего потока мощности $\langle P_3 \rangle = -\frac{\omega}{2}\mathrm{Re}\left(i\sigma_{31}u_1^* + i\sigma_{33}u_3^*\right)$ и данные параграфа 6.9 можно получить (сделайте самостоятельно) формулы для относительных величин энергий, которые уносят отраженные P- и SV-волны при падении

$$\text{P-волны} \quad E_{ee} = \frac{\langle P_3^{(ee)} \rangle}{\langle P_3^{(e)} \rangle} = V_{ee}^2, \quad E_{et} = \frac{\langle P_3^{(et)} \rangle}{\langle P_3^{(e)} \rangle} = \frac{\sqrt{q^2 - (\sin\theta)^2}}{q^2 \cos\theta} V_{et}^2, \qquad (6.163)$$

и

$$\text{SV-волны} \quad E_{tt} = \frac{\langle P_3^{(tt)} \rangle}{\langle P_3^{(t)} \rangle} = V_{tt}^2, \quad E_{te} = \frac{\langle P_3^{(te)} \rangle}{\langle P_3^{(t)} \rangle} = \frac{q\sqrt{1 - q^2 (\sin\theta)^2}}{\cos\theta} V_{te}^2, \qquad (6.164)$$

где величина $q = \frac{c_e}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}$, θ - угол падения волны.

Рассмотрим численные результаты. На рис 6.16 показанные относительные величины энергий, которые уносят отраженные P- и SV-волны (рис. 6.16, *а*, *б* - при падении P-волны, рис. 6.16, *в*, *г* - при падении SV-волны), как функции угла падения θ для разных значений коэффициента Пуассона ν. Как видим, распределение энергии между отраженными волнами имеет сильную зависимость как от угла падения, так и от коэффициента Пуассона. В целом сравнение графиков на рис. 6.16 говорит об отсутствии качественных отличий в процессах отражения продольных и поперечных волн при докритических углах падения.

Приведенные кривые интересные также с точки зрения энергетического анализа отражения в условиях полного преобразования волн. Как для P-волны, так и для SV-волны при $\nu < \tilde{\nu} = 0{,}2637$ имеем два значения угла падения, при которых наблюдается полное преобразование падающей P-волны в SV-волну (рис. 6.14) и полное преобразование падающей SV-волны в P-волну (рис. 6.15, *а*). Для случаев относительно близких значений этих углов (величина ν близка к $\tilde{\nu}$), как видно из кривых 2 $(\nu = 0{,}25)$ на рис. 6.16, существует довольно широкий диапазон углов падения θ, для которых энергия, которую приносит падающая волна одного типа, практически полностью уносится волной другого типа. Для малых значений ν наблюдается

сужение указанного диапазона углов, для которых полное превращение волн энергетически четко выражено (кривые 1 на рис.6.16). При этом для большего по величине угла падения диапазон углов, в котором наблюдается явление преобразования типа волны, чрезвычайно узкий.

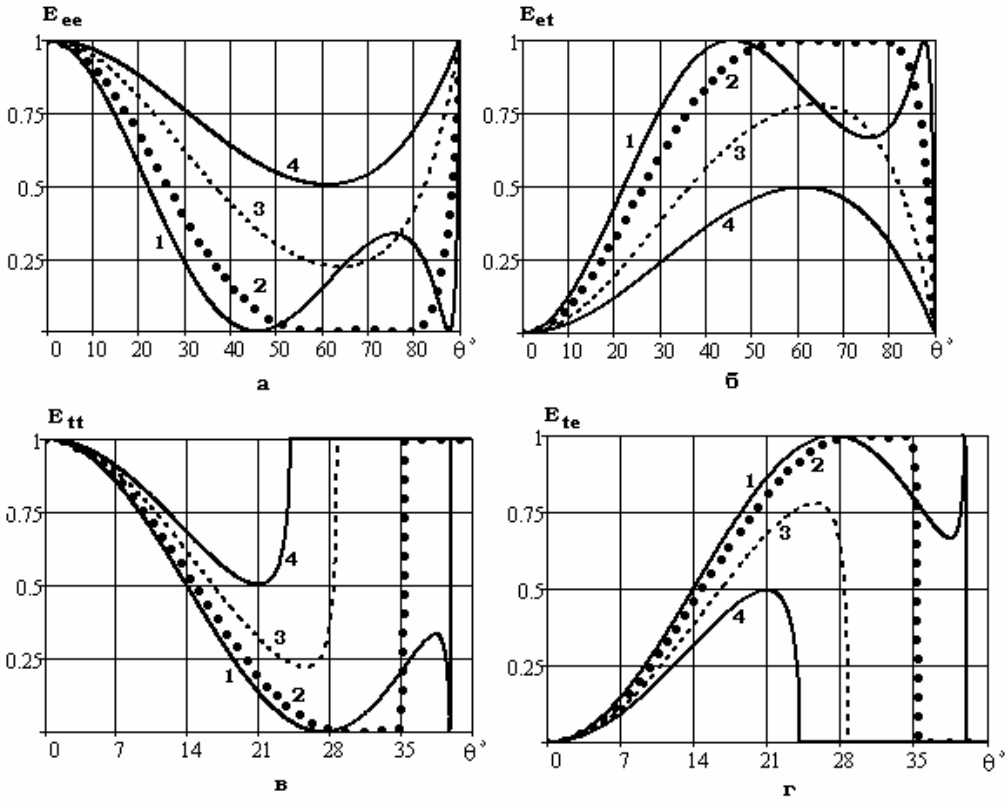


Рис. 6.16. Зависимость коэффициентов E_{ee} (а), E_{et} (б), E_{tt} (в), E_{te} (г) от угла падения θ при разных значениях коэффициента Пуассона: кривые *1—4* при значениях ν соответственно 0,15; 0,25; 0,35; 0,4

6.11. Поверхностная волна Рэлея

Вспомним колебательную систему с двумя степенями свободы. При исследовании системы с двумя степенями свободы (см. параграфы 2.5 и 2.6), были записаны два дифференциальных уравнения движения. Если считать, что внешняя сила не действует на колебательную систему, то получаем систему дифференциальных уравнений с нулевой правой частью. Такие уравнения описывают свобод-

ные колебания в системе с двумя степенями свободы. Далее, учитывая гармоническую зависимость от времени свободных колебательных движений, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний в каждой парциальной системе. Однородная система алгебраических уравнений имеет решение, если ее определитель равен нулю. Анализ уравнения (равенство нулю определителя) показывает, что искомых свободных колебаний в системе может быть два. Такие колебания получили название собственных, или нормальных, колебаний. Они характеризуются собственной частотой и собственной формой, т.е. отношением амплитуд колебаний в парциальных системах. Можно сказать, что нормальные колебания — это свободные колебания в системе при специфических начальных условиях, когда система, при отсутствии потерь, сохраняет форму колебаний бесконечно долго. В режиме вынужденных колебаний явление резонанса в колебательной системе наблюдается, когда частота внешней силы равна одной из собственных частот системы. При этом в системе без демпфирования амплитуда колебаний в обеих парциальных системах стремится в бесконечность. Такие характерные свойства, как мы не раз убеждались, наблюдаются и при исследовании других колебательных систем.

Вернемся к рассмотренной выше задаче о падении плоской волны на свободную границу полупространства, и под другим углом зрения посмотрим на полученные решения (6.138), (6.139) и (6.152), (6.153). Они являются решениями соответствующих алгебраических систем уравнений (6.136), (6.137) и (6.150), (6.151). Если определитель этих систем (а он одинаков для обеих систем (6.136), (6.137) и (6.150), (6.151)) приравнять к нулю, то будем иметь выражение, которое стоит в знаменателе решений (6.138), (6.139) и (6.152), (6.153). Итак, при условии равенства нулю определителя, а отсюда и знаменателя решений, будем иметь бесконечные значения коэффициентов отражения, т.е. бесконечный рост амплитуд отраженных волн. Проводя параллели с исследованием колебательной системы с двумя степенями свободы, можно считать, что нахождение корней уравнения в виде равного нулю определителя означает исследование *собственных волновых движений полупространства со свободной границей.*

Проведем такое исследование. Приравнивая нулю знаменатель в указанных выше решениях, записываем такое уравнение:

$$4k^2\eta_e\eta_t + (k_t^2 - 2k^2)^2 = 0. \qquad (6.165)$$

Несколько преобразуем это уравнение. Принимая во внимание, что $\eta_e = \sqrt{k_e^2 - k^2}$, $\eta_t = \sqrt{k_t^2 - k^2}$, делим (6.165) на k^4 и освобождаемся от радикалов. Тогда получим

$$R(k)=\left(\frac{k_t}{k}\right)^6-8\left(\frac{k_t}{k}\right)^4+24\left(1-\frac{2}{3}\frac{k_e^2}{k_t^2}\right)\left(\frac{k_t}{k}\right)^2-16\left(1-\frac{k_e^2}{k_t^2}\right)=0\,. \quad (6.166)$$

Выражение (6.166) можно рассматривать как уравнение относительно компоненты волнового вектора вдоль границы. Поскольку $k = \omega/c$, $k_e = \omega/c_e$, $k_t = \omega/c_t$, то (6.166) можно переписать как уравнение для фазовой скорости c волнового процесса вдоль границы:

$$R(c)=\left(\frac{c}{c_t}\right)^6-8\left(\frac{c}{c_t}\right)^4+24\left(1-\frac{2}{3}\frac{c_t^2}{c_e^2}\right)\left(\frac{c}{c_t}\right)^2-16\left(1-\frac{c_t^2}{c_e^2}\right)=0\,. \quad (6.167)$$

Это уравнение относительно величины c/c_t имеет единственный действительный корень, который лежит между 0 и 1. Действительно, подставляя вместо c/c_t нуль, получаем отрицательное число; подставляя вместо c/c_t единицу, получаем положительное число. Т.е., между нулем и единицей должен быть искомый корень. (Можно провести строгое доказательство существования и единственности корня на указанном интервале.) В качестве примера на рис. 6.17 приведен график функции $R(c/c_t)$ на отрезке [0,1] при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}3$ (здесь $c_t^2/\tilde{n}_e^2 \approx 0{,}286$). Видно, что существует единственный корень $c = c_R$.

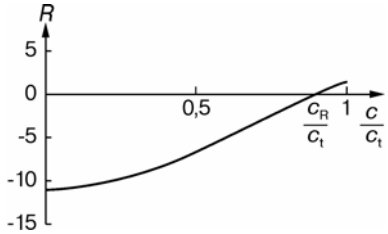


Рис. 6.17. График функции $R(c/ct)$ при $\nu = 0{,}3$

Каков физический смысл полученного решения? Поскольку $c_R < c_t$, а, значит, и $c_R < c_e$, то исследуемая бегущая волна вдоль границы распространяется медленнее, чем поперечная и продольная волны. Иначе, величина $k_R = \omega/c_R$ больше волновых чисел P- и SV-волн ($k_R > k_t$, $k_R > k_e$). Таким образом, P- и SV-волны в этом случае являются неоднородными.

Итак, звуковое поле в полупространстве можно представить как совокупность двух неоднородных волн: одна — продольного типа и вторая — поперечного. Эти волны распространяются вдоль границы с фазовой скоростью c_R и затухают в направлении от границы в глубину полупространства (вдоль оси Ox_3).

Запишем выражения для векторов смещений в неоднородных P- и SV-волнах. Обозначим

$$\eta_e = \sqrt{k_e^2 - k_R^2} = i\sqrt{k_R^2 - k_e^2} = i\eta_e^{(R)}, \quad \eta_t = \sqrt{k_t^2 - k_R^2} = i\sqrt{k_R^2 - k_t^2} = i\eta_t^{(R)} \quad (6.168)$$

(поскольку $k_R > k_t$, $k_R > k_e$). Из однородной системы (6.150), (6.151) (в правой части уравнений имеем нули, поскольку падающей волны нет) получим связь между амплитудами волн. Так, из уравнения (6.150) имеем

$$V_{tt} = \frac{i2k_R\eta_e^{(R)}}{2k_R^2 - k_t^2}\frac{k_t}{k_e}V_{te}. \quad (6.169)$$

Выражение для неоднородных волн получим из формул (6.148), (6.149) для однородных SV- и P-волн с учетом новых обозначений и формулы (6.169):

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{e}_1 u_1^{(e)} + \mathbf{e}_3 u_3^{(e)} = \left(\mathbf{e}_1\frac{k_R}{k_e} - \mathbf{e}_3\frac{i\eta_e^{(R)}}{k_e}\right)V\exp\left(ik_R x_1 + \eta_e^{(R)}x_3\right), \quad (6.170)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{e}_1 u_1^{(t)} + \mathbf{e}_3 u_3^{(t)} = \left(\mathbf{e}_1\frac{i\eta_t^{(R)}}{k_t} + \mathbf{e}_3\frac{k_R}{k_t}\right)\frac{i2k_R\eta_e^{(R)}}{2k_R^2 - k_t^2}\frac{k_t}{k_e}V\exp\left(ik_R x_1 + \eta_t^{(R)}x_3\right), \quad (6.171)$$

здесь V — постоянная; напомним, что в полупространстве координаты x_3 отрицательные, поэтому при распространении волн в глубину полупространства амплитуды уменьшаются.

Подставив суперпозицию волн (6.170) и (6.171) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_t$ в граничные условия (6.134), (6.135), можно убедиться, что они выполняются (рекомендуем провести эти преобразования). Итак, суперпозиция неоднородных волн продольного и поперечного типов действительно делает свободной от напряжения границу полупространства.

Следует отметить, что уравнение (6.167) имеет другие действительные и комплексные корни, которые определяют разные комбинации продольных и поперечных волн, обусловливающие нулевое значение напряжения на границе. Но решение в виде поверхностной волны одно и соответствует действительному корню $c_R < c_t$.

Итак, полученное поле можно интерпретировать как самостоятельную *поверхностную волну* сложной структуры, которая может существовать в твердом теле (подобно тому, как мы определяли нормальные колебания в системе с двумя степенями свободы). Впервые существование поверхностных волн в твердом теле предсказал Рэлей

в 1885 г. Поэтому эту поверхностную волну называют *рэлееськой волной* (или *волной Рэлея*), а уравнение (6.160) — *уравнением Рэлея*.

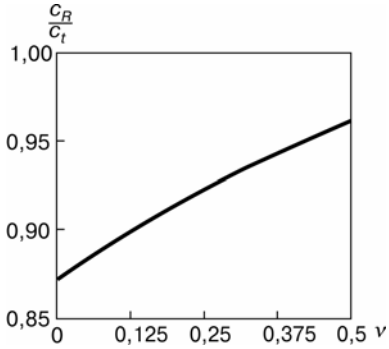


Рис. 6.18. Зависимость относительной скорости рэлеевськой волны от коэффициента Пуассона среды

Таким образом, рэлеевська волна распространяется вдоль границы с фазовой скоростью $c_R = \omega / k_R$, которая меньше скорости поперечной волны c_t. Важно отметить, что коэффициенты уравнения (6.167) не зависят от частоты, а, следовательно, и фазовая скорость c_R волны Рэлея не зависит от частоты, т.е. волна Релея распространяется без дисперсии (произвольный импульс возбуждения сохраняет свою форму при распространении). Значение c_R зависит от коэффициента Пуассона среды ν и монотонно изменяется от $0{,}87c_t$ при $\nu = 0$ до $0{,}96c_t$ при $\nu = 0{,}5$ (рис. 6.18).

Можно получить приближенную формулу для вычисления скорости волны Рэлея. Для этого, поделив исходное дисперсионное уравнение (6.165) на k^4 и учитывая то, что справедливы неравенства $k_R > k_t$, $k_R > k_e$, перепишем его в виде

$$-4\sqrt{1-\frac{s^2}{q^2}}\cdot\sqrt{1-s^2}+(s^2-2)^2=0, \qquad (6.172)$$

где $s = k_t / k = c / c_t$, $q^2 = c_e^2 / c_t^2$. Возьмем в качестве начального приближения $c = c_t$. Тогда искомое значение c представим в виде выражения, которое учитывает только линейные по отклонению c от c_t слагаемые, именно: $c = c_t(1 - \delta)$, откуда $s = 1 - \delta$.

Подставим $s = 1 - \delta$ в уравнение (6.172), потом возведем его в квадрат и, учитывая только линейные члены по δ, придем к уравнению $8\delta\left(4-3q^2\right)+q^2=0$. С учетом формулы (6.140), определяем величину поправки $\delta=(1-\nu)/\left[8(1+\nu)\right]$. Подставляя это значение δ в вы-

бранное приближение для скорости $c = c_t(1 - \delta)$, получаем удобную формулу для вычисления скорости волны Рэлея:

$$\frac{c_R}{c_t} \approx \frac{7+9\nu}{8(1+\nu)} = \frac{0{,}875+1{,}125\nu}{1+\nu}. \qquad (6.173)$$

Сравнение значений, полученных согласно формуле (6.173), с точным решением уравнения (6.160) свидетельствует, что погрешность аппроксимации не превышает 0,5 %.

Анализируя кинематику движения в поверхностной волне Рэлея, записываем выражения для компонентов вектора смещения $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 u_1 + \mathbf{e}_3 u_3 = \mathbf{e}_1(u_1^{(e)} + u_1^{(t)}) + \mathbf{e}_3(u_3^{(e)} + u_3^{(t)})$ с точностью до постоянной:

$$u_1 = V\left[\exp\left(\eta_e^{(R)} x_3\right) - \frac{2\eta_e^{(R)}\eta_t^{(R)}}{2k_R^2 - k_t^2}\exp\left(\eta_t^{(R)} x_3\right)\right]\exp\left(ik_R x_1\right), \qquad (6.174)$$

$$u_3 = V\frac{\eta_e^{(R)}}{k_R}\left[\exp\left(\eta_e^{(R)} x_3\right) - \frac{2k_R^2}{2k_R^2 - k_t^2}\exp\left(\eta_t^{(R)} x_3\right)\right]\exp\left(ik_R x_1 - i\frac{\pi}{2}\right). \qquad (6.175)$$

Формулы (6.174) и (6.175) можно переписать, выделяя отношение скоростей c_t/c_e и c_R/c_t; дальше с учетом временного множителя $\exp(-i\omega t)$ переходим к действительной форме записи компонентов вектора смещения:

$$u_1 = V\left[\exp\left(\frac{2\pi L_e x_3}{\lambda_R}\right) - \frac{2L_e L_t}{2 - c_R^2/c_t^2}\exp\left(\frac{2\pi L_t x_3}{\lambda_R}\right)\right]\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{x_1}{\lambda_R}\right), \qquad (6.176)$$

$$u_3 = -VL_e\left[\exp\left(\frac{2\pi L_e x_3}{\lambda_R}\right) - \frac{2}{2 - c_R^2/c_t^2}\exp\left(\frac{2\pi L_t x_3}{\lambda_R}\right)\right]\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{x_1}{\lambda_R}\right), \qquad (6.177)$$

где $L_e = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_e^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{c_R}{c_t}\cdot\frac{c_t}{c_e}\right)^2}$, $L_t = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_t^2}}$, $\lambda_R = \frac{2\pi}{k_R}$ — длина волны Рэлея. Смещение определено с точностью до произвольной постоянной V. Поскольку отношение скоростей $c_e/c_t = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$ (см. (6.140)), то единственным параметром в формулах (6.176) и (6.177) для расчета компонентов вектора смещения есть коэффициент Пуассона ν.

Таким образом, выражения (6.176) и (6.177) описывают волну, экспоненциально спадающую с расстоянием от границы. Вид показателей экспонент в (6.176), (6.177) приводит к выводу: чем меньше длина волны Рэлея λ_R, тем на меньшую глубину проникает волна.

Из соотношений (6.176) и (6.177) видно, что частицы в волне Рэлея перемещаются по эллиптическим орбитам. Для величины $\nu = 0{,}25$ отношение меньшей полуоси эллипса (u_1) к большей (u_3) при $x_3 = 0$ приблизительно равняется 0,694. Изменение коэффициента Пуассона ν от 0 до 0,5 приводит к изменению этого отношения от 0,556 до 0,788.

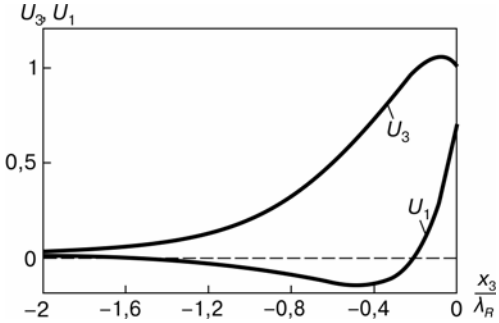


Рис. 6.19. Нормированные зависимости амплитуд U_1 и U_3 компонент вектора смещения частиц в волне Рэлея от расстояния до границы x_3/λ_R; $\nu = 0{,}25$

На рис. 6.19 показаны величины амплитуды вертикальных U_3 и горизонтальных U_1 смещений, нормированные к амплитуде компоненты u_3 на поверхности границы ($x_3 = 0$), $\nu = 0{,}25$. Как видим, вертикальное смещение (u_3) достигает максимума на расстоянии $0{,}08\lambda_R$ от поверхности, а потом плавно падает, не изменяя знак. Горизонтальное смещение (u_1) становится равным нулю при $x_3 = -0{,}19\lambda_R$, а потом изменяет направление. Таким образом, при $|x_3| < 0{,}19\lambda_R$ движение частиц среды происходит по эллиптическим орбитам против часовой стрелки, а при $|x_3| > 0{,}19\lambda_R$ — по часовой стрелке (объясните почему).

Энергетический анализ волны Рэлея показывает, что средняя за период нормальная к границе составляющая потока мощности тождественно равна нулю. Средняя за период величина потока мощности вдоль границы отлична от нуля и положительна. Оказывается, что практически вся энергия, которая переносится волной Рэлея, сосредоточена в слое толщиной λ_R.

Волны Рэлея играют важную роль в сейсмических явлениях: поскольку они являются поверхностными, то они расходятся при распространении от источника волн только в двух измерениях (например, при землетрясении - вдоль земной коры) и потому затухают медленнее, чем обычные продольные и поперечные волны, которые распространяются в объеме среды. Поэтому поверхностные волны можно наблюдать на таких больших расстояниях от эпицентра землетрясения, на которых волны других типов уже не заметны. Волны Рэлея мегагер-

цового диапазона широко используются в дефектоскопии для регистрации поверхностных трещин и в акустоэлектронных устройствах для обработки сигналов.

6.12. Волны в твердом полупространстве, возбуждаемые пространственной гармоникой

В ультразвуковом неразрушающем контроле изделий из металла и других упругих материалов почти всегда наблюдается такая ситуация: предполагаемый дефект расположен в толще детали, а доступ возможен только к ее поверхности. Тогда возникают важные, с практической точки зрения, вопросы: какое возбуждение нужно создать на поверхности, чтобы в толще детали распространялись нужные для неразрушающего контроля волны или какие волны будут распространяться в объеме детали при заданном возбуждении поверхности?

Попробуем исследовать эти вопросы на модели твердого полупространства с плоской границей, хотя найдется немного изделий, похожих на полупространство. Обычно имеется несколько граничных поверхностей, причем необязательно плоских. Однако нередко влиянием всех границ, кроме той, где приложено возбуждение, можно пренебрегать. Это бывает в случаях, когда несущественна интерференция прямой и отраженной волн – то ли вследствие импульсного характера возбуждения, то ли вследствие малой амплитуды отраженного сигнала. Что касается локального искривления поверхности, то им можно в первом приближении пренебрегать, если радиус кривизны достаточно большой в сравнении с длиной волны. Таким образом, закономерности, присущие твердому полупространству, могут быть разумно перенесены на практически интересные случаи.

Пусть на поверхности твердого полупространства располагается источник, который создает возбуждение на некоторой части этой поверхности. Другая часть поверхности полупространства по обыкновению граничит с другой упругой средой. Если этой средой является воздух (а это типичная ситуация), можно, вследствие резкого отличия плотности и упругих свойств таких материалов как металлы и воздух, пренебрегать реакцией воздушной среды и рассматривать эту часть границы как свободную, т.е. как границу с вакуумом.

Источник представляет собой некоторый объем активного материала (например, пьезопластина), к которому подводится электрическое напряжение. Строго говоря, необходимо рассматривать взаимодействие этого материала с упругой средой и поставить, так называемую, контактную задачу электроупругости. Решение такой задачи, как правило, довольно сложное. Но в некоторых случаях вместо постановки контактной задачи удается задать на участке, где действует источник,

параметры движения поверхности твердой среды (т.е. поставить более простую граничную задачу).

Это возможно в тех случаях, когда параметры источника и среды резко отличаются. Например, когда материал источника имеет значительную плотность и практически несжимаемый. Тогда смещение поверхности среды будет определяться смещением поверхности источника. Следовательно, можно задавать смещение частичек среды на участке поверхности, которая занятая источником. При противоположном соотношении свойств материала источника и среды на том же участке можно задавать компоненты тензора напряжения (например, когда между источником и металлом присутствует слой жидкости). Нужно подчеркнуть, что ряд практически важных закономерностей проявляются одинаково в граничных и контактных задачах. Поэтому методически будет правильно, если мы рассмотрим их на примере граничной задачи.

Пусть на поверхности $x_3 = 0$ твердого полупространства $x_3 \le 0$ определены компоненты тензора напряжений (рис. 6.20) $\sigma_{31}(x_1, x_2, t)$, $\sigma_{32}(x_1, x_2, t)$, $\sigma_{33}(x_1, x_2, t)$. Рассматриваем плоскую задачу, при которой параметры возмущения не зависят от координаты x_2. Необходимо определить упругие волны, которые возникают в среде.

Рис. 6.20. Упругое полупространство ($x_3 \le 0$)

Будем считать, что напряжение σ_{31}, σ_{32} и σ_{33} изменяются во времени по гармоничному закону (в дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ не пишем). Такое рассмотрение является целесообразным, ведь, используя метод Фурье, можно получить решение и для не гармонического во времени возбуждения источника.

Метод Фурье, в основе которого лежит представление о том, что практически любую сложную функцию одной или нескольких переменных, например $\sigma(x_1, x_3)$, можно представить в виде суммы гармонических компонент вида $\exp\left[i(\beta_1 x_1 + \beta_3 x_3)\right]$ целесообразно применять и при исследовании поля источника произвольной формы.

Рассмотрим случай, когда напряжение на поверхности описывается одной пространственной гармоникой $\exp(i\beta x_1)$ с круговой пространственной частотой β, и определим волны, которые порождаются таким гармоническим пространственным возмущением. Если возмущения описывается более сложной функцией координат, то ее нужно представить в виде совокупности пространственных гармоник (с помощью интеграла Фурье), а потом найти поле, которое возникает в среде при таком возмущении в виде совокупности волн, которые отвечают каждой пространственной гармонике.

Итак, пусть на границе $x_3 = 0$ (рис. 6.20) заданны механические напряжения

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = \exp(i\beta x_1). \tag{6.178}$$

Круговая пространственная частота β связана с пространственным периодом L соотношением $\beta = 2\pi / L$.

Волны, возникающие в среде, описываются векторной функцией смещения $\mathbf{u}(x_1, x_3)$, которую можно представить в виде суммы $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_t$, где $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_t$ - решения волновых уравнений (6.116). Векторы: $\mathbf{u}_e = \mathbf{e}_1 u_e^{(1)} + \mathbf{e}_3 u_e^{(3)}$, где $u_e^{(1)}$ и $u_e^{(3)}$ — проекции вектора $\mathbf{u}_e$ на оси координат Ox_1 и Ox_3 соответственно, $\mathbf{u}_t = \mathbf{e}_1 u_t^{(1)} + \mathbf{e}_3 u_t^{(3)}$, где $u_t^{(1)}$ и $u_t^{(3)}$ — проекции вектора $\mathbf{u}_t$ на оси координат Ox_1 и Ox_3. Амплитудно-фазовые соотношения между векторами смещений $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_t$ должны быть такими, чтобы удовлетворялись граничные условия (6.178).

Рассмотрим волновые уравнения относительно проекций векторов $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_t$. Понятно, что форма этих уравнений одинакова:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{6.179}$$

где $u \equiv u_e^{(n)}$ или $u \equiv u_t^{(n)}$, $n = 1,3$; $k = \omega / c_e$ или $k = \omega / c_t$ соответственно. Будем искать решение уравнения (6.179) в виде

$$u(x_1, x_3)\exp(-i\omega t) = g(x_3)\exp(-i\omega t + i\beta x_1). \tag{6.180}$$

Сделаем комментарий к выбору формы решения. Ясно, что если возбуждение – гармоническая функция времени, то и волны будут зависеть от времени по гармоническому закону с частотой ω (вследствие линейности уравнений). Предположим, что пространственная периодичность источника вдоль координаты x_1 сохраняется и для поля упругих волн и зависимость от x_1 будет определяться $\exp(i\beta x_1)$. Если это не так, то предположение будет опровергнуто выкладками. Но те же соображения относительно линейности уравнений позволяют надеяться, что предположение правильное. Относительно зависимости от ко-

ординаты x_3 ничего определенного сказать нельзя, кроме одного: если решение будет иметь вид волн, то эти волны должны распространяться от границы с амплитудой, которая не возрастает в процессе своего распространения.

Предлагаем читателю подставить решение (6.180) в уравнение (6.179) и получить такие выражения для компонент векторов смещений $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_t$:

$$u_e^{(n)} = A_e^{(n)} \exp\left[i\left(\beta x_1 - \eta_e x_3\right)\right], \tag{6.181}$$

$$u_t^{(n)} = A_t^{(n)} \exp\left[i\left(\beta x_1 - \eta_t x_3\right)\right], \tag{6.182}$$

где $n = 1,3$, $\eta_e = \sqrt{k_e^2 - \beta^2}$, $\eta_t = \sqrt{k_t^2 - \beta^2}$, $k_e = \omega / c_e$, $k_t = \omega / c_t$, $A_e^{(n)}$ и $A_t^{(n)}$ - неизвестные пока комплексные амплитуды.

При условиях $\beta \le k_e$ и $\beta \le k_t$ эти выражения определяют продольную (P-волну) (6.181) и поперечную (SV-волну) (6.182) однородные плоские волны. Поскольку волновые векторы $\mathbf{k}_e$ и $\mathbf{k}_t$ ориентированы в направлении распространения соответствующей волны (см. рис. 6.21), то угол между этим направлением и осью Ox_3 равен

$$\theta_e = \arcsin\frac{\beta}{k_e}, \quad \theta_t = \arcsin\frac{\beta}{k_t}. \tag{6.183}$$

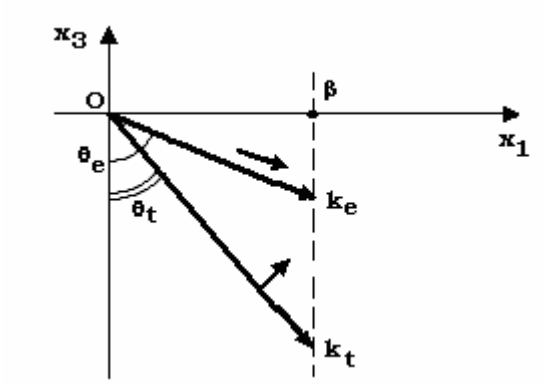


Рис. 6.21. Иллюстрация к определению направлений распространения продольной и поперечной волн

Учитывая, что $\beta = 2\pi / L$, $k_e = 2\pi / \lambda_e$, $k_t = 2\pi / \lambda_t$, где λ_e и λ_t - длины продольной и поперечной волн, определим углы θ_e и θ_t через соотношение пространственного периода возбуждения L с длинами волн λ_e и λ_t:

$$\theta_e = \arcsin\frac{\lambda_e}{L}, \quad \theta_t = \arcsin\frac{\lambda_t}{L}. \qquad (6.184)$$

Формулы (6.184) можно получить согласно наглядным геометрическим построениям. На рис. 6.22 синусоида отображает график пространственного возмущения $\sigma_{33}(x_1, t)$ в некоторый момент времени t. Параллельные прямые линии представляют собой фронты продольной волны, которые находятся на расстоянии λ_e один от другого, а прямая ab определяет луч, вдоль которого распространяется продольная волна. Как видно, справедливость первой формулы (6.184) становится очевидной. Аналогичные построения можно провести и для поперечной волны.

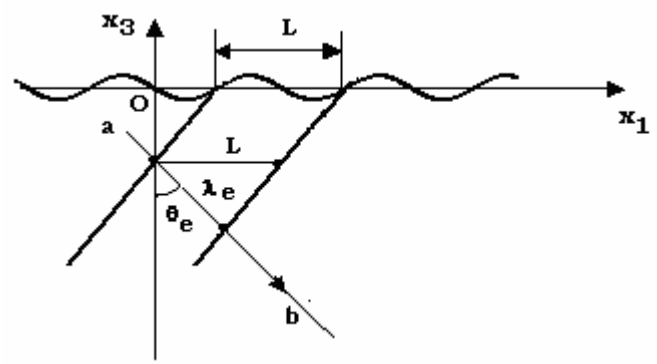


Рис. 6.22. Геометрическая картинка соотношения между пространственным периодом возбуждения L с длиной продольной волны λ_e

Говоря образно, к пространственной гармонике возбуждения "достраиваются" две волны: продольная и поперечная, которые распространяются под разными углами. Формулы (6.184) можно переписать еще в таком виде:

$$\theta_e = \arcsin\frac{2\pi c_e}{\omega L}, \quad \theta_t = \arcsin\frac{2\pi c_t}{\omega L}. \qquad (6.185)$$

Как видим, при постоянном пространственном периоде возбуждения L с изменением частоты ω происходит поворот лучей продольной и поперечной волн (при уменьшении частоты ω углы θ_e и θ_t увеличиваются). Тот же эффект имеет место если зафиксировать частоту и изменять пространственный период L. Если L и ω таковы, что $\lambda_e = L$ (или $\lambda_t = L$), то луч, который определяет направление движения волны, располагается параллельно поверхности. Если же при уменьшении L или ω получаем $\lambda_e > L$, то имеем $\beta > k_e$. Аналогично при $\lambda_t > L$ имеем $\beta > k_t$. При таких обстоятельствах, как мы уже знаем, образовываются неоднородные продольная и поперечная волны.

Таким образом, при возмущении поверхности полупространства пространственной гармоникой в среде возникают две волны, каждая из которых может быть или однородной, или неоднородной. Запишем векторы смещения в этих волнах в виде

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{e}_1 u_e^{(1)} + \mathbf{e}_3 u_e^{(3)} = \left(\mathbf{e}_1 A_e^{(1)} + \mathbf{e}_3 A_e^{(3)}\right)\exp\left[i\left(\beta x_1 - \eta_e x_3\right)\right], \quad (6.186)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{e}_1 u_t^{(1)} + \mathbf{e}_3 u_t^{(3)} = \left(\mathbf{e}_1 A_t^{(1)} + \mathbf{e}_3 A_t^{(3)}\right)\exp\left[i\left(\beta x_1 - \eta_t x_3\right)\right], \quad (6.187)$$

где (следите за проекциями маленьких стрелочек на оси координат Ox_1, Ox_3 на рис. 6.21)

$$A_e^{(1)} = \sin\theta_e A_e = \frac{\beta}{k_e} A_e, \quad (6.188)$$

$$A_e^{(3)} = -\cos\theta_e A_e = -\frac{\eta_e}{k_e} A_e = -\frac{\sqrt{k_e^2 - \beta^2}}{k_e} A_e, \quad (6.189)$$

$$A_t^{(1)} = \cos\theta_t A_t = \frac{\eta_t}{k_t} A_t = \frac{\sqrt{k_t^2 - \beta^2}}{k_t} A_t, \quad (6.190)$$

$$A_t^{(3)} = \sin\theta_t A_t = \frac{\beta}{k_t} A_t. \quad (6.191)$$

Здесь A_e и A_t еще неизвестные амплитудные множители. Понятно, что формулы (6.186) и (6.187) одинаково справедливы как для описания однородных, так и неоднородных волн. В последнем случае величины η_e и η_t будут чисто мнимыми.

Амплитудные множители A_e и A_t найдем из граничных условий (6.178), а именно

$$\sigma_{31} = \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 0, \quad (6.192)$$

$$\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \exp(i\beta x_1) \quad \text{при} \quad x_3 = 0. \quad (6.193)$$

Третье условие $\sigma_{32} = 0$ при $x_3 = 0$ выполняется автоматически. Подставим в условия (6.192), (6.193) выражения $u_1 = u_e^{(1)} + u_t^{(1)}$ и $u_3 = u_e^{(3)} + u_t^{(3)}$, где $u_e^{(1)}, u_t^{(1)}$ и $u_e^{(3)}, u_t^{(3)}$ определяются согласно формулам (6.186)-(6.191). После несложных преобразований, которые рекомендуем читателю провести самостоятельно, получим систему из двух уравнений относительно искомых амплитудных множителей A_e и A_t:

$$A_e + \frac{k_t^2 - 2\beta^2}{2\beta\eta_e}\frac{k_e}{k_t} A_t = 0, \quad (6.194)$$

$$A_e - \frac{2\beta\eta_t}{k_t^2 - 2\beta^2}\frac{k_e}{k_t}A_t = -\frac{i}{\mu}\frac{k_e}{k_t^2 - 2\beta^2}. \qquad (6.195)$$

Решая ее, находим

$$A_e = -i\frac{k_e}{\mu}\frac{k_t^2 - 2\beta^2}{D(\beta)}, \qquad (6.196)$$

$$A_t = i\frac{k_t}{\mu}\frac{2\beta\eta_e}{D(\beta)}, \qquad (6.197)$$

где определитель

$$D(\beta) = \left(k_t^2 - 2\beta^2\right)^2 + 4\beta^2\eta_e\eta_t. \qquad (6.198)$$

Перепишем формулы (6.196), (6.197) в виде удобном для проведения численных расчетов. Для этого разделим числитель и знаменатель указанных формул на k_t^4 и введем обозначение: $\beta' = \frac{\beta}{k_t}$, $\eta'_e = \sqrt{\frac{1}{q^2} - \beta'^2}$, $\eta'_t = \sqrt{1 - \beta'^2}$, $A'_e = \mu k_t A_e$, $A'_t = \mu k_t A_t$, где, согласно формуле (6.140), величина $q = \frac{c_e}{c_t} = \frac{k_t}{k_e} = \sqrt{2\frac{1-\nu}{1-2\nu}}$, ν - коэффициент Пуассона. Тогда формулы (6.196), (6.197) примут вид

$$A'_e = -\frac{i}{q}\cdot\frac{1 - 2\beta'^2}{\left(1 - 2\beta'^2\right)^2 + 4\beta'^2\eta'_e\eta'_t}, \qquad (6.199)$$

$$A'_t = i\frac{2\beta'\eta'_e}{\left(1 - 2\beta'^2\right)^2 + 4\beta'^2\eta'_e\eta'_t}. \qquad (6.200)$$

Здесь может быть полезной такая аналогия. Если рассматривать пространственную гармонику возбуждения в качестве входного сигнала, саму среду как линейную систему, продольную и поперечную волны как выходной эффект, то зависимости $A_e(\beta)$ и $A_t(\beta)$ сыграют роль частотной характеристики данной системы.

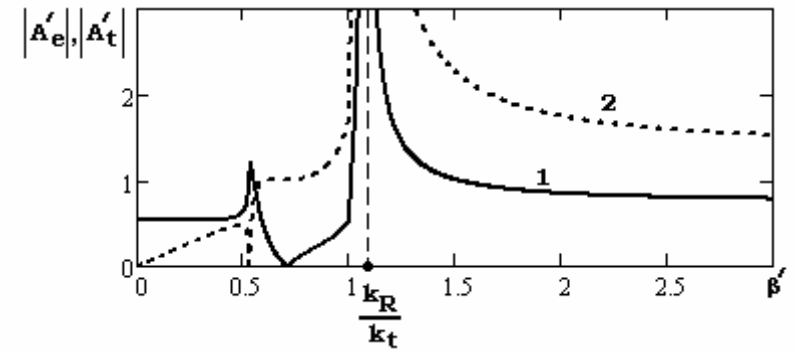


Рис. 6.23. Зависимости модулей амплитудных коэффициентов $\left|A'_e(\beta')\right|$ (кривая 1) и $\left|A'_t(\beta')\right|$ (кривая 2) от нормированной пространственной частоты β'; $\nu = 0{,}3$

На рис. 6.23 представлены зависимости модулей амплитудных коэффициентов $\left|A'_e(\beta')\right|$ и $\left|A'_t(\beta')\right|$ от нормированной пространственной частоты $\beta' = \dfrac{\beta}{k_t} = \dfrac{\lambda_t}{L}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. Анализируя эти зависимости, нужно обратить особое внимание на возможность равенства нулю определителя $D(\beta)$. Как мы уже знаем (см. формулы (6.165)-(6.167)), определитель $D(\beta)$ имеет единственный действительный корень $\beta = k_R$. При $\beta = k_R$ амплитудные коэффициенты $A_e(\beta)$ и $A_t(\beta)$ стремятся к бесконечности. Ситуация, когда кривая частотной характеристики механической системы без потерь устремляется в бесконечность, отвечает частоте собственных колебаний системы. Поэтому, по аналогии можем сказать, что пространственная частота $\beta = k_R$ отвечает волновому процессу, который может существовать в твердом полупространстве со свободной границей без внешнего влияния. Этот волновой процесс называется волна Релея, которую мы исследовали в параграфе 6.11.

Отметим, что, согласно формулам (6.196), (6.197), отношение амплитудных множителей A_t / A_e при $\beta = k_R$ совпадает с формулой (6.169), которая определяет связь между амплитудами неоднородных волн продольного и поперечного типа в волне Релея. Конечно, так и должно быть (убедитесь в этом самостоятельно).

Глядя на рис. 6.23 отметим также следующее:

1) если $\beta = 0$, т.е. пространственный период $L \to \infty$, то имеем постоянное возбуждение на всей поверхности полупространства. Понятно, что в этой ситуации возбуждается только продольная волна. При

увеличении пространственной частоты ($\beta > 0$), т.е. уменьшении величины L, в среде присутствуют две волны – продольная и поперечная;

2) продольная волна является однородной в диапазоне изменения пространственной частоты $0 \le \beta < k_e = k_t / q$, а поперечная волна есть однородная при $0 \le \beta < k_t$. Для всех реальных материалов величина $q > 1$, так при $\nu = 0,3$ имеем $q \approx 1,87$. Тогда при $\beta' > 1/q \approx 0,535$ (см. рис. 6.23) продольная волна будет неоднородной, при $\beta' > 1$ неоднородной будет и поперечная волна. При дальнейшем увеличении величины β' амплитуды возбуждения обеих неоднородных волн остаются постоянными;

3) согласно (6.199) и рис. 6.23, при $\beta' = \sqrt{0,5} \approx 0,707$ в среде распространяется только однородная поперечная волна.

6.13. Методы возбуждения объемных и поверхностных волн

Сформулируем перед собой такую задачу: рассмотреть модель источника, которая описывает практическую возможность возбуждения продольных, поперечных и поверхностных волн (волн Релея). Ключевым моментом для решения этой задачи является вывод, полученный согласно результатам предыдущего параграфа: для того чтобы создать в полупространстве ту или иную волну, нужно возбудить поверхность полупространства пространственной гармоникой с подобранной должным образом пространственной частотой β ($\beta = 2\pi / L$, L - пространственный период). Чтобы получить в полупространстве продольную волну под углом θ_e к оси Ox_3, необходимо выбрать период пространственной гармоники $L = \lambda_e / \sin\theta_e$, где λ_e - длина продольной волны (см. рис. 6.22). Одновременно с продольной волной будет распространяться и поперечная волна под углом θ_t, таким что $\sin\theta_t = \lambda_t / L$. Поскольку $\lambda_t < \lambda_e$, угол $\theta_t < \theta_e$. Если пространственный период $\lambda_t < L < \lambda_e$, то в среде однородной остается только поперечная волна. Когда величина $L < \lambda_t$ в полупространстве имеем две неоднородных волны.

Возможно ли, получить только одну однородную продольную волну, которая распространяется под некоторым углом θ_e? Теоретически - да. Для этого необходимо чтобы напряжение и смещение частичек в пространственной гармонике были такими, как у продольной волны, которая распространяется в бесконечной среде. Но практически реализовать такую возможность очень сложно.

Таким образом, используя тот или другой излучатель, необходимо стремиться создать пространственный период возбуждения с правильно подобранным пространственным периодом L. Поскольку любой излучатель имеет конечные размеры, естественно, речь может идти о периодичности возбуждения только на участке, занятом излучателем. Влияние конечных размеров источника рассмотрим в следующем параграфе, а пока, рассматривая методы возбуждения, будем игнорировать это обстоятельство.

Существует несколько вариантов технической реализации периодического возмущения поверхности полупространства. Рассмотрим три метода (которые возможно читатель уже “изобрел”).

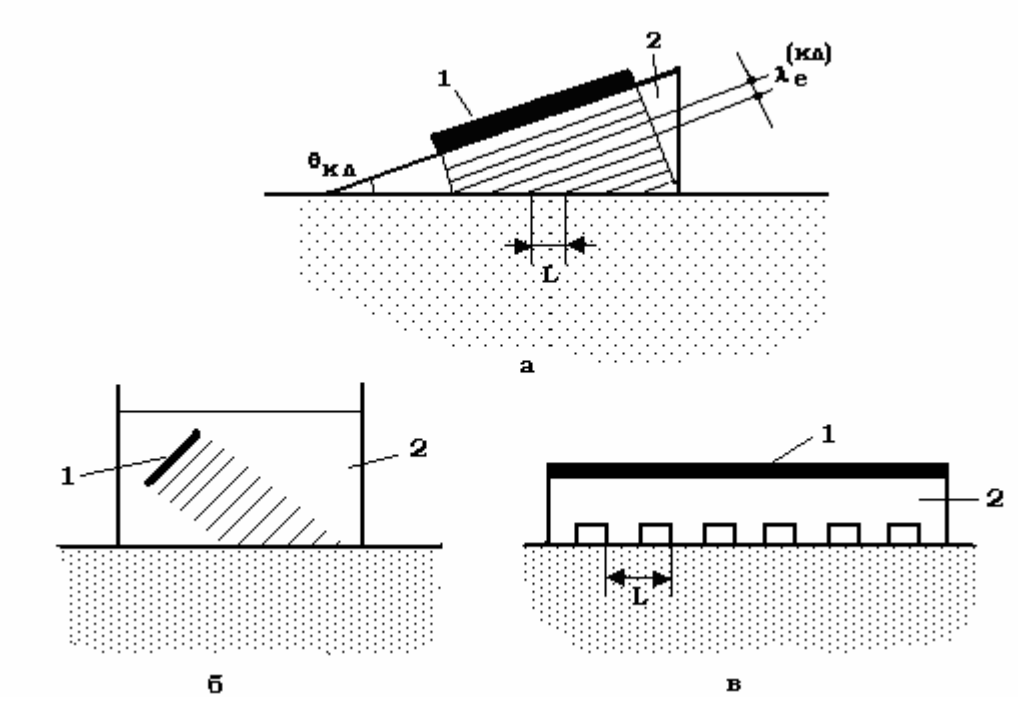


Рис. 6.24. Возбуждение волн в твердом полупространстве:
а - метод клина, 1 -пьезопластина, 2 - клинообразная накладка;
б – иммерсионный метод, 1 - пьезопластина, 2 - жидкость;
в - метод гребенки, 1 - пьезопластина, 2 – гребенчатая накладка

Метод клина (рис. 6.24, *а*). В методе клина используется пьезопластина 1, которая совершает толщинные колебания и возбуждает тем самым в клинообразной накладке 2 продольную волну. Эта волна создает на поверхности полупространства возбуждения с пространствен-

ным периодом $L = \lambda_e^{(\text{кл})} / \sin\theta_{\text{кл}}$, где $\lambda_e^{(\text{кл})}$ - длина продольной волны в материале клинообразной накладки, $\theta_{\text{кл}}$ - угол клина.

Иммерсионный метод (рис. 6.24, *б*) отличается от метода клина тем, что продольная волна излучается в жидкую среду 2, которая контактирует с полупространством. Этот метод удобен в случаях, когда деталь двигается относительно источника (например, лист проката).

Метод гребенки (рис. 6.24, *в*). Толщинные колебания пьезопластины 1 передаются в упругую среду через гребенчатую накладку 2, расстояние между зубцами которой равняется L. В двух предыдущих методах можно без колебаний указать, в какую сторону от источника распространяется волна в твердой среде – вправо. При использовании метода гребенки волны распространяются как влево, так и вправо. Это обусловленное тем, что пространственное возбуждение в твердой среде имеет характер стоящей волны $\cos(\beta x_1)\exp(-i\omega t)$. Его можно представить в виде суммы "бегущих навстречу" пространственных гармоник: $\exp(i\beta x_1 - i\omega t) + \exp(-i\beta x_1 - i\omega t)$, каждая из которых возбуждает волну соответствующего направления.

Нетрудно представить другие технические реализации метода гребенки, которые не имеют гребенчатой накладки. В этом случае периодическое возбуждение создается за счет электрических или магнитных сил, которые действуют на периодически расположенные полоски из соответствующего материала, жестко соединенные с поверхностью твердого тела. Если самая среда обладает пьезоэлектрическими свойствами, то гребенку образовывают металлические полоски, являющиеся электродами, на которые подается электрическое напряжение.

6.14. Волны в твердом полупространстве, возбуждаемые источником конечных размеров

Вызывает практический интерес вопрос, какие волны возбуждает в полупространстве излучатель конченых размеров, который создает на конченом участке поверхности твердого полупространства некоторое периодическое пространственное возмущение. Рассмотрим такую задачу. Пусть компоненты тензора напряжения на поверхности твердого полупространства определены так:

$$\begin{aligned} &\sigma_{33}(x_1,t) = f(x_1)\exp\left[-i(\omega t - \beta_0 x_1)\right], \\ &\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \qquad \text{при} \quad x_3 = 0, \end{aligned} \tag{6.201}$$

где $f(x_1)$ - некоторая функция. В частном случае

$$f(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \in [-a/2,\ a/2], \\ 0, & x_1 \notin [-a/2,\ a/2]. \end{cases} \tag{6.202}$$

Представим σ_{33} как функцию x_1 в виде интегралу Фурье:

$$\sigma_{33}(x_1,t)=\exp(-i\omega t)\int_{-\infty}^{\infty}S(\beta)\exp(i\beta x_1)d\beta. \qquad (6.203)$$

Такая форма записи разрешает воспользоваться результатами параграфу 6.12. Действительно, выражение (6.203) задает напряжение на поверхности полупространства в виде бесконечного количества пространственных гармоник с пространственными частотами β. Каждая из них порождает в полупространстве продольную и поперечную волны, которые могут быть, в зависимости от β, как однородными, так и неоднородными. В соответствии с формулами (6.186), (6.187) их амплитуды обозначены $A_e^{(n)}$ и $A_t^{(n)}$, где $n=1,3$. Суммируя все эти волны, получаем звуковое поле, которое отвечает граничному условию (6.201):

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_3=\mathbf{e}_1u_1+\mathbf{e}_3u_3=\mathbf{e}_1\left(u_e^{(1)}+u_t^{(1)}\right)+\mathbf{e}_3\left(u_e^{(3)}+u_t^{(3)}\right), \qquad (6.204)$$

где

$$\begin{aligned}u_n=u_e^{(n)}+u_t^{(n)}=&\int_{-\infty}^{\infty}A_e^{(n)}(\beta)S(\beta)\exp\left[i(\beta x_1-\eta_e x_3)\right]d\beta+\\&+\int_{-\infty}^{\infty}A_t^{(n)}(\beta)S(\beta)\exp\left[i(\beta x_1-\eta_t x_3)\right]d\beta,\end{aligned} \qquad (6.205)$$

здесь $n=1,3$; u_1,u_3 - проекции вектора смещения частичек среды; $\eta_e=\sqrt{k_e^2-\beta^2}$, $\eta_t=\sqrt{k_t^2-\beta^2}$, $k_e=\omega/c_e$, $k_t=\omega/c_t$; временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем не пишем.

Для того чтобы получить результат интерференции бесконечного количества плоских волн необходимо вычислить интегралы (6.205). Математика дает возможность провести их корректное приближенное вычисление. Но мы воспользуемся более простым приемом на основе физических соображений. Обратимся к функции $S(\beta)$, которая представляет собой преобразование Фурье от σ_{33} по координате x_1. Из (6.201) и (6.203) имеем

$$S(\beta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1)\exp\left[-i(\beta-\beta_0)x_1\right]dx_1. \qquad (6.206)$$

В частном случае, когда $f(x_1)$ определена формулой (6.202) получаем

$$S(\beta)\equiv F(\beta-\beta_0)=\frac{a}{\pi}\frac{\sin\left[(\beta-\beta_0)a/2\right]}{(\beta-\beta_0)a/2}. \qquad (6.207)$$

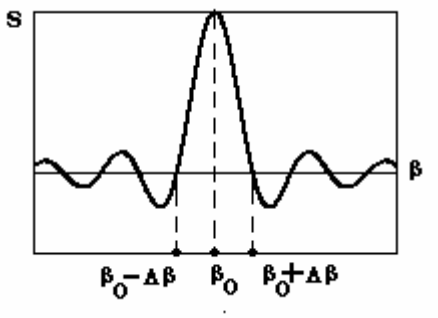


Рис. 6.25. График функции $S(\beta)$

При значении $\beta = \beta_0$ функция (6.207) имеет максимум, который тем уже, чем больше размер излучателя a. Его ширина равна $2\Delta\beta = 4\pi/a$ (см. рис. 9.14).

Предположим, что функции $A_e^{(n)}(\beta)$ и $A_t^{(n)}(\beta)$ изменяются вблизи $\beta = \beta_0$ более плавно, чем функция $S(\beta)$. Тогда и произведения $A_e^{(n)}(\beta)S(\beta)$ и $A_t^{(n)}(\beta)S(\beta)$ имеют узкие максимумы вблизи $\beta = \beta_0$. Предположение о медленности изменения $A_e^{(n)}(\beta)$ и $A_t^{(n)}(\beta)$, разумеется, не выполняется вблизи $\beta = k_R$, где обе функции имеют разрыв. Если учесть поглощение звука, которое всегда имеет место в реальной среде, то разрыв исчезает. Учет поглощения показывает, что вместо разрыва при $\beta = k_R$ функции $A_e^{(n)}(\beta)$ и $A_t^{(n)}(\beta)$ имеют очень острый максимум. Будем считать, что пространственные частоты β_0 и k_R достаточно отдалены, причем $\beta_0 < k_R$. Тогда зависимости $A_e^{(n)}(\beta)S(\beta)$ и $A_t^{(n)}(\beta)S(\beta)$ характеризуются наличием двух узких максимумов, которые локализованные вблизи $\beta = \beta_0$ и $\beta = k_R$. В таком случае приближенное вычисление интегралов (6.205) может быть основано на том, что основной вклад в звуковое поле вносят волны, порождаемые пространственными гармониками, пространственные частоты которых лежат в узких участках вблизи $\beta = \beta_0$ и $\beta = k_R$. Вкладом всех других волн будем пренебрегать.

Рассмотрим результат интерференции волн, которые определены диапазоном пространственных частот $[\beta_0 - \Delta\beta, \beta_0 + \Delta\beta]$, где $2\Delta\beta$ - ширина максимума функции $S(\beta)$. Для определенности обратимся к первому интегралу в формуле (6.205), который определяет поле продольных волн.

Поскольку функция $A_e^{(n)}(\beta)$ вблизи $\beta = \beta_0$ изменяется медленно, то приблизительно можно считать, что $A_e^{(n)}(\beta) \approx A_e^{(n)}(\beta_0)$. Кроме того, преобразуем выражение $\eta_e = \sqrt{k_e^2 - \beta^2}$. Введем обозначение $\chi = \beta - \beta_0$. Тогда η_e можно представить в виде

$$\eta_e = \eta_{e0}\sqrt{1 - \frac{2\beta_0\chi + \chi^2}{\eta_{e0}^2}}, \tag{6.208}$$

где $\eta_{e0} = \sqrt{k_e^2 - \beta_0^2}$. Если $\beta_0 < k_e$, то при достаточно большой длине излучателя $\chi \le \Delta\beta \ll \eta_{e0}$. Это разрешает, разложив выражение (6.208) в ряд Тейлора по степеням χ, ограничиться линейным членом

$$\eta_e \approx \eta_{e0} - \frac{\beta_0}{\eta_{e0}}\chi. \tag{6.209}$$

Подставляем приближенное выражение (6.209) и соотношение $\beta = \chi + \beta_0$ в первый интеграл формулы (6.205). Учитывая, что $d\beta = d\chi$, будем иметь

$$u_e^{(n)} \approx A_e^{(n)}(\beta_0)\exp\left[i(\beta_0 x_1 - \eta_{e0}x_3)\right]\int_{-\Delta\beta}^{\Delta\beta} S(\chi)\exp\left[i\chi\left(x_1 + \frac{\beta_0}{\eta_{e0}}x_3\right)\right]d\chi. \tag{6.210}$$

Поскольку функция $S(\chi)$ достаточно быстро уменьшается вне отрезка $[-\Delta\beta, \Delta\beta]$, то границы интегрирования можно расширить на всю ось χ, не внося при этом большой погрешности. Интеграл в бесконечных пределах представляет собой преобразование Фурье от функции $S(\chi)$, и, следовательно, равен $f\left(x_1 + \frac{\beta_0}{\eta_{e0}}x_3\right)$. Тогда

$$u_e^{(n)} \approx A_e^{(n)}(\beta_0) f\left(x_1 + \frac{\beta_0}{\eta_{e0}}x_3\right)\exp\left[i(\beta_0 x_1 - \eta_{e0}x_3)\right]. \tag{6.211}$$

Экспоненциальный множитель в формуле (6.211) показывает, что функция $u_e^{(n)}(x_1, x_3, t)$ определяет плоскую волну, распространяющуюся вдоль луча, который составляет с осью Ox_3 угол $\theta_e = \arcsin(\beta_0 / k_e)$ (см. рис. 6.21). Амплитуда волны на любой фиксированной глубине x_3 зависит от координаты x_1. Эта зависимость определяется функцией

$f\left(x_1+\frac{\beta_0}{\eta_{e0}}x_3\right)=f\left(x_1+x_3\mathrm{tg}\theta_e\right)$. Если $f\left(x_1\right)$ задана формулой (6.202), то амплитуда продольной волны определяется выражением

$$\left|u_e^{(n)}\right|=\begin{cases}\left|A_e^{(n)}\left(\beta_0\right)\right|, & x_1\in\left(-a/2-x_3\mathrm{tg}\theta_e,\ a/2-x_3\mathrm{tg}\theta_e\right),\\ 0, & x_1\notin\left(-a/2-x_3\mathrm{tg}\theta_e,\ a/2-x_3\mathrm{tg}\theta_e\right).\end{cases}\qquad(6.212)$$

Из (6.212) видно, что прямые линии, которые выходят из точек $x_1=-a/2$ и $x_1=a/2$ на поверхности полупространства (т.е. из крайних точек излучателя) под углом θ_e к оси Ox_3, определяют границы освещенной зоны и зоны тени (рис. 6.26). В целом поле продольной волны, которое определяется формулой (6.211), можно сравнить с лучом прожектора, наклоненного к оси Ox_3 под углом θ_e.

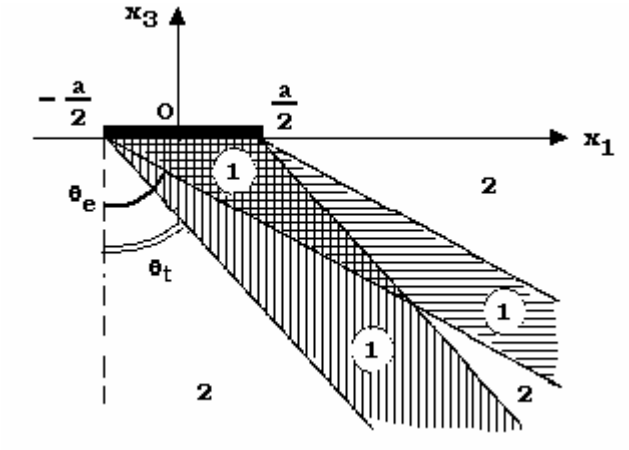


Рис. 6.26. Поле продольной и поперечной волн вблизи излучателя:
1 - освещенная зона, 2 - зона тени

Нужно подчеркнуть, что выражение (6.211) – приближенное, причем ошибка нарастает при увеличении модуля координаты x_3 (в глубину среды). Более точный расчет и эксперименты показывают, что при увеличении глубины становятся существенными дифракционные поправки, которые описывают размыв границы освещенной области и ее расширение. Однако проведенный расчет позволяет правильно оценить картину звукового поля вблизи излучателя и получить физически наглядный результат.

Применяя аналогичные преобразования при вычислении второго интеграла в формуле (6.205), находим, что кроме прожекторной зоны продольной волны, наклоненной под углом θ_e, существует прожектор-

ная зона поперечной волны, наклоненная под углом θ_t. В некоторой части пространства под излучателем продольная и поперечная волны накладываются друг на друга, а потом (если не учитывать размывания зоны тени) наблюдается их пространственное разделение (рис. 6.26).

Теперь рассмотрим вклад, который вносят в звуковое поле волны, порождаемые пространственными гармониками, пространственные частоты которых локализованные вблизи $\beta = k_R$. Обратимся к формулам (6.196), (6.197) для амплитудных множителей $A_e(\beta)$ и $A_t(\beta)$. Напомним, что определитель $D(\beta)$ при $\beta = k_R$ равняется нулю. Представим определитель $D(\beta)$ в окрестности точки $\beta = k_R$ первым членом его разложения в ряд Тейлора:

$$D(\beta) \approx (\beta - k_R + i\delta) D'(k_R). \tag{6.213}$$

Здесь величина δ характеризует поглощение звука в среде. Существенным моментом является то, что δ - весьма малая величина. Именно поэтому функции

$$A_e^{(n)}(\beta) \approx \frac{Q_e^{(n)}(\beta)}{(\beta - k_R + i\delta) D'(k_R)}, \; A_t^{(n)}(\beta) \approx \frac{Q_t^{(n)}(\beta)}{(\beta - k_R + i\delta) D'(k_R)}, \; n = 1,3 \tag{6.214}$$

будут иметь острый максимум в окрестности $\beta = k_R$. Обозначение $Q_e^{(n)}(\beta)$ и $Q_t^{(n)}(\beta)$ становятся понятным при сопоставлении формул (6.214) и (6.188)-(6.191), (6.196), (6.197).

Подставим выражения (6.214) для $A_e^{(n)}(\beta)$ и $A_t^{(n)}(\beta)$ в формулу (6.205). При интегрировании в малой окрестности вблизи $\beta = k_R$ можно вынести за знак интеграла все множители подынтегрального выражения, кроме множителя $1/(\beta - k_R + i\delta)$. Вслед за этим, границы интегрирования можно расширить на всю действительную ось β, не внося при этом существенной погрешности. Учитывая, что [8] $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\beta - k_R + i\delta)^{-1} d\beta = 2\pi i$, получаем такие выражения для компонент вектора смещения:

$$\begin{aligned} u_n = 2\pi i \frac{S(k_R)}{D'(k_R)} \exp(ik_R x_1) \cdot \\ \cdot \left[Q_e^{(n)}(\beta_R) \exp\left(\eta_e^{(R)} x_3\right) + Q_t^{(n)}(\beta_R) \exp\left(\eta_t^{(R)} x_3\right) \right]. \end{aligned} \tag{6.215}$$

Сравнивая (6.215) с формулами (6.174), (6.175) (после расшифровки обозначений $Q_e^{(n)}(\beta_R)$ и $Q_t^{(n)}(\beta_R)$), можно убедиться, что слагаемое, обусловленное вкладом пространственных гармоник, которые локали-

зованы вблизи пространственной частоты $\beta = k_R$, представляет собой волну Релея. Амплитуда этой волны определяется множителем $S(k_R) \equiv F(k_R - \beta_0)$ (см. формулу (6.206)). Если $f(x_1)$ определяется формулой (6.202), то, согласно (6.207),

$$S(k_R) = F(k_R - \beta_0) = \frac{a}{\pi} \frac{\sin\left[(k_R - \beta_0)a/2\right]}{(k_R - \beta_0)a/2}. \qquad (6.216)$$

Понятно, что амплитуда волны Релея будет тем больше, чем ближе величина k_R к пространственной частоте возбуждения β_0.

Таким образом, если β_0 находится в области пространственных частот, которые отвечают однородным волнам, то излучатель конечных размеров возбуждает в полупространстве продольные и поперечные волны, а также волну Релея. Если излучатель предназначен для возбуждения волны Релея, следует выбрать величину $\beta_0 = k_R$. При этом амплитуда волны Релея будет максимальной.

6.15. Твердые волноводы

Подобно жидким слоям, твердые пластины и стрежни ведут себя как волноводы, т.е. в них также без изменений могут распространяться только гармонические волны определенного типа. Такие волны, как мы знаем, называют нормальными волнами, или модами волновода. Но в твердой среде, в отличие от жидкости, распространяются не только продольные, но и поперечные волны; кроме того, граничные условия для твердого тела более сложные, чем для жидкости. Поэтому в твердом волноводе разнообразие нормальных волн большее, а сами эти волны образуют более сложные волновые поля, чем нормальные волны в жидкостном волноводе.

Как и в случае жидкостного волновода, суперпозиция нормальных волн определяет произвольное поле в твердом волноводе, поэтому описание мод твердого волновода является нашей дальнейшей целью.

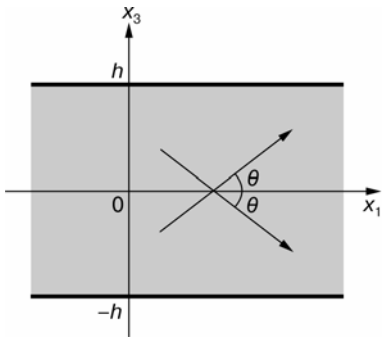


Рис. 6.27. Волновод в виде твердого слоя

Рассмотрим волноводы в виде слоя со свободными границами. Для удобства анализа совместим плоскость x_1Ox_2 декартовой системы координат со срединной плоскостью слоя (рис. 6.27). Ось Ox_1 направим вдоль направления распространения нормальной волны. Толщину волновода обозначим $2h$.

Граничные условия на свободных границах волновода — это равенство нулю соответствующих напряжений при $x_3 = \pm h$:

$$\sigma_{33} = \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \tag{6.217}$$

$$\sigma_{31} = \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = 0, \tag{6.218}$$

$$\sigma_{32} = \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = 0. \tag{6.219}$$

6.16. Распространение SH-волн в слое

В параграфе 6.9 указано на существенные отличия в отражении SH-волн и упругих волн других типов (P и SV) от свободной границы. Отражение SH-волн происходит без возмущения других типов движения, что обусловливает относительную простоту структуры волнового поля в слое.

Как мы знаем, нормальную волну (см. п. 5.11.2) можно представить в виде суперпозиции двух бегущих волн, которые распространяются под некоторым углом к оси волновода, отражаясь поочередно от каждой из границ волновода. Пусть под углом θ к оси волновода распространяются две SH-волны $u_2^{(1)}$ и $u_2^{(2)}$ (рис. 6.27):

$$u_2^{(1)} = U_1 \exp\left[ik_t\left(x_1\cos\theta + x_3\sin\theta\right)\right],$$

$$u_2^{(2)} = U_2 \exp\left[ik_t\left(x_1\cos\theta - x_3\sin\theta\right)\right], \tag{6.220}$$

где $k_t = \omega/c_t$. Напомним, что в SH-волне движение частиц среды происходит вдоль оси Ox_2, поэтому проекции вектора смещения $\mathbf{u}$ на оси Ox_1 и Ox_3 равны нулю: $\mathbf{u} = (0, u_2, 0)$.

Для полного определения волнового поля в слое необходимо установить зависимость между углом θ и частотой волны ω, а также связать между собой значения амплитуд U_1 и U_2. Сделаем это, расписывая граничные условия для свободных границ волновода. Поскольку частички среды смещаются в SH-волне вдоль оси Ox_2, то на свобод-

ной границе твердого волновода можно рассматривать только одно условие – для касательного напряжения $\sigma_{32} = 0$.

При построении решения задачи удобно рассмотреть отдельно симметричные и антисимметричные (относительно плоскости $x_3 = 0$) волновые поля. Суперпозиция симметричных и антисимметричных волн позволяет представить любое поле в слое при однотипных граничных условиях на поверхностях $x_3 = \pm h$. (Действительно, любую функцию $\varphi(x)$, определенную на симметричном интервале $x = (-h, h)$, можно представить в виде суммы четной (симметричной) φ_c и нечетной (антисимметричной) φ_a функций: $\varphi = \varphi_c + \varphi_a$, где $\varphi_c(x) = [\varphi(x) + \varphi(-x)]/2$, $\varphi_a(x) = [\varphi(x) - \varphi(-x)]/2$.)

Рассмотрим случай симметричного волнового поля, т.е. когда суммарное смещение $u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)}$ является четной функцией координаты x_3. В данном случае в плоскости $x_3 = 0$ касательные напряжения равны нулю: $\sigma_{32} = 0$. Из этого условия получаем $U_1 = U_2$. На свободных границах $x_3 = \pm h$ также выполняется условие $\sigma_{32} = 0$. Отсюда находим связь между частотой нормальной волны и углом θ: $\sin(k_t h \sin\theta) = 0$, $k_t = \omega / c_t$. Таким образом

$$k_t h \sin\theta = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.221}$$

Аналогично, в антисимметричном случае из условия $u_2 = 0$ при $x_3 = 0$ находим, что $U_1 = -U_2$, а из граничного условия (6.219) следует такое соотношение:

$$k_t h \sin\theta = (2n+1)\pi/2, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{6.222}$$

Принимая во внимание формулы (6.220)—(6.222), выражение для смещения в слое $u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)}$ для двух типов симметрии в волнах можно представить в таком виде:
для симметричных мод

$$u_{2n} = 2U_0 \cos\left(\frac{n\pi}{h} x_3\right) \exp(i\xi x_1), \tag{6.223}$$

для антисимметричных мод

$$u_{2n} = 2U_0 \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2h} x_3\right) \exp(i\xi x_1), \tag{6.224}$$

где $\xi = k_t \cos\theta$. Каждое из этих выражений представляет собой нормальную волну, которая распространяется в положительном направлении оси Ox_1 с длиной волны $\lambda = 2\pi/\xi$, фазовой скоростью $\upsilon_ф = \omega/\xi$ и изменением амплитуды вдоль координаты x_3 согласно закону синуса или косинуса.

Полученные представления для нормальных волн являются инвариантными относительно замены величины ξ на $-\xi$. Это означает, что для каждой нормальной бегущей волны в положительном направлении оси Ox_1, есть "двойник" — нормальная бегущая волна в отрицательном направлении. Суперпозиция таких двух волн, взятых с одинаковой амплитудой, дает стоячую волну, которую можно рассматривать как собственную форму колебаний слоя.

Используя соотношение $k_t = \omega / c_t$, $\xi = k_t \cos\theta$, переписываем формулы (6.221), (6.222) в виде

$$\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \xi^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{6.225}$$

$$\left[\frac{(2n+1)\pi}{2h}\right]^2 + \xi^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2}, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{6.226}$$

По сути выражения (6.225), (6.226) представляют собой дисперсионное соотношение соответственно для симметричных и антисимметричных волн в слое: они для каждого номера n устанавливают связь между частотой ω и постоянной распространение (волновым числом) ξ.

Определяя ξ из формул (6.225), (6.226), можно записать выражение для фазовой скорости мод

$$\upsilon_{\text{ф}n} = \frac{\omega}{\xi} = \frac{c_t}{\sqrt{1 - \omega_{\text{кр}n}^2 / \omega^2}}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{6.227}$$

где $\omega_{\text{кр}n} = n\pi c_t / h$ — критическая частота n-ой симметричной моды, $\omega_{\text{кр}n} = (2n+1)\pi c_t / (2h)$ — антисимметричной моды. Формула (6.227) аналогична формуле (5.169), которая определяет фазовые скорости мод жидкого волновода (понятно, что и графики зависимости $\upsilon_{\text{ф}n}$ от ω будут подобны графикам на рис. 5.26). Поэтому закономерности, установленные для жидкого волновода с жесткими границами, переносятся и на ситуацию, которая рассматривается сейчас. Укажем, что для симметричной моды с номером $n = 0$ явление дисперсии отсутствует, поскольку фазовая скорость этой моды равна скорости поперечной волны c_t и не зависит от частоты ω. Если частота $\omega < \omega_{\text{кр}n}$, то соответствующая n-тая мода становится неоднородной волной.

Для каждого значения ω дисперсионные уравнения (6.225), (6.226) имеют некоторое конечное число действительных корней (ξ) и бесконечное число мнимых корней. Первые корни соответствуют модам, которые распространяются и переносят при этом энергию. Средний во времени поток энергии через поперечное сечение волновода в этих

модах положительный. Для мод, которые не распространяются и соответствуют мнимым корням (неоднородные волны), средний поток энергии равен нулю.

6.17. Волны Лэмба

Как и для полупространства, в случае слоя со свободными границами P- и SV-волны не могут существовать независимо. В связи с этим картина волнового движения в слое для такого типа движений является более сложной, чем рассмотренная выше картина распространения SH-волн. Дело в том, что нормальные волны, в которых смещение частиц происходит в плоскости x_1Ox_3, невозможно образовать только одной парой плоских волн, поскольку при отражении от границ продольные волны превращаются в поперечные, и наоборот. Таким образом, нормальная волна такого типа должна быть образована двумя парами плоских гармонических волн: парой продольных и парой поперечных волн, которые взаимно превращаются одна в другую при отражении.

На рис. 6.28 показаны волновые векторы всех четырех волн. Согласно закону Снеллиуса, компоненты волновых векторов в направлении оси Ox_1 одинаковы для всех четырех плоских волн, которые образуют нормальную волну; обозначим эту проекцию k. Маленькие стрелочки на рис. 6.28 показывают условно выбранное положительное направление движения частиц в каждой из четырех волн.

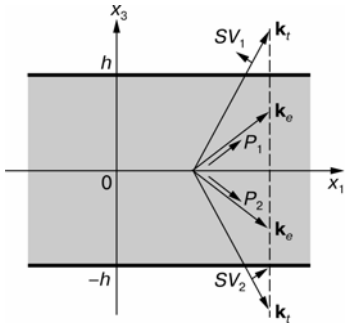


Рис. 6.28. Волновые векторы четырех плоских волн, которые образуют одну нормальную волну в твердом волноводе

Запишем вектор смещения для суперпозиции двух продольных волн P_1 и P_2:

$$\mathbf{u}_e = a_1\left(\mathbf{e}_1\frac{k}{k_e}+\mathbf{e}_3\frac{\eta_e}{k_e}\right)\exp\left(ikx_1+i\eta_e x_3\right)+a_2\left(\mathbf{e}_1\frac{k}{k_e}-\mathbf{e}_3\frac{\eta_e}{k_e}\right)\exp\left(ikx_1-i\eta_e x_3\right), \tag{6.228}$$

где $k_e^2 = k^2 + \eta_e^2$, $k_t^2 = k^2 + \eta_t^2$. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ не пишем. Вектор смещения суперпозиции поперечных волн будет иметь вид

$$\mathbf{u}_t = b_1\left(-\mathbf{e}_1\frac{\eta_t}{k_t} + \mathbf{e}_3\frac{k}{k_t}\right)\exp\left(ikx_1 + i\eta_t x_3\right) + b_2\left(\mathbf{e}_1\frac{\eta_t}{k_t} + \mathbf{e}_3\frac{k}{k_t}\right)\exp\left(ikx_1 - i\eta_t x_3\right). \tag{6.229}$$

Здесь a_1, a_2, b_1, b_2 — амплитудные коэффициенты. Поскольку вдоль оси Ox_3 должны образовываться стоячие волны, то, очевидно, имеем соотношения $|a_1| = |a_2|$ и $|b_1| = |b_2|$.

Все нормальные волны можно разделить на две группы. В одной из них смещение частиц симметрично относительно срединной плоскости слоя ($x_3 = 0$), т.е. проекции вектора смещения $\mathbf{u} = (\mathbf{e}_1 u_1 + \mathbf{e}_3 u_3)$ в нормальной волне имеют такие свойства:

$$u_1(x_1, x_3) = u_1(x_1, -x_3),$$

$$u_3(x_1, x_3) = -u_3(x_1, -x_3). \tag{6.230}$$

Очевидно, согласно (6.230) имеем $u_3(x_1,0) = 0$. Во второй группе частицы смещаются антисимметрично относительно срединной плоскости слоя ($x_3 = 0$), поэтому

$$u_1(x_1, x_3) = -u_1(x_1, -x_3), \quad u_3(x_1, x_3) = u_3(x_1, -x_3). \tag{6.231}$$

Такое движение обусловливает отсутствие напряжения σ_{33} в середине слоя: $\sigma_{33}(x_1, 0) = 0$.

Принимая во внимание формулы (6.228) и (6.229), записываем выражения для компонент вектора смещения в симметричной нормальной волне. Такую волну называют *симметричной волной Лэмба*[*]. Очевидно, чтобы выполнялись соотношение (6.230) нужно установить такие равенства между амплитудными коэффициентами: $a_2 = a_1$, $b_2 = -b_1$. Тогда компоненты вектора смещения для симметричной волны Лэмба будут иметь вид

$$u_1 = A\frac{k}{k_e}\exp\left(ikx_1\right)\cos(\eta_e x_3) - B\frac{\eta_t}{k_t}\exp\left(ikx_1\right)\cos(\eta_t x_3),$$

$$u_3 = iA\frac{\eta_e}{k_e}\exp\left(ikx_1\right)\sin(\eta_e x_3) + iB\frac{k}{k_t}\exp\left(ikx_1\right)\sin(\eta_t x_3). \tag{6.232}$$

Аналогично, опираясь на соотношения (6.231), записываем выражения для компонент вектора смещения в антисимметричной нормаль-

---

[*] Лэмб (Lamb) Гораций (1849—1934) — английский математик и гидромеханик.

ной волны. Такую волну называют *антисимметричной волной Лэмба*. Здесь между амплитудными коэффициентами имеем такие равенства: $a_2 = -a_1$, $b_2 = b_1$, тогда

$$u_1 = iC\frac{k}{k_e}\exp(ikx_1)\sin(\eta_e x_3) - iD\frac{\eta_t}{k_t}\exp(ikx_1)\sin(\eta_t x_3),$$

$$u_3 = C\frac{\eta_e}{k_e}\exp(ikx_1)\cos(\eta_e x_3) + D\frac{k}{k_t}\exp(ikx_1)\cos(\eta_t x_3). \qquad (6.233)$$

Далее нужно записать граничные условия — это равенство нулю напряжений σ_{33} и σ_{31} при $x_3 = \pm h$:

$$\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad x_3 = \pm h,$$

$$\sigma_{31} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0, \quad x_3 = \pm h. \qquad (6.234)$$

Отсюда получаем дисперсионное уравнение, т.е. уравнение, которое связывает постоянную распространение k с частотой ω для каждой нормальной волны; определив k, можно найти и отношение амплитудных коэффициентов A и B или C и D.

Определим необходимые уравнения для волн симметричного типа. После подстановки (6.232) в (6.234) и проведения несложных преобразований запишем такую систему алгебраических уравнений:

$$\frac{k_t}{k_e}(k_t^2 - 2k^2)\cos(\eta_e h)A + 2k\eta_t\cos(\eta_t h)B = 0,$$

$$-2k\eta_e\sin(\eta_e h)\frac{k_t}{k_e}A + (k_t^2 - 2k^2)\sin(\eta_t h)B = 0. \qquad (6.235)$$

Отсюда получим дисперсионное уравнение

$$(k_t^2 - 2k^2)^2\,\mathrm{tg}(\eta_t h) + 4k^2\eta_e\eta_t\,\mathrm{tg}(\eta_e h) = 0, \qquad (6.236)$$

где $\eta_t = \sqrt{k_t^2 - k^2}$, $\eta_e = \sqrt{k_e^2 - k^2}$, $k_t = \omega/c_t$, $k_e = \omega/c_e$. Итак, решение уравнения (6.236) устанавливает связь между ω и k и дает возможность согласно уравнениям (6.235) определить отношение амплитудных коэффициентов A и B. Таким образом, симметричная волна Лэмба (6.232) задана.

Аналогичные уравнения получим для волн антисимметричного типа. После подстановки (6.233) в (6.234) приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\frac{k_t}{k_e}(k_t^2 - 2k^2)\sin(\eta_e h)C + 2k\eta_t\sin(\eta_t h)D = 0,$$

$$-2k\eta_e \cos(\eta_e h)\frac{k_t}{k_e}C + (k_t^2 - 2k^2)\cos(\eta_t h)D = 0 \qquad (6.237)$$

и соответствующему дисперсионному уравнению

$$(k_t^2 - 2k^2)^2 \operatorname{tg}(\eta_e h) + 4k^2\eta_e\eta_t \operatorname{tg}(\eta_t h) = 0. \qquad (6.238)$$

Решение уравнений (6.236) и (6.238) и подобных им, которые возникают в других волноводных задачах, можно получить численными методами с помощью ЭВМ. При заданной частоте ω уравнение (6.236) или (6.238) имеет бесконечный дискретный набор решений для k. Для каждой частоты только несколько первых решений для k будут действительные, и, следовательно, только несколько номеров нормальных волн будут однородными; для других номеров волн k решения будут мнимыми или комплексными. Факт наличия комплексных корней в дисперсионном уравнении (6.236) или (6.238) свидетельствует о существенном различии свойств твердого слоя как волновода для P- и SV-волн по сравнению с SH-волнами или жидкостным волноводом. Если для SH-волн при каждом значении ω имеем конечное число действительных корней и бесконечное число мнимых корней дисперсионного уравнения, то в случае SV- и P-волн будет конечное число действительных корней, конечное число мнимых корней и бесконечное число комплексных корней.

Понятно, что при анализе задачи о возмущении волнового движения в слое одинаково важны все типы волнового движения, которые соответствуют действительным, мнимым и комплексным корням дисперсионного уравнения (6.236) или (6.238). Проведем короткий общий анализ указанных волновых движений. Вектор смещения в слое (см. (6.232) или (6.233)) схематично запишем в виде

$$\mathbf{u}(x_1, x_3, t) = \mathbf{U}(k, x_3)\exp(-i(\omega t - kx_1)), \qquad (6.239)$$

где постоянная распространения k может быть действительной, мнимой или комплексной.

В случае действительных k выражение (6.239) представляет собой бегущую волну, которая переносит энергию вдоль слоя, причем средний во времени поток энергии в такой волне не зависит от координаты x_1, что естественно, ведь в модели среды отсутствуют потери. В дисперсионных уравнениях (6.236), (6.238) могут использоваться два значения k, различающиеся знаками. Выбор одного из них можно связать с выбором направления переноса энергии в слое.

Для пары мнимых корней $k = \pm i|k|$ выражения (6.239) представляют собой неоднородные волны $\mathbf{u} = \mathbf{U}\exp(\pm|k|x_1)\exp(-i\omega t)$, которые не переносят энергию вдоль слоя. Разным знакам величины k соответ-

ствуют волны, экспоненциально затухающие влево или вправо от некоторого фиксированного сечения $x_1 = \text{const}$. Эти волны по своим свойствам подобны неоднородным SH-волнам, или неоднородным модам жидкостного волновода, которые отвечают мнимым корням соответствующих дисперсионных уравнений.

Комплексному корню k отвечает четверка чисел $k = \pm k' \pm ik''$. Каждому значению k из этой четверки после подстановки его в (6.239) соответствует бегущая волна, у которой амплитуда затухает или возрастает при распространении. Если, например, рассматривая задачу о возбуждении с торца полубесконечного волновода $x_1 \geq 0$, оставить только решение с затухающей амплитудой, то для корня $k = k' + ik''$ выражение (6.239) не будет иметь физического смысла: $\mathbf{u} = \mathbf{U}\exp\left[-k''x_1 - i(\omega t - k'x_1)\right]$. Такая волна переносит энергию вдоль слоя, хотя средний поток энергии экспоненциально уменьшается с ростом x_1. Это возможно лишь при наличии поглощения в среде, что противоречит исходной постановке задачи (среда без поглощения). Во избежание указанного противоречия между свойствами среды и структурой частных решений необходимо сгруппировать бегущие волны, которые распространяются навстречу друг другу: $\mathbf{U}(k' + ik'', x_3)\exp\left[-k''x_1 - i(\omega t - k'x_1)\right]$, $\mathbf{U}(-k' + ik'', x_3)\exp\left[-k''x_1 - i(\omega t + k'x_1)\right]$. Таким образом, получим стоячую волну с экспоненциально затухающей амплитудой в полубесконечном волноводе $x_1 \geq 0$. Такое решение не противоречит физическому содержанию задачи, поскольку стоячая волна не переносит энергию. Именно такие объединенные решения и нужно использовать при удовлетворении граничных условий на торце полубесконечного слоя.

Для исследования процесса переноса энергии в слое, а также структуры волнового поля вдали от источника возбуждения, основное значение имеют распространяющиеся моды, которые соответствуют действительным корням дисперсионного уравнения. Рассмотрим эти волны более подробно.

На рис. 6.29, *а*, *б* показаны результаты численного решения дисперсионных уравнений (6.236) (*а*) и (6.238) (*б*) для распространяющихся нормальных волн при коэффициенте Пуассона $\nu = 0{,}3$. На оси абсцисс отложено безразмерное волновое число $\varsigma = 2kh/\pi$, а на оси ординат — безразмерная частота $\Omega = 2k_t h/\pi$, где $k_t = \omega/c_t$, число около кривой соответствует номеру моды. Штриховые кривые на рис. 6.29, *а*, *б* определяют волновые числа $k_e = \omega/c_e$, $k_t = \omega/c_t$ продольной (e) и поперечной (t) волн, которые не взаимодействуют.

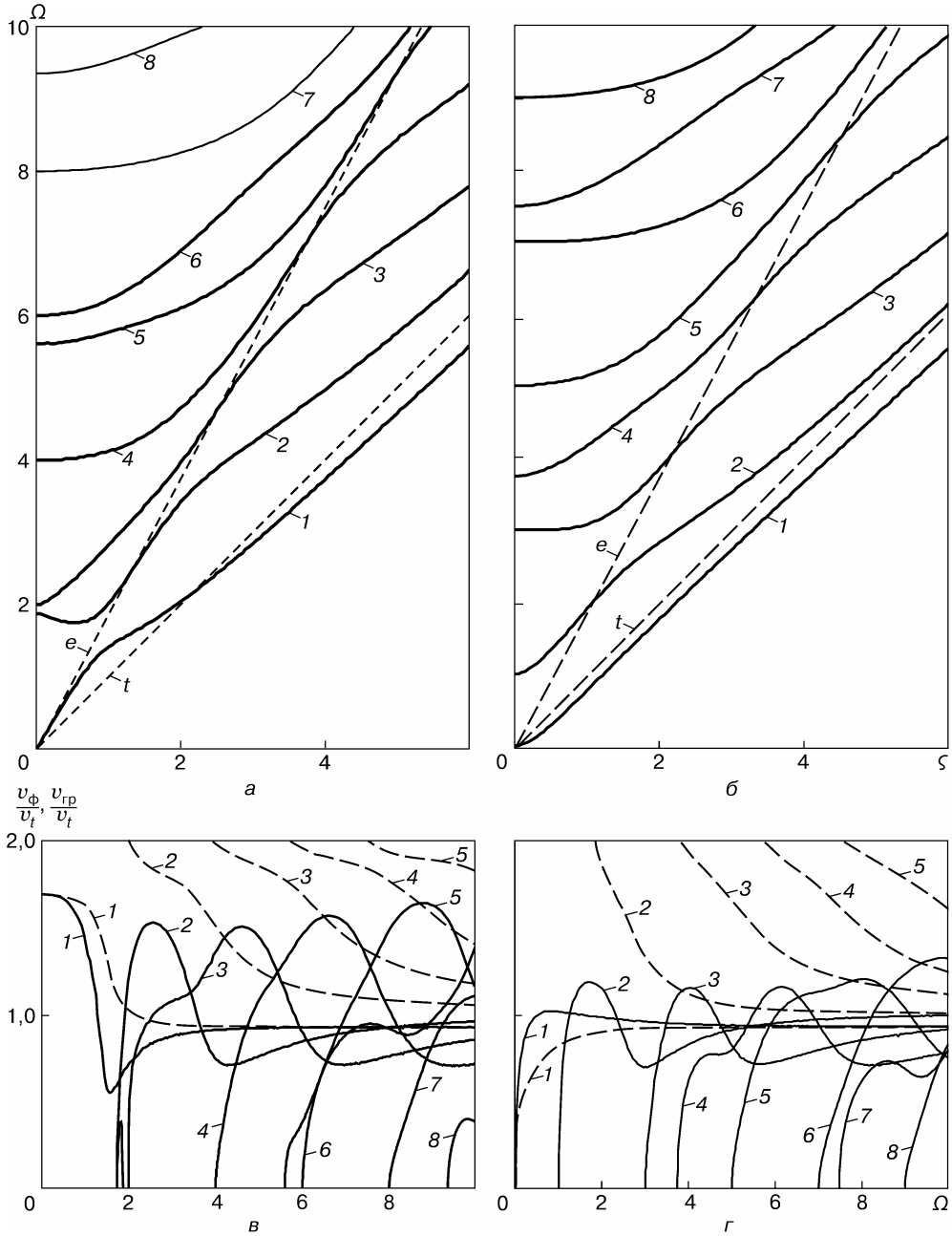


Рис. 6.29. Дисперсионные кривые:
а, *в* — симметричные моды; *б*, *г* — антисимметричные моды

Важными характеристиками распространяющихся мод есть фазовая $\upsilon_ф = \omega/k$ и групповая $\upsilon_{гр} = d\omega/dk$ скорости. Имея расчетные кривые, которые приведены на рис. 6.29, *а*, *б* можно вычислить величины

$\upsilon_ф$ и $\upsilon_{гр}$ для каждой точки этих кривых согласно формулам $\upsilon_ф = \frac{\omega}{k} = c_t \frac{\Omega}{\varsigma}$ и $\upsilon_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = c_t \frac{d\Omega}{d\varsigma}$. На рис. 6.29, *в*, *г* приведены расчетные кривые для нормированных значений фазовой $\upsilon_ф/c_t$ и групповой $\upsilon_{гр}/c_t$ скоростей от безразмерной частоты $\Omega = 2k_t h/\pi$ для первых номеров волн Лэмба, *в* отвечает симметричным модам, *г* — антисимметричным ($\upsilon_ф$ — штриховые кривые, $\upsilon_{гр}$ — сплошные).

Как видно на рис. 6.29, для волн всех номеров характерна значительная дисперсия скорости. Особенно интересной является первая мода, которая распространяется при любой частоте (здесь критическая частота равна нулю). Проанализируем первую симметричную моду, начиная с очень малых частот, когда величины $|\eta_e h|$ и $|\eta_t h|$ можно считать малыми по сравнению с единицей. Из формулы (6.232) для компонент смещения следует, что для малых частот продольные смещения (компонента u_1) постоянны вдоль сечения (координаты x_3) с точностью до квадратов этих малых величин (разложение функций косинуса и синуса в ряд: $\cos\varepsilon = 1 - \varepsilon^{2/2} + \ldots$, $\sin\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^3/6 + \ldots$) и значительно превышают поперечные (компонента u_3). В дисперсионном уравнении можно положить приближенно (с той же точностью) $\mathrm{tg}(\eta_e h) \approx \eta_e h$ и $\mathrm{tg}(\eta_t h) \approx \eta_t h$. Тогда (6.236) будет иметь вид

$$(k_t^2 - 2k^2)^2 + 4k^2\eta_e^2 = 0\,. \qquad (6.240)$$

Принимая во внимание, что $\eta_e^2 = k_e^2 - k^2$: и проводя преобразование с учетом формул (6.123), (6.124), получаем

$$k^2 = \frac{\rho}{4\mu(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)}\omega^2 = \frac{\rho}{E_{пл}}\omega^2 = \frac{\omega^2}{c_{пл}^2}. \quad (6.241)$$

Параметр $E_{пл} = \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}$ называют *модулем Юнга для пластины*. Поскольку на малых частотах движение частиц в слое практически является продольным, то при этих условиях первую симметричную моду также называют *юнговской продольной волной*. Пока частота остается малой, фазовая и групповая скорости этой волны равны $c_{пл} = \sqrt{E_{пл}/\rho}$ и не зависят от частоты.

Аналогично можно проанализировать дисперсионное уравнение (6.238) для первой антисимметричной моды в области малых частот, где $|\eta_e h| << 1$ и $|\eta_t h| << 1$. Но в этом случае приближение типа $\mathrm{tg}\varepsilon \approx \varepsilon$, $|\varepsilon| << 1$ является слишком грубым, поскольку члены, которые удерживают k^2 в дисперсионном уравнении, взаимно сокращаются. Чтобы получить приближенное решение нужно продолжить разложение тангенса до второго члена: $\mathrm{tg}\varepsilon \approx \varepsilon + \varepsilon^{3/3}$, $|\varepsilon| << 1$. Тогда, после

несложных преобразований, дисперсионное уравнение (6.238) приобретет вид

$$k_t^4 + \frac{h^2}{3}\left[\left(k_t^2 - 2k^2\right)^2\left(k_e^2 - k^2\right) + 4k^2\left(k_t^2 - k^2\right)^2\right] = 0,$$

откуда следует, что для волн, которые распространяются (для них величина k^2 должна быть положительной), необходимо выполнение условия $k^2 > k_t^2$. В этом нетрудно убедиться, построив график функции

$$F(y) = 1 + b\left[(1-2y)^2\left(a^2 - y\right) + 4y(1-y)^2\right],$$

где $y = \left(k^2 / k_t^2\right) > 0$, $b = \left(k_t^2 h^2 / 3\right) < 1$, $a^2 = k_e^2 / k_t^2 = c_t^2 / c_e^2$, при произвольном значении коэффициента Пуассона ν; график пересекает ось абсцисс ($F(y) = 0$) в точке $y > 1$. Итак, считая условие $k^2 > k_t^2$ выполненным и, сохраняя только старшие члены с k (члены с k^4), находим

$$k^2 = \pm\sqrt{\frac{3}{4}\frac{k_t^4}{\left(k_t^2 - k_e^2\right)h^2}} = \pm\sqrt{\frac{3\rho\omega^2}{E_{\text{пл}}h^2}}. \qquad (6.242)$$

Здесь отрицательное значение $k^2 < 0$ соответствует неоднородной волне, в которой присутствует экспоненциальное затухание вдоль оси волновода (оси Ox_1). При $k^2 > 0$ имеем нормальную распространяющуюся волну, ее называют *изгибной волной* в тонкой пластине. Название становится понятным, если рассмотреть формулы (6.233), которые определяют компонентные смещения. Как видим, вследствие малости $\eta_e h$ и $\eta_t h$ смещение частиц происходит практически в поперечном направлении и, как для юнговской волны, не зависит от координаты x_3.

Из формулы (6.242) следует, что изгибной волне присуща дисперсию, ее фазовая и групповая скорости соответственно равны:

$$\upsilon_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = c_t\sqrt[4]{\frac{4}{3}\left(1 - \frac{c_t^2}{c_e^2}\right)\left(k_t h\right)^2} = \sqrt[4]{\frac{E_{\text{пл}}h^2}{3\rho}\omega^2}, \qquad (6.243)$$

$$\upsilon_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = 2\upsilon_{\text{ф}}. \qquad (6.244)$$

Как видим, в изгибной волне групповая скорость больше фазовой в два раза (убедитесь в этом самостоятельно).

При увеличении частоты в первой симметричной моде начнут появляться дисперсионные свойства, и характер дисперсии в антисимметричной первой моде начнет изменяться. Вместе с этим распределе-

ние смещений вдоль сечения слоя становится неравномерным. При дальнейшем росте частоты, первые симметричные и антисимметричные моды становятся все более “похожи” одна на другую. При $k_t h >> 1$ их фазовые и групповые скорости стремятся к скорости волны Рэлея c_R (рис. 6.29), смещения локализуются вблизи свободных границ волновода, и их распределение вдоль координаты x_3 стремится к распределению смещения в рэлеевской волне. Интересно, что нулевая симметричная волна при увеличении частоты асимптотически превращается в две волны Рэлея, которые распространяются синфазно каждая по своей границе слоя, а нулевая антисимметричная — также в две волны Рэлея, которые смещены одна по отношению к другой на половину длины волны.

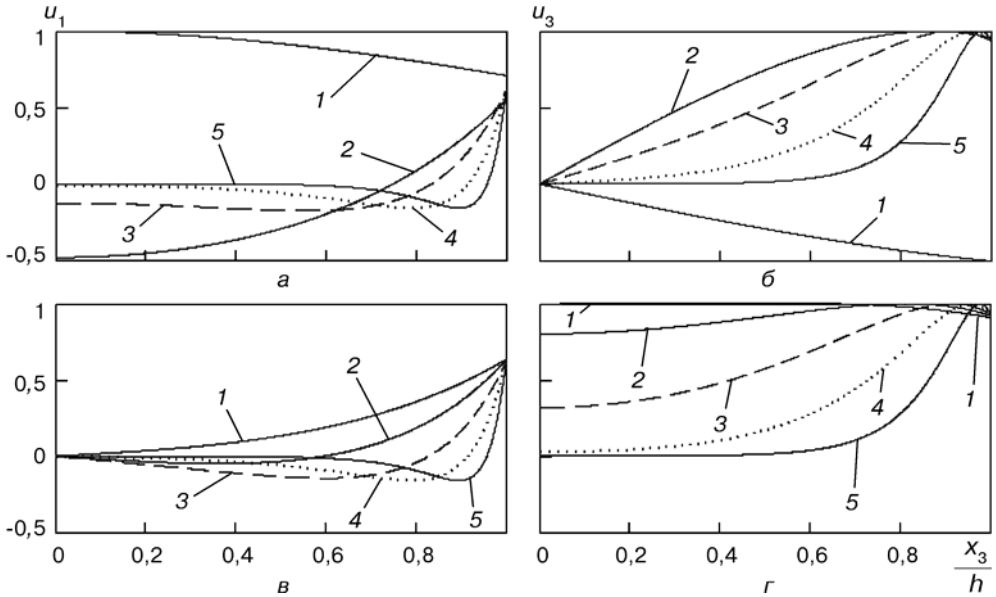


Рис. 6.30. Распределение нормированных амплитуд компонент вектора смещения u_1 и u_3 первой моды вдоль координаты x_3 для разных значений безразмерной частоты Ω = *1, 2, 4, 8, 16* (кривые соответственно *1,2,3,4,5*); *а, б* — симметричная первая мода, *в, г* — антисимметричная

В качестве иллюстрации к проведенному анализу, на рис. 6.30 показано распределение нормированных амплитуд компонент вектора смещения u_1 и u_3 первой моды вдоль координаты x_3 для разных значений безразмерной частоты Ω = *1, 2, 4, 8, 16* (кривые соответственно *1,2,3,4,5*); рис. 6.30 *а, б* для симметричной первой моды, а рис. 6.30 *в, г* — антисимметричной. Нормирование каждой пары кривых u_1 и u_3 проводилось относительно своего значения $|u|_{\max}$. Кривые представлены для половины толщины слоя, на другой половине они определяются симметрией,

которая характерна для данного типа моды (симметричная или несимметричная). Проследите самостоятельно характер изменения кривых, которые при росте частоты наглядно изображают процесс формирования волны Рэлея вдоль поверхности слоя (сравните кривые *5* с кривыми на рис. 6.19).

Вообще исследование волн Лэмба довольно сложное и без численных расчетов можно определить только некоторые свойства. Для волн с номерами, выше первого, волны зарождаются на частотах, которые превышают соответствующие критические частоты. В качестве примера определим их для симметричных мод. Поскольку на критической частоте фазовая скорость стремится в бесконечность, то имеем $k = 0$ и, следовательно, $\eta_e = k_e$ и $\eta_t = k_t$. Тогда граничные условия (6.235) приобретают вид:

$$A\cos(\eta_e h) = 0, \quad B\sin(\eta_t h) = 0. \tag{6.245}$$

Эти условия можно удовлетворить, если: 1) $\sin(\eta_t h) = 0$, на этой частоте $A = 0$; 2) $\cos(\eta_e h) = 0$, на этой частоте $B = 0$.

В первом случае на критической частоте образуется стоячая волна поперечного типа с фронтами, параллельными границам волновода. Во втором случае имеем такую же волну, но продольного типа. При частотах, выше критических, для данной моды постоянная распространения k волны Лэмба становится отличной от нуля. Это можно изобразить как поворот направления распространения двух продольных или поперечных волн, которые образуют стоячую волну на критической частоте, от оси Ox_3 в сторону оси Ox_1. При этом вследствие отражения от границ слоя возникают P- или SV-волны, и волна Лэмба оказывается “составленной” из четырех компонент — двух P-волн и двух SV-волн, которые “согласованы” одна с другой таким образом, что проекции волновых векторов на ось Ox_1 одинаковы (рис. 6.28), а напряжения, которые образуют четыре волны на границах $x_3 = \pm h$, равны нулю. При достижении некоторой частоты продольные волны становятся неоднородными и остаются неоднородными при дальнейшем увеличении частоты (обдумайте это, принимая во внимание закон Снеллиуса и то, что $c_e > c_t$). Асимптотически при $\omega \to \infty$ симметричная или антисимметричная волна Лэмба с номером, выше первого, превращается в пару бегущих SV-волн, распространяющихся под некоторым углом к оси Ox_1, который стремится к нулю при $\omega \to \infty$, и в пару неоднородных продольных волн, которые заметны только вблизи границ. Итак, при $\omega \to \infty$ для этих волн фазовые и групповые скорости асимптотически приближаются к c_t (рис. 6.29). Можно сказать, что в высокочастотной области все волны Лэмба становятся практически бездисперсионными.

Обратим внимание на петлеобразный фрагмент на рис. 6.29, *в* вблизи оси абсцисс между кривыми групповой скорости второй и

третьей мод. Он определяет групповую скорость второй моды, которая распространяется в противоположном направлении к другим модам. Это явление названо “обратной” волной и детально проанализировано в работе [18].

6.18. Приближенные модели описания упругих волн в твердых телах

Приведенные выше соотношения динамической теории упругости позволяют изучать характеристики волновых движений в твердых телах в широком диапазоне частот. Однако сложная структура полей обусловливает значительные трудности при решении соответствующих граничных задач. Поэтому в акустике много внимания уделяется изучению возможностей упрощения общих постановок для практически важных условий формирования волновых полей. Особое значение в инженерной практике имеют модели, которые строятся для изучения относительно низкочастотных движений. В этом случае характерные размеры упругого объекта могут быть малыми по сравнению с длиной волны. Это дает возможность использовать определенные гипотезы для пространственных характеристик волн и снижать общую размерность задачи. При этом математическое описание поля становится значительно более простым.

Такие подходы применяют при рассмотрении динамических процессов в теории оболочек, пластинок и стержней. Ниже будут приведены примеры таких упрощенных модельных подходов при изучении продольных волн и изгибных волн в упругих стержнях.

Стержень — это твердое упругое тело удлиненной формы, в котором поперечный размер намного меньше длины. При этом форма поперечного сечения произвольная, и линия, которая соединяет центр масс сечений, есть прямая. Рассмотренные ниже варианты модельных подходов для описания волнового процесса в стержне, определяются разным характером внешнего влияния на стержень. Как будет показано ниже, вследствие построения приближенных модельных подходов описание волнового движения в стержне как трехмерном объекте будет сведено к одномерной ситуации.

6.19. Продольные волны в стержне

В этом параграфе рассмотрим волновое движение в стержне, которое возбуждается определенным типом нагрузки — внешние воздействия равномерно распределяются на торцах. При такой нагрузке ось стрежня остается прямой, и вследствие действия нагрузки будет происходить лишь изменение длины стержня. Естественным является также предположение о том, что все плоские сечения стрежня $x = \text{const}$

в процессе деформации остаются плоскими и смещаются лишь относительно друг друга. В дальнейшем изложении будем использовать это предположение, хотя более точный анализ динамики стержня показывает, что в общем случае данное предположение несправедливо. Однако в области относительно низких частот, когда длина волны λ в стержне намного больше величины характерного размера D поперечного сечения ($\lambda > 4D$), такое предположение не вносит существенных погрешностей при оценке характеристик волнового движения. Понятно, что при такой модели и типе нагрузки характеристики волнового поля в стержне (напряжение, смещение, деформации) будут зависеть только от одной координаты. Обозначим ее x, направив ось Ox вдоль оси стержня.

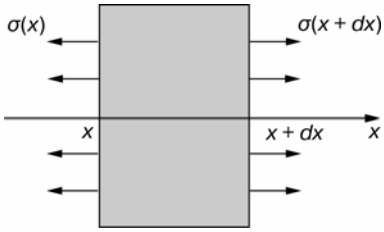


Рис. 6.31. Напряжения, которые действуют на элемент стрежня

Используя введенные понятия и обозначения, можно легко получить уравнение движения элемента стержня. Если рассматривать дифференциальный элемент стрежня (рис. 6.31), то при проекции на ось Ox второй закон Ньютона запишется в форме

$$\rho dxS\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[\sigma(x+dx) - \sigma(x)\right]S, \tag{6.246}$$

где S — площадь поперечного сечения стержня. Если перейти от разности напряжений к их дифференциалу, то получим уравнение

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial x}. \tag{6.247}$$

Уравнение (6.247) имеет две неизвестные функции. При использовании закона Гука (6.97) и определения (6.98) между величинами, которые входят в (6.247), устанавливается такая связь:

$$\sigma = E\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{6.248}$$

Подставив (6.248) в (6.247), получим искомое уравнение:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}. \tag{6.249}$$

Таким образом, уравнение движения элемента стержня представляет собой одномерное волновое уравнение. Это позволяет утверждать, что его общее решение имеет вид

$$u(x,t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct) \tag{6.250}$$

и представляет собой сумму бегущих волн, которые распространяются в противоположных направлениях с фазовой скоростью c. Направление распространения волн и движение частиц совпадает, т.е. имеем продольные волны.

Отметим, что скорость распространения продольной волны в стержне $c = \sqrt{E/\rho}$ меньше скорости c_e продольной волны в неограниченной среде (см. (6.123)). Как видим, для этих волн явление дисперсии отсутствует. Понятно, что их свойства соответствуют первой симметричной волне Лэмба в области малых волновых размеров толщины слоя.

Введем в рассмотрение такие типы граничных условий:

а) конец стержня ($x = l$) закреплен — означает отсутствие смещения на конце стержня в любой момент времени, т.е.

$$u(l,t) = 0, \quad \left[\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = 0\right], \tag{6.251}$$

б) конец стержня ($x = l$) свободен — означает отсутствие напряжений на конце стержня в любой момент времени, т.е.

$$\sigma(l,t) = 0, \left[\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0\right]. \tag{6.252}$$

Понятно, что поток энергии сквозь сечение стрежня $x = l$ при условии (6.251) или (6.252) равен нулю.

Предлагаем читателю самостоятельно определить нормальные колебания стержня конечной длины при трех комбинациях граничных условий: оба конца стержня свободные; оба конца — закрепленные; один конец стержня свободный, а второй — закрепленный. Убедитесь, что в случае первого и второго вариантов нормальные колебания представляют собой полный набор гармоник, а в случае третьего варианта — присутствуют только нечетные гармоники.

6.20. Колебания дискретно-непрерывной системы

Наличие достаточно простых выражений для собственных частот и форм колебаний стержня позволяет рассмотреть важную задачу об оценке границ применения моделей, которые используются во втором разделе. Речь идет о моделях колебательных системах типа “масса на пружине”. Используя полученные решения для волновых характеристик в стержне, мы можем рассмотреть задачу о колебании массы, закрепленной на конце стрежня, с учетом массы стержня (пружины) (рис. 6.32).

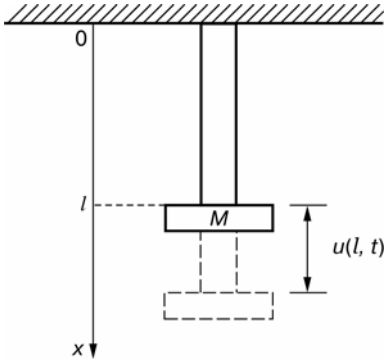


Рис. 6.32. Масса, закрепленная на конце стрежня

Пусть к концу упругого стрежня с модулем упругости E, плотностью ρ, площадью поперечного сечения S и длиной l, закрепленного в верхнем сечении $x = 0$, прикреплена масса M (рис. 6.32). Определим характеристики такой колебательной системы и сравним их с характеристиками системы, в которой масса стержня не учитывается.

Следует учесть определенную условность такой постановки, поскольку мы пытаемся сравнить принципиально разные системы — одна из них имеет одну степень свободы, другая — их бесконечное количество. Поэтому речь идет лишь о сравнении первых собственных частот таких систем.

Полагаем, что величина l — это длина стержня с подвешенной массой в равновесном состоянии. Тогда можно записать следующую систему уравнений. Смещение точек стержня из положения равновесия будем характеризовать функцией $u(x,t)$. Для всех точек стержня эта функция удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}. \tag{6.253}$$

Второй закон Ньютона для массы M, учитывая совместное движение стержня и массы, можно записать, используя функцию $u(x,t)$:

$$M\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2} = -E\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}S. \qquad (6.254)$$

Правая часть в этом уравнении представляет собой силу, которая действует со стороны стержня на массу.

Таким образом, данная колебательная система описывается системой уравнений (6.253) и (6.254). Определим нормальные колебания системы, т. е. ищем периодические решения в виде

$$u(x,t) = U(x)\exp(-i\omega t). \qquad (6.255)$$

После подстановки (6.255) в (6.253) получаем общее решение для амплитудной характеристики

$$U(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx), \quad k = \omega/c. \qquad (6.256)$$

Из условия $U(0) = 0$ находим, что постоянная $a = 0$. Подстановка (6.255) в уравнение (6.254) с учетом выражения $U(x) = b\sin(kx)$ приводит к трансцендентному уравнению для определения собственных частот системы

$$M\omega = \frac{ES}{c}\operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{c}l\right). \qquad (6.257)$$

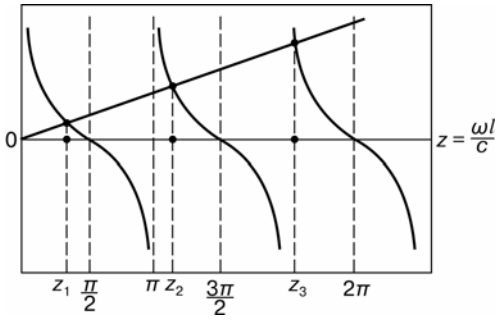


Рис. 6.33. Графическое решение уравнения (6.257)

Это уравнение имеет бесконечное количество корней. Его решение можно легко получить численно. Наглядное представление о свойствах его корней дает рис. 6.33. Из численного анализа уравнения (6.257) на основе рис. 6.33 вытекает важный вывод о том, что собственные частоты с большими номерами имеют асимптотические свойства: $\omega l/c \to n\pi$, отсюда получаем

$$\omega_n \to \frac{nc\pi}{l}, \quad \left[\sin\left(\frac{\omega_n l}{c}\right) \to 0\right]. \tag{6.258}$$

Собственные частоты в уравнении $\sin(\omega l/c) = 0$ соответствуют стрежню, закрепленному с обеих сторон (надеемся, что читатель выполнил задание, которое было предложено в конце параграфа 6.19). Импеданс сосредоточенной массы возрастает пропорционально частоте и, конечно, на высоких частотах наличие массы на конце стрежня становится эквивалентом его жесткого закрепления.

Если в рассмотренной механической системе пренебречь массой стержня, то движение массы M будет описываться простым уравнением $[\xi(t) \equiv u(l,t)]$:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad \omega_0^2 = K/M. \tag{6.259}$$

Для нахождения собственной частоты такой системы нужно определить жесткость безмассового стержня K. Если стержень растянут на величину ξ, то это соответствует деформации стержня $\varepsilon = \xi/l$, для достижения которой согласно закону Гука необходима сила

$$F = E\frac{\xi}{l}S. \tag{6.260}$$

Отсюда очевидно, что жесткость стрежня равняется $K = ES/l$. Таким образом, собственная частота системы без учета массы стержня равна

$$\omega_0^2 = \frac{ES}{lM}. \tag{6.261}$$

Первый корень уравнения (6.257) в случае не очень большой массы M можно определить, заменяя трансцендентное уравнение алгебраическим. При этом следует использовать ряд

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{c}l\right) = \frac{1}{(\omega l/c)}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{c}l\right)^2 - \frac{1}{45}\left(\frac{\omega}{c}l\right)^4 - \ldots\right]. \tag{6.262}$$

Тогда (6.257) преобразуется к виду

$$\omega^2 = \omega_0^2\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{c}l\right)^2 - \ldots\right]. \tag{6.263}$$

В такой форме уравнения, множитель в квадратных скобках следует рассматривать как поправку в значении частоты по сравнению с частотой ω_0. В первом приближении количественную оценку поправки можно получить, заменяя в скобках значение ω на ω_0 и ограничиваясь лишь первыми двумя слагаемыми. При этом получим

$$\omega^2 = \omega_0^2\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\omega_0}{c}l\right)^2\right] = \omega_0^2\left[1-\frac{1}{3}\frac{m}{M}\right], \qquad (6.264)$$

здесь $m = lS\rho$ — масса стержня.

Полученная приближенная формула может использоваться для оценки поправки к частоте при $m/M << 1$. Например, при $m/M = 1/3$ учет массы стержня изменяет собственную частоту системы приблизительно на 10 %. Важным для понимания роли дополнительной массы является и знак поправки. Учет массы стержня приводит к уменьшению собственной частоты.

6.21. Изгибные волны в стержне

6.21.1. Характер нагрузки и деформации

Вторым типом движения в стержне будут поперечные волновые движения. Рассмотренная в третьем разделе струна представляет собой достаточно идеализированную систему, в которой восстановительная сила обусловлена исключительно наличием предварительного натяжения. Опыт работы с реальными струнами указывает на присущую им способность восстанавливать положение равновесия за счет свойств упругости материала. Если для струны вклад собственной упругости в восстанавливающую силу во многих случаях пренебрежимо мал, то для большого количества упругих систем это не так. Линейка, ножка камертона, дерево, которые сгибается под действием ветра за окном, — лишь бесконечно малая часть того перечня колебательных систем, которые после прекращения действия нагрузки полностью восстанавливают свою форму благодаря внутренним свойствам упругости.

Итак, объектом анализа снова является упругий стержень. Как и в параграфе 6.19, считаем, что характерный размер поперечного сечения значительно меньше длины стержня. Для конкретизации рассуждений будем рассматривать случай стержня прямоугольного поперечного сечения (рис. 6.34). Система координат выбрана на рис. 6.34 так, что ось Ox совпадает с линией центров поперечного сечения стержня, а оси Oy и Oz есть его оси симметрии. Отметим, что полученные при рассмотрении данного стержня специальные соотношения справедливы для стержней любой формы поперечного сечения, если в качестве осей Oy и Oz выбрать так называемые главные центральные оси инерции [51].

Волновые движения в продольно деформированном стержне генерировались лишь одним возможным типом возмущений — заданием распределенной нагрузки или продольных смещений на торцах

стрежня. В рамках принятой модели нагрузка на боковой поверхности стержня не вызывает в нем деформации.

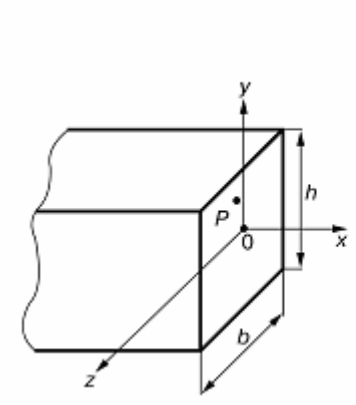


Рис. 6.34. Элемент стрежня

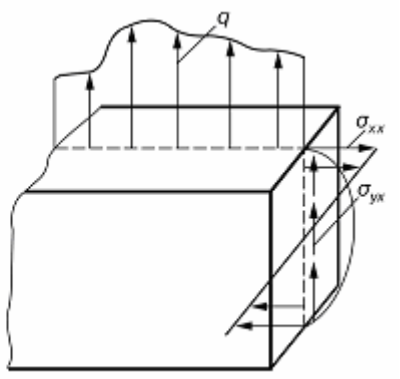


Рис. 6.35. Силовые воздействия в стержне

В данном случае также будем рассматривать специальные типы воздействия. Если говорить о силовых воздействиях, то они могут прикладываться как к торцу, так и к боковым поверхностям стержня. Что касается нагрузки на торце, то возбуждение колебаний возможно двумя типами сил — силами, обусловленными нормальными напряжениями $\sigma_{xx}(y,z,t)$ и касательными $\sigma_{xy}(y,z,t)$ (рис. 6.35). Относительно этих сил полагаем, что $\sigma_{xy}(-y) = \sigma_{xy}(y)$ и $\sigma_{xx}(-y) = -\sigma_{xx}(y)$:

$$\int_{(S)} \sigma_{xx} dS = 0, \qquad \int_{(S)} \sigma_{xx} y dS = M, \qquad \int_{(S)} \sigma_{xy} dS = Q. \tag{6.265}$$

Величины M и Q называются соответственно *изгибающим моментом* и *перерезывающей силой*. Здесь мы вычислили изгибающий момент и перерезывающую силу по данным напряжениям. Если в каком-либо сечении известны перерезывающие силы $Q(x,t)$ и изгибающий момент $M(x,t)$, то предполагается, что нормальные и касательные напряжения могут быть вычисленные по формулам

$$\sigma_{xx}(x,y,t) = \frac{My}{I_z}; \;\; I_z = \int_{(S)} y^2 dS, \quad \sigma_{xy}(x,y,t) = \frac{Q}{\frac{4}{3} b \left(\frac{h}{2}\right)^3} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right], \tag{6.266}$$

где I_z — момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси Oz. Эти соотношения выражают суть гипотезы о характере распределения напряжений в стержне при изгибе. В частности предполагается равномерное распределение нормальных и касательных на-

пряжений по координате z. Такие предположения являются достаточно точными для описания волновых процессов, если длина волны велика по сравнению с размером поперечного сечения.

Что касается внешнего воздействия, действующего на плоскостях $y = \pm h/2$, то оно считается нормальным к поверхности, а его равнодействующая по координате z лежит в плоскости симметрии xOy. Его считаем заданным, если задана именно эта равнодействующая $q(x,t)$ (см. рис. 6.35).

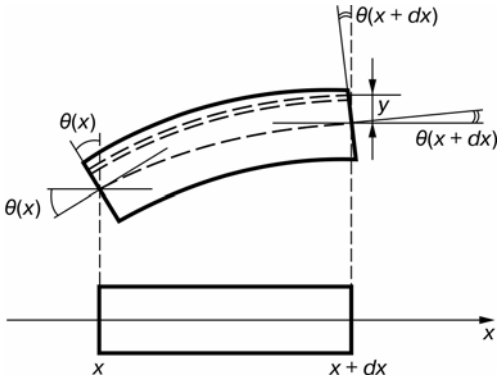


Рис. 6.36. Деформированный элемент стержня

Сделанные предположения относительно характера нагрузки на стержень и распределения напряжений в его поперечном сечении естественно ограничивают типы движения в нем, но эти допущения являются первым существенным шагом на пути к тому, чтобы трехмерную задачу свести к одномерной. Для того чтобы достичь этой цели, предположения о силовых факторах задачи должны быть дополнены предположением о характере движения точек стержня при деформации. Считаем, что в процессе деформации, которая возникает при сгибе, все точки стержня двигаются параллельно плоскости сечения стержня; сечения, которые до деформации были перпендикулярны к его оси, остаются плоскими и перпендикулярными к смещенной оси после деформации (рис. 6.36).

Если представить вектор смещений в виде компонент $\mathbf{U}_P(x,y,z,t)$ произвольной точки P стержня (см. рис. 6.34)

$$\mathbf{U}_P(x,y,z,t) = \boldsymbol{i}u + \boldsymbol{j}w + \boldsymbol{k}v, \tag{6.267}$$

то сформулированное предположение будет иметь вид

$$v = 0,\ w(x,y,z,t) = w(x,t),$$

$$u(x,y,z,t) = u(x,y,t) = -y\theta(x,t). \tag{6.268}$$

В общем случае для угла $\theta(x)$ из условия перпендикулярности плоского сечения к оси стрежня имеем

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{6.269}$$

Для малых отклонений стержня от положения равновесия можем положить

$$\mathrm{tg}\theta = \theta = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u = -y\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{6.270}$$

Таким образом, зная смещение точек оси стержня $w(x,t)$, можно определить движение всех точек поперечного сечения, и рассматриваемая трехмерная задача сводится к одномерной.

6.21.2. Уравнение движения элемента стрежня

Уравнение движения элемента стержня, взятого в проекции на ось Oy, получим на основе второго закона Ньютона. Все действующие на элемент силовые факторы приведены на рис. 6.37. Направление действия моментов и перерезывающих сил выбирается согласно правилу знаков для внутренних напряжений. Напомним, что нормальные напряжения считаются положительными, если они являются напряжениями растяжения; знак касательных напряжений определяется соответствием направлений нормали к площадке и координатной оси. Если нормаль к площадке совпадает с направлением оси Ox, то касательные напряжения считаются положительными и направленными вдоль оси Oy. Когда нормаль к площадке противоположна оси Ox, положительным считается касательное напряжение, направленное против оси Oy (см. рис. 6.37).

Поскольку нормальные напряжения, которые связаны с моментами, не вносят вклад в проекцию на ось Oy, уравнение движения элемента стрежня приобретает вид

$$\rho S dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Q(x+dx) - Q(x) + q(x,t)dx, \tag{6.271}$$

а после замены приращения перерезывающей силы на ее дифференциал:

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + q(x,t). \tag{6.272}$$

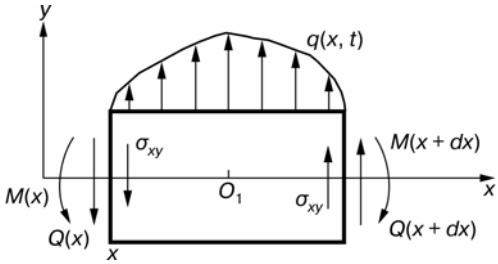


Рис. 6.37. Силовые воздействия, оказывающие влияние на элемент стержня

Это уравнение связывает две неизвестные функции: $w(x,t)$ и $Q(x,t)$ и поэтому непосредственно не может быть использовано для изучения волновых процессов в стержне. Чтобы получить необходимое уравнение, необходимо выразить перерезывающую силу через смещение точек оси стержня. Сделаем это в два этапа. Прежде всего, обратим внимание на то, что, кроме смещения вдоль оси Oy, точки стержня принимают участие в определенных вращательных движениях и, следовательно, при описании движения нужно учитывать не только закон сохранения количества движения вдоль оси Oy (6.271), но и закон сохранения момента количества движения относительно произвольной точки в плоскости xOy. Если в качестве такой точки взять точку O_1 (рис. 6.37), то при условии симметрии получается, что вкладом сил инерции $\rho S\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ и внешней распределенной нагрузки $q(x,t)$ в момент сил относительно точки O_1 можно пренебречь, и существенными будут лишь изгибные моменты и перерезывающие силы. Положительным считается момент, который действует против часовой стрелки, тогда согласно условию равенства нулю моментов относительно точки O_1 всех сил, которые действуют на элемент, будем иметь

$$M(x)-M(x+dx)+Q(x)\frac{dx}{2}+Q(x+dx)\frac{dx}{2}=0. \qquad (6.273)$$

<u>*Задача.*</u> Показать, что с учетом сил инерции при записи закона сохранения момента количества движения (6.273) дополняется слагаемыми, которые имеют порядок $(dx)^2$ относительно удерживаемых в (6.273) слагаемых порядка dx.

После замены приращения момента на дифференциал получаем равенство

$$Q(x,t)=\frac{\partial M(x,t)}{\partial x}. \qquad (6.274)$$

Связь между изгибным моментом и смещением $w(x,t)$ устанавливается на основе закона Гука, который, по допущению, описывает поведение материала стержня. Выделим некоторое волокно в стержне, которое находится на расстоянии y от оси (рис. 6.36). Его деформация равна

$$\varepsilon = \frac{u(x+dx,y)-u(x,y)}{dx}. \tag{6.275}$$

С учетом (6.270) для смещения $u(x,y)$ находим

$$\varepsilon = -y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{6.276}$$

Такая деформация согласно закону Гука вызвана напряжением

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon = -Ey\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{6.277}$$

Используя формулы (6.266), получим

$$M = -EI_z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{6.278}$$

Итак, с учетом (6.274) и (6.278), уравнение движения элемента стержня будет иметь вид

$$\rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EI_z\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q(x,t). \tag{6.279}$$

Теперь это уравнение имеет лишь одну неизвестную функцию — смещение точек оси стержня на плоскости xOy ($w(x,t)$) — и его можно использовать для изучения волновых процессов в стержне.

6.21.3. Свойства волнового движения в стержне

Рассмотрим случай, когда внешняя нагрузка $q(x,t)$ отсутствует, т.е. речь будет идти о свойствах волн в свободном стержне. Тогда (6.279) принимает вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\frac{\rho S}{EI_z}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{6.280}$$

Это уравнение существенно отличается от уравнений, полученных для случая струны и стержня, который деформируются продольно. Главное формальное отличие состоит в том, что это уравнение связывает значения четвертой производной по пространственной координате и второй по времени. Это свидетельствует о том, что произволь-

ная функция вида $w(x,t) = w(x \pm ct)$ уже не удовлетворяет уравнению. Физически это означает, что в стержне не может существовать волна произвольной формы, которая распространяется без изменения формы с постоянной скоростью.

Однако это не означает, что в стержне вообще не могут распространяться волны. Легко проверить, что (6.280) допускает существование гармонических волн

$$w(x,t) = A\exp\left(-i(\omega t \mp \mu x)\right), \quad \mu^4 = \frac{\rho S\omega^2}{EI_z}, \tag{6.281}$$

здесь μ — волновое число. Как видим, фазовая скорость изгибной волны в стержне

$$\upsilon_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\mu} = \frac{\sqrt{\omega}}{\beta}, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI_z}} \tag{6.282}$$

зависит от частоты, т.е. присутствует явление дисперсии. Соответствующая групповая скорость $\upsilon_{\text{гр}} = 2\upsilon_{\text{ф}}$ (убедитесь в этом самостоятельно). Характер зависимости фазовой и групповой скоростей от частоты для изгибной волны в стержне совпадает с соответствующими зависимостями (6.243), (6.244) для первой антисимметричной волны Лэмба в области малых волновых размеров толщины слоя ($k_t h << 1$). Это совпадение является естественным с учетом кинематики частиц среды в этих волнах.

Нужно помнить, что изложенная выше теория для изгибных волн в стержне хорошо описывает такой волновой процесс только для относительно низких частот, о чем шла речь при обсуждении характера напряжений и деформаций в стержне.

6.22. Волновое движение в стержне при заданных начальных условиях

Относительно простое уравнение движения (6.280) изгибных волн в стержне позволяет получить аналитическое решение задачи о волновом движении в стержне при определенных начальных условиях и тем самым изучить влияние дисперсии на форму возмущения, которое распространяется. Такое исследование можно провести, используя преобразование Фурье, смысл которого раскрывается двумя формулами [8]:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)\exp\left(-ikx\right)dk,$$

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\exp(ikx)\,dx. \qquad (6.283)$$

Расширяя класс функций $\Phi(k)$, эти соотношения можно считать применимыми для любых физически содержательных функций $\varphi(x)$.

Первое из равенств в (6.283), в сущности, указывает на возможность представления любой функции в виде суперпозиции пространственных гармоник. Второе соотношение указывает на способ определения плотности гармоник в такой суперпозиции по заданной функции $\varphi(x)$. Соотношение (6.283) является обобщением на бесконечный интервал разложения в ряд Фурье функций, заданных на конечном интервале.

Рассмотрим теперь задачу об определении движения стержня в любой момент времени, если его начальное состояние задается равенствами

$$w(x,0) = Q_1(x),$$

$$\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = Q_2(x). \qquad (6.284)$$

Если вместо искомой функции $w(x,t)$ в рассмотрение ввести ее фурье-образ

$$\Phi(k,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,t)\exp(ikx)\,dx, \qquad (6.285)$$

то построение формального решения задачи значительно упростится. Перед тем как перейти непосредственно к нахождению функции $\Phi(k,t)$, приведем такое соотношение:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial w}{\partial x}\exp(ikx)\,dx = \frac{ik}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,t)\exp(ikx)\,dx, \qquad (6.286)$$

если функция $w(x)$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. Последнее условие возьмем относительно не только искомой функции, но и ее первых производных, до четвертой включительно.

Соотношение (6.286) устанавливает такое правило: *фурье-образ производной от заданной функции получаем простым умножением фурье-образа функции на величину ik.* С использованием этого свойства уравнение (6.280) для $w(x,t)$ превращается в уравнение для $\Phi(k,t)$. Для его определения умножим (6.280) на $\exp(ikx)$ и интегрируем по x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \exp(ikx)dx = -\frac{\rho S}{EI_z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \exp(ikx)dx\,,$$

или

$$(-ik)^4 \int_{-\infty}^{\infty} w(x,t)\exp(ikx)dx = -\frac{\rho S}{EI_z}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} w(x,t)\exp(ikx)dx\right),$$

тогда, с учетом (6.285), получим уравнение

$$\beta^4 \frac{d^2\Phi}{dt^2} + k^4\Phi = 0, \quad \beta^4 = \frac{\rho S}{EI_z}. \tag{6.287}$$

Его общее решение можно записать в виде

$$\Phi(k,t) = A(k)\cos\left(\frac{k^2}{\beta^2}t\right) + B(k)\sin\left(\frac{k^2}{\beta^2}t\right) \tag{6.288}$$

с двумя произвольными функциями $A(k)$ и $B(k)$ от пространственного волнового числа k. Для их определения используем начальные условия (6.284), которые в терминах фурье-образов приобретают вид

$$\Phi(k,0) = F(k), \quad \frac{\partial\Phi(k,0)}{\partial t} = G(k)\,,$$

где

$$F(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q_1(x)\exp(ikx)dx, \quad G(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q_2(x)\exp(ikx)dx\,. \tag{6.289}$$

Используя решение (6.288) для $\Phi(k,t)$, из последних равенств находим, что

$$A(k) = F(k), \quad B(k) = \frac{\beta^2}{k^2}G(k). \tag{6.290}$$

Итак, решение поставленной задачи можно считать законченным. Искомая функция $w(x,t)$, которая удовлетворяет заданным начальным условиям (6.284) и дифференциальному уравнению (6.280), представлена интегралом

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[F(k)\cos\left(\frac{k^2}{\beta^2}t\right) + \frac{\beta^2}{k^2}G(k)\sin\left(\frac{k^2}{\beta^2}t\right)\right]\exp(-ikx)\,dk. \tag{6.291}$$

Вычисление интеграла в явном виде по заданным функциям $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, как правило, осуществить не удается. Тем не менее, стандарт-

ные программы для вычисления быстрого преобразования Фурье при проведении численных расчетов на основе интегралов типа (6.291) входят в математическое обеспечение практически всех вычислительных систем.

В конце параграфа рассмотрим случай начальных условий, который допускает явное вычисление интеграла в (6.291). Если начальные условия (6.284) таковы, что

$$Q_1(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{4b^2}\right), \quad Q_2(x) = 0, \tag{6.292}$$

(b — постоянная, м), то для функции смещения можно получить выражение [34, с. 178]:

$$w(x,t) = \left[1 + \frac{t^2}{\beta^4 b^4}\right]^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2 b^4 \beta^4}{4(b^4\beta^4 + t^2)}\right) \cos\left[\frac{x^2\beta^2 t}{4(\beta^4 b^4 + t^2)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\beta^2 b^2}\right)\right]. \tag{6.293}$$

Для случая струны при таком самом начальном возмущении имеем следующее выражение для смещения:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\exp\left(-\left(\frac{x-ct}{2b}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-\left(\frac{x+ct}{2b}\right)^2\right). \tag{6.294}$$

Понятно, что форма начального возмущения в стержне не будет сохраняться в процессе распространения. Этот вывод основывается на том, что общее возмущение является суперпозицией отдельных гармоник, а каждая гармоника распространяется со своей скоростью. Представление о влиянии дисперсии на развитие волнового процесса в стержне дает графическая интерпретация (6.293) и (6.294) в определенные моменты времени (рис. 6.38). На рис. 6.38 сплошной линией показано смещение в стержне (6.293), а штриховой — в струне (6.294) в отдельные моменты времени t; (в расчетах постоянные β, b и c равны единице).

Влияние дисперсии на рис. 6.38 показано очень наглядно. Составляющим с довольно короткими длинами волн (большие $k = 2\pi/\lambda$) соответствуют и высшие частоты в (6.291). Такие составляющие опережают низкочастотные составляющие и образуют некоторую рябь впереди основного гребня. Кроме того, длинноволновые составляющие согласно закону аномальной дисперсии распространяются очень медленно, что обусловливает появление слишком растянутого хвоста за основным гребнем. Следует также отметить, что основной гребень

размывается дисперсией и его выделение со временем становится невозможным.

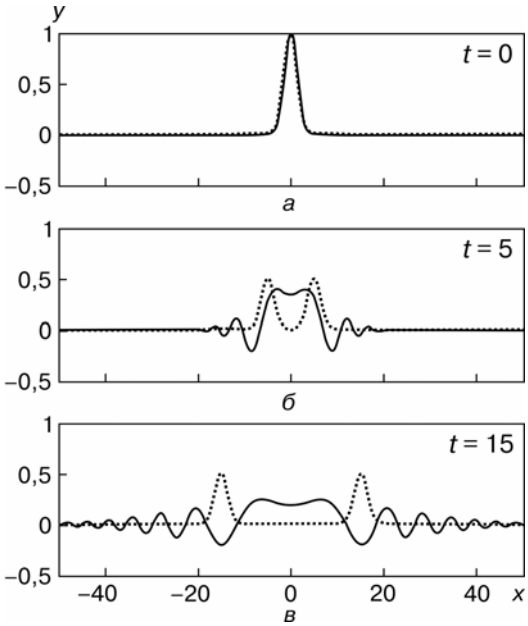


Рис. 6.38. Форма возмущения в бесконечных стержне (сплошная линия) и струне (штриховая линия) при начальных условиях (6.292) в разные моменты времени t

6.23. Изгибные колебания конечных стержней

В общем случае при рассмотрении движения конечного стержня естественно выделить задачи о свободных и о вынужденных колебаниях стержня. Здесь рассмотрим лишь задачу о свободных колебаниях. После того как в рамках этой задачи будут проанализированы свойства нормальных колебаний конечного стержня, задача о вынужденных колебаниях под влиянием периодической силы уже не будет сложной. Рекомендуем решить такую задачу как упражнение.

Итак, условие рассматриваемой задачи следующее: стержень длиной l с закрепленными определенным образом концами начинает колебаться в момент $t = 0$ при заданных начальных отклонениях и начальной скорости:

$$w(x,t) = Q_1(x),$$

$$\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = Q_2(x). \qquad (6.295)$$

Определим дальнейшее движение стержня, которое характеризуется функцией $w(x,t)$. Это означает, что необходимо найти решение уравнения, которое удовлетворяет заданным граничным условиям и условиям (6.295).

В связи с этим нужно подробнее остановиться на возможных случаях граничных условий при изгибных колебаниях стержня. Важно понять, что эти условия должны формулироваться как ограничение на значение функции $w(x,t)$ или ее производных в заданном сечении $x = x_0$. При этом x_0 будет иметь значение $x_0 = 0$ или $x_0 = l$.

Во многих практических ситуациях формулирование граничных условий, которые определяют характер взаимодействия данного элемента конструкции с другими элементами, является довольно сложной задачей. Рассмотрим лишь некоторые предельные случаи, которые исключают отток энергии из стержня через его концы.

Первый из таких случаев — это случай свободного конца. Это означает, что в сечении $x = x_0$ на стержень не действуют никакие силы. Поскольку все силовые факторы в стержне характеризуются такими интегральными характеристиками, как изгибающий момент M и перерезывающая сила Q, то в этом случае получаем такие условия: $M(x_0,t) = Q(x_0,t) = 0$. Для того чтобы выразить эти условия через функцию $w(x,t)$, воспользуемся (6.274) и (6.278). При этом граничные условия формулируются так:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_0,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x_0,t) = 0. \tag{6.296}$$

Второй случай отвечает жесткому закреплению конца стержня. Ясно, что здесь на конце стержня не должно быть смещения $w(x_0,t)$. Однако этого условия не достаточно, чтобы полностью описать факт отсутствия движения на конце стержня. При нулевом смещении возможен поворот сечения. Такое движение будет невозможно, если потребовать превращения в нуль на конце первой производной от $w(x,t)$ по координате. Итак, условия жесткого закрепления торца стержня при изгибном деформировании, описываются равенствами

$$w(x_0,t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x_0,t) = 0. \tag{6.297}$$

Предыдущие соображения указывают еще на одну возможность закрепления торца, когда исключается смещение w, но не накладываются ограничение на поворот сечения. Это означает, что в таком сечении отсутствует внешний момент. Такие условия называются условиями шарнирного закрепления и описываются равенствами

$$w(x_0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_0,t) = 0. \tag{6.298}$$

Другие однородные комбинации с w и ее производными описывают условия, которые физически не реализуются.

Изучение свойств любой колебательной системы нужно начинать с нахождения ее нормальных колебаний. В данном случае это означает, что необходимо найти периодические решения уравнения, которые удовлетворяют одному из возможных типов граничных условий.

Подставляя в (6.280) выражение $w(x,t) = X(x)\exp(-i\omega t)$, находим такое уравнение для амплитудной функции $X(x)$:

$$\frac{d^4X}{dx^4} = \mu^4 X, \quad \mu^4 = \frac{\rho S\omega^2}{EI_z}. \tag{6.299}$$

Общий подход к построению решения уравнений данного типа состоит в представлении искомой функции в виде $X(x) = A\exp(\gamma x)$, где A — произвольная постоянная. Очевидно, что такое экспоненциальное представление будет решением (6.299), если показатель γ определить из уравнения

$$\gamma^4 = \mu^4. \tag{6.300}$$

Оно легко решается, а его корни имеют вид

$$\gamma_1 = \mu, \quad \gamma_2 = -\mu, \quad \gamma_3 = i\mu, \quad \gamma_4 = -i\mu. \tag{6.301}$$

Такому набору корней соответствует общее решение уравнения (6.299):

$$X(x) = A_1\exp(\mu x) + A_2\exp(-\mu x) + A_3\exp(i\mu x) + A_4\exp(-i\mu x). \tag{6.302}$$

Составляя разные линейные комбинации из частных решений, которые входят в (6.302), искомую функцию можно представить в более удобном для дальнейших выкладок виде:

$$X(x) = a\,\mathrm{ch}(\mu x) + b\,\mathrm{sh}(\mu x) + c\sin(\mu x) + d\cos(\mu x). \tag{6.303}$$

Полученное выражение удовлетворяет уравнению движения при любых значениях частоты и постоянных a, b, c, d. Однако оно не удовлетворяет граничным условиям на концах стержня. Именно эти условия определяют характерные частоты возможных периодических движений стержня.

Пусть один конец стержня ($x = 0$) жестко закреплен, а другой ($x = l$) — свободен. Такие условия могут довольно хорошо описывать ситуацию на концах ножки камертона. Согласно (6.296) и (6.297) для функции $X(x)$ в (6.303) будем иметь условия

$$X(0)=0, \quad \frac{dX(0)}{dx}=0,$$

$$\frac{d^2X(l)}{dx^2}=0, \quad \frac{d^3X(l)}{dx^3}=0. \tag{6.304}$$

Граничные условия при $x = 0$ дают следующую связь между искомыми величинами: $d = -a$, $c = -b$. Удовлетворение условий второй пары (6.304) приводит к системе линейных однородных уравнений второго порядка:

$$a\left[\mathrm{ch}(\mu l)+\cos(\mu l)\right]+b\left[\mathrm{sh}(\mu l)+\sin(\mu l)\right]=0,$$

$$a\left[\mathrm{sh}(\mu l)-\sin(\mu l)\right]+b\left[\mathrm{ch}(\mu l)+\cos(\mu l)\right]=0. \tag{6.305}$$

Условие наличия ненулевого решения для постоянных a и b предусматривает равенство нулю определителя системы (6.305), что приводит к уравнению

$$\mathrm{ch}(\mu l)\cos(\mu l)=-1. \tag{6.306}$$

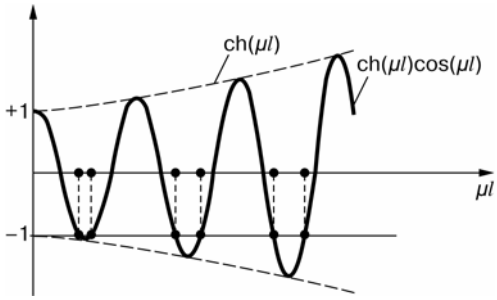


Рис. 6.39. Графическое решение уравнения (6.306)

Именно отсюда будем определять допустимые значения величины μ, а, следовательно, и частоты нормальных колебаний. Это трансцендентное уравнение, которое имеет бесконечное число корней. Характерные особенности (6.306) и даже достаточно точные оценки значений его корней с высокими номерами можно получить из его графической интерпретации (рис. 6.39).

Для трех первых корней имеем такие значения: $\mu_1 l = 1{,}8751$; $\mu_2 l = 4{,}6941$; $\mu_3 l = 7{,}8548$. На рис. 6.31 видно, что корни с высокими номерами определяются по приближенной формуле:

$$\mu_n l \approx (2n-1)\pi/2. \tag{6.307}$$

Уже для случая $n = 3$ эта формула дает три правильных знака в значении корня. Если учесть, что $\mu l = \beta\sqrt{\omega} l$ (определение β см. (6.282)), то для низких собственных частот имеем:

$$\omega_1 = \frac{1}{l^2}\left(\frac{1{,}8751}{\beta}\right)^2, \quad \omega_2 = 6{,}267\omega_1, \quad \omega_3 = 17{,}548\omega_1, \ldots \qquad (6.308)$$

Как видим, частоты нормальных колебаний в стержне обратно пропорциональны квадрату его длины. У струны собственные частоты обратно пропорциональны длине. В случае равенства основного тона стержня и струны вторая собственная частота стержня уже выше частоты шестой гармоники. Важно также отметить, что собственные частоты стержня не образуют гармонический ряд. Следствием этого является, например, особенность звучания камертона. При ударе по концу ножки в нем возмущается много нормальных колебаний. Поскольку их частоты не создают гармонический ряд, то в начальный момент слышен только металлический звон. Потом высокочастотные собственные колебания быстро затухают, и далее остается слышимым чистый основной тон.

Если при $\mu = \mu_n$ одно из уравнений системы (6.305) использовать для установления связи между постоянными a_n и b_n, то на основе (6.303) получим выражение для собственной формы колебаний стержня:

$$X_n(\mu_n, x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mu_n l) - \sin(\mu_n l)}\Big[\big(\mathrm{sh}(\mu_n x) - \sin(\mu_n x)\big)\big(\mathrm{sh}\,(\mu_n l) - \sin(\mu_n l) -$$

$$-\big(\mathrm{ch}(\mu_n x) - \cos(\mu_n x)\big)\big(\mathrm{ch}(\mu_n l) + \cos(\mu_n l)\big)\Big]. \qquad (6.309)$$

Очевидно, что все сформулированные условия, которые определяют нормальные колебания, остаются выполненными, если полученное выражение $X_n(\mu_n, x)$ умножить на произвольную постоянную b_n. Значение этой постоянной определяет степень возмущения соответствующей собственной формы и находится из начальных условий.

На рис. 6.40 показано распределение амплитуд колебаний по длине стержня для пяти первых собственных форм $X_n(\mu_n, x)$. Видно, что с ростом номера формы вклад экспоненциальных слагаемых ($\mathrm{ch}(\mu_n x)$, $\mathrm{sh}(\mu_n x)$) все больше локализуется на концах стержня.

Полное выражение для функции смещения получим из выражения (6.309) после умножения его на временной множитель. В общем случае фаза нормального колебания может быть произвольной, итак,

$$w_n(x,t) = \frac{b_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)}{\mathrm{sh}(\mu_n l) - \sin(\mu_n l)}\{[\mathrm{sh}(\mu_n x) - \sin(\mu_n x)][\mathrm{sh}(\mu_n l) - \sin(\mu_n l)] -$$

$$-\left[\mathrm{ch}(\mu_n x)-\cos(\mu_n x)\right]\left[\mathrm{ch}(\mu_n l)+\cos(\mu_n l)\right]\Big\}. \qquad (6.310)$$

Произвольные постоянные b_n и φ_n определяются из начальных условий.

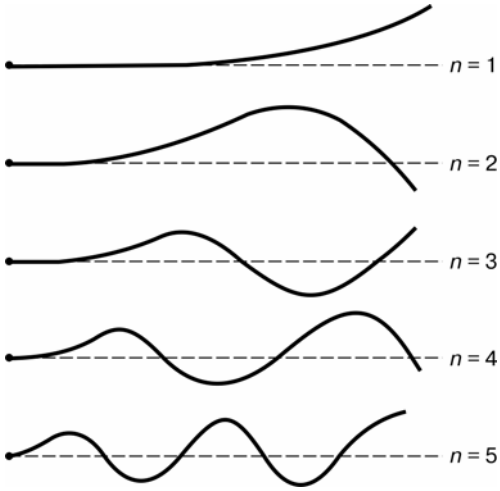


Рис. 6.40. Распределение амплитуд колебаний для первых пяти собственных форм стержня

Дальнейшее решение задачи определения движения стержня по заданным начальным условиям основывается на фундаментальном предположении: какими бы ни были начальные условия в (6.295), дальнейшие колебания стержня полностью описывается суперпозицией нормальных колебаний с соответствующим образом подобранными амплитудами. Итак, колебания стержня описывается выражением для $w(x,t)$ в виде бесконечного ряда

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t). \qquad (6.311)$$

Бесконечный ряд (6.311) имеет две последовательности произвольных постоянных — b_n и φ_n. Для их определения имеем два условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,0)=Q_1(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n(x,0)}{\partial t}=Q_2(x). \qquad (6.312)$$

С использованием обозначений (6.309) и (6.310) эти соотношения приобретают вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\varphi_n) X_n(\mu_n, x)=Q_1(x),$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin(\varphi_n) X_n(\mu_n, x) = Q_2(x). \qquad (6.313)$$

При первом взгляде на эту систему уравнений задача определения двух постоянных: $b_n\cos\varphi_n$ и $b_n\sin\varphi_n$, с учетом сложной структуры выражения для $X_n(\mu_n,x)$ в (6.309) является очень трудной. Она представляется намного более сложной по сравнению с аналогичной задачей для струны, рассмотренной в параграфе 3.5. Однако эти две задачи практически одинаковы по своей сложности. Убедимся в этом и получим тем самым еще один пример общих замечательных свойств собственных форм колебаний механических систем.

Две собственные формы с номерами n и m удовлетворяют уравнению (6.299):

$$\frac{d^4 X_n}{dx^4} = \mu_n^4 X_n, \quad \frac{d^4 X_m}{dx^4} = \mu_m^4 X_m \qquad (6.314)$$

и одному из трех типов граничных условий (6.296)-(6.298) на концах. Рассмотрим интеграл

$$I_{nm} = \int_0^l X_n(\mu_n, x) X_m(\mu_m, x) dx. \qquad (6.315)$$

Умножим в (6.314) первое уравнение на X_m, а второе на X_n, проинтегрируем каждое из них по x от 0 до l вдоль длины стержня и вычтем из первого второе, в результате получим

$$(\mu_n^4 - \mu_m^4) I_{nm} = \int_0^l \left[X_m \frac{d^4 X_n}{dx^4} - X_n \frac{d^4 X_m}{dx^4} \right] dx. \qquad (6.316)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$(\mu_n^4 - \mu_m^4) I_{nm} = X_m \frac{d^3 X_n}{dx^3}\bigg|_0^l - X_n \frac{d^3 X_m}{dx^3}\bigg|_0^l + \int_0^l \left[-\frac{dX_m}{dx}\frac{d^3 X_n}{dx^3} + \frac{dX_n}{dx}\frac{d^3 X_m}{dx^3} \right] dx. \qquad (6.317)$$

Из анализа условий (6.296)-(6.298) следует, что при любых граничных условиях на концах стержня неинтегральные слагаемые в правой части (6.317) равны нулю. Интегрируя по частям еще раз, находим, что

$$(\mu_n^4 - \mu_m^4) I_{nm} = \frac{dX_n}{dx}\frac{d^2 X_m}{dx^2}\bigg|_0^l - \frac{dX_m}{dx}\frac{d^2 X_n}{dx^2}\bigg|_0^l. \qquad (6.318)$$

Рассматривая возможные типы граничных условий на концах стержня, видим, что всегда

$$(\mu_n^4 - \mu_m^4) I_{nm} = 0, \quad (n \neq m). \tag{6.319}$$

Представленное этим равенством свойство собственных форм колебаний стержня при любых типах граничных условий получено без привязки к конкретной форме функциональной зависимости $X_n(\mu_n,x)$ и $X_m(\mu_m,x)$. Это свойство называется *свойством ортогональности собственных форм колебаний стержня.*

Использование свойства ортогональности собственных форм колебаний стержня, позволяет очень легко решить задачу определения произвольных постоянных в системе (6.313). Умножая каждое из равенств на $X_m(\mu_m,x)$ и интегрируя по длине стрежня, находим, что

$$b_m \cos\varphi_m = \frac{1}{I_{mm}} \int_0^l Q_1(x) X_m(\mu_m, x) dx,$$

$$-\omega_m b_m \sin\varphi_m = \frac{1}{I_{mm}} \int_0^l Q_2(x) X_m(\mu_m, x) dx, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6.320}$$

Величина I_{mm}, которая определяется формулой (6.315), очевидно, не равна нулю.

Таким образом, задача определения движения стержня конечной длины по заданным начальным условиям решена. Успех в значительной мере обеспечивается замечательным свойством собственных форм колебаний стержня — их ортогональностью.

6.24. Задачи

6.1. На пружине с жесткостью K подвешен однородный стержень длиной l (рис. 6.41). Найдите нормальные частоты и собственные формы продольных колебаний стержня. Площадь поперечного сечения S, плотность материала ρ, модуль Юнга E. Массой пружины пренебрегаем.

Ответ: $\operatorname{ctg}\xi = \dfrac{ES}{Kl}\xi$, $\xi = \dfrac{\omega}{c} l$, $c^2 = \dfrac{E}{\rho}$; $u_n(x) = \cos\left[\dfrac{\omega_n}{c}(l - x)\right] \Big/ \cos\left(\dfrac{\omega_n l}{c}\right)$.

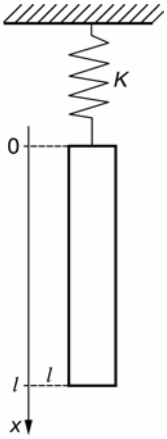


Рис. 6.41. К задаче 6.1

6.2. Найдите нормальные частоты и собственные формы продольных колебаний однородного стержня, один конец которого жестко закреплен, а второй опирается на пружину с жесткостью K. Длина стержня l, поперечное сечение S, модуль Юнга E, плотность материала ρ. Массой пружины пренебрегаем.

Ответ: $\operatorname{ctg}\xi = -\dfrac{ES}{Kl}\xi$, $\xi = \dfrac{\omega}{c}l$, $c^2 = \dfrac{E}{\rho}$; $u_n(x) = \sin\left(\dfrac{\omega_n}{c}x\right)$.

6.3. Стержень длиной $2l$ состоит из двух одинаковых отрезков. Поперечное сечение одного из них в два раза больше сечения второго. Конец широкого стержня жестко закреплен, тонкого — свободен. Найдите нормальные частоты продольных колебаний стержня, если модуль Юнга E, объемная плотность ρ.

Ответ: $\operatorname{tg}^2\xi = 2$, $\xi = \omega l/c$, $c^2 = E/\rho$.

6.4. Найдите продольные колебания стержня, один конец которого ($x = 0$) закреплен жестко, а второй ($x = l$) свободен; начальные условия $u(x,0) = ax$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ при $0 \le x \le l$.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{8al}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\dfrac{(2n+1)\pi ct}{2l}$.

6.5. Составной стержень изготовлен из одного материала (ρ, E) (рис. 6.42); две его половины различаются площадью поперечного сечения S_1 и S_2. Слева на границу $x = 0$ падает продольная волна $u_0(x,t)$. Определите коэффициенты отражения и прохождения волны на границе $x = 0$.

Ответ: $\frac{(S_1 - S_2)}{(S_1 + S_2)}$, $\frac{2S_1}{(S_1 + S_2)}$.

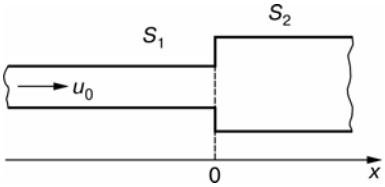


Рис. 6.42. К задаче 6.5

6.6. Тонкий стержень длиной l и площадью сечения S с одного конца возбуждается продольной гармонической силой с частотой ω. Второй конец стержня — свободен. Определите входное сопротивление стержня. Каким будет входное сопротивление для стержня бесконечной длины.

Ответ: $i\rho cS\mathrm{tg}(\omega l/c)$, ρcS.

6.7. Доказать, что волна Рэлея существует во всех реальных изотропных твердых телах.

6.8. Определите глубину h (в длинах волн), на которой волна Рэлея линейно поляризована. Коэффициент Пуассона среды $\nu = 0{,}34$.

Ответ: $h/\lambda_R \approx 0{,}19$.

6.9. Объясните, почему скорость продольных волн в пластине больше, чем в тонком стержне.

6.10. Стержень длиной l и массой m жестко закреплен на одном конце, а второй конец свободен. Какую массу нужно присоединить к свободному концу, чтобы уменьшить основную частоту продольных колебаний на 25 % от ее исходного значения.

Ответ: $0{,}35m$.

6.11. Стальной стержень длиной 1 м и радиусом 4 мм жестко закреплен с обоих концов. Какая основная частота его поперечных колебаний? Пренебрегая упругой жесткостью, определите, с какой силой нужно растянуть стержень, чтобы его основная частота поперечных колебаний, обусловленных только натяжением, не изменилась.

Ответ: 36 Гц, 2000 Н.

6.12. Скорость свободного конца стержня при падении продольной волны начала изменяться согласно закону $\upsilon_0\sin(\omega t)$. Какая амплитуда смещения у падающей волны? На каких расстояниях от конца стержня образовываются узлы и пучности скорости? Узлы и пучности давления?

Ответ: $\upsilon_0/(2\omega)$.

6.13. Определите характер, направление и параметры движения частиц среды на поверхности плоской границы полупространства под

действием волны Рэлея. Коэффициент Пуассона среды 0,3. Как изменится характер движения частиц среды на глубине более $0{,}19\lambda_R$.

Ответ: на поверхности границы частицы среды двигаются по эллиптическим орбитам против часовой стрелки. Отношение полуосей эллипса на поверхности границы для коэффициента Пуассона среды 0,3 равняется 1,49. Если расстояние от поверхности больше, чем $0{,}19\lambda_R$, то направление движения частицы по эллиптическим орбитам изменяется на противоположное.

6.14. Как соотносятся скорости объемной продольной волны, продольной волны в тонкой пластине и продольной волны в тонком стержне со скоростью объемной поперечной волны, если во всех случаях материалом среды является сталь ($\nu = 0{,}28$).

Ответ: используя выражения для упругих модулей, которые получены в параграфе 6.5, можно записать такие соотношения между скоростями разных типов однородных волн в твердом теле и коэффициентом Пуассона:

$$\frac{c_e^2}{c_t^2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad \frac{c_{\text{пл}}^2}{c_t^2} = \frac{2}{1-\nu}, \quad \frac{c_{\text{ст}}^2}{c_t^2} = 2(1+\nu).$$

Отсюда для $\nu = 0{,}28$ находим $c_e = 1{,}81c_t$, $c_{\text{пл}} = 1{,}67c_t$, $c_{\text{ст}} = 1{,}6c_t$. Как видим, скорости всех трех продольных волн при любом значении коэффициента Пуассона превышают скорость объемной поперечной волны. Скорости c_e, $c_{\text{пл}}$, $c_{\text{ст}}$ образовывают нисходящий ряд, который согласован с качественными соображениями о том, что введение границы уменьшает связи элемента среды возле поверхности по сравнению с элементом в объеме среды, вследствие чего эффективная жесткость и скорость уменьшаются.

6.15. В среде из плавленного кварца распространяется продольная волна с частотой 30 МГц и амплитудой деформаций 10^{-9} м. Определить скорость распространения, длину волны, амплитуду смещения, амплитуду колебательной скорости и интенсивность.

Ответ: приблизительно 6000 м/с, 0,2 мм, $3 \cdot 10^{-14}$ м, $6 \cdot 10^{-6}$ м/с, $2{,}4 \cdot 10^{-8}$ Вт/см^2.

6.16. Показать, что решение уравнения (6.109), которое определяет движение частиц упругой изотропной среды, можно представить как сумму решений в двух волновых уравнений, которые имеют разные скорости распространения волн.

6.17. Показать, что при падении SH-волны на свободную границу полупространства отсутствует трансформация в другие типы волн, а коэффициент отражения равен единице.

6.18. На свободную границу полупространства под некоторым углом к нормали падает продольная волна. Возможно ли образование волны Рэлея в данной ситуации?

6.20. На свободную границу полупространства под некоторым углом к нормали падает поперечная волна. Возможно ли образование волны Рэлея в данной ситуации? При каких условиях?

6.21. Твердая среда, которая заполняет полупространство, вдоль плоской границы “склеена ” с идеально жесткой средой. Найти коэффициент отражения продольной звуковой волны, которая падает на границу раздела под углом θ.

Ответ: $V_{ee} = \dfrac{\cos(\theta + \theta_t)}{\cos(\theta - \theta_t)}$, где $\sin\theta_t = \dfrac{c_t}{c_e}\sin\theta$. Как видно из этого выражения, коэффициент отражения V_{ee} равняется нулю если $\theta + \theta_t = \pi/2$. Этот факт имеет наглядный комментарий: поскольку для этого случая векторы смещений $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_{et}$ колинеарны, то для выполнения соответствующих граничных условий на границе необходимо чтобы $V_{ee} = 0$, $V_{et} = -1$.

6.22. Каким должен быть угол наклона клина из плексигласа ($c_e = 2400$ м/с), чтобы возбуждать в алюминии ($c_e = 6420$ м/с, $c_t = 3110$ м/с, $\nu = 0{,}35$) волну Релея на частоте $0{,}5 \cdot 10^6$ Гц? Каким должно быть расстояние между зубцами гребенчатого источника, который применяется для той же цели?

Ответ: 55°; 5,85 мм.

6.23. Имеем два изотропных полупространств ($c_{e1} = 3600$ м/с, $c_{t1} = 1590$ м/с), которые разделенные слоем изотропного материала ($c_{e2} = 5900$ м/с, $c_{t2} = 3780$ м/с). Из верхнего полупространства на слой падает плоская продольная волна под углом $\theta > \theta_{e\text{кр}} > \theta_{t\text{кр}}$, $\theta = 80^\circ$. Какие волны возникнут в нижнем полупространстве?

6.24. Гребенчатый излучатель и приемник, изготовленный по методу клина, размещены на плоской границе изотропной среды с параметрами c_e, c_t, ν. Каким должен быть угол наклона клина, чтобы чувствительность устройства была максимальной? Задается: $c_e = 5970$ м/с, $c_t = 3780$ м/с, $\nu = 0{,}3$; в материале клина $c_{e1} = 2350$ м/с, $c_{t1} = 1120$ м/с; размер гребенчатого излучателя 10^{-2} м, расстояние между зубцами гребенчатого излучателя 10^{-3} м.

РАЗДЕЛ 7

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА

Передо мной волны моря.
Их много. Им немыслим счет.
Их тьма. Они шумят в миноре.
Прибой как вафли их печет.

Б.Л. Пастернак[*]

Эти строки навеяны наблюдениями поэта за волнами на поверхности моря. Из непосредственного опыта каждого человека формируется общее представление о том, что морские волны генерируются влиянием ветра. Механизм преобразования энергии потока в энергию волн очень сложный и продолжает оставаться предметом исследований современной науки.

Звуковые волны имеют существенные отличия от морских волн, как в механизме распространения возмущений, так и генерации. Основные характеристики этих механизмов будут рассмотрены в данном разделе. Следует отметить, что общие качественные представления людей о механизме генерации звуковых волн касаются ранних научных открытий. Понимание того, что звуковые волны распространяются при взаимодействии колеблющихся тел с окружающей средой, можно отнести к древнейшим временам.

Однако для практического создания систем излучения звука, качественного понимания процесса недостаточно. Для этого необходимо изучить количественно основные закономерности процесса взаимодействия колеблющегося тела со средой, сформулировать и наполнить физическим содержанием те научные понятия, которые используются для описания этого процесса.

При рассмотрении вопроса излучения звука с количественной стороны главное внимание необходимо уделить двум свойствам. Первое свойство определяет ту часть энергии колебаний, которую излучатель передает частицам среды при данной скорости колебаний его поверхности, второе свойство показывает, как в дальнейшем эта

[*] Пастернак Борис Леонидович (1890—1960) — российский писатель, лауреат Нобелевской премии (1958).

энергия распределяется между частицами среды, в каком направлении (или в каких направлениях) преимущественно распространяется волновой процесс. Другими словами, первое свойство, определяет эффективность излучения (обычно при конструировании реальных излучателей ее стремятся сделать максимальной), второе - направленность излучения (здесь конструкторы заинтересованы в том, чтобы регулировать направленность по своему желанию).

Далее будут рассматриваться некоторые математические модели излучателей звука, исследование которых позволит получить представление о реальных излучателях звука. При этом указанные два свойства будут рассматриваться для каждой модели излучателя. Подчеркнем здесь лишь такую общую особенность процесса излучения: поскольку эффективность излучения, очевидно, определяется взаимодействием поверхности излучателя с расположенными вблизи нее частицами среды, то здесь следует исследовать звуковое поле вблизи поверхности излучателя, а при изучении его направленности обычно интересуются звуковым полем далеко от излучателя.

7.1. Радиационное демпфирование

Рассмотрим задачу о колебании плоского диска в полубесконечной трубе с жесткими стенками (рис. 7.1). Цель рассмотрения этой простой задачи состоит в том, чтобы, получив ее решение, понять суть явления, называемого радиационное демпфирование, которое сопровождает эффект излучения звука любым телом.

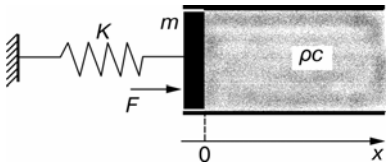


Рис. 7.1. Диск в полубесконечной трубе

Пусть масса диска равна m, а его площадь — S. Пружина, с коэффициентом жесткости K, одним концом прикреплена к диску, а другим — к неподвижной стенке. На диск действует гармоническая сила $F(t) = F_0\exp(-i\omega t)$ (используем комплексную форму записи). Будем считать, что при колебательном процессе силы трения отсутствуют. Справа от диска (рис. 7.1, $x \geq 0$) труба является бесконечной и заполнена средой с плотностью ρ и скоростью звука c.

Задача состоит в определении амплитуды колебательной скорости диска, при этом будем рассматривать его чисто вынужденные колебания. Пусть функция $x(t)$ определяет координату смещения диска, а

$p(x, t)$ — звуковое давление, которое возникает в трубе при $x \geq 0$ вследствие колебаний диска.

Запишем второй закон Ньютона, приняв во внимание тот факт, что действующая на диск сила состоит из внешней силы $F(t)$, упругой силы пружины $Kx(t)$ и силы реакции среды на диск $p(x = 0, t)S$. Итак, имеем уравнение

$$m\ddot{x} = -Kx + F(t) - p(0,t)S. \tag{7.1}$$

Кроме уравнения (7.1), должно выполняться граничное условие на поверхности диска, а именно, равенство скорости диска и колебательной скорости частиц среды в сечении $x = 0$. Для плоской волны, которая возникает в трубе при $x \geq 0$, связь между давлением p и колебательной скоростью υ_x определяется соотношением $p/\upsilon_x = \rho c$. Тогда давление на поверхности можно записать в виде

$$p(0,t) = \rho c \upsilon_x(0,t) = \rho c \dot{x}(t). \tag{7.2}$$

Подставив (7.2) в (7.1), получим уравнение $m\ddot{x} = -Kx + F(t) - \rho c \dot{x} S$. Поскольку исследуются чисто вынужденные колебания, то искомая скорость будет иметь вид $\dot{x}(t) = \upsilon_0 \exp(-i\omega t)$. Используя это выражение в уравнении $m\ddot{x} = -Kx + F(t) - \rho c \dot{x} S$, получим такое соотношение для амплитуды υ_0 скорости диска: $-i\omega m \upsilon_0 = \dfrac{K\upsilon_0}{i\omega} + F_0 - \rho c S \upsilon_0$, откуда

$$\upsilon_0 = \frac{F_0}{\rho c S + i\left(\dfrac{K}{\omega} - \omega m\right)}. \tag{7.3}$$

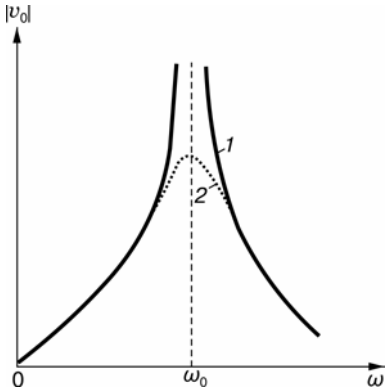


Рис. 7.2. Зависимость амплитуды скорости колебаний диска от частоты внешней силы:
1 — $\rho c = 0$; *2* — $\rho c \neq 0$

Сравните (7.3) с формулой (2.70) для комплексного механического сопротивления системы с одной степенью свободы. Как видим, роль демпфирования играет волновое сопротивление среды ρc. Если среда отсутствует, т.е. $\rho c = 0$, то для частоты внешней силы $\omega = \omega_0 = \sqrt{K/m}$ имеем резонансные колебания диска, при которых амплитуда колебаний стремится к бесконечности (рис. 7.2, кривая *1*). Если $\rho c \neq 0$, то ни при каких значениях частоты ω амплитуда υ_0 не стремится к бесконечности, т.е. вынужденные колебания при $\rho c \neq 0$ на любой частоте имеют конечную амплитуду (рис. 7.2, кривая *2*). Такое демпфирование появилось за счет того, что энергия уносится от слоя звуковой волной. Его называют *радиационным* (от латинского слова *radiatio* — излучение) *демпфированием. Это очень важный и общий для всех излучателей факт, который, в сущности, определяет саму природу излучения звука.*

Рассмотренная модель излучателя (рис. 7.1) адекватно отражает одну из особенностей процесса колебания механической системы в акустической среде - наличие радиационного демпфирования. Однако некоторые важные свойства процесса излучения не могут быть раскрыты в рамках этой модели. Реальные излучатели имеют конечные размеры и обычно работают при других условиях, чем в трубе. Ниже рассмотрим ряд важных для практики моделей излучателей звука, их анализ позволит получить общие характеристики для любого источника.

7.2. Пульсирующая сфера

В пятом разделе изучали свойства плоских волн. Такие волны теоретически создаются вследствие колебаний бесконечной плоскости, а практически — вследствие колебаний поршня в трубе с акустически жесткими стенками. Понятно, что колебание поршня в трубе является довольно специфической ситуацией, но понятие плоской волны очень важно в акустике. Мы не раз будем проводить сравнительный анализ звукового поля некоторого излучателя с полем плоской волны.

Итак, начнем исследование излучения звука телами конечных размеров с пульсирующей сферы. Такой излучатель, с одной стороны, довольно прост для анализа, а с другой — он создает так называемые сферические волны, которые вместе с плоскими волнами служат основой для анализа различных акустических явлений. Поместим в упругой акустической среде с параметрами ρ и c жесткую сферическую оболочку радиусом a (рис. 7.3), поверхность которой пульсирует, т.е. сжимается и разжимается, не изменяя своей формы. Движение поверхности сферы определяется равномерно распределенной радиальной скоростью

$\upsilon_r = \upsilon_0 \exp(-i\omega t)$. Такую модель источника называют *пульсирующая сфера*. Расположим начало системы координат в центре сферы. Источник образует гармоническое поле звукового давления $p(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$, где комплексная амплитуда $p(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta p + k^2 p = 0$, $k = \omega / c$. (Давление и его комплексную амплитуду будем обозначать одной буквой p.)

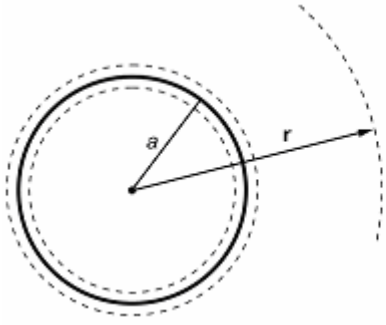


Рис. 7.3. Пример пульсирующей сферы

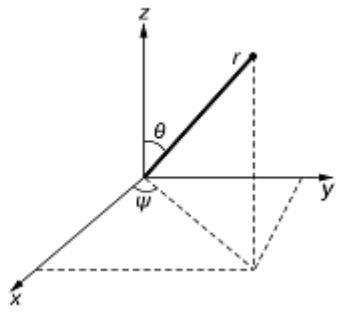


Рис. 7.4. Сферическая и декартова системы координат

Возникает вопрос, какую систему координат выбрать для описания звукового поля пульсирующей сферы. Очевидно, целесообразно использовать такие координаты, в которых поверхность сферического источника звука была бы координатной поверхностью. Из этого следует, что нужно выбрать сферические координаты (ρ, θ, ψ) (рис. 7.4). Понятно, что для данного источника, параметры звукового поля будут зависеть лишь от расстояния r между началом координат и точкой наблюдения, и не будут зависеть от углов θ, ψ. Как следствие, частицы среды двигаются только в радиальном направлении.

Уравнение Гельмгольца $\Delta p + k^2 p = 0$ в сферических координатах имеет вид [31, 41, 52]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial\psi^2} + k^2 r^2 p = 0. \qquad (7.4)$$

Нужно определить такое решение уравнения (7.4), которое будет согласовано со следующими условиями:

1) граничное условие на поверхности сферы, которое определяет равенство скоростей частиц поверхности сферы и частиц среды на поверхности сферы:

$$\left.\frac{1}{i\omega\rho}\frac{dp}{dr}\right|_{r=a} = \upsilon_0; \qquad (7.5)$$

2) условие излучения, согласно которому решение должно представлять собой волну, которая уносит энергию на бесконечность, т.е. проекция вектора плотности потока мощности в радиальном направлении должны быть положительной ($W_r > 0$).

Поскольку комплексная амплитуда давления зависит лишь от r, то второе и третье слагаемые уравнения (7.4) равны нулю, и уравнение заметно упрощается. Выполнив дифференцирование в первом слагаемом (7.4) по r и сократив уравнение на r, получим

$$r\frac{d^2p}{dr^2}+2\frac{dp}{dr}+k^2rp=0.$$

Нетрудно проверить, что $r\frac{d^2p}{dr^2}+2\frac{dp}{dr}=\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}+p\right)=\frac{d^2(rp)}{dr^2}$. Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2(rp)}{dr^2}+k^2(rp)=0, \tag{7.6}$$

с которым не раз встречались во втором разделе, но относительно функции (rp). По известному значению rp находим p. Учитывая зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$, записываем окончательное выражение для давления в виде бегущих волн:

$$p(r,t)=\frac{A}{r}\exp\left(-i\omega t+ikr\right)+\frac{B}{r}\exp\left(-i\omega t-ikr\right). \tag{7.7}$$

Поскольку фронт образовавшихся волн есть сферические поверхности, то их название — *сферические волны* — абсолютно понятно. Первое слагаемое описывает продольную сферическую волну, которая уходит на бесконечность, или ту, которая, как говорят, расходится; второе слагаемое — сферическую волну, которая приходит из бесконечности, или ту, что сходится. Эти волны имеют также название *сферических волн нулевого порядка*, а пульсирующая сфера — *сферический излучатель нулевого порядка*. Понятно, что второе слагаемое в (7.7) не отвечает физической сути задачи об излучении звука пульсирующей сферой - оно не согласуется с условием излучения; поэтому его нужно отбросить.

Рассмотрим некоторые свойства волны, которая излучается пульсирующей сферой. Звуковое давление

$$p(r,t)=\frac{A}{r}\exp\left(-i\omega t+ikr\right),\quad k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}, \tag{7.8}$$

колебательная скорость частиц

$$\upsilon_r = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{i\omega\rho}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)A\exp\left(-i\omega t + ikr\right). \qquad (7.9)$$

Постоянная A определяется из граничного условия (7.5) на поверхности сферы:

$$A = -i\omega\rho\frac{\upsilon_0 a^2}{1 - ika}\exp\left(-ika\right). \qquad (7.10)$$

Из формул (7.8) и (7.9) видно, что амплитуда и давления, и колебательной скорости уменьшаются с расстоянием r. Это объясняется тем, что при распространении сферической волны ее энергия распределяется между возрастающим числом частиц среды и соответственно уменьшается энергия каждой отдельной частицы. Давление уменьшается обратно пропорционально расстояния r, а скорость — по более сложному закону. Обсудим этот момент. Перепишем (7.9) в виде

$$\upsilon_r = \frac{1}{\omega\rho}\left(\frac{i}{r^2} + \frac{k}{r}\right)A\exp\left(-i\omega t + ikr\right) = \frac{1}{\omega\rho}\frac{i + kr}{r^2}A\exp\left(-i\omega t + ikr\right). \qquad (7.11)$$

Предположим, что волновой размер сферы довольно мал, т.е. $ka << 1$, тогда вокруг сферы можно выделить область, для которой будет выполняться неравенство $kr << 1$. Эту область вокруг излучателя называют *ближней зоной* (*ближним полем излучателя*). Очевидно, скорость частиц в ближней зоне определяется первым слагаемым в (7.11), т.е.:

$$\upsilon_r = \frac{1}{\omega\rho}\frac{i}{r^2}A\exp\left(-i\omega t + ikr\right). \qquad (7.12)$$

Соответственно, вокруг сферы можно выделить область, для которой будет выполняться противоположное неравенство, а именно, $kr >> 1$. Эту область называют *дальней зоной* (*дальним полем излучателя*). Здесь колебательная скорость определяется вторым слагаемым в формуле (7.11):

$$\upsilon_r = \frac{k}{\omega\rho}\frac{A}{r}\exp\left(-i\omega t + ikr\right) = \frac{1}{\rho c}\frac{A}{r}\exp\left(-i\omega t + ikr\right). \qquad (7.13)$$

Сравнивая формулу для давления (7.8) и для колебательной скорости в дальней зоне (7.13), видим, что, как и для плоской волны, фазы давления p и скорости υ_r совпадают. Это означает, что звуковая энергия от движущихся частиц к неподвижным передается полностью, т.е. энергия частиц на поверхности сферы некоторого радиуса r передается полностью частицам на сфере радиусом $r + \Delta r$. Понятно, что при этом плотность энергии будет уменьшаться, ведь увеличивается

площадь сферического фронта. Иная ситуация наблюдается в ближней зоне (см. (7.8), (7.12)). Здесь скорость изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния r^2 и, главное, за счет наличия множителя i происходит сдвиг фазы относительно давления на 90°. Это указывает на то, что в ближней зоне средний поток энергии через любую поверхность, которая окружает излучатель, равен нулю. (Если вы забыли этот важный факт, возвратитесь к параграфу 4.6.)

Очевидно характер движения частиц среды в ближней и дальней зонах существенно различается. Действительно, в дальней зоне имеем типичное движение, характерное для бегущей волны с уменьшением давления p и скорости υ_r с расстоянием как $1/r$. В ближней зоне, когда $kr \ll 1$, в звуковом поле в пределах зоны фаза практически не изменяется, поэтому среда распространяется как одно целое (говорят, что в ближней зоне среда ведет себя как несжимаемая). Фактически это означает, что звуковые волны начинают образовываться на некотором расстоянии от сферы. Понятно, что указать четкую границу между ближней и дальней зонами нельзя.

Итак, уже в начале изучения сферических волн мы пришли к выводу, что разная кинематика движения частиц в разных областях вокруг излучателя имеет глубокие следствия в энергетике процесса излучения.

Определим теперь удельное акустическое сопротивление среды распространению сферической волны нулевого порядка (см. (7.8) и (7.11)):

$$\zeta = \frac{p}{\upsilon_r} = \omega\rho\frac{r}{kr+i} = \rho c\left[\frac{(kr)^2}{1+(kr)^2} - i\frac{kr}{1+(kr)^2}\right]. \qquad (7.14)$$

В отличие от случая плоской волны удельное акустическое сопротивление ζ не равно, а лишь — пропорционально ρc. Оно зависит от расстояния r и от частоты, а точнее от волнового расстояния, т.е. величины $kr = 2\pi r/\lambda$. Другая особенность состоит в том, что удельное акустическое сопротивление сферической волны - комплексная величина, следовательно, давление и скорость сдвинуты по фазе. Угол сдвига фаз составляет

$$\alpha = \arg\zeta = -\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{kr}\right). \qquad (7.15)$$

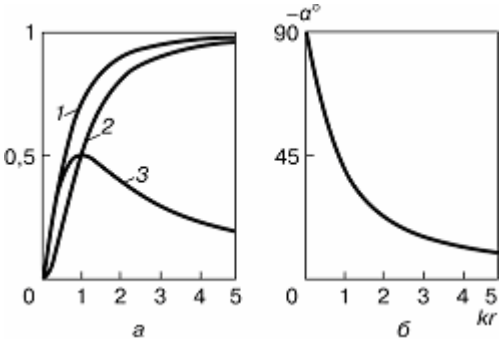


Рис. 7.5. Графики зависимости удельного акустического сопротивления сферической волны от волнового расстояния kr:

a — *1* — $\frac{|\zeta|}{\rho c}$, *2* — $\frac{\mathrm{Re}\,\zeta}{\rho c}$, *3* — $\frac{-\mathrm{Im}\,\zeta}{\rho c}$; *б* — α

Графики зависимостей модуля и аргумента ζ, его действительной и мнимой частей показаны на рис. 7.5. Из графиков следует, что при $kr >> 1$, т.е. в дальней зоне, волновые сопротивления плоской и сферической волн практически совпадают: мнимая часть стремится к нулю, а действительная — к величине ρc, угол сдвига фаз α между p и υ_r стремится к нулю. По этим параметрам свойства сферической волны приближаются к плоской. Что касается зависимости амплитуды волны от расстояния, то обратно пропорциональная зависимость от r сохраняется на любом расстоянии, но, если рассматривать волну на небольшом участке распространения от r до $r + \Delta r$ ($\Delta r << r$), то изменение амплитуды будет довольно несущественным. В самом деле, относительное изменение амплитуды волны

$$\frac{p/r - p/(r+\Delta r)}{p/r} = 1 - \frac{1}{1+\Delta r/r} \approx \frac{\Delta r}{r}$$

мало при условии $\Delta r << r$.

Итак, можно сделать вывод, что на достаточно большом расстоянии свойства сферической и плоской волн практически совпадают (в этом понимании сферическая волна переходит в локально-плоскую). С физической точки зрения это объясняется тем, что на больших расстояниях кривизна фронта волны уменьшается, что приближает характер движения частиц среды на каждом локальном участке сферической волны к характеру движения частиц в плоской волне. Кроме того, на небольших отрезках распространения далеко от источника относительное изменение площади фронта невелико, что обусловливает приблизительное постоянство амплитуды.

7.3. Сопротивление излучения пульсирующей сферы

Для характеристики особенностей взаимодействия излучателя со средой вводят понятие *сопротивления излучения* $Z_{\text{и}}$, которое определяется как отношение силы реакции F со стороны среды на подвижную поверхность излучателя к скорости колебания частиц υ на поверхности излучателя S при ее гармоническом колебании (F и υ записывают в комплексной форме):

$$Z_{\text{и}} = \left.\frac{F}{\upsilon}\right|_S = \frac{1}{\upsilon}\iint_S p dS . \qquad (7.16)$$

При этом предполагаем, что скорость всех частиц поверхности излучателя одинакова.

Если колебательная скорость на поверхности излучателя неодинакова, то сопротивление излучения определяется выражением [61, с. 18]:

$$Z_{\text{и}} = \frac{1}{|\upsilon_0|^2}\iint_S p\upsilon^* dS , \qquad (7.16а)$$

где υ_0 — или усредненная по поверхности излучателя колебательная скорость, или скорость некоторой выбранной точки поверхности излучателя (обычно берут максимальную амплитуду); звездочка означает знак комплексного сопряжения. Понятно, что если колебательная скорость на поверхности излучателя одинакова, то формула (7.16а) упрощается и переходит в формулу (7.16).

Сопротивление излучения характеризует реакцию среды на колеблющуюся поверхность излучателя, поэтому его величина, очевидно, будет зависеть как от упругих свойств среды, так и от типа излучаемой волны. Убедимся в этом на примере излучателей плоской и сферической волн. Излучателями являются: поршень в бесконечной трубе с идеально жесткими стенками (рис. 5.1) и пульсирующая сфера (рис. 7.3).

Поскольку давление p равномерно распределено по поверхности каждого излучателя, то $F = pS$, где S — площадь поверхности излучателя. Подставляя выражение для силы в (7.16), получаем

$$Z_{\text{и}} = \left.\left(\frac{F}{\upsilon_n}\right)\right|_S = \left.\left(\frac{p}{\upsilon_n}\right)\right|_S S = \zeta|_S S. \qquad (7.17)$$

Но $\zeta|_S$ — удельное акустическое сопротивление среды на поверхности излучателя. Используя формулы для ζ в случае плоской и сферической волн, можно записать общее для обоих излучателей выражение:

$$Z_{\text{и}} = \rho c S(R_{\text{и}} - iX_{\text{и}}), \tag{7.18}$$

где коэффициенты $R_{\text{и}}$ и $X_{\text{и}}$ имеют разные значения:

а) для излучателя плоской волны

$$R_{\text{и}} = 1, \quad X_{\text{и}} = 0; \tag{7.19}$$

б) для пульсирующей сферы (радиусом a)

$$R_{\text{и}} = \frac{(ka)^2}{1+(ka)^2}, \quad X_{\text{и}} = \frac{ka}{1+(ka)^2}. \tag{7.20}$$

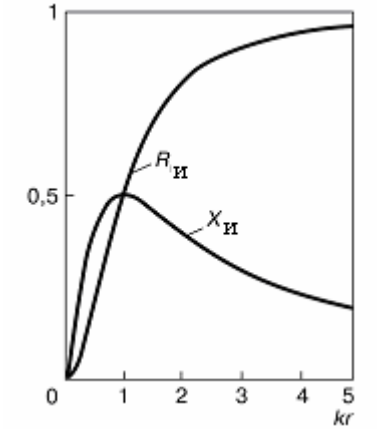


Рис. 7.6. Зависимости коэффициентов $R_{\text{и}}$ и $X_{\text{и}}$ от волнового радиуса ka для пульсирующей сферы

Графики коэффициентов $R_{\text{и}}$ и $X_{\text{и}}$ для пульсирующей сферы в зависимости от волнового радиуса ka приведены на рис. 7.6. Анализируя (7.16)-(7.20), можно сделать следующие выводы.

1. Во всех случаях сопротивление излучения пропорционально волновому сопротивлению среды ρc.

2. Сопротивление излучения пропорционально площади излучателя S.

3. Для излучателя плоской волны сопротивление излучения не зависит от частоты, а для излучателя волн со сферическим фронтом (пульсирующая сфера) — существенным образом зависит от частоты: действительная компонента $Z_{\text{и}}$ возрастает с увеличением ka, асимптотически приближаясь к величине ρc; зависимость мнимой компоненты имеет максимум, после которого $\operatorname{Im} Z_{\text{и}} \to 0$. Сопротивление излучения практически перестает изменяться, начиная с частоты, на которой волновой размер достигает определенной величины. При

этом свойства сферической волны приближаются к свойствам плоской волны.

Остановимся на физическом смысле действительной и мнимой компонент сопротивления излучения. При рассмотрении механической колебательной системы с одной степенью свободы было выяснено, что наличие в комплексном механическом сопротивлении системы действительной составляющей (наличие трения) приводит к диссипации (потере) энергии. Но процесс излучения есть не что иное, как перенос энергии от излучателя в среду, или потеря энергии излучателем за счет радиационного демпфирования. За этот процесс отвечает действительная составляющая сопротивления излучения (убедимся в этом ниже при вычислении мощности излучения пульсирующей сферы).

Рассмотрим мнимую часть $Z_{\text{и}}$. По аналогии с механической колебательной системой отметим, что знак “минус” при мнимой части $Z_{\text{и}}$ указывает на ее инерционный (массовый) характер. Эта инерционная составляющая $Z_{\text{и}}$ возникает вследствие того, что вблизи пульсирующей сферы слой частиц среды ведет себя как несжимаемая жидкость, т.е. колеблется практически синфазно с поверхностью сферы, увеличивая тем самым массу излучателя. Для сферического источника нетрудно вычислить эту добавленную или, как ее называют, *присоединенную массу*. Сделаем некоторые преобразования в выражении для $\mathrm{Im}Z_{\text{в}}$, приняв во внимание, что $k = \omega/c$, $S = 4\pi a^2$:

$$\rho c S X_{\text{и}} = \rho c S \frac{ka}{1+(ka)^2} = \omega \frac{3\left(4\pi a^3/3\right)\rho}{1+(ka)^2} = \omega \frac{M_0}{1+(ka)^2} = \omega M_{\text{пр}}, \quad (7.21)$$

где $M_0 = 3(4\pi a^{3/3})\rho$ — утроенная масса среды в объеме сферы; $M_{\text{пр}}$ — присоединенная масса. Как видим, при малых волновых размерах сферы ($ka << 1$) $M_{\text{пр}} \approx M_0$. С увеличением волнового размера ka присоединенная масса уменьшается и стремится к нулю при $ka >> 1$, что фактически означает зарождение звуковой волны непосредственно на поверхности сферы.

7.4. Энергетические характеристики пульсирующей сферы

Проведем энергетический анализ процесса излучения звука пульсирующей сферой. В ходе анализа установим связь между энергетическими характеристиками и сопротивлением излучения источника.

Мгновенный поток мощности с поверхности сферы определяется соотношением $W_r(t) = \mathrm{Re}p\mathrm{Re}\upsilon_r$, где давление p и скорость частиц υ_r на

поверхности сферы записаны в комплексной форме. Поскольку p и υ_r связаны соотношением $p/\upsilon_r = \zeta\,|_S$ ($\zeta\,|_S$ — удельное акустическое сопротивление среды для сферической волны на поверхности излучателя), то формулу для $W_r(t)$ запишем в виде

$$W_r(t) = \mathrm{Re}\left(\upsilon_r\,\zeta|_S\right)\mathrm{Re}\left(\upsilon_r\right). \tag{7.22}$$

По условию $\upsilon_r = \upsilon_0 \exp(-i\omega t)$, тогда имеем такое выражение для мгновенного потока мощности:

$$W_r(t) = \upsilon_0^2\,\mathrm{Re}\left(\zeta|_S\right)\cos^2(\omega t) + \upsilon_0^2\,\mathrm{Im}\left(\zeta|_S\right)\sin(\omega t)\cos(\omega t). \tag{7.23}$$

Интенсивность, или средний поток мощности, определяется формулой

$$I_r = \langle W_r \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T W_r(t)\,dt. \tag{7.24}$$

Используя (7.23), находим интенсивность звуковой волны вблизи поверхности пульсирующей сферы:

$$I_r(r=a) = \frac{\upsilon_0^2}{2}\mathrm{Re}(\zeta|_S). \tag{7.25}$$

Тогда полную мощность излучения сферы можно определить так:

$$P = I_r S = \frac{\upsilon_0^2}{2}\mathrm{Re}\left(Z_{\text{и}}\right). \tag{7.26}$$

В выражение (7.23) для мгновенного потока мощности равноправно входят как $\mathrm{Re}(\zeta\,|_S)$, так и $\mathrm{Im}(\zeta\,|_S)$. Ситуация изменяется, когда определяется средний за период поток мощности I_r. Как видим, I_r определяется первым слагаемым в выражении для $W_r(t)$, которое пропорционально $\mathrm{Re}(\zeta\,|_S)$. Эту составляющую $W_r(t)$ называют *активной мощностью.* Действительные части $\mathrm{Re}(\zeta\,|_S)$, $\mathrm{Re}(Z_{\text{и}})$ называют активными частями удельного акустического сопротивления и сопротивления излучения, соответственно. Второе слагаемое в (7.23) соответствует так называемой *реактивной мощности*, которая на протяжении периода T циркулирует: то поступая в среду от излучателя, то возвращаясь к излучателю из среды. $\mathrm{Im}(\zeta\,|_S)$ и $\mathrm{Im}(Z_{\text{и}})$ — называют реактивными частями величин ζ и $Z_{\text{и}}$.

Используя (7.23) и (7.25), определим отношение максимума реактивной мощности пульсирующей сферы радиуса a к интенсивности звука вблизи поверхности сферы:

$$\frac{\left(W_{\text{реактивний}}\right)_{\max}}{I_r(r=a)} = \frac{2\,\mathrm{Im}\,\zeta\big|_S}{\mathrm{Re}\,\zeta\big|_S} = \frac{2}{ka}. \qquad (7.27)$$

Как видим, для малого излучателя ($ka << 1$) это отношение имеет большое значение. Отсюда следует, что мощность источника, который приводит излучатель в действие, должна равняться максимуму реактивной мощности - иначе излучатель не сможет работать. Таким образом, для излучателя малых волновых размеров источник работает практически в холостом режиме, и на акустическое излучение тратится только малая часть мощности источника.

Подводя итоги, еще раз отметим: согласно (7.11) колебательная скорость частиц в ближнем поле содержит в себе составляющую (первое слагаемое), никоим образом не связанную с волновым полем, т.е. это движение не приводит к переносу энергии в среде. Именно эта составляющая обусловливает наличие мнимой части удельного акустического сопротивления излучения. Итак, кроме чисто кинематической разницы движения частиц среды в ближнем и дальнем полях, существуют глубокие энергетические отличия. В дальнем поле пульсирующей сферы, где мнимая часть удельного акустического сопротивления практически равна нулю, энергия, которой обладают подвижные частицы среды, полностью передается неподвижным частицам в процессе распространения волны, т.е. сферическая волна приобретает свойства плоской волны, у которой $\mathrm{Im}\zeta = 0$ и реактивная мощность отсутствует. С энергетической точки зрения излучатель плоской волны является наилучшим. В ближнем поле пульсирующей сферы наличие присоединенной массы (как следствие первого слагаемого в выражении (7.11)), определяет реактивный поток мощности, который и направлен на перемещение присоединенной массы. С увеличением волнового радиуса сферы ka зона ближнего поля уменьшается, а вместе с ней стремятся к нулю присоединенная масса и мнимая часть сопротивления излучения. При $ka >> 1$ практически на поверхности сферы рождается волновой процесс.

В завершении получим полезные соотношения для интенсивности сферической волны. Если на расстоянии r_1 от источника имеем интенсивность I_1, а на расстоянии r_2 — интенсивность I_2, то, учитывая, что при отсутствии потерь в среде мощность сферической волны сохраняется, получаем равенство $4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$. Отсюда имеем такое соотношение между интенсивностями сферической волны на разных расстояниях от источника:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}, \text{ или } I_2 = I_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}. \qquad (7.28)$$

Второе важное соотношение, которое позволяет определить интенсивность I_r сферической волны через амплитуду давления $|p|$, получим в результате такого ряда преобразований:

$$I_r = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(p\upsilon_r^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{pp^*}{\zeta^*}\right] = \frac{|p|^2}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\zeta^*}\right] = \frac{|p|^2}{2}\frac{\mathrm{Re}\,\varsigma}{|\zeta|^2} = \frac{|p|^2}{2\rho c}. \quad (7.29)$$

Итак, интенсивность сферической волны выражается через акустическое давление так же, как и для плоской волны (см. (5.14)). Поскольку с расстоянием r от источника давление изменяется как $p \sim 1/r$, то интенсивность — как $I_r \sim 1/r^2$.

7.5. Монополь

Сведения о сферических волнах играют важную роль при исследовании процессов излучения и приема звука, а также в задачах рассеяния звука. Кроме того, благодаря принципу суперпозиции звуковые поля со сложной структурой можно представить как сумму плоских или сферических волн. Поэтому в теоретических исследованиях важно иметь источник сферической волны, который можно считать звукопроницаемым и таким, что не искажает звуковые поля других источников. Этот источник называют *точечным источником* или *монополем*.

К понятию точечного источника можно прийти, рассматривая пульсирующую сферу радиуса a. Согласно (7.8) и (7.10) создаваемое давление представим в виде

$$p(r,t) = -i\omega t\frac{\upsilon_0}{r}\frac{a^2}{1-ika}\exp\left(-i\omega t + ikr - ika\right). \quad (7.30)$$

Рассмотрим частный случай, когда радиус сферы намного меньше длины волны ($a << \lambda$), при этом $ka \to 0$. Пренебрежем (ka) в знаменателе и в показателе экспоненты (7.30). Принимая во внимание, что $4\pi a^2 = S$ — площадь сферы, получаем $p(r,t) = -i\omega\rho\frac{\upsilon_0 S}{4\pi r}\exp\left(-i\omega t + ikr\right)$.

Величину, которая равна произведению скорости поверхности излучателя на его площадь $V = \upsilon S$, называют *объемной скоростью* источника, тогда $\upsilon_0 S = V_0$ — амплитудное значение объемной скорости, или *производительность*.

Нетрудно понять физическое содержание понятия “производительность источника”. Оно представляет собой изменение объема среды за единицу времени (измеряется в кубических метрах за секунду, м^3/с). Если окружить источник некоторой мысленной поверхностью

малого радиуса ($r_0 << \lambda$) и считать, что жидкость на небольших расстояниях от излучателя движется как единое целое, практически не сжимаясь, то можно увидеть, что производительность равняется объему жидкости, которую выталкивает источник за одну секунду за границы сферической поверхности. Помножив производительность на плотность, получим массу жидкости, которая вытекает или втекает в объем, ограниченный мысленной сферой, за единицу времени. Это толкование позволяет считать монополь источником массы относительно окружающей его жидкости.

Итак, давление точечного источника определяется по формуле

$$p(r,t) = -i\omega\rho \frac{V_0}{4\pi r} \exp\left(-i\omega t + ikr\right). \qquad (7.31)$$

Важным является то, что точечный источник — это не только сфера малых волновых размеров, но и любое другое пульсирующее тело, если его размеры намного меньше, чем λ. Понятие пульсирующего источника предполагает, что амплитуда и фаза скорости колебаний одинаковы для всех точек его поверхности. Рассмотрим течение жидкости в непосредственной близости к поверхности пульсирующей сферы и любого другого пульсирующего источника малых волновых размеров. Оказывается, что каждый из двух источников всегда можно окружить сферической поверхностью малых волновых размеров и именно такой, что течения снаружи этой сферы для двух источников практически совпадают. Для среды вне этой сферической поверхности каждый из двух излучателей действует как источник массы. Итак, точечным источником можно назвать любой пульсирующий излучатель, размеры которого намного меньше длины волны.

Акустическая мощность точечного источника согласно (7.26) с учетом неравенства $ka << 1$ имеет вид

$$P = \frac{\upsilon_0^2}{2} \operatorname{Re} Z_{\text{и}} = \frac{\upsilon_0^2}{2} \rho c S (ka)^2 \frac{4\pi}{4\pi} = \rho c \frac{k^2 V_0^2}{8\pi} = \frac{(\omega\rho)^2}{2\rho c} \frac{V_0^2}{4\pi}. \qquad (7.32)$$

Из (7.32) следует, что акустическая мощность любого (независимо от формы) пульсирующего источника малых волновых размеров определяется амплитудой объемной скорости, т.е. производительностью источника.

Сравним мощность излучения монополя с мощностью излучения плоской волны диском той же площади $S = 4\pi a^2$, который колеблется с той же скоростью υ, что и поверхность пульсирующего шарика. Для того чтобы диск излучал плоскую волну, его нужно разместить в цилиндрической трубе сечения S. Мощность излучения диска равна $P_{\text{диск}} = \left(\upsilon_0^2/2\right)\rho c S$, т.е. согласно (7.32) в $1/(ka)^2$ раза больше мощности

излучения монополя. Таким образом, эффективность излучения звука в виде сферической волны пульсирующим телом, малым по сравнению с длиной волны, является низкой по сравнению с излучением плоской волны излучателем с той же площадью излучающей поверхности.

При наличии нескольких точечных источников в звуковом поле их взаимодействием со звуковыми волнами, т.е. явлением рассеяния звука на точечном источнике, можно пренебрегать. Это позволяет построить модель совместной работы нескольких источников звука, которая достаточно просто исследуется теоретически, что и будет сделано в следующем параграфе.

7.6. Поле совместно работающих монополей. Характеристика направленности

В большинстве случаев, которые встречаются на практике при использовании источников звука, важно не только излучить акустическую мощность в среду с максимальной эффективностью, но и очень существенным является то, как распределяется при этом энергия акустических колебаний в среде. Если поместить в любую точку поверхности излучателя начало сферических координат r, θ, ψ, то интересно рассмотреть не только зависимость амплитуды колебаний от расстояния r вдоль некоторого фиксированного направления, но и ее зависимость от углов θ, ψ на некотором фиксированном расстоянии. Последняя зависимость характеризует так называемое свойство направленности излучателя. Если при условии $r = \text{const}$ амплитуда не зависит от направления (θ, ψ), то такой излучатель считается ненаправленным (например, пульсирующая сфера); если амплитуда велика в некотором диапазоне углов и мала в других направлениях, то о таком излучателе говорят, как о направленном.

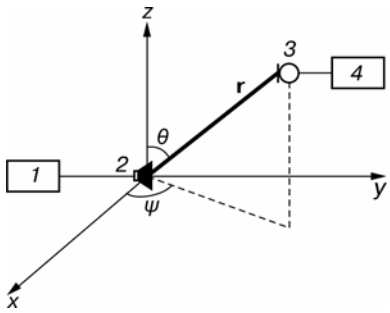


Рис. 7.7. Схема эксперимента для определения характеристик направленности излучателя

Явление направленности можно проиллюстрировать с помощью несложного эксперимента, для проведения которого необходимо иметь электрический генератор синусоидального напряжения *1*, излучатель, например, громкоговоритель *2*, микрофон *3* и чувствительный вольтметр *4* (рис. 7.7). Установив громкоговоритель на открытой площадке (так, чтобы отсутствовало отражение звука) и, включив звук, передвигайте микрофон по сферической поверхности радиусом *r*, центр которой совпадает с излучателем. Более практично оставлять микрофон на месте и поворачивать в разные стороны излучатель. На открытом пространстве эти способы измерения являются равноценными. Можно заметить, что напряжение, которое фиксируется вольтметром (оно пропорционально амплитуде акустических колебаний в точке размещения микрофона), изменяется в зависимости от направления на излучатель. В этом и проявляется свойство направленности излучателя.

Зафиксируем зависимость амплитуды давления от углов $|p(\theta, \psi)|$: выберем наибольшее из всех значение амплитуды $|p|_{\max} = |p(\theta_0, \psi_0)|$ и составим отношение

$$R_p(\theta, \psi) = \frac{|p(\theta, \psi)|}{|p(\theta_0, \psi_0)|_{\max}}, \quad r = \text{const}. \tag{7.33}$$

Функция $R_p(\theta, \psi)$ *называется характеристикой направленности по давлению* и используется для количественного описания направленных свойств излучателя. Используют также *энергетическую характеристику направленности* как нормированную угловую зависимость интенсивности звука:

$$R_I(\theta, \psi) = \frac{|I(\theta, \psi)|}{|I(\theta_0, \psi_0)|_{\max}} = \frac{|p(\theta, \psi)|^2}{|p(\theta_0, \psi_0)|^2_{\max}}. \tag{7.34}$$

Согласно (7.34) такая характеристика направленности $R_I(\theta, \psi)$ определяется квадратом амплитуды давления. Для наглядности описания трехмерной поверхности $R_p(\theta, \psi)$ используют ее сечение плоскостями $\theta = \text{const}$ или $\psi = \text{const}$.

При изучении направленных свойств источника звука необходимо рассмотреть следующие вопросы:

1) чем обуславливает явление направленности;

2) какие факторы определяют характеристику направленности излучателя.

Ответы на эти вопросы раскрывают основные закономерности явления направленности. Оказывается, что их можно проследить на

примере очень простого источника звука, который состоит из двух монополей.

Отдельный точечный источник излучает сферическую волну (7.31), амплитуда которой зависит от расстояния, но не зависит от направления. Итак, точечный источник не имеет направленности. Возьмем излучатель из двух синфазных точечных источников равной производительности, расположенных на расстоянии d один от другого (рис. 7.8), и назовем его *синфазной парой*. Совместим с левым монополем (понятно, что можно и с правым) начало сферических координат. Угол θ отсчитывается от оси Oz, а угол ψ — в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Окружив излучатель сферой радиуса r, будем рассматривать амплитуду давления в точках, которые лежат на сфере, под разными углами θ и ψ. Можно сразу заметить, что звуковое поле, а, следовательно, и характеристика направленности излучателя не зависят от угла ψ, т.е. $R(\theta, \psi) \equiv R(\theta)$.

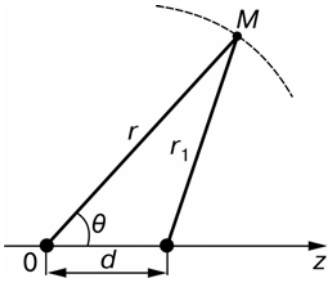


Рис. 7.8. Пример синфазной пары монополей

Звуковое давление в точке наблюдения M определяется суперпозицией двух сферических волн, которые излучаются монополями:

$$p = -i\omega\rho\frac{V_0}{4\pi r}\exp(ikr) - i\omega\rho\frac{V_0}{4\pi r_1}\exp(ikr_1). \tag{7.35}$$

Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ писать не будем. Представим (7.35) в виде

$$p = -i\exp(ikr_1)\left[A_1 + A\exp\left(ik(r - r_1)\right)\right], \tag{7.36}$$

где

$$A = \frac{\omega\rho V_0}{4\pi r}, \quad A_1 = \frac{\omega\rho V_0}{4\pi r_1}. \tag{7.37}$$

Определим амплитуду давления в точке наблюдения M:

$$|p| = \sqrt{pp^*} = \sqrt{A^2 + A_1^2 + 2AA_1\cos\alpha}, \tag{7.38}$$

здесь * — знак комплексного сопряжения, а

$$\alpha = k(r - r_1) \tag{7.39}$$

определяет сдвиг фазы между звуковыми давлениями волн в точке M. Согласно геометрии задачи расстояние r_1 от правого монополя к точке M (рис. 7.8) в сферических координатах r, θ определяется по формуле

$$r_1 = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}. \tag{7.40}$$

Таким образом, если зафиксировать расстояние r от начала системы координат до точки наблюдения M, то, как видим, от угла θ зависят сдвиг фаз α и амплитуда A_1, а следовательно, и амплитуда суммарного давления. Перемещение точки M по окружности приводит к изменению амплитудно-фазовых соотношений между интерферирующими волнами, а соответственно, и к изменению результата интерференции — амплитуды суммарного давления. Понятно, что и в общем случае, когда излучатель состоит из большого количества источников, направленность объясняется интерференцией волн.

Характер изменений амплитуды суммарного давления при перемещении точки M вдоль окружности можно понять, проанализировав (7.38). Начинаем от точки, расположенной под углом $\theta = 90°$, и будем двигаться вдоль окружности к точке $\theta = 0°$ (рис. 7.8). Амплитудно-фазовые соотношения будут изменяться следующим образом. Сдвиг по фазе $\alpha = k(r - r_1) = 2\pi(r - r_1)/\lambda$ увеличивается от 0 до максимального значения $2\pi d/\lambda$. Если $d << \lambda$, то α для всех θ близко к нулю и, следовательно, фазовые соотношения остаются практически неизменными. Как следствие, амплитуда давления для всех значений θ является суммой амплитуд двух волн. Если $d > \lambda$, то изменение сдвига фаз очень существенно. Можно выделить такие направления (такие θ), вдоль которых разность хода волн $(r - r_1)$ кратна длине волны и, следовательно, α кратно 2π. Количество этих направлений равно целой части отношения d/λ. Между ними будут направления, для которых α равно нечетному числу π. В направлениях первого типа суммируются синфазные колебания (при этом амплитуды складываются), а в направлениях второго типа — противофазные колебания (амплитуды вычитаются). Итак, двигаясь вдоль окружности, можно наблюдать минимумы и максимумы амплитуды колебаний.

Если перенести точку наблюдения на окружность другого радиуса, то снова будут наблюдаться минимумы и максимумы, но под другими углами, поскольку согласно (7.39) сдвиг фаз $\alpha = k(r - r_1)$ зависит не только от θ, но и от r. Зависимость амплитуды $A_1 \sim 1/r_1$ от θ, как следует из (7.40), также неодинакова на разных расстояниях: она тем бо-

лее существенна, чем меньше расстояние r. Наоборот, при увеличении r по сравнению с величиной d, разность расстояний r и r_1 и амплитуд A и A_1 становится все менее существенной при изменении угла θ. Так, если $r = 100d$, то амплитуда A отличается от A_1 не более, чем на 0,5 %. Понятно, что такие особенности оказывают влияние на расчет характеристики направленности на разных расстояниях от источника звука. Например, на рис. 7.9 приведены диаграммы направленности $R_p(\theta)$, когда точка наблюдения находится на расстоянии $r/\lambda = 3$ (кривая *1*), $r/\lambda = 15$ (кривая *2*) и $r/\lambda = 100$ (кривая *3*), от пары монополей, которые наглядно иллюстрируют приведенные выше соображения. Возникает вопрос, как ликвидировать эту неоднозначность в определении характеристики направленности.

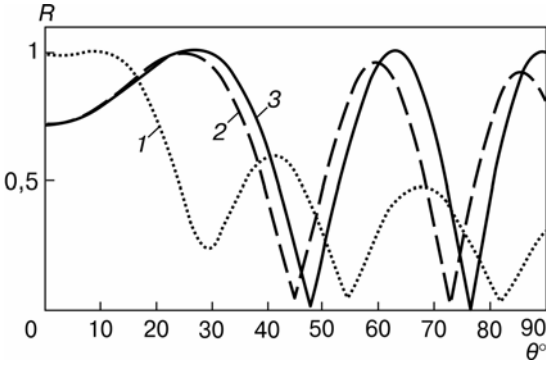


Рис. 7.9. Характеристики направленности пары синфазных монополей, r/λ: *1* — *3*, *2* — 15, *3* — 100; $d/\lambda = 2{,}25$

Перепишем (7.40) в виде

$$r_1 = r\sqrt{1+\left(\frac{d}{r}\right)^2 - \frac{2d}{r}\cos\theta}. \qquad (7.41)$$

Пусть точка наблюдения находится на расстоянии $r >> d$, тогда слагаемым $(d/r)^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей:

$$r_1 = r\sqrt{1-2\frac{d}{r}\cos\theta}. \qquad (7.42)$$

Далее, приняв во внимание, что $d/r << 1$, выражение для r_1 следует записать в виде ряда:

$$r_1 = r\left[1-\frac{d}{r}\cos\theta-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2\cos^2\theta+\ldots\right]. \qquad (7.43)$$

Таким образом, разность хода волн $\Delta r = r - r_1$ определяется рядом:

$$\Delta r = r - r_1 = d\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{d^2}{r}\cos^2\theta + \ldots \qquad (7.44)$$

Формула (7.43) позволяет понять, что на довольно больших по сравнению с размером излучателя расстояниях ($r >> d$) амплитудные множители A и A_1 (7.37) становятся практически одинаковыми и независимыми от угла θ. Итак, при $r >> d$ можно записать

$$A_1 = A = \frac{\omega\rho V_0}{4\pi r}. \qquad (7.45)$$

Тогда выражение (7.38) для амплитуды давления в точке наблюдения упрощается:

$$|p| = A\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = \frac{\omega\rho V_0}{2\pi r}\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|. \qquad (7.46)$$

Теперь обратим внимание на разность фаз α. В фазе колебаний (7.39) сделать замену в формуле (7.42) корня квадратного на единицу нельзя, ведь для фазы существенны не относительные, а абсолютные погрешности. Поэтому условия $d/r >> 1$ в общем случае недостаточно и следует обратиться к (7.44). Отсюда разность фаз α определяется рядом:

$$\alpha = k\Delta r = kd\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{kd^2}{r}\cos^2\theta + \ldots. \qquad (7.47)$$

Выражение (7.47) позволяет сделать вывод: разность фаз между давлениями волн от обоих монополей в точке наблюдения можно считать такой, что не зависит от расстояния, если выполняется второе условие:

$$\frac{kd^2}{2r} << \pi \quad \text{или иначе} \quad \frac{d^2}{r\lambda} << 1. \qquad (7.48)$$

При выполнении этого условия можно определить разность хода волн:

$$\Delta r = d\cos\theta \qquad (7.49)$$

и фазовый сдвиг между давлениями волн в точке наблюдения:

$$\alpha = k\Delta r = kd\cos\theta. \qquad (7.50)$$

Тогда формула для амплитуды давления (7.46) примет вид

$$|p| = \frac{\omega\rho V_0}{2\pi r}\left|\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)\right|. \qquad (7.51)$$

Понятно, что $|p|_{\max}$ определяется при $\theta = 90°$. Отсюда согласно определению (7.33) получаем выражение для характеристики направленности пары синфазных монополей:

$$R(\theta) = \frac{|p(\theta)|}{|p(\theta = 90°)|} = \left|\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)\right| = \left|\cos\left(\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta\right)\right|. \qquad (7.52)$$

Подобные соображения можно повторить и для излучающей системы, которая имеет произвольное число монополей, причем несущественно, будут ли одинаковыми амплитуды и фазы объемных скоростей всех монополей. При этом нужно следить за выполнением двух условий:

1) при $d/r << 1$ сохраняется отношение амплитуд вкладов каждого монополя в точке наблюдения при изменении расстояния;

2) при $kd^2/r << 1$ остается неизменной разность фаз при изменении расстояния вдоль данного направления.

Второе условие, в отличие от первого, зависит от частоты. Как следствие, более строгим может быть как первое, так и второе условие: при низких частотах более строгим является первое условие, а при высоких — второе. Область пространства, для которого выполняются оба условия, называют *дальней зоной излучателя.* (Вернитесь к рис. 7.9 и попробуйте прокомментировать ход кривых.)

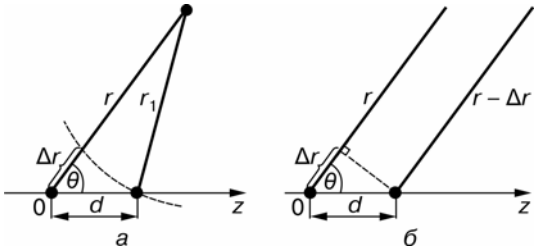


Рис. 7.10. Разность хода волн Δr : *а* — общий случай; *б* —в дальней зоне

Таким образом, к определению характеристики направленности (см. (7.33)) следует добавить замечание относительно точки наблюдения: она должна находиться в дальней зоне излучателя. Очевидно, для этой зоны лучевая картинка, показанная на рис. 7.10, *а*, является несколько иной. Действительно, согласно (7.49) разность хода волн $\Delta r = d\cos\theta$, такое соотношение имеет место для прямоугольного треугольника. Это означает, что в пределах принятого приближения лучи, вдоль которых распространяются волны к точке наблюдения, можно считать параллельными (рис. 7.10, *б*).

На рис. 7.11 приведены характеристики направленности пары синфазных монополей при разном волновом расстоянии между мо-

нополями: а) $d/\lambda = 0{,}5$, б) $d/\lambda = 0{,}725$, в) $d/\lambda = 1{,}0$, г) $d/\lambda = 2{,}25$. В сферических координатах, где фигурирует еще и угол ψ, диаграмма направленности представляет собой поверхность вращения кривой вокруг оси $\theta = 0$. Анализируя (7.52) и графики на рис. 7.11, можно прийти к выводу, что вид характеристики направленности определяется волновыми размерами излучателя d/λ: при $d/\lambda << 1$ синфазная пара монополей является ненаправленным излучателем, при увеличении d/λ у диаграммы направленности появляются максимумы и минимумы, т.е. возникают так называемые лепестки диаграммы направленности.

Для количественной характеристики формы лепестков характеристики направленности вводят понятие ширины лепестка. Обычно ее определяют на уровне $1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$ от максимума (что соответствует половинной мощности); например, на рис. 1.11, *а* ширина лепестка составляет $\Delta\theta \approx 40°$.

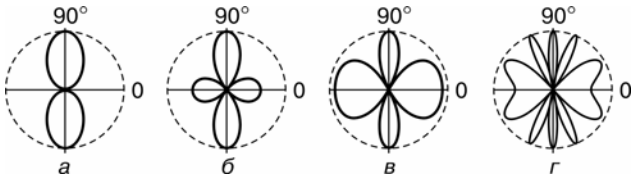


Рис. 7.11. Характеристика направленности пары синфазных монополей, d/λ: *а* — 0,5; *б* — 0,725; *в* — 1,0; *г* — 2,25

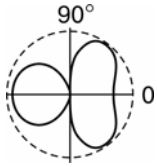


Рис. 7.12. Характеристика направленности несинфазной пары монополей: $d/\lambda = 0{,}5$, $\beta = \pi/2$

Рассмотрим общую ситуацию, когда колебательные скорости пары точечных источников имеют некоторый сдвиг фазы β: $\upsilon_1 = \upsilon_0 \exp(-i\omega t)$, $\upsilon_2 = \upsilon_0 \exp(-i\omega t + i\beta)$. Рекомендуем читателю самостоятельно записать выражение для звукового поля в дальней зоне и потом получить следующую формулу для характеристики направленности несинфазной пары монополей:

$$R(\theta) = \left|\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right| = \left|\cos\left(\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta - \frac{\beta}{2}\right)\right|. \qquad (7.53)$$

На рис. 7.12 представлена диаграмма направленности при $d/\lambda = 0{,}5$, $\beta = \pi/2$. Сравнивая рис. 7.12 и рис. 7.11, *а*, замечаем, что вследствие сдвига фаз между колебаниями монополей возникло смещение максимумов и минимумов характеристики направленности, что сопровождается изменением формы лепестков.

Поворот максимумов характеристики направленности представляет собой интересный эффект с точки зрения практического применения. В самом деле, угол сдвига фаз колебаний источников относительно легко регулировать с помощью фазовращателя, который включается в электрическую цепь излучающей системы. Изменяя угол сдвига фаз β, осуществляем поворот лепестков характеристики направленности, не вращая сам излучатель. Метод электрического сканирования таких характеристик имеет преимущество перед методом механического сканирования вследствие практически отсутствия инерционности. Недостатком электрического сканирования является искажение формы характеристики направленности при повороте максимумов. Вообще, построение излучающих и приемных устройств с заведомо заданной характеристикой направленности является важной с практической точки зрения задачей в акустике и электродинамике. Исследованию этих вопросов уделено большое внимание в специальной литературе по вопросам проектирования излучающих и приемных антенн.

В конце этого параграфе сделаем интересное наблюдение. Формула (7.36) определяет давление звукового поля синфазной пары монополей при любом расстоянии r. Исследуем, как изменится это выражение, если точка наблюдения находится в дальней зоне (рис. 7.10, *б)*. Здесь полагаем $r - r_1 = \Delta r = d\cos\theta$, а $A_1 = A = \omega\rho V_0 / (4\pi r)$. Поэтому, в рамках принятых приближений давление в дальней зоне можно определить так:

$$p = -i\omega\rho \frac{V_0}{4\pi r} \exp\left(-i\omega t + ikr\right)\left[1 + \exp\left(-ikd\cos\theta\right)\right]. \qquad (7.54)$$

Как видим, выражение перед квадратными скобками определяет сферическую волну, а выражение в скобках зависит от угла θ и не зависит от расстояния r. Таким образом, в дальней зоне поле пары монополей представляет собой сферическую волну, амплитуда давления которой на поверхности сферического фронта определяется угловой функцией и не зависит от расстояния r. Оказывается, что вывод из нашего наблюдения имеет общий характер, т.е. касается любого источника звука, и об этом еще не один раз будет идти речь в этом и последующих разделах.

Обобщая, можно сказать, что характеристика направленности излучателя звука определяется ее волновым размером и амплитудно-

фазовым распределением скорости колебаний на поверхности излучателя.

7.7. Осциллирующая сфера

В параграфе 7.2 исследовали звуковое поле, которое создается благодаря пульсирующему движению жесткой безмассовой сферы радиусом a. Сейчас рассмотрим ситуацию, когда центр сферы двигается вдоль оси Oz со скоростью $\upsilon = \upsilon_0 \exp(-i\omega t)$, т.е. сфера колеблется как одно целое вокруг своего положения равновесия $z = 0$ (рис. 7.13). Такой источник звука называют *осциллирующей сферой*, или *сферическим источником первого порядка*, а волну, которую он создает, — сферической волной первого порядка. Сравнив звуковые поля пульсирующей и осциллирующей сфер, сделаем на основе этого анализа некоторые обобщения.

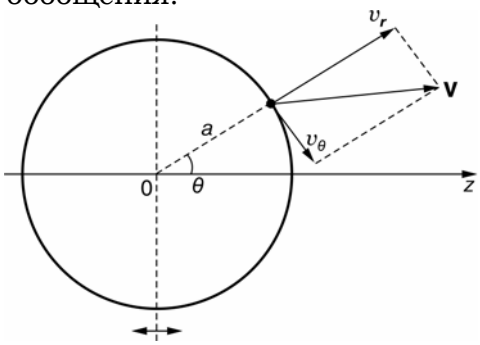


Рис. 7.13. Пример осциллирующей сферы

Чтобы определить звуковое поле осциллирующей сферы, нужно найти такое решение — $p(r, \theta, \psi, t) = p(r, \theta, \psi)\exp(-i\omega t)$ — волнового уравнения, которое бы удовлетворяло граничным условиям на поверхности сферы и, конечно, условию излучения. При таком движении источника скорость частиц сферы и акустической среды будет иметь две составляющих: радиальную υ_r — вдоль радиуса r и тангенциальную υ_θ — перпендикулярную к радиусу r (см. рис. 7.13). Граничное условие на поверхности сферы состоит в равенстве радиальной составляющей скорости частиц сферы $\upsilon_r = \upsilon_0 \cos\theta \exp(-i\omega t)$ и радиальной компоненты скорости частиц в звуковом поле при $r = a$, т.е.

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \upsilon_0 \cos\theta. \qquad (7.55)$$

Обратим внимание, что на тангенциальную компоненту скорости частиц сферы $\upsilon_0 \sin\theta \exp(-i\omega t)$ не накладывается условие равенства

тангенциальной компоненты скорости частиц звукового поля на поверхности сферы, что справедливо для идеальной среды.

Поскольку в поставленной задаче имеет место осевая симметрия, то зависимость параметров звукового поля от сферической координаты ψ отсутствует, и потому третье слагаемое в уравнении Гельмгольца (7.4) в сферических координатах равно нулю. Тогда, это уравнение можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+k^2r^2p=0. \qquad (7.56)$$

Найти решение уравнения (7.56) — сложная задача, но ее можно упростить, если в решении попробовать угадать зависимость от угла θ. Предположим, что решение имеет вид $p(r,\ \theta) = R(r)\cos\theta$, т.е. зависимость от угла θ в звуковом поле такая же, как и для радиальной составляющей скорости на поверхности сферы. Подставив это решение в (7.56), получим

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-2R(r)+k^2r^2R(r)=0. \qquad (7.57)$$

Таким образом, угловая зависимость решения в виде $\cos\theta$ является правильной, и физически это означает, что звуковое поле по координате θ повторяет зависимость радиальной составляющей скорости на поверхности сферы. Следует отметить, что это не тривиальный результат. Например, если решение записать в виде $p(r,\ \theta) = R(r)\cos(n\theta)$ при $n > 1$, то сократить на $\cos(n\theta)$ при подставке такого решения в уравнение (7.56) не удастся. Это свидетельствует о том, что поле не повторяет колебания сферы в случае зависимости радиальной составляющей скорости типа $\cos(n\theta)$, $n > 1$. Так исчезла привлекательная возможность разложить сложное колебание сферы на гармоники (убедитесь в этом самостоятельно).

Из выражения (7.57) получаем уравнение для функции $R(r)$:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2r^2-2\right)R=0. \qquad (7.58)$$

Если $kr >> 1$, то (7.58) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2r^2R=0, \qquad (7.59)$$

что совпадает с уравнением (7.6) для пульсирующей сферы. Понятно, что в этом случае решение (7.59) совпадает с решением для пульсирующей сферы (7.8): $R(r)=\frac{A}{r}\exp(ikr)$. Решение $\frac{B}{r}\exp(-ikr)$ отбрасы-

ваем, поскольку оно не удовлетворяет условию излучения. Таким образом, на большом волновом расстоянии от осциллирующей сферы ($kr >> 1$) зависимость давления звукового поля от расстояния r такая же, как и для пульсирующей сферы. (Вспомните вывод, сделанный относительно формулы (7.54).)

Решение уравнения (7.58) определяет радиальную составляющую звукового поля осциллирующей сферы на любом расстоянии от сферы. Запишем решение уравнения (7.58), не рассматривая пока пути его отыскания,

$$R(r) = \frac{A}{r}\left(1 + \frac{i}{kr}\right)\exp(ikr).$$

Итак, давление звукового поля осциллирующей сферы можно записать так:

$$p(r,\theta,t) = \frac{A}{r}\left(1 + \frac{i}{kr}\right)\cos\theta\exp(-i\omega t + ikr), \qquad (7.60)$$

где постоянная A определяется из граничного условия (7.55). Если для давления пульсирующей сферы нет деления на ближнее и дальнее поле, то в случае осциллирующей сферы такое деление есть. При $kr >> 1$ формула (7.60) приобретает вид

$$p(r,\theta,t) = \frac{A}{r}\exp(-i\omega t + ikr)\cos\theta. \qquad (7.61)$$

Как и в случае пары монополей (см. (7.54)), в дальней зоне поле осциллирующей сферы представляет собой сферическую волну, амплитуда давления которой на сферическом фронте определяется функцией, которая не зависит от r, а только от угла θ (в данном случае это $\cos\theta$). Так, при $\theta = 0$ давление будет максимальное, а при $\theta = 90°$ — равняется нулю. На рис. 7.14 приведена характеристика направленности осциллирующей сферы по давлению $R_p(\theta) = |\cos\theta|$. Отсюда следует важный вывод: направленное излучение звука получено за счет специального распределения колебательной скорости на поверхности источника.

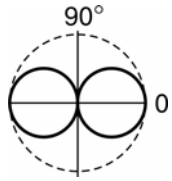


Рис. 7.14. Характеристика направленности осциллирующей сферы

Определим составляющие колебательной скорости частиц в звуковом поле осциллирующей сферы:

$$\upsilon_r = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{i\omega\rho}A\frac{\exp(-i\omega t + ikr)}{r}\left[ik - \frac{2i}{kr^2} - \frac{2}{r}\right]\cos\theta, \qquad (7.62)$$

$$\upsilon_\theta = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{i\omega\rho}A\frac{\exp(-i\omega t + ikr)}{r^2}\left[1 + \frac{i}{kr}\right]\sin\theta. \qquad (7.63)$$

Если $kr >> 1$, то $\upsilon_r \sim 1/r$, $\upsilon_\theta \sim 1/r^2$, т.е. на большом волновом расстоянии от источника частицы среды двигаются практически радиально ($\upsilon_r >> \upsilon_\theta$).

Оказывается (и об этом мы еще поговорим), что при произвольном распределении скорости на поверхности источника, на большом волновом расстоянии ($kr >> 1$) от источника, звуковое поле имеет вид

$$p(r,\theta,\psi,t) = A\frac{\exp(-i\omega t + ikr)}{r}q(\theta,\psi), \qquad (7.64)$$

т.е. представлено в виде двух множителей: поля сферической волны нулевого порядка и функции $q(\theta, \psi)$, которая определяет направленность излучения (для осциллирующей сферы $q(\theta, \psi) = \cos\theta$). Другими словами, в дальней зоне звуковое поле произвольного излучателя представляет собой волну, в которой зависимость амплитуды давления от расстояния r такая же, как в сферической волне; при этом распределение амплитуды давления на сферической поверхности определяется функцией $|q(\theta, \psi)|$ и не зависит от расстояния r.

Понятно, что представление поля в виде (7.64) позволяет вычислить интенсивность в дальней зоне произвольного излучателя по формуле (7.29) для интенсивности в сферической волне:

$$I_r = \frac{|p|^2}{2\rho c}, \qquad (7.65)$$

где $|p|$ — амплитуда давления в дальнем поле источника звука.

Определим сопротивление излучения осциллирующей сферы. Поскольку радиальная (нормальная к поверхности) скорость поверхности сферы определена согласно закону косинуса (см. (7.55)), то для определения сопротивления излучения следует воспользоваться формулой (7.16а). При этом необходимо вычислить интеграл $\iint\limits_S p\upsilon^* dS$. Поскольку звуковое поле обладает осевой симметрией относительно оси Oz, то в качестве элемента интегрирования можно взять поясок между близкими параллелями, приняв за переменную интегрирования угол θ (рис. 7.15). Площадь такого пояска равна $2\pi a^2\sin\theta d\theta$.

Итак, $\iint\limits_S p\upsilon^* dS = 2\pi a^2 \int\limits_0^\pi \left(p\upsilon_r^* \right)\Big|_{r=a} \sin\theta d\theta$. Подставив сюда выражения (7.60) и (7.62) для давления p и колебательной скорости υ_r, после интегрирования получим

$$\iint\limits_S p\upsilon^* dS = 2\pi a^2 \frac{2}{3}\frac{|A|^2}{\omega\rho} i\left(1+\frac{i}{ka}\right)\left(-ik+\frac{2i}{ka^2}-\frac{2}{a}\right) \tag{7.66}$$

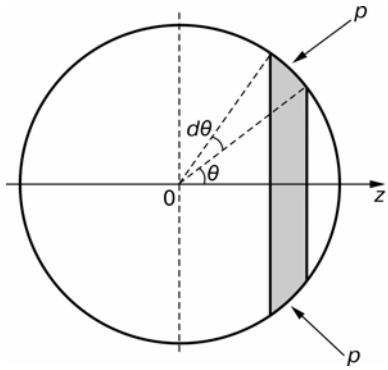


Рис. 7.15. Пример элемента интегрирования

Импеданс осциллирующей сферы, согласно определению (7.16а),

$$Z_{\text{и}} = \frac{1}{\left|\upsilon_r\left(r=a,\theta=0\right)\right|^2}\iint\limits_S p\upsilon^* dS \tag{7.67}$$

Учитывая (7.66) и (7.62) (при $r = a$, $\theta = 0$), после несложных преобразований получим

$$Z_{\text{и}} = \frac{4}{3}\pi a^2\left[\frac{(ka)^4}{4+(ka)^4} - i\frac{(ka)^3+2ka}{4+(ka)^4}\right]\rho c = \rho c\frac{S}{3}\left(R_{\text{и}} - iX_{\text{и}}\right), \tag{7.68}$$

где $S = 4\pi a^2$ — площадь поверхности сферы;

$$R_{\text{и}} = \frac{(ka)^4}{4+(ka)^4}; \quad X_{\text{и}} = \frac{(ka)^3+2ka}{4+(ka)^4}. \tag{7.69}$$

Как видим, $Z_{\text{и}}$ имеет комплексный характер, т.е. имеется синфазная составляющая между p и υ_r, а также составляющая, для которой присущ сдвиг фаз на 90° между p и υ_r. Как и для пульсирующей сферы,

мнимая часть импеданса излучения осциллирующей сферы имеет характер массы, т.е. $i\mathrm{Im}[Z_и] = -i\omega M_{пр}$, где $M_{пр}$ — присоединенная масса:

$$M_{пр} = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{(ka)^2 + 2}{(ka)^4 + 4}\rho. \qquad (7.70)$$

Если волновой размер сферы мал, то

$$M_{пр} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)\rho \quad \text{при условии} \quad ka << 1, \qquad (7.71)$$

т.е. равняется массе среды в половине объема сферы.

Соотношение между реактивной и активной частями импеданса излучения зависит от соотношения между радиусом сферы и длиной звуковой волны, т.е. от величины ka. На рис. 7.16 представлены зависимости $R_и$ и $X_и$ от ka. Для предельного случая $ka >> 1$ реактивная часть импеданса излучения стремится к нулю, а активная — к $\rho cS/3$.

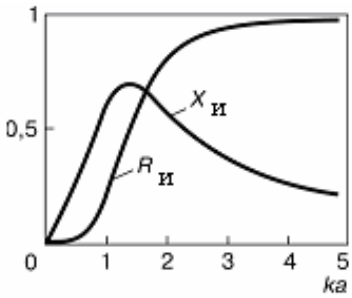


Рис. 7.16. Зависимости коэффициентов $R_и$ и $X_и$ от ka для осциллирующей сферы

На практике важен противоположный предельный случай — малый радиус сферы по сравнению с длиной волны ($ka << 1$). Поскольку активная составляющая $Z_и$ связана с распространением энергии в среде, а реактивная составляющая $Z_и$ — с локальным перераспределением энергии вблизи излучателя, то эффективность излучателя можно характеризовать отношением $\mathrm{Re}[Z_и]/\mathrm{Im}[Z_и]$. При условии $ka << 1$ имеем:

для пульсирующей сферы

$$\frac{\mathrm{Re}\, Z_и^{(0)}}{\mathrm{Im}\, Z_и^{(0)}} \sim (ka), \qquad (7.72)$$

для осциллирующей сферы

$$\frac{\operatorname{Re} Z_{\text{и}}^{(1)}}{\operatorname{Im} Z_{\text{и}}^{(1)}} \sim (ka)^3 . \tag{7.73}$$

Как видим, в случае осциллирующей сферы при $ka << 1$ реактивное сопротивление имеет намного большее превышение над активным сопротивлением, чем в случае пульсирующей сферой. Это, безусловно, должно повлиять на энергетические характеристики осциллирующей сферы по сравнению с пульсирующей сферой. Об это будет идти речь в следующем параграфе.

7.8. Энергетические характеристики осциллирующей сферы

Поскольку среда не имеет потерь, то мощность, излучаемую осциллирующей сферой, можно рассчитать как поток мощности, который проходит через замкнутую поверхность, окружающую источник, например, сферу большого радиуса r, описанную вокруг источника как из центра. При $kr >> 1$ давление и радиальная скорость стремятся к величинам (см. (7.61) и (7.62)):

$$p = \frac{A}{r}\cos\theta \exp(-i\omega t + ikr), \quad \upsilon_r = \frac{1}{\rho c}\frac{A}{r}\cos\theta \exp(-i\omega t + ikr). \tag{7.74}$$

Тогда интенсивность $I_r = \operatorname{Re}\left(p\upsilon_r^*\right)/2$ будет определяться по формуле

$$I_r = \frac{|A|^2}{2\rho c r^2}\cos^2\theta. \tag{7.75}$$

Мощность находим, интегрируя интенсивность I_r по всей поверхности сферы радиусом r (см. рис. 7.15): $P^{(1)} = \int\limits_0^{\pi} I_r 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$. С учетом (7.75) находим мощность осциллирующей сферы:

$$P^{(1)} = \frac{2}{3}\pi\frac{|A|^2}{\rho c}. \tag{7.76}$$

Постоянную A определим из граничного условия (7.55):

$$A = -i\omega\rho\frac{\upsilon_0 ka^3 \exp(-ika)}{2ka + 2i - i(ka)^2}. \tag{7.77}$$

Итак, мощность осциллирующей сферы определяется по формуле

$$P^{(1)} = \frac{2}{3}\pi\frac{(\omega\rho)^2}{\rho c}\frac{\upsilon_0^2 k^2 a^6}{4+(ka)^4} = \frac{\upsilon_0^2}{2}\operatorname{Re} Z_{\text{и}}^{(1)}, \tag{7.78}$$

где $Z_{\text{и}}^{(1)}$ — сопротивление излучения осциллирующей сферы (см. (7.68)). Как и следовало ожидать, мощность пропорциональна активной части сопротивления излучения.

Рассмотрим важную для практики ситуацию, когда волновой размер источника мал, т.е. $ka << 1$ (в электроакустике все излучатели низких частот находятся в таких условиях). В этом случае (7.26) и (7.78) принимают такой вид:

для пульсирующей сферы

$$P^{(0)} = \frac{\upsilon_0^2}{2}\rho c S (ka)^2, \tag{7.79}$$

для осциллирующей сферы

$$P^{(\text{I})} = \frac{\upsilon_0^2}{2}\rho c \frac{S}{3}\frac{(ka)^4}{4}, \tag{7.80}$$

откуда

$$\frac{P^{(\text{I})}}{P^{(0)}} = \frac{(ka)^2}{12}. \tag{7.81}$$

Как видим, при условии $ka << 1$ излучение осциллирующей сферы будет менее эффективным, чем пульсирующей сферы. Этот факт можно объяснить тем, что при осцилляциях сферы разности давлений перед и за малой сферой успевают выровняться местными “паразитными потоками” — перетеканием жидкости из мест с большим давлением в места с малым давлением. Как следствие, эффективность излучения резко снижается вследствие значительного уменьшения активной части сопротивления излучения и большого значения реактивной составляющей. Данная ситуация имеет образное название: “*акустическое короткое замыкание*”. При пульсациях сферы одинаковое акустическое давление создается сразу на всей поверхности сферы — жидкости перетекать некуда. При высоких частотах осцилляций сферы, когда длина волн намного меньше размера источника, изменение давления происходит настолько быстро, что растяжения и сжатия не успевают взаимно компенсироваться.

“Паразитные потоки” характерны не только для осциллирующей сферы, но и для любых других тел, которые колеблются в среде, например мембраны, и, если не принять предупредительных специальных мер, очень уменьшают ее излучающую способность в области

низких частот. Для предотвращения возникновения таких потоков между передней и задней поверхностями мембраны ее помещают в защитный экран, который препятствует перетеканию среды. Такой экран называют *разделительным экраном*. Идеально этот экран должен быть бесконечно большим. Но необходимого эффекта можно достичь даже с помощью сравнительно небольшого экрана радиусом порядка $\lambda/6$, где λ — длина волны низкочастотного излучаемого звука. Подобную картину действия “паразитных потоков” наблюдаем и при колебаниях струн скрипки, гитары. Струны музыкальных инструментов практически не излучают звуковых волн и звук, который мы слышим, образуется колебанием деки (корпуса), который возбуждается струнами. Воздух не успевает обтекать большую деку, как в случае со струной, поэтому возникающие у деки сжатия воздуха распространяются далее в виде волны, а не местных потоков.

7.9. Диполь

В параграфе 7.5 была построена математическая модель точечного источника (монополя), которая широко используется при анализе звуковых полей. Другая модель источника, которая также широко используется в теоретических исследованиях, представляет собой пару противофазных монополей (рис. 7.17, *а*), размещенных на расстоянии *d*, малом по сравнению с длиной волны. Такой источник называют *диполем*.

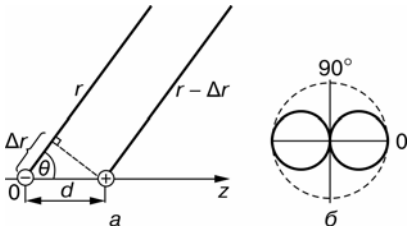


Рис. 7.17. Диполь (*а*) и его характеристика направленности (*б*)

Пара противофазных монополей создает поле давления

$$p = i\omega\rho\frac{V_0}{4\pi r}\exp(ikr) - i\omega\rho\frac{V_0}{4\pi(r - d\cos\theta)}\exp(ikr - ikd\cos\theta) =$$

$$= i\omega\rho\frac{V_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r} - \frac{\exp(-ikd\cos\theta)}{r - d\cos\theta}\right]\exp(ikr). \qquad (7.82)$$

Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ писать не будем. Учитывая, что $kd << 1$, записываем следующее приближенное равенство: $\exp(-ikd\cos\theta) \approx 1 - ikd\cos\theta$. Тогда

$$p = i\omega\rho\frac{V_0 d}{4\pi}\frac{ikr-1}{r\left(r-d\cos\theta\right)}\cos\theta\exp\left(ikr\right).$$

Считая $d/r << 1$, получим следующее выражение для поля давления диполя:

$$p = i\omega\rho M_0\frac{ikr-1}{4\pi r^2}\cos\theta\exp\left(ikr\right), \tag{7.83}$$

где $M_0 = V_0 d$. Величину M_0 называют *моментом диполя*. Итак, поле диполя определяется не объемной скоростью составляющих его монополей V_0 и не расстоянием между монополями d отдельно, а произведением этих величин $V_0 d$. Одинаковое дипольное излучение можно получить с помощью разных пар противофазных монополей, подобрав объемные скорости монополей и расстояние между ними таким образом, чтобы моменты были одинаковыми.

Если расстояние d устремить к нулю, оставляя неизменными объемные скорости составляющих монополей, то момент диполя, а вместе с тем и поле диполя, также будет стремиться к нулю. Но если, уменьшая величину d, одновременно увеличивать объемные скорости, так, чтобы момент диполя был неизменным $M_0 = \text{const}$, то неизменным будет и поле диполя. Итак, приходим к понятию *точечного диполя*.

Поле диполя можно также записать в виде:

$$p = i\omega\rho M_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\exp\left(ikr\right)}{4\pi r}\right). \tag{7.84}$$

Действительно, вследствие непосредственного вычисления по формуле (7.84) получаем

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\exp\left(ikr\right)}{4\pi r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\exp\left(ikr\right)}{4\pi r}\right)\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{ikr-1}{4\pi r^2}\exp\left(ikr\right)\frac{\partial r}{\partial z},$$

поскольку $\partial r/\partial z = \cos\theta$, то имеем результат, который совпадает с формулой (7.83). Соотношение (7.84) показывает, что можно ввести понятие диполя, продифференцировав поле монополя по координате источника z (рис. 7.17, *а*). Но первый вариант определения понятия диполя более приемлем с физической точки зрения.

Сравнение полей диполя и осциллирующей сферы позволяет сделать очевидным важный вывод: практической реализацией диполь-

ного излучателя является осциллирующая сфера. Интересным является случай осциллирующей сферы малого радиуса по сравнению с длиной излучающей волны ($ka << 1$). Рекомендуем читателю самостоятельно осуществить преобразование формул (7.60), (7.77), пренебрегая малыми величинами порядка $(ka)^2$ по сравнению с единицей, и получить приближенное выражение для поля малой ($ka << 1$) осциллирующей сферы:

$$p = i\omega\rho 2\pi a^3 \upsilon_0 \frac{ikr-1}{4\pi r^2}\cos\theta \exp(ikr). \tag{7.85}$$

Сравнивая выражения (7.83) и (7.85), можно сказать, что моментом малой осциллирующей сферы есть величина $M_0 = 2\pi a^3 \upsilon_0$. Поэтому, если радиус сферы a и скорость υ_0 изменяются так, что значение момента M_0 остается постоянным, то и поле излучения осциллирующей сферы будет неизменным.

Таким образом, поле излучения малой осциллирующей сферы соответствует построенной модели диполя. Отметим, что дипольный характер излучения имеют многие другие осциллирующие тел (например, струны, о которых шла речь в конце параграфа 7.8).

Дальнее поле ($kr >> 1$) дипольного источника

$$p = -\omega\rho k \frac{M_0}{4\pi r}\cos\theta \exp(ikr) \tag{7.86}$$

имеет вид сферической волны с характеристикой направленности, которая определяется функцией косинуса (рис. 7.17, *б)*.

Интересный результат можно получить при суперпозиции полей монополя и диполя. Итак, поместим в одну точку монополь с объемной скоростью V и диполь с моментом M. Совместная работа этих излучателей создает в дальней зоне ($kr >> 1$) поле

$$p = -i\omega\rho \frac{V}{4\pi r}\exp(ikr) - \omega\rho k \frac{M}{4\pi r}\cos\theta \exp(ikr) =$$

$$= \frac{-i\omega\rho}{4\pi r}(V - ikM\cos\theta)\exp(ikr). \tag{7.87}$$

Если выбрать $V = -ikM$, то получим источник с характеристикой направленности в виде кардиоиды (рис. 7.18):

$$R(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2}. \tag{7.88}$$

Максимум излучения имеем в направлении $\theta = 0$ и нулевое излучение в противоположном направлении $\theta = \pi$. Такой источник можно также получить с помощью одной сферы, которая одновременно выполняет

пульсации и осцилляции с соответственно подобранными амплитудами.

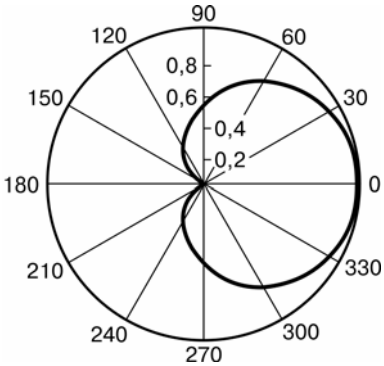


Рис. 7.18. Характеристика направленности системы монополь-диполь

7.10. Коэффициент концентрации

В то время как акустическая мощность ненаправленного источника распределяется равномерно по всем направлениям, мощность направленного излучателя может быть сконцентрирована в пределах большего или меньшего (в зависимости от остроты его направленности) телесного угла. В связи с этим с помощью остронаправленного излучателя можно значительно увеличить интенсивность звуковых волн в заданном направлении при фиксированной излученной мощности. Способность излучателя концентрировать звуковую энергию в некотором направлении характеризуется коэффициентом концентрации.

Рассмотрим два излучателя — ненаправленный и направленный. Пусть мощности излучения ненаправленного P_0 и направленного P_c излучателей одинаковы, т.е. $P_0 = P_c$. Ненаправленный излучатель на расстоянии r (в дальней зоне) создает звуковое поле интенсивностью I_0, а интенсивность на том же расстоянии r вдоль некоторого направления (θ, ψ) направленного излучателя — $I_c(\theta, \psi)$. *Коэффициентом концентрации* называют отношение

$$\Omega(\theta, \psi) = \left.\frac{I_c(\theta, \psi)}{I_0}\right|_{P_0 = P_c}. \qquad (7.89)$$

Пусть в направлении (θ_0, ψ_0) интенсивность направленного излучателя максимальная $I_c(\theta_0, \psi_0) = I_{c\max}$, тогда отношение

$$\Omega(\theta,\psi)=\left.\frac{I_{c\max}}{I_0}\right|_{P_0=P_c} \tag{7.90}$$

называют *коэффициентом осевой концентрации.* Используя формулу (7.65), записываем интенсивность направленного излучателя в виде

$$I_c=\frac{|p|^2}{2\rho c}. \tag{7.91}$$

Согласно определению характеристики направленности $R_p(\theta,\psi)$ (см. (7.33)) имеем $|p|=|p|_{\max}R_p(\theta,\psi)$, тогда (7.91) примет вид

$$I_c=\frac{|p|_{\max}}{2\rho c}R_p^2(\theta,\psi)=I_{c\max}R_p^2(\theta,\psi). \tag{7.92}$$

Интенсивность ненаправленного источника можно вычислить по формуле

$$I_0=\frac{P_0}{4\pi r^2}. \tag{7.93}$$

Подставив (7.91) и (7.93) в (7.89), получим такое выражение для коэффициента концентрации:

$$\Omega(\theta,\psi)=\frac{2\pi|pr|^2}{\rho c P_0}. \tag{7.94}$$

Связь между коэффициентом концентрации в заданном направлении и коэффициентом осевой концентрации устанавливаем из их определений:

$$\Omega(\theta,\psi)=\left.\frac{I_c(\theta,\psi)}{I_0}\right|_{P_0=P_c}=\left.\frac{I_{c\max}R_p^2(\theta,\psi)}{I_0}\right|_{P_0=P_c}=\Omega_0R_p^2(\theta,\psi). \tag{7.95}$$

Отметим, что по определению $\Omega_0>1$, тогда как коэффициент $\Omega(\theta,\psi)$ может быть меньше единицы и даже равным нулю, если для данного направления характеристика направленности $R(\theta,\psi)=0$.

Выведем формулу для коэффициента осевой концентрации через $R(\theta,\psi)$ направленного излучателя. Исходным будет равенство мощностей $P_0=P_c$. Мощность излучателя определим, интегрируя его интенсивность по сфере большого радиуса r (в дальней зоне). Для ненаправленного излучателя имеем

$$P_0=4\pi r^2I_0. \tag{7.96}$$

Для направленного источника излучаемая мощность примет вид:

$$P_c = \int\limits_{(0)} I_c(r,\theta,\psi)\,dS = I_{c\max} r^2 \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} R_p^2(\theta,\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\psi, \qquad (7.97)$$

где элемент сферической поверхности $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\psi$. В соответствии с равенством $P_0 = P_c$ приравняем выражения (7.96) и (7.97):

$$4\pi r^2 I_0 = I_{c\max} r^2 \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} R_p^2(\theta,\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\psi\,,$$

откуда

$$\Omega_0 = \frac{4\pi}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} R_p^2(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\psi}. \qquad (7.98)$$

Если характеристика направленности имеет осевую симметрию относительно $\theta = 0$ и не зависит от угла ψ, то

$$\Omega_0 = \frac{2}{\int\limits_0^{\pi} R_p^2(\theta)\sin\theta\, d\theta}. \qquad (7.99)$$

Вычислим Ω_0, например, для излучателя, у которого $R_p(\theta) = |\cos\theta|$. Согласно (7.99) имеем $\Omega_0 = 3$.

Равнозначным определению (7.90) будет следующее определение: коэффициент осевой концентрации — это отношение мощностей ненаправленного и направленного излучателей при условии создания ими одинаковой интенсивности звука на некотором расстоянии r:

$$\Omega_0 = \left.\frac{P_0}{P_c}\right|_{I_0 = I_{c\max}}. \qquad (7.100)$$

Определение (7.100) показывает, во сколько раз меньшую мощность должен отдавать излучатель направленного действия, чтобы в направлении максимума интенсивности создать такую же интенсивность, которую создает ненаправленный излучатель. Другими словами, Ω_0 оценивает энергетический выигрыш при использовании направленного излучателя. Подытоживая все сказанное выше, отмечаем, что коэффициент осевой концентрации является интегральной характеристикой направленных свойств излучателя.

7.11. Взаимодействие источников звука

До сих пор исследовалось звуковое поле излучающей системы, в которой отдельные источники звука (составляющие системы) работают независимо один от другого. Однако, если несколько источников звука работают вместе в одной системе, то их взаимодействие будет проявляться через созданное ими звуковое поле. Это — вообще, сложная и важная проблема в теории излучения звука. Здесь возникают интересные и нестандартные ситуации. Попробуем понять сложность проблемы на примере простого излучателя — пары монополей.

Запишем поле давления синфазной (+ +) и противофазной (+ –) пары монополей в дальней зоне (рис. 7.10, *б)*, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем:

$$p^{\substack{++\\+-}} = -i\omega\rho\frac{V_0}{4\pi r}\exp(ikr) \pm (-i\omega\rho)\frac{V_0}{4\pi r}\exp(ik(r - d\cos\theta))$$

или, иначе (сделайте преобразование самостоятельно):

для синфазной пары

$$p^{++} = -i\omega\rho\frac{V_0}{4\pi r}\exp(ikr)2\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)\exp\left(-i\frac{kd}{2}\cos\theta\right), \quad (7.101)$$

для противофазной пары

$$p^{+-} = -i\omega\rho\frac{V_0}{4\pi r}\exp(ikr)2i\sin\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)\exp\left(-i\frac{kd}{2}\cos\theta\right). \quad (7.102)$$

Интенсивность отдельного монополя

$$I^{(0)} = \frac{\left|p^{(0)}\right|^2}{2\rho c} = \frac{(\omega\rho)^2}{2\rho c}\frac{V_0^2}{(4\pi r)^2}, \quad (7.103)$$

по аналогии для пары монополей имеем

$$I^{++} = \frac{\left|p^{++}\right|^2}{2\rho c} = I^{(0)}4\cos^2\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right),$$

$$I^{+-} = \frac{\left|p^{+-}\right|^2}{2\rho c} = I^{(0)}4\sin^2\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right). \quad (7.104)$$

Определим мощность излучения исследуемых источников звука; интегрирование интенсивности по поверхности сферы большого радиу-

са, которая окружает излучатель, можно выполнить аналогично как в параграфе 7.7 (см. рис. 7.15). Как следствие, получим

$$P^{++} = P^{(0)} 2\left[1 + \frac{\sin(kd)}{kd}\right], \qquad P^{+-} = P^{(0)} 2\left[1 - \frac{\sin(kd)}{kd}\right], \qquad (7.105)$$

где $P^{(0)} = I^{(0)} 4\pi r^2$ — мощность единичного монополя. Очевидно, выражения, стоящие в квадратных скобках (7.105), характеризуют взаимодействие монополей через создаваемое ими звуковое поле. Тогда мощность одного монополя, который работает в паре, равна

$$P_1^{++} = \frac{P^{++}}{2} = P^{(0)}\left[1 + \frac{\sin(kd)}{kd}\right], \quad P_1^{+-} = \frac{P^{+-}}{2} = P^{(0)}\left[1 - \frac{\sin(kd)}{kd}\right]. \qquad (7.106)$$

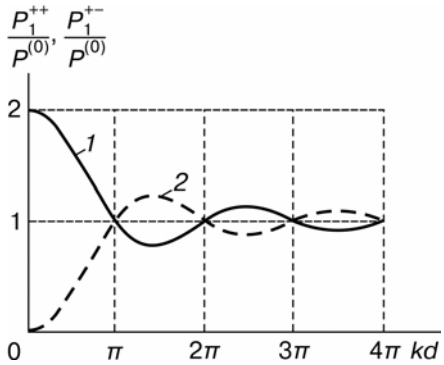


Рис. 7.19. Нормированные зависимости P_1^{++} (*1*) и P_1^{+-} (*2*) от волнового расстояния kd

На рис. 7.19 приведены зависимости $P_1^{++}/P^{(0)}$ и $P_1^{+-}/P^{(0)}$ от волнового расстояния между монополями kd. Эти зависимости позволяют сформулировать следующие выводы.

1. Мощность отдельного монополя зависит от волнового расстояния между монополями.

2. Мощность одного монополя может быть как больше, так и меньше, чем мощность, которую он излучает, работая в одиночку. Если $kd = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то взаимодействие по полю отсутствует.

3. Два близко расположенных ($kd << 1$) синфазных монополя излучают мощность в четыре раза большую, чем один монополь с такой же производительностью V_0.

Парадокс, указанный в пункте 3, может быть объяснен следующим образом. Пусть радиальная скорость частиц поверхности монополя равна $\upsilon_r = \upsilon_0 \exp(-i\omega t)$. Тогда мощность, излучаемая монополем

$$P^{(0)} = \frac{\upsilon_0^2}{2}\operatorname{Re} Z_{\text{и}} = \frac{\upsilon_0^2}{2} S \operatorname{Re} \zeta\big|_S = \frac{\upsilon_0^2}{2} S \operatorname{Re} \frac{p}{\upsilon_0}\bigg|_S = \frac{V_0}{2}\operatorname{Re} p\big|_S \qquad (7.107)$$

равняется объемной скорости $V_0 = \upsilon_0 S$, умноженной на действительную часть звукового давления на поверхности монополя. Пусть монополь работает, находясь в поле давления другого монополя. Тогда давление на его поверхности состоит из собственного и дополнительного давления, которое создается на его поверхности другим излучателем. Полагая радиусы монополей малыми по сравнению с расстоянием между ними, можно считать, что дополнительное давление на поверхности сферы распределено равномерно, как и собственное давление излучателя.

Запишем комплексную амплитуду давления монополя в виде ряда, разложив функцию $\exp(ikr)$ в ряд Тейлора по степеням величины kr:

$$p = -i\omega\rho \frac{V_0}{4\pi r}\exp(ikr) = -i\omega\rho \frac{V_0}{4\pi r}\left[1 + ikr - \frac{(kr)^2}{2} - i\frac{(kr)^3}{6} + \ldots\right] =$$

$$= \omega\rho \frac{V_0}{4\pi}\left[-\frac{i}{r} + k + i\frac{k^2 r}{2} - \frac{k^3 r^2}{6} + \ldots\right]. \qquad (7.108)$$

При малой величине kr действительная часть давления $\operatorname{Re} p$ определяется вторым слагаемым в скобках и равняется $\omega\rho k V_0/(4\pi)$ (мнимая часть соответствует первому слагаемому). Видим, что $\operatorname{Re} p$ не зависит от расстояния, пока членами высших порядков можно пренебрегать, т.е. пока величина kr достаточно мала по сравнению с единицей. Таким образом, для каждого из двух синфазных монополей действительная компонента давления, которое создается одним из них на поверхности другого, равняется действительной компоненте давления, создаваемого самым излучателем. Вследствие этого действительная составляющая давления удваивается, а, следовательно, в соответствие (7.107) удваивается и излучаемая мощность, причем независимо от расстояния между излучателями, пока это расстояние остается малым по сравнению с длиной волны.

Таким образом, при синфазной работе нескольких близко расположенных излучателей мощность, излучаемая каждым из них, возрастает пропорционально количеству излучателей. Поэтому мощность излучения такой группы одинаковых синфазных излучателей равна произведению мощности одного самостоятельно работающего излучателя и квадрата количества излучателей.

В завершение отметим следующий момент. Если монополь сам по себе совершает свободные колебания, то их амплитуда будет уменьшаться вследствие расходования его энергии на излучение. Если пара

монополей будет осуществлять синфазные свободные колебания, то мощность каждого из них будет увеличиваться вдвое, но при этом пульсации монополей будут затухать в два раза быстрее. Закон сохранения энергии должен выполняться.

7.12. Излучение звука источниками, которые имеют неодинаковую скорость движения частиц поверхности излучателя

Будем рассматривать излучатели, скорость движения частиц поверхности которых неодинакова. Задача будет решена для произвольного распределения скорости на поверхности излучателя.

На вопрос, является ли постоянство скорости всех точек излучающей поверхности обязательным свойством всех излучателей, встречающихся на практике, нельзя ответить положительно. Однако во многих случаях это желательно. Так, желательно, чтобы диффузор электродинамического громкоговорителя двигался как единое целое (поршневой характер движения); но, как следствие неидеальной жесткости диффузора, частицы, расположенные на разных расстояниях от его центра, перемещаются с разной скоростью (особенно на сравнительно высоких частотах). Неодинаковой является скорость частиц поверхности излучателей, в которых используются изгибные колебания пластинок или мембран. В других случаях стараются достичь неравномерности скорости колебаний поверхности, чтобы с помощью соответствующего распределения амплитуд и фаз получить желаемую характеристику направленности. Таким образом, обсуждение общего случая, когда скорость разных точек излучающей поверхности произвольная, имеет большой практический интерес.

Метод, который будет ниже использован для исследования, пригоден лишь для излучателей, которые имеют вполне определенную форму поверхности (например, сфера, цилиндр, эллипсоид). Это связано не с физическими, а с математическими соображениями. Для того чтобы вычислить излучаемую мощность или характеристику направленности, нужно определить звуковое поле излучателя по заданной скорости его поверхности, или, другими словами, найти решение уравнения Гельмгольца $\Delta p + k^2 p = 0$ при заданном значении скорости на поверхности излучателя. Полученное решение, кроме того, должно представлять собой волну, которая уходит на бесконечность от излучателя (это так называемое условие излучения).

Математическая задача, к которой сводится задача излучения звука, решается сравнительно несложно, если поверхность излучателя S является координатной поверхностью в одной из тех систем криволинейных координат, где волновое уравнение допускает разделение переменных. Метод разделения переменных уже встречался при изу-

чении колебаний мембраны. Рассмотренные примеры показали, что волновое уравнение в частных производных превращается в обычное дифференциальное уравнение. Существует всего 11 систем ортогональных криволинейных координат, которые допускают разделение переменных в уравнении Гельмгольца [*, с. 73—118].

Однако хорошо изучены лишь некоторые случаи; рассмотрим цилиндрические и сферические координаты и соответствующие излучатели в форме цилиндра и сферы. Эти случаи не только самые простые, но и наиболее близкие ко многим реальным излучателям: на практике встречаются и цилиндрические, и сферические излучатели. Кроме того, эти примеры дают возможность принципиально разобраться в особенностях излучения звука при неравномерном распределении скорости колебаний поверхности излучателя.

7.12.1. Цилиндрический излучатель

Рассмотрим излучатель в форме цилиндра бесконечной длины радиусом R (рис. 7.20). Понятно, что длина реальных цилиндрических излучателей всегда конечна. Поэтому результаты, которые будут здесь получены, после соответствующей корректировки можно применить к цилиндрическим излучателям, длина которых конечна, но велика по сравнению с их радиусом и длиной волны.

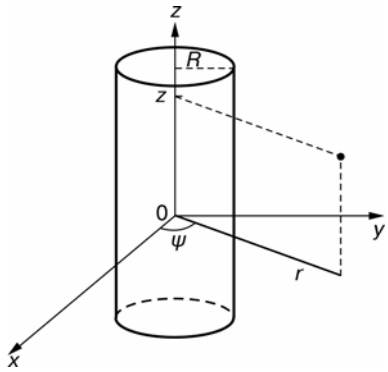


Рис. 7.20. Пример цилиндрического излучателя

Пусть частицы цилиндрической поверхности излучателя колеблются по гармоническому закону с частотой ω. Для описания поля такого излучателя целесообразно использовать цилиндрические координаты (r,z,ψ). Уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды давления $p(r,z,\psi)$ в цилиндрических координатах имеет такой вид [31, 52]:

---

* Арфкен Г. Математические методы в физике. — М.: Атомиздат, 1970. — 712 с.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \psi^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=0. \qquad (7.109)$$

Найдем его решение при заданной скорости на поверхности цилиндра:

$$\upsilon_r\big|_{r=R}=\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=R}=V(z,\psi). \qquad (7.110)$$

Согласно методу разделения переменных представим решение в виде

$$p(r,z,\psi)=F(r)f(z)E(\psi). \qquad (7.111)$$

Решения $E(\psi)$ и $f(z)$ будем искать следующим образом: не будем решать уравнение (7.109), а попробуем подобрать систему функций, при помощи которой можно представить любое распределение колебательной скорости на поверхности цилиндра. Если зависимости, которые определяются этими функциями, будут повторяться во внешнем поле, то это означает, что вид искомого решения выбран правильно. Объясним это.

Поскольку зависимость $E(\psi)$ должна быть периодической с периодом 2π, то можно предположить, что решение $E(\psi)$ определяется функциями $\cos(m\psi)$, $m = 0,1,2,\ldots$Для проверки справедливости утверждения подставим решение вида $p(r,z,\psi)=\tilde{p}(r,z)\cos(m\psi)$в уравнение (7.109). Нетрудно убедиться (сделайте самостоятельно), что $\cos(m\psi)$ можно сократить; этот математический факт свидетельствует о том, что распределение колебательной скорости на поверхности цилиндра вида $\cos(m\psi)$ повторяется в параметрах внешнего звукового поля. Аналогичные соображения можно повторить и для функции $\sin(m\psi)$. Таким образом, представляя скорость частиц на поверхности цилиндра в виде ряда по функциям $\cos(m\psi)$ и $\sin(m\psi)$, $m = 0,1,2, \ldots$, можно и угловую зависимость внешнего поля записать в виде ряда Фурье по $\cos(m\psi)$ и $\sin(m\psi)$. Вспомним, что для сферы это сделать невозможно (см. параграф 7.7). Отметим, что решение $\tilde{p}$ будет зависеть от m.

В дальнейшем будем считать, что распределение скорости на поверхности цилиндра симметрично относительно направления $\psi = 0$. Тогда ряд Фурье, как ряд для четной функции, будет состоять из функций $\cos(m\psi)$. Это предположение не изменит общности наших соображений, но несколько упростит вид получаемых формул.

Рассмотрим зависимость $f(z)$. Поскольку интервал изменения координаты z бесконечен, то здесь следует использовать представление в виде интеграла Фурье:

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\exp(-i\alpha z)\,d\alpha,$$

$$g(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\exp(i\alpha z)\,dz. \qquad (7.112)$$

Итак, пробным решением по координате z будет $\exp(-i\alpha z)$, а любое распределение скорости по поверхности цилиндра вдоль координаты z можно представить в виде интеграла Фурье (7.112).

Подставим решение $p(r,z,\psi)=\bar{p}(r,\psi)\exp(-i\alpha z)$ в уравнение (7.109). Снова нетрудно убедиться, что $\exp(-i\alpha z)$ можно сократить. Понятно, что решение $\bar{p}$ будет зависеть от α. Таким образом, частное решение можно записать так:

$$p(r,z,\psi)=F_m(\alpha,r)\exp(-i\alpha z)\cos(m\psi), \qquad (7.113)$$

а полное решение будет иметь вид

$$p(r,z,\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_m(\alpha,r)\exp(-i\alpha z)\cos(m\psi)\,d\alpha. \qquad (7.114)$$

Построенное решение (7.114) должно удовлетворять граничным условиям (7.110), причем оно получено без решения уравнения (7.109), а на основе анализа геометрии задачи. Осталось определить функции $F_m(\alpha,r)$.

Подставив решение (7.113) в (7.109), получим для функции $F_m(\alpha,r)$ такое обычное дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dF_m(\alpha,r)}{dr}\right]+\left(k^2-\alpha^2-\frac{m^2}{r^2}\right)F_m(\alpha,r)=0\,,$$

или

$$\frac{d^2F_m(\alpha,r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF_m(\alpha,r)}{dr}+\left[\left(k^2-\alpha^2\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]F_m(\alpha,r)=0. \qquad (7.115)$$

Это уравнение называется *уравнение Бесселя* и встречается при изучении колебаний круглых мембран (см. параграф 3.12). Уравнение (7.115) для каждого значения m имеет два линейно-независимых решения:

$$F_m(\alpha,r)=A_m(\alpha)J_m\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\,r\right)+B_m(\alpha)N_m\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\,r\right). \qquad (7.116)$$

Однако такое решение не соответствует физической ситуации. Это становится понятным, если записать асимптотики функций Бесселя и Неймана в случае большого значения аргумента, которые определяют звуковое поле на больших расстояниях r:

$$J_n(x) \underset{x\to\infty}{\to} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

$$N_n(x) \underset{x\to\infty}{\to} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right). \qquad (7.117)$$

Как видим, решение (7.116) определяет стоячую волну, которая не переносит энергию. Поэтому, чтобы удовлетворить условию излучения, т.е. получить волну, которая распространяется от излучателя, нужно для постоянных в (7.116) установить следующую связь: $B_m(\alpha) = iA_m(\alpha)$. Тогда

$$F_m(\alpha, r) = A_m(\alpha)\left[J_m\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r\right) + iN_m\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r\right)\right] =$$

$$= A_m(\alpha)H_m^{(1)}\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r\right). \qquad (7.118)$$

Полученную функцию $H_m^{(1)}\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r\right)$.называют *функцией Ханкеля* первого рода порядка m*. Выбор соотношения между постоянными $B_m(\alpha) = -iA_m(\alpha)$ определяет функцию Ханкеля второго рода:

$$F_m(\alpha, r) = A_m(\alpha)\left[J_m(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r) - iN_m(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r)\right] =$$

$$= A_m(\alpha)H_m^{(2)}(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r), \qquad (7.119)$$

которая описывает бегущую волну, не удовлетворяющая условию излучения. Это становится наглядным при рассмотрении асимптотики функции Ханкеля. Так, для решения (7.118) при условии $r \to \infty$ согласно формулам (7.117) имеем волну, которая уходит на бесконечность:

$$F_m(\alpha, r) = A_m(\alpha)\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r}}\exp\left(i\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r - i(2m+1)\frac{\pi}{4}\right). \qquad (7.120)$$

Как видим с (7.120), в случае больших расстояний r расходящаяся цилиндрическая волна с ростом r, как и сферическая, уменьшается

* Ханкель (Hankel) Герман (1839—1873) — немецкий математик.

по амплитуде, но несколько медленнее. Это объясняется более медленным по сравнению со сферической волной расширением цилиндрической волны: площадь ее фронта увеличивается пропорционально расстоянию r, тогда как площадь сферы пропорциональна r^2.

Итак, частное решение (7.113) будет таким:

$$A_m(\alpha)H_m^{(1)}\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r\right)\exp(-i\alpha z)\cos(m\psi). \qquad (7.121)$$

В дальнем поле ($r \to \infty$) с учетом (7.120) оно имеет вид

$$A_m(\alpha)\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r}}\exp\left(i\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r - i\alpha z - i(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)\cos(m\psi). \quad (7.122)$$

Эта формула, очевидно, понятна. Она отражает тот факт, что волновой вектор **k** имеет проекцию на ось Oz, равную α, проекция вектора на радиальное направление — $\beta = \sqrt{k^2-\alpha^2}$. При этом в радиальном направлении амплитуда давления уменьшается как $1/\sqrt{r}$. Функция $\cos(m\psi)$ определяет зависимость звукового поля от угла ψ. Вектор **k** указывает направление движения фронта волны, который, в общем случае, наклонен под некоторым углом к образующей цилиндра. Вообще волновое число, как известно, определяет скорость изменения фазы волны вдоль пространственной координаты. Если $\alpha = 0$, что соответствует отсутствию изменения звукового поля вдоль координаты z, то вектор **k** направлен вдоль радиального направления, и фронт волны, которая возникает в пространстве, представляет собой цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельна оси Oz. Если возмущение на поверхности цилиндра таково, что величина α стремится к волновому числу в пространстве $k = \omega/c$, то получаем бегущую волну вдоль поверхности цилиндра с фронтом, перпендикулярным к поверхности цилиндра.

Если $\alpha^2 > k^2$, то в (7.122) будем иметь множитель $\exp(-\sqrt{\alpha^2-k^2}\cdot r)$, который описывает экспоненциальное затухание вдоль координаты r. Такая ситуация соответствует неоднородной волне, распространяющейся вдоль образующей поверхности цилиндра. Если представить постоянную распространения α в виде $\alpha = 2\pi/\lambda'$ (λ' — длина волны возмущения типа $\exp(-i\alpha z)$ вдоль оси Oz на поверхности цилиндра), а $k = 2\pi/\lambda$ (λ — длина звуковой волны в среде), то из условия, где $\alpha > k$, имеем неравенство $\lambda' < \lambda$. Поэтому при выполнении условия $\alpha > k$ говорят, что составляющие типа $\exp(i\alpha z)$ с высокой степенью изменчивости поля ($\lambda' < \lambda$) на поверхности цилиндра не

создают излучения звукового поля. Или, иначе, мелкая структура на поверхности излучателя не передается в дальнее поле.

Общее решение (7.114) является суммой бесконечного количества частных решений (7.121):

$$p(r,z,\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A_m(\alpha)H_m^{(1)}\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r\right)\exp(-i\alpha z)\cos(m\psi)\,d\alpha. \qquad (7.123)$$

Выражение (7.123) представляет собой совокупность таких волновых движений: вдоль координаты ψ — стоячая волна, вдоль z — бегущая волна, вдоль r — бегущая или неоднородная волна.

Неизвестные коэффициенты $A_m(\alpha)$ можно определить из граничного условия (7.110). Для этого представим заданную функцию $V(z,\psi)$ в виде, аналогичном представлению звукового поля излучателя (7.123), т.е. в виде ряда Фурье по углу ψ и интеграла Фурье по координате z. Итак, запишем

$$V(z,\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}V_m(z)\cos(m\psi), \qquad (7.124)$$

где $V_m(z)=\dfrac{1}{2\pi\delta_m}\int_0^{2\pi}V(z,\psi)\cos(m\psi)\,d\psi$, $\delta_m=\begin{cases}1, & m=0,\\ 0{,}5, & m\neq 0.\end{cases}$ Вместе с этим, $V_m(z)$ можно представить в виде интеграла Фурье

$$V_m(z)=\int_{-\infty}^{\infty}g_m(\alpha)\exp(-i\alpha z)\,d\alpha, \qquad (7.125)$$

где

$$g_m(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V_m(z)\exp(i\alpha z)\,dz.$$

С учетом (7.124) и (7.125) граничное условие (7.110) приобретет вид

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=R}=V(z,\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_m(\alpha)\exp(-i\alpha z)\cos(m\psi)\,d\alpha. \qquad (7.126)$$

Подставив (7.123) в (7.126), получим такое соотношение:

$$\frac{1}{i\omega\rho}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A_m(\alpha)\sqrt{k^2-\alpha^2}\,H_m^{(1)\prime}\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot R\right)\exp(-i\alpha z)\cos(m\psi)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_m(\alpha)\exp(-i\alpha z)\cos(m\psi).$$

Здесь $H_m^{(1)\prime}\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r\right)$ — производная функции Ханкеля по аргументу $(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot r)$. Отсюда $\frac{1}{i\omega\rho}A_m(\alpha)\sqrt{k^2-\alpha^2}H_m^{(1)\prime}\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot R\right)=g_m(\alpha)$, или

$$A_m(\alpha)=\frac{i\omega\rho g_m(\alpha)}{\sqrt{k^2-\alpha^2}H_m^{(1)\prime}\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\cdot R\right)}. \qquad (7.127)$$

Теперь поле излучения цилиндра определено полностью.

Рассмотрим частные случаи. Пусть при дальнейшем изложении в граничном условии (7.110) скорость частиц поверхности цилиндра не зависит от координаты z, т.е. $V(z,\psi)=V(\psi)$. Учитывая это предположение, переписываем (7.123) и (7.124) в виде

$$p(z,\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}A_mH_m^{(1)}(kr)\cos(m\psi), \qquad (7.128)$$

$$V(\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}V_m\cos(m\psi). \qquad (7.129)$$

Снова расписав условие (7.110), получим (сделайте самостоятельно):

$$A_m=\frac{i\omega\rho V_m}{kH_m^{(1)\prime}(kR)}=i\rho c\frac{V_m}{H_m^{(1)\prime}(kR)}, \qquad (7.130)$$

где

$$V_m=\frac{1}{2\pi\delta_m}\int_0^{2\pi}V(\psi)\cos(m\psi)d\psi\,. \qquad (7.131)$$

Тогда формула (7.128) примет вид

$$p(r,\psi)=i\rho c\sum_{m=0}^{\infty}V_m\frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m^{(1)\prime}(kR)}\cos(m\psi). \qquad (7.132)$$

Пусть амплитуда скорости колебаний точек цилиндра постоянна, т.е. $V(\psi)=\upsilon_0$. Тогда в бесконечной сумме (7.132) остается одно слагаемое:

$$p(r)=A_0H_0^{(1)}(kr)=i\rho c\upsilon_0\frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)\prime}(kR)}=-i\rho c\upsilon_0\frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)}(kR)}, \qquad (7.133)$$

здесь учтено соотношение $H_0^{(1)\prime}(kR) = -H_1^{(1)}(kR)$. На больших расстояниях от цилиндра $kr >> 1$ воспользуемся асимптотическим представлением функции Ханкеля, в результате получим

$$p(r) = i\rho c \frac{\upsilon_0}{H_0^{(1)\prime}(kR)} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}. \qquad (7.134)$$

Такой источник называют *пульсирующим цилиндром*, а волну, которая создается им, — *цилиндрической волной нулевого порядка*, или просто *цилиндрической волной*. Фронт волны представляет собой цилиндрическую поверхность.

Амплитуда скорости и удельное акустическое сопротивление среды цилиндрической волны равны соответственно

$$\upsilon_r = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \upsilon_0 \frac{H_0^{(1)\prime}(kr)}{H_0^{(1)\prime}(kR)}, \qquad (7.135)$$

$$\zeta = \frac{p}{\upsilon_r} = i\rho c \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)\prime}(kr)}. \qquad (7.136)$$

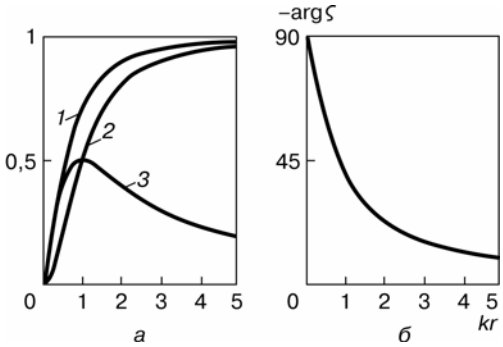


Рис. 7.21. Графики зависимости удельного акустического сопротивления цилиндрической волны от волнового расстояния kr:

а — *1* — $\frac{|\zeta|}{\rho c}$, *2* — $\frac{\mathrm{Re}\,\zeta}{\rho c}$, *3* — $\frac{-\mathrm{Im}\,\zeta}{\rho c}$; *б* — $\arg\zeta$

Графики модуля, действительной, мнимой частей удельного акустического сопротивления и его аргумента цилиндрической волны приведены на рис. 7.21. Как видим, цилиндрическая волна по своим свойствам подобна сферической (см. рис. 7.5); между ними существуют лишь количественные отличия. На довольно больших волновых

расстояниях цилиндрическая волна превращается в локально-плоскую волну. Причины этого явления такие же, что и для сферической волны.

Предположим теперь, что радиус цилиндра мал по сравнению с длиной звуковой волны ($kR << 1$). Тогда можно воспользоваться асимптотическим представлением цилиндрических функций при малых значениях аргумента ($kR << 1$) [49]:

$$H_1^{(1)}(kR) = J_1(kR) + iN_1(kR) = \frac{kR}{2} - \frac{2i}{\pi kR} \approx -\frac{2i}{\pi kR}. \qquad (7.137)$$

Согласно (7.133) при условиях $kR << 1$ и $kr >> 1$ записываем:

$$p(r) = \frac{\pi}{2}\rho ckR\upsilon_0\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\exp\left(ikr - i\frac{\pi}{4}\right). \qquad (7.138)$$

Как видим, звуковое давление, которое излучается цилиндром с малым волновым размером поперечного сечения, пропорционально величине kR. Итак, малый по сравнению с длиной волны цилиндр является неэффективным излучателем. Это можно показать, вычислив сопротивление излучения пульсирующего цилиндра. Определим это сопротивление на единицу площади поверхности цилиндра (т.е. удельное сопротивление излучения), используя (7.136). Для этого запишем отношение звукового давления на поверхности цилиндра к колебательной скорости в виде

$$\zeta_0\big|_{r=R} = \frac{p(r=R)}{\upsilon_0} = -i\rho c\frac{H_0^{(1)}(kR)}{H_1^{(1)}(kR)} = -i\rho c\frac{J_0(kR) + iN_0(kR)}{J_1(kR) + iN_1(kR)} =$$

$$= -i\rho c\left[\frac{J_0(kR)J_1(kR) + N_0(kR)N_1(kR)}{J_1^2(kR) + N_1^2(kR)} - \right.$$

$$\left. - i\frac{J_0(kR)N_1(kR) - J_1(kR)N_0(kR)}{J_1^2(kR) + N_1^2(kR)}\right]. \qquad (7.139)$$

Найдем действительную и мнимую составляющие удельного сопротивления излучения $\zeta_0\big|_{r=R} = \mathrm{Re}\left[\zeta_0\big|_{r=R}\right] + i\,\mathrm{Im}\left[\zeta_0\big|_{r=R}\right]$, используя соотношение [49] $J_0(kR)N_1(kR) - J_1(kR)N_0(kR) = -\dfrac{2}{\pi kR}$. Итак,

$$\mathrm{Re}\,\zeta_0\big|_{r=R} = \rho c\frac{2}{\pi kR\left[J_1^2(kR) + N_1^2(kR)\right]},$$

$$\operatorname{Im}\zeta_0\big|_{r=R} = -\rho c\frac{J_0(kR)J_1(kR)+N_0(kR)N_1(kR)}{J_1^2(kR)+N_1^2(kR)}. \qquad (7.140)$$

При малых значениях kR ($kR << 1$) справедлива асимптотика функций Бесселя и Неймана [49]:

$$J_0(kR)\approx 1,\quad J_1(kR)\approx\frac{kR}{2},\quad N_0(kR)\approx\frac{2}{\pi}\ln(kR),\quad N_1(kR)\approx-\frac{2}{\pi kR}. \qquad (7.141)$$

Учитывая эти соотношения, (7.140) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\zeta_0\big|_{r=R}\approx\rho c\frac{\pi kR}{2},$$

$$\operatorname{Im}\zeta_0\big|_{r=R}\approx\rho ckR\ln(kR),\quad (kR << 1). \qquad (7.142)$$

Из формул (7.142) следует, что при условии $kR << 1$ выполняется неравенство $\left|\operatorname{Im}\zeta_0\big|_{r=R}\right| > \operatorname{Re}\left[\zeta_0\big|_{r=R}\right]$. Таким образом, реактивная составляющая сопротивления излучения для малых цилиндров превышает активную составляющую, что приводит к слабой эффективности излучателя.

При больших значениях волнового размера (kR) >> 1 можно воспользоваться асимптотическими формулами функций Бесселя и Неймана (7.117):

$$J_n(kR)=\sqrt{\frac{2}{\pi kR}}\cos\left(kR-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$N_n(kR)=\sqrt{\frac{2}{\pi kR}}\sin\left(kR-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right), \qquad (7.143)$$

$$H_n^{(1)}(kR)=\sqrt{\frac{2}{\pi kR}}\exp\left(ikR-i\frac{n\pi}{2}-i\frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда из (7.140) (убедитесь в этом самостоятельно) при условии $kR >> 1$ получим $\operatorname{Re}\left(\zeta_0\big|_{r=R}\right)\approx\rho c$, $\operatorname{Im}\left(\zeta_0\big|_{r=R}\right)\approx 0$. Это означает, что при условии (kR) >> 1 сопротивление излучения цилиндрической поверхности, рассчитанное на единицу площади, совпадает с удельным сопротивлением излучения плоского диска в бесконечной трубе.

Рассмотрим еще один важный частный случай. Предположим, что цилиндр колеблется вокруг положение равновесия как твердое тело со скоростью $\upsilon_0\exp(-i\omega t)$. Такой источник называют *осциллирующим цилиндром*. Тогда нормальная составляющая колебательной скорости на поверхности цилиндра в точке с координатой ψ будет определяться выражением $\upsilon_r=\upsilon_0\cos\psi$. Звуковое давление, излучаемое осцил-

лирующим цилиндром, можно вычислить по (7.132), оставив в бесконечной сумме один член с номером $m = 1$:

$$p(r,\psi) = i\rho c\upsilon_0 \cos\psi \frac{H_1^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)\prime}(kR)}. \qquad (7.144)$$

Как видим, диаграмма направленности осциллирующего цилиндра соответствует направленности диполя $|\cos\psi|$; осциллирующий цилиндр излучает *цилиндрическую волну первого порядка.*

В дальней зоне при условии $kr >> 1$ (см. (7.143)), из (7.144) получаем

$$p(r,\psi) = \frac{\rho c\upsilon_0 \cos\psi}{H_1^{(1)\prime}(kr)} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \exp\left(ikr - i\frac{\pi}{4}\right). \qquad (7.145)$$

При $(kR) << 1$ производную функции Ханкеля запишем в виде [49]

$$H_1^{(1)\prime}(kR) = \frac{H_0^{(1)}(kr) - H_2^{(1)}(kR)}{2} \approx -\frac{H_2^{(1)}(kR)}{2} \approx \frac{2i}{\pi(kR)^2}, \qquad (7.146)$$

тогда (7.145) представим в виде

$$p(r,\psi) = -\frac{i\pi}{2}\rho c(kR)^2 \upsilon_0 \cos\psi \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(ikR - i\frac{\pi}{4}\right). \qquad (7.147)$$

Сравнивая формулы (7.147) и (7.138), видим, что осциллирующий цилиндр малых волновых размеров является еще менее эффективным излучателем звука, чем пульсирующий цилиндр, поскольку для пульсирующего цилиндра $p \sim (kR)$, а для осциллирующего $p \sim (kR)^2$ при $(kR) << 1$. Поэтому во всех струнных инструментах звук создает не струна, а корпус инструмента, к которому она прикреплена.

В дальнейшем для обозначения колебаний поверхности цилиндра, которые описываются формулами типа

$$\upsilon_n = V_n \cos(n\psi), \quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad (7\ldots148)$$

будем применять термин *“мода колебаний”*. Рассмотрим некоторые свойства цилиндрических волн высших порядков, которые порождаются разнообразными модами колебаний поверхности цилиндра. Найдем давление и колебательную скорость в цилиндрической волне n-го порядка (при этом в бесконечной сумме (7.132) остается один n-й член):

$$p_n = \frac{i\rho c V_n \cos(n\psi)}{H_n^{(1)\prime}(kR)} H_n^{(1)}(kr), \qquad (7.149)$$

$$(\upsilon_r)_n = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V_n \cos(n\psi)}{H_n^{(1)\prime}(kR)} H_n^{(1)\prime}(kr). \qquad (7.150)$$

Тогда удельное акустическое сопротивление

$$\zeta_n = \frac{p_n}{(\upsilon_r)_n} = i\rho c \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)\prime}(kr)}. \qquad (7.151)$$

Как и для случая цилиндрической волны нулевого порядка, ζ_n зависит лишь от kr и не зависит от ψ. При произвольном законе движения поверхности цилиндра волна не имеет таких свойств.

В случае $kr >> 1$ для каждой из волн высших порядков амплитуда уменьшается так же, как и в цилиндрической волне нулевого порядка, но в отличие от нее, амплитуда колебаний в разных точках фронта волны не постоянна: она зависит от ψ. Таким образом, цилиндрические излучатели высших порядков обладают направленностью, причем характеристика направленности излучателя n-го порядка пропорциональна $|\cos(n\psi)|$ и, как видим, не зависит от радиуса излучателя. Примеры диаграмм направленности излучателей разных порядков приведены на рис. 7.22.

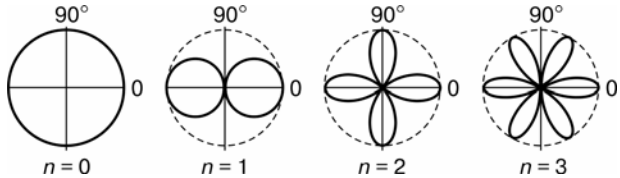


Рис. 7.22. Характеристика направленности излучателей n-го порядка

Перейдем к вопросу об эффективности цилиндрического излучателя n-го порядка. Мощность излучения отрезком цилиндра высотой h найдем как интеграл от интенсивности по поверхности цилиндра. Интенсивность звука цилиндрической волны n-го порядка на поверхности излучателя (см. (7.148) и (7.151)):

$$I_n\big|_{r=R} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(p_n \upsilon_n^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\zeta_n\big|_{r=R}\, \upsilon_n \upsilon_n^*\right) = \frac{V_n^2}{2}\cos^2(n\psi)\mathrm{Re}\left(\zeta_n\big|_{r=R}\right). \qquad (7.152)$$

Учитывая (7.151)—(7.152), определим мощность излучения n-ой модой колебаний цилиндра:

$$P_n = \int_0^h \int_0^{2\pi} I_n\big|_{r=R} R dz d\psi = \frac{V_n^2}{2}\rho c S \mathrm{Re}\left[i\frac{H_n^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)\prime}(kR)}\right]\delta_n, \qquad (7.153)$$

где $S = 2\pi Rh$ — площадь участка цилиндра высотой h, $\delta_0 = 1$, $\delta_n = 0{,}5$ при условии $n > 0$.

Для цилиндрического источника нулевого порядка $n = 0$ (пульсирующий цилиндр) удельное акустическое сопротивление на поверхности цилиндра (см. (7.136)) определяется формулой

$$(\zeta_0)_{r=R} = i\rho c \frac{H_0^{(1)}(kR)}{H_0^{(1)\prime}(kR)}, \tag{7.154}$$

тогда сопротивление излучения участка цилиндра с площадью $S = 2\pi Rh$ для цилиндрической волны нулевого порядка записываем так

$$Z_{\text{и}}^{(0)} = S\zeta_0\big|_{r=R}. \tag{7.155}$$

Принимая во внимание (7.154) и (7.155), получаем выражение для мощности P_0:

$$P_0 = \frac{V_0^2}{2} S \operatorname{Re}[\zeta_0]_{r=R} = \frac{V_0^2}{2} \operatorname{Re} Z_{\text{и}}^{(0)}. \tag{7.156}$$

Тогда аналогично в формуле (7.153) величина

$$\rho c S \operatorname{Re}\left[i \frac{H_n^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)\prime}(kR)} \right] \delta_n = \operatorname{Re} Z_{\text{и}}^{(n)} = S \operatorname{Re}[\zeta_n]_{r=R} \delta_n \tag{7.157}$$

играет роль активной составляющей сопротивления излучения цилиндрического излучателя n-го порядка, а V_n — амплитуды колебательной скорости поверхности излучателя. Величина $(\zeta_n)_{r=R}$ определяет удельное акустическое сопротивление цилиндрической волны n-го порядка на поверхности излучателя.

Графики $\operatorname{Re}[\zeta_n]/\rho c$ и $\operatorname{Im}[\zeta_n]/\rho c$ (при условии $r = R$) цилиндрических излучателей разных порядков приведены на рис. 7.23. Сравнив графики, приходим к выводу, что при увеличении порядка цилиндрического излучателя его эффективность уменьшается. Последнее объясняется тем, что излучатели всех порядков, кроме нулевого, можно рассматривать как совокупность противофазных излучателей, разделенных узловыми линиями, которые взаимно ослабляют друг друга. Взаимное влияние противофазных источников тем сильнее, чем ближе они друг к другу, а при увеличении порядка излучателя расстояние между точками вспучивания колебаний поверхности уменьшается.

Величина $kR = \pi R/(\lambda/2)$ равняется числу полуволн, которые укладываются на половине окружности цилиндра. Поскольку величи-

на n определяет количество узловых линий на поверхности цилиндра, то $\frac{kR}{n} = \frac{\pi R}{n\lambda/2}$ равняется расстоянию между узловыми линиями, выраженными в единицах, кратных половине длины волны λ. При условии $kR < n$ или $\pi R/n < \lambda/2$ расстояние между этими узловыми линиями меньше $\lambda/2$. В такой ситуации (см. параграф 7.7 и 7.11) имеем сильное взаимодействие противофазных волн. Поэтому при условии $kR < n$ действительная часть сопротивления излучения уменьшается практически до нуля (см. рис. 7.23, *а*), что соответствует так называемому акустическому короткому замыканию.

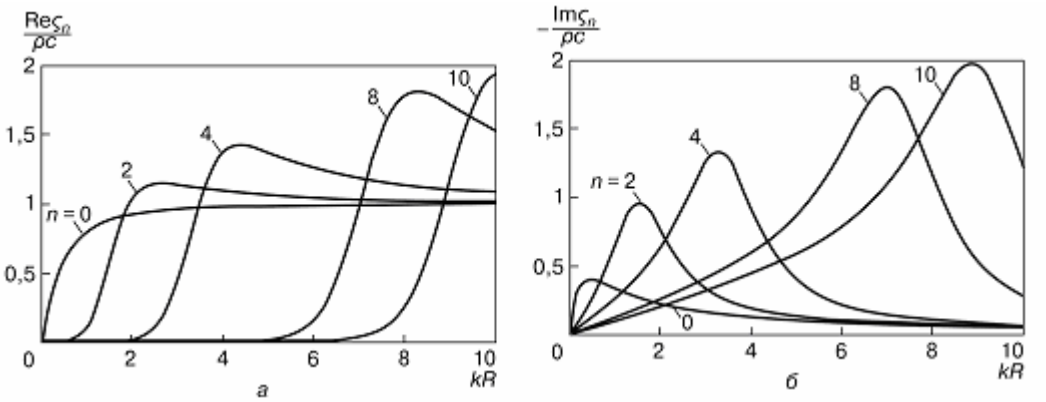


Рис. 7.23. Зависимости $\mathrm{Re}\,\zeta_n/(\rho c)$ и $-\mathrm{Im}\,\zeta_n/(\rho c)$ на поверхности цилиндрического излучателя n-го порядка от волнового радиуса цилиндра kR

В случае $kR = n$ расстояние между узловыми линиями, измеренное на поверхности цилиндра, равняется половине длины звуковой волны. Ситуацию $kR = n$ можно рассматривать как пространственный резонанс. При этом сопротивление излучения достигает максимума и, что важно отметить, максимума достигают активная и реактивная составляющие сопротивления излучения. С увеличением n высота этих максимумов возрастает, что связано с увеличением $ka = n$. Однако одновременное увеличение активной и реактивной частей сопротивления излучения n-ой моды создает понятные сложности для эффективного излучения звука. В случае $kR > n$ сопротивление излучения асимптотически приближается к ρc.

С учетом (7.157) формула (7.153) для мощности излучателя n-го порядка приобретает вид

$$P_n = \frac{V_n^2}{2}\mathrm{Re}\,Z_{\text{и}}^{(n)}. \qquad (7.158)$$

Рассмотрим излучение звука при произвольной зависимости колебательной скорости от угла ψ. Снова используем выражение (7.152) для интенсивности звука и, проинтегрировав его по поверхности цилиндра высотой h, найдем мощность излучения. Колебание поверхности цилиндра, заданное функцией $V(\psi)$, представим с помощью ряда Фурье совокупностью мод колебаний типа $\cos(n\psi)$. Каждая мода колебаний излучает цилиндрическую волну соответствующего порядка. Как следствие, имеем формулы для давления на поверхности излучателя (согласно (7.149) и (7.151))

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \left(\zeta_n\right)_{r=R} \cos\left(n\psi\right) \tag{7.159}$$

и колебательной скорости

$$\upsilon_r = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \cos\left(n\psi\right). \tag{7.160}$$

Подставим (7.159) и (7.160) в (7.152) и проинтегрируем по поверхности:

$$P = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} V_n V_m^* \operatorname{Re}\left(\zeta_n\right)\Big|_{r=R} \int_0^H dz \int_0^{2\pi} R\cos\left(n\psi\right)\cos\left(m\psi\right) d\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n^2}{2} \operatorname{Re} Z_{\text{и}}^{(n)}, \tag{7.161}$$

где $\operatorname{Re}\left(Z_{\text{и}}^{(n)}\right)$ определено в выражении (7.157).

Таким образом, акустическая мощность при произвольном характере движения поверхности цилиндра является суммой мощностей излучения отдельными модами колебаний поверхности. Поскольку энергия колебаний самого излучателя распределена между отдельными модами, а эффективность излучения тем ниже, чем выше порядок моды, то общая эффективность излучения звука цилиндром будет тем больше, чем выше удельный вес низших мод колебаний (в частности, нулевой моды). Сопротивление излучения цилиндрического излучателя любого порядка увеличивается с ростом частоты, т.е. $kR = \omega R/c$. Поэтому общая эффективность возрастает при увеличении отношения радиуса цилиндра к длине волны.

Направленность излучения также определяется соотношением между модами колебаний. Амплитуду давления в дальней зоне на расстоянии r от оси цилиндра с учетом асимптотики функции Ханкеля определяют так (см. (7.143), (7.149)):

$$\left|p(r,\psi)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} p_n\right| = \rho c\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{V_n\cos(n\psi)}{H_n^{(1)\prime}(kR)}\exp\left(ikr - i(2n+1)\frac{\pi}{4}\right)\right|. \qquad (7.162)$$

Формула (7.162) представляет собой ряд Фурье. Понятно, что, выбирая должным образом коэффициенты этого ряда (а они зависят от V_n, т.е. от соотношения между модами колебаний), можно реализовать практически любую характеристику направленности в плоскости угла ψ (даже при малом kR). Однако для получения острой направленности необходимо увеличить удельный вес мод высших порядков, и, следовательно, увеличение направленности происходит за счет снижения эффективности излучения.

7.12.2. Сферический излучатель

Определим звуковое поле сферического излучателя (рис. 7.24) радиусом a при условии, что амплитуда радиальной компоненты скорости частиц поверхности сферы задана функцией $V(\theta,\psi)$. Найдем решение уравнения Гельмгольца для сферических координат (r,θ,ψ) [31, 41, 52]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial\psi^2} + k^2r^2p = 0 \qquad (7.163)$$

в виде произведения

$$p(r,\theta,\psi) = R(r)\Theta(\theta)\Psi(\psi). \qquad (7.164)$$

Подставив (7.164) в (7.163) и поделив на $R\Theta\Psi$, представим (7.163) в виде трех слагаемых:

$$\left[\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2r^2\right] + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} = 0. \qquad (7.165)$$

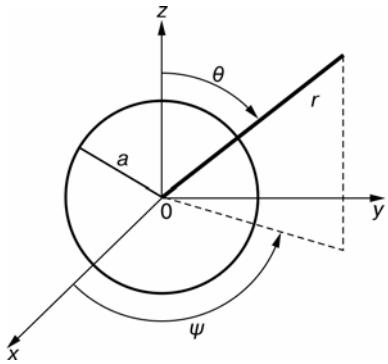


Рис. 7.24. Пример сферического излучателя

Первое слагаемое зависит только от r, а два других слагаемых зависят от угловых координат, и при этом их сумма равняется нулю. В этом случае первое слагаемое и сумма второго и третьего слагаемых равняются постоянной величине, но с противоположными знаками. Пусть первое слагаемое равно η^2, а сумма второго и третьего $-\eta^2$. Тогда

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2r^2-\eta^2\right)R=0. \qquad (7.166)$$

Помножив второе равенство на $\sin^2\theta$, получим

$$\left[\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\eta^2\sin^2\theta\right]+\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}=0\,. \qquad (7.167)$$

В (7.167) переменные θ и ψ оказались разделенными между первым и вторым слагаемыми. Аналогично, вводя новую постоянную μ^2, получаем

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+\mu^2\Psi=0, \qquad (7.168)$$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\eta^2\sin^2\theta-\mu^2\right)\Theta=0. \qquad (7.169)$$

Решение уравнения (7.168) описывает зависимость давления звукового поля от азимутального угла ψ. Его решение запишем в виде

$$\Psi(\psi)=A_1\cos(\mu\psi)+A_2\sin(\mu\psi). \qquad (7.170)$$

При этом появляется возможность определить неизвестную постоянную μ. Действительно, зависимость $\Psi(\psi)$ должна быть, очевидно, периодической с периодом 2π, поскольку, сделав обход вокруг сферы (т.е. изменив ψ на 2π), попадем в исходную точку пространства, а, следовательно, должны получить то же самое значение давления. Из этого следует, что постоянная μ — это любое целое число:

$$\mu=m,\quad m=0,1,2,\ldots \qquad (7.171)$$

Как и для цилиндрического излучателя, предположим, что звуковое поле симметрично относительно направления $\Psi=0$, т.е. функция $\Psi(\psi)$ — четная. Тогда в (7.170) следует положить $A_2=0$.

С помощью несложных преобразований приводим (7.169) к виду

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\mathrm{ctg}\theta\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\eta^2-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0\,, \qquad (7.172)$$

и определяем (7.172) как уравнение для *присоединенных функций Лежандра*[*], которые изучены в математике достаточно хорошо [49, 52]. Оказывается, что в зависимости от величины η решение (7.172) может иметь или не иметь особую точку. Поскольку с физической точки зрения зависимость звукового поля от угла θ не должна стремиться к бесконечности при любом θ, то следует выбрать такие значения постоянной η^2, которым соответствуют решения без особой точки. Решение будет удовлетворительным с физической точки зрения, если взять $\eta^2 = n(n + 1)$, где $n = 0,1,2,\ldots$ Тогда уравнение (7.172) приобретет вид

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}+\mathrm{ctg}\theta\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0. \qquad (7.173)$$

Его решение, которое соответствует определенным значениям постоянных m и n, обозначают $P_n^{(m)}$ и называют *присоединенной функцией Лежандра первого рода степени n и порядка m*. Функции $P_n^{(m)}(\theta)$ выражаются через элементарные тригонометрические функции с помощью простого, но громоздкого алгоритма:

$$P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \qquad (7.174)$$

где $P_n(x)=P_n^{(0)}(x)$ — так называемые *полиномы Лежандра*, $x = \cos\theta$. Три последовательных полинома Лежандра связаны между собой рекуррентным соотношением:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0, \qquad (7.175)$$

а сами полиномы Лежандра выражаются через тригонометрические функции

$$P_n(\cos\theta)=2\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cos(n\theta)+2\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{2}\cos\left[(n-2)\theta\right]+$$

$$+2\frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos\left[(n-4)\theta\right]+\ldots \qquad (7.176)$$

Например, для нескольких первых номеров n запишем такие полиномы:

$$P_0(\cos\theta) = 1,$$

[*] Лежандр (Legendre) Адриан Мари (1752—1833) — французский математик.

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta,$$

$$P_2(\cos\theta) = \left[3\cos(2\theta)+1\right]/4,$$

$$P_3(\cos\theta) = \left[5\cos(3\theta)+3\cos\theta\right]/8. \qquad (7.177)$$

Поскольку $P_n(x)$ — полином степени n, то продифференцировав полином по правилу (7.174), имеем нуль при $m > n$. Таким образом, $P_n^{(m)}(x) = 0$, если $m > n$. Функции $P_n^{(m)}(\theta)$ обладают важным для дальнейшего изложения свойством, а именно:

$$\int_0^{\pi} P_n^{(m)}(\theta) P_{n'}^{(m)}(\theta)\sin\theta d\theta = N_{nm}\delta_{nn'}, \qquad (7.178)$$

где $N_{nm} = \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}$, $\delta_{nn'} = \begin{cases} 1, & n = n', \\ 0, & n \neq n'. \end{cases}$

Как видим, (7.178) отражает свойство ортогональности функций $P_n^{(m)}(\theta)$.

Понятие ортогональности применимо для функций любого количества переменных. Рассмотрим две функции: $P_n^{(m)}(\theta)\cos(m\psi)$ и $P_{n'}^{(m')}(\theta)\cos(m'\psi)$. Произведение этих функций проинтегрируем по поверхности сферы радиусом $r = 1$:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n^{(m)}(\theta) P_{n'}^{(m')}(\theta)\cos(m\psi)\cos(m'\psi)\sin\theta d\theta d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos(m\psi)\cos(m'\psi)d\psi\int_0^{\pi} P_n^{(m)}(\theta) P_{n'}^{(m')}(\theta)\sin\theta d\theta = 2\pi\tilde{\delta}_{mm'}N_{nm}\delta_{nn'}, \qquad (7.179)$$

где $\tilde{\delta}_{mm'} = \begin{cases} 1, & m = m' = 0, \\ 0{,}5, & m = m' \neq 0, \\ 0, & m \neq m', \end{cases}$ $\delta_{nn'} = \begin{cases} 1, & n = n', \\ 0, & n \neq n'. \end{cases}$

Итак, имеем систему ортогональных функций. Оказывается, что подобно тому, как из трех ортогональных векторов (складывая их в необходимой пропорции) можно построить любой пространственный вектор, так и из бесконечного числа ортогональных функций вида $P_n^{(m)}(\theta)\cos(m\psi)$ можно построить любую (с несущественными ограничениями) зависимость $F(\theta,\psi)$ на интервале $\theta = (0,\pi)$ и $\psi = (0,2\pi)$. Говорят, что система функций $P_n^{(m)}(\theta)\cos(m\psi)$ имеет свойство полноты. Другими словами, любую зависимость $F(\theta,\psi)$, заданную на единичной сфере, можно представить в виде ряда Фурье по функциям

$P_n^{(m)}(\theta)\cos(m\psi)$. Именно к такому ряду (обобщенному ряду Фурье) приводит решение данной задачи. Действительно, подставляя в (7.164) частные решения уравнений (7.166), (7.168), (7.169), которые соответствуют конкретным n и m, и суммируя по n и m, получаем общее решение уравнения Гельмгольца в виде

$$p(r,\theta,\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}P_n^{(m)}(\theta)\cos(m\psi)R_n(r), \qquad (7.180)$$

где $R_n(r)$ — частное решение уравнения (7.166); A_{nm} — неизвестные коэффициенты. Для того чтобы найти коэффициенты A_{nm}, используем граничное условие

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=a}=V(\theta,\psi). \qquad (7.181)$$

Подставим (7.180) в (7.181):

$$\frac{1}{i\omega\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}P_n^{(m)}(\theta)\cos(m\psi)R_n'(a)=V(\theta,\psi). \qquad (7.182)$$

Разложим $V(\theta,\psi)$ в ряд Фурье по ортогональным функциям $P_n^{(m)}(\theta)\cos(m\psi)$:

$$V(\theta,\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}V_{nm}P_n^{(m)}(\theta)\cos(m\psi). \qquad (7.183)$$

Приравнивая коэффициенты рядов (7.182) и (7.183), определяем коэффициенты A_{nm} через известные коэффициенты V_{nm}:

$$A_{nm}=i\omega\rho\frac{V_{nm}}{R_n'(a)}. \qquad (7.184)$$

С помощью ряда (7.183) произвольные колебания поверхности сферы представлены в виде суммы бесконечного числа колебаний специального вида — так называемые моды. Рассмотрим подробнее, что представляют собой отдельные моды колебаний. При условии $m = 0$ колебания не зависят от азимутального угла ψ, а их зависимость от θ определяется полиномами Лежандра (рис. 7.25).

На рис. 7.25 видно, что мода с индексами 00 соответствует пульсирующей сфере ($V = \text{const}$), а мода 01 — осциллирующей сфере ($V = \cos\theta$). Для всех других мод — $0n$ — сфера оказывается разделенной n узловыми линиями (они проходят по параллелям), на участки, которые колеблются противофазно относительно ближайших соседей. На рис. 7.26, *а*, эти кольцевые зоны выделены белыми и серыми полосами. При условии $m > 0$ моды nm снова характеризуются n узло-

выми линиями, которые идут вдоль параллелей, но кроме того, множителем $\cos(m\psi)$ обусловлены колебания поверхности сферы, которые имеют характер стоячих волн вдоль параллелей. В этом случае узловые линии проходят как по параллелям, так и меридианам (рис. 7.26, *б*).

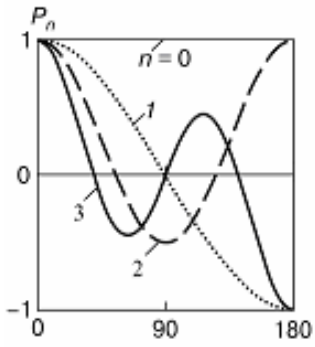


Рис. 7.25. Графики полиномов Лежандра $P_n^{(0)}(\theta)$, $n = 0,1,2,3$

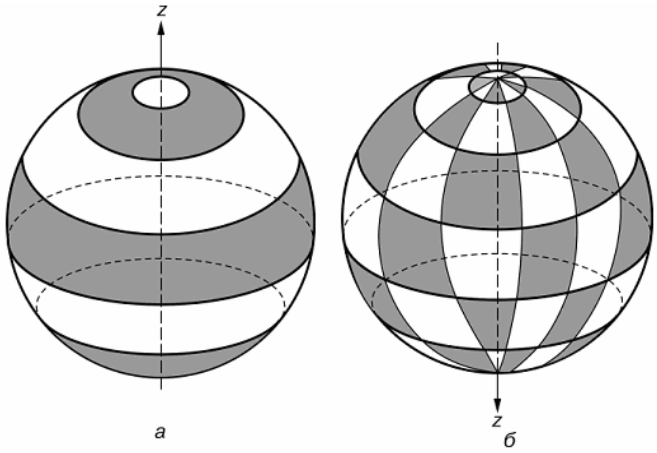


Рис. 7.26. Пример мод колебаний поверхности сферы:
а — $n > 0$, $m = 0$; *б* — $n > 0$, $m > 0$

Каждая мода колебаний поверхности сферы излучает сферическую волну соответствующего порядка. Рассмотрим свойства одной из таких волн. Полагая, что колебания поверхности сферы имеют характер стоячих сферических волн, получаем

$$p_{nm}(r,\theta,\psi) = i\omega\rho\frac{V_{nm}}{R_n'(a)}P_n^{(m)}(\theta)\cos(m\psi)R_n(r). \qquad (7.185)$$

Из (7.185) следует, что амплитуда на сферическом фронте волны, которая излучается модой nm, зависит от углов θ и ψ, причем одинаковым образом для любого радиуса фронта r. Положив для наглядности $m = 0$, можно отметить, что после $P_0^{(0)}(\theta) = 1$ и $P_1^{(0)}(\theta) = \cos\theta$, что отвечает пульсирующей и осциллирующей сферам, идут довольно сложные функции $P_n^{(0)}(\theta)$, $n > 1$, которые определяют колебания поверхности сферы, повторяющие себя во внешнем пространстве.

Изменение амплитуды вдоль луча θ, ψ одинаково для всех направлений и определяется функцией $R_n(r)$ — решением (7.166). Напомним, что характер изменения амплитуды волны с расстоянием зависит лишь от индекса n. Рассмотрим уравнение (7.166), в котором η^2 следует положить равным $n(n + 1)$. После дифференцирования по r получим

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)R = 0. \qquad (7.186)$$

Если бы не было коэффициента 2 при $\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}$, то это уравнение можно было бы считать уравнениям Бесселя (см. (7.115) при условии $\alpha = 0$). Попробуем свести (7.186) к уравнению Бесселя с помощью подстановки $R = u/\sqrt{r}$. Нетрудно убедиться в том, что действительно получаем уравнение Бесселя относительно функции u:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left(k^2 - \frac{n(n+1/2)^2}{r^2}\right)u = 0. \qquad (7.187)$$

К такой подстановке побуждают следующие соображения: если $u(r)$ — решение Бесселя, то, вероятно, $u(r)$ будет уменьшаться с расстоянием как $1/\sqrt{r}$ (см. (7.120)). Но сферические волны должны уменьшаться как $1/r$, следовательно, необходимо поделить u на $\sqrt{r}$.

Решениями (7.187) являются *функции Ханкеля с полуцелым индексом*: $H_{n+1/2}^{(1)}(kr)$ и $H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$. Тогда решениями уравнения (7.186) есть функции

$$h_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr),\ h_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr), \qquad (7.188)$$

которые называют *сферическими функциями Ханкеля*. При больших значений $kr >> 1$ имеем

$$h_n^{(1)}(kr)\exp(-i\omega t) \approx \frac{1}{kr}\exp\left(-i\omega t + ikr - i\frac{n+1}{2}\pi\right),$$

$$h_n^{(2)}(kr)\exp(-i\omega t) \approx \frac{1}{kr}\exp\left(-i\omega t - ikr + i\frac{n+1}{2}\pi\right). \qquad (7.189)$$

Таким образом, задаче излучения соответствуют сферические функции Ханкеля первого рода, которые описывают расходящиеся волны. С учетом этого, волна давления, которая излучается модой *nm*, определяется выражением

$$p_{nm}(r,\theta,\psi) = i\rho c\frac{V_{nm}}{h_n^{(1)\prime}(ka)}P_n^{(m)}(\theta)\cos(m\psi)h_n^{(1)}(kr). \qquad (7.190)$$

При проведении практических расчетов нужно принять во внимание, что для всех указанных выше специальных функций (Бесселя, Ханкеля и другие) существуют эффективные стандартные программы вычисления на ЭВМ.

Найдем радиальную составляющую колебательной скорости и удельное акустическое сопротивление в сферической волне *nm*:

$$\upsilon_{nm} = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_{nm}}{\partial r} = \frac{V_{nm}}{h_n^{(1)\prime}(ka)}P_n^{(m)}(\theta)\cos(m\psi)h_n^{(1)\prime}(kr), \qquad (7.191)$$

$$\zeta_{nm} = \frac{p_{nm}}{\upsilon_{nm}} = \rho c\frac{ih_n^{(1)}(kr)}{h_n^{(1)\prime}(kr)}. \qquad (7.192)$$

Акустическую мощность, которая излучается модой *nm*, определяем, интегрируя интенсивность по поверхности сферы:

$$P_{nm} = \frac{1}{2}\int_{(S)}\mathrm{Re}\left(p_{nm}\upsilon_{nm}^*\right)_{r=a}dS = \frac{V_{nm}^2}{2}a^2\,\mathrm{Re}\left(\zeta_{nm}\right)_{r=a}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\cos^2(m\psi)\,d\psi\int_0^{\pi}\left(P_n^{(m)}(\theta)\right)^2\sin\theta\,d\theta = \frac{V_{nm}^2}{2}\mathrm{Re}\left(\zeta_{nm}\right)_{r=a}\frac{S}{2}N_{nm}\delta_m, \qquad (7.193)$$

здесь $\delta_0 = 1$, $\delta_m = 0{,}5$ при условии $m > 0$; $S = 4\pi a^2$ — площадь сферы. Как и для цилиндра, можно сказать, что сопротивление излучения сферического излучателя типа *nm* равно $Z_{\text{и}}^{(nm)} = \left(\zeta_{nm}\right)_{r=a}SN_{nm}\delta_m/2$, где удельное акустическое сопротивление сферической волны ζ_{nm} на поверхности сферы ($r = a$) определяется по формуле

$$\left(\zeta_{nm}\right)_{r=a} = \rho c \frac{i h_n^{(1)}(ka)}{h_n^{(1)\prime}(ka)}. \qquad (7.194)$$

На рис. 7.27 приведены зависимости $\mathrm{Re}\left[\zeta_{nm}\right]/\rho c$ и $-\mathrm{Im}\left[\zeta_{nm}\right]/\rho c$ от ka. Кривые подобны аналогичным кривым для цилиндра (см. рис. 7.23). Анализ, проведенный при рассмотрении рис. 7.23, действителен и для сферы. Укажем лишь на наличие максимума при условии $ka \approx n$, уменьшение сопротивления излучения при условии $ka < n$ и на его асимптотическое приближение к ρc при условии $ka > n$.

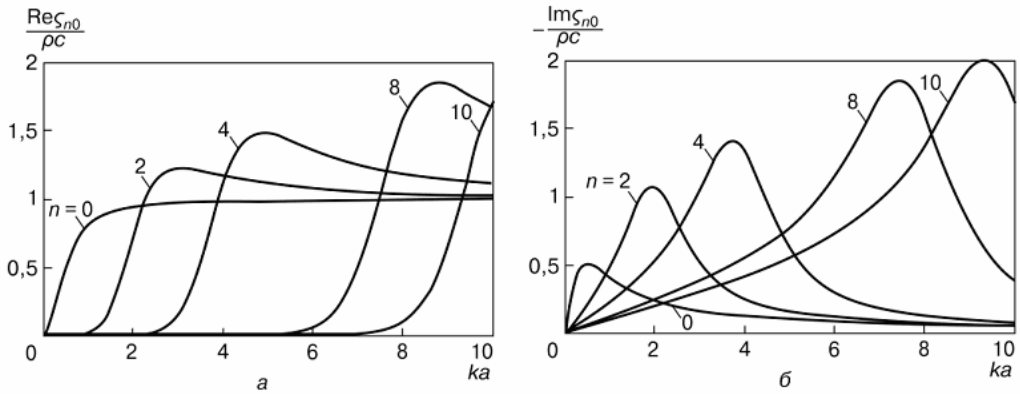


Рис. 7.27. Зависимости $\mathrm{Re}\,\zeta_{nm}/(\rho c)$ и $-\mathrm{Im}\,\zeta_{nm}/(\rho c)$ на поверхности сферического излучателя $n0$ от волнового радиуса ka

В качестве примера, который характеризует эффективность возбуждения разнообразных сферических волн типа nm в зависимости от радиуса сферы, рассмотрим работу сферического излучателя, если функция $V(\theta,\psi)$, определяющая колебательную скорость на поверхности сферы, не зависит от угла ψ, т.е. $V(\theta,\psi) \equiv V(\theta)$, и является осесимметричной относительно направления $\theta = 0$. Тогда в (7.180) нужно положить $m = 0$, и поле излучения сферы в этом случае приобретет вид

$$p(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\theta) h_n^{(1)}(kr). \qquad (7.195)$$

Для поиска амплитудных коэффициентов A_n используем граничное условие на поверхности сферы: $V(\theta) = \left.\dfrac{1}{i\omega\rho}\dfrac{\partial p(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a}$, откуда

$$V(\theta) = \frac{1}{i\rho c}\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\theta) h_n^{(1)\prime}(ka). \qquad (7.196)$$

Вычисление коэффициентов A_n дает возможность определить звуковое поле $p\,(r,\theta)$ в среде, окружающей сферу. Используя свойство ортогональности (7.178) при условии $m = 0$, из (7.196) находим

$$A_n = i\rho c\frac{2n+1}{2}\frac{1}{h_n^{(1)\prime}(ka)}\int_0^{\pi} V(\theta)P_n(\theta)\sin\theta d\theta. \qquad (7.197)$$

Успех вычисления звукового поля зависит от сходимости ряда (7.195). Коэффициенты ряда A_n определяются производной сферической функции Ханкеля и интегралом от функции $V(\theta)$ (см. (7.197)). Для модуля $h_n^{(1)\prime}(ka)$ справедливы такие асимптотические оценки [49]:
если $ka << n$, то

$$\left|h_n^{(1)\prime}(ka)\right| \approx \frac{1}{(ka)^{n+2}}\left[1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(n+1)\right]; \qquad (7.198)$$

если $ka >> n$, то

$$\left|h_n^{(1)\prime}(ka)\right| \approx \frac{1}{(ka)}. \qquad (7.199)$$

Согласно этим оценкам можно сделать следующие выводы:

1) если ka мало, то сходимость ряда (7.195) определяется модулем функции $\left|h_n^{(1)\prime}(ka)\right|$; если ka очень мало, то фактически все определяет первый член ряда, т.е. очень малый источник в дальнем поле создает ненаправленное излучение (иначе, тонкая структура распределения колебательной скорости на поверхности сферы не передается во внешнее пространство);

2) при больших ka ($ka >> n$) величина $\left|h_n^{(1)\prime}(ka)\right|$ не играет решающей роли, поскольку для разных n она практически одинакова. Здесь сходимость ряда определяется интегралом в (7.197) и зависит от функции $V(\theta)$. В этом случае много мод колебаний поверхности сферы передаются в дальнее поле излучения.

Например, рассмотрим такую ситуацию. Пусть функция $V(\theta)$, которая определяет амплитуду скорости на поверхности сферы, имеет вид

$$V(\theta) = \begin{cases} \upsilon_0, & 0 \le \theta \le \Delta\theta, \\ 0, & 0 < \theta \le \pi. \end{cases} \qquad (7.200)$$

Тогда согласно (7.197) коэффициенты ряда равны

$$A_n = i\rho c \frac{(2n+1)}{2} \cdot \frac{\upsilon_0}{h_n^{(1)\prime}(ka)} \int_0^{\Delta\theta} P_n(\theta) \sin\theta d\theta. \qquad (7.201)$$

Рассмотрим случай очень малого, практически точечного источника на поверхности сферы, т.е. полагаем $\Delta\theta \to 0$. Тогда можно предположить, что $P_n(\theta) \approx 1$, а интеграл

$$\int_0^{\Delta\theta} \sin\theta d\theta = 1 - \cos(\Delta\theta) = 1 - \left[1 - \frac{\Delta\theta^2}{2} + \ldots\right] \approx \frac{\Delta\theta^2}{2}.$$

Следовательно

$$A_n = i\rho c \frac{(2n+1)}{4} \cdot \frac{\upsilon_0 \Delta\theta^2}{h_n^{(1)\prime}(ka)}. \qquad (7.202)$$

Подставив (7.202) в (7.195), запишем комплексную амплитуду давления звукового поля:

$$p(r,\theta) = i\rho c \upsilon_0 \frac{\Delta\theta^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{h_n^{(1)\prime}(ka)} \cdot P_n(\theta) h_n^{(1)}(kr). \qquad (7.203)$$

Определим интенсивность излучения очень малого источника на поверхности сферы. В дальнем поле излучателя интенсивность звука можно определить по формуле

$$I_r = \frac{|p|^2}{2\rho c} = \frac{pp^*}{2\rho c}. \qquad (7.204)$$

Подставив (7.203) в (7.204), находим

$$I_r = \frac{\rho c \upsilon_0^2 \Delta\theta^4}{32} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)(2n+1) P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) h_n^{(1)}(kr) \left(h_m^{(1)}(kr)\right)^*}{h_n^{(1)\prime}(ka) \left(h_m^{(1)\prime}(ka)\right)^*}. \qquad (7.205)$$

Для дальней зоны (при больших значениях kr) нужно использовать асимптотику сферических функций Ханкеля $h_n^{(1)}(kr)$. Тогда, с учетом (7.189), имеем

$$I_r = \frac{\rho c \upsilon_0^2 \Delta\theta^4 a^2}{32 r^2} F(\theta), \qquad (7.206)$$

где

$$F(\theta)=\frac{1}{(ka)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)(2n+1)}{h_n^{(1)\prime}(ka)\left(h_m^{(1)\prime}(ka)\right)^*}P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\exp\left[i\frac{\pi}{2}(m-n)\right]. \tag{7.207}$$

Интегрируя (7.206) по сфере радиусом r, находим мощность излучения; при этом используем свойство ортогональности функций $P_n(\cos\theta)$ (см. (7.178)):

$$P=\rho c\upsilon_0^2\frac{\pi\Delta\theta^4}{8k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{\left|h_n^{(1)\prime}(ka)\right|^2}. \tag{7.208}$$

Как следует из (7.208), точечный источник на поверхности сферы порождает очень много мод во внешнем пространстве. Но их распространение в дальнюю зону излучателя и вклад в общую мощность P зависят от волнового размера сферы. Эта зависимость определяется модулем функции $\left|h_n^{(1)\prime}(ka)\right|$.

Согласно асимптотическим оценкам (7.198), (7.199) при малом ka вклад в мощность излучения определяют первые моды колебаний сферы, а при очень малом ka доминирующей является нулевая мода. В случае больших ka ($ka >> n$) и высшие моды вносят вклад в мощность излучения. В этой ситуации можно сказать, что много мод колебаний поверхности сферы передаются в дальнее поле излучения.

На рис. 7.28 изображены кривые функций $F(\theta)$ (см. (7.207)), которые определяют зависимость интенсивности от угла θ для разных значений волнового размера сферы ka. Виден постепенный переход от равномерного излучения по всем направлениям на низких частотах (малое ka) к резкому увеличению излучения в некоторых направлениях (большое ka). Итак, малая по сравнению с длиной волны сфера не влияет на излучение точечного источника. При увеличении ka возрастает количество сферических волн типа $n0$ в дальней зоне излучателя; их интерференция и приводит к неравномерной угловой зависимости интенсивности звука. Отметим, что с увеличением ka возрастает интенсивность в направлении $\theta = 0$, и при очень больших значениях ka работа точечного источника на поверхности сферы напоминает ситуацию, когда он размещен на жесткой поверхности. Можно сказать, что при больших ka часть пространства находится в области “тени” источника звука и не охватывается волновым процессом.

Таким образом, в случае произвольного распределения скорости колебаний на поверхности сферы $V(\theta,\psi)$ ее движение может быть представлено суммой мод колебаний, а мощность излучения равняет-

ся сумме мощностей излучения отдельных мод. Отметим, что эффективность излучения мод высших порядков тем меньше, чем выше порядок моды, поскольку мода nm делит поверхность сферы на $2nm$ участков, которые излучают в противофазе. Уменьшение площади каждого участка и их сближение (по мере увеличения количества участков) приводят к уменьшению эффективности излучения сферического источника. Поэтому эффективность излучения тем выше, чем больше удельный вес мод низших порядков в общей энергии колебаний поверхности сферы.

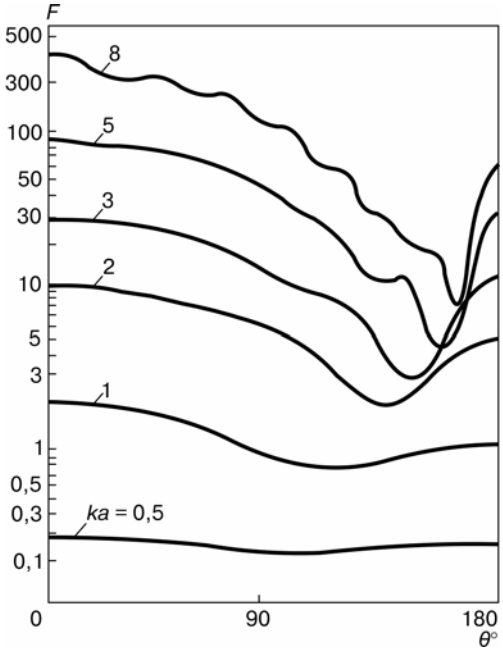


Рис. 7.28. График функции $F(\theta)$

Рассмотрим направленные свойства сферического излучателя. Характеристика направленности порядка nm, как следует из (7.190), не зависит от волнового радиуса сферы и определяется по формуле $\left|P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos(m\psi)\right|$. Независимость характеристики направленности излучателя порядка nm от частоты является характерной особенностью сферических излучателей (но это справедливо лишь для сферы, деформированной определенным образом — согласно моде nm). При условии $m = 0$ вследствие того, что возбуждение поверхности сферы симметрично относительно оси $\theta = 0$, характеристика направленности зависит лишь от угла θ. Некоторые примеры этой зависимости приведены на рис. 7.25. Как видим, чем больше ин-

декс n, тем острее направленность. В случае, когда $m > 0$, множитель $\cos(m\psi)$ обусловливает направленность и в плоскости изменения угла ψ. В общем случае характеристика направленности определяется абсолютным значением обобщенного ряда Фурье (7.180), коэффициенты которого пропорциональны V_{nm} (см. (7.184)). Здесь наблюдается такая же закономерность, что и для цилиндрического излучателя: подбирая коэффициенты ряда, можем получить острую характеристику направленности. Но, поскольку для этого придется увеличить энергию высших мод колебаний, то усиление направленных свойств излучения будет связано со снижением эффективности.

Предлагаем читателю самостоятельно построить характеристики направленности сферических излучателей при следующих распределениях колебательной скорости на его поверхности:

$$V(\theta,\psi) = V(\theta) = 0{,}5P_0(\cos\theta) + P_1(\cos\theta) + P_2(\cos\theta) + P_3(\cos\theta).$$

$$V(\theta,\psi) = V(\theta) = P_0(\cos\theta) + P_1(\cos\theta) + P_2(\cos\theta) + 2P_3(\cos\theta).$$

$$V(\theta,\psi) = V(\theta) = P_0(\cos\theta) + 3P_1(\cos\theta) + 2P_2(\cos\theta).$$

Пусть волновой размер излучателя равен $ka = 10$. Убедитесь, что такие излучатели будут иметь одностороннюю направленность (в отличие от характеристик, изображенных на рис. 7.25).

7.13. Задачи

7.1. Определите коэффициенты осевой концентрации излучателя, если его характеристика направленности описывается выражением

$$R(\theta)\frac{1+\sqrt{3}\cos\theta}{1+\sqrt{3}}; \quad R(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta = (0, 30°), \\ 0{,}05, & \theta = (30°, 180°); \end{cases} \quad R(\theta) = |\cos\theta|.$$

Постройте графики приведенных характеристик направленности.

Ответ: 3,7; 15; 3.

7.2. Определите амплитуду смещения пульсирующей сферы радиусом 5 см в воздухе, если на расстоянии 10 м она создает звуковое давление 0,2 Па. Частота пульсаций сферы 200 Гц.

Ответ: $5 \cdot 10^{-3}$ г.

7.3. Определите коэффициент осевой концентрации источника, который создает на расстоянии 30 м в осевом направлении такое же давление, что и ненаправленный источник той же мощности на расстоянии 6 м.

Ответ: 25.

7.4. Постройте характеристику направленности акустической системы, состоящей из трех точечных источников, которые работают в фазе, если производительность среднего из них в два раза выше, чем производительность боковых. Частота излучения равна 1000 Гц, расстояние между источниками — 15 см. Среда - воздух.

7.5. Определите характеристику направленности двух точечных источников, которые работают в противофазе, если отношение расстояния между ними к длине излучаемой волны равно 1,7.

7.6. Постройте характеристику направленности акустических систем (рис. 7.29) при d = 1 м и f = 500 Гц (среда — воздух).

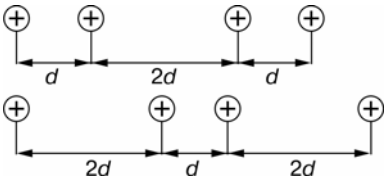


Рис. 7.29. К задаче 7.5

7.7. Определите направление, вдоль которого звуковое давление равняется нулю, в поле, создаваемом тремя точечными синфазными источниками, расстояние между которыми $\lambda/2$ (λ — длина волны).

Ответ: 42°, 138°, 222°, 318°.

7.8. Сферический источник звука малых размеров работает в воздухе. Вычислите сдвиг фаз между акустическим давлением и колебательной скоростью на частотах 10, 100 и 1000 Гц на расстоянии 0,2 м от центра источника звука. Определите удельное акустическое сопротивление для этих частот.

Ответ: 87°, 69°, 14°, $\rho c(1{,}4 \cdot 10^{-5} - i\,3{,}8 \cdot 10^{-2})$, $\rho c\,(0{,}14 - i\,0{,}38)$, $\rho c\,(0{,}93 - i\,0{,}25)$.

7.9. Пульсирующая сфера радиусом 0,05 м создает амплитуду звукового давления 0,0415 Н/м^2 на расстоянии 48,5 м. Определите скорость частиц на поверхности сферы при частоте 250, 2000, 8000 Гц. Скорость звука 343 м/с.

Ответ: 0,5 м/с, $6 \cdot 10^{-2}$ м/с, $1{,}6 \cdot 10^{-2}$ м/с.

7.10. Точечный источник помещен на расстоянии l от абсолютно жесткой плоскости. Постройте диаграмму направленности источника, если $l \ll \lambda$, $l = \lambda/4$, $l = \lambda/2$, $l = \lambda$, $l = 3\lambda/2$, $l = 2\lambda$, λ — длина звуковой волны.

7.11. Найдите решение задачи 7.10, считая, что плоскость является абсолютно мягкой.

7.12. Постройте диаграмму направленности системы, которая состоит из двух монополей; расстояние между ними равняется длине звуковой волны, а разность фаз колебаний между первым и вторым монополями — 0, $\pi/4$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$.

7.13. Вдоль прямой линии на одинаковом расстоянии d один от другого размещено N синфазных монополей. Определите диаграмму направленности источника звука.

Ответ: $R(\theta) = \left| \dfrac{\sin\left(\dfrac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{N\sin\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)} \right|$, угол θ отсчитывается от нормали до линии размещения монополей, λ — длина волны.

7.14. Покажите, что, для того чтобы главный лепесток диаграммы направленности линейной цепочки синфазных монополей был направлен вдоль линии их размещения, расстояние между монополями должно быть равным длине волны.

7.15. Определите мощность излучения звука осциллирующей сферой радиуса 1 см в воздухе на частоте 100 Гц с амплитудой смещения 1 мм. Как изменится мощность, если колебания будут происходить в воде?

Ответ: 10^{-9} Вт, увеличится приблизительно в 10 раз.

7.16. Источник сферической волны излучает сигнал, который состоит из большого числа синусоид с частотами, которые лежат в диапазоне 50...500Гц. Амплитуды давления на некотором расстоянии одинаковы для всех частот. С помощью двух микрофонов, помещенных на расстоянии 0,1 м от центра волны, осуществляется запись звука на магнитную ленту. Напряжение на выходе одного из микрофонов пропорционально давлению (микрофон давления), на выходе другого — скорости частиц среды (микрофон градиента давления). Будет ли заметна разница между двумя записями при их прослушивании при одинаковых условиях? Какую роль играет расстояние, на котором были установлены микрофоны?

7.17. Определите полную мощность излучения пульсирующей сферой радиуса 1 см, которая колеблется в воздухе или в воде с амплитудой 1 мм на частоте 100 Гц.

Ответ: $3{,}7 \cdot 10^{-5}$ Вт; $6{,}5 \cdot 10^{-3}$ Вт.

7.18. Рассчитайте активную составляющую удельного импеданса излучения и присоединенную массу пульсирующей сферы радиуса a, которая колеблется в воздухе с частотой f. Рассмотреть два случая:
а) a = 0,25 м, f = 100 Гц, *б)* a = 1 м, f = 400 Гц.

Ответ: а) 79 кг/(м^2 с), 0,27 кг/м^2, б) 420 кг/(м^2 с), 0,022 кг/м^2.

7.19. Сферическая оболочка радиусом a и массой M выполняет пульсирующее движение под действием нормальной гармонической силы $F_0\exp(-i\omega t)$, равномерно распределенной по поверхности. Движению оболочки противодействует сила трения, которая пропорциональна скорости движения с коэффициентом трения R. Запишите уравнение движения для радиальной скорости оболочки. Рассчитать КПД данного излучателя: $\eta = P/P_F$, где P — акустическая мощность, P_F — мощность источника, который создает силу F. Плотность среды ρ, скорость звука c.

Ответ: $M\dot{\upsilon} + R\upsilon = F_0\exp(-i\omega t) - pS$, p — давление, S — площадь поверхности оболочки; $\eta = \dfrac{\xi}{R+\xi}$, где $\xi = \dfrac{(ka)^2}{1+(ka)^2}\rho cS$, $k = \dfrac{\omega}{c}$. Результат показывает, что на низких частотах ($ka \to 0$) $\eta \to 0$ — процесс излучения неэффективен. На высоких частотах ($ka \to \infty$) имеем выражение $\eta = \rho cS/(R + \rho cS)$, которое справедливо для диска в трубе с площадью сечения S. Если потерь на трение нет ($R = 0$), то $\eta = 1$.

7.20. Тяжелый плоский диск массой m и площадью S, закрепленный на пружине жесткости K, выполняет свободные квазигармонические колебания на входе в газонаполненную трубу того же сечения (рис. 7.1). При этом диск излучает плоскую звуковую бегущую волну вдоль оси Ox. На диск влияет вязкое трение, сила которого пропорциональна скорости с коэффициентом трения R. Как процесс излучения влияет на собственную частоту и затухание колебаний?

Ответ: комплексная частота колебаний диска равна

$$\omega = -i\frac{R+\rho cS}{2m} \pm \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{R+\rho cS}{2m}\right)^2}\ .$$

Выражение определяет затухающие колебания. Даже когда трения нет ($R = 0$), колебания будут затухать благодаря потерям на излучение. Их амплитуда $A(t) = A\exp(-\rho cSt/(2m))$.

Собственная частота (действительная часть выражения) вследствие излучения звука уменьшается. Отметим, что импеданс излучения $Z_{\text{и}} = \rho cS\, Z_{\text{в}} = \rho cS$ является действительной величиной. Поэтому присоединенная масса диска, излучающего плоскую волну, равняется нулю.

РАЗДЕЛ 8

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА

Как будто внутренность собора —
Простор земли, и чрез окно
Далекий отголосок хора
Мне слышать иногда дано.

Б.Л. Пастернак

8.1. Использование терминов “дифракция” и “рассеяние”

При взаимодействии акустической волны с неоднородностями среды или с препятствиями волновое поле в той или иной мере изменяется. В разделе 5 мы рассматривали задачу о падении плоской волны на границу раздела двух сред. Вследствие взаимодействия волны с границей раздела появляются отраженная и прошедшая плоские волны. Здесь будет идти речь о взаимодействии звука с телами конечных размеров или с телами, у которых хотя бы один из характерных размеров конечен. Принимая во внимание большое разнообразие таких акустических ситуаций, отмечаем, что взаимодействие падающей волны и препятствия, вообще, влияет на форму волны, направление распространения и распределение амплитуды вдоль фронта. Соответствующие явления принято называть *дифракцией* (от латинского слова *diffractus* — разломанный), или *рассеянием звука*, причем в современной трактовке оба эти понятия физически эквивалентны. Преобладающее использование в разных ситуациях того или другого термина обусловлено скорее историческими или языковыми традициями, чем физическими причинами. Так, традиционно принято использовать слово дифракция, когда речь заходит о взаимодействии волн с препятствиями больших волновых размеров или с экранами, которые имеют отверстия (дифракция на отверстии). И, наоборот, в случае малых препятствий более широко используется понятие рассеяние (рассеяние на частицах, пузырьках). Итак, подчеркнем еще раз, что принципиальной разности между этими двумя понятиями не существует.

Явление рассеяния звука играет очень важную роль в акустике. (То же можно сказать и об электродинамике и о других физических науках.) На этом явлении основываются многие практические применения акустических волн: гидролокация, приборы неразрушающего контроля, медицинские сканеры, зондирования атмосферы и океана, звуковидение и т.п.

Из большого количества задач теории рассеяния в этом разделе мы рассмотрим лишь несколько, но они являются базовыми математическими моделями в теории рассеяния звука. Такие задачи, с одной стороны, позволяют получить аналитическое решение, а с другой - формируют правильное представление об общих свойствах полей рассеяния реальных объектов.

8.2. Постановка задачи рассеяния. Характеристики явления рассеяния звука

Пусть в однородной среде, которая характеризуется плотностью ρ и скоростью звука c, распространяется гармоническая волна с частотой ω (далее временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем). Будем называть ее падающей волной, и обозначать ее комплексную амплитуду давления $p_0(\mathbf{r})$. При наличии в среде препятствия к падающей волне добавляется волна, которую называют *рассеянной волной*. Ее амплитуду давления обозначим $p_s(\mathbf{r})$. Сумма $p_0(\mathbf{r}) + p_s(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r})$ определяет звуковое поле в среде при наличии препятствия. В качестве препятствия в задачах, которые будут приведены ниже, может выступить: идеально жесткое препятствие, идеально мягкое препятствие или препятствие, которое заполнено средой плотностью ρ_1 со скоростью звука c_1. Прошедшую волну в препятствие последнего типа обозначим $p_1(\mathbf{r})$.

Итак, постановка задачи о рассеянии звука такова. Амплитуда давления в среде удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad k = \omega/c. \tag{8.1}$$

Поскольку $p_s(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) - p_0(\mathbf{r})$, а падающая волна $p_0(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то и для рассеянной волны имеем

$$\Delta p_s + k^2 p_s = 0, \quad k = \omega/c. \tag{8.2}$$

Рассеянная волна должна удовлетворять условию излучения, т.е. определять бегущую волну, которая распространяется от препятствия в бесконечность. На границе препятствия должны выполняться соответствующие граничные условия:

1) для идеально жесткого препятствия на его поверхности нормальная составляющая скорости частиц среды равна нулю:

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial(p_0+p_s)}{\partial n}=0; \tag{8.3}$$

2) для идеально мягкого препятствия на его поверхности давление равно нулю:

$$p_0+p_s=0; \tag{8.4}$$

3) для препятствия с параметрами ρ_1 и c_1 имеем равенство давлений и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности препятствия:

$$p_0+p_s=p_1, \quad \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial(p_0+p_s)}{\partial n}=\frac{1}{i\omega\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial n}. \tag{8.5}$$

В этом случае прошедшая сквозь препятствие волна удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p_1+k_1^2 p_1=0, \quad k_1=\omega/c_1. \tag{8.6}$$

Приведем несколько общих соображений, которые характеризуют природу рассеяния звука. Поле, рассеянное препятствием, зависит не только от свойств самого препятствия, но и от типа падающей волны. Будем рассчитывать рассеяние для падающей плоской гармонической волны. Рассеяние на данном препятствии зависит от его формы и размеров, от сжимаемости и плотности вещества препятствия и не зависит от других его характеристик. Если сжимаемость и плотность такие же, как у среды, то препятствие не вызывает рассеяние, какими бы ни были его форма и размеры.

Природа возникновения рассеянной волны связана с тем, что препятствие движется в звуковом поле не так, как двигалась бы среда соответствующего объема при отсутствии препятствия. Рассеянная волна и есть поле, которое создается этим дополнительным движением. Но такое же поле будет образовываться, если это препятствие будет выполнять это дополнительное движение при отсутствии падающей волны. Таким образом, *задачу о рассеянии звука препятствием можно свести к задаче об излучении звука в среде, где падающая волна отсутствует.* Это интересное наблюдение мы, безусловно, будем использовать в дальнейшем.

Теперь определим характеристики, которыми описывается явление рассеяния звука. При этом чаще всего интересуются параметрами дальнего поля от препятствия ($r\to\infty$), где рассеянное поле можно представить в виде распространяющейся сферической волны (см. формулу (7.64) и комментарий к ней). В случае плоской задачи, где параметры поля не зависят от координаты z, аналогом сферической волны будет цилиндрическая волна. Интересными также являются

данные о распределении звукового поля на поверхности и вблизи препятствия.

Для описания явления рассеяния введем новую характеристику, которая носит название *полное сечение рассеяния*. Величина σ_s определяется как отношение мощности рассеянной волны P_s к интенсивности падающей плоской волны I_0:

$$\sigma_s = \frac{P_s}{I_0} = \frac{1}{I_0} \int_{(S)} I_s dS , \qquad (8.7)$$

где I_s — интенсивность рассеянной волны; интегрирование в формуле (8.7) проводится по сферической поверхности $S = 4\pi r^2$ радиуса r, которая окружает препятствие (рис. 8.1, *а*). Единица измерения σ_s — квадратный метр. Согласно определению величина полного сечения рассеяния равняется некоторой площади на поверхности фронта падающей плоской волны, мощность звукового поля на которой равняется мощности волны, рассеянной препятствием. В общем случае величина σ_s зависит от направления падения плоской волны (θ_0, ψ_0), т.е. $\sigma_s \equiv \sigma_s(\theta_0, \psi_0)$.

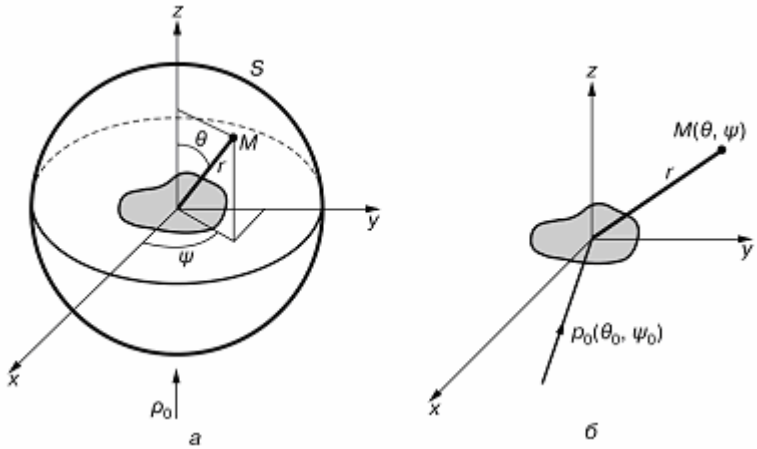


Рис. 8.1. Пример препятствия в поле падающей волны

Важной практической задачей является определение интенсивности рассеянной волны в заданном направлении (θ, ψ), например в направлении, противоположном направлению падающей плоской волны. Для такого анализа вводится понятие *позиционного сечения рассеяния* $\sigma(\theta, \psi)$. Для его определения введем в рассмотрение фиктивный ненаправленный излучатель, который создает сферическую волну с интенсивностью равной интенсивности рассеянной волны в заданном направлении $I_s(\theta, \psi)$. Мощность такого излучателя составляет $4\pi r^2 I_s(\theta, \psi)$. Вычислив отношение этой мощности к интенсивности

падающей волны I_0, определяем позиционное сечение рассеяния (рис. 8.1, *б*), т.е.

$$\sigma(\theta,\psi)=\frac{4\pi r^2 I_S(\theta,\psi)}{I_0}. \qquad (8.8)$$

Понятно, что в общем случае величина $\sigma(\theta, \psi)$ будет зависеть от направления (θ_0, ψ_0) падения плоской волны, т.е. $\sigma(\theta, \psi; \theta_0, \psi_0)$.

В задачах локации очень важной является величина сечения *обратного рассеяния* σ_L, которая определяется позиционным сечением рассеяния $\sigma(\theta, \psi)$ в случае, когда интересуются интенсивностью рассеянной волны в направлении, противоположном падению плоской волны.

8.3. Рассеяние плоской волны идеальным препятствием больших волновых размеров

Рассеяние в значительной мере зависит от соотношения между длиной падающей волны и размерами препятствий. Найти общие выражения для характеристик рассеяния при произвольных соотношениях между размерами препятствия и длиной волны не удается. Для препятствий меньших, чем длина волны, можно получить соответствующие соотношения. Если размеры препятствия велики по сравнению с длиной волны и поверхность препятствия достаточно гладкая, т.е. ее радиусы кривизны также больше, чем длина волны, то найти рассеянное поле можно с помощью лучевых представлений. Напомним, что луч — это линия, которая перпендикулярна к фронту волны, вдоль которой распространяется ее фронт. Но такие представления можно применить только к идеально мягкому и идеально жесткому препятствиям. Может сложиться впечатление, что модели идеально жесткого и идеально мягкого препятствий являются предельными случаями и могут использоваться для граничных оценок, между которыми находятся решения задач для реальных препятствий. Однако это не так. Дело в том, что при взаимодействии реального препятствия с волной возникают новые явления. Например, для препятствий в виде пластинки или оболочки на его поверхности будет возбуждаться изгибная волна; или при наличии потерь в материале препятствия возникает поток энергии, направленный вглубь препятствия. Такие потоки энергии отсутствуют в случае идеальных препятствий.

Вернемся к идеальному препятствию большого волнового размера, когда возможно применение лучевых представлений. В этом случае можно считать отдельные участки поверхности препятствия локально-плоскими и определять отражение от них по закону равенства уг-

лов падающего и отраженного лучей. Позади препятствия образуется тень, сечение которой равняется поперечному сечению препятствия (рис. 8.2, *а*). Поле перед препятствием является суммой падающей волны и рассеянной волны, которая распространяется вдоль лучей, полученных согласно закону о равенстве угла падения и отражения. За телом поле равняется нулю (мы не принимаем во внимание дифракционные явления, т.е. проникновение волны в область геометрической тени). Таким образом, рассеянное поле образовано вне зоны тени отраженной волной, а в области тени оно равняется падающей волне, взятой с обратным знаком, поскольку их сумма с падающей волной дает нуль.

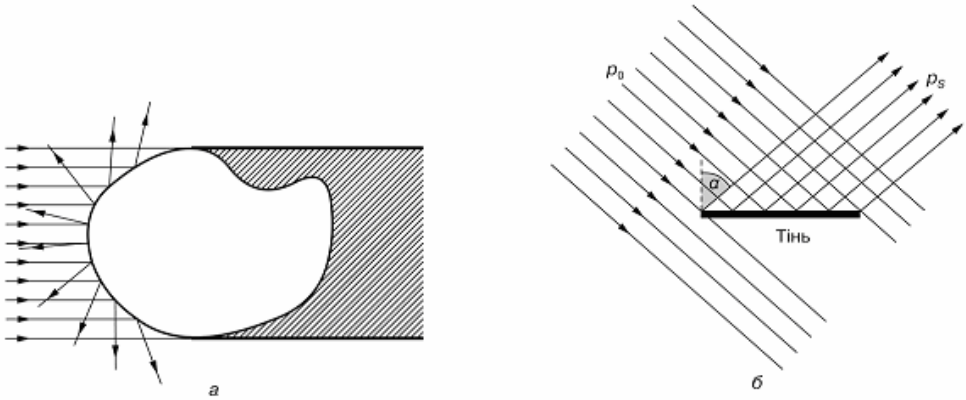


Рис. 8.2. Пример рассеяния плоской волны идеальным препятствием больших волновых размеров

Определим сечение рассеяния для идеального препятствия большого волнового размера (рис. 8.2, *а*). Поток мощности падающей волны на препятствие равен произведению $I_0 S_п$, где $S_п$ — площадь сечения препятствия, которое освещается падающей волной. Очевидно, поток мощности в отраженной волне равен потоку мощности падающей волны $I_0 S_п$ (рис. 8.2, *а*). Такой же поток мощности вызовет рассеянное поле в области тени, поскольку он по модулю равен потоку падающей волны, а по фазе противоположен к ней. Падающая волна, разумеется, присутствует во всей среде, что обусловлено выражением для общего поля вокруг препятствия $p = p_0 + p_s$. Только в этом случае поле за препятствием будет равно нулю, что обусловлено исключительно лучевыми представлениями о взаимодействии звуковой волны и препятствия. Тогда полный поток мощности рассеянного поля через произвольную замкнутую поверхность, окружающую препятствие, равен удвоенному падающему потоку мощности на препятствие.

Итак, сечение рассеяния согласно определению (8.7) равно

$$\sigma_S = 2S_п. \qquad (8.9)$$

Понятно, что противоречия с законом сохранения энергии нет, ведь за препятствием энергия суммарного поля равняется нулю, и мощность отсюда не переносится ни падающей, ни рассеянной волной; переносится энергия только вдоль отраженных лучей и именно в том количестве, в каком приносит ее к препятствию падающая волна.

Из приведенных соображений понятно, что рассеяние звука препятствием больших волновых размеров зависят от ориентации тела относительно падающей волны и не зависит от длины волны. Например, на рис. 8.2, *б* показано падение плоской волны на идеально жесткую плоскую поверхность площадью S. Здесь сечение рассеяния равно $\sigma_s = 2S\cos\alpha$, где α — угол падения волны на жесткую поверхность.

Таким образом, пока длина волны мала по сравнению с характерными параметрами тела, поток мощности рассеянной волны равен удвоенному потоку мощности падающей волны на препятствие, и, соответственно, сечение рассеяния равно удвоенной площади проекции сечения препятствия на плоскость, перпендикулярную к лучам падающей волны (рис. 8.2).

8.4. Рассеяние плоской волны препятствием малых волновых размеров

В предыдущем параграфе была рассмотрена задача рассеяния звука препятствием большого волнового размера. Теперь обратимся к случаю рассеяния плоской гармонической волны частотой ω препятствием малого волнового размера. При этом рассмотрим два случая: 1) препятствие отличается от среды только сжимаемостью; 2) препятствие отличается от среды только плотностью.

Рассмотрим первый случай. Для начала обратимся к физическим соображениям, которые раскрывают природу возникновения рассеянной волны. Представим, что мы заменили препятствие частичкой среды. Когда на эту частичку набегает звуковая волна, то, во-первых, рассеяние не возникает, во-вторых, эта частичка принимает участие в двух типах движений. Поскольку в звуковой волне давление изменяется, то частичка в соответствии изменяет свой объем. Кроме того, она вместе с окружающими частичками среды колеблется около положения равновесия. Теперь поменяем частичку среды на жесткое препятствие с плотностью равной плотности среды. Такое препятствие осцилирует вместе с окружающей средой и не изменяет своего объема. Отсутствие пульсаций у жесткого препятствия можно представить как результат наложения двух противоположных движений: одного, который навязывает падающая волна и второго, противофазного ему, которое можно назвать компенсирующим. Таким образом, если жесткого препятствия нет (оно заменено частичкой среды),

то существует только движение по закону падающей волны, и в этом случае никакого рассеяния нет. При наличии жесткого препятствия, кроме движения по закону падающей волны, появляется еще компенсирующее движение, как будто бы в этом месте появился пульсирующий источник. Это компенсирующее движение и порождает рассеянное поле (точнее сказать, оно связано с рассеянным полем, без которого было бы невозможно удовлетворить граничные условия на поверхности препятствия). Таким образом, рассеянное поле можно трактовать как результат действия вторичного источника, которое в данном случае, вследствие малых волновых размеров пульсирующего тела, имеет характер монополя (см. параграф 7.5). Если малое препятствие не является жестким, а лишь отличается от среды сжимаемостью, то также возникает соответствующее данной ситуации компенсирующее движение, порождающее рассеянную сферическую волну.

Теперь получим аналитические соотношения. Итак, пусть малое препятствие объема Ω имеет ту же плотность ρ, что и среда, которая его окружает, но сжимаемость препятствия β_1 отличается от сжимаемости среды β.

Поскольку препятствие мало, то можно считать, что оно находится в однородном поле давления падающей волны. Тогда в соответствии с уравнением состояния (4.18), $p = \frac{1}{\beta_1}\frac{\rho_{1\sim}}{\rho_1} = -\frac{1}{\beta_1}\frac{\delta\Omega}{\Omega}$, где p — давление в падающей волне в месте расположения препятствия. Отсюда приращение объема препятствия $\delta\Omega = -\beta_1\Omega p$; соответствующее приращение для элемента среды в объеме препятствия составляет $-\beta\Omega p$.

Таким образом, препятствие создает дополнительное приращение объема: $U = \Omega(\beta - \beta_1)p$ а значит, препятствие ведет себя как пульсирующее тело, объем которого изменяется по гармоническому закону

$$U(t) = \Omega(\beta - \beta_1)p\exp(-i\omega t). \tag{8.10}$$

Отсюда объемная скорость препятствия равна

$$V(t) = \frac{dU(t)}{dt} = -i\omega\,\Omega(\beta - \beta_1)p\exp(-i\omega t), \tag{8.11}$$

а ее амплитуда —

$$V_0 = -i\omega\,\Omega(\beta - \beta_1)p. \tag{8.12}$$

Таким образом, поле, рассеянное препятствием, совпадает с полем, которое образует монополь с производительностью, определенной по формуле (8.12). Тогда комплексную амплитуду давления рассеянной волны (см. (7.31) с учетом (8.10)) можно определить по формуле

$$p_s = -i\omega\rho\frac{V_0}{4\pi r}\exp(ikr) = -\rho\omega^2\ \Omega(\beta-\beta_1)p\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \quad k=\frac{\omega}{c}, \qquad (8.13)$$

или, поскольку $\beta = 1/(\rho c^2)$, имеем

$$p_s = -k^2\Omega\left(1-\frac{\beta_1}{\beta}\right)p\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \qquad (8.14)$$

где r — расстояние от препятствия до точки наблюдения.

Мощность волны рассеяния (см. формулу (7.29)) равна

$$P_s = \frac{|p_s|^2}{2\rho c}4\pi r^2 = \frac{1}{8\pi\rho c}k^4\Omega^2\left(1-\frac{\beta_1}{\beta}\right)^2|p|^2 = \frac{1}{8\pi\rho c^5}\omega^4\Omega^2\left(1-\frac{\beta_1}{\beta}\right)^2|p|^2. \qquad (8.15)$$

Эта мощность оказывается пропорциональной волновому числу (или частоте) в четвертой степени, т.е. рассеяние быстро возрастает с увеличением частоты звука. При этом форма и ориентация тела относительно падающей волны, в отличие от рассеяния на большом препятствии, несущественны. Рассеяние определяется только давлением падающей волны, объемом тела и различием между сжимаемостями тела и среды.

Согласно определению (8.7) найдем полное сечение рассеяния данного малого препятствия:

$$\sigma_s = \frac{\frac{1}{8\pi\rho c}k^4\Omega^2\left(1-\frac{\beta_1}{\beta}\right)^2|p|^2}{|p|^2/(2\rho c)} = \frac{1}{4\pi}k^4\Omega^2\left(1-\frac{\beta_1}{\beta}\right)^2. \qquad (8.16)$$

Например, для препятствия в виде сферы радиуса a ($\Omega = 4\pi a^3/3$, $ka \ll 1$) имеем

$$\sigma_s = \frac{4}{9}\pi a^2(ka)^4\left(1-\frac{\beta_1}{\beta}\right)^2. \qquad (8.17)$$

Если сфера несжимаемая ($\beta_1 = 0$), т.е. идеально жесткая, то

$$\sigma_s = \frac{4}{9}\pi a^2(ka)^4. \qquad (8.18)$$

Как видим, полное сечение рассеяния очень мало по сравнению с поперечным сечением πa^2 самой сферы; их отношение равно $4(ka)^{4/9}$. Соотношение такого порядка справедливо и для препятствия другой формы и при сжимаемости не равной нулю. Однако, есть важное исключение, о котором речь будет идти ниже.

Теперь рассмотрим второй случай, когда малое препятствие и среда различаются только плотностью. Но анализ такой ситуации не прост, поэтому обсудим только его результаты [20, с. 358—363]. Поскольку сжимаемости препятствия и среды одинаковы, то рассеяние монопольного типа не возникает. Однако скорость препятствия отличается от скорости частиц среды, которые находятся рядом. Если плотность препятствия ρ_1 больше плотности среды ρ, то движение препятствия отстает от движения частиц среды; если его плотность меньше, чем плотность среды, то препятствие опережает частицы. Как следствие, препятствие перемещается относительно среды и потому создает в среде излучение дипольного типа. Это излучение и есть поле, которое рассеивается данным препятствием. Понятно, что рассеянное поле будет иметь направленность диполя, но, что для нас более важно, рассеянная мощность, как и в предыдущем случае, пропорциональна частоте в четвертой степени.

Очевидно, произвольное малое препятствие, с плотностью и сжимаемостью, отличной от параметров окружающей среды, вызывает одновременно и монопольное, и дипольное рассеяние, тому давление в рассеянной волне будет равно сумме давлений монопольного рассеяния $p_{\text{мон}}$ и дипольного рассеяния $p_{\text{дип}}$ отдельно. Интересно отметить, что и полное сечение рассеяния произвольного малого препятствия определяется суммой сечений монопольного и дипольного рассеяния отдельно.

Действительно, поле монополя сферически-симметричное, а поле диполя изменяет знак при изменении направления на противоположное (осциллирующее тело создает в одном направлении волну сжатия, а в противоположном — волну разряжения). Поэтому в симметричных относительно препятствия точках давление в рассеянном поле будет равно $p_{\text{мон}} + p_{\text{дип}}$ и $p_{\text{мон}} - p_{\text{дип}}$,, соответственно. Тогда сложив интенсивности рассеянного поля в двух противоположных направлениях, получим $\frac{|p_{\text{мон}}|^2}{\rho c} + \frac{|p_{\text{дип}}|^2}{\rho c}$, т. е. в выражении для мощности рассеяния составляющие с произведением давлений $p_{\text{мон}}$ и $p_{\text{дип}}$ взаимно сокращаются, так что останутся только квадраты давлений, которые соответствуют обоим типам рассеяния отдельно. Поэтому полное сечение рассеяния — это сумма сечений рассеяния монопольного и дипольного типов.

8.5. Рассеяние плоской волны на идеальном бесконечном круговом цилиндре

Рассеяние звука на идеальном бесконечном круговом цилиндре является простейшей дифракционной задачей, имеющей точ-

ное решение. Кроме того, задачами, которые имеют точные решения, являются задачи рассеяния звука на сфере, эллипсоиде и на других телах, поверхности которых представляют собой координатные поверхности соответствующих криволинейных систем координат. Именно в таких случаях возможно применение метода разделения переменных (см. параграф 7.12). Несмотря на то, что число задач, имеющих точное решение, ограничено, их значимость трудно переоценить. Это обусловлено тем, что указанные решения не только используются в конкретных расчетах, но и выступают как эталонные задачи при проверке и разработке различных приближенных методов исследования дифракционных задач.

8.5.1. Постановка и построение решения задачи

Пусть на идеальный цилиндр радиуса a, бесконечной длины перпендикулярно к его оси падает плоская гармоническая волна частотой ω (рис. 8.3). Среда, окружающая цилиндр, характеризуется плотностью ρ и скоростью звука c. Введем цилиндрическую систему координат (r, z, ψ) с началом в точке O, которая лежит на оси цилиндра.

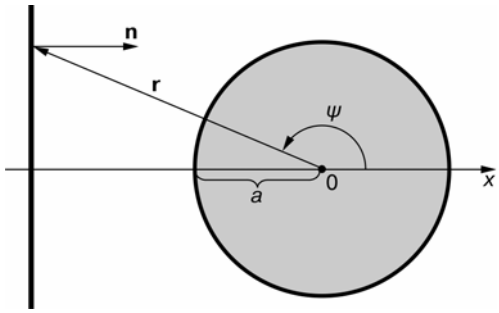


Рис. 8.3. Пример падающей плоской волны на цилиндр

Путь, который проходит фронт плоской волны, определяется скалярным произведением векторов $\mathbf{nr}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор ($|\mathbf{n}| = 1$) нормали к поверхности фронта волны, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор от начала координат O к точке на поверхности фронта. Понятно, что $\mathbf{nr} = r\cos\psi$ ($r = |\mathbf{r}|$, ψ — угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{r}$). Тогда падающая волна с единичной амплитудой давления имеет вид

$$p_0(r, \psi, t) = \exp(-i\omega t + i\mathbf{kr}) = \exp(-i\omega t + ikr\cos\psi),$$

где $\mathbf{k} = k\mathbf{r}$ — волновой вектор, $k = \omega/c$. Отсюда комплексная амплитуда давления такова:

$$p_0(r, \psi) = \exp(i\mathbf{kr}) = \exp(ikr\cos\psi). \qquad (8.19)$$

Возникает вопрос, как записать рассеянное поле, которое образуется при взаимодействии падающей волны и цилиндра. В параграфе 8.2 мы пришли к важному выводу о том, что задачу рассеяния можно свести к задаче излучения звука. Следовательно, приняв во внимание, что данная задача симметрична относительно направления падающей волны, можно использовать выражение (7.128), которое определяет поле излучения цилиндра с произвольным (симметричным относительно направления $\psi = 0$) распределением скорости частиц на его поверхности:

$$p_S(r,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr)\cos(n\psi). \tag{8.20}$$

Давление общего поля определяется суммой полей (8.19) и (8.20):

$$p(r,\psi) = \exp\left(ikr\cos\psi\right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr)\cos(n\psi). \tag{8.21}$$

Постоянные A_n находятся из граничного условия на поверхности цилиндра. Для акустически жесткого цилиндра радиальная скорость на его поверхности равна нулю, т.е.

$$\left.\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \tag{8.22}$$

а для акустически мягкого цилиндра давление равно нулю:

$$\left.p\right|_{r=a} = 0. \tag{8.23}$$

Прежде, чем расписать граничные условия, разложим плоскую волну (8.19) в ряд по функциям Бесселя. Для этого запишем ряд Фурье для функции (8.19) (принимая во внимание симметрию задачи, строим ряд только по функциям косинуса):

$$\exp\left(ikr\cos\psi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(kr)\cos(n\psi),$$

где $f_n(kr)$ — неизвестные функции. Умножим обе части последнего равенства на $\cos(m\psi)$ и проинтегрируем на интервале $[0,2\pi]$; тогда вследствие ортогональности тригонометрических функций получим

$$f_m(kr) = \frac{\varepsilon_m}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikr\cos\psi)\cos(m\psi)d\psi, \quad m = 0,1,2,\ldots, \tag{8.24}$$

где $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_m = 2$ при $m > 0$. Интеграл в формуле (8.24) равен $2\pi i^m J_m(kr)$, (см. [49, 52]). Таким образом,

$$\exp(ikr\cos\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr)\cos(n\psi). \tag{8.25}$$

Тогда давление общего поля можно записать в виде

$$p(r,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varepsilon_n i^n J_n(kr) + A_n H_n^{(1)}(kr)\right)\cos(n\psi). \tag{8.26}$$

и соответственно колебательная скорость в радиальном направлении

$$\upsilon_r = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{i\rho c}\sum_{n=0}^{\infty}[\varepsilon_n i^n J_n'(kr) + A_n H_n^{(1)\prime}(kr)]\cos(n\psi). \tag{8.27}$$

Если выполняется граничное условие (8.22), то из (8.27) получим равенство

$$[\varepsilon_n i^n J_n'(ka) + A_n H_n^{(1)\prime}(ka)]\cos(n\psi) = 0, \tag{8.28}$$

которое справедливо при

$$A_n = -\varepsilon_n i^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}. \tag{8.29}$$

В случае граничного условия (8.23) имеем

$$A_n = -\varepsilon_n i^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}. \tag{8.30}$$

Подставляя (8.29) или (8.30) в (8.26) и (8.27), получаем выражения для полного поля скорости частиц и давления:

$$\upsilon_r = \frac{1}{i\rho c}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n i^n[J_n'(kr) - B_n H_n^{(1)\prime}(kr)]\cos(n\psi), \tag{8.31}$$

$$p = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n i^n[J_n(kr) - B_n H_n^{(1)}(kr)]\cos(n\psi), \tag{8.32}$$

где коэффициенты B_n:
для акустически жесткого цилиндра

$$B_n = \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}, \tag{8.33}$$

для акустически мягкого цилиндра

$$B_n = \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}. \tag{8.34}$$

Отдельно запишем формулы для рассеянной волны:

$$\upsilon_{rs} = -\frac{1}{i\rho c}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n i^n B_n H_n^{(1)\prime}(kr)\cos(n\psi), \tag{8.35}$$

$$p_s = -\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n i^n B_n H_n^{(1)}(kr)\cos(n\psi). \tag{8.36}$$

Построенное решение имеет вид бесконечных рядов. Поэтому, естественно, возникает вопрос: как использовать их в практических расчетах. Анализ функций Бесселя, входящих в записанные выше ряды, показывает, что при $n > (kr)$ ряды начинают сходиться. Для практических расчетов достаточно ограничиться количеством членов ряда $N = (1{,}5—2)\,(kr)$ [60, с. 172]. В случае цилиндра большого волнового радиуса $(ka) >> 1$ существуют методы, которые позволяют выполнить приближенное суммирование рядов по функциям Бесселя, одним из которых есть преобразование Ватсона* [60, с. 173—186].

8.5.2. Звуковое поле на поверхности и вблизи цилиндра

При определении поля на поверхности цилиндра нужно в формулах (8.31), (8.32) положить $r = a$. Понятно, что на поверхности жесткого цилиндра нулю равняется радиальная скорость, а на поверхности мягкого цилиндра — давление. Согласно свойствам функций Бесселя имеем такое соотношение [49, 52]:

$$J_n(ka)H_n^{(1)\prime}(ka) - J_n{}'(ka)H_n^{(1)}(ka) = \frac{2}{\pi ka}. \tag{8.37}$$

Использование формулы (8.37) позволяет представить давление на поверхности жесткого цилиндра в виде

$$p = \frac{2}{\pi ka}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n i^n \frac{\cos(n\psi)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}, \tag{8.38}$$

а радиальную скорость на поверхности мягкого цилиндра в виде

$$\upsilon_r = -\frac{1}{i\rho c}\frac{2}{\pi ka}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n i^n \frac{\cos(n\psi)}{H_n^{(1)}(ka)}. \tag{8.39}$$

На рис. 8.4, *а* приведены графики нормированной амплитуды давления на поверхности жесткого цилиндра, а на рис. 8.4, б — графики нормированной амплитуды радиальной скорости на поверхности мягкого цилиндра. Нормировка проводилась относительно ам-

---

* Ватсон (Watson) Джордж Невил (1886—1965) — английский математик.

плитуды падающей волны. Параметром кривых является волновой радиус цилиндра ka. Напомним, что плоская волна падает на цилиндр вдоль положительного направления оси Ox (рис. 8.3).

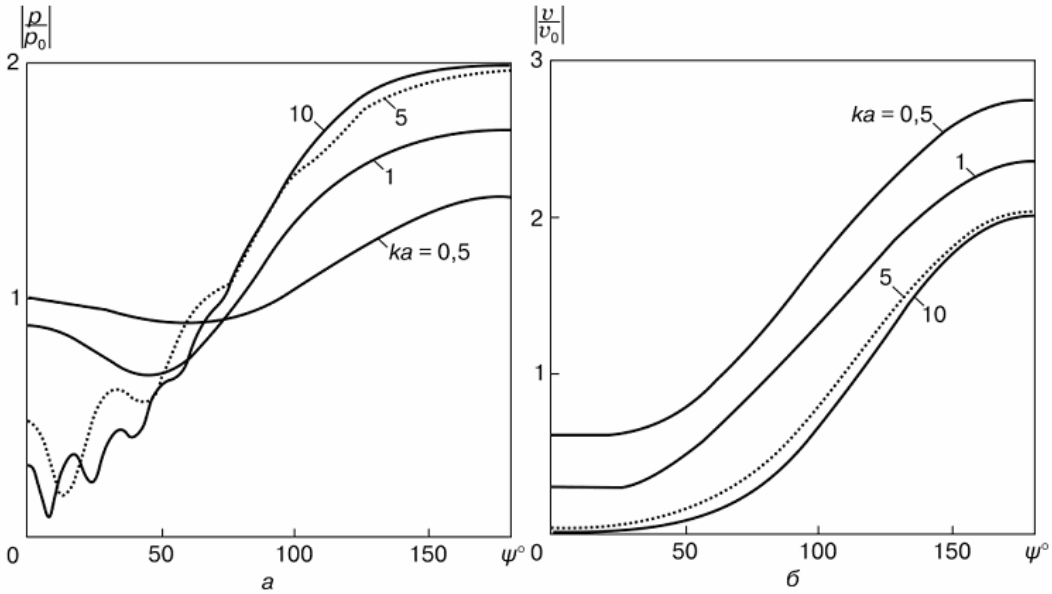


Рис. 8.4. Кривые для нормированных значений амплитуд давления на поверхности жесткого цилиндра (*а*) и скорости на поверхности мягкого цилиндра (*б*)

Рассмотрим жесткий цилиндр (рис. 8.4, *а*). Как видим, с ростом величины ka на “освещенной” стороне цилиндра амплитуда давления равномерно распределяется и стремится к удвоенной амплитуде падающей волны, что соответствует падению волны на плоскую жесткую бесконечную поверхность. При этом на противоположной части цилиндра образуется “акустическая тень” с характерными осцилляциями давления на поверхности цилиндра, что обусловлено дифракционными волнами, которые огибают цилиндр с разных сторон. Отметим, что каких бы больших, но конечных, размеров ни был радиус цилиндра, поле на его поверхности в зоне тени не равно нулю. Понятно, что при увеличении радиуса амплитуда поля в зоне тени будет уменьшаться. При уменьшении волнового радиуса цилиндра давление на поверхности становится более равномерным и при $ka << 1$ практически равняется амплитуде давления падающей волны. В этом нетрудно убедиться, обратившись к формуле (8.38).

Для этого приведем следующие соотношения [49, 52]:

$$2H_n^{(1)\prime} = H_{n-1}^{(1)}(ka) - H_{n+1}^{(1)}(ka),$$

$$H_n^{(1)\prime}(ka) = -H_{n+1}^{(1)}(ka) + \frac{n}{ka} H_n^{(1)}(ka),$$

$$J_n(ka) \approx \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{ka}{2} \right)^n \quad \text{при} \quad (ka) \to 0, \tag{8.40}$$

$$iH_0^{(1)}(ka) \approx -\frac{2}{\pi} \ln(ka) \quad \text{при} \quad (ka) \to 0,$$

$$iH_n^{(1)}(ka) \approx \frac{1}{\pi} \Gamma(n) \left(\frac{2}{ka} \right)^n \quad \text{при} \quad (ka) \to 0, \quad n > 0,$$

здесь $\Gamma(n)$— гамма-функция. Итак, при $(ka) \to 0$ в ряде (8.38) можно оставить только первый член $(\Gamma(0) = 1)$:

$$\left| \frac{p}{p_0} \right| \approx \left| \frac{2}{\pi ka H_0^{(1)\prime}(ka)} \right| = \left| \frac{2}{\pi ka H_1^{(1)}(ka)} \right| \approx 1.$$

Такой результат указывает на то, что жесткий цилиндр малого волнового радиуса практически не изменяет поле падающей волны, и следовательно создает слабое рассеянное поле.

Теперь рассмотрим мягкий цилиндр (рис. 8.4, б). Здесь при большом волновом радиусе цилиндра на его “освещенной” стороне скорость стремится к удвоенному значению скорости частиц в падающей волне, что соответствует падению плоской волны на плоскую мягкую бесконечную поверхность. В зоне тени скорость на поверхности цилиндра уменьшается достаточно медленно и величина осцилляций значительно меньше, чем для жесткого цилиндра. Непривычно ведут себя кривые при уменьшении величины ka. Как видим, при уменьшении величины ka значение скорости на поверхности цилиндра выравнивается и возрастает. По аналогии с анализом формулы (8.38) рассмотрим (8.39) для скорости на поверхности мягкого цилиндра при $ka \to 0$. Здесь имеем

$$\left| \frac{v_r}{v_{r0}} \right| \approx \left| \frac{2}{\pi ka H_0^{(1)}(ka)} \right| \approx \left| \frac{1}{\pi ka \frac{2}{\pi} \ln(ka)} \right| \to \lim_{ka \to 0} \frac{1}{ka \left| \ln(ka) \right|} = \infty.$$

Итак, при $ka \to 0$ колебательная скорость на поверхности мягкого цилиндра не зависит от угла ψ и стремится к бесконечности. Физическое содержание полученного результата состоит в том, при любом малом радиусе мягкий цилиндр создает рассеянное поле. Это очень интересное наблюдение. Понятно, что самое значение бесконечности не является физическим результатом. Этот результат обусловлен нефизической моделью - цилиндром бесконечной длины. Если бы мы ре-

шали задачу о рассеянии звука на цилиндре конечной длины, то вопрос о бесконечности не возник. Однако решение такой задачи является значительно более сложным.

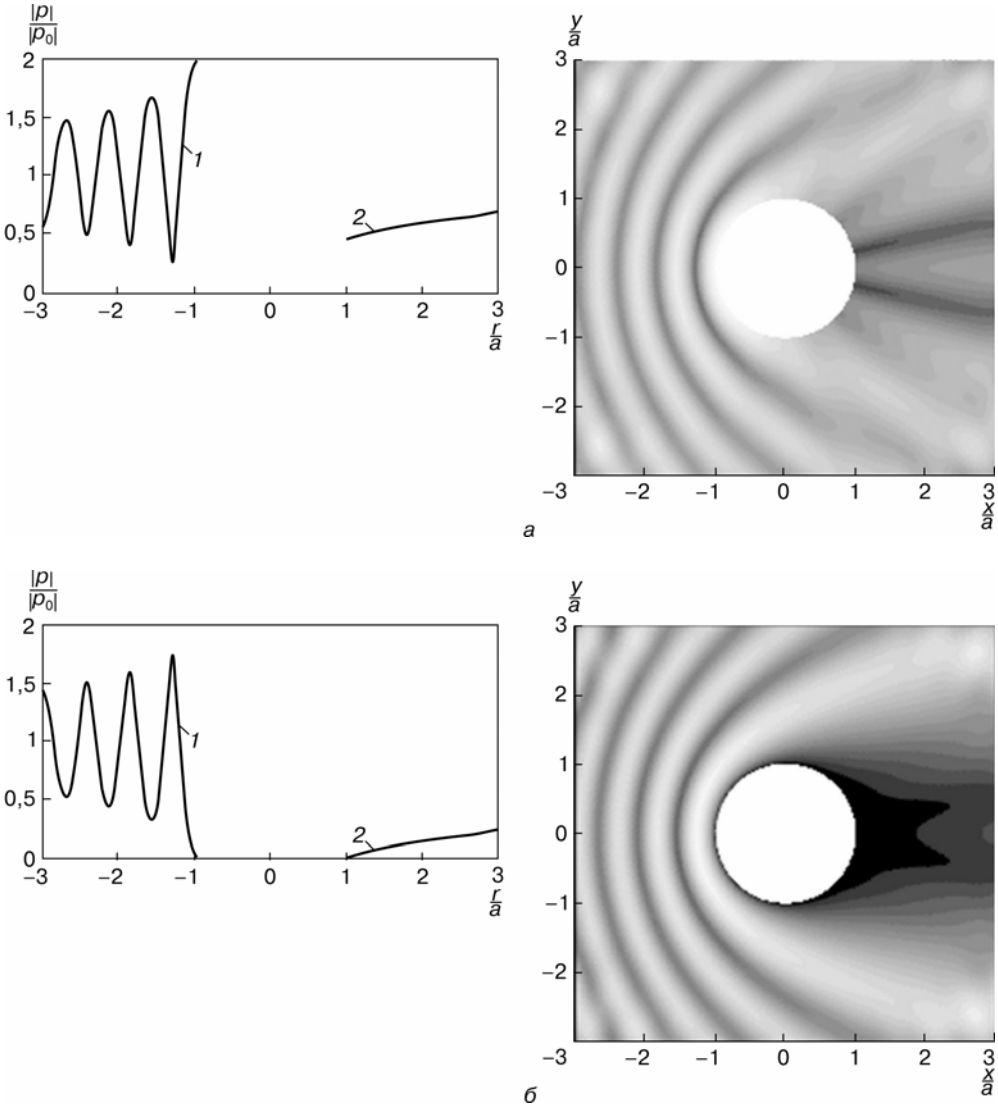


Рис. 8.5. Диаграммы (справа) и графики (слева) для поля нормированной амплитуды давления вблизи жесткого (*а*) и мягкого (*б*) цилиндров:
$a/\lambda = 0{,}9$; *1* — $\psi = 180\,°$; *2* — $\psi = 0\,°$

Рассмотрим структуру звукового поля вблизи цилиндра. Диаграммы на рис. 8.5 представляют нормированную (относительно амплитуды давления в падающей плоской волне) амплитуду давления полного

поля вблизи цилиндра. Графики возле диаграмм определяют изменение нормированной амплитуды давления вдоль лучей $\psi = 0$ (зона тени — кривая *2*) и $\psi = 180°$ (направление падающей плоской волны на цилиндр — кривая *1*). Изменение оттенков на диаграммах от черного до белого цветов соответствует изменению амплитуды давления вокруг цилиндра. Черный цвет соответствует минимальной, а белый - максимальной амплитуде давления.

Как видим, на освещенной поверхности жесткого цилиндра довольно большого волнового радиуса (рис. 8.5, *а*, $a/\lambda = 0{,}9$; λ — длина звуковой волны) имеем узкую полосу белого цвета, что соответствует амплитуде давления на поверхности освещенной части цилиндра, данная амплитуда приблизительно равна удвоенной амплитуде падающей волны. Поверхность мягкого цилиндра (рис. 8.5, *б*, $a/\lambda = 0{,}9$) окружает черная полоса, поскольку давление на его поверхности равно нулю. Слева от цилиндра, вследствие интерференции падающей и рассеянной волн, имеют место осцилляции звукового поля относительно амплитуды давления в падающей волне. Отметим, что период пространственных осцилляций волн является наименьшим вдоль луча $\psi = 180°$, т.е. перед цилиндром. В сечении под другими углами пространственный период осцилляций увеличивается. Справа от цилиндра, в зоне тени, давление плавно возрастает по мере отдаления от цилиндра, асимптотически приближаясь к амплитуде падающей волны. Действительно, в выражении (8.32) первая сумма определяет падающую плоскую волну (см. формулу (8.25)), а вторая сумма — рассеянное поле как суперпозицию цилиндрических волн, амплитуда которых при $kr \to \infty$ уменьшается по закону $1/\sqrt{kr}$ (см. ниже (8.41)).

8.6. Рассеянное поле на большом волновом расстоянии от цилиндра

Перепишем формулы (8.35), (8.36) для радиальной скорости и давления в рассеянной волне на большом волновом расстоянии kr от цилиндра. Для этого будем использовать асимптотическое представление функции Ханкеля при $kr \to \infty$ [49, 52]:

$$H_n^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(ikr - i(2n+1)\frac{\pi}{4} \right). \tag{8.41}$$

Поскольку $kr \to \infty$, то производная для функции Ханкеля по аргументу kr может быть определена по приближенной формуле

$$H_n^{(1)\prime}(kr) \approx i\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(ikr - i(2n+1)\frac{\pi}{4} \right). \tag{8.42}$$

Итак, (8.35) и (8.36) при $kr \to \infty$ примут вид (используем равенство $i^n = \exp(i\pi n/2)$):

$$\upsilon_{rs} = -\frac{1}{\rho c}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\exp\left(ikr - i\frac{\pi}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n B_n \cos(n\psi), \tag{8.43}$$

$$p_s = -\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\exp\left(ikr - i\frac{\pi}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n B_n \cos(n\psi). \tag{8.44}$$

Интенсивность рассеянной волны определиться так:

$$I_s = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(p_s\upsilon_{rs}^*) = \frac{1}{\pi kr\rho c}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_n\varepsilon_m B_n B_m^* \cos(n\psi)\cos(m\psi). \tag{8.45}$$

Принимая во внимание, что интенсивность плоской падающей волны (8.19) с единичной амплитудой давления равна

$$I_0 = \frac{1}{2\rho c}, \tag{8.46}$$

запишем интенсивность рассеянной волны (8.45) в виде

$$I_s(\psi) = \frac{2I_0}{\pi kr}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_n\varepsilon_m B_n B_m^* \cos(n\psi)\cos(m\psi). \tag{8.47}$$

Зная зависимость $I_s(\psi)$, можно определить позиционное сечение рассеяния $\sigma(\psi)$. Для данной задачи, в соответствии с определением (8.8), нужно ввести в рассмотрение фиктивный ненаправленный цилиндрический излучатель с интенсивностью, равной интенсивности $I_s(\psi)$ в заданном направлении ψ. Мощность такого излучателя для единичной длины фронта цилиндрической волны равна $2\pi r I_s(\psi)$. Таким образом, позиционное сечение рассеяния, с учетом (8.47) определится по формуле

$$\sigma(\psi) = \frac{2\pi r I_s(\psi)}{I_0} = \frac{4}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_n\varepsilon_m B_n B_m^* \cos(n\psi)\cos(m\psi). \tag{8.48}$$

Запишем формулу (8.48) в безразмерном виде. Для этого разделим (8.48) на площадь поверхности цилиндра, которая “освещается” падающей плоской волной. В расчете на единицу длины образующей цилиндра эта величина равна πa. Итак, имеем

$$\frac{\sigma(\psi)}{\pi a} = \frac{4}{\pi ka}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_n\varepsilon_m B_n B_m^* \cos(n\psi)\cos(m\psi). \tag{8.49}$$

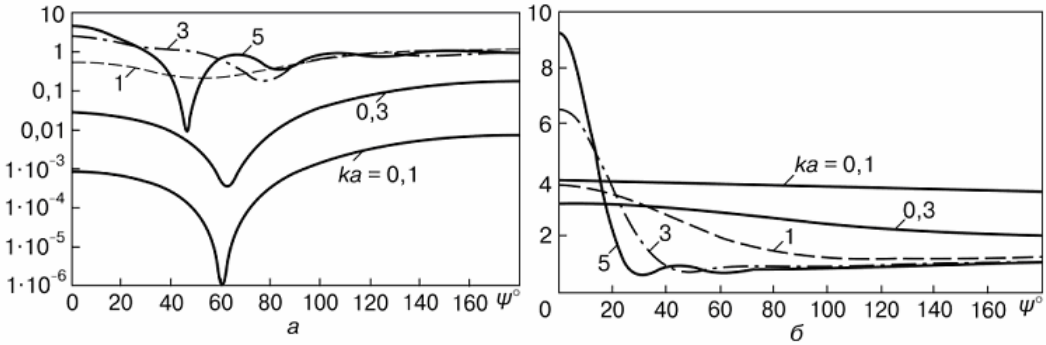


Рис. 8.6. Зависимости $\sigma(\psi)/\pi a$ при разных значениях волнового радиуса цилиндра: *а* — жесткий цилиндр, *б* — мягкий цилиндр

На рис. 8.6 показано позиционное сечение рассеяния при соответствующих значениях волнового радиуса цилиндра ka. Сначала рассмотрим рассеяние звука цилиндром на низких частотах, т.е. при $ka < 1$. В наших расчетах это соответствует $ka \le 0{,}3$. Следует обратить внимание, с одной стороны, на характер кривой, а с другой — на величину позиционного сечения рассеяния. Как видим, в случае мягкого цилиндра (рис. 8.6, *б*, $ka \le 0{,}3$) диаграмма рассеяния подобна круговой диаграмме, что характерно для монопольного рассеяния, а для жесткого цилиндра (рис. 8.6, *а*, $ka \le 0{,}3$) — подобна кардиоидной диаграмме, которая образуется как суперпозиция монопольного и дипольного рассеяний. Монопольное рассеяние малым препятствием, как уже отмечалось, обусловлено только различием в сжимаемостях препятствия и среды. Для жесткого цилиндра сжимаемость равна нулю. Дипольное рассеяние связано с таким препятствием, которое отличается от среды только плотностью. Этот результат можно прокомментировать следующими физическими соображениями. В звуковой волне происходят процессы сжатия и смещение частиц среды. Малое препятствие в звуковом поле, по сути, малая частица, в виде жесткого цилиндра изменяет характер сжатия и смещения частиц среды вблизи цилиндра. Это обуславливает возникновение рассеянной волны, такой, что на поверхности цилиндра должны выполняться граничные условия: радиальная скорость равна нулю. Таким образом, изменение характера сжатия приводит к монопольному рассеянию, а изменение характера движения частиц среды приводит к дипольному рассеянию, причем вклад обоих типов рассеяния оказывается примерно одинаковым, в чем несложно убедиться.

Обратимся к формуле (8.44) для давления в рассеянной волне жестким цилиндром и определим асимптотическое поведение коэффициентов B_n (формула (8.33) при $ka \to 0$). Используя соотношение (8.40), получаем

$$B_0 = \frac{J_0'(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)} = \frac{J_1(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} \approx i\frac{\pi(ka)^2}{4}; \tag{8.50}$$

$$B_1 = \frac{J_1'(ka)}{H_1^{(1)\prime}(ka)} = \frac{J_0(ka) - J_2(ka)}{H_0^{(1)}(ka) - H_2^{(1)}(ka)} \approx \frac{J_0(ka)}{-H_2^{(1)}(ka)} \approx -i\frac{\pi(ka)^2}{4}.$$

Коэффициенты B_n при $n > 1$ имеют порядок малости высший, чем $(ka)^2$ (убедитесь в этом самостоятельно). Как следствие, нормированную амплитуду давления рассеянной волны от жесткого цилиндра при $(ka) << 1$ і $(kr) >> 1$ можно определить по формуле

$$\left|\frac{p_s}{p_0}\right| \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot \frac{\pi(ka)^2}{4}\left|1 - 2\cos\psi\right|. \tag{8.51}$$

Как видим, первое слагаемое в (8.51) определяет монопольное рассеяние, а второе слагаемое - дипольное рассеяние. Запишем соответствующую нормированную интенсивность

$$\frac{I_s}{I_0} = \left|\frac{p_s}{p_0}\right|^2 = \frac{\pi(ka)^4}{8kr}(1 - 2\cos\psi)^2 = \frac{\pi^4 a^4}{r\lambda^3}(1 - 2\cos\psi)^2, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{8.52}$$

Рассмотрим мягкий цилиндр малых волновых размеров. Здесь асимптотика коэффициентов B_n (формула (8.34)) при $ka \to 0$ имеет вид

$$B_0 = \frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} \approx -i\frac{\pi}{2\ln(ka)}; \tag{8.53}$$

коэффициенты B_n при $n > 0$ пропорциональны $(ka)^{2n}$ и, следовательно, при $(ka) << 1$ будут значительно меньшими, чем коэффициенты B_0 (убедитесь в этом).

Таким образом, оставляя первый член ряда (8.44), можно записать следующее выражение для нормированной амплитуды давления рассеянной волны от мягкого цилиндра при $(ka) << 1$ и $(kr) >> 1$:

$$\left|\frac{p_s}{p_0}\right| \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot \frac{\pi}{2\ln(ka)} = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \cdot \frac{1}{\ln(ka)}, \tag{8.54}$$

которое не зависит от угла ψ и представляет собой рассеянием монопольного типа. Как следствие, дипольное рассеяние для мягкого цилиндра при $(ka) << 1$ значительно меньше, чем рассеяние монопольного типа.

Обратим внимание на числовые значения $\sigma(\psi)/\pi a$ при $ka < 1$. Как видно из графиков (рис. 8.6, $ka \le 0{,}3$), в случае мягкого цилиндра

значения $\sigma(\psi)/\pi a$ значительно превышают соответствующие значения для жесткого цилиндра. Согласно формулам (8.51) и (8.54), которые справедливы для $(ka) << 1$, величина $\sigma_s/\pi a$ для жесткого цилиндра стремится к нулю при $ka \to 0$, а в случае мягкого цилиндра — $\sigma(\psi)/\pi a \to \infty$. Природа бесконечности уже обсуждалась при анализе колебательной скорости на поверхности мягкого цилиндра, и понятно, что в случае цилиндра конечной длины этой бесконечности не будет. Итак, приходим к выводу: если в случае жесткого цилиндра рассеянное поле уменьшается до нуля при $ka = 2\pi a/\lambda \to 0$, то в случае мягкого цилиндра рассеянное поле будет иметь конечное значение при любом малом размере волнового радиуса ka.

При увеличении волнового радиуса цилиндра (ka) вид диаграмм постепенно усложняется (рис. 8.6). Появляется характерная особенность высоких частот: рассеяние вперед, в направлении падающей волны, которое больше, чем рассеяние в противоположном направлении. Формируется так называемый *теневой лепесток* характеристики. С ростом ka диаграмма фактически разделяется на две части: первая из них определяет рассеяние в сторону падающей волны, а вторая формирует теневой лепесток.

Картина рассеяния звука цилиндром с ростом величины ka в общих чертах имеет такой вид. Одна часть энергии рассеивается в сторону падающей волны. При больших ka угол отражения звука от поверхности цилиндра соответствует законам геометрической акустики. Другая часть энергии создает теневую волну. Фаза этой волны противоположна фазе падающей волны, а амплитуды обеих волн оказываются одинаковыми. В поле за цилиндром, определенном суперпозицией этих волн, создается зона тени. Это действительно так, ведь согласно постановке задачи (см. формулу (8.22)) падающая плоская волна существует в пространстве всюду и потому рассеянное поле должно иметь именно такие свойства.

При дальнейшем увеличении волнового радиуса ka разделение рассеянной волны на отраженную и теневую оказывается все более сильным. В предельном случае, когда ka становится очень большим, теневой лепесток имеет малый угол раскрыва, стремящийся к нулю. Фактически имеем случай рассеяния звука на препятствии большого волнового размера, в этом случае взаимодействие звука с препятствием хорошо описывается на основе лучевых представлений (рис. 8.2). Поэтому понятно, что при $ka >> 1$ даже при малом отклонении от максимума теневого лепестка мы попадаем в зону “освещенную” падающей волной. Неограниченный рост максимума теневого лепестка не должно удивлять. Дело в том, что, с одной стороны, существует падающая плоская волна, у которой амплитуда не зависит от расстояния, а с другой — рассеянная цилиндрическая волна, у которой

$I_s \sim 1/r$. С учетом того, что точка наблюдения принадлежит дальнему полю ($kr \to \infty$), становится понятным существование этой особенности.

Выше шла речь о теневом лепестке при росте волнового размера ka. Рассмотрим теперь, какой характер имеет рассеяние звука в направлении, противоположном направлению падающей волны, с увеличением ka. Как видим (рис. 8.6), в окрестности угла $\psi = 180°$ с ростом ka кривые, осциллируя, скапливаются вокруг единицы. Физически этот результат иллюстрирует понятную ситуацию: от идеального препятствия большого волнового размера коэффициент отражения в противоположном направлении равен единице.

Теперь определим полную мощность рассеянной волны, которая приходится на единицу длины цилиндра. Для этого проинтегрируем функцию (8.47) по поверхности цилиндра радиуса r и единичной высоты:

$$P_s = \int_0^{2\pi} I_s r d\psi = \frac{2I_0}{\pi kr} r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_m B_n B_m^* \int_0^{2\pi} \cos(n\psi)\cos(m\psi) d\psi.$$

Поскольку $\int_0^{2\pi} \cos(n\psi)\cos(m\psi)d\psi = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0, \end{cases}$ то $P_s = \dfrac{4I_0}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n |B_n|^2$.

Тогда полное сечение рассеяния цилиндра по определению (8.7) равно

$$\sigma_s = \frac{P_s}{I_0} = \frac{4}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n |B_n|^2, \tag{8.55}$$

или в безразмерном виде

$$\frac{\sigma_s}{2a} = \frac{2}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n |B_n|^2. \tag{8.56}$$

Полное сечение рассеяния цилиндра может быть как больше, так и меньше, чем геометрическое сечение $2a$ (определяем на единицу длины образующей цилиндра). Чтобы в этом убедиться, проведем анализ ситуации в случае, когда $ka >> 1$, и когда $ka << 1$.

Для волн, которые имеют большую длину волны ($ka << 1$), в случае жесткого цилиндра, используя (8.50), в ряде (8.56) можно удержать только два первых члена:

$$\sigma_s = \frac{4a}{ka}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\frac{\pi^2 (ka)^4}{16} = \frac{3\pi^2}{8}(ka)^3 \cdot 2a \ll 2a. \tag{8.57}$$

Таким образом, на низких частотах согласно (8.52) и (8.57) интенсивность рассеянной волны зависит от угла ψ по закону $(1 - 2\cos\psi)^2$, а

полное сечение рассеяния жесткого цилиндра значительно меньше, чем его диаметр.

Для мягкого цилиндра с малым волновым радиусом ($ka << 1$) ситуация иная. Действительно, согласно оценке (8.53) в этом случае в ряде (8.56) достаточно удерживать только первый член:

$$\sigma_s \approx \frac{4a}{ka}\frac{\pi^2}{4\ln^2(ka)} = \frac{\pi^2}{2ka\ln^2(ka)}2a \gg 2a \qquad (8.58)$$

(имеем предел $\lim\limits_{ka\to 0}(ka\ln^2 ka) = 0$). Итак, рассеянная волна для малого мягкого цилиндра ($ka << 1$) равномерно распределена по всем направлениями, и полное сечение рассеяния значительно больше геометрического сечения цилиндра.

Анализ асимптотического поведения коэффициентов B_n в формуле (8.56) при $ka >> 1$ показывает [31, с. 295—296], что на высоких частотах сечение рассеяния как для мягкого, так и для жесткого цилиндров, равно удвоенному геометрическому сечению, т.е. $\sigma = 4a$. Полученный результат соответствует общему анализу рассеяния плоской волны на выпуклых телах большого волнового размера (см. формулу (8.9)).

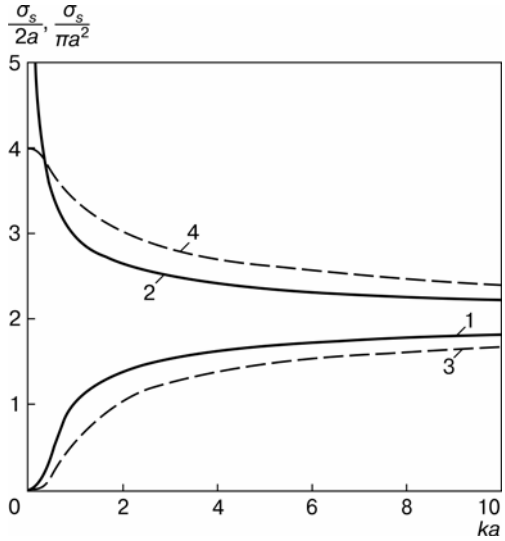


Рис. 8.7. Зависимость полного сечения рассеяния идеального цилиндра и идеальной сферы от волнового радиуса ka:

1 — жесткий цилиндр; *2* — мягкий цилиндр; *3* — жесткая сфера; *4* — мягкая сфера

На рис. 8.7 приведенные численные расчеты величины $\sigma_s/2a$ по точной формуле (8.56). Как видим, если $ka >> 1$, то для обоих цилиндров величина $\sigma_s/2a \to 2$; если $ka << 1$, то величина $\sigma_s/2a$ стремится к нулю для жесткого цилиндра и возрастает в случае мягкого цилиндра. Еще раз отметим, что это неограниченное увеличение величины σ_s при $ka \to 0$ связано с бесконечной длиной цилиндра. Для цилиндра конечной длины, такой нефизический результат, отсутствует.

8.7. Рассеяние плоской волны на идеальной сфере

Внесем в однородную среду, в которой распространяется плоская волна, тело сферической формы. Как следствие этого появляется рассеянная волна. Полное поле, образованное суперпозицией плоской и рассеянной волн, должно удовлетворять граничным условиям на поверхности сферы. Как мы уже знаем, задачу рассеяния звука можно свести к задаче излучения, которую сформулируем следующим образом: рассеянное поле создается вследствие некоторого распределения давления (в случае жесткой сферы) или нормальной скорости (мягкая сфера) на поверхности сферы. Это распределение является таким, что вместе с полем падающей плоской волны оно должно удовлетворять соответствующим граничным условиям.

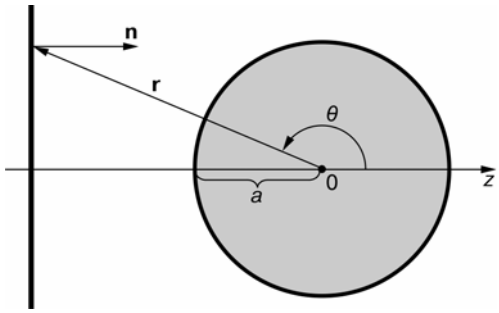


Рис. 8.8. Пример падающей плоской волны на сферу

Задачу следует решать в сферических координатах (r, θ, ψ). Не ограничивая общности решения, можно считать, что плоская волна p_0 распространяется вдоль положительного направления оси Oz (рис. 8.8). В такой ситуации поле рассеянной волны не зависит от угла ψ, что позволяет определить амплитуду давления рассеянного поля в виде (см. формулу (7.195)):

$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\theta) h_n^{(1)}(kr). \tag{8.59}$$

Давление падающей волны (рис. 8.8) запишем в виде

$$p_0 = \exp(ikr\cos\theta). \tag{8.60}$$

Тогда полное поле

$$p = p_0 + p_s = \exp(ikr\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\theta) h_n^{(1)}(kr). \tag{8.61}$$

Напомним, что $P_n(\theta)$, $n = 0,1,2,\ldots$ — это полиномы Лежандра, а $h_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+0,5}^{(1)}(kr)$ — сферические функции Ханкеля первого рода.

Чтобы иметь возможность, при тех или других граничных условиях, определить коэффициенты A_n в (8.61), нужно разложить плоскую волну в ряд по полиномами Лежандра $P_n(\theta)$. Итак, запишем

$$\exp(ikr\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(kr) P_n(\theta), \tag{8.62}$$

где $f_n(kr)$ — неизвестные функции. Как известно, полиномы Лежандра ортогональны на отрезке $\theta = [0, \pi]$. Поэтому для определения $f_n(kr)$ умножим обе части уравнения (8.62) на $P_m(\theta)$ и проинтегрируем по углу θ от 0 до π. Поскольку

$$\int_0^{\pi} P_m(\theta) P_n(\theta) \sin\theta d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n, \end{cases} \tag{8.63}$$

то $f_n(kr) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \exp(ikr\cos\theta) P_n(\theta) \sin\theta d\theta$. Согласно [49] имеем такое значение интеграла:

$$f_n(kr) = \frac{2n+1}{2} 2i^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) = (2n+1) i^n j_n(kr), \tag{8.64}$$

где $j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ — сферические функции Бесселя. Подставляя (8.64) в ряд (8.62), получаем

$$\exp(ikr\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n(\theta). \tag{8.65}$$

С учетом (8.65) выражение (8.61) для комплексной амплитуды давления полного поля будет иметь вид

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1) i^n j_n(kr) + A_n h_n^{(1)}(kr) \right] P_n(\theta). \qquad (8.66)$$

Коэффициенты A_n в (8.66) определяются из граничных условий. В случае мягкой сферы, на поверхности которой выполняется условие $p(r=a,\theta)=0$, находим равенства: $(2n+1)i^n j_n(ka) = -A_n h_n^{(1)}(ka)$, $n = 0,1,2,\ldots$, отсюда

$$A_n = -(2n+1) i^n \frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}. \qquad (8.67)$$

Аналогично для жесткой сферы, у которой граничное условие — $(\partial p/\partial r)_{r=a} = 0$, имеем следующий набор коэффициентов:

$$A_n = -(2n+1) i^n \frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)\prime}(ka)}, \qquad (8.68)$$

где вместо функций $j_n(kr)$ и $h_n^{(1)}(kr)$ присутствуют их первые производные, вычисленные при $r = a$.

Итак, подставляя (8.67) и (8.68) в (8.66), получаем такие выражения для полного поля вокруг мягкой и жесткой сфер:

$$p_{\text{м}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \left[j_n(kr) - \frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} h_n^{(1)}(kr) \right] P_n(\theta). \qquad (8.69)$$

$$p_{\text{ж}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \left[j_n(kr) - \frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)\prime}(ka)} h_n^{(1)}(kr) \right] P_n(\theta). \qquad (8.70)$$

Запишем также отдельно формулы для рассеянной волны:

$$p_s = -\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n C_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\theta), \qquad (8.71)$$

где коэффициенты C_n определяются соотношениями:
для мягкой сферы

$$C_n = \frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}, \qquad (8.72)$$

для жесткой сферы

$$C_n = \frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)\prime}(ka)}. \qquad (8.73)$$

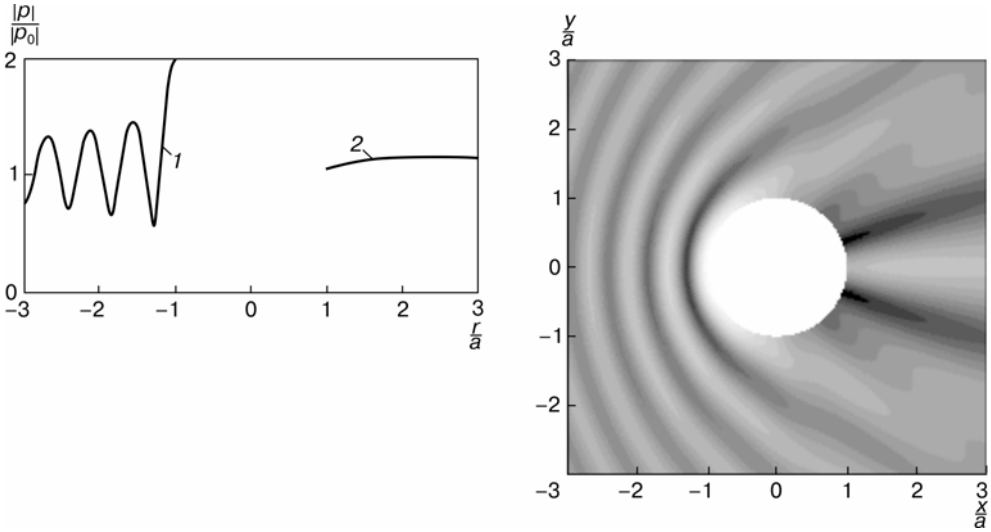


Рис. 8.9. Диаграммы распределения (справа), графики (слева) для нормированной амплитуды давления вблизи жесткой сферы, $a/\lambda = 0{,}9$:
1 — $\theta = 180°$; *2* — $\theta = 0°$

Используя эти формулы, можно, как это было сделано в случае с цилиндром, решать разные задачи, связанные с рассеянием звука на сфере. Например, на рис. 8.9 представлено распределение нормированной (относительно амплитуды падающей плоской волны) амплитуды давления вокруг идеально жесткой сферы. Интересно отметить, что если для цилиндра (рис. 8.5, *а*) в точке, противоположной направлению падения волны ($\psi = 0$) наблюдаем образование теневой зоны, то в аналогичной ситуации для сферы (рис. 8.9, $\theta = 0$) имеем давление, близкое по значению к давлению в падающей волне, т.е. тень “освещается”. Это так называемая *пятно Пуассона**. Такая особенность объясняется тем, что в области геометрической тени на полупрямой $\theta = 0$ сходятся, имея одинаковую фазу, дифракционные волны от всех точек экватора сферы, а в случае цилиндра — только от двух точек его профиля. Понятно, что в области геометрической тени для углов $\theta \neq 0$ такая синфазность нарушается. Наличие пятна Пуассона будет наблюдаться при рассеянии волны и на других телах, например, при осевом падении волны на диск.

Подробнее рассмотрим такую важную характеристику, как полное сечение рассеяния. Рекомендуем читателю самостоятельно (в полной аналогии с цилиндром) провести последовательность выкладок. Сначала, имея давление рассеянной волны (8.71), следует записать вы-

* Пуассон (Poisson) Симеон Дени (1781—1840) — французский механик, физик и математик.

ражение для колебательной скорости υ_{rs}. Далее, используя асимптотику сферической функции Ханкеля при $kr \to \infty$ (см. формулу (8.41)):

$$h_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) \xrightarrow[kr\to\infty]{} \frac{1}{kr}\exp\left(ikr - i(n+1)\frac{\pi}{2}\right), \qquad (8.74)$$

нужно записать выражения для давления p_s и скорости υ_{rs} в дальнем поле при $kr \to \infty$. Далее запишите выражение для интенсивности рассеянного поля на большом волновом расстоянии от сферы:

$$I_s = \frac{I_0}{(kr)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2n+1)(2m+1) C_n C_n^* P_n(\theta) P_m(\theta), \qquad (8.75)$$

где интенсивность плоской волны I_0 определяется формулой (8.46). Теперь можем определить сечение рассеяния:

$$\sigma_s = \frac{P_s}{I_0} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} I_s r^2 \sin\theta d\theta d\psi}{I_0}.$$

Используя свойство ортогональности полиномов Лежандра (8.63), получаем окончательный результат:

$$\sigma_s = \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)|C_n|^2, \qquad (8.76)$$

или в безразмерном виде:

$$\frac{\sigma_s}{\pi a^2} = \frac{4}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)|C_n|^2. \qquad (8.77)$$

Очень интересным является случай сферы малого волнового радиуса ($ka << 1$). Выполним преобразования в формуле (8.76) на основе асимптотических соотношений при $ka \to 0$ для функций $j_n(ka)$ и $h_n^{(1)}(ka)$ [49, 52]:

$$(ka)^{-n} j_n(ka) \approx \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad (8.78)$$

$$(ka)^{n+1} h_n^{(1)}(ka) \approx -i\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1), \qquad (8.79)$$

и формул для производной

$$h_n^{(1)\prime}(ka) \equiv \frac{dh_n^{(1)}(ka)}{d(ka)} = \frac{n}{ka} h_n^{(1)}(ka) - h_{n+1}^{(1)}(ka), \qquad (8.80)$$

$$2h_n^{(1)\prime}(ka) = h_{n-1}^{(1)}(ka) - h_{n+1}^{(1)}(ka). \tag{8.81}$$

Тогда для мягкой сферы коэффициенты ряда (8.76) имеют такие приближенные значения:

$$|C_0| = \left|\frac{j_0(ka)}{h_0^{(1)}(ka)}\right| \approx \frac{1}{1/ka} = ka,$$

$$|C_n| = \left|\frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}\right| \approx \frac{(ka)^{2n+1}}{2n+1} \ll |C_0|, \;\; n > 0. \tag{8.82}$$

Отсюда, для мягкой сферы при $(ka) << 1$ в ряде (8.76) можно оставить только первый член; тогда

$$\sigma_s = 4\pi a^2 \tag{8.83}$$

и, как и в случае малого мягкого цилиндра, имеем рассеяние монопольного типа. Но для сферы, как тела конечных размеров, величина σ_s не стремится к бесконечности, как это характерно для цилиндра бесконечной длины.

Рассмотрим теперь жесткую сферу при $(ka) << 1$. Соответствующие приближенные значения коэффициентов C_n имеют вид

$$|C_0| = \left|\frac{j_0'(ka)}{h_0^{(1)\prime}(ka)}\right| = \left|\frac{j_1(ka)}{h_1^{(1)}(ka)}\right| \approx \frac{(ka)^3}{3},$$

$$|C_1| = \left|\frac{j_1'(ka)}{h_1^{(1)\prime}(ka)}\right| = \left|\frac{\frac{1}{ka}j_1(ka) - j_2(ka)}{\frac{1}{ka}h_1^{(1)}(ka) - h_2^{(1)}(ka)}\right| \approx \left|\frac{\frac{ka}{3ka} - \frac{(ka)^2}{3\cdot 5}}{\frac{1}{ka\cdot(ka)^2} - \frac{3}{(ka)^3}}\right| \approx \frac{(ka)^3}{6}, \tag{8.84}$$

$$|C_n| = \left|\frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)\prime}(ka)}\right| = \left|\frac{j_{n-1}(ka) - j_{n+1}(ka)}{h_{n-1}^{(1)}(ka) - h_{n+1}^{(1)}(ka)}\right| \approx$$

$$\approx \left|\frac{j_{n-1}(ka)}{h_{n+1}^{(1)}(ka)}\right| \approx \frac{(ka)^{2n+1}}{(2n+1)!(2n-1)!} \ll C_0, C_1, \quad n > 1.$$

Как и в случае малого жесткого цилиндра, в ряде (8.76) нужно удержать два первых члена:

$$\sigma_s \approx \frac{4\pi a^2}{(ka)^2}\left(1 + \frac{3}{4}\right)\frac{(ka)^6}{9} = \frac{7}{9}\pi a^2 (ka)^4. \tag{8.85}$$

Это обуславливает, как и для малого жестокого цилиндра, диаграмму рассеяния подобную кардиоиде.

Как видим, полное сечение рассеяния малой мягкой сферы в четыре раза больше площади сечения сферы, тогда как сечение рассеяния малой жесткой сферы во много раз меньше ее геометрического сечения. Согласно (8.85) полное сечение рассеяния жесткой сферы пропорционально частоте в четвертой степени, что обусловливает усиление рассеяния в области высоких частот.

При рассеянии коротких волн ($ka >> 1$) как для мягкой, так и для жесткой сфер, полное сечение рассеяния

$$\sigma_s = 2\pi a^2. \tag{8.86}$$

Расчеты величины $\sigma_s / \pi a^2$ по точной формуле (8.77) приведены на рис. 8.7.

Отметим, что полное сечение рассеяния для мягкой сферы на низких частотах в два раза больше, чем на высоких частотах (формулы (8.83) и (8.86)). Это можно объяснить тем, что на низких частотах падающая звуковая волна возбуждает колебания, которые равномерно распределены на поверхности сферы таким образом, что на преобразование мощности плоской волны в мощность рассеянной волны используется площадь, равная площади поверхности сферы. На высоких частотах рассеянная мощность возникает вследствие неравномерного возбуждения сферической поверхности плоской волной. Поэтому рассеянная волна разделяется на две — отраженную и теневую волны; для каждой из них сечение рассеяния равняется поперечному сечению сферы.

8.8. Рассеяние плоской волны на звукопроницаемой сфере

Пусть в среду с параметрами ρ и c внесено сферическое препятствие радиусом a. Сфера наполнена средой с параметрами ρ_1 и c_1. Принимая во внимание опыт построения решения задачи рассеяния плоской волны на идеальной сфере, можно решить задачу рассеяния плоской волны на таком сферическом препятствии.

Поле плоской волны определяется по формуле (8.65), а рассеянное поле можно записать в виде (8.71). Выделение множителя $(2n + 1)i^n$ ничего не изменяет при решении задачи, ведь все будет откорректировано при определении коэффициентов C_n, но при этом мы имеем возможность, использовать формулу (8.76) для сечения рассеяния. Итак, звуковое поле в среде, окружающей сферу имеет вид

$$p = p_0 + p_s = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \left[j_n(kr) - C_n h_n^{(1)}(kr) \right] P_n(\theta). \tag{8.87}$$

В отличие от идеальной сферы в данном случае звук проникает вглубь сферического препятствия. Поле внутри сферы запишем так:

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n D_n j_n(k_1 r) P_n(\theta). \tag{8.88}$$

Снова отметим, что выделение множителя $(2n + 1)i^n$ осуществляется только ради унификации решения. Отметим, что $k = \omega/c$, $k_1 = \omega/c_1$. Поле p_1 строится только с учетом функции $j_n(k_1 r)$, сферические функции Неймана $y_n(k_1 r)$ во внимание не принимаются, поскольку при $r \to 0$ они стремятся к $-\infty$ (вспомните, подобная ситуация сложилась при изучении колебаний круговой мембраны).

На поверхности сферы должны выполняться условия сопряжения полей снаружи и внутри сферы:

$$p_0 + p_s = p_1, \quad r = a,$$

$$\frac{1}{i\omega\rho}\left(\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\partial p_s}{\partial r}\right) = \frac{1}{i\omega\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial r}, \quad r = a. \tag{8.89}$$

Подставив (8.87) и (8.88) в систему (8.89), получим следующие равенства:

$$j_n(ka) - C_n h_n^{(1)}(ka) = D_n j_n(k_1 a), \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{8.90}$$

$$\frac{1}{\rho c}\left[j_n'(ka) - C_n h_n^{(1)\prime}(ka)\right] = \frac{1}{\rho_1 c_1} D_n j_n'(k_1 a). \tag{8.91}$$

Поделив (8.90) на (8.91), запишем

$$\frac{j_n(ka) - C_n h_n^{(1)}(ka)}{j_n'(ka) - C_n h_n^{(1)\prime}(ka)} = \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\frac{j_n(k_1 a)}{j_n'(k_1 a)}.$$

Отсюда искомые коэффициенты C_n равны

$$C_n = \frac{1 - \dfrac{\rho_1 c_1}{\rho c}\dfrac{j_n(k_1 a)}{j_n'(k_1 a)}\dfrac{j_n'(ka)}{j_n(ka)}}{1 - \dfrac{\rho_1 c_1}{\rho c}\dfrac{j_n(k_1 a)}{j_n'(k_1 a)}\dfrac{h_n^{(1)\prime}(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}}\frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}. \tag{8.92}$$

Тогда коэффициенты D_n определяются из уравнения (8.90) или (8.91). Итак, решение найдено. Он дает возможность вычислить звуковое поле снаружи и внутри сферы.

Как пример, на рис. 8.10 показано распределение нормированной (к амплитуде падающей волны) амплитуды давления снаружи и внут-

ри сферы. Окружающей средой является вода ($\rho = 10^3$ кг/м^3, $c = 1{,}5 \cdot 10^3$ м/с), параметры сферы: $\rho_1 = 1{,}1 \cdot 10^3$ кг/м^3, $c_1 = 0{,}95 \cdot 10^3$ м/с, $a/\lambda = 0{,}9$ (λ — длина волны в среде). Графики иллюстрируют распределение амплитуды давления вдоль лучей $\theta = 180°$ ($z/a < 0$) и $\theta = 0$ ($z/a > 0$). На графике можно видеть достаточно резкий максимум давления, которое отвечает белому пятну на карте распределения амплитуды давления. Можно сказать, при выбранных параметрах мы имеем жидкую сферическую линзу.

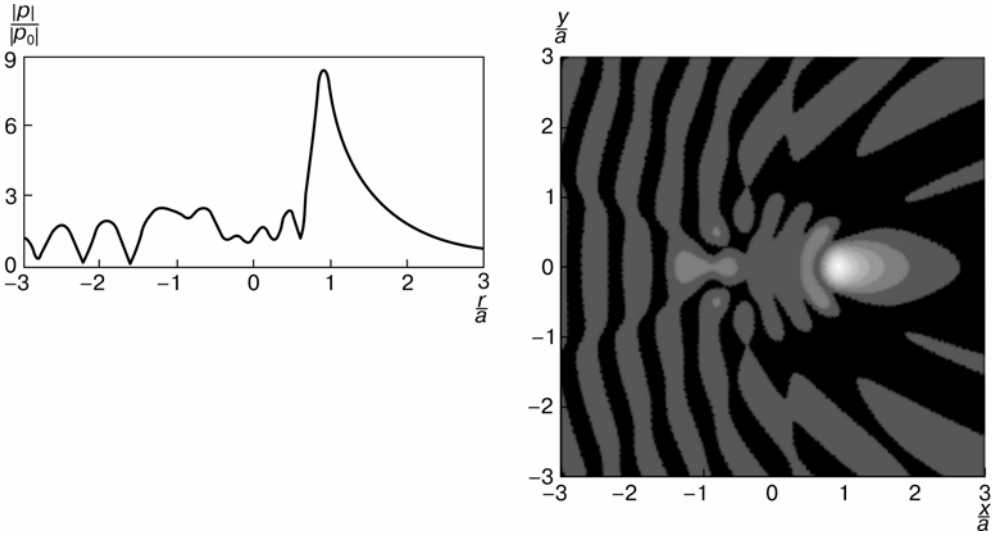


Рис. 8.10. Диаграммы распределения (справа) и графики (слева) для нормированной амплитуды давления снаружи сферы и внутри сферы:
$\rho = 10^3$ кг/м^3, $c = 1{,}5 \cdot 10^3$ м/с, $\rho_1 = 1{,}1 \cdot 10^3$ кг/м^3, $c_1 = 0{,}95 \cdot 10^3$ м/с, $a/\lambda = 0{,}9$

Рассмотрим интересный случай сферы малого волнового размера, т.е. $ka << 1$ и $k_1 a << 1$. Для этого согласно формулам (8.78)—(8.81) найдем асимптотику коэффициентов C_n при $ka << 1$ и $k_1 a << 1$. Пусть $n = 0$:

$$\frac{j_0(k_1 a)}{j_0'(k_1 a)} = -\frac{j_0(k_1 a)}{j_1(k_1 a)} \approx -\frac{3}{k_1 a}, \quad \frac{j_0'(ka)}{j_0(ka)} = -\frac{j_1(ka)}{j(ka)} = -\frac{ka}{3},$$

$$\frac{h_0^{(1)\prime}(ka)}{h_0^{(1)}(ka)} = -\frac{h_1^{(1)}(ka)}{h_0^{(1)}(ka)} = -\frac{1}{ka}, \quad \frac{j_0(ka)}{h_0^{(1)}(ka)} \approx \frac{1}{-i/(ka)} = ika,$$

тогда

$$C_0 = \frac{1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\frac{3}{k_1 a}\frac{ka}{3}}{1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\frac{3}{k_1 a}\frac{1}{ka}} ika = i\frac{1 - \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho c^2}}{1 - 3\frac{\rho_1 c_1}{\rho c}\frac{ka}{k_1 a}\frac{1}{(ka)^2}} ka = i\frac{1 - \frac{\chi_1}{\chi}}{(ka)^2 - 3\frac{\chi_1}{\chi}}(ka)^3, \quad (8.93)$$

где $\chi_1 = \rho_1 c_1^2$ — упругость вещества сферы, $\chi = \rho c^2$ — упругость среды вокруг сферы. Пусть $n = 1$:

$$\frac{j_1(k_1 a)}{j_1'(k_1 a)} = \frac{j_1(k_1 a)}{\frac{1}{k_1 a} j_1(k_1 a) - j_2(k_1 a)} = \frac{1}{\frac{1}{(k_1 a)} - \frac{(k_1 a)^2 \cdot 3}{3 \cdot 5 (k_1 a)}} \approx (k_1 a),$$

$$\frac{j_0'(ka)}{j_0(ka)} \approx \frac{1}{ka}, \quad \frac{h_1^{(1)\prime}(ka)}{h_1^{(1)}(ka)} = \frac{1}{ka} - \frac{h_2^{(1)}(ka)}{h_1^{(1)}(k_1 a)} = \frac{1}{ka} - \frac{3 \cdot (ka)^2}{(ka)^3 \cdot 1} = -\frac{2}{ka},$$

$$\frac{j_1(ka)}{h_1^{(1)}(ka)} = \frac{ka \cdot (ka)^2}{3 \cdot (-i)} = i\frac{(ka)^3}{3},$$

тогда

$$C_1 = \frac{1 - \frac{\rho_1 c_1}{pc} \cdot \frac{k_1 a}{ka}}{1 + \frac{\rho_1 c_1}{pc} \cdot k_1 a \cdot \frac{2}{ka}} i\frac{(ka)^3}{3} = i\frac{1 - \frac{\rho_1}{\rho}}{1 + 2\frac{\rho_1}{\rho}}\frac{(ka)^3}{3}. \quad (8.94)$$

Пусть $n > 1$, проводя аналогичные выкладки, нетрудно убедиться, что $\frac{j_n(k_1 a)}{j_n'(k_1 a)} \cdot \frac{j_n'(ka)}{j_n(ka)}$ и $\frac{j_n(k_1 a)}{j_n'(k_1 a)} \cdot \frac{h_n^{(1)\prime}(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}$ имеют величину порядка $\frac{k_1 a}{ka}$, тогда как отношение $\frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} \sim (ka)^{2n+1}$. Итак, именно это отношение будет определять порядок величины коэффициентов C_n. Действительно, если коэффициенты C_0 и C_1 имеют порядок $(ka)^3$, то C_2 уже имеет порядок $(ka)^5$.

Таким образом, в случае произвольного препятствия малого волнового размера в ряде (8.71) для рассеянной волны p_s достаточно оставить лишь первые два члена, т.е.

$$p_s = -\left(C_0 h_0^{(1)}(kr) + 3iC_1 h_1^{(1)}(kr)\cos\theta\right). \quad (8.95)$$

В дальнем поле, где $kr >> 1$, согласно асимптотическим формулам (8.74) выражение (8.95) будет иметь вид

$$p_s = \frac{i}{kr}\left[C_0 + 3C_1\cos\theta\right]\exp(ikr). \qquad (8.96)$$

Таким образом, произвольная сфера малого волнового размера создает одновременно и монопольное, и дипольное рассеяние. Другими составляющими рассеянного поля можно пренебрегать. Вообще приведенный результат действителен для малого препятствия произвольной формы.

Подставляя в (8.96) асимптотические формулы для коэффициентов C_0 и C_1 малой сферы, получаем следующую формулу для рассеянного поля:

$$p_s = -\frac{\exp(ikr)}{kr}\left[\frac{1-\chi_1/\chi}{(ka)^2 - 3\chi_1/\chi} + \frac{1-\rho_1/\rho}{1+2\rho_1/\rho}\cos\theta\right](ka)^3. \qquad (8.97)$$

Приняв во внимание, что обычно $(ka)^2 << 3\chi_1/\chi$,, (8.97) можно переписать в виде

$$p_s = \frac{\exp(ikr)}{kr}\left[\frac{1-\chi_1/\chi}{3\chi_1/\chi} - \frac{1-\rho_1/\rho}{1+2\rho_1/\rho}\cos\theta\right](ka)^3. \qquad (8.98)$$

Неравенство $(ka)^2 << 3\chi_1/\chi$ не выполняется только для сферы, которая подобна по своим свойствам мягкой сфере, у такой сферы значение упругости χ_1 очень мало. Формула (8.98) впервые была получена Релеем*.

Используя формулу (8.76) в случае рассеянного поля в виде (8.97) и (8.98), получаем следующие значения для полного сечения рассеяния:

$$\sigma_s = 4\pi a^2\left[\left(\frac{1-\chi_1/\chi}{(ka)^2 - 3\chi_1/\chi}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1-\rho_1/\rho}{1+2\rho_1/\rho}\right)^2\right](ka)^4, \qquad (8.99)$$

$$\sigma_s = 4\pi a^2\left[\left(\frac{1-\chi_1/\chi}{3\chi_1/\chi}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1-\rho_1/\rho}{1+2\rho_1/\rho}\right)^2\right](ka)^4. \qquad (8.100)$$

Итак, основными свойствами рассеяния звука малой сферой ($ka << 1$, $k_1 a << 1$; и вообще препятствиями малых волновых размеров) являются:

- наличие монопольной и дипольной составляющих в рассеянном поле; если препятствие отличается от среды только сжимаемостью

---

* Рэлей (Rayleigh) Стретт Джон Уильям (1842—1919) — английский физик, лауреат Нобелевской премии (1904).

($\rho_1 = \rho$), то имеем рассеяние монопольного типа, а если только плотностью ($\chi_1 = \chi$), то — дипольного типа;

• сечение рассеяния пропорционально частоте в четвертой степени, что обуславливает увеличение рассеивающей способности препятствия с ростом частоты. Такую особенность рассеяния звука на малых препятствиях называют *рэлеевским рассеянием* (в честь Рэлея, который открыл этот закон в 1898 г.).

Приведенные соотношения позволяют записать полученные прежде формулы для полного сечения рассеяния жесткой и мягкой сфер. Действительно, в случае малой жесткой неподвижной сферы имеем $\chi_1 / \chi \to \infty$ и $\rho_1 / \rho \to \infty$; поэтому из формулы (8.100) получаем значение σ_s, которое согласуется с (8.85):

$$\sigma_s = 4\pi a^2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) (ka)^4 = \frac{7}{9} \pi a^2 (ka)^4; \qquad (8.101)$$

в случае малой мягкой сферы имеем $\chi_1 / \chi \to 0$ и $\rho_1 / \rho \to 0$, поэтому из формулы (8.99) получаем значение σ_s, которое совпадает с (8.83):

$$\sigma_s = 4\pi a^2 \left(\frac{1}{(ka)^4} + \frac{1}{3} \right) (ka)^4 \approx 4\pi a^2. \qquad (8.102)$$

Подставляя в формулу (8.96) асимптотические значения коэффициентов C_0 и C_1 при $ka << 1$, нетрудно убедиться, что малая мягкая сфера имеет ненаправленное рассеяние (монопольный тип), а малая жесткая неподвижная сфера создает направленное рассеянное поле, которое определяется соотношением:

$$|p_s| \sim \left| 1 - \frac{3}{2} \cos\theta \right|. \qquad (8.103)$$

В завершение приведем следующие соображения относительно частотной зависимости сечения рассеяния в формулах (8.99) и (8.100), из которых следует, что с ростом частоты имеет место существенное увеличение рассеивающей способности малой сферы. Релей в 1898 г. в своей фундаментальной работе [50, т. 2, с.153] писал: “Если первичный звук является сложной музыкальной нотой, то разные ее составляющие тона рассеиваются в неодинаковой пропорции. Октава, например, в шестнадцать раз сильнее по сравнению с основным тоном во вторичном звуке, чем это было в первичном. Нетрудно, таким образом, понять, каким образом эхо, отраженное от такого препятствия, как группа деревьев, может стать повышенным на октаву”. (Под октавой понимается тон с частотой в два раза большей, чем частота основного тона.)

Подобное явление наблюдается и при рассеянии света на малых флюктуациях плотности воздуха. Характерный размер неоднородности плотности зависит от температуры. Для слоев атмосферы, где происходит рассеяние света, размеры таких неоднородностей оказываются намного меньше длины волны света, который мы можем видеть, но значительно больше размера молекул газов, которые входят в состав воздуха. Поэтому рассеяние возникает именно на флуктуациях плотности, а не на молекулах, как это предполагал Рэлей.

Отношение длины волны красного к длине волны синего света приблизительно составляет 1,44. Возводя это число в четвертую степень, получаем приблизительно 4,3. Таким образом, согласно закону Рэлея интенсивность синего света, рассеянного в атмосфере, в четыре раза превышает интенсивность красного света. И потому в слое воздуха высотой в десятки километров в значительной мере доминируют синий и голубой цвета.

Мы видим небо синим, а не фиолетовым, хотя закон Релея прогнозирует доминирование фиолетового цвета. Это расхождение обусловлено двумя причинами. Первая, в спектре солнечного света фиолетовых лучей значительно меньше, чем синих. Вторая, чувствительность глаза человека зависит от длины волны света; на фиолетовые лучи глаз реагирует значительно слабее, чем на сине-зеленые.

Солнечный свет, который проходит сквозь слой атмосферы, оказывается обедненным на коротковолновую часть своего спектра. Поэтому солнце, которое мы видим в прошедших сквозь атмосферу лучах, приобретает слабый желтый оттенок. Этот оттенок усиливается, он становится оранжевым и красным с закатом солнца, когда солнечным лучам необходимо пройти больший путь в атмосфере.

Возникает вопрос, почему на голубом небе мы видим белые тучи. Дело в том, что белые тучи состоят из маленьких капель воды или кристалликов льда, размеры которых значительно больше длины волн света, который мы можем видеть. Поэтому при рассеянии солнечного света на частицах, которые образуют тучи, закон Релея не выполняется. Рассеяние света всех длин волн в этом случае происходит приблизительно с одинаковой интенсивностью, и тучи воспринимаются белыми.

Предлагаем читателям провести такой опыт [24, с. 339]. Налейте в стеклянную посуду воду и направьте на сосуд сбоку луч света от карманного фонаря. Посмотрите на свет, который рассеян под углом 90°, и на фонарь сквозь сосуд с водой. Прибавьте к воде несколько капель молока и перемешайте. Продолжайте смотреть, постепенно добавляя молоко. Обратите внимание на голубой оттенок рассеянного света и на желтоватый или красный оттенок у света, который прошел сквозь сосуд. Объясните это явление. Если добавить еще молоко, то го-

лубой оттенок рассеянного света исчезнет. Рассеянный свет будет почти белым, а воображаемый “закат” будет становиться все более красным. Объясните это. В конце концов, вода в сосуде станет настолько мутной, что мы не сможем видеть сквозь ее толщу лампочку фонаря; рассеянный свет станет белым, и мы не будем видеть луч света. “Воздух” превратится в “белую тучу”.

Рассеяние света и звука, в сущности, происходит по одинаковым законам. Хотя то, что длина световой волны в видимом диапазоне частот имеет порядок $5 \cdot 10^{-5}$ см, обуславливает значительную разницу в рассеянии света и звука в воде. В отличие от воздуха, где флуктуации концентраций молекул не только возможны, а и постоянно возникают благодаря тепловому движению молекул, молекулы воды “касаются” и потому размещены в среде довольно равномерно. Рассеяние волн происходит на маленьких твердых частицах, которые находятся в естественной водной среде. Обычно эти частицы значительно превышают по размерам длину световой волны, поэтому почти для всех твердых частиц в море сечение рассеяния для света определяется их геометрическим сечением (формула (8.86)). Те самые частицы оказываются значительно меньшими, чем длина звуковой волны в море (обычно 1см и больше), и потому звук на них испытает рэлеевское рассеяние (формула (8.99)). Этим объясняется тот факт, что для света морская вода мутная, а для звука прозрачная.

8.9. Рассеяние звука газовым пузырьком в жидкости

Рассмотрим рассеяние на препятствиях, которые, несмотря на малые размеры по сравнению с длиной звуковой волны ($ka << 1$), при соответствующих частотах звуковой волны имеют высокую эффективность рассеяния. Еще раз подчеркнем, что речь идет именно о малом препятствии. Природа этого аномального рассеяния связана с резонансными явлениями. Интересным и важным для практики примером такого препятствия является газовый пузырек в жидкости. Пузырек - препятствие, которое имеет значительно меньшие значения плотности и упругости, чем жидкость, которая ее окружает.

В начале приведем следующие физические соображения. Анализируя колебания пузырька, следует отметить, что в колебаниях участвует не только газо-паровая смесь, заполняющая объем пузырька, но и часть жидкости, которая окружает пузырек и движется с ним практически синфазно. Эта жидкость образует присоединенную массу. Газо-паровая смесь и поверхностное натяжение образуют упругость системы, а потери энергии на излучение и на теплообмен с ок-

ружающей средой эквивалентны присутствию трения в системе. Поэтому, с точки зрения теории механических колебаний, пузырек эквивалентен массе на пружине при наличии трения, т. е. закономерности колебаний для этих двух случаев одинаковы. Известно, что в такой колебательной системе имеет место резонанс. Амплитуда колебаний пузырька будет максимальной на той частоте падающей гармонической волны, которая совпадает с частотой резонанса. На этой частоте компенсирующее движение будет наибольшим и также наибольшим будет рассеяние.

Теперь перейдем к количественным соотношениям. Пусть на газовый пузырек радиусом a, который находится в жидкости с плотностью ρ и со скоростью звука c, падает плоская гармоническая волна с частотой ω (рис. 8.8). Частота звука такая, что выполняется условие $ka << 1$. Будем считать, пренебрегая при этом вязкостью и теплопроводностью, что газ внутри пузырька описывается линеаризованным адиабатическим уравнением состояния (4.16):

$$p_{\text{п}} = c_{\text{п}}^2 \rho_{\text{п}}, \tag{8.104}$$

где $p_{\text{п}}$ — звуковое давление; $\rho_{\text{п}}$ — переменная плотность; $c_{\text{п}}$ — скорость звука для газа, который заполняет пузырек.

Выразим давление $p_{\text{п}}$ через колебательную скорость $\upsilon_{\text{п}}$ нормальных смещений поверхности пузырька. Поскольку

$$\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{п}0}} = -\frac{dV}{V}, \quad \text{то} \quad \rho_{\text{п}} = -\rho_{\text{п}0}\frac{dV}{V}, \tag{8.105}$$

где $\rho_{\text{п}0}$ — средняя плотность газа; V — объем пузырька; dV — изменение объема, которое соответствует $\rho_{\text{п}}$. Перепишем (8.105), учитывая формулы для объема сферы $V = 4\pi a^3/3$ и, соответственно, $dV = 4\pi a^2 da$:

$$\rho_{\text{п}} = -3\rho_{\text{п}0}\frac{da}{a}. \tag{8.106}$$

Подставив (8.106) в (8.104) и продифференцировав это уравнение по времени, с учетом того, что $dp_{\text{п}}/dt = -i\omega p_{\text{п}}$, а $da/dt = \upsilon_{\text{п}}$ является колебательной скоростью нормальных смещений поверхности пузырька, получим искомое соотношение:

$$p_{\text{п}} = -i\frac{3\rho_{\text{п}0}c_{\text{п}}^2}{\omega a}\upsilon_{\text{п}} = -i\frac{3\chi_{\text{п}}}{\omega a}\upsilon_{\text{п}}, \tag{8.107}$$

где $\chi_{\text{п}} = \rho_{\text{п}0}c_{\text{п}}^2$ — упругость газа в пузырьке.

Поле рассеянной пузырьком волны p_s запишем в виде ряда (7.195):

$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty} C_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\theta). \tag{8.108}$$

При $ka << 1$ можно ограничиться первым слагаемым, которое соответствует значению $n = 0$. Тогда, принимая во внимание значение $P_0(\theta) = 1$ и асимптотику (при $kr >> 1$) функции $h_0^{(1)}(kr) = -i\dfrac{\exp(ikr)}{kr}$, рассеянное поле представим в виде

$$p_s = -iC_0 \frac{\exp(ikr)}{kr}, \tag{8.109}$$

где C_0 соответствует монопольному рассеянию. Точнее, записывая p_s, следовало бы прибавить еще член, который отвечает $n = 1$ и описывает дипольное рассеяние, зависящее от угла по закону $P_1(\theta) = \cos\theta$. Как уже отмечалось, для произвольного препятствия при $ka << 1$ вклады волн с $n = 0$ и $n = 1$, которые определяют дальнее поле рассеянной волны, вообще, близки по величине. Но в случае рассеяния на пузырьке, как практически безмассовом препятствии с высокой сжимаемостью, монопольное рассеяние оказывается значительно более сильным, чем дипольное [20, с. 363].

На поверхности пузырька давление и радиальная составляющая скорости должны быть непрерывными, т.е.

$$p_0 + p_s = p_п, \quad r = a, \tag{8.110}$$

$$\frac{1}{i\omega\rho}\left(\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\partial p_s}{\partial r}\right) = \upsilon_п, \quad r = a. \tag{8.111}$$

Поскольку размер пузырька полагается малым по сравнению с длиной волны, то давление падающей волны на поверхности пузырька можно считать одинаковым на всей поверхности пузырька. При таком допущении величиной радиальной составляющей скорости в падающей волне υ_{r0}, которая пропорциональна $\partial p_0/\partial r$, в условии (8.111) можно пренебрегать. Тогда, учитывая, что амплитуда давления в падающей плоской волне равна единице, а также формулы (8.107) и (8.109), представим систему (8.110), (8.111) следующим образом:

$$\begin{gathered} 1 - iC_0 \frac{\exp(ika)}{ka} = -i\frac{3\rho_{п0}c_п^2}{\omega a}\upsilon_{п0}, \\ \frac{1}{\omega\rho k} C_0 \frac{1 - ika}{a^2}\exp(ika) = \upsilon_{п0}, \end{gathered} \tag{8.112}$$

где $\upsilon_{п0}$ — амплитуда колебательной скорости поверхности пузырька. Разложим exp(ika) в ряд Тейлора по степеням ka и, приняв во внимание, что $ka << 1$, оставим в ряде только первые два члена:

$$\exp(ika) = 1 + ika\,. \tag{8.113}$$

Подставляя (8.113) в систему (8.112) и пренебрегая членами $(ka)^2$ по сравнению с единицей, получаем формулу для коэффициента C_0, который определяет амплитуду рассеянной волны:

$$C_0 = \frac{ika}{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right) - ika}, \tag{8.114}$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\rho_{п0}c_п^2}{\rho a^2}} = \sqrt{\frac{3\chi_п}{\rho a^2}}, \quad \chi_п = \rho_{п0}c_п{}^2. \tag{8.115}$$

По своей структуре формула (8.115) подобна выражению (2.45) для амплитуды колебаний в системе с одной степенью свободы под действием гармонической силы.

Как видим, амплитуда рассеянной волны имеет резонансный характер. Она принимает максимальное значение при $\omega = \omega_0$; таким образом, ω_0 — *собственная частота пузырька*. При этом величина $Q = 1/(ka)$ определяет добротность пузырька как осциллятора и характеризует затухание его колебаний, обусловленное излучением акустических волн вследствие пульсаций пузырька — это хорошо нам известное радиационное демпфирование.

Формула для резонансной частоты (8.115) имеет простое физическое содержание, поскольку пульсирующий пузырек можно представить как систему с эквивалентной упругостью $\chi_э$ и эквивалентной массой $m_э$. Действительно, если помножить числитель и знаменатель в формуле (8.115) на $4\pi a$, то нетрудно убедиться, что эквивалентная масса

$$m_э = 4\pi a^3\rho = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)\rho \tag{8.116}$$

равняется утроенной массе жидкости в объеме, который вытеснил пузырек.

Эквивалентную упругость определим как отношение общей сжимающей силы $4\pi a^2 p_п$, действующей на пузырек, к абсолютной вели-

чине изменения радиуса сферы $|\delta a|$. Убедимся в том, что эквивалентная упругость при этом представляет величину

$$\chi_э = 4\pi a \cdot 3\chi_п = 4\pi a \cdot 3\rho_{п0} c_п^2 . \qquad (8.117)$$

Действительно, помножив уравнение состояния (см. формулу (4.18)) $p_п = \chi_п \frac{|\delta V|}{V} = \chi_п 3 \frac{|\delta a|}{a}$, на $4\pi a^2$ (здесь $V = 4\pi a^3/3$), получим $4\pi a^2 p_п = (4\pi a \cdot 3\chi_п)|\delta a|$.

Таким образом, формулу (8.115) с учетом (8.116) и (8.117) можно записать в виде классического выражения для резонансной частоты механического осциллятора:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\chi_э}{m_э}} . \qquad (8.118)$$

Итак, резонансные свойства пузырька под действием звуковых волн в диапазоне частот, где $ka << 1$, определяются упругостью газа, который заполняет пузырек, и присоединенной массой, которая равняется утроенной массе жидкости в объеме, вытесненном пузырьком. Согласно формулам (8.116)—(8.118) для воздушного пузырька в воде (возле поверхности воды), имеем следующее соотношение для резонансного радиуса пузырька: $ap \approx 3{,}3/f_0$, м, $f_0 = \omega_0/(2\pi)$. Например, для частоты 1 кГц длина волны в воде составляет 1,5 м, резонансный радиус пузырька — 0,33 см; для частоты 50 кГц длина волны в воде — 3 см, а резонансный радиус воздушного пузырька — всего 0,006 см.

Определим сечение рассеяния пузырька при разных соотношениях между частотой падающей волны ω и резонансной частотой пузырька ω_0. В этом случае формула (8.76) для полного сечения рассеяния будет иметь вид

$$\sigma_s = \frac{4\pi |C_0|^2}{k^2} . \qquad (8.119)$$

Рассмотрим случай $\omega << \omega_0$. Согласно (8.114) $C_0 \approx ika\omega^2/\omega_0^2$ и полное сечение рассеяния равно $\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2}\left(\frac{ka\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2$. Учитывая формулу (8.115) для ω_0, получаем следующее выражение для полного сечения рассеяния

$$\sigma_s = \frac{4}{9}\pi a^2 (ka)^4 \left(\frac{\chi}{\chi_п}\right)^2 , \qquad (8.120)$$

где $\chi = \rho c^2$ — упругость жидкости. Поскольку $\chi \gg \chi_п$, то величина σ_s, вычисленная по формуле (8.120) будет значительно больше, чем соответствующее сечение рассеяния для жесткой сферы $\sigma_s = \frac{7}{9}\pi a^2 (ka)^4$.

Отметим, что сама возможность сопоставления сечения рассеяния пузырька при $\omega << \omega_0$ с сечением рассеяния для идеально жесткой сферы обусловлена тем, что в данном случае поведение пузырька определяется упругостью, а влияние присоединенной массы относительно мало. С другой стороны, идеально жесткие тела можно рассматривать как тела с бесконечно большой упругостью, т.е. с бесконечно малой сжимаемостью.

Рассмотрим теперь случай $\omega >> \omega_0$ (естественно при $ka << 1$). Здесь $C_0 \approx -ika$ и, соответственно

$$\sigma_s = 4\pi a^2 . \tag{8.121}$$

Это значение σ_s совпадает с сечением рассеяния идеально мягкой сферы $\sigma_s = 4\pi a^2$. Поведение пузырька при этом определяется присоединенной массой.

Перейдем к резонансной области, где $\omega = \omega_0$, здесь $C_0 = -1$, а для сечения рассеяния получим выражение

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} = \frac{\lambda^2}{\pi} = \frac{4\pi a^2}{(ka)^2}, \tag{8.122}$$

что равняется площади круга радиусом λ/π. Это сечение в $4/(ka)^2$ больше, чем геометрическое сечение πa^2 пузырька и в $36(ka)^{-6}/7$ больше, чем сечение рассеяния идеально жесткой сферы.

Приведенные расчеты показывают, что наличие даже небольшого количества резонансных пузырьков на пути звуковой волны в среде должно приводить к значительному рассеянию звука. Отметим, что если частота падающей волны отличается от резонансной частоты пузырька, эффективность пузырька как рассеивателя резко уменьшается.

Если в воде (например, в море) есть пузырьки разных размеров, то рассеяние на данной частоте ω практически полностью определяется пузырьками “резонансного размера”. Пузырьки в море наблюдаются возле поверхности воды, куда они попадают в результате ее движения и на глубине моря (глубоководные рассеивающие слои), где они выделяются микроорганизмами. Другим примером являются плавательные пузыри рыб, которые тоже ведут себя как пузырьки в воде. Можно, изменяя частоту зондирующего сигнала, обнаруживать по максимуму рассеянного сигнала именно те виды рыб, плавательные

пузыри которых резонируют на частоте зондирующего сигнала [20, с. 367].

Нужно иметь в виду, что приведенное нами рассеяние резонансными пузырьками преувеличено. Дело в том, что мы пренебрегали влиянием диссипативных потерь энергии на вязкость и теплопроводность, которые присутствуют в реальной среде. Эти факторы в случае резонансных пузырьков очень существенны вследствие сильной концентрации энергии звукового поля вокруг пузырька. Вязкость и другие факторы потерь механической энергии приводят к появлению соответствующего мнимого слагаемого в знаменателе выражения (8.114) для амплитуды C_0. Это слагаемое, как и слагаемое $-ika$, которое отвечает за излучение, играет существенную роль вблизи резонансных частот, т.е. именно при условии сильного рассеяния. Таким образом, на практике рассеяние резонансными пузырьками является значительным, но не настолько, как в теории, которая не учитывает потерь механической энергии.

Итак, резонансные пузырьки не только рассеивают, но и поглощают энергию падающей звуковой волны, и вследствие большой амплитуды колебаний делают это достаточно эффективно. Такого поглощения, например, достаточно чтобы звук чоканья бокалов, в которых налито шампанское или газированная вода, не был звонким. В этом случае именно пузырьки оказываются поглотителями звука, ведь если бы не существовало поглощения, а только одно рассеяние, то акустическая энергия оставалась бы в бокале, и его звон не ослабевал [20, с. 367].

8.10. Задачи

8.1. Определите сечение рассеяния капли тумана радиусом 20 мкм для волны частотой 300 Гц, которая распространяется в воздухе.

Ответ: волновой радиус капли $ka << 1$. Поэтому согласно формуле (8.17) сечение рассеяния $\sigma \approx 10^{-25}$ м^2. В тот же время при рассеянии света на капле имеем $\sigma \approx 2\pi a^2 \approx 10^{-9}$ м^2. Это объясняет хорошую акустическую прозрачность густого тумана.

8.2. Оцените резонансный радиус воздушного пузырька, который находится в воде вблизи ее поверхности, для частоты 100 кГц.

Ответ: согласно оценочной формуле $af_0 \approx 3{,}3$ Гц/м определяем искомый радиус: $a \approx 33$ мкм.

8.3. Сравните полные сечения рассеяния песчинки ($E_1 = 5 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\rho_1 = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3), воздушного пузырька ($c_1 = 330$ м/с, $\rho_1 = 1$ кг/м^3) и малого жесткого тела. Препятствия находятся в воде

($c = 1{,}5 \cdot 10^3$ м/с, $\rho = 10^3$ кг/м^3); радиус всех препятствий одинаковый и составляет $a = 10$ мкм, причем $ka << 1$.

Ответ: отношения сечения рассеяния воздушного пузырька и жесткого тела к сечению рассеяния песчинки равняется приблизительно $4 \cdot 10^8$ и 1,6, соответственно.

8.4. Согласно условию задачи 8.3, постройте график зависимости характеристики направленности для песчинки, воздушного пузырька и жесткой сферы.

8.5. Определите сечение рассеяния криля на частоте 30 кГц, если отношение плотности его тела и воды составляет $\rho_1/\rho = 1{,}03$, а соответствующее отношение упругостей — $\chi_1/\chi = 0{,}93$. Эквивалентный радиус равняется 6 мм. (Эквивалентный радиус - это радиус сферы, объем которой равен объему криля.)

Ответ: $\sigma_s/(\pi a^2) \approx 8{,}5 \cdot 10^{-4}$.

8.6. Определите сечение рассеяния энфаузииды тихоокеанской (крилеподобний организм) на частоте 12 и 30 кГц. Радиус эквивалентной сферы равен 4,15 мм, $\rho_1/\rho = 1{,}03$; $\chi_1/\chi = 1{,}15$.

Ответ: $\sigma_s/(\pi a^2) \approx 1{,}5 \cdot 10^{-4}$; $5{,}7 \cdot 10^{-4}$.

8.7. В слое воды возле поверхности моря широкополосный звуковой сигнал рассеивается в основном на частоте 5 кГц. Считая, что основной рассеиватель — это наполненный воздухом плавательный пузырь рыбы, определите его радиус.

Ответ: ~ 0,66 мм.

8.8. Ультразвуковой локатор дельфина на частоте 80 кГц создает мощность излучения $P = 0{,}1$ Вт. Коэффициент осевой концентрации равен $\Omega = 50$. Определите расстояние L, на котором дельфин сможет определить твердый металлический шарик радиусом 0,5 см, если амплитуда сигнала от шарика должна быть не меньше, чем 0,002 Па.

Ответ: приблизительно 60 м.

РАЗДЕЛ 9

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ И РАССЕЯНИИ ЗВУКА

Решение, соответствующее дельта-функции, столь важно, что оно имеет специальное название — *функция Грина*. Забавно то, что английский математик Грин, именем которого названа функция, жил в XIX в. и, естественно, не знал о дельта-функции. Но только введение дельта-функции позволило ясно и кратко объяснить суть функции Грина [*, с. 461—462].

9.1. Канонические и неканонические области существования звукового поля

Анализ многих акустических ситуаций возможно осуществить в рамках модели, позволяющей найти решение уравнения Гельмгольца при определенных граничных условиях на телах, расположенных в среде. Для самого уравнения Гельмгольца методом разделения переменных построены частные решения в разных системах координат. В данной книге используются декартовая, цилиндрическая и сферическая системы координат. Вспомним, что поле излучения сферы можно представить в виде $p(r,\theta,\psi) = R(r)\Theta(\theta)\Psi(\psi)$. Области существования звукового поля, которые позволяют непосредственно применить метод разделения переменных, называют *каноническими* (от греческого слова $\kappa\alpha\nu\omega\nu$ — палка, в переносном смысле — правило, норма). Для этих областей форма излучающего или рассеивающего тела совпадает с координатной поверхностью соответствующей системы координат. Такие тела называют *каноническими* — это, например, сфера в сферической системе координат, бесконечный цилиндр в цилиндрической системе координат. Как уже отмечалось (см. вступление в параграф 7.12), существует 11 систем, для которых поиск частного решения уравнения Гельмгольца можно выполнить методом разделения переменных, но не все они хорошо исследованы математиками и имеют эффективные алгоритмы расчета. Однако частные

* Зельдович Я.Б., Яглом И.М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. — М.: Наука, 1982. — 510 с.

решения, которые появляются при использовании указанных выше трех систем координат, хорошо изучены и широко применяются в практических расчетах.

Для решения акустических задач, сформулированных для канонических областей, реализуется единый подход, который широко используется во многих задачах математической физики. Его суть состоит в том, что для области существования звукового поля, на основе выбора соответствующих частных решений уравнения Гельмгольца, строится такая их совокупность, которая является достаточно произвольной для того, чтобы удовлетворить заданные граничные условия для давления или колебательной скорости на поверхности, ограничивающей область существования звукового поля. Например, вспомним задачу рассеяния звука на сфере или цилиндре. Здесь рассеянное поле записали в виде бесконечного ряда по соответствующим частным решениям с произвольными коэффициентами. Именно выбор этих коэффициентов и позволил удовлетворить граничные условия на поверхности тел рассеяния (сфера или цилиндр). Однако круг задач, для которых применим такой подход, довольно ограничен.

Понятно, что примеров неканонических областей можно привести множество. Поэтому с задачами излучения и рассеяние звука в неканонических областях исследователь встречается буквально на каждом шагу. Приняв во внимание актуальность таких задач, рассмотрим в девятом и десятом разделах методы, которые позволят эффективно исследовать звуковые поля в сложных (неканонических) областях.

В начале этого раздела изложим основные сведения о *дельте-функции Дирака*, которая широко применяется при математическом исследовании разных физических явлений.

9.2. Дельта-функция Дирака

Исследуя задачи квантовой механики, Дирак* в 1929 г. ввел новую функцию, которую обозначил $\delta(x)$ (читается: *дельта-функция* или *дельта-функция Дирака*). Эта функция определяется такими соотношениями [52, 60]:

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1. \tag{9.1}$$

Оказалось, что с помощью дельта-функции можно сформулировать на математическом языке такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, мгновенный импульс, плотность точечного заряда и т.п. В первом разделе отмечалось, что при по-

* Дирак (Dirac) Поль Адриен Морис (1902—1984) — английский физик, лауреат Нобелевской премии (1933).

строении математических моделей физических явлений приходится использовать разные математические абстракции, такие, как точка, линия, плоскость. Например, мы говорим о массе, которая сосредоточена в данной точке пространства, о силе, которая действует в данный момент времени, о точечном источнике того или иного физического поля и т.п., хотя понимаем, что любая масса имеет определенный объем, любая сила действует определенный промежуток времени, а любой источник поля имеет определенные размеры.

Чтобы лучше понять суть вопроса, предположим, что на тело в течение определенного промежутка времени 2ε действует постоянная сила, которую обозначим как $\delta_\varepsilon(t)$ (рис. 9.1).

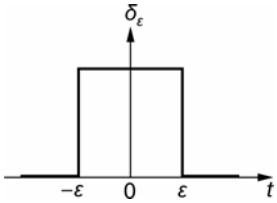


Рис. 9.1. График функции $\delta_\varepsilon(t)$

Пусть за это время тело получает импульс, равный единице, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)dt = 1. \tag{9.2}$$

Поскольку сила $\delta_\varepsilon(t)$ равна нулю вне промежутка времени $[-\varepsilon, \varepsilon]$, а на этом отрезке постоянная, то $2\varepsilon\delta(t) = 1$, откуда

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & -\varepsilon \le t \le \varepsilon, \\ 0, & t < -\varepsilon \text{ и } t > \varepsilon. \end{cases} \tag{9.3}$$

Если теперь устремить ε к нулю, то будем рассматривать силу, которая действует на очень малом промежутке времени. При этом амплитуда силы будет стремиться к бесконечности. В пределе $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$ получим функцию, которая равняется нулю всюду, кроме точки $t = 0$, а в точке $t = 0$ она равняется бесконечности, т.е. приходим к соотношениям (9.1), которые определяют дельту-функцию.

Понятно, что дельта-функция не является функцией в обычном понимании. Ведь равенство нулю функции во всех точках, кроме одной, где она равняется бесконечности, и одновременно равенство интеграла от этой функции единице противоречат одно другому в рамках математики, которую можно назвать классической. Тем не менее,

Дирак и другие физики на протяжении многих лет свободно и продуктивно использовали дельта-функции, не определяя строго эти странные математические объекты. Со временем математическую теорию необычных функций, подобных функции $\delta(x)$, которые сегодня называют *обобщенными функциями*, построили Соболев* и Шварц**.Отметим, что дельта-функция Дирака представляет собой яркий пример математической интуиции физика, которая опередила уровень математики в свое время.

Возвращаясь к примеру на рис. 9.1, естественно привести такое физическое утверждение: количество движения, приданное телу мгновенной силой $\delta(t)$, т.е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$, является пределом количества движения, которое получает тело вследствие действия распределенной во времени силы $\delta_\varepsilon(t)$, когда время ее действия стремится к нулю, т.е., когда $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)dt = 1. \qquad (9.4)$$

Таким образом, когда говорят, что интеграл (9.1) от дельта-функции равен единице, то этот интеграл следует понимать как предел соответствующих обычных интегралов от $\delta_\varepsilon(t)$-функций при $\varepsilon \to +0$.

Обобщим формулу (9.4). Пусть $\varphi(x)$ — некоторая непрерывная функция, тогда выполняется соотношение [52, 60]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\varphi(x)dx = \varphi(0). \qquad (9.5)$$

Формула (9.5) означает, что пределом последовательности указанных интегралов есть *функционал* (а не функция!), который ставит в соответствие каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ число $\varphi(0)$ — ее значение в точке $x = 0$. *Этот функционал и есть известная дельта-функция Дирака.* В математической литературе значения функционала δ на функции φ, т.е. число $\varphi(0)$, обозначают таким образом:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0). \qquad (9.6)$$

Роль выражения $\int \delta(x)\varphi(x)dx$ выполняет (δ, φ) — значение функционала δ на функции φ. Например, если функция $\varphi(x) \equiv 1$, то $(\delta, 1) = 1$.

Подытоживая рассуждения относительно введения дельта-функции, подчеркиваем особенность ее использования в физических

---

* Соболев Сергей Львович (1908—1989) — российский математик, академик АН СССР (1939 р.).

** Шварц (Schwarz) Лоран (1915—2002) — французский математик.

задачах: “Описание какого-либо воздействия, т.е. какой-то конечной функции $\varphi(x)$, с помощью дельта-функции возможно и целесообразно именно тогда, когда детальная форма воздействия, т.е. истинная зависимость его от x, несущественна, а важен лишь интеграл” [*, с. 442].

Запишем соотношения, определяющие основные свойства дельта-функции [52, 60]:

1. Определение дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a). \tag{9.7}$$

2. Производная от дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x-a)\varphi(x)dx = (-1)^n \varphi^{(n)}(a). \tag{9.8}$$

3. Преобразование Фурье для дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\exp(-ixy)dx = 1, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixy)dx = \delta(y). \tag{9.9}$$

4. Обозначим символом $\theta(x)$ функцию Хевисайда**(рис. 9.2):

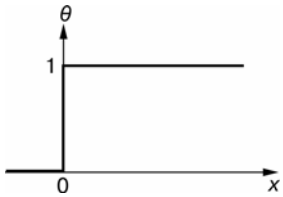


Рис. 9.2. Вид функции Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{9.10}$$

Тогда справедливы соотношения

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(y)dy = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{9.11}$$

---

* Зельдович Я.Б., Яглом И.М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. — М.: Наука, 1982. — 512 с.

** Хевисайд (Heaviside) Оливер (1850—1925) — английский физик и инженер.

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x). \tag{9.12}$$

Еще раз подчеркнем, что δ-функция не является обычной функцией, поэтому говорить о ее значении в отдельных точках не является логически строгим, ведь она не определена как функция точки. Поэтому высказывание, что дельта-функция всюду на числовой оси равна нулю, кроме точки $x = 0$, где она равна $+\infty$, является возможным, как удобное средство при соответствующих соображениях. Нужно помнить, что дельта-функция — это понятие другой природы. Она определена не как функция $\delta(x)$, а как интеграл (9.4). Это связано с тем, что для ряда физических задач непосредственное физическое содержание имеют именно интегралы от некоторых функций.

Теперь определим трехмерную дельта-функцию:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0), \tag{9.13}$$

она имеет аналогичные свойства в трехмерном пространстве:

$$\iiint\limits_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)dV = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mathbf{r}_0 \quad \text{внутри} \ V, \\ 0, & \text{если} \quad \mathbf{r}_0 \quad \text{вне} \ V, \end{cases} \tag{9.14}$$

$$\iiint\limits_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)f(\mathbf{r})dV = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0), & \text{если} \quad \mathbf{r}_0 \quad \text{внутри} \ V, \\ 0, & \text{если} \quad \mathbf{r}_0 \quad \text{вне} \ V, \end{cases} \tag{9.15}$$

здесь V — некоторая область пространства.

Запишем также выражения для дельта-функции в цилиндрической и сферической системах координат. В цилиндрической системе (r, ψ, z):

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(\psi - \psi_0)\delta(z - z_0). \tag{9.16}$$

В сферической системе координат (r, θ, ψ):

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\psi - \psi_0). \tag{9.17}$$

Выражения (9.16) и (9.17) удовлетворяют условию нормировки (9.14), поскольку в цилиндрической и сферической системах координат элементарный объем равен $dV = rdrd\psi dz$ и $dV = r^2 \sin\theta drd\theta d\psi$, соответственно.

9.3. Неоднородное волновое уравнение

До сих пор мы имели дело с однородным волновым уравнением:

$$\Delta p(\mathbf{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=0\,, \tag{9.18}$$

т.е. с уравнением с правой нулевой частью. Это означает, что внешние силы в среде отсутствуют, и ни в одной точке пространства нет источника, из которого бы жидкость поступала в среду.

Пусть теперь в среде есть источник, его модель обсудим несколько позднее. Выведем волновое уравнение при наличии источника в среде. Для этого вернемся к уравнению неразрывности (п. 4.1.3). Очевидно, что в правой части формулы (4.9) для приращения массы в элементарной ячейке среды (рис. 4.1) следует прибавить массу жидкости $\rho_{\text{ист}}$, кг · м$^{-3}$ · с$^{-1}$, которая поступает от источника за единицу времени в единицу объема:

$$\Delta m=\left[\rho_{\text{ист}}-\operatorname{div}\left(\rho\mathbf{v}\right)\right]dxdydzdt\,. \tag{9.19}$$

Приравнивая (4.8) и (9.19) и проводя линеаризацию, получаем уравнение неразрывности в таком виде:

$$\frac{\partial\rho_{\sim}}{\partial t}=\rho_{\text{ист}}-\rho_0\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{9.20}$$

Дифференцируя (9.20) по времени t и используя уравнение состояния (4.16) и уравнение движения (4.7), получаем неоднородное волновое уравнение для давления:

$$\Delta p(\mathbf{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=-\frac{\partial\rho_{\text{ист}}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{9.21}$$

Определим производную $\dfrac{\partial\rho_{\text{ист}}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=q(\mathbf{r},t)$ как *производительность источника*, тогда (9.21) перепишем в виде

$$\Delta p(\mathbf{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=-q(\mathbf{r},t). \tag{9.22}$$

Для гармонического источника $q(\mathbf{r},t)=q(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$ будем иметь соответствующее неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta p(\mathbf{r})+k^2p(\mathbf{r})=-q(\mathbf{r}). \tag{9.23}$$

В дальнейшем будут рассматриваться гармонические процессы, поэтому множители $\exp(-i\omega t)$ не будем писать.

Теперь сделаем важное замечание. Оказывается неоднородное волновое уравнение можно получить не только в случае, когда источником звука являются вытекание-втекание вещества, но и когда звук

излучается некоторой колеблющейся поверхностью. Пусть имеем однородное уравнение

$$\Delta p + k^2 p = 0 \tag{9.24}$$

с *неоднородными граничными условиями*, т.е. возникла ситуация, когда на некоторой поверхности S задано давление или колебательная скорость:

$$p\big|_S = F(S)$$

или

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_S = F(S). \tag{9.25}$$

Представим искомое решение в виде суммы давлений:

$$p = p_1 + p_2, \tag{9.26}$$

причем в качестве p_2 выберем функцию, которая удовлетворяет первому или второму условию (9.25) на поверхности S, но не удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца: $\Delta p_2 + k^2 p_2 \neq 0$. Пусть, например, имеем $p_2\big|_S = F(S)$. Очевидно, что при таком выборе p_2 функция p_1 удовлетворяет однородному граничному условию $p_1\big|_S = 0$ (т. е. для p_1 поверхность S является акустически мягкой).

Подставим (9.26) в однородное уравнение (9.24):

$$\Delta p_1 + k^2 p_1 = -(\Delta p_2 + k^2 p_2). \tag{9.27}$$

Если правую часть (9.27) обозначить q, то получим неоднородное уравнение Гельмгольца относительно функции p_1, которая удовлетворяет однородному граничному условию $p_1\big|_S = 0$.

Физический смысл такого преобразования состоит в том, что результат излучения звука поверхностью всегда можно представить в виде звукового поля, которое образовано источниками, размещенными в пространстве при наличии абсолютно жестких или абсолютно мягких границ.

9.4. Функция Грина для уравнения Гельмгольца. Свободное пространство

Определимся с моделью источника. Будем считать, что размеры источника настолько малы, что источник практически сконцентрирован в точке. Поскольку производительность такого источника конечна, а объем, который занимает источник, практически равен нулю, то для описания такого источника как раз и нужно использо-

вать дельта-функцию, т.е. $q(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Здесь вектор $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ определяет координаты источника, вектор $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — координаты произвольной точки звукового поля, Q — производительность источника. Функция, которая описывает звуковое поле, образованное точечным источником, называется *функция Грина**. Если речь идет о свободном пространстве, то имеется в виду *функция Грина для свободного пространства*.

Итак, пусть $Q = 1$. Тогда поиск функции Грина заключается в решении неоднородного уравнения (см. (9.23))

$$\Delta p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0). \tag{9.28}$$

Правая часть уравнения (9.28) равна нулю во всех точках пространства за исключением точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, в которой находится источник.

Будем искать решение уравнения (9.28) в виде трехмерного интеграла Фурье [25]

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{p}(\boldsymbol{\gamma}) \exp(i\boldsymbol{\gamma}\mathbf{r})\, d\boldsymbol{\gamma} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) \exp(i\gamma_x x + i\gamma_y y + i\gamma_z z)\, d\gamma_x d\gamma_y d\gamma_z, \end{aligned} \tag{9.28а}$$

где $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ — волновой вектор. Этот интеграл представляет собой суперпозицию плоских волн $\exp(i\boldsymbol{\gamma}\mathbf{r})$, которые распространяются под произвольными углами относительно осей координат.

Подставляя интегральное представление (9.28а) в уравнение (9.28) и, учитывая, что (см. (9.9))

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(i\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))\, d\boldsymbol{\gamma},$$

получаем, после перехода к равенству подынтегральных выражений, такое соотношение

$$\tilde{p}(\boldsymbol{\gamma}) = -\frac{1}{k^2 - \gamma^2} \exp(-i\boldsymbol{\gamma}\mathbf{r}_0),$$

где $\gamma^2 = |\boldsymbol{\gamma}|^2 = \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2$. Подставляя это соотношение в формулу (9.28а), приходим к формальному решению в виде такого интеграла

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2 - \gamma^2} \exp(i\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))\, d\boldsymbol{\gamma}. \tag{9.28б}$$

---

* Грин (Green) Джордж (1793—1841) — английский математик и физик.

Вычислим этот интеграл, для чего перейдем к сферическим координатам $\gamma = |\boldsymbol{\gamma}|, \theta, \psi$, которые связанные с координатами $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ соотношениями $\gamma_x = \gamma \sin\theta \cos\psi$, $\gamma_y = \gamma \sin\theta \sin\psi$, $\gamma_z = \gamma \cos\theta$. Тогда исследуемый интеграл (9.28б) будет иметь вид

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(i\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\right)}{k^2 - \gamma^2} \gamma^2 \sin\theta d\gamma d\theta d\psi .$$

Совместим оси декартовых координат $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ и $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, это даст возможность представить скалярное произведение векторов так: $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \gamma |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cos\theta$, (в данном случае, угол между векторами можно определить через угол θ, ведь диапазон изменения этих углов одинаковый). В таком случае

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(i\gamma |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cos\theta\right)}{k^2 - \gamma^2} \gamma^2 \sin\theta d\gamma d\theta d\psi .$$

Интеграл по ψ сводится к множителю 2π, а интегрирование по θ приводит к выражению

$$p(\mathbf{r}) = \frac{i}{4\pi^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \int_0^\infty \frac{\exp\left(i\gamma |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\right) - \exp\left(-i\gamma |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\right)}{k^2 - \gamma^2} \gamma d\gamma =$$

$$= -\frac{i}{4\pi^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp\left(i\gamma |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\right)}{\gamma^2 - k^2} \gamma d\gamma.$$

Полученный интеграл вычислим методом контурного интегрирования, замыкая контур дугой бесконечного полукруга в верхней полуплоскости комплексной переменной γ. При этом интеграл по полукругу, согласно лемме Жордана* [8], равняется нулю и интеграл сводится к сумме вычетов подынтегральной функции $f(\gamma) = \dfrac{\exp\left(i\gamma |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\right)}{(\gamma + k)(\gamma - k)} \gamma$. Поскольку оба полюса $\gamma = \pm k$ лежат на действительной оси, допустим, что в среде присутствует малое поглощение, т.е. заменим волновое число k на $k + i\alpha$, где α — очень малая величина. В результате полюс $\gamma = -k$ сместится вниз и выйдет из контура интегрирования, а полюс $\gamma = k$ сместится вверх, определяя тем самым значение интеграла. Тогда

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{i}{4\pi^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} 2\pi i \cdot \mathrm{res}\big|_{\gamma = k} \left[f(\gamma) \right] = \frac{\exp\left(ik |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\right)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

---

* Жордан Мари Эдмон Камиль (1838-1922) – французский математик.

Итак, решение уравнения (9.28) для свободного трехмерного пространства получено, а значит и определена функция Грина. Для функции Грина используют обозначение $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$, тогда

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{\exp\left(ik\left|(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right|\right)}{4\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|}. \qquad (9.29)$$

Функция (9.29) удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (9.28) для всех точек $\mathbf{r}\neq\mathbf{r}_0$; в этом нетрудно убедиться, подставив (9.29) в уравнение (9.28). Можно показать [60, с. 68—69], что и при $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$ функция $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ удовлетворяет уравнению (9.28). Отсюда следует, что функция Грина удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца во всех точках, кроме точки $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$, в которой расположен источник.

Как видим, функция Грина для свободного пространства (9.29) представляет собой поле точечного источника (см. параграф 7.5), расположенного в точке $\mathbf{r}_0$, давление определяется в точке $\mathbf{r}$. Она отличается от формулы (7.31) только множителем $(-i\omega\rho V_0)$.

Согласно (9.29) функция Грина для свободного пространства при $\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0$ имеет особенность типа

$$\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|}=\frac{1}{r},\quad \mathbf{r}\to\mathbf{r}_0, \qquad (9.30)$$

что также характерно для любой функции Грина уравнения Гельмгольца. Очевидно, этот факт не является неожиданным, ведь в качестве модели источника имеем точечный источник, который обусловливает использование дельта-функции. Кроме того, поскольку эта особенность не зависит от волнового числа k, то она существует и при $k=0$, т.е. для функции Грина уравнения Лапласа [52].

Аналогично можно получить двумерную функцию Грина для свободного пространства, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+k^2 p=-\delta(x-x_0)\delta(y-y_0).$$

Предлагаем читателю сделать это самостоятельно, используя соотношения

$$\int_0^{2\pi}\exp\left(i\gamma\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|\cos\psi\right)d\psi=2\pi J_0\left(\gamma\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|\right),$$

$$2J_0\left(\gamma\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|\right)=H_0^{(1)}\left(\gamma\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|\right)-H_0^{(1)}\left(-\gamma\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|\right),$$

где $J_0\left(\gamma\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|\right)$ — функция Бесселя нулевого порядка. В результате для свободного пространства в двумерном случае функция Грина определяется выражением

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr),\quad r=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|, \tag{9.31}$$

где $H_0^{(1)}(kr)$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Выражение (9.31) характеризует цилиндрическую волну, которая излучается бесконечно длинной линией и отличается от поля пульсирующего цилиндра (7.133) только множителем. При больших волновых расстояниях kr от источника поле, которое определяется выражением (9.31), ведет себя как расходящаяся волна, амплитуда которой уменьшается по закону $1/\sqrt{r}$. Действительно, используя асимптотическое представление функции Ханкеля первого рода при $kr \gg 1$, имеем такой вид для бегущей волны

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\exp\left[i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

При $kr \ll 1$ функция Грина (9.31) имеет особенность типа $\ln(kr)$, поскольку функция Ханкеля первого рода нулевого порядка имеет такое асимптотическое представление $H_0^{(1)}(kr)\approx\frac{2i}{\pi}\ln(kr)$.

Для свободного пространства в одномерном случае функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+k^2 p=-\delta(x-x_0).$$

Самостоятельно определите, что в одномерном случае функцию Грина можно записать так:

$$G(x,x_0)=\frac{i}{2k}\exp\left(ik|x-x_0|\right), \tag{9.32}$$

т.е. она представляет собой бегущую плоскую волну.

Отметим еще одно свойство функции Грина. Она является симметричной функцией своих аргументов, т.е. $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$. Это свойство выражает собой так называемый *принцип взаимности.* Для функции Грина свободного пространства (9.29) это очевидно, но такое свойство присуще любой функции Грина (т.е. для функции Грина неоднородной среды или среды, в которой размещены упругие тела, (см. параграф 9.13)). Физически равенство $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$ означает, что поле, создаваемое в точке $\mathbf{r}$ точечным источником, расположенным в точке $\mathbf{r}_0$, в точности равняется полю, которое создается в точке $\mathbf{r}_0$ точечным источником, расположенным в точке $\mathbf{r}$.

9.5. Принцип Гюйгенса. Условие излучения Зоммерфельда

В XVII столетии Гюйгенс* сформулировал принцип, согласно которому каждая точка фронта расходящейся волны является источником сферических волн, которые формируют результирующее волновое поле. Строгая формулировка принципа Гюйгенса существенно отличается от первоначальной формулировки. Она дана Гельмгольцем для гармонических процессов и развита впоследствии Кирхгоффом для процессов с произвольной временной зависимостью.

Вывод принципа Гюйгенса базируется на известной формуле Грина [8, 52]:

$$\int_V \left(p\Delta G - G\Delta p \right) dV = \int_S \left(p\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial p}{\partial n} \right) dS. \qquad (9.33)$$

Здесь **n** — вектор внешней единичной нормали к поверхности S, окружающей объем V (рис. 9.3); p и G — произвольные достаточно гладкие функции; Δ — оператор Лапласа. Соотношение (9.33) определяет связь, представленную в интегральной форме, между значениями функций p и G внутри некоторого объема V и их значениями на поверхности S, окружающей объем V.

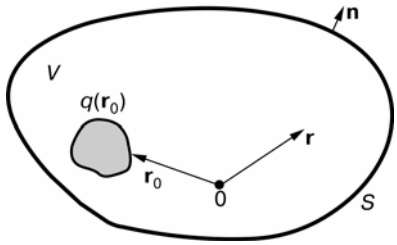


Рис. 9.3. Пример определения принципа Гюйгенса для внутренней области

Пусть функция $p(\mathbf{r})$ является полем давления в произвольной точке $\mathbf{r}$ объема V и удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = -q(\mathbf{r}_0), \qquad (9.34)$$

где функция $q(\mathbf{r}_0)$ определяет координаты $\mathbf{r}_0$ и производительность акустически прозрачных объемных источников, расположенных в объеме V (рис. 9.3). Звуковое поле $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ удовлетворяет уравнению (9.28), т.е. представляет собой функцию Грина для свободного пространства (9.29). Если выразить величины Δp и ΔG с помощью урав-

* Гюйгенс (Huygens) Христиан (1629—1695) — голландский механик, физик, математик и астроном.

нений (9.34), (9.28) и подставить эти выражения в (9.33) (сделайте самостоятельно), то получим соотношение, которое определяет *математическую формулировку принципа Гюйгенса для поля внутри области V*:

$$-\int_S \left(p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right) \frac{\partial G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial n} - G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0^{(S)}\right) \frac{\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial n} \right) dS + \int_V q(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV = \begin{cases} p(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in V, \\ 0, \mathbf{r} \notin V. \end{cases} \tag{9.35}$$

Здесь выражение $\mathbf{r} \in V$ означает то, что точка $\mathbf{r}$ находится внутри объема V, а индекс S для вектора $\mathbf{r}_0^{(S)}$ подчеркивает тот факт, что речь идет о точке на поверхности S.

Соотношение (9.35) показывает, что поле в области V определяется источниками звука, которые находятся внутри этой области и описываются функцией $q(\mathbf{r}_0)$, а также значениями давления $p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$ и его нормальной производной $\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right) / \partial n$ (фактически колебательной скорости) на поверхности S, ограничивающей объем V (рис. 9.3). Значение p и υ_n на поверхности S зависят как от функции $q(\mathbf{r}_0)$, так и от поля внешних источников, которые находятся вне объема V.

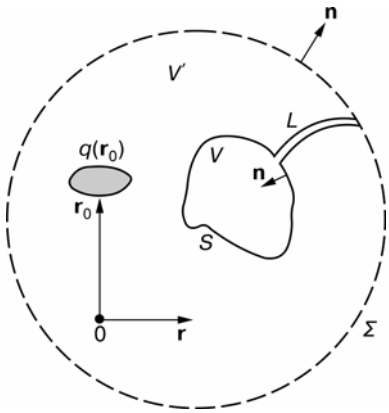


Рис. 9.4. Пример определения принципа Гюйгенса для внешней области

Рассмотрим теперь случай, когда необходимо определить поле вне области V. Окружим область V бесконечно удаленной сферой с поверхностью Σ и выполним разрез L, который будет соединять поверхности S и Σ (рис. 9.4). Тогда к области, ограниченной поверхностями S, Σ и разрезом L (обозначим ее V', внешние относительно области V источника звука находятся в области V'), можно применить соотношение (9.35). Интеграл по разрезу L равен нулю вследствие противо-

положно направленных нормалей на сторонах разреза. С учетом физических представлений интеграл на бесконечно удаленной поверхности Σ для ограниченных в пространстве источников также должен равняться нулю. Как следствие, соотношение, определяющее *принцип Гюйгенса для внешней области*, приобретает вид

$$-\int_S \left(p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right) \frac{\partial G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial n} - G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0^{(S)}\right) \frac{\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial n} \right) dS + \int_{V'} q(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV' = \begin{cases} p(\mathbf{r}), \mathbf{r} \notin V, \\ 0, \quad \mathbf{r} \in V. \end{cases} \tag{9.36}$$

Здесь также нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S является внешней относительно области (в данном случае это V'), в которой определяется звуковое поле.

Остановимся подробнее на вопросе о равенстве нулю интеграла по поверхности Σ. Если в среде происходит поглощение звуковой энергии, то ответ на этот вопрос очевиден. Понятно, что в случае идеальной среды, где поглощение звука отсутствует, функция $p(\mathbf{r})$ должна удовлетворять некоторому условию. Определим его. Очевидно, на значительно удаленной сферической поверхности выполняются соотношения

$$\frac{\partial}{\partial n} \approx \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial G}{\partial n} \approx \frac{\partial G}{\partial r} \approx ik \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}. \tag{9.37}$$

Принимая во внимание (9.37), записываем интеграл по поверхности Σ в виде

$$-\int_\Sigma \left(p \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial p}{\partial n} \right) d\Sigma \approx \int_0^{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) r^2 d\Omega, \tag{9.38}$$

где $d\Sigma = r^2 d\Omega$, $d\Omega$ — телесный угол, который стягивает поверхность $d\Sigma$. Очевидно, интеграл (9.38) равен нулю, если выполняется соотношение

$$\lim_{r \to \infty} \left[r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) \right] = 0, \tag{9.39}$$

которое называют *условием излучения Зоммерфельда**. Нетрудно убедиться, что сферическая расходящаяся волна $\exp(ikr)/r$ удовлетворяет условию (9.39). Это приводит к тому, что при $r \to \infty$ любое поле в трехмерному пространстве, образованное источниками, помещенны-

* Зоммерфельд (Sommerfeld) Арнольд Иоганн Вильгельм (1868—1951) — немецкий физик и математик.

ми в ограниченную область, должно иметь характер расходящейся сферической волны. (В разделе 7 мы несколько раз пришли к такому выводу, изучая поле конкретного источника звука, например, см. формулу (7.64)). Поэтому условие излучения можно сформулировать так: звуковое поле на больших расстояниях от источника должно представлять собой расходящуюся сферическую волну, т.е.

$$p(r,\theta,\psi) = A(\theta,\varphi)\frac{\exp(ikr)}{r} \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{9.39a}$$

Множитель $A(\theta,\varphi)$ соответствует диаграмме направленного источника. Нетрудно убедиться в том, что волны, которые приходят из бесконечности типа $\exp(-ikr)/r$, не удовлетворяют условию (9.39) и поэтому должны быть отброшены в ходе решения задачи об излучении звука. Понятно, что на конечном расстоянии r зависимость $p(r,\theta,\psi)$ может быть более сложной.

В двумерном случае условие излучения Зоммерфельда можно записать в виде

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{r}\left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp\right)\right] = 0. \tag{9.40}$$

Этому соотношению удовлетворяют расходящиеся цилиндрические волны, которые создаются линейным источником и определяются функцией Ханкеля первого рода $H_0^{(1)}(kr)$. При $r \to \infty$ функция $H_0^{(1)}(kr)$ стремится к функции $C\left(\exp(ikr)/\sqrt{r}\right)$ (C — постоянная; подставьте это асимптотическое представление функции $H_0^{(1)}(kr)$ в (9.40) и убедитесь в том, что условие излучения выполняется).

Для одномерного случая, например, для плоской волны, распространяющейся в трубе, расширение фронта волны отсутствует. Поэтому, если в этом есть необходимость, следует предположить наличие в среде хотя бы малого поглощения, т.е. считать волновое число комплексной величиной $k = k' + ik''$, $k'' > 0$. Тогда для бегущей плоской волны $\lim\limits_{r\to\infty}\exp(ikr) = 0$.

В ряде задач акустики возникает необходимость использовать понятие комплексного волнового числа $k = k' + ik''$, что моделирует потери энергии при распространении звука в идеальной среде (см. параграф 5.3). При этом всю задачу дифракции сначала решают при $k'' > 0$, что определяет условие отсутствия поля на бесконечности $\lim\limits_{r\to\infty} p = 0$, а потом осуществляют предельный переход $k'' \to 0$.

9.6. Физический анализ математической формулировки принципа Гюйгенса

Предположим, что внешние источники отсутствуют. Тогда удаляя границу S (рис. 9.3) на бесконечность, из формулы (9.35) получаем выражение

$$p(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)q(\mathbf{r}_0)dV, \tag{9.41}$$

которое определяет звуковое поле в свободном пространстве для произвольной функции источников $q(\mathbf{r}_0)$. Итак, зная функцию Грина, т.е. звуковое поле элементарного источника, можно с помощью интеграла (9.41) определить звуковое поле, которое создается системой источников, распределенных в пространстве.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда источники в пространстве, где определяется поле, отсутствуют, т.е. $q(\mathbf{r}_0) = 0$. Если выбрать на поверхности S внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ относительно области, где определяется звуковое поле, то получим единую формулу для определения поля как для внутренней (рис. 9.3), так и внешней областей (рис. 9.4), т.е. согласно (9.35) и (9.36) имеем

$$p(\mathbf{r}) = -\int_S \left(p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\frac{\partial G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial n} - G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\frac{\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial n}\right)dS. \tag{9.42}$$

Используя выражение для функции Грина свободного пространства (9.29), переписываем формулу (9.42) в виде

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_S \left[p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|}\right) - \frac{\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial n}\cdot\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|}\right]dS. \tag{9.43}$$

Выражение (9.43) называют также *формулой Кирхгоффа** или *интегралом Кирхгоффа*. Напомним, что $\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right| = r$ есть расстояние между любой точкой пространства $\mathbf{r}$ и точкой $\mathbf{r}_0^{(S)}$ на поверхности S.

Итак, интеграл Кирхгоффа (9.43) позволяет рассчитать поле в любой точке пространства, где отсутствуют источники и рассеивающие

* Кирхгофф (Kirchhoff) Густав Роберт (1824—1887) — немецкий физик и механик.

звук тела, если известны давление $p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$ и его нормальная производная $\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\Big/\partial n$ (т.е. колебательная скорость) на поверхности S.

Если вспомнить, что производная $\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{\exp(ikr)}{r}\right)$ определяет поле дипольного источника (см. формулу (7.84)), то интересной становится такая интерпретация формулы Кирхгоффа: поле внутри или вне мысленно выделенной поверхности S представляется в виде совокупности полей точечных источников, определенных на S с поверхностной плотностью $\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\Big/\partial n$, и полей дипольных источников — с поверхностной плотностью $p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$.

Таким образом, если известны давление и колебательная скорость на поверхности S, то задача расчета сводится к сугубо математической проблеме вычисления интеграла (9.43), а цель физического воспроизведения поля по информации о нем, зафиксированной на поверхности S, может быть достигнута, если разместить соответствующие излучатели на этой поверхности. Последнее соображение имеет довольно интересные следствия. Как известно, одной из важных практических проблем есть проблема борьбы с шумом. Если источники, которые создают шум, окружить поверхностью S и расположить на ней упомянутые выше включенные в противофазе вспомогательные источники звука, то можно компенсировать шум во внешнем пространстве. Соответствующая теория, являющаяся основой для активных методов борьбы с шумом, была разработана Малюжинцем*.

В завершение параграфа сделаем важное замечание. Дело в том, что интеграл Кирхгоффа не является решением граничной задачи в общем виде, ведь невозможно произвольно задать значение $p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$ и $\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\Big/\partial n$ на некоторой поверхности S. Например, если на S задано значение $\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\Big/\partial n$, то значение давления $p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$ на этой поверхности можно получить только вследствие строгого решения данной волновой задачи. Однако если такое решение для $p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$ будет получено, то поле $p(\mathbf{r})$ можно определить, не используя (9.43).

Таким образом, *интеграл Кирхгоффа является переопределенным*. Фактически это интегральное уравнение, в котором неизвестная

---

* Малюжинец Георгий Данилович (1910—1969) — российский физик.

функция входит как в правую, так и левую части уравнения. Однако интеграл Кирхгоффа важен не только с принципиальной точки зрения (в теории его значения трудно переоценить), но и для решения практических задач в следующих случаях:

1) для точного определения поля $p(\mathbf{r})$ при условии, что интеграл Кирхгоффа может быть приведен к виду, где $p(\mathbf{r})$ зависит или только от $p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$, или только от $\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\Big/\partial n$ (см. ниже параграф 9.9);

2) для приблизительного решения задач, когда можно из физических соображений определить значение $p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$ и $\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\Big/\partial n$ на поверхности S (например, метод дифракции Кирхгоффа (см. ниже)).

9.7. Метод Кирхгоффа определения поля рассеянной волны

Пусть на тело с жесткой поверхностью S падает гармоническая сферическая волна, которая создается точечным источником, расположенным в точке M_0. Надо найти отраженное поле в произвольной точке пространства, которую обозначим M. Точка O является начало системы координат (рис. 9.5).

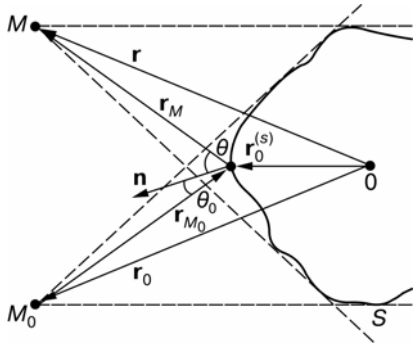


Рис. 9.5. Пример определения рассеянной волны методом Кирхгоффа

Полное поле, которое существует во внешнем пространстве, состоит из падающей волны с известным давлением:

$$p_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp\left(ikr_{M_0}\right)}{r_{M_0}}, \tag{9.44}$$

где расстояние $r_{M_0} = |\mathbf{r}_{M_0}|$ отчисляется от точки M_0, а амплитуда принята за единицу, и отраженного поля p_1. Их сумма удовлетворяет на S

условию жесткой поверхности, которое требует, чтобы нормальная к поверхности колебательная скорость была равной нулю:

$$\frac{1}{i\omega\rho}\left(\frac{\partial p_0}{\partial n}+\frac{\partial p_1}{\partial n}\right)_S=0. \qquad (9.45)$$

Для вычисления отраженного поля рассмотрим формулу Кирхгоффа (9.43), приняв за S физическую поверхность отражающего тела. Точка наблюдения M определяется координатами вектора $\mathbf{r}$, расстояние r_M между точкой наблюдения M и точкой на поверхности S связано с вектором $\mathbf{r}_M=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}$ (см. рис. 9.5), $r_M=|\mathbf{r}_M|$. Выполнив дифференцирование, получим

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\exp(ikr_M)}{r_M}\right)=\frac{ikr_M-1}{r_M}\cdot\frac{\exp(ikr_M)}{r_M}\cdot\frac{\partial r_M}{\partial n}. \qquad (9.46)$$

Согласно рис. 9.5 производная $\partial r_M/\partial n=\cos\theta$, где θ — угол между нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности S и направлением вектора $\mathbf{r}_M$ на точку наблюдения M. Будем считать, что точка наблюдения M расположена на расстоянии, довольно большом по сравнению с длиной волны. Тогда $kr_M >> 1$ и формула (9.46) упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\exp(ikr_M)}{r_M}\right)\approx ik\frac{\exp(ikr_M)}{r_M}\cos\theta. \qquad (9.46а)$$

С учетом (9.46а) формула Кирхгоффа приобретает такой вид:

$$p_1(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\int_S\left(ik\cos\theta\cdot p_1\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)-\frac{\partial p_1\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial n}\right)\frac{\exp\left(ikr_M\right)}{r_M}dS\,, \qquad (9.47)$$

где $p_1\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$ определяет давление в отраженной волне на поверхности S и его производную $\partial p_1\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\Big/\partial n$ (фактически колебательную скорость). Отметим, что знаки перед интегралами в формулах (9.47) и (9.43) разные, что обусловлено изменением направления нормали (на рис. 9.5 нормаль является внутренней относительно области, в которой определяется звуковое поле).

Как видим, чтобы определить давление в точке наблюдения M, нужно знать нормальную компоненту колебательной скорости и давление на поверхности S, которые соответствуют отраженному полю. Что касается $\partial p_1\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\Big/\partial n$, то ее значение можно найти, исходя из условия (9.45), однако акустическое давление $p_1\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$ не известно. По-

этому, формула Кирхгоффа не является формулой прямого вычисления. Попробуем решить эту проблему; для этого переместив точку M на поверхность тела S (рис. 9.6), запишем

$$p_1\left(\mathbf{r}^{(S)}\right)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left(ik\cos\theta\cdot p_1\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)-\frac{\partial p_1\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial n}\right)\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}^{(S)}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|\right)}{\left|\mathbf{r}^{(S)}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|}dS. \qquad (9.48)$$

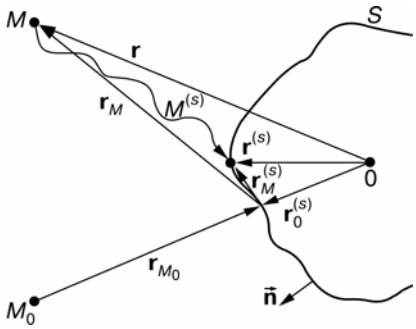


Рис. 9.6. Расположение точки наблюдения на поверхности S

Соотношение (9.48) содержит в себе неизвестную функцию: как в левой, так и в правой своей части под знаком интеграла. Итак, (9.48) является интегральным уравнением относительно функции $p_1\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$ (кстати, это довольно сложное уравнение, поскольку при интегрировании обнаружится такая точка на поверхности, для которой $\left|\mathbf{r}^{(S)}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|=0$, и подынтегральная функция вследствие этого стремится в бесконечность). Если бы решение этого уравнения все-таки удалось бы найти, то потом можно было бы использовать формулу Кирхгоффа как формулу для прямого вычисления.

Таким образом, задача решается в два этапа. На первом этапе решают интегральное уравнение (9.48) и определяют звуковое давление на поверхности S, на втором — по формуле (9.47) вычисляют поле в пространстве. Такой подход к решению поставленной задачи, который называют *методом граничных интегральных уравнений*, в последнее время интенсивно развивают. Несмотря на то, что полученное интегральное уравнение в общем случае можно решить только численными методами, понижение размерности задачи за счет перехода от объемного интеграла к интегралу по поверхности приводит к значительному упрощению численных расчетов. В этом и заключается главное преимущество метода. (Об особенностях практической

реализации метода граничных интегральных уравнений читатель может узнать из монографии [61].)

Но еще раз подчеркнем, что такой подход является непростой задачей, особенно для тел больших размеров даже при условии применения методов современной вычислительной математики и средств вычислительной техники. Поэтому, в свое время, Кирхгофф предложил вычислять интеграл, который стоит в правой части (9.47), не точно, а приближенно.

При этом основная его идея состояла в том, чтобы найти приближенное значение отраженного поля на поверхности через известную падающую волну. Предложенный метод базируется на так называемом *приближении Кирхгоффа*, которое может быть применено при условии, что отражающее тело имеет большие (по сравнению с длиной волны) размеры и довольно гладкую поверхность. Большие размеры позволяют разделить всю поверхность на две части: “освещенную” и “теневую” (относительно как источника, так и точки наблюдения). То, как отделяется “освещенная” часть, которую мы обозначим S', показано на рис. 9.5. Ранее уже отмечалось, что формула Кирхгоффа представляет рассеянное поле $p_1(\mathbf{r})$ в виде совокупности полей, излученных фиктивными (от латинского слова *fictio* — выдумка) точечными источниками (монополями и диполями), расположенными на поверхности S. При больших волновых размерах тела вкладом фиктивных источников, которые расположены на “теневой” части поверхности, будем пренебрегать, т.е.

$$p_1\big|_{S-S'} = 0, \quad \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_1}{\partial n}\bigg|_{S-S'} = 0. \tag{9.49}$$

Достаточная гладкость поверхности при ее больших волновых размерах позволяет рассматривать отражение на каждом локальном участке поверхности как отражение от плоскости, касательной к соответствующей точке этого участка. Однако известно, что при отражении от жесткой плоскости акустическое давление отраженной волны равно акустическому давлению падающей волны. Итак пусть, с учетом условия (9.45), на “освещенной” части поверхности выполняются соотношения

$$p_1\big|_{S'} = p_0\big|_{S'}, \quad \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_1}{\partial n}\bigg|_{S'} = -\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_0}{\partial n}\bigg|_{S'}. \tag{9.50}$$

Уравнения (9.49), (9.50) выражают математическую формулировку приближения Кирхгоффа. Поскольку параметры падающей волны известны, то формула Кирхгоффа (9.47) превращается в формулу, пригодную для прямого вычисления отраженного поля.

Принимая во внимание (9.49), (9.50), можем найти звуковое давление отраженного поля и его нормальную производную на поверхности S' (при нахождении производной используем формулу (9.46а), ведь по условию имеем $kr_M >> 1$):

$$p_1\big|_{S'} = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp\left(ikr_{M_0}\right)}{r_{M_0}}, \tag{9.51}$$

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial n}\right|_{S'} \approx \frac{ik}{4\pi}\frac{\exp\left(ikr_{M_0}\right)}{r_{M_0}}(-\cos\theta_0). \tag{9.52}$$

Знак “минус” в формуле (9.52) обусловлен тем, что при $\theta_0 = 0$ векторы $\mathbf{r}_{M_0}$ и $\mathbf{n}$ имеют противоположные направления (рис. 9.5). С учетом этого формула (9.47) приобретает такой вид:

$$p_1(\mathbf{r}) = \frac{ik}{(4\pi)^2}\int_{S'}(\cos\theta + \cos\theta_0)\frac{\exp\left(ik\left(r_M + r_{M_0}\right)\right)}{r_M r_{M_0}}dS. \tag{9.53}$$

Здесь r_M и r_{M_0} — расстояния от точки наблюдения и от источника до точки, которая обходит поверхность при интегрировании; θ и θ_0 — углы между нормалью в этой точке на поверхности и направлениями на точку наблюдения и источник.

Если точка наблюдения и источник совмещены, как это часто бывает в локации, то $\theta = \theta_0$ и $r_M = r_{M_0} \equiv r$, и формула (9.53) упрощается:

$$p_1(\mathbf{r}) = \frac{ik}{(4\pi)^2}\int_{S'} 2\cos\theta\frac{\exp(2ikr)}{r^2}dS. \tag{9.54}$$

9.8. Отражение звука от плоского диска. Зоны Френеля

Рассмотрим ситуацию, когда отражающая поверхность представляет собой плоский круглый диск радиусом a. В центре диска поместим начало (точка O) цилиндрической системы координат (R, α, z) (рис. 9.7). Пусть точка излучения и точка наблюдения совмещены — это точка M, которая расположена на оси Oz на расстоянии z от начала координат. Вследствие симметрии задачи в качестве элементарного участка отражения можно взять тонкое кольцо, его площадь $dS = 2\pi RdR$. Кроме того, согласно рис. 9.7 $\cos\theta$ в формуле (9.54) равен $\cos\theta = z/r$, поэтому (9.54) запишем в таком виде:

$$p_1(M) = \frac{ikz}{4\pi}\int_0^a \frac{\exp(i2kr)}{r^3} RdR, \qquad (9.55)$$

где $r = \sqrt{z^2 + R^2}$.

Сделаем замену переменной R на r. Согласно соотношению $r^2 = z^2 + R^2$ имеем $rdr = RdR$. Тогда от интеграла (9.55) переходим к такому интегралу:

$$p_1(M) = i\frac{kz}{4\pi}\int_z^{r_{\max}} \frac{\exp(i2kr)}{r^2} dr, \qquad (9.56)$$

где $r_{\max} = \sqrt{z^2 + a^2}$.

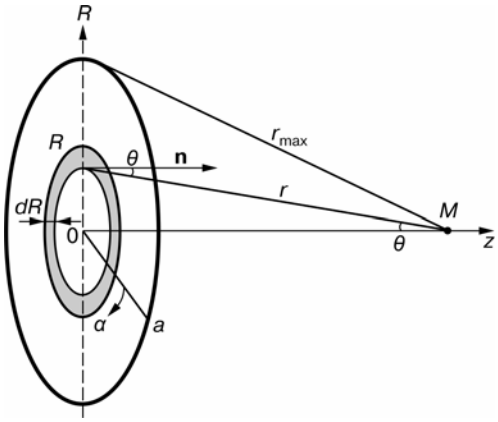


Рис. 9.7. Пример расчета поля рассеяния сферической волны на плоском диске

Не вызывает сомнений, что интеграл (9.56) можно вычислить, составив соответствующую программу для ЭВМ. Однако мы лучше осмыслим закономерности отражения звука от диска, если проанализируем процесс вычисления так, как это делали, когда никто не имел представления об ЭВМ, придавая процессу вычисления определенный физический смысл. Формула (9.56) представляет отраженное поле как континуальную сумму бесконечного множества элементарных гармонических сигналов (проще — синусоид) с амплитудами, пропорциональными dr/r^2 и фазами $2kr$ (здесь читателю нужно вспомнить об отброшенном нами экспоненциальном множителе $\exp(-i\omega t)$, при наличии которого утверждение о синусоидах становится понятным). Эти сигналы излучаются фиктивными источниками, каждый из которых имеет форму тонкого кольца (см. рис. 9.7).

Поскольку расстояние от каждого из колец до точки наблюдения разное, то эти сигналы смещены относительно друг друга по фазе, и результат, как сумма сигналов, зависит от этих фазовых сдвигов.

Возьмем в качестве первого сигнала тот, который излучается элементарным источником, находящимся в центре диска. Его фазу $2kz$ возьмем в качестве опорной. Переходя от одного элементарного кольцевого источника к другому, видим, что его фаза изменяется на $2kdr$.

Итак, для первого из элементарных сигналов, который создается центральным фиктивным источником сдвиг фазы волны на пути от M до O и от O до M составляет $\psi_0 = 2kz = 2(2\pi/\lambda)z$. Переходя последовательно от одного кольца к другому, суммируем элементарные сигналы. Понятно, что амплитуда суммарного вектора возрастает при добавлении сигналов один к другому до тех пор, пока фаза последнего сигнала не будет равна 180° относительно первого. При добавлении следующих сигналов амплитуда суммы начинает уменьшаться. Таким образом, на поверхности диска можно выделить зону (круг, радиус которого обозначим R_1), внутри которой находятся фиктивные источники, сигналы от которых еще усиливают друг друга. Эта зона называется *первой зоной Френеля**. Здесь сдвиг фазы волны на пути от M до внешней границы первой зоны Френеля и назад к точке M равен $\psi_1 = 2k(z + \lambda/4) = 2kz + \pi = \psi_0 + \pi$. Продвигаясь по диску дальше от его центра, находим фиктивные источники, сигналы от которых тоже усиливают друг друга, но ослабляют сигналы от источников в первой зоне Френеля. Эти источники находятся в пределах кольца с радиусами R_1 и R_2, где радиусу R_2 соответствует элементарный источник, сигнал от которого смещен по фазе на 2π относительно сигнала от центрального источника, $\psi_2 = 2k(z + 2\lambda/4) = 2kz + 2\pi = \psi_0 + 2\pi = \psi_1 + \pi$. Кольцо с радиусами R_1 и R_2 образует *вторую зону Френеля*. За таким же принципом отделяются третья и все другие зоны Френеля. При этом все нечетные зоны усиливают сигнал от первой зоны, а все четные его ослабляют. Таким образом, количество имеющихся зон Френеля, которые поместились на отражающем диске, влияет на амплитуду отраженного сигнала. Понятно, что увеличение размера отражающего диска не всегда приводит к росту амплитуды отраженного сигнала, как этого можно было ожидать.

Радиус n-ой зоны Френеля можно найти из условия:

$$2k(r_n - z) = n\pi \quad \text{или} \quad \frac{4\pi}{\lambda}\left(\sqrt{R_n^2 + z^2} - z\right) = n\pi,$$

откуда

$$R_n = \sqrt{\left(z + \frac{n\lambda}{4}\right)^2 - z^2} = \sqrt{\frac{n\lambda}{2}\left(z + \frac{n\lambda}{8}\right)}. \qquad (9.57)$$

* Френель (Fresnel) Огюстен Жан (1788—1827) — французский инженер, физик и математик.

Напомним, что приближение Кирхгоффа можно применить, когда радиус диска $a >> \lambda$. Если $z >> n\lambda/8$, то формула (9.57) приобретает вид

$$R_n \approx \sqrt{\frac{nz\lambda}{2}}, \quad \left(z >> \frac{n\lambda}{8}\right). \tag{9.57a}$$

Радиус первой зоны Френеля является важным масштабом в акустике. Для задачи отражения, которую мы сейчас рассматриваем, он равен

$$R_1 \approx \sqrt{\frac{z\lambda}{2}}, \quad \left(z >> \frac{\lambda}{8}\right). \tag{9.58}$$

Итак, при увеличении расстояния z (точки наблюдения) от источника до отражающего диска радиусы всех френелевских зон возрастают и в результате их количество на диске уменьшается (понятно, что $R_n \le a$). Такого рода наблюдения можно использовать для качественного анализа зависимости амплитуды эхо-сигнала от разных геометрических параметров ситуации. Ниже приведем пример такого анализа.

Зафиксируем расстояние z, и будем изменять радиус диска a. На рис. 9.8 приведен результат вычисления амплитуды эхо-сигнала путем численного интегрирования по формуле (9.56). Расстояние и радиус диска нормированы на длину волны, а амплитуда — на ее максимальное значение. Проанализируем этот результат.

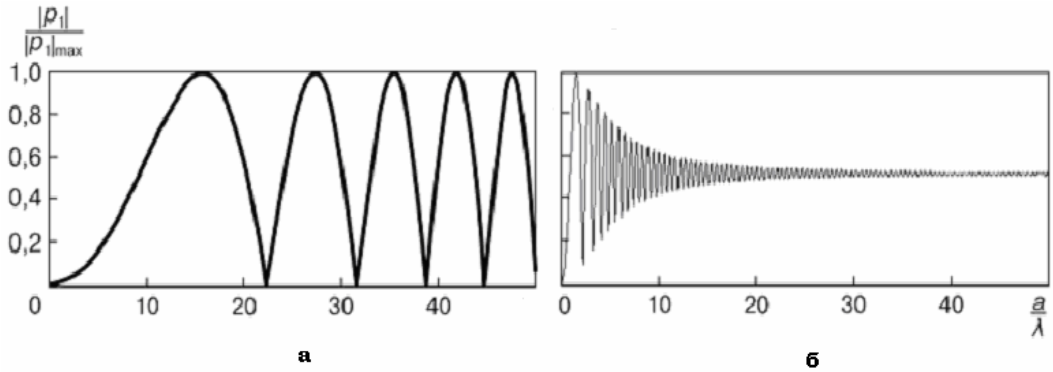


Рис. 9.8. Зависимость нормированной величины амплитуды давления рассеянной волны от радиуса диска a/λ на расстоянии:
а — $z/\lambda = 500$, б — $z/\lambda = 5$

Рассмотрим рис. 9.8, *а*. При достаточно малых радиусах на поверхности диска размещается только часть первой зоны Френеля. Поэтому при увеличении радиуса добавляются фиктивные источники,

которые усиливают эхо-сигнал. Рост амплитуды наблюдается до тех пор, пока на диске не разместится вся первая зона Френеля. При дальнейшем росте радиуса на диске появляется вторая зона Френеля. Фиктивные источники, расположенные на ней, являются противофазными к тем, которые находятся в первой зоне, и ослабляют эхо-сигнал. Ослабление будет самым существенным, когда на диске разместятся две зоны Френеля, а потом начнется увеличение амплитуды эхо-сигнала за счет источников из третьей зоны и так далее. Возникает вопрос, чем же все закончится, если увеличивать радиус до бесконечности. Ответ на него получить не так сложно, поскольку поле, отраженное от жесткой бесконечной плоскости, можно вычислить как поле мнимого источника, расположенного за экраном симметрично к реальному источнику, т. е. на расстоянии $2z$ от точки наблюдения. Действительно, приведенный на рис. 9.8, *б* график зависимости амплитуды эхо-сигнала от радиуса диска, рассчитанный для достаточно малого расстояния, показывает, что амплитуда стремится именно к такому пределу.

Рассмотрим другую ситуацию: зафиксируем радиус диска, и будем удалять источник (и, разумеется, точку наблюдения) от отражающего диска. Сначала на поверхности диска вмещается много зон Френеля, а потом, их количество уменьшается, поскольку их радиусы зависят от дистанции (см. (9.57)). Повторив предыдущие рассуждения, легко понять, что амплитуда эхо-сигнала должна осцилировать при изменении дистанции. Это подтверждают и результаты расчетов (рис. 9.9).

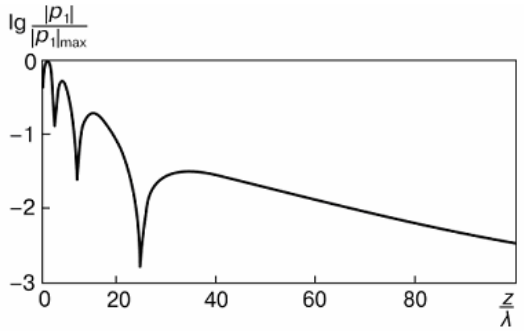


Рис. 9.9. Зависимость нормированной величины амплитуды давления рассеянной волны от расстояния до точки наблюдения z/λ для диска радиусом $a/\lambda = 5$

Как видим, кроме осцилляций происходит общее уменьшение амплитуды. Оно объясняется тем, что амплитуда каждого фиктивного источника уменьшается с увеличением расстояния до отражающего экрана. С того расстояния, когда размер первой зоны Френеля уже превышает размер диска, осцилляции исчезают, и начинается моно-

тонное уменьшение амплитуды по закону, обратно пропорциональному квадрату дистанции. Тогда говорят, что точка наблюдения уже находится в дальней зоне отражателя.

Вернемся к формуле (9.54). Если отражатель достаточно мал по сравнению с первой зоной Френеля, то все фиктивные источники, расположенные на нем, можно считать синфазными. В таком случае можно допустить такое приближение при вычислении интеграла (9.54): $r \approx z$ и $\cos\theta \approx 1$. Тогда давление в точке наблюдения M определится приближенным равенством:

$$p_1(M) \approx \frac{ik2S}{(4\pi)^2}\frac{\exp(2ikz)}{z^2}. \qquad (9.59)$$

Из формулы (9.59) следует, что отраженная волна в этом случае является сферической волной, поскольку ее амплитуда уменьшается обратно расстоянию z на пути от отражателя до точки наблюдения. Принимая во внимание, что на пути от излучателя до отражателя она также уменьшалась обратно к z, в формуле имеем $1/z^2$. Важно также, что амплитуда отраженного сигнала в этом случае пропорциональна площади отражателя S. Таким образом, по амплитуде можно получить представление о размерах отражателя.

В завершение параграфа заметим, что наши рассуждения относительно роли зон Френеля при анализе отражения сигналов применяются в задачах излучения и рассеяния звука на препятствиях и отверстиях жесткого экрана.

9.9. Функция Грина для полупространства

Вернемся к математическому выражению для принципа Гюйгенса (9.43) (полагаем, что объемные источники отсутствуют, т.е. $q(\mathbf{r}_0) \equiv 0$). Напомним, что до сих пор мы не накладывали никаких граничных условий на функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0^{(S)})$, поскольку она определена для свободного пространства. Как следствие, интеграл Кирхгоффа позволяет вычислить поле в любой точке пространства, если известны давление и его нормальная производная на некоторой поверхности S. Фактически следует уже иметь решение задачи, поэтому говорят о (9.42) как о переопределенном уравнении.

Необходимости одновременного задания давления и его нормальной производной можно избежать, если построить функцию Грина для уравнения Гельмгольца таким образом, чтобы она была решением уравнения (9.28), удовлетворяла условию излучения и, кроме этого, удовлетворяла одному из граничных условий на поверхности S:

$$1)\ \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0, \quad 2)\ G\big|_S = 0. \tag{9.60}$$

В этом случае соответствующие члены в интеграле (9.42) равны нулю. Это приводит к тому, что если $G\big|_S = 0$, то на поверхности S следует задать только давление $p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$, а когда $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0$, то — производную $\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\big/\partial n$.

Построение функций Грина, которые удовлетворяют граничным условиям 1 или 2 в (9.60), известно только для задач с достаточно простой геометрией. Понятно, что функция Грина определяется только поверхностью S и свойствами среды, поэтому можно говорить о функции Грина для свободного пространства, полупространства, сферы, цилиндра и т.п.

Определим функцию Грина для полупространства, как случая наиболее простого, но очень важного. Сначала найдем функцию Грина для полупространства с жесткой границей, т.е. когда выполняется условие 1 в (9.60). Совместим жесткую границу S с плоскостью $z = 0$ (рис. 9.10). Как известно, физический эффект, обусловленный влиянием идеальной границы на звуковое поле источника, эквивалентен действию некоторого дополнительного источника. Этот источник выбирают таким образом, чтобы сумма полей действительного и дополнительного источников, которые размещены в бесконечном пространстве, была равна полю действительного источника в исходной области при наличии границы.

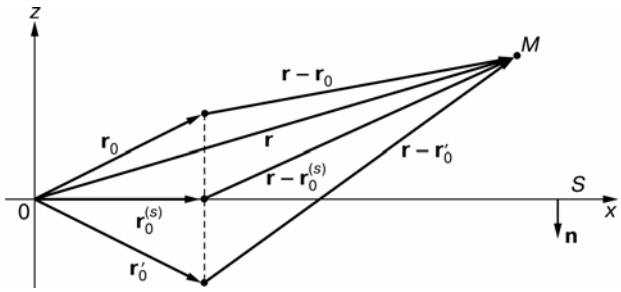


Рис. 9.10. Пример определения функции Грина для полупространства

Если в точке $\mathbf{r}_0$ помещен точечный источник, то в данном случае дополнительный источник следует расположить в точке $\mathbf{r}_0'$, которая симметрична точке $\mathbf{r}_0$ относительно плоскости $z = 0$ (рис. 9.10). При этом дополнительный источник должен иметь такую же производительность, что и действительный источник, и работать с ним синфаз-

но. Очевидно, что в такой ситуации нормальная составляющая скорости на плоскости $z = 0$ равна нулю, т.е. условие 1 в (9.60) выполняется.

Поскольку функция Грина для свободного пространства определяется формулой (9.29), функция Грина для полупространства с жесткой границей будет иметь вид

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|\right)}{4\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|} + \frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'\right|\right)}{4\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'\right|}. \tag{9.61}$$

Если точечный источник $\mathbf{r}_0$ устремить на поверхность S (рис. 9.10), то будем иметь $\mathbf{r}_0\big|_S = \mathbf{r}_0'\big|_S = \mathbf{r}_0^{(S)}$, и функцию Грина можно записать в виде

$$G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_0^{(S)}\right) = \frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|\right)}{2\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|}. \tag{9.62}$$

Очевидно, функция Грина для полупространства с акустически мягкой границей S запишется так:

$$G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_0^{(S)}\right) = \frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|\right)}{4\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|} - \frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'\right|\right)}{4\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}, \tag{9.63}$$

т.е. имеем симметричную относительно границы S противофазную пару точечных источников. Понятно, что в таком случае давление на границе S равно нулю, т.е. выполняется условие 2 в (9.60).

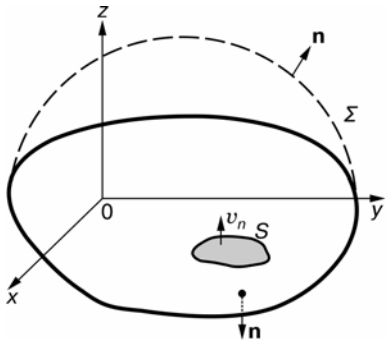


Рис. 9.11. Пример определения интеграла Рэлея

Применим формулу (9.61) для нахождения решения важной задачи: определение поля излучения диска, который колеблется в акустически жестком экране. Поверхность экрана совпадает с плоскостью xOy (рис. 9.11).

Окружим область существования звукового поля поверхностью, которая состоит из плоскости $z = 0$ и бесконечной полусферы Σ (рис. 9.11). Точка наблюдения $\mathbf{r}$ находится внутри этой области. Пусть колебательная скорость плоского диска S равна $\upsilon_n\left(\mathbf{r}_0^{(S)}, t\right) = \upsilon_0\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)\exp(-i\omega t)$. Тогда на всей поверхности $z = 0$ выполняются такие граничные условия:

$$-\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial n} = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial z} = \upsilon_0\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right), \tag{9.64}$$

$$-\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\text{экран}} = \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{\text{экран}} = 0. \tag{9.65}$$

Давление в области существования звукового поля согласно (9.42) и (9.62) определяется соотношением

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^{(S)}\right|\right)}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^{(S)}\right|}\frac{\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial n}dS, \tag{9.66}$$

где интегрирование выполняется по поверхности диска S. Если принять во внимание, что $\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)}{\partial z} = \upsilon_0\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)$, и изменить направление нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S так, чтобы оно совпадало с направлением оси Oz, то (9.66) примет вид

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega\rho}{2\pi}\int_S \frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^{(S)}\right|\right)}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^{(S)}\right|}\upsilon_0\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)dS. \tag{9.67}$$

Формула (9.66) имеет простой физический смысл и выражает в математической форме принцип Гюйгенса для плоских источников, которые размещены в плоском жестком бесконечном экране. Ее суть состоит в том, что такое поле представляет собой суперпозицию полей точечных источников, расположенных на поверхности диска и излучающих в полупространство. Выражение (9.66) (или (9.67)) называют *интегралом Рэлея*.

В случае двумерной области при получении выражения для интеграла Рэлея нужно использовать функцию Грина свободного пространства (9.31) для линейного источника. Тогда функция Грина для полупространства с жесткой границей (см. рис. 9.10) имеет вид

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(k\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|\right)+\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(k\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'\right|\right).$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше при выводе формулы (9.67), получаем подобное выражение для двумерного пространства (сделайте самостоятельно):

$$p(\mathbf{r})=\frac{\omega\rho}{2}\int_S \upsilon_0\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right)H_0^{(1)}\left(k\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|\right)dS. \qquad (9.68)$$

Обозначим координаты векторов, которые определяют точку наблюдения в пространстве и на плоскости $z=0$, $\mathbf{r}=(x,z)$ и $\mathbf{r}_0^{(S)}=(x_0,0)$, соответственно (напомним, что в случае двумерной области, когда говорят о *плоской задаче,* поле не зависит от координаты y, рис. 9.10). Тогда $\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|=\sqrt{(x-x_0)^2+z^2}$, и формулу (9.68) перепишем в виде

$$p(x,z)=\frac{\omega\rho}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\upsilon_0(x_0)H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x-x_0)^2+z^2}\right)dx_0. \qquad (9.68а)$$

9.10. Излучение звука диском в акустически жестком экране

Излучатель в виде диска является очень важной моделью для реальных излучателей звука. Эта модель позволяет изучить некоторые основные закономерности работы реальных излучателей (электродинамический громкоговоритель, пьезо- и магнитострикционные преобразователи). Понятно, что звуковое поле будет зависеть от условий, в которых колеблется диск. Простейшей является ситуация, рассмотренная в разделе 5 — это колебание диска в бесконечной трубе с жесткими стенками, в которой диск создает плоскую волну. Задачи колебания диска в свободном пространстве, в бесконечном экране, экране конечных размеров, в некотором замкнутом или незамкнутом объеме являются интересными и важными для акустика. Этот перечень определяет довольно сложные в теоретическом плане задачи, но одну из них мы рассмотрим. Речь идет о колебании диска в жестком бесконечном экране. Наличие бесконечного экрана исключает взаимодействие волн, которые создаются диском в обоих полупространствах. Это действительно упрощает задачу и дает возможность определить поле диска без влияния этого взаимодействия. При отсутствии экрана или наличия экрана конечных размеров должно существовать взаимодействие, о характере которого на качественном уровне речь шла в конце параграфа 7.8 (к рассмотрению этих более сложных задач излучения мы вернемся в десятом разделе).

9.10.1. Поле на оси излучателя

Итак, пусть круглый плоский диск радиуса a колеблется по гармоническому закону с частотой ω в жестком бесконечном экране (рис. 9.12). Поместим в центре диска начало цилиндрической (R, ψ, z) системы координат. Рассмотрим сначала упрощенную ситуацию, а именно: определим поле на оси излучателя (ось Oz).

В соответствии с изложенным в предыдущем параграфе давление в любой точке пространства определяется интегралом Рэлея (9.67). Пусть амплитуда колебательной скорости на поверхности диска S имеет одинаковые значения υ_0, т.е. $\upsilon_0\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right) \equiv \upsilon_0$. Вследствие симметрии задачи, ведь точка наблюдения расположена на оси Oz, элементарным излучателем поверхности диска следует считать кольцо радиусом $R = \left|\mathbf{r}_0^{(S)}\right|$ и шириной dR, тогда площадь кольца равна $dS = 2\pi R dR$. На рис. 9.12 видно, что расстояние $|\mathbf{r}_M|$ между точками этого кольца и точкой наблюдения M, которая фигурирует в интеграле

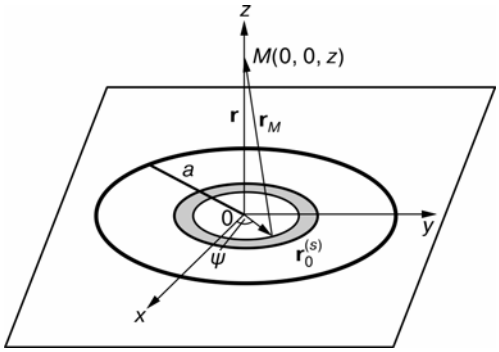


Рис. 9.12. Пример расчета поля на оси круглого диска

(9.67), равняется $|\mathbf{r}_M| = \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^{(S)}\right| = \sqrt{R^2 + z^2}$, где z — координата точки M вдоль оси Oz. С учетом этих замечаний интеграл (9.67) будет иметь вид

$$p(z) = -i\omega\rho\frac{\upsilon_0}{2\pi}\int_0^a \frac{\exp\left(ik\sqrt{R^2+z^2}\right)}{\sqrt{R^2+z^2}} 2\pi R dR. \qquad (9.69)$$

Проводя замену $R^2 + z^2 = \xi^2$ и принимая во внимание равенство $k = \omega / c$, получаем

$$p(z) = -ik\rho c\upsilon_0 \int\limits_z^{\sqrt{a^2+z^2}} \exp(ik\xi)\,d\xi = -\rho c\upsilon_0 \left[\exp\left(ik\sqrt{a^2+z^2}\right) - \exp(ikz)\right] =$$

$$= -i2\rho c\upsilon_0 \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\sqrt{a^2+z^2}+z\right)\right]\sin\left[\frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+z^2}-z\right)\right]. \qquad (9.70)$$

Проанализируем характерные особенности поля, описываемые выражением (9.70). Очевидно, что соотношение

$$\frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+z^2}-z\right) = \pi(m-1) \text{ или } \left(\sqrt{a^2+z^2}-z\right) = (m-1)\lambda,\ m = 1,2,3,\ldots \qquad (9.71)$$

позволяет определить значения z, при которых амплитуда давления $|p(z)|$ равна нулю. Аналогично определяются положения максимумов амплитуды давления $|p(z)|$:

$$\frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+z^2}-z\right) = \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

или

$$\left(\sqrt{a^2+z^2}-z\right) = (2n-1)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1,2,3,\ldots \qquad (9.72)$$

Понятно, что такая неравномерность звукового поля вдоль оси Oz, аналогично задаче о рассеянии звука на диске (см. параграф 9.8), обусловлена наличием на поверхности S диска зон Френеля. Как видим, нули давления вдоль оси Oz соответствуют четному числу зон Френеля, расположенных на излучателе, а максимумы — нечетному числу зон Френеля.

Определим координату z_1 наиболее отдаленного максимума (при $n = 1$). Согласно (9.72) возведем выражение $\sqrt{a^2+z_1^2} = z_1 + \lambda/2$ в квадрат и получим искомое расстояние z_1:

$$z_1 = \frac{a^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{4}. \qquad (9.73)$$

Если положить $a >> \lambda$, что интересно для практики, то получим такое соотношение:

$$z_1 \approx \frac{a^2}{\lambda}. \qquad (9.74)$$

Теперь рассмотрим, как ведет себя поле при $z >> a^2/\lambda$. Для этого разложим $\sqrt{a^2+z^2}$ в формуле (9.70) в ряд Тейлора и ограничимся двумя членами ряда (ведь $z >> a$): $\sqrt{a^2+z^2} = z\sqrt{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2} \approx z + \frac{a^2}{2z}$. Тогда

$$\sin\left[\frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+z^2}-z\right)\right] \approx \sin\left(\frac{ka^2}{4z}\right) \approx \frac{ka^2}{4z}.$$

Как следствие, при условиях $z >> a$ и $z >> a^2/\lambda$ получим

$$p(z) = -i\omega\rho\frac{V_0}{2\pi z}\exp(ikz), \tag{9.75}$$

где $V_0 = \pi a^2 \upsilon_0$ — объемная скорость диска. Таким образом, на больших расстояниях поле вдоль оси диска представляет собой сферическую расходящуюся волну и отличается от поля монополя (см. формулу (7.31)) только множителем 2, который появляется вследствие того, что звук в данном случае излучается в полупространство.

Например, на рис. 9.13 изображена нормированная зависимость $|p(z/\lambda)|/(\rho c\upsilon_0)$ при волновом радиусе $a/\lambda = 4$. Как видим, при $z/\lambda < z_1/\lambda \approx a^2/\lambda^2$ поле имеет сложную осциллирующую структуру, причем период осцилляций уменьшается при приближении к поверхности поршня. С увеличением z величина $|p|$ проходит сквозь нули и максимумы $2\rho c\upsilon_0$, которые в два раза больше, чем в плоской волне. Эту область значений z называют *ближней зоной излучателя*, или *зоной Френеля*. Поскольку определение протяженности ближней зоны есть в значительной мере произвольным, то, обычно, в качестве ее границы принимают большее значение, а именно: $4a^2/\lambda$.

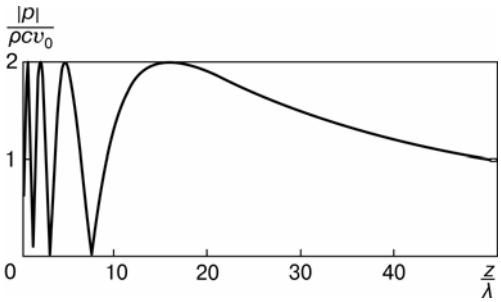


Рис. 9.15. Зависимость амплитуды давления на оси диска от расстояния z/λ при $a/\lambda = 4$

Отметим, что когда радиус диска стремится к бесконечности, то нет перехода к ситуации колебания бесконечной плоскости, которая

излучает плоскую волну ($|p| = \rho c \upsilon_0 = \text{const}$). Пространственные осцилляции вблизи диска при $ka \to \infty$ не сглаживаются, а их частота, наоборот, увеличивается. Это объясняется влиянием резкого края диска, где скорость уменьшается скачком от υ_0 до 0. В реальных условиях, осцилляции сглаживаются вследствие демпфирования или наличия конечной переходной области возле края диска.

Таким образом, до расстояния z_1 звуковое поле на оси излучателя характеризуется сильной интерференцией, которая обусловлена взаимным ослаблением и усилением вкладов от разных зон Френеля. При $z > z_1$ на поверхности диска располагается только часть первой зоны Френеля. Поскольку других зон нет, то интерференция отсутствует, и при дальнейшем увеличении расстояния звуковое давление уменьшается так, как в сферической волне (см. формулу (9.75)). Эти рассуждения указывают на то, что при измерении частотных характеристик излучателей (например, громкоговорителя) нужно быть осторожным, особенно в диапазоне высоких частот, когда интерференционное поле простирается на значительные расстояния от громкоговорителя.

Ближнее поле диска можно вычислить с помощью интеграла Рэлея (9.68), который справедлив для любых точек среды. Однако если точки наблюдения не лежат на оси, то проведение вычислений является непростым делом [41, 48, 59]. Задачу вычисления ближнего поля диска рассмотрим ниже (см. раздел 10), где на базе метода частичных областей построим достаточно эффективный алгоритм расчета.

9.10.2. Дальнее поле

Здесь рассмотрим более простую задачу — задачу об определении поля в дальней зоне. Подумаем, какие изменения следует сделать в рис. 9.12, чтобы он соответствовал исследованию дальнего поля. Во-первых, поскольку точка наблюдения представляет собой любую точку пространства, то соответствующая симметрия, как на рис. 9.12, отсутствует, а следовательно, элементарным источником является точечный источник на поверхности S диска; площадь элементарного источника $dS = RdRd\psi$. Во-вторых, точка наблюдения находится в дальнем поле, поэтому (см. параграф 7.6) лучи, вдоль которых распространяются волны от совокупности точечных источников на поверхности S диска, следует считать параллельными. Указанные соображения отражены на рис. 9.14; здесь показано два луча, которые проведены от двух точечных источников.

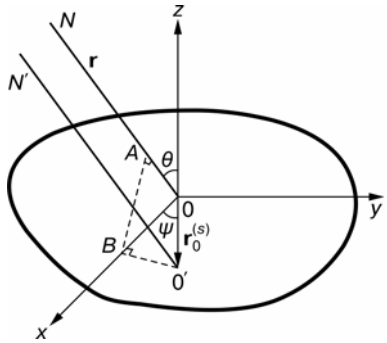


Рис. 9.14. Пример определения дальнего поля диска

Вернемся к интегралу Рэлея (9.68). Представим расстояние $\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right|$ от элементарного источника на диске (точки O' на рис. 9.14) до точки наблюдения M, которая находится на бесконечности, в виде $\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^{(S)}\right| = r-\varepsilon$, где $r = |\mathbf{r}|$ — длина луча ON от элементарного источника, расположенного в центре диска (точка O на рис. 9.14); ε — разность хода луча ON и любого другого (на рис. 9.14 это луч $O'N'$). Тогда, принимая во внимание, что $\upsilon_0\left(\mathbf{r}_0^{(S)}\right) \equiv \upsilon_0$, а, также учитывая, что для дальнего поля изменение амплитуды давления для любого элементарного источника на поверхности S диска определяется приближенно, как $1/r$, перепишем формулу (9.67) в виде

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega\rho\upsilon_0}{2\pi}\frac{\exp(ikr)}{r}\int_S \exp(-ik\varepsilon)dS. \qquad (9.76)$$

Теперь определим разность хода лучей ε через углы направления на точку наблюдения M и координаты элементарных источников на диске. Очевидно, что вследствие осевой симметрии диска поле давления будет зависеть только от угла θ (рис. 9.14). Введем на плоскости диска полярную систему координат ($R = \left|\mathbf{r}_0^{(S)}\right|$, ψ). Поскольку поле излучения диска зависит только от угла θ, то расположим опорный луч ON, например, в плоскости xOz. Тогда разность хода ε лучей ON и $O'N'$ будет равна отрезку OA, ведь $O'B \perp xOz$ и $BA \perp ON$ согласно построению. Отсюда $\varepsilon = OA = R\sin\theta\cos\psi$, а $dS = RdRd\psi$. Подставив эти выражения в (9.76), получим

$$p(r) = -\frac{i\omega\rho\upsilon_0}{2\pi}\frac{\exp(ikr)}{r}\int_0^a RdR\int_0^{2\pi}\exp\left(-ikR\sin\theta\cos\psi\right)d\psi. \qquad (9.77)$$

Используя известное соотношение [49]: $\int_0^{2\pi} \exp(\pm ib\cos\psi)d\psi = 2\pi J_0(b)$, где $J_0(b)$ — функция Бесселя нулевого порядка, от (9.77) переходим к выражению

$$p(r) = -i\omega\rho\upsilon_0 \frac{\exp(ikr)}{r}\int_0^R J_0(kR\sin\theta)RdR,$$

которое определяет сумму вкладов элементарных колец радиусом R и шириной dR. Учитывая далее другое известное свойство бесселевых функций [49]: $\int J_0(b)bdb = bJ_1(b)$ ($J_1(b)$ — функция Бесселя первого порядка), после несложных преобразований получаем окончательную формулу

$$p(r) = -i\omega\rho\frac{V_0}{2\pi}\frac{\exp(ikr)}{r}\left[\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right], \qquad (9.78)$$

где $V_0 = \pi a^2\upsilon_0$. При $\theta = 0°$ (здесь выражение в квадратных скобках в формуле (9.78) равно единице), эта формула переходит в полученную ранее формулу (9.75). При значениях угла θ, отличных от нуля, амплитуда давления, осциллируя, уменьшается. Осцилляции амплитуды давления определяются функцией $2J_1(\xi)/\xi$, где $\xi = ka\sin\theta$, характеристика направленности модулем $R(\xi) = \left|2J_1(\xi)/\xi\right|$.

График функции $\left|2J_1(\xi)/\xi\right|$ приведен на рис. 9.15. Максимум при $\xi = 0$ соответствует главному максимуму характеристики направленности в осевом направлении ($\theta = 0°$). Значения $\xi_1 \approx 3{,}83$, $\xi_3 \approx 7{,}02$, $\xi_5 \approx$ $\approx 10{,}17$,...дают возможность определить угол θ_1 и другие направления θ_3, θ_5,...нулевых значений диаграммы направленности: $\sin\theta_1 \approx 0{,}61\lambda/a$, $\sin\theta_3 \approx 1{,}11\lambda/a$, $\sin\theta_5 \approx 1{,}62\lambda/a$,... Положения дополнительных максимумов определяются по значениям аргумента $\xi_2 \approx 5{,}14$, $\xi_4 \approx 8{,}42$, $\xi_6 \approx 11{,}62$, ..., тогда максимумы равны: $R(\xi_2) \approx 0{,}13$, $R(\xi_4) \approx$ $\approx 0{,}065$, $R(\xi_6) \approx 0{,}04$, ...

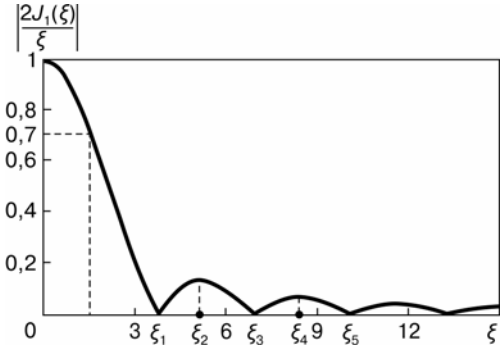


Рис. 9.15. График функции $\left|2J_1(\xi)/\xi\right|$

Пространственная характеристика направленности диска представляет собой поверхность тела вращения характеристики направленности $R(\theta)$ вокруг оси Oz. Понятно, что направленные свойства диска (и вообще любого источника) существенно зависят от волнового радиуса $ka = 2\pi a/\lambda$. Эту зависимость можно исследовать с помощью графика на рис. 9.15. Рекомендуем читателю самостоятельно написать программу для ЭВМ, которая даст возможность построить характеристику направленности диска в полярных координатах:

$$R(\theta) = \left| \frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta} \right| \tag{9.79}$$

и провести соответствующее исследование.

В завершении выполним простое графическое построение, которое иллюстрирует распределение в пространстве основной части энергии, излучаемой поршнем. Как уже отмечали, ближайший к оси диска (направление $\theta = 0$) нуль в характеристике направленности существует при $\sin\theta_1 = 0{,}61\lambda/a$. Если длина волны $\lambda << a$, то $\theta_1 \approx 0{,}61\lambda/a$. Теперь определим угол $\theta_{0,7}$, при котором давление относительно осевого направления уменьшается до уровня $1/\sqrt{2} \approx 0{,}7$, т.е. мощность уменьшается в 2 раза. Из рис. 9.15 имеем $\sin\theta_{0,7} \approx 0{,}25\lambda/a$, откуда $\theta_{0,7} \approx \lambda/4a$.

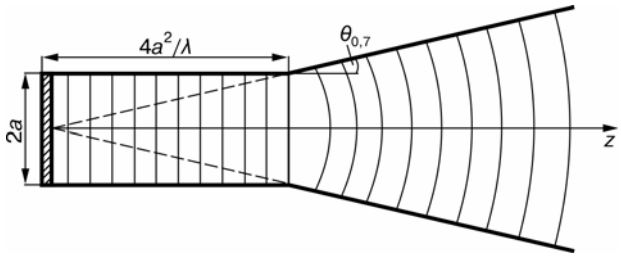


Рис. 9.16. Пример построения картины поля диска

На рис. 9.16 показано такое графическое построение: от краев диска параллельно оси проведены два отрезка длиной $4a^2/\lambda$ (протяженность ближней зоны); через их концы и центр диск проведены два луча. Угол θ, который образуют эти прямые с осью Oz, очевидно, определяется соотношением $\mathrm{tg}\theta = \dfrac{a}{(4a^2)/\lambda} = \dfrac{\lambda}{4a}$. При $a >> \lambda$ тангенс можно заменить его аргументом, итак, $\theta \approx \lambda/4a = \theta_{0,7}$, т.е. имеем углы, которые определяют уменьшение интенсивности звука в 2 раза. На рис. 9.16 графически изображена область, в которой сосредоточена основная часть энергии, излучаемой диском. Отметим, что в структу-

ре ближнего поля, которое будем исследовать ниже, энергия практически не расходится. Дальше от ближней зоны звуковое поле постепенно приобретает вид сферической расходящейся волны (напомним, что такая качественная картина наблюдается при значительных волновых размерах диска).

9.10.3. Сопротивление излучения

Как мы знаем, сопротивление излучения (см. формулу (7.16)) является важной интегральной характеристикой излучения, которая в виде одного комплексного числа дает возможность оценить свойства излучателя, характеризующие формирование потока звуковой энергии от поверхности колеблющегося тела в среду.

Определим сопротивление излучения круглого диска в жестком экране, который колеблется по гармоническому закону $\upsilon = \upsilon_0 \exp(-i\omega t)$. Для решения задачи необходимо знать распределение давления на поверхности диска, ведь силу реакции среды можно определить, проинтегрировав давление по поверхности диска $F = \int\limits_S p\big|_S \, dS$.

Поскольку формула (9.67) определяет давление в любой точке пространства, в том числе и на поверхности излучателя, то

$$p\big|_S = -\frac{i\omega\rho\upsilon_0}{2\pi} \int\limits_S \frac{\exp(ikr)}{r} dS, \qquad (9.80)$$

где r — расстояние между парой точек на поверхности S, одна из которых излучает, а вторая — является точкой наблюдения (рис. 9.17).

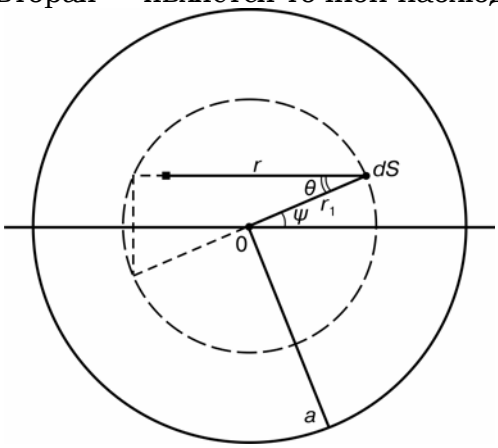


Рис. 9.17. Пример вычисления интеграла (9.81)

Итак, согласно определению имеем следующую формулу для сопротивления излучения диска в жестком бесконечном экране:

$$Z_{\text{и}} = -\frac{i\omega\rho\upsilon_0}{2\pi}\int\limits_S\int\limits_S \frac{\exp(ikr)}{r}dSdS. \qquad (9.81)$$

Дальнейшие расчеты сводятся к вычислению интеграла (9.81). Эта задача была решена Рэлеем. Введем на поверхности диска полярные координаты r_1, ψ и рассмотрим некоторый элемент dS его поверхности, расположенный на расстоянии r_1 от его центра *ОБ* (рис. 9.17). Определим силу реакции среды, которая действует на внутреннюю относительно элемента dS часть поверхности диска (круг радиусом r_1), обусловленную излучением только этого элемента:

$$dF = -\frac{i\omega\rho\upsilon_0 dS}{2\pi}\int\limits_{S_1}\frac{\exp(ikr)}{r}dS_1, \qquad (9.82)$$

где S_1 — круг радиусом r_1. Отметим, что выражение (9.82) определяет также и силу, которая действует на элемент dS, обусловленную излучением круга радиусом r_1. Удваивая выражение (9.82), получаем суммарную силу $2dF$. Если теперь рассмотреть разные элементы поверхности диска и соответствующие им круги и рассчитать все силы $2dF$, то таким образом мы учтем влияние каждого элемента поверхности на другие точки диска.

Перейдем к вычислению интеграла (9.82). Введем еще одну систему полярных координат r, θ, центр которой совместим с рассматриваемым (излучающим) элементом поверхности dS. При интегрировании по S_1 координата θ изменяется от $-\pi/2$ к $+\pi/2$, а координата r (вдоль луча $\theta = \text{const}$) — от 0 до $2r_1\cos\theta$. Площадь элемента поверхности определяется формулой $dS_1 = rdrd\theta$. Итак,

$$2dF = -i\omega\rho\frac{\upsilon_0 dS}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{2r_1\cos\theta}\frac{\exp(ikr)}{r}rdr =$$

$$= \rho c\upsilon_0 dS\left(1 - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\exp(i2kr_1\cos\theta)d\theta\right). \qquad (9.83)$$

Интеграл в формуле (9.83) является табличным: $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos(2kr_1\cos\theta)d\theta = J_0(2kr_1)$, $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sin(2kr_1\cos\theta)d\theta = \mathbf{S}_0(2kr_1)$.

Отсюда

$$2dF = \rho c\upsilon_0 dS(1 - J_0(2kr_1) - i\mathbf{S}_0(2kr_1)), \qquad (9.84)$$

где $J_0(2kr_1)$ и $\mathbf{S}_0(2kr_1)$ — функции Бесселя и Струве* нулевого порядка.

---

* Струве Василий Яковлевич (1793—1864) — российский астроном и геодезист.

Теперь сложим все силы $2dF$, причем в такой последовательности: сначала сложим все элементы, которые лежат на окружности радиусом r_1 (тонкое кольцо, рис. 9.17), а потом — вклады всех таких колец, т.е.

$$F = \rho c \upsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \left[1 - J_0(2kr_1) - i\mathbf{S}_0(2kr_1)\right] r_1 dr_1 d\psi. \qquad (9.85)$$

Интегрирование по углу ψ сводится к умножению на 2π, а при вычислении интеграла по r_1 используем справочную математическую литературу [49]:

$$\int_0^{\xi} J_0(z) z dz = \xi J_1(\xi), \quad \int_0^{\xi} \mathbf{S}_0(z) z dz = \xi \mathbf{S}_1(\xi). \qquad (9.86)$$

С учетом (9.85) после несложных преобразований получим окончательную формулу для сопротивления излучения

$$Z_{\text{и}} = \rho c S(R - iX), \quad S = \pi a^2, \qquad (9.87)$$

где

$$R = 1 - \frac{2J_1(2ka)}{2ka}, \quad X = \frac{2\mathbf{S}_1(2ka)}{2ka}. \qquad (9.88)$$

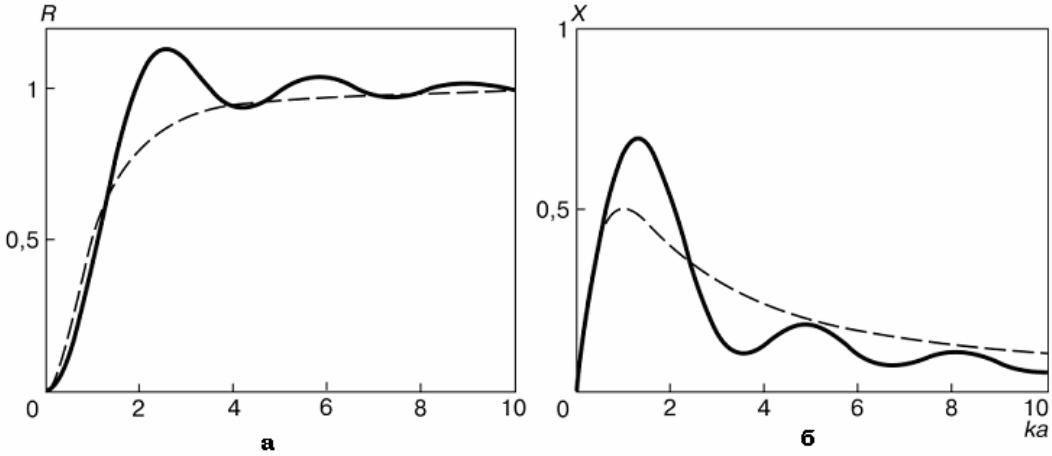


Рис. 9.18. Зависимости коэффициентов R (*а*) и X (*б*) от волнового радиуса ka: сплошные кривые — для диска в экране; штриховые — для пульсирующей сферы

Графики коэффициентов R и X, которые определяют активную и реактивную составляющие сопротивления излучения, приведены на рис. 9.18. Сравнивая кривые для диска и сферы, отмечаем, что они подобны, особенно на начальных участках. Это подтверждает и ана-

лиз формул (9.88) при малых значениях ka. Действительно, ряды для функций $J_1(2ka)$ и $S_1(2ka)$ имеют вид

$$J_1(2ka) = ka\left[1 - \frac{(ka)^2}{1!2!} + \frac{(ka)^4}{2!3!} - \frac{(ka)^6}{3!4!} + \ldots\right], \tag{9.89}$$

$$\mathbf{S}_1(2ka) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(2ka)^2}{1^2 \cdot 3} - \frac{(2ka)^4}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{(2ka)^6}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \ldots\right], \tag{9.90}$$

тогда формулы (9.88) запишем следующим образом:

$$R = \frac{(ka)^2}{2}\left[1 - \frac{(ka)^2}{6} + \frac{(ka)^4}{72} - \ldots\right], \tag{9.91}$$

$$X = \frac{8}{3}\frac{ka}{\pi}\left[1 - \frac{(2ka)^2}{15} + \frac{(2ka)^2}{525} - \ldots\right]. \tag{9.92}$$

Ограничиваясь низшими степенями разложения, получаем

$$R \approx \frac{(ka)^2}{2}, \quad X \approx \frac{8}{3}\frac{ka}{\pi}. \tag{9.93}$$

Как видим, при малых ka, как и в случае пульсирующей сферы, активная компонента сопротивления излучения пропорциональна частоте в квадрате (волновому радиусу ka в квадрате), а реактивная — прямо пропорциональна частоте. Это совпадение не случайное. Дело в том, что при $a << \lambda$ диск в бесконечном экране представляет собой точечный источник и, соответственно, излучает сферическую волну (а именно тип волны определяет сопротивление излучения).

С ростом волнового размера ka проявляется еще одна закономерность, которую мы уже наблюдали в случае пульсирующей сферы: активная компонента сопротивления излучения стремится к своему максимуму, который равен сопротивлению излучения диска в трубе (ρcS), а реактивная компонента — к нулю (рис. 9.18).

Комплексный характер сопротивления излучения объясняется так же, как и в случае пульсирующей сферы: действительная часть связана с потерями энергии на излучение, а отрицательная мнимая часть представляет собой инерционное сопротивление присоединенной массы. Из формул (9.87), (9.88) нетрудно получить, что $M_{\text{пр}} = \frac{\rho\pi a}{k^2} S_1(2ka)$. При условии $ka << 1$, принимая во внимание

формулы (9.93), имеем $M_{пр} \approx 8\rho a^3/3$. При увеличении волнового радиуса ka диска присоединенная масса $M_{пр}$ уменьшается.

9.11. Рассеяние звука на клине

Задача о рассеянии волны на клине очень важна, ведь с ее решением связано много представлений о волновых процессах в акустике, оптике и радиофизике. Ее всесторонний анализ можно найти в работах [57, 61]. Сначала рассмотрим случай дифракции цилиндрической волны на клине.

9.11.1. Рассеяние цилиндрической звуковой волны на клине

Итак, имеем двумерную задачу рассеяния цилиндрической волны на клине (рис. 9.19). Волна создается гармоническим точечным источником в виде бесконечно длинной линии, перпендикулярной к плоскости рисунка и параллельной ребру клина. Расположим центр O полярной системы координат (r, ψ) на вершине клина, его внешний угол равен α, тогда на границах клина имеем $\psi = 0$, $r = [0, \infty)$ и $\psi = \alpha$, $r = [0, \infty)$. Источник находится в точке M_0 с координатами вектора $\mathbf{r}_0 = \{r_0, \psi_0\}$, а точка наблюдения M определяется вектором $\mathbf{r} = \{r, \psi\}$; расстояние между точками M_0 и M равно: $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| = R$.

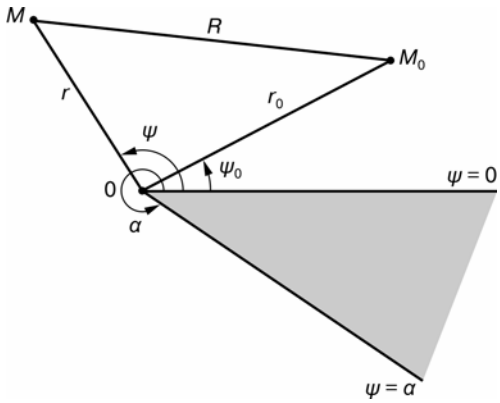


Рис. 9.19. Пример двумерной задачи рассеяния цилиндрической волны на клине

Функция Грина для свободного пространства в двумерном случае:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|\right) \tag{9.94}$$

удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+k^2G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=-\frac{\delta(r-r_0)}{r}\delta(\psi-\psi_0), \tag{9.95}$$

где оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}. \tag{9.96}$$

Отметим, что оператор Лапласа действует на функцию G по координатам точки наблюдения r,ψ, а не по координатам источника r_0,ψ_0.

Необходимо построить функцию Грина для уравнения (9.95), которая удовлетворяет граничным условиям на границах клина $\psi = 0$ и $\psi = \alpha$. Проведем необходимые выкладки, как это сделано в работе [61]. Рассмотрим сначала однородное уравнение, которое соответствует уравнению (9.95), относительно некоторой функции $F(r,\psi)$:

$$\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2F}{\partial\psi^2}+k^2F=0. \tag{9.97}$$

Используя метод разделения переменных, будем искать решение в виде $F(r,\psi) = R(r)\Psi(\psi)$. Выполняя уже знакомые нам преобразования, записываем (9.97) следующим образом:

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{r}{R(r)}\frac{dR(r)}{dr}+k^2r^2=-\frac{d^2\Psi(\psi)}{d\psi^2}\frac{1}{\Psi(\psi)}. \tag{9.98}$$

Левая часть зависит только от r, правая — только от ψ, поэтому каждая из них может равняться только постоянной величине. Обозначив ее через υ^2, получим два уравнения:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr}+\left(k^2-\frac{\upsilon^2}{r^2}\right)R(r)=0, \tag{9.99}$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+\upsilon^2\Psi(\psi)=0. \tag{9.100}$$

Уравнение (9.99) мы рассматривали, когда исследовали цилиндрический излучатель (см. (7.115)). Его решение определяется цилиндрическими функциями $J_\upsilon(kr)$ и $H_\upsilon^{(1)}(kr)$; решением уравнения (9.100) есть тригонометрические функции $\cos(\nu\psi)$ и $\sin(\nu\psi)$. В задаче об излучении звука цилиндром параметр υ был целым числом, которое определялось условием однозначности поля при обходе вокруг цилиндра. В клиновидной области поле определяется в области изменения угла ψ от 0 до α, поэтому υ в общем случае должно быть нецелым.

Рассмотрим сначала клин с акустически жесткими границами. Граничные условия на границах клина таковы:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\psi=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\psi=\alpha} = 0. \tag{9.101}$$

Поскольку дифференцирование по нормали эквивалентно дифференцированию по произведению $r\psi$ при постоянном r и переменном ψ, то граничные условия (9.101) примут вид

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Psi}{\partial \psi}\right|_{\psi=\alpha} = 0. \tag{9.102}$$

Решение уравнения (9.100) имеет вид $\Psi(\psi) = A\cos(\upsilon\psi) + B\sin(\upsilon\psi)$. Из граничных условий (9.102) при $\psi = 0$ находим $B = 0$, а при $\psi = \alpha$ получим

$$\upsilon_m = \frac{m\pi}{\alpha}, \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{9.103}$$

Цилиндрические функции следует выбирать на основе следующих рассуждений. При $r > r_0$ поле должно состоять только из расходящихся волн $H^{(1)}_{\upsilon_m}(kr)$. При $r < r_0$ могут быть как расходящиеся, так и сходящиеся к началу координат волны. Но в любой точке (кроме точки, в которой расположен источник) поле должно быть конечным. Поэтому и в точке $r = 0$, где находится начало координат, значение давления должно быть конечным. Отсюда при $r < r_0$ зависимость поля от расстояния должна определяться функцией $J_{\upsilon_m}(kr)$.

Таким образом, поле давления может быть записано в виде сумм, которые состоят из слагаемых вида:

$$a_m J_{\upsilon_m}(kr)\cos(\upsilon_m\psi), \quad \text{если} \quad r < r_0,$$

$$b_m H^{(1)}_{\upsilon_m}(kr)\cos(\upsilon_m\psi), \quad \text{если} \quad r > r_0. \tag{9.104}$$

Понятно, что поле давления должно быть непрерывным при переходе через окружность $r = r_0$. Для того чтобы выполнялось это условие, приравняем выражения (9.104) при $r = r_0$, тогда будем иметь

$$a_m J_{\upsilon_m}(kr_0) = b_m H^{(1)}_{\upsilon_m}(kr_0). \tag{9.105}$$

Введем обозначение $c_m = b_m / J_{\upsilon_m}(kr_0)$, которое позволит записать поле в более удобном для нас виде. Учитывая соотношение (9.105), по-

лучаем $a_m = c_m H^{(1)}_{\upsilon_m}(kr_0)$. Как следствие, выражения (9.104) можно переписать в виде

$$c_m J_{\upsilon_m}(kr) H^{(1)}_{\upsilon_m}(kr_0)\cos(\nu_m\psi), \quad \text{если} \quad r < r_0, \tag{9.106}$$

$$c_m J_{\upsilon_m}(kr_0) H^{(1)}_{\upsilon_m}(kr)\cos(\nu_m\psi), \quad \text{если} \quad r > r_0. \tag{9.106а}$$

Используя специальное обозначение [57, 61] для расстояний r и r_0, формулы (9.106), (9.106а) можно представить единым образом

$$c_m J_{\upsilon_m}(kr_<) H^{(1)}_{\upsilon_m}(kr_>)\cos(\upsilon_m\psi), \tag{9.107}$$

где $r_<$ и $r_>$ — меньшее и большее из расстояний r и r_0.

Таким образом, функцию Грина для внешней области акустически жесткого клина можно определить как сумму ряда:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_{\upsilon_m}(kr_<) H^{(1)}_{\upsilon_m}(kr_>)\cos(\upsilon_m\psi). \tag{9.108}$$

Для того чтобы определить коэффициенты c_m, следует подставить (9.108) в уравнение (9.95) и положить $r = r_0$, т. е. $r_< = r_>$ и $\psi = \psi_0$. Понятно, что непосредственная подстановка не приводит к цели, поскольку в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ поле имеет особенность. Запишем для сокращения дальнейших преобразований выражение (9.108) в виде

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(r)\cos\left(\frac{m\pi\psi}{\alpha}\right). \tag{9.109}$$

Разложим дельта-функцию $\delta(\psi - \psi_0)$ в ряд Фурье по функциям $\cos(m\pi\psi/\alpha)$:

$$\delta(\psi - \psi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos\left(\frac{m\pi\psi}{\alpha}\right). \tag{9.110}$$

Помножим обе части (9.110) на $\cos(n\pi\psi/\alpha)$ и интегрируем в пределах от 0 до α. Учитывая, что

$$\int_0^{\alpha} \cos\left(\frac{m\pi\psi}{\alpha}\right)\cos\left(\frac{n\pi\psi}{\alpha}\right)d\psi = \begin{cases} \alpha, & \text{если } m = n = 0, \\ \alpha/2, & \text{если } m = n \neq 0, \\ 0, & \text{если } m \neq n, \end{cases} \tag{9.111}$$

получаем

$$\delta(\psi - \psi_0) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos\left(\frac{m\pi\psi}{\alpha}\right)\cos\left(\frac{m\pi\psi_0}{\alpha}\right), \tag{9.112}$$

где $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_m = 2$ при $m > 0$. Подставляя выражения (9.109), (9.112) в уравнение (9.95), получаем

$$\frac{d^2 A_m(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA_m(r)}{dr} - \frac{\upsilon_m^2}{r^2} A_m(r) + k^2 A_m(r) = -\frac{\delta(r - r_0)}{r}\frac{\varepsilon_m}{\alpha}\cos\left(\frac{m\pi\psi_0}{\alpha}\right),$$

или

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{dA_m(r)}{dr}\right] + \left(k^2 r^2 - \upsilon_m^2\right)\frac{A_m(r)}{r} = -\delta(r - r_0)\frac{\varepsilon_m}{\alpha}\cos\left(\frac{m\pi\psi_0}{\alpha}\right).$$

Проинтегрируем левую и правую части этого уравнения на некотором промежутке (r_1, r_2), внутри которого находится точка r_0:

$$\left[r\frac{dA_m(r)}{dr}\right]_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2}\left(k^2 r^2 - \upsilon_m^2\right)\frac{A_m(r)}{r}dr = -\frac{\varepsilon_m}{\alpha}\cos\left(\frac{m\pi\psi_0}{\alpha}\right).$$

Подставляя верхний и нижний пределы, следует использовать выражения (9.106) и (9.106а), соответственно. Стягивая промежуток интегрирования в точку r_0, получаем, что второе слагаемое в левой части равно нулю, а оставшиеся члены удовлетворяют соотношению:

$$c_m k r_0\left[J_{\upsilon_m}(kr_0)H_{\upsilon_m}^{(1)\prime}(kr_0) - J'_{\upsilon_m}(kr_0)H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr_0)\right] = -\frac{\varepsilon_m}{\alpha}\cos\left(\frac{m\pi\psi_0}{\alpha}\right).$$

Согласно свойству цилиндрических функций [49] выражение в квадратных скобках равно $2i/\pi k r_0$. Тогда определяя c_m и подставляя его значение в (9.108), получаем искомую функцию Грина для клина с акустически жесткими границами:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{\pi i}{2\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m J_{\upsilon_m}(kr_<)H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr_>)\cos(\upsilon_m\psi)\cos(\upsilon_m\psi_0). \qquad (9.113)$$

Напомним, что $\upsilon_m = m\pi/\alpha$. Для клина с акустически мягкими границами при условиях на границах $p|_{\psi=0} = 0$ и $p|_{\psi=\alpha} = 0$, выполняя аналогичные действия (сделайте самостоятельно), имеем

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{\pi i}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}J_{\upsilon_m}(kr_<)H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr_>)\sin(\upsilon_m\psi)\sin(\upsilon_m\psi_0). \qquad (9.114)$$

Отметим, что, как и должно быть, функции Грина (9.113) и (9.114) являются симметричными относительно координат (r,ψ) и (r_0,ψ_0), следовательно, они удовлетворяют принципу взаимности.

9.11.2. Рассеяние плоской звуковой волны на клине

Наличие функций Грина для клина позволяет рассмотреть задачу о рассеянии плоской волны на клине. Очевидно, что для этого следует переместить линейный источник подальше от клина. Итак, устремим в формулах (9.113), (9.114) величину $kr_>$ в бесконечность и воспользуемся асимптотическим представлением функции Ханкеля при $kr_0 = kr_> >> 1$:

$$H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr_0) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} \exp\left(ikr_0 - \frac{i\nu_m \pi}{2} - \frac{i\pi}{4}\right). \qquad (9.115)$$

Таким образом, имеем линейный источник на большом волновом расстоянии от клина, т.е. можно считать, что на клин набегает волна с плоским фронтом. Кроме этого, нормируем звуковое давление к давлению на ребре, которое создает точечный (линейный) источник в свободном пространстве. Воспользуемся для этого функцией Грина (9.94), где положим $r = 0$, $kr_0 >> 1$. Тогда

$$G(0, \mathbf{r}_0) \approx \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} \exp\left(ikr_0 - \frac{i\pi}{4}\right). \qquad (9.116)$$

Поделив выражения (9.113) и (9.114) на правую часть (9.116) и воспользовавшись асимптотикой (9.115), запишем полное звуковое поле давления, которое возникает вследствие рассеяния плоской звуковой волны единичной амплитуды:

для акустически жесткого клина

$$p = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \exp\left(-\frac{i\upsilon_m \pi}{2}\right) J_{\upsilon_m}(kr) \cos(\upsilon_m \psi) \cos(\upsilon_m \psi_0), \qquad (9.117)$$

для акустически мягкого клина

$$p = \frac{4\pi}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{i\upsilon_m \pi}{2}\right) J_{\upsilon_m}(kr) \sin(\upsilon_m \psi) \sin(\upsilon_m \psi_0). \qquad (9.118)$$

Итак, формулы (9.117) и (9.118) определяют дифракцию плоской волны типа

$$p_0 = \exp(-i\mathbf{kr}) = \exp[-ikr\cos(\psi - \psi_0)], \qquad (9.119)$$

фронт которой параллелен ребру клина, а направление падения определяется волновым вектором $\mathbf{k}(|\mathbf{k}| = k)$, перпендикулярным к ребру клина; $\mathbf{r} = \{r, \psi\}$ — полярные координаты произвольной точки M звукового поля; ψ_0 — угол падения плоской волны.

9.11.3. Условие на ребре

В задаче о рассеянии волны на клине есть существенная особенность, которая отсутствует в рассмотренных выше задачах дифракции волны на цилиндре или сфере, а именно: наличие ребра (острого излома) на поверхности тела, рассеивающего звук. Дело в том, что наличие ребра - это не просто изменение геометрии тела, оно приводит к специфическому поведению звукового поля вблизи ребра.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим поле вблизи ребра, т.е. при $kr \to 0$. Принимая во внимание, что при $kr \to 0$ асимптотика функций Бесселя определяется соотношением $J_{\upsilon_m}(kr) \sim (kr)^{\nu_m}$, выражения (9.117) и (9.118) можно соответственно записать в виде

$$p^{(ж)} \approx A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (kr)^{\frac{m\pi}{\alpha}} \cos\left(\frac{m\pi\psi}{\alpha}\right), \tag{9.120}$$

$$p^{(м)} \approx \sum_{m=1}^{\infty} B_m (kr)^{\frac{m\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{m\pi\psi}{\alpha}\right), \tag{9.121}$$

где (для сокращения записи) A_m и B_m — величины, которые не зависят от r и ψ. Как видим, давление вблизи ребра определяется некоторой конечной величиной.

Определим радиальную υ_r и угловую υ_ψ составляющие колебательной скорости вблизи ребра клина с жесткими границами:

$$\upsilon_r^{(ж)} = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p^{(ж)}}{\partial r} \approx \sum_{m=1}^{\infty} C_m (kr)^{\frac{m\pi}{\alpha}-1} \cos\left(\frac{m\pi\psi}{\alpha}\right), \tag{9.122}$$

$$\upsilon_\psi^{(ж)} = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p^{(ж)}}{r\partial\theta} \approx \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{C}_m (kr)^{\frac{m\pi}{\alpha}-1} \sin\left(\frac{m\pi\psi}{\alpha}\right). \tag{9.123}$$

В случае когда $\alpha \le \pi$, все слагаемые в рядах (9.122) и (9.123) являются конечными, а, следовательно, особенностей колебательной скорости вблизи ребра не возникает. Ситуация изменяется если $\alpha > \pi$. В этом случае первые слагаемые в указанных рядах при $kr \to 0$ стремятся к бесконечности. Таким образом, если $\alpha > \pi$, то давление и составляющие колебательной скорости вблизи ребра жесткого клина определяются соотношениями:

$$p^{(ж)} \approx A_0 + A_1 (kr)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\left(\frac{\pi\psi}{\alpha}\right), \tag{9.124}$$

$$\upsilon_r^{(ж)} \approx C_1 (kr)^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos\left(\frac{\pi\psi}{\alpha}\right), \tag{9.125}$$

$$\upsilon_\psi^{(ж)} \approx \tilde{C}_1 (kr)^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin\left(\frac{\pi\psi}{\alpha}\right). \tag{9.126}$$

При $kr \to 0$ колебательная скорость стремится к бесконечности, причем наибольшая скорость будет в случае $\alpha = 2\pi$, т. е. в окрестности полуплоскости. В таком случае при приближении к ребру скорость возрастает пропорционально $(kr)^{-\frac{1}{2}}$. Если $\alpha = 3\pi/2$, то рост скорости определяется множителем $(kr)^{-\frac{1}{3}}$. Для клина с мягкими границами характер особенности колебательной скорости вблизи ребра будет таким же, как и в случае клина с жесткими границами (убедитесь в этом самостоятельно).

Появление бесконечных величин колебательной скорости в окрестности ребра клина, который окружает идеальная среда, обусловлено тем, что поверхности клина мы воспринимаем на основе представлений евклидовой геометрии (таких как точка, линия, плоскость). Понятно, что в реальной среде такие бесконечные величины отсутствуют, ведь, во-первых, реальное ребро - это не линия, и, во-вторых, для реальной среды характерна вязкость.

Формулы (9.124)-(9.126) определяют поле давления и колебательной скорости вблизи ребра клина в идеальной среде, т.е. дают силовую и кинематическую картины. Возникает естественный вопрос: как такие особенности поля влияют на энергетические характеристики поля вблизи ребра. Для ответа на него оценим значение энергии в окрестности ребра и потока мощности через поверхность, которая окружает ребро.

Для оценки энергии, которая накапливается в некотором объеме V, в окрестности ребра следует оценить интегралы $\int |p|^2 dV$ и $\int |\upsilon|^2 dV$, где элементарный объем (для плоской задачи) $dV = rdrd\psi$. Согласно (9.124)—(9.126) для *плотности энергии* выполняются неравенства

$$\int |p|^2 dV < \infty, \quad \int |\upsilon|^2 dV < \infty \tag{9.127}$$

при любом угле клина $\pi < \alpha \le 2\pi$. Это означает, что в конечной области вокруг ребра накапливается конечная энергия.

Теперь определим радиальный поток мощности через цилиндрическую поверхность малого радиуса r, окружающую ребро клина, т.е.

нужно исследовать произведение rI_r, где I_r — интенсивность в радиальном направлении. Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{r\to 0}(rI_r) = \frac{1}{4}\lim_{r\to 0}\left[r\left(p\upsilon_r^* + p^*\upsilon_r\right)\right] = 0. \qquad (9.128)$$

Физически условие (9.128) означает, что ребро не излучает энергию. Условие (9.128) является следствием выполнения условия (9.127).

Убедимся в том, что условия, противоположные условиям (9.127), (9.128), выполняются для точечного источника (для плоской задачи это линейный источник). Для поля линейного источника давление определяется функцией Ханкеля нулевого порядка, т.е. $p \sim H_0^{(1)}(kr)$, а радиальная скорость в окрестности источника $\upsilon_r \sim H_1^{(1)}(kr)$. Поскольку особенностью функций Ханкеля при $r \to 0$ есть $H_0^{(1)}(kr) \sim \ln r$ и $H_1^{(1)}(kr) \sim 1/r$, а элемент объема для плоской задачи $dV = rdrd\psi$, то понятно, что *плотность энергии вокруг точечного источника неинтегрируемая,* т.е.

$$\int\left(|p|^2 + |\upsilon_r|^2\right)dV = \infty. \qquad (9.129)$$

Соответственно, поток энергии через поверхность, окружающую источник, удовлетворяет условию $\lim\limits_{r\to 0}(rI_r) \neq 0$.

Отметим, что энергетические условия (9.127), (9.128) и соответствующие им соотношения (9.124)—(9.126) называются *условиями Мейкснера* (Meixner).

В завершение параграфа сделаем следующие обобщения. Полученные результаты позволяют сформулировать условие на ребре в задачах излучения и рассеяния звука. Его суть в том, что для модели идеальной сжимаемой жидкости звуковое поле в окрестности ребер (при угле $\alpha > \pi$) должно иметь локальные особенности в поле скорости. Величина угла α клина определяет скорость стремления составляющих колебательной скорости к бесконечности и их угловую зависимость в окрестности ребра (см. (9.124)—(9.126)). Эти особенности можно определить независимо от решения граничной задачи для области с ребрами и, вообще, считать известными. Подчеркнем, что определение условий на ребре — это определение не только характера особенности, но и — угловой зависимости поля вблизи ребра. Эти априорные знания позволяют существенно повысить эффективность числового алгоритма решения граничных задач для областей с ребрами (см. ниже параграф 10.2).

9.12. Рассеяние звука на клине с цилиндром в вершине

Рассмотрим плоскую задачу рассеяния цилиндрической звуковой волны на объекте, показанном на рис. 9.20. Его конфигурация представляет собой комбинацию цилиндра радиуса b и клина, образованного двумя полуплоскостями. Ось цилиндра совпадает с ребром клина.

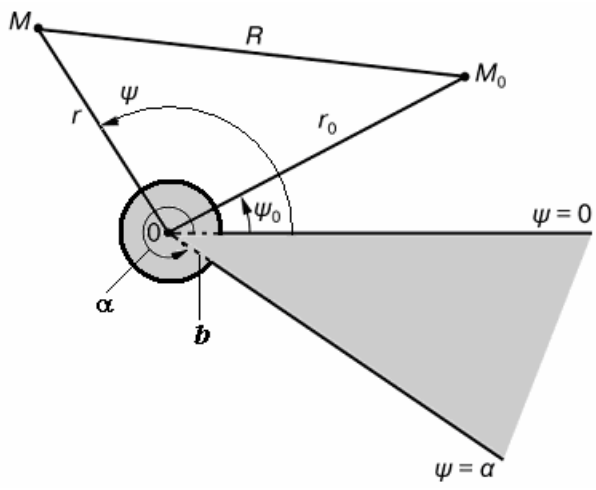


Рис. 9.20. Пример двумерной задачи рассеяния цилиндрической волны на клине с цилиндром в вершине

Как и на рис. 9.19, расположим центр O полярной системы координат (r,ψ) на вершине клина, его внешний угол равен α, тогда на границах клина имеем $\psi = 0$, $r = [b,\infty)$ и $\psi = \alpha$, $r = [b,\infty)$. Гармонический источник находится в точке M_0 с координатами вектора $\mathbf{r}_0 = \{r_0, \psi_0\}$, а точка наблюдения M определяется вектором $\mathbf{r} = \{r,\psi\}$; расстояние между точками M_0 и M равно: $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| = R$. Область пространства, являющаяся внешностью клина с цилиндром в вершине (тут располагаются точка наблюдения и источник), обозначим Ω.

Итак, рассматривается следующая задача для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta p(r,\psi) + k^2 p(r,\psi) = -\frac{\delta(r-r_0)}{r}\delta(\psi-\psi_0), \quad \mathbf{r}\in\Omega, \quad \mathbf{r}\neq\mathbf{r}_0, \quad (9.130)$$

$$\frac{\partial p(r,0)}{\partial\psi} = 0, \quad \frac{\partial p(r,\alpha)}{\partial\psi} = 0, \quad r > b, \quad (9.131)$$

$$\frac{\partial p(b,\psi)}{\partial r}=0, \quad \psi\in(0,\alpha). \tag{9.132}$$

Условия (9.131) соответствуют жестким поверхностям клина, а условие (9.132) — жесткой поверхности цилиндра. Понятно, что можно рассмотреть ситуацию, когда одна или обе указанные поверхности являются акустически мягкими. Оператор Лапласа в полярных координатах определен формулой (9.96).

Таким образом, поставлена задача об определении звукового поля в области Ω при расположении в точке $\mathbf{r}_0=\{r_0,\psi_0\}$ источника, звуковое поле которого в свободном пространстве определяется функцией Грина для свободного пространства (см. формулу (9.94))

$$p_0(r,\psi)\equiv G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(k|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|\right). \tag{9.133}$$

Анализ такой задачи, с одной стороны может иметь практический интерес, а с другой — является поучительным примером построения функции Грина для достаточно сложной области.

Решение задачи (9.130) — (9.132) ищем в виде

$$p(r,\psi)=p_1(r,\psi)+p_2(r,\psi), \tag{9.134}$$

где $p_1(r,\psi)$ — решение аналогичной задачи для внешности обычного клина (рис. 9.19, эту область обозначим Ω_1):

$$\Delta p_1(r,\psi)+k^2p_1(r,\psi)=-\frac{\delta(r-r_0)}{r}\delta(\psi-\psi_0), \quad \mathbf{r}\in\Omega_1, \quad \mathbf{r}\neq\mathbf{r}_0, \tag{9.135}$$

$$\frac{\partial p_1(r,0)}{\partial\psi}=0, \quad \frac{\partial p_1(r,\alpha)}{\partial\psi}=0, \quad r>0. \tag{9.136}$$

Тогда для функции $p_2(r,\psi)$ получаем следующую граничную задачу в области Ω:

$$\Delta p_2(r,\psi)+k^2p_2(r,\psi)=0, \quad \mathbf{r}\in\Omega, \tag{9.137}$$

$$\frac{\partial p_2(r,0)}{\partial\psi}=0, \quad \frac{\partial p_2(r,\alpha)}{\partial\psi}=0, \quad r>b. \tag{9.138}$$

$$\frac{\partial p_2(b,\psi)}{\partial r}=-\frac{\partial p_1(b,\psi)}{\partial r}, \quad \psi\in(0,\alpha). \tag{9.139}$$

Обратите внимание на соотношение (9.139); именно при таком условии, для решения в виде (9.134), будет выполнено условие (9.132).

Решение задачи (9.135), (9.136) нам уже известно (см. (9.113)):

$$p_1(\mathbf{r}) = \frac{\pi i}{2\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_{\upsilon_m}(kr) H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr_0) \cos(\upsilon_m \psi) \cos(\upsilon_m \psi_0), \quad r < r_0, \tag{9.140}$$

$$p_1(\mathbf{r}) = \frac{\pi i}{2\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_{\upsilon_m}(kr_0) H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr) \cos(\upsilon_m \psi) \cos(\upsilon_m \psi_0), \quad r > r_0, \tag{9.141}$$

где $\upsilon_m = m\pi/a$, m=0,1,2,... В частности для нормальной производной на поверхности цилиндра имеем

$$\frac{\partial p_1(b,\psi)}{\partial r} = \frac{\pi i}{2\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J'_{\upsilon_m}(kb) H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr_0) \cos(\upsilon_m \psi) \cos(\upsilon_m \psi_0), \quad \psi \in (0,\alpha), \tag{9.142}$$

Функцию p_2 будем искать в виде суперпозиции цилиндрических волн, уходящих от клина,

$$p_2(\mathbf{r}) = \frac{\pi i}{2\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m C_m H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr) \cos(\upsilon_m \psi), \quad r > b. \tag{9.143}$$

Тогда p_2 удовлетворяет уравнению (9.137) и условиям (9.138). При этом для нормальной производной на поверхности цилиндра имеем

$$\frac{\partial p_2(b,\psi)}{\partial r} = \frac{\pi i}{2\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m C_m H_{\upsilon_m}^{(1)\prime}(kb) \cos(\upsilon_m \psi), \quad \psi \in (0,\alpha). \tag{9.144}$$

Неизвестные коэффициенты C_m определим из условия (9.139), которое, с учетом (9.142) и (9.144), приводит к уравнению

$$\frac{\pi i}{2\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m C_m H_{\upsilon_m}^{(1)\prime}(kb) \cos(\upsilon_m \psi) =$$

$$= -\frac{\pi i}{2\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J'_{\upsilon_m}(kb) H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr_0) \cos(\upsilon_m \psi) \cos(\upsilon_m \psi_0),$$

откуда

$$C_m = -\frac{J'_{\upsilon_m}(kb)}{H_{\upsilon_m}^{(1)\prime}(kb)} H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr_0) \cos(\upsilon_m \psi_0), \quad m = 0,1,2,\ldots. \tag{9.145}$$

Таким образом,

$$p_2(\mathbf{r}) = -\frac{\pi i}{2\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{J'_{\upsilon_m}(kb)}{H_{\upsilon_m}^{(1)\prime}(kb)} H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr_0) \cos(\upsilon_m \psi_0) H_{\upsilon_m}^{(1)}(kr) \cos(\upsilon_m \psi), \quad r > a. \tag{9.146}$$

Итак, функция Грина для внешности клина с цилиндром в вершине построена. В частности, при $r > r_0$ имеем

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \equiv p(\mathbf{r}) = p_1(\mathbf{r}) + p_2(\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{\pi i}{2\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left[J_{\upsilon_m}(kr_0) - \frac{J'_{\upsilon_m}(kb)}{H^{(1)\prime}_{\upsilon_m}(kb)} H^{(1)}_{\upsilon_m}(kr_0) \right] \cos(\upsilon_m \psi_0) H^{(1)}_{\upsilon_m}(kr) \cos(\upsilon_m \psi). \tag{9.147}$$

Соответствующее выражение для случая $r < r_0$ предлагаем читателю записать самостоятельно.

9.13. Принцип взаимности

Принцип взаимности или *теорема взаимности* постулирует для линейных систем связь между двумя источниками и создаваемыми ими полями в местах расположения источников. Эта связь определяется простым соотношением $p_{21} = p_{12}Q_2 / Q_1$, где Q_1 - объемная колебательная скорость источника в некоторой точке x_1, а p_{12} - давление, создаваемое источником Q_1 в точке x_2; Q_2 - объемная колебательная скорость источника в точке x_2, а p_{21} - давление, создаваемое источником Q_2 в точке x_1. Хотя данное соотношение вполне очевидно, тем не менее, приведем формальное доказательство его справедливости на основе использования функции Грина.

Функция Грина свободного пространства обладает свойством $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$, поскольку ее зависимость от координат векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ определяется через модуль их разности, т.е. $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ (см. формулу (9.29)). Как оказывается, соотношение

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}) \tag{9.148}$$

имеет общий характер в акустике и является, по сути, математической формулировкой принципа взаимности. Впервые на существование принципа взаимности в акустике указал Гельмгольц, а несколько позднее Рэлей [50] обобщил эти сведения и получил обобщенный принцип взаимности, который связывает различные типы внешних воздействий на линейную динамическую систему с эффектами этих влияний.

Например, покажем, что формула (9.148) справедлива в случае наличия в пространстве тел, поверхности которых являются либо идеальными (т.е. акустически жесткими или акустически мягкими), или импедансными (см. параграф 5.7).

Рассмотрим поле в некоторой точке $\mathbf{r}$ среды, которое создается точечным источником, расположенным в точке $\mathbf{r}_0$: $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$. Это поле, очевидно, удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) + k^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0). \qquad (9.149)$$

Аналогично вводим в рассмотрение поле, которое создается в той же точке точечным источником, расположенным в точке $\mathbf{r}_1$: $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)$, поле удовлетворяет уравнению

$$\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) + k^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1). \qquad (9.150)$$

Умножаем (9.149) на $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)$, а (9.150) на $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ и вычитаем второе соотношение из первого, в результате получаем

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) - G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0). \qquad (9.151)$$

Проинтегрируем равенство (9.151) по объему, ограниченному поверхностью тел S, бесконечно удаленной поверхностью Σ и разрезами L (рис. 9.21). С помощью формулы Грина (9.33) сведем интегрирование по объему к интегрированию по указанной окружающей поверхности. Учитывая свойство интегралов от дельта-функций (9.15), получаем

$$\int\limits_{S+\Sigma+L}\left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n} - G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)}{\partial n}\right]dS' = -G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1) + G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_0). \qquad (9.152)$$

Интеграл по поверхности Σ в (9.152) равен нулю вследствие условия излучения, а интегралы вдоль берегов разреза L равны нулю из-за противоположного направления нормалей к ним. Интегралы по поверхности тела S также превращаются в нуль вследствие указанных выше граничных условий.

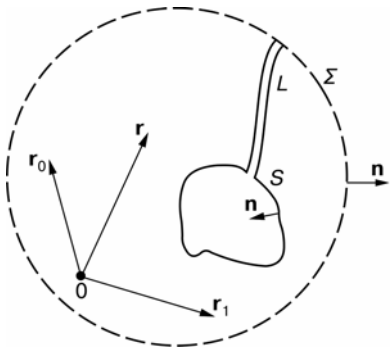


Рис. 9.21. Пример определения принципа взаимности

Итак, справедливость равенства (9.148) доказана. Это соотношение означает, что если точечный источник, расположенный в точке $\mathbf{r}_0$, создает некоторое давление в точке $\mathbf{r}_1$, то при перемещении его в точку $\mathbf{r}_1$ он будет создавать такое же давление в точке $\mathbf{r}_0$.

Принцип взаимности используется при построении решения акустических задач, если такое изменение в расположении источника и точки наблюдения упрощает практические расчеты. Особое значение он имеет при использовании соответствующих методов измерения акустических величин (см. раздел 13).

9.14. Вычисление звуковых полей плоских излучателей с помощью интеграла Фурье

Формулы (9.68), которые дают возможность рассчитать звуковое поле плоского излучателя, получены на основе интеграла Кирхгоффа. Но для этой цели можно применить другой способ, который базируется на интегральном преобразовании Фурье. С целью упрощения выкладок рассмотрим двумерный случай.

В параграфе 5.10 была рассмотрена процедура определения в пространстве бегущей волны согласно заданному на некоторой плоскости распределению давления или колебательной скорости. Используем этот прием для решения поставленной задачи. Сначала вспомним, как это делается.

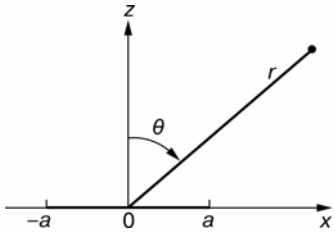


Рис. 9.22. Пример применения преобразования Фурье

Пусть на плоскости $z = 0$ имеем распределение колебательной скорости, которое представляет собой бегущую волну вдоль направления оси Ox (рис. 9.22) (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем):

$$\upsilon(x,\beta) = \exp(i\beta x), \tag{9.153}$$

где β — постоянная распространения волны. В таком случае давление в полупространстве $z > 0$ имеет вид

$$p(x,z) = \frac{\omega\rho}{\sqrt{k^2-\beta^2}}\exp\left[i\left(\beta x + \sqrt{k^2-\beta^2}\,z\right)\right], \tag{9.154}$$

где $k = \omega / c$. В этом нетрудно убедиться непосредственной проверкой. Действительно функция (9.154) удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta p + k^2 p = 0$ и граничному условию

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \upsilon(x,\beta). \tag{9.155}$$

В случае, когда $\beta < k$, выражение (9.154) определяет бегущую плоскую волну с волновым вектором $\mathbf{k} = \left\{\beta, \sqrt{k^2 - \beta^2}\right\}$. Если $\beta > k$, то естественно имеем неоднородную волну. Если теперь произвольное распределение колебательной скорости $\upsilon(x)$ представить как суперпозицию волн типа (9.153) с разными постоянными распространения β, то общее поле можно будет записать в виде интеграла от функции (9.154) по β.

Итак, пусть для функции $\upsilon(x')$ имеем пару преобразований Фурье (мы ввели переменную x', чтобы не спутать координаты точки наблюдения и координаты точки на плоскости, по которой выполняется интегрирование):

$$\upsilon(x') = \int_{-\infty}^{\infty} V(\beta)\exp(i\beta x')\,d\beta, \tag{9.156}$$

$$V(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \upsilon(x')\exp(-i\beta x')\,dx'. \tag{9.157}$$

Тогда поле давления в полупространстве $z > 0$ будет иметь вид

$$p(x,z) = \omega\rho\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\beta)}{\sqrt{k^2-\beta^2}}\exp\left[i\left(\beta x + \sqrt{k^2-\beta^2}\,z\right)\right]d\beta. \tag{9.158}$$

Можно установить связь между преобразованием (9.158) и интегралом Рэлея (9.68а) для двумерной области. Подставив (9.157) в (9.158) и приняв во внимание, что интеграл по β (см. [60, с. 33]) имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i\beta(x-x') + i\sqrt{k^2-\beta^2}\,z\right)}{\sqrt{k^2-\beta^2}}d\beta = \pi H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x-x')^2+z^2}\right),$$

получим формулу

$$p(x,z) = \frac{\omega\rho}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \upsilon(x')H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x-x')^2+z^2}\right)dx', \tag{9.159}$$

которая совпадает с выражением (9.68).

Вернемся к формуле (9.158). Запишем ее иначе, воспользовавшись заменой

$$\beta = k\sin\alpha, \quad \sqrt{k^2 - \beta^2} = k\cos\alpha. \tag{9.160}$$

Выражение (9.158) представляет собой совокупность однородных ($\beta < k$) и неоднородных ($\beta > k$) плоских волн. Понятно, что замена (9.160) не должна изменить характер представления звукового поля, т.е. должны сохраниться в наличии все эти волны. Этого можно достичь, если выполнить интегрирование в комплексной области по переменной $\alpha = \mathrm{Re}\,\alpha + i\mathrm{Im}\alpha$. Итак, формула (9.158) будет иметь вид

$$p(x,z) = \omega\rho\int_{\tilde{A}} V(\alpha)\exp(ikx\sin\alpha + ikz\cos\alpha)d\alpha, \tag{9.161}$$

где Г — контур интегрирования (рис. 9.23).

Рекомендуем читателю самостоятельно, расписывая соотношение $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, где $\alpha = \mathrm{Re}\alpha + i\mathrm{Im}\alpha$, убедиться в том, что участок контура Г на оси абсцисс (от $-\pi/2$ к $\pi/2$) соответствует однородным плоским волнам, которые распространяются в полупространстве $z > 0$ под углом α к оси Oz. Эти волны характеризуются волновым вектором $\mathbf{k} = \{k\sin\alpha,\ k\cos\alpha\}$. Наоборот, участки контура Г, параллельные оси ординат, определяют неоднородные волны. Эти волны распространяются вдоль оси Ox с постоянной распространения $k\mathrm{ch}(\mathrm{Im}\alpha)$, а вдоль оси Oz их амплитуда уменьшается по экспоненциальному закону $\exp(-kz\mathrm{sh}(\mathrm{Im}\alpha))$, $z \geq 0$. Причем левая ветвь контура Г соответствует неоднородным волнам, которые распространяются в отрицательном направлении оси Ox, а правая — в положительном направлении.

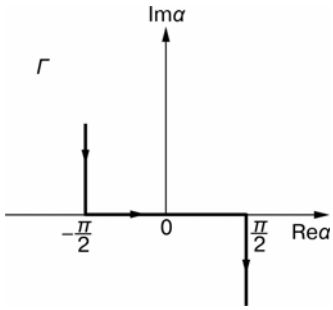


Рис. 9.23. Контур интегрирования Г

Вводя полярные координаты r, θ с центром в точке O (рис. 9.22), получим соотношение между декартовыми и полярными координатами: $x = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, с учетом которых выражение (9.161) будет иметь вид

$$p(r,\theta) = \omega\rho \int_{\tilde{A}} V(\alpha) \exp\left(ikr\cos(\theta-\alpha)\right) d\alpha. \qquad (9.162)$$

Итак, формула (9.161) или (9.162) определяет поле давления в полупространстве $z > 0$, представляющее собой суперпозицию однородных и неоднородных волн. Если нас интересует дальнее поле, то понятно, что достаточно учитывать только однородные волны. В таком случае формула (9.162) упростится, ведь интегрирование нужно выполнять только по действительному параметру α на интервале от $-\pi/2$ к $\pi/2$, т.е.

$$p(r,\theta) = \omega\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V(\alpha) \exp\left(ikr\cos(\theta-\alpha)\right) d\alpha. \qquad (9.163)$$

Например, рассмотрим дальнее поле излучателя с распределением колебательной скорости:

$$\upsilon(x) = \begin{cases} \upsilon_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \qquad (9.164)$$

т.е. имеем одинаковую амплитуду колебательной скорости на полосе шириной $2a$ (рис. 9.22). Согласно преобразованию (9.157) определим спектральную функцию $V(\beta)$, которая характеризует амплитуду бегущих плоских волн. Подставляя (9.164) в (9.157), получаем

$$V(\beta) = \frac{\upsilon_0 a}{\pi} \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} \qquad (9.165)$$

или, учитывая соотношение $\beta = k\sin\alpha$, имеем

$$V(\alpha) = \frac{\upsilon_0 a}{\pi} \frac{\sin(ka\sin\alpha)}{ka\sin\alpha}. \qquad (9.166)$$

Подставляя (9.166) в (9.163), получаем выражение для дальнего поля плоского излучателя с распределением колебательной скорости (9.164):

$$p(r,\theta) = \omega\rho \frac{\upsilon_0 a}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(ka\sin\alpha)}{ka\sin\alpha} \exp\left(ikr\cos(\theta-\alpha)\right) d\alpha. \qquad (9.167)$$

Поразмышляем над формулой (9.167). Для дальнего поля величина волнового расстояния до точки наблюдения $kr >> 1$, кроме того, $r >> a$ (r, θ — координаты точки наблюдения). Подынтегральная функция интеграла (9.167) является произведением двух функций. Первая из них $\frac{\sin(ka\sin\alpha)}{ka\sin\alpha}$ изменяется на интервале интегрирования достаточ-

но медленно, а вторая $\exp(ikr\cos(\theta-\alpha))$ за счет большого числа kr быстро осциллирует. Это приводит к тому, что интегралы такого типа даже при наличии современных ЭВМ вычислить практически очень сложно.

Осмыслим возможность вычисления подобных интегралов, которые имеют такой общий вид:

$$I=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha)\exp\left(iq\varphi(\alpha)\right)d\alpha, \tag{9.168}$$

где $f(\alpha)$ — функция, которая медленно изменяется на отрезке $[\alpha_1,\alpha_2]$; $\varphi(\alpha)$ — фазовая функция; q — большое число. Поскольку q есть большое число, то, очевидно, что пока условие равенства нулю производной от фазовой функции $\varphi'(\alpha)=0$, не выполняется, вклады в I от соседних участков α будут практически компенсировать друг друга вследствие быстро осциллирующего характера $\exp(iq\varphi(\alpha))$. Таким образом, весь интеграл сводится к вкладам от окрестностей точек, в которых $\varphi'(\alpha)=0$. Эти точки называются *точками стационарной фазы,* а метод, по которому вычисляют интеграл (9.150), называют *методом стационарной фазы.* Этот метод принадлежит к классу асимптотических методов вычисления интегралов [60].

Итак, согласно методу стационарной фазы [60, с. 55] приближенное значение интеграла (главный член асимптотики) (9.168) определяется выражением

$$I=\frac{\sqrt{2\pi}f(\alpha_0)}{\sqrt{q\left|\varphi''(\alpha_0)\right|}}\exp\left(iq\varphi(\alpha_0)\pm i\frac{\pi}{4}\right), \tag{9.169}$$

где α_0 — корень уравнения $\varphi'(\alpha)=0$. Вблизи стационарной точки α_0 фаза $\varphi(\alpha)$ изменяется наиболее медленно. Знак показателя экспоненты совпадает со знаком второй производной $\varphi''(\alpha_0)$.

Таким образом, если считать интеграл (9.168) суперпозицией колебаний, то видим, что величина I пропорциональна амплитуде $f(\alpha_0)$, которая вычислена в точке стационарной фазы, а фаза результирующего колебания определяется фазой также в стационарной точке. Кроме того, в выражение (9.169) входит величина $\varphi''(\alpha_0)$, которая соответствует *кривизне фазовой функции* в стационарной точке. Итак, чем медленнее изменяется фаза $\varphi(\alpha)$ вблизи стационарной точки (т.е. чем меньше величина $\left|\varphi''(\alpha_0)\right|$), тем больше участок интегрирования $\Delta\alpha$ вокруг точки α_0, для которой $q\varphi(\alpha)\approx\text{const}$.

Вернемся к нашей задаче и вычислим интеграл (9.167). Как следствие решения уравнения $(\cos(\theta-\alpha))'=0$, на интервале $\alpha\in(-\pi/2,\ \pi/2)$ имеем одну стационарную точку $\alpha_0=\theta$. Вторая производная от фазо-

вой функции в стационарной точке равна –1. Таким образом, в соответствии с методом стационарной фазы интеграл (9.167) определяется формулой

$$p(r,\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega\rho\upsilon_0 a\frac{\sin(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\frac{\exp(ikr-\pi/4)}{\sqrt{kr}}. \qquad (9.170)$$

Отсюда имеем выражение для характеристики направленности полосы шириной $2a$ с равномерным распределением скорости (υ_0 = const) на ее поверхности:

$$R(\theta)=\left|\frac{p(r,\theta)}{p(r,\theta=0)}\right|=\left|\frac{\sin(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right|. \qquad (9.171)$$

Если $ka << 1$, т.е. характерный волновой размер полосы мал, то $R(\theta) \approx$ ≈ 1, т.е. источник является ненаправленным. При этом полоса излучает цилиндрическую волну $\exp(ikr)/\sqrt{kr}$. С ростом величины ka появляются лепестки в диаграмме направленности. Предлагаем читателю с помощью ЭВМ построить ряд графиков функции $R(\theta)$ при разных величинах ka.

9.15. Возбуждение волновода точечным источником

При исследовании задачи о возбуждении волновода источником звука важную роль играет математическая модель в виде точечного источника, который излучает гармонический с частотой ω сигнал в плоскопараллельном волноводе. Здесь, с одной стороны, имеем простую модель источника, а с другой — большинство других источников могут быть аппроксимированы совокупностью нескольких или множеством (вплоть до бесконечности) точечных источников.

Если поле создается гармоническим точечным источником, то задача сводится к определению функции Грина для уравнения Гельмгольца в данной области.

Пусть точечный источник размещен на расстоянии z_0 от верхней границы волновода (рис. 9.24), т.е. его координаты $(x_0=0, y_0=0, z_0)$. Будем считать, что границы волновода — локально-реагирующие (импедансные). Нам уже известно, что в таком волноводе могут существовать нормальные волны, конечное количество которых являются однородными, а остальные — неоднородными.

Поле давления $p(\mathbf{r})$ в точке наблюдения $\mathbf{r}$ численно совпадает с функцией Грина

$$p(\mathbf{r})=G(\mathbf{r},\mathbf{r_0}), \qquad (9.172)$$

которая должна удовлетворять соответствующему уравнению Гельмгольца, условиям на границах $z = 0$ и $z = h$, а также условию излучения (т.е. волны распространяются от источника в направлении роста координаты r).

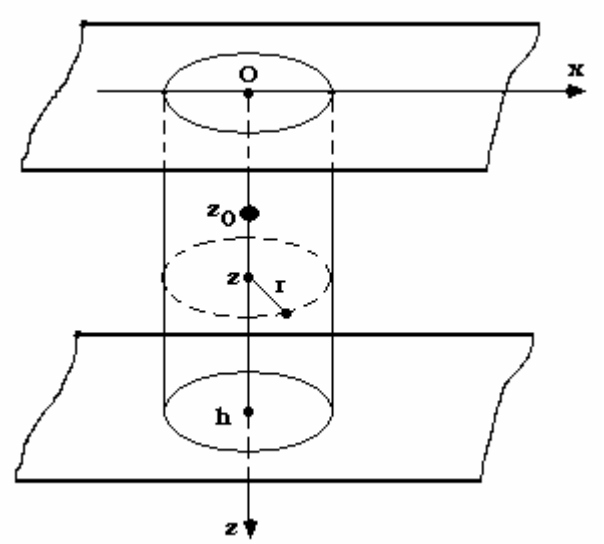


Рис. 9.24. Точечный источник (точка z_0) в плоскопараллельном волноводе

Поле точечного источника в волноводе имеет симметрию относительно вертикальной оси, которая проходит сквозь источник. Поэтому удобно рассматривать это поле, используя цилиндрическую систему координат. Ее начало расположим на верхней поверхности волновода, ось Oz направим вниз, рис. 9.24. Второй, после z, координатой точки в пространстве есть расстояние r в горизонтальной плоскости. От третьей координаты (угла в горизонтальной плоскости) акустическое поле не зависит. Тогда функция

$$p(r,z) = G(r,z,z_0) \tag{9.173}$$

описывает поле давления в волноводе и удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{r}\delta(r)\delta(z - z_0). \tag{9.174}$$

Существует несколько подходов к поиску поля точечного источника в плоскопараллельном волноводе. Проведем наши исследования на основе представления поля в волноводе в виде совокупности нормальных волн. Фактически это означает, что мы используем решение однородного уравнения Гельмгольца, которое отвечает неоднородному уравнению (в данном случае — уравнению (9.174)) с соответст-

вующим выбором постоянных, при которых построенное решение удовлетворяет как условиям на границах волновода, так и исходному неоднородному уравнению. Для этого нужно определить характерные поперечные сечения волновода, в которых, используя свойство полноты системы собственных форм нормальных волн, можно представить функцию распределения давления в виде ряда по собственным формам.

Отойдем на расстояние r от источника в горизонтальной плоскости (рис. 9.24). Если бы мы имели надлежащее измерительное устройство, то, опуская его по вертикали от верхней поверхности к нижней, смогли бы с его помощью найти зависимость $p(r,z)$ при $r = \text{const}$. Эта зависимость будет одинаковой для всех вертикалей, которые принадлежат поверхности цилиндра радиусом r. Именно эту поверхность мы примем за поверхность поперечного сечения. Можно вообразить множество таких поверхностей с разными радиусами и для каждой из них получить свою зависимость давления от координаты. Но, как мы знаем, какой бы не была эта зависимость, ее можно представить в виде ряда по собственным формам нормальных волн. Для каждого поперечного сечения этот ряд имеет свои коэффициенты, которые являются функциями координаты r. Таким образом можно искать решение нашей задачи в виде

$$p(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) g_n(z), \tag{9.175}$$

где $g_n(z)$ — собственные формы нормальных волн. Например, для волновода с жесткими границами $g_n(z) = \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Подставим ряд (9.175) в волновое уравнение (9.174):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{d^2 a_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{da_n}{dr}\right) g_n(z)\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{d^2 g_n}{dz^2} + k^2 g_n\right)\right] = -\frac{1}{r}\delta(r)\delta(z - z_0). \tag{9.176}$$

Собственные формы $g_n(z)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 g_n}{dz^2} + \left(k^2 - \gamma_n^2\right) g_n = 0. \tag{9.177}$$

В справедливости уравнения (9.177) не трудно убедиться, подставив отдельную волну $p_n(r,z) = a_n(r) g_n(z)$ из суперпозиции (9.175) в соответствующее однородное уравнение (9.174) (т.е. уравнение с нулевой правой частью). При разделении переменных появится постоянная, которая обозначена в уравнении (9.177) как γ_n^2. Сделайте указанные преобразования самостоятельно.

В результате уравнения (9.176) можно переписать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{d^2a_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{da_n}{dr}+\gamma_n^2a_n\right)g_n(z)\right]=-\frac{1}{r}\delta(r)\delta(z-z_0). \qquad (9.178)$$

Умножим (9.178) скалярно на $g_m(z)$, воспользовавшись при этом ортогональностью функций $g_n(z)$ и свойством дельта-функции (9.7). Тогда для каждой с неизвестных пока что функций $a_n(r)$ получим такое уравнение:

$$\frac{d^2a_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{da_n}{dr}+\gamma_n^2a_n=-\frac{g_n(z_0)}{\|g_n\|}\frac{1}{r}\delta(r), \qquad (9.179)$$

где $\|g_n\|=\int\limits_0^h\left(g_n(z)\right)^2dz$.

Соответствующее однородное уравнение для неоднородного уравнения (9.179) носит название уравнения Бесселя и имеет своим решением функции Ханкеля: $H_0^{(1)}(\gamma_n r)$ и $H_0^{(2)}(\gamma_n r)$. При больших значениях аргументов (практически, больше трех) эти функции имеют такое представление:

$$H_0^{(1)}(\gamma_n r)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_n r}}\exp\left[i\left(\gamma_n r-\frac{\pi}{4}\right)\right], \qquad (9.180)$$

$$H_0^{(2)}(\gamma_n r)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_n r}}\exp\left[-i\left(\gamma_n r-\frac{\pi}{4}\right)\right]. \qquad (9.181)$$

С учетом временного множителя $\exp(-i\omega t)$, функция (9.180) описывает цилиндрическую волну, которая распространяется от начала координат в сторону роста координаты r, а функция (9.181) — цилиндрическую волну, которая распространяется в противоположном направлении.

Из физических соображений (согласно условию излучения) решением уравнения (9.179) является волна (9.180). Тогда (см. параграф 9.4), принимая во внимание вид уравнения (9.179), имеем

$$a_n(r)=\frac{i}{4}\frac{g_n(z_0)}{\|g_n\|}H_0^{(1)}(\gamma_n r). \qquad (9.182)$$

Итак, согласно (9.175), решение задачи о поле гармоничного точечного источника в плоском волноводе будет иметь вид

$$p(z,r,t)\equiv G(z,r,z_0,r_0)=\frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n(z_0)g_n(z)}{\|g_n\|}H_0^{(1)}(\gamma_n r)\exp(-i\omega t). \qquad (9.183)$$

В качестве примера, в ситуации, когда одна граница волновода идеально мягкая, а другая идеально жесткая формула (9.183) перепишется так:

$$p(z,r,t)=\frac{i}{2h}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi z_0}{2h}\right)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2h}\right)H_0^{(1)}(\gamma_n r)\exp(-i\omega t). \tag{9.184}$$

При $\gamma_n r \gg 1$ можно воспользоваться асимптотическим представлением функции Ханкеля (9.180), тогда поле давления (9.183) примет вид

$$p(z,r,t)=\frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n(z_0)g_n(z)}{\|g_n\|}\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_n r}}\exp\left[-i\left(\omega t-\gamma_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{9.185}$$

К формуле (9.183) нужно сделать такой комментарий. При $\gamma_n \to 0$, т.е. при $\omega \to \omega_{\text{кр}n}$, функция $H_0^{(1)}(\gamma_n r) \to -\infty$ и, как следствие, амплитуда давления $|p(z,r)|$ неограниченно возрастает. Это своеобразный резонанс для n-ой моды волновода. Напомним (см. параграф 5.13), что причина такой ситуации заключается в том, что, точечный источник есть идеальный источник (т.е. источник с неизменной амплитудой колебательной скорости при любых условиях), поэтому при $\omega \to \omega_{\text{кр}n}$ давление n-ой моды $p_n \to \infty$. Точное определение поля, которое создается источником в волноводе при $\omega \to \omega_{\text{кр}n}$ возможно лишь при условии учета параметров реального источника.

Согласно формулам (9.183)-(9.185), поле точечного источника состоит из цилиндрических волн, которые распространяются вдоль координаты r от источника. Для конечного числа этих волн волновое число γ_n является действительной величиной (такие волны распространяются с фазовой скоростью $\upsilon_{\text{ф}n} = \omega/\gamma_n$), а для остальных волн является мнимой величиной (такие волны экспоненциально затухают с ростом координаты r), это — неоднородные волны. На достаточно больших расстояниях от источника вкладом последних волн можно пренебрегать и принимать во внимание только однородные нормальные волны.

Вертикальная структура каждой из волн описывается собственной формой $g_n(z)$, которая имеет то или другое количество узлов и пучностей. Амплитуда волн зависит от радиальной координаты как $\sqrt{r}$, что отвечает закону сохранения энергии при распространении волны с цилиндрическим фронтом. Кроме того, амплитуда каждой из волн зависит от координаты погружения источника в слой жидкости благодаря функции $g_n(z_0)$. Если координата источника совпадает с

пучностью соответствующей моды, то нормальная волна возбуждается источником с максимальной эффективностью, и, наоборот, если совпадает с узлом, то нормальная волна не возбуждается совсем. Итак, если медленно погружать источник в слой жидкости, то вклад разных волн в звуковое поле (иначе, модовый состав поля) будет изменяться в пользу тех или других волн. То поле, которое мы "увидим" на расстоянии r от источника, если будем опускать измеритель давления по вертикали, будет результатом интерференции одних и тех же нормальных волн, но с разным соотношением фаз $\gamma_n r$ для каждой дистанции. С помощью формулы (9.185) можно исследовать работу в волноводе акустической антенны, которая состоит из точечных источников, возбужденных с разными амплитудами и фазами. В частности можно исследовать влияние волновода на диаграмму направленности антенны, т. е. можно предусмотреть, как она будет отличаться от той, которая измерена в свободном пространстве, и как будет зависеть от расстояния.

Задача. Рассмотрите плоскую задачу возбуждения волновода точечным источником. Математической моделью такого источника будет прямолинейная нить, направленная вдоль оси Oy. Понятно, что поле такого источника не будет зависеть от координаты y.

9.16. Задачи

9.1. Убедитесь в том, что сферическая расходящаяся волна удовлетворяет условию излучения (9.39), а цилиндрическая расходящаяся волна — условию (9.40).

9.2. С помощью ЭВМ исследуйте характеристику направленности диска в экране в зависимости от волнового радиуса диска.

9.3. Круглый диск в бесконечном экране излучает звук в воздушное полупространство. Радиус диска равен 0,15 м, а частота колебаний — 330 Гц. Какой должна быть амплитуда скорости диска, чтобы он излучал 0,5 Вт акустической мощности?

Ответ: приблизительно 0,31 м/с.

9.4. Круглый диск диаметром 0,3 м колеблется в бесконечном экране с частотой 3000 Гц. Постройте характеристику направленности диска. На какой частоте амплитуда давления в дальнем поле вдоль экрана равна половине от ее значения на оси диска. Среда - воздух.

Ответ: приблизительно 400 Гц.

9.5. Определите радиус первой зоны Френеля для гидролокатора, который работает на частоте 45 кГц при глубине океана 3200 м.

Ответ: приблизительно 10 м.

РАЗДЕЛ 10

МЕТОД ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ

Сон — это лоскутное одеяло.

*И.М. Сеченов**

В качестве эпиграфа к разделу взято выражение И.М. Сеченова, который образно сравнивает сон с “лоскутным одеялом”, поясняя мысль о том, что сон фактически представляет собой “небывалое сочетание былого”, т.е. “необычное соединение прошедших событий”. Мы не зря привели это высказывание. Дело в том, что метод, о котором будет идти речь в данном разделе, основывается, в сущности, на принципе “лоскутного одеяла”, ведь при его применении вся сложная (неканоническая, см. параграф 9.1) область существования звукового поля разделяется на более простые области. Простые в том смысле, что в каждой такой области есть возможность записать звуковое поле в виде суммы известных частных решений уравнения Гельмгольца. В дальнейшем отдельные (частичные) области “сшивают” в единую область существования звукового поля. Понятно, что эта процедура требует выполнения определенных условий на границах частичных областей. Таким образом, всю область существования звукового поля представляем в виде “лоскутного одеяла”, но в отличие от сна, который довольно часто, представляет собой необычное объединение разных событий, построенная таким образом структура звукового поля является точным решением задачи о распространении звука в сложной области.

Фактически, мы очень коротко изложили идею метода частичных областей. Технику и особенности применения этого метода лучше осознать, исследуя конкретную физическую задачу. В дальнейшем рассмотрим несколько акустических задач, которые, с одной стороны, иллюстрируют сам метод, а, с другой — имеют решения с интересными физическими эффектами.

* Сеченов Иван Михайлович (1829—1905) — российский учений, основатель российской физиологической школы.

10.1. Основные положения метода частичных областей

Идея разделения области существования звукового поля на подобласти нам уже знакома. Действительно, вспомните задачу о падении плоской волны на границу раздела двух сред (см. параграф 5.5). Здесь все свободное пространство существования звукового поля было разделено на два полупространства. В одном полупространстве поле было представлено суммой падающей и отраженной от границы волн, а во втором — прошедшей волной. “Сшивание” этих звуковых полей осуществлялось благодаря условиям сопряжения полей, т.е. равенства давления и нормальных составляющих колебательной скорости на границе раздела. Итак, выполнив процедуру “сшивания” полей, что позволило определить коэффициенты отражения и прохождения, мы получили для данной задачи точное представление поля во всем пространстве, хотя в каждом из полупространств имеем свое выражение для звукового поля.

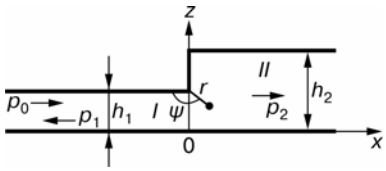


Рис. 10.1. Пример составного волновода

Основные идеи метода частичных областей проиллюстрируем, исследуя достаточно простую задачу о распространении звука в составном бесконечном плоском волноводе, заполненном идеальной жидкостью плотностью ρ, со скоростью звука c. Геометрия задачи представлена на рис. 10.1. Поверхности волновода являются акустически жесткими, а размеры его составляющих равны h_1 и h_2, соответственно. Пусть слева в волноводе распространяется плоская гармоническая волна (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем) с комплексной амплитудой давления:

$$p_0 = \exp(ikx), \qquad k = \omega/c. \tag{10.1}$$

Чисто геометрически всю область существования звукового поля естественно разделить на две области: I и II, отрезком $x = 0,\ 0 \le z \le h_1$. Но значительно важнее, что такое разбиение конструктивно с точки зрения построения решения задачи в целом.

Теперь вернемся к параграфу 5.13 и напомним, как записывалось произвольное гармоническое поле в плоском волноводе. Эта запись представляет собой суперпозицию нормальных волн с соответственно

подобранными коэффициентами (см. формулу (5.207)). Рассмотрим вновь рис. 10.1. Выделив области I и II, мы представили составной бесконечный волновод в виде композиции двух плоских полубесконечных волноводов. Очевидно, что при падении плоской волны p_0 на границу раздела областей I и II образуется отраженная волна p_1 и прошедшая волна p_2 в область II. Теперь понятно, как записать поля p_1 и p_2. Волну p_2 представим как суперпозицию нормальных волн плоского волновода с характерным размером h_2, т.е. поле в области II будет иметь вид

$$p_{\mathrm{II}}(x,z) = p_2(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(i\gamma_n x)\cos\left(\frac{n\pi}{h_2}z\right), \tag{10.2}$$

где

$$\gamma_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (n\pi/h_2)^2}, & \text{если} \quad k > (n\pi/h_2), \\ i\sqrt{(n\pi/h_2)^2 - k^2}, & \text{если} \quad k < (n\pi/h_2). \end{cases} \tag{10.3}$$

Выражение (10.2) можно назвать общим представлением звукового поля в полубесконечном волноводе II. Слово “*общее*” подчеркивает тот факт, что форма представления поля (10.2) не изменится при любых граничных условиях на поверхности $x = 0$. Аналогичная конструкция может быть построена и для левой части волновода. Падающая волна (10.1) является заданной, а для отраженного поля очевидным общим представлением будет выражение

$$p_{\mathrm{I}}(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-i\eta_n x)\cos\left(\frac{n\pi}{h_1}z\right), \tag{10.4}$$

где

$$\eta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (n\pi/h_1)^2}, & \text{если} \quad k > (n\pi/h_1), \\ i\sqrt{(n\pi/h_1)^2 - k^2}, & \text{если} \quad k < (n\pi/h_1). \end{cases} \tag{10.5}$$

Итак, мы построили общее звуковое поле во всем волноводе. В данных выражениях содержатся две последовательности произвольных величин A_n и B_n. Благодаря их выбору можно выполнить условия сопряжения звуковых полей на границе раздела областей I и II:

$$p_{\mathrm{II}} = p_{\mathrm{I}}, \quad x = 0, \quad z = [0, h_1], \tag{10.6}$$

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{1}{i\omega\rho}\dfrac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial x}, & x = 0, \quad z = [0, h_1], \\ 0, & x = 0, \quad z = [h_1, h_2]. \end{cases} \tag{10.7}$$

Напомним, что $p_{\mathrm{I}} = p_0 + p_1$, а $p_{\mathrm{II}} = p_2$. Обоснование такого утверждения, очевидно, вытекает из общих свойств рядов Фурье, ведь совокупность функций $\cos(n\pi z/h_2)$ и $\cos(n\pi z/h_1)$, $n = 0,1,2,\ldots$, образует полную и ортогональную систему функции на отрезках [0, h_2] и [0, h_1], соответственно.

Приведенные рассуждения наглядно раскрывают содержание важного для метода частичных областей понятия — *общее решение граничной задачи*. Итак, совокупность частных решений системы (или одного) дифференциальных уравнений в частных производных называется общим решением граничной задачи для данной области, если полученное решение дает возможность удовлетворить произвольные граничные условия на ее границе.

Подставив (10.1)-(10.3) в условия (10.6), (10.7), получим такую функциональную систему уравнений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{h_2} z\right) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{h_1} z\right), \quad z = [0, h_1], \tag{10.8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \gamma_n \cos\left(\frac{n\pi}{h_2} z\right) = \begin{cases} k - \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \eta_n \cos\left(\frac{n\pi}{h_1} z\right), & z = [0, h_1], \\ 0, & z = [h_1, h_2]. \end{cases} \tag{10.9}$$

Функциональную систему уравнений (10.8), (10.9) можно превратить в алгебраическую благодаря свойству ортогональности функций $\cos(n\pi z/h_1)$ и $\cos(n\pi z/h_2)$. Умножим уравнение (10.8) на $\cos(n\pi z/h_1)$, $n = 0,1,2,\ldots$, и проинтегрируем его левую и правую части на отрезке [0, h_1]. Соответственно уравнение (10.9) помножим на $\cos(n\pi z/h_2)$, $n = 0,1,2,\ldots$, и проинтегрируем на отрезке [0, h_2]. При интегрировании используем свойство ортогональности соответствующего набора функций:

$$\int_0^h \cos\left(\frac{m\pi}{h} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) dz \equiv h\delta_{mn} = h \begin{cases} 1, & m = n = 0, \\ 0{,}5, & m = n \neq 0, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \tag{10.10}$$

где $h = h_1$ или $h = h_2$. Таким образом, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$-\frac{h_1}{2}(1 + \delta_{m0}) A_m + \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_{mn}^{(\mathrm{B})} = h_1 \delta_{m0}, \quad m = 0,1,2,\ldots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \eta_n P_{mn}^{(\mathrm{A})} + \frac{h_2}{2} \gamma_m (1 + \delta_{m0}) B_m = k P_{m0}^{(\mathrm{A})}, \quad m = 0,1,2,\ldots, \tag{10.11}$$

где

$$P_{mn}^{(\mathrm{B})} = \int_0^{h_1} \cos\left(\frac{m\pi}{h_1} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{h_2} z\right) dz, \quad P_{mn}^{(\mathrm{A})} = \int_0^{h_1} \cos\left(\frac{m\pi}{h_2} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{h_1} z\right) dz. \quad (10.12)$$

Поставленная задача свелась к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_m и B_m, $m = 0,1,2,\ldots$ Их знание позволяет вычислить поле в областях I и II. Такая схема построения решения является типичной. В связи с этим, приведем некоторые общие сведения о бесконечных системах уравнений.

10.2. Некоторые сведения о решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

Запишем систему уравнений для двух последовательностей неизвестных в общем виде:

$$x_m^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{(2)} x_n^{(2)} = b_m^{(1)}, \qquad m = 1,2,\ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{(1)} x_n^{(1)} + x_m^{(2)} = b_m^{(2)}, \qquad m = 1,2,\ldots, \qquad (10.13)$$

где $x_m^{(1)}$ и $x_m^{(2)}$, $m = 1,2,\ldots$, — искомые величины; $a_{mn}^{(1)}$, $a_{mn}^{(2)}$, $b_m^{(1)}$, $b_m^{(2)}$ — заданные постоянные величины. Система (10.13) принадлежит к так называемым *системам второго рода*. В задачах данного раздела система уравнений второго рода образуется благодаря свойству ортогональности соответствующих наборов функций. В матрице коэффициентов систем уравнений второго рода выделяется характерная диагональ. Так, в системе (10.13) для двух последовательностей неизвестных имеем следующую матрицу коэффициентов:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & a_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{Vmatrix}.$$

Если бы свойство ортогональности (например, (10.10)) не выполнялось, то алгебраизация системы функциональных уравнений привела бы к *системе линейных алгебраических уравнений первого рода*, общий вид которой таков:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}^{(1)} x_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{(2)} x_n^{(2)} = b_m^{(1)}, \quad m = 1, 2, \ldots, \\ &\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{(1)} x_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}^{(2)} x_n^{(2)} = b_m^{(2)}, \quad m = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{10.14}$$

С вычислительной точки зрения такая ситуация нежелательна, поскольку формулировка поставленной задачи в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений первого рода может оказаться *некорректной*, т.е. практически исключается возможность проведения систематических численных расчетов. Наиболее общим проявлением некорректности систем уравнений первого рода является нестабильность результатов их решения при незначительном изменении внешних параметров задачи или порядка системы при ее редукции. Поэтому следует подчеркнуть, что *получение системы уравнений второго рода является очень важным моментом в построении решения методом частичных областей.*

Вернемся к системе (10.13). Если сумма модулей коэффициентов в каждой строке меньше единицы, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_{mn}^{(1)} \right| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_{mn}^{(2)} \right| < 1$, $m = 1, 2, \ldots$, то такая система называется *регулярной* [60, с. 101]. Решение регулярных систем можно выполнить методом *редукции*. Суть метода редукции состоит в следующем. Находится решение конечной системы некоторого фиксированного порядка $N_1 + N_2$:

$$\begin{aligned} &x_m^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_2} a_{mn}^{(2)} x_n^{(2)} = b_m^{(1)}, \quad m = 1, 2, \ldots, N_1, \\ &x_m^{(2)} + \sum_{n=1}^{N_1} a_{mn}^{(1)} x_n^{(1)} = b_m^{(2)}, \quad m = 1, 2, \ldots, N_2. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Отсюда получаем решение $x_n^{(1)}$, $n = 1, 2, \ldots N_1$ и $x_n^{(2)}$, $n = 1, 2, \ldots N_2$, что является первым приближением.

Далее начинаем увеличивать порядок системы уравнений $N_1 + N_2$, и получаем второе приближение. Процедуру решения бесконечной системы уравнений можно считать законченной, когда с достаточной для практики точностью значения $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$, найденные для некоторого приближения, совпадают с предыдущим приближением.

Чаще на практике необходимо вычислить в конечном итоге не сами величины $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$, а бесконечные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, c_n — известные коэффициенты. (То же следует сделать в рассматриваемой задаче. Коэффициенты A_n и B_m необходимы нам для того, чтобы с помощью рядов (10.2) и (10.4) определить давление в областях I и II). Для этого следует определить такое количество величин x_n, чтобы обеспечить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x_n$.

Условие регулярности является *достаточным* для решения бесконечных систем уравнений методом редукции. Однако существуют и более слабые условия, которые тоже дают возможность находить решение бесконечных систем методом редукции. Как правило, для сходимости рядов достаточно требования [60, с. 103]:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{mn}\right|^2 < \infty, \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left|b_m\right|^2 < \infty. \tag{10.16}$$

Сделаем существенное замечание: условие регулярности для бесконечных систем уравнений является *достаточным*, но *не необходимым* условием. Поэтому, если это условие не выполняется или проведение такого анализа осложнено непростым видом матрицы коэффициентов системы уравнений, то вопрос о возможности решения таких систем методом редукции определяется в процессе численного эксперимента, т.е. методом редукции при постепенном увеличении порядка системы. Система будет иметь решение, если в ходе эксперимента имеем:

- условия сопряжения выполняются с необходимой точностью;
- наблюдается сходимость полученного решения при увеличении порядка системы уравнений в процессе редукции;
- выполняется закон сохранения энергии.

Наличие современных ЭВМ позволяет успешно проводить численный эксперимент, поэтому он широко применяется в современной практике решения бесконечных систем уравнений. В дальнейшем мы также его будем использовать.

10.3. Использование условия на ребре при применении метода частичных областей

Наличие структурных элементов в виде клина или конуса является достаточно типичной ситуацией для разных моделей, которые моделируют реальные тела, рассеивающие или излучающие звуки. Как мы знаем (см. п. 9.11.3), в окрестности таких элементов на-

блюдается особенность звукового поля, которая определяется условиями Мейкснера (см. (9.124)-(9.126)), т.е. характер поля вблизи ребра априори нам известен. В связи с этим возникает вопрос: как изменится эффективность численного алгоритма решения конкретной задачи, построенного по методу частичных областей, если учесть определенным образом особенность звукового поля вблизи ребер.

В поисках ответа на поставленный вопрос рассмотрим конкретную задачу; выводы, которые сделаем при ее анализе, будут иметь общий характер. Вернемся к задаче о распространении плоской волны в составном волноводе (рис. 10.1). С помощью метода частичных областей определение поля в волноводе было сведено к решению бесконечной системы (10.11) линейных алгебраических уравнений второго рода. К таким системам можно применить метод редукции и в ходе численного эксперимента определить решение.

Вновь построим решение задачи о составном волноводе (рис. 10.1), но при этом будем учитывать особенности звукового поля вблизи ребра [15]. Введем полярные координаты r, ψ с началом в точке $x = 0$, $z = h_1$ (рис. 10.1). Согласно условиям Мейкснера (9.124)—(9.126) при внешнем угле клина $\alpha = 3\pi/2$ на рис. 10.1 звуковое поле давления и составляющие колебательной скорости в окрестности угла определяются соотношениями:

$$p \approx c_1 + c_2 (kr)^{\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{2}{3}\psi\right), \tag{10.17}$$

$$\upsilon_r \approx c_3 (kr)^{-\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{2}{3}\psi\right), \tag{10.18}$$

$$\upsilon_\psi \approx c_4 (kr)^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\psi\right), \tag{10.19}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — величины, которые не зависят от r и ψ. В окрестности ребра давление остается конечной величиной, в то время как компоненты скорости стремятся к бесконечности в виде $(kr)^{-1/3}$. Эту особенность звукового поля вблизи ребра мы обсуждали в п. 9.11.3.

Вернемся к формулам (10.2) и (10.4), определяющим разложение поля давления в областях I и II. Они представляют собой ряды Фурье, которые в любом сечении x = const определяют разложение поля давления по ортогональной системе функции $\cos(n\pi z/h_1)$ или $\cos(n\pi z/h_2)$. Для нахождения неизвестных коэффициентов A_n и B_n следует расписать условия сопряжения (10.6), (10.7). Итак, запишем поле давления и его производной по координате x в сечении $x = 0$:

$$(p_0 + p_1)_{x=0} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right), \tag{10.20}$$

$$p_2\big|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_2}\right), \tag{10.21}$$

$$\left.\frac{\partial(p_0 + p_1)}{\partial x}\right|_{x=0} = ik - i\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n A_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right), \tag{10.22}$$

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{cases} i\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n B_n \cos\left(\dfrac{n\pi z}{h_2}\right), & z = [0, h), \\ 0, & z = (h_1, h_2]. \end{cases} \tag{10.23}$$

Операция дифференцирования ухудшает сходимость рядов Фурье, поскольку при больших номерах n имеем пропорциональность (см. (10.3), (10.5)): $\eta_n \sim n$, $\gamma_n \sim n$. Функция, определяющая давления в сечении $x = 0$, является непрерывной и конечной, поэтому ее ряд Фурье (10.20) или (10.21) сходится равномерно на отрезке $[0, h_1]$ или $[0, h_2]$.

Для скорости справедлива другая ситуация. Здесь в окрестности ребра имеем особенность (см. (10.18), (10.19)). Ее наличие ухудшает сходимость рядов (10.22), (10.23). Чтобы улучшить сходимость, попробуем использовать наши знания о характере колебательной скорости в окрестности ребра. Согласно (10.19) при $\psi = \pi/2$, вблизи ребра в сечении $x = 0$ составляющая колебательной скорости вдоль оси Ox имеет вид

$$\upsilon_\psi\left(r, \psi = \frac{\pi}{2}\right) = Cr^{-\frac{1}{3}} \equiv \upsilon_x(x = 0, z) = C(h_1 - z)^{-\frac{1}{3}}. \tag{10.24}$$

Сохраняя характер особенности в виде показателя степени -1/3, можно произвольно выбирать вид функции, удобный для проведения расчетов. В данной задаче вместо (10.24) записываем выражение

$$\upsilon_x(x = 0, z) = a\left(h_1^2 - z^2\right)^{-\frac{1}{3}}. \tag{10.25}$$

Далее, в формуле (10.22) прибавим и отнимем (10.25), т.е.

$$\left.\frac{\partial(p_0 + p_1)}{\partial x}\right|_{x=0} = ik - i\left[\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n A_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right) - \frac{a}{\left(h_1^2 - z^2\right)^{\frac{1}{3}}}\right] - i\frac{a}{\left(h_1^2 - z^2\right)^{\frac{1}{3}}}, \tag{10.26}$$

где a — некоторая неизвестная постоянная. Запишем ряд Фурье для функции (10.25) по ортогональной системе функций $\cos(n\pi z/h_1)$:

$$\frac{1}{\left(h_1^2 - z^2\right)^{\frac{1}{3}}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right), \tag{10.27}$$

где коэффициенты ряда имеют вид

$$C_0 = \frac{1}{2h_1^{2/3}} \frac{\Gamma(2/3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(7/6)}, \quad C_n = \frac{\sqrt{\pi}}{h_1}\left(\frac{2h_1^2}{n\pi}\right)^{\frac{1}{6}} \tilde{A}\left(\frac{2}{3}\right) J_{\frac{1}{6}}(n\pi), \quad n > 0. \tag{10.28}$$

Здесь $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция; $J_{1/6}(n\pi)$ — функция Бесселя порядка 1/6. Для определения коэффициентов C_n был использован интеграл [15, с. 69]:

$$\int_0^{\eta} \frac{\cos(\alpha\xi)}{\left(\eta^2 - \xi^2\right)^{1/3}} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2\eta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) J_{\frac{1}{6}}(\alpha\eta), \ (\alpha > 0, \ \eta > 0). \tag{10.29}$$

Тогда (10.26) можно переписать в виде

$$\left.\frac{\partial(p_0 + p_1)}{\partial x}\right|_{x=0} = ik - i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\eta_n A_n - aC_n\right)\cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right) - ia\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right). \tag{10.30}$$

Теперь сделаем важное замечание. Как известно [8], асимптотическое поведение коэффициентов Фурье (при $n \to \infty$) некоторой функции определяется особенностями этой функции и ее производных. Поскольку особенность функции (10.22) такая же, как функции (10.25), то асимптотическое поведение коэффициентов Фурье обеих функций будет одинаковое. Итак, при довольно больших номерах будем иметь равенство (см. (10.30)) $\eta_n A_n \approx aC_n$ при $n > M$, где M — некоторое целое число. С учетом этого вместо (10.30) записываем

$$\left.\frac{\partial(p_0 + p_1)}{\partial x}\right|_{x=0} \approx ik - i\sum_{n=0}^{M} \eta_n A_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right) + ia\sum_{n=0}^{M} C_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right) - \tag{10.31}$$

$$-ia\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right) = ik - i\sum_{n=0}^{M} \eta_n A_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right) - ia\sum_{n=M+1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right).$$

Принимая во внимание асимптотику функции Бесселя [49, 52]:

$$J_\upsilon(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\cos\left(\alpha-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\qquad |\alpha|\to\infty \tag{10.32}$$

и формулу (10.28), нетрудно определить, что асимптотика коэффициентов C_n при $n > M$ определяется так: $C_n \sim n^{-2/3}$, а согласно соотношению $\eta_n A_n \approx aC_n$ асимптотика коэффициентов A_n имеет вид: $A_n \sim n^{-5/3}$ (см. (10.5)). Понятно, что ряды Фурье для давления в окрестности ребра сходятся хорошо, а для скорости значительно хуже.

Поскольку при $n > M$ коэффициенты A_n определяются приближенным равенством $A_n \approx aC_n/\eta_n$ и считаются известными с точностью до неизвестной пока постоянной a, то поле давления в сечении $x = 0$ можно записать в виде

$$(p_0+p_1)\big|_{x=0}\approx 1+\sum_{n=0}^{M}A_n\cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right)+a\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{C_n}{\eta_n}\cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right). \tag{10.33}$$

Аналогичные выкладки можно выполнить для производной давления (10.23), при этом следует помнить, что здесь используется система ортогональных функций: $\cos(n\pi z/h_2)$, $n = 0,1,2...$ Итак, получим (сделайте самостоятельно):

$$\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x=0}\approx\begin{cases} i\sum\limits_{n=0}^{N}\gamma_n B_n\cos\left(\dfrac{n\pi z}{h_2}\right)+ib\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}D_n\cos\left(\dfrac{n\pi z}{h_2}\right), & z=[0,h_1],\\ 0, & z=[h_1,h_2],\end{cases} \tag{10.34}$$

где b — неизвестная пока постоянная; N — некоторое целое число, коэффициенты

$$D_n=\frac{\sqrt{\pi}}{h_2}\left(\frac{2h_1h_2}{n\pi}\right)^{\frac{1}{6}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)J_{\frac{1}{6}}\left(\frac{n\pi h_1}{h_2}\right),\qquad n>0. \tag{10.35}$$

Таким образом, для давления p_2 будем иметь соотношение

$$p_2\big|_{x=0}\approx\sum_{n=0}^{N}B_n\cos\left(\frac{n\pi z}{h_2}\right)+b\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{D_n}{\gamma_n}\cos\left(\frac{n\pi z}{h_2}\right). \tag{10.36}$$

Итак, подставляя (10.31), (10.33), (10.35), (10.36) в условия сопряжения (10.6), (10.7) и проводя алгебраизацию функциональной системы, как это было сделано для системы (10.8), (10.9), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_1, A_2, ..., A_M, a, B_1, B_2, ..., B_N, b$:

$$-\frac{h_1}{2}\left(1+\delta_{m0}\right)A_m+\sum_{n=0}^{N}B_nP_{mn}^{(\mathrm{B})}+b\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{D_n}{\gamma_n}P_{mn}^{(\mathrm{B})}=h_1\delta_{m0},\quad m=1,2,\ldots,M,$$

$$-\frac{h_1}{2}\frac{C_m}{\eta_m}a+\sum_{n=0}^{N}B_nP_{mn}^{(\mathrm{B})}+b\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{D_n}{\gamma_n}P_{mn}^{(\mathrm{B})}=h_1\delta_{m0},\quad m=M+1,$$

$$\sum_{n=0}^{M}\eta_nA_nP_{mn}^{(\mathrm{A})}+a\sum_{n=M+1}^{\infty}C_nP_{mn}^{(\mathrm{A})}+\frac{h_2}{2}\gamma_m(1+\delta_{m0})B_m=kP_{m0}^{(\mathrm{A})},\quad m=1,2,\ldots,N,$$

$$\sum_{n=0}^{M}\eta_nA_nP_{mn}^{(\mathrm{A})}+a\sum_{n=M+1}^{\infty}C_nP_{mn}^{(\mathrm{A})}+\frac{h_2}{2}D_mb=kP_{m0}^{(\mathrm{A})},\quad m=N+1. \qquad (10.37)$$

Решение системы (10.37) дает возможность определить приближенное решение задачи. Затем следует увеличить числа N и M на единицу и снова выполнить расчет и т.д. Последовательную процедуру расчетов можно прекратить, как это обычно делается, когда будет достигнута стабильность результатов (согласно некоторому критерию). Если бесконечные суммы в (10.37) не удается вычислить аналитически, то они заменяются конечными с достаточно большим количеством слагаемых.

Соответствующая редукция системы (10.11) приводит ее к виду:

$$-\frac{h_1}{2}\left(1+\delta_{m0}\right)A_m+\sum_{n=0}^{N}B_nP_{mn}^{(\mathrm{B})}=h_1\delta_{m0},\quad m=0,1,\ldots,M,$$

$$\sum_{n=0}^{M}\eta_nA_nP_{mn}^{(\mathrm{A})}+\frac{h_2}{2}\gamma_m(1+\delta_{m0})B_m=kP_{m0}^{(\mathrm{A})},\quad m=0,1,\ldots,N. \qquad (10.38)$$

Основное различие в процедурах поиска решения, одна из которых привела к системе уравнений (10.37), другая — к системе (10.38), заключается в том, что при отыскании решения системы (10.37), состоящей из $M+N+2$ уравнений, мы не отбрасываем бесконечные “хвосты” этих уравнений (см. (10.11)), а благодаря использованию *условия на ребре* учитываем взаимовлияние всех неизвестных величин. Поэтому можно ожидать, что такой алгоритм даст лучшие результаты, чем простая редукция системы (10.38).

Проведем сравнительный анализ. Для решения в виде рядов (10.2) и (10.4) характерным есть то, что они тождественно удовлетворяют уравнению Гельмгольца и граничным условиям на поверхности волновода ($z=0$, $z=h_1$ при $x\le 0$; $z=0$ и $z=h_2$ при $x\ge 0$) при любом количестве членов, которые удерживаются в рядах (10.2), (10.4). Поэтому, ограничиваясь конечным числом неизвестных при переходе от бесконечной системы к конечной, мы приходим к приближенному выполнению именно условий сопряжения звуковых полей на границе раздела $x=0$ между частичными областями I и II. Понятно, что это общая ситуация для метода частичных областей.

Поскольку давление и колебательная скорость представлены в виде комплексных чисел, то возможны несколько вариантов их сравнения на границе радела частичных областей:

1) действительной и мнимой частей комплексных чисел;

2) модуля и аргумента комплексных чисел, т.е. амплитуды и фазы давления или колебательной скорости;

3) модуля разности давления или колебательной скорости, которая соответствует определению расстояния между точками на комплексной плоскости.

Выберем третий вариант. Итак, будем исследовать относительные отклонения на границе раздела областей I и II $\left(x = 0,\ z = [0, h_1]\right)$:

$$\delta_p = \frac{|p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}|}{|p_0|}, \qquad \delta_\upsilon = \frac{|\upsilon_{x\mathrm{I}} - \upsilon_{x\mathrm{II}}|}{|\upsilon_{x0}|} \tag{10.39}$$

и на акустически жесткой поверхности $\left(x = 0,\ z = [h_1, h_2]\right)$:

$$\delta_\upsilon = \frac{|\upsilon_{x\mathrm{II}}|}{|\upsilon_{x0}|}, \tag{10.40}$$

где $|p_0|$ і $|\upsilon_{x0}|$ — амплитуды давления и колебательной скорости в падающей волне (10.1).

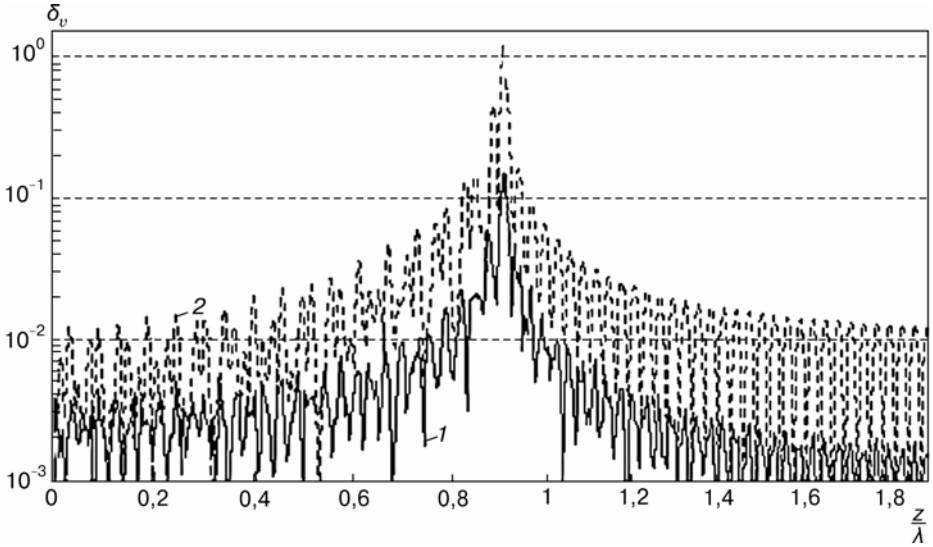


Рис. 10.2. Диаграммы отклонения δ_υ на границе $x = 0$, $z = [0, h_2]$: $h_1 / \lambda = 0{,}9$; $h_2 / \lambda = 1{,}9$; $M = N = 63$, кривая *1* — система (10.37), кривая *2* — система (10.38)

Как пример, на рис. 10.2 представлены расчеты отклонения δ_υ для волновода размерами $h_1 / \lambda = 0{,}9$; $h_2 / \lambda = 1{,}9$ для разных систем (кривая *1* соответствует решению системы (10.37), кривая *2* — (10.38)). Значение отклонения δ_υ вычислялось в 400 точках на отрезке $[0,h_2]$. Как видим, наблюдается значительное уменьшение значения δ_υ при учете условия на ребре. Согласно выбранным размерам волновода в области I имеем две однородных моды, а в области II — четыре, все другие моды — неоднородные. Это свидетельствует о том, что вблизи места резкого изменения площади сечения волновода в звуковом поле существенную роль играют неоднородные волны. Итак, учет данных об асимптотических свойствах коэффициентов возмущения неоднородных мод позволяет значительно расширить возможности исследования поля в точках вблизи ребра.

Сделаем еще одно важное замечание. Если не интересоваться полем непосредственно вблизи ребра, то использование метода простой редукции (в нашей задаче это система уравнений (10.38)) целиком оправданно, ведь для обоих случаев (системы (10.37) и (10.38)) вдали от ребра решения с графической точностью совпадают. Это полезное наблюдение следует учитывать, чтобы, не усложняя расчетную схему задачи, получить результат значительно более простыми способами. В дальнейшем именно так мы и будем делать, используя метод простой редукции с обязательным контролем значения отклонения при выполнении условий сопряжения звуковых полей, сходимости решения задачи и выполнения закона сохранения энергии.

10.4. Использование разных систем координат в методе частичных областей

Соображения, которые приведены в параграфе 10.1, достаточно наглядно объясняют процедуру построения общего решения в методе частичных областей. Дальнейшим развитием метода является использования одновременно разных систем координат при построении общего решения граничной задачи. В качестве примера, иллюстрирующего такую возможность, рассмотрим задачу об определении собственных частот конечной области, заполненной акустической средой. Пусть такой областью является прямоугольный треугольник *OAB* с жесткими границами *OA*, *AB*, *OB* (рис. 10.3). Размеры сторон таковы: $OA = a$, $AB = b$, $OB = c$. Прямоугольный треугольник здесь рассматривается только для упрощения записи поля. В общем случае никаких ограничений на форму треугольника не накладывается.

Теперь вспомним, как была решена задача о нормальных волнах плоского волновода (см. п. 5.11.2). Мы искали решение с помощью разделения переменных. Такой подход позволил получить решение в виде ряда типа (10.2). Вообще процедура разделения переменных

приводит к форме решения, которая удобна и для физического объяснения, и для численных расчетов, поэтому мы всегда старались ее использовать. Однако процедура действительно приводит к успеху, если границы области совпадают с координатными поверхностями выбранной системы координат. Напомним, что координатные поверхности — это поверхности, на которые одна из координат постоянна, а две другие изменяются. Соответственно, на плоскости координатная линия — это линия, для которой одна из координат постоянная, а другая переменная. Например, так было для плоского волновода в декартовой системе координат, в задаче об излучении звука сферой, где использовалась сферическая система координат и т.п.

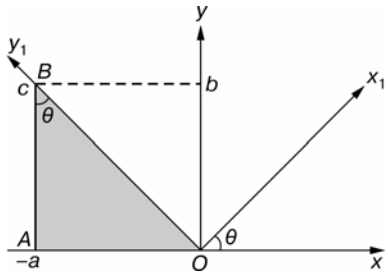


Рис. 10.3. Пример треугольной области

Возвращаясь к задаче о треугольной области (рис. 10.3), следует отметить, что стороны треугольника *OA* и *AB* совпадают с координатными линиями системы координат *xOy*, а стороны *OB* не совпадают. Поэтому введем еще одну систему координат x_1Oy_1, которая повернута относительно системы *xOy* на угол θ (рис. 10.3). В системе координат x_1Oy_1 сторона *OB* совпадает с координатной линией (ось Oy_1).

Наша цель построить общее решение граничной задачи, т.е. определить звуковое поле в таком виде, чтобы иметь возможность удовлетворить граничным условиям на каждой из сторон треугольника *OAB*. Такой цели можно достичь, если представить поле давления в виде трех рядов Фурье, а именно

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\exp\left(i\alpha_n y\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\exp\left(i\beta_n (x+a)\right) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi y_1}{c}\right)\exp\left(-i\gamma_n x_1\right), \qquad (10.41)$$

где

$$\alpha_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (n\pi/a)^2}, & \text{если} \quad k > (n\pi/a), \\ i\sqrt{(n\pi/a)^2 - k^2}, & \text{если} \quad k < (n\pi/a), \end{cases}$$

$$\beta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (n\pi/b)^2}, & \text{если} \quad k > (n\pi/b), \\ i\sqrt{(n\pi/b)^2 - k^2}, & \text{если} \quad k < (n\pi/b), \end{cases} \tag{10.42}$$

$$\gamma_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (n\pi/c)^2}, & \text{если} \quad k > (n\pi/c), \\ i\sqrt{(n\pi/c)^2 - k^2}, & \text{если} \quad k < (n\pi/c). \end{cases}$$

Попробуем понять, почему решение (10.41) можно назвать общим. Дело в том, что здесь выделены ряды Фурье по каждой из сторон треугольника, наличие которых обеспечивает общность решения (10.41) граничной задачи. Убедимся в этом. Например, рассмотрим граничное условие на стороне *OA*. Поскольку стороны треугольника выбраны акустически жесткими, то на стороне *OA* выполняется условие

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad x = [-a, 0], \quad y = 0. \tag{10.43}$$

Используя формулы преобразования декартовых координат [8]:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y_1 &= -x\cos\theta + y\cos\theta, \end{aligned} \tag{10.44}$$

подставляем (10.41) в граничное условие (10.43) и получаем соответствующее функциональное уравнение. Далее, используя ортогональность системы функций $\cos(n\pi x/a)$, $n = 0,1,2,\ldots$, на отрезке $[-a, 0]$, приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$A_m + \sum_{n=0}^{\infty} C_n a_{mn} = 0, \quad m = 0,1,2\ldots \tag{10.45}$$

Выражения для известных коэффициентов a_{mn} записывать не будем.

Уравнение типа (10.45) справедливо и при рассмотрении граничных условий на стороне *AB*, где

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = -a, \quad y = [0, b]. \tag{10.46}$$

Записывая это условие и используя ортогональность системы функций $\cos(n\pi y/b)$, $n = 0,1,2,\ldots$, приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений второго рода:

$$B_m + \sum_{n=0}^{\infty} C_n b_{mn} = 0, \quad m = 0,1,2\ldots \tag{10.47}$$

Наконец при реализации граничных условий на гипотенузе:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad y_1 = [0, c], \tag{10.48}$$

воспользуемся ортогональностью системы функций $\cos(n\pi y_1/c)$, $n = 0,1,2...$, на отрезке $y_1 = [0, c]$. Это приводит к соответствующей бесконечной системе алгебраических уравнений второго рода:

$$C_m + \sum_{n=0}^{\infty} A_m d_{mn}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} B_m d_{mn}^{(2)} = 0, \quad m = 0,1,2,3..., \tag{10.49}$$

коэффициенты систем b_{mn}, $d_{mn}^{(1)}$, $d_{mn}^{(2)}$ также можно определить в явном виде.

Итак, совокупность трех однородных связанных бесконечных систем (10.45), (10.47), (10.49) определяет требования, которые накладывают граничные условия (10.43), (10.46), (10.48) на коэффициенты A_n, B_n, C_n рядов Фурье в решении (10.41). Приравнивая нулю, определитель этой системы, получаем уравнение для определения собственных частот треугольной области, заполненной акустической средой.

Вернемся к выражению для давления (10.41). Здесь каждое слагаемое в рядах является нормальной волной соответствующего плоского волновода с жесткими границами. Например, член $A_n \cos(n\pi x/a)\exp(i\alpha_n y)$ — это n-тая нормальная волна плоского волновода с характерным размером a. Если $k > n\pi/a$, то волна однородная, а если $k < n\pi/a$, то — неоднородная (см. (10.42)). Итак, первый ряд Фурье в формуле (10.41) определяет совокупность нормальных волн волновода, распространяющихся в положительном направлении оси Ox от границы $x = [-a, 0]$, $y = 0$. Подчеркнем, что важно правильно выбрать знак в показателе экспонент выражения (10.41): этот знак должен определять неоднородные волны, в которых амплитуда уменьшается от границы вглубь треугольной области вдоль соответствующей координаты.

Приведенное построение решения позволяет обратить внимание еще на один аспект метода частичных областей. Сам характер рассуждений, приводящий к представлению искомого давления звукового поля в виде (10.41), указывает на неоднозначность формы решения. Например, первый ряд Фурье в (10.41) сохранит свойство полноты, если в нем систему функций $\cos(n\pi x/a)$, $n = 0,1,2,...$, заменить на $\sin(n\pi x/a)$, $n = 0,1,2,...$ И эта, и другая система функций является полной и ортогональной на отрезке $x = [-a, 0]$. Понятно, что первая

более пригодна для удовлетворения граничных условий на жестких границах. В случае же акустически мягких сторон (нулевым для них есть давление) преимущество нужно отдать другой системе.

Возможность вариации формы решения при сохранении общего характера, безусловно, определяет гибкость метода частичных областей. В конце этого параграфа еще раз обратим внимание на важное, по сути, отличие задач для составного волновода (рис. 10.1), с одной стороны, и для треугольной области (рис. 10.3), с другой. Если в первой задаче граничная поверхность области существования звукового поля описывалась частями координатных поверхностей одной системы координат, то в задаче для треугольной области это уже не так. Таким образом, *сама возможность работы одновременно в разных системах координат существенно расширяет круг задач акустики, которые допускают построение аналитического решения.*

10.5. Дополнение граничных условий

В продолжение предыдущего параграфа опишем способ, который также существенно расширяет возможности метода частичных областей при исследовании звуковых полей в сложных (неканонических) областях. Дело в том, что возникают ситуации, когда при использовании даже явно полных решений граничной задачи могут возникнуть трудности при преобразовании функциональных уравнений в алгебраические. Вот здесь возникает специфическая задача *продолжения граничных условий с физически заданной границы на некоторый несуществующий участок*. Прежде, чем описать способ преодоления таких трудностей, приведем некоторые математические сведения.

Согласно *теореме Дирихле*[*] [8], если функция $\Phi(x)$, заданная на отрезке $[-a,a]$ и являющаяся на нем кусочно-непрерывной, кусочно-монотонной и ограниченной, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится во всех точках отрезка $[-a,a]$. При этом, если $S(x)$ — сумма тригонометрического ряда Фурье функции $\Phi(x)$, то во всех точках непрерывности этой функции $S(x) = \Phi(x)$, во всех точках разрыва первого рода $S(x) = \left[\Phi(x-0) + \Phi(x+0)\right]/2$ (здесь $\Phi(x-0)$ и $\Phi(x+0)$ — левые и правые пределы $\Phi(x)$ в точке x), а на концах отрезка $S(a) = S(-a) = \left[\Phi(a-0) + \Phi(-a+0)\right]/2$, т.е. в теореме Дирихле концы отрезка $[-a,a]$ играют особую роль, подобную роли точек разрыва.

---

[*] Дирихле (Dirichlet) Петер Густав Лежён (1805—1859) — немецкий математик.

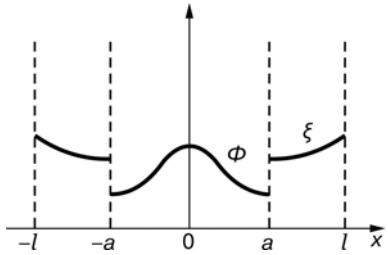


Рис. 10.4. Функция Ф (x) и ее продолжение $\xi(x)$

Пусть на отрезке $[-a,a]$ имеем функцию Ф (x) (будем, для упрощения, считать ее четной), рис. 10.4. Тогда она может быть представлена в виде ряда Фурье по полной и ортогональной системе функций $\{\cos(n\pi x/a),\ n=0,1,2,...\}$:

$$\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \tag{10.50}$$

Предположим, что мы имеем систему функций $\{\cos(n\pi x/l),\ n=0,1,2,...\}$, которая есть полной и ортогональной на отрезке $[-l,l]$, причем $l>a$. Поставим вопрос: как можно представить функцию Ф (x) в виде ряда Фурье по системе функций $\{\cos(n\pi x/l),\ n=0,1,2,...\}$. Понятно, что эта система тригонометрических функций не является ортогональной на отрезке $[-a,a]$. Поэтому, чтобы иметь возможность записать ряд Фурье для Ф (x) по системе $\{\cos(n\pi x/l),\ n=0,1,2,...\}$, следует доопределить функцию Ф (x) на всем отрезке $[-l,l]$, на рис. 10.4 это показано графически.

Теперь возможно записать соотношение для ряда Фурье:

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\begin{cases}\Phi(x), & \text{если}\quad |x|\le a,\\ \xi(x), & \text{если}\quad a\le|x|\le l,\end{cases} \tag{10.51}$$

где $\xi(x)$ — произвольная функция. На основе свойства ортогональности системы функций $\{\cos(n\pi x/l),\ n=0,1,2,...\}$ на отрезке $|x|\le l$ коэффициенты A_n легко определяются.

Итак, имеем очевидное утверждение: если функции Ф(x) и $\xi(x)$ удовлетворяют теореме Дирихле (условия Дирихле), то ряды (10.50) и (10.51) на отрезке $[-a,a]$ сходятся за исключением, возможно, концов отрезка $x=\pm a$. Понятно, что это зависит от того, какое продолжение $\xi(x)$ для функции Ф(x) мы выбрали.

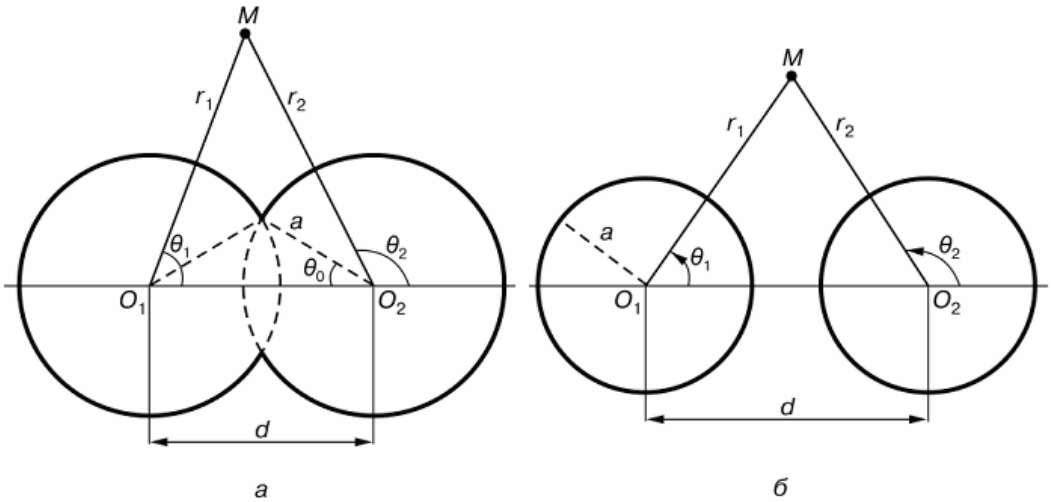


Рис. 10.5. Пример излучающей системы из двух цилиндров:
а — цилиндры пересекаются; *б* — цилиндры не касаются друг друга

Рассмотрим идею дополнения граничных условий на примере задачи об излучении звука сложной (неканонической) поверхностью. Речь идет о плоской задаче, в которой имеем два пересекающихся цилиндра с параллельными осями. Для простоты возьмем два цилиндра с одинаковым радиусом a (рис. 10.5, *а*).

Сначала рассмотрим ситуацию, когда цилиндры не касаются друг друга (рис. 10.5, *б*). Такая задача хорошо изучена [60, с. 139—142]. Введем две полярные системы координат $r_1O_1\theta_1$ и $r_2O_2\theta_2$ с центрами O_1 и O_2 на осях цилиндров.

В соответствии с п. 7.12.1, поле давления отдельно взятого цилиндра, например первого (слева), описывается соотношением (7.128), представляющим собой суперпозицию цилиндрических волн:

$$p_1(r_1,\theta_1)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(1)}H_n^{(1)}(kr_1)\cos(n\theta_1), \qquad (10.52а)$$

(считаем, что функция четная относительно угловой координаты, поэтому можно использовать только функции косинуса). Здесь коэффициенты $A_n^{(1)}$ определяются из граничного условия на поверхности первого цилиндра. Это условие состоит в задании радиальной скорости на поверхности цилиндра, т.е.

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_1(r_1=a,\theta_1)}{\partial r_1}=V_1(\theta_1), \quad \theta_1=[0,2\pi]. \qquad (10.52б)$$

Подставляя (10.52*а*) в (10.52*б*) и, используя свойство ортогональности системы функций $\cos(n\theta_1)$, $n=1,2,\ldots$ на отрезке $[0,2\pi]$, определяем

коэффициенты $A_n^{(1)}$. Аналогично, если в пространстве имеем только второй цилиндр (справа), то его поле давления имеет вид

$$p_2(r_2,\theta_2)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(2)}H_n^{(1)}(kr_2)\cos(n\theta_2), \qquad (10.53а)$$

где коэффициенты $A_n^{(2)}$ определяются из условия

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_2(r_2=a,\theta_2)}{\partial r_2}=V_2(\theta_2), \qquad \theta_2=[0,2\pi] \qquad (10.53б)$$

вследствие ортогональности системы функций $\cos(n\theta_2)$, $n=0,1,2,...$ на отрезке $[0,2\pi]$.

Теперь вернемся к задаче излучения двух цилиндров, которые не касаются друг друга (рис. 10.5, *б*). Здесь по сравнению с одним цилиндром ситуация усложняется. Дело в том, что звуковое поле в точке наблюдения *M* состоит из звуковых полей, которые излучает каждый цилиндр, причем излучение каждого из цилиндров должно быть определено с учетом многократного рассеяния звука на цилиндрах. Поэтому поле давления пары цилиндров определим как сумму давлений p_1 и p_2, т.е.

$$p=p_1+p_2=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(1)}H_n^{(1)}(kr_1)\cos(n\theta_1)+\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(2)}H_n^{(1)}(kr_2)\cos(n\theta_2), \qquad (10.54)$$

где коэффициенты $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ нужно выбирать так, чтобы *одновременно удовлетворить граничные условия на поверхностях обоих цилиндров*:

на поверхности первого цилиндра

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial(p_1+p_2)}{\partial r_1}=V_1(\theta_1), \qquad r_1=a, \quad \theta_1=[0,2\pi], \qquad (10.55)$$

на поверхности второго цилиндра

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial(p_1+p_2)}{\partial r_2}=V_2(\theta_2), \qquad r_2=a, \quad \theta_2=[0,2\pi]. \qquad (10.56)$$

Следует отметить, что в (10.54) волны записаны в разных системах координат, связанных с центрами каждого из цилиндров. Поэтому, чтобы можно было выполнить дифференцирование и удовлетворить граничное условие (10.55) на поверхности первого цилиндра, необходимо записать волны, которые излучаются вторым цилиндром в системе координат $r_1O_1\theta_1$ с центром в точке O_1. Аналогичное замечание имеем относительно граничного условия (10.56) на поверхности второго цилиндра.

Перенос начала отсчета в точку O_1 или O_2 можно выполнить, используя *теорему сложения для цилиндрических функций* [49, 60, *]. Согласно этой теореме имеем [49, с. 184]:

$$H_n^{(1)}(kr_1)\cos(n\theta_1) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q H_{n+q}^{(1)}(kd) J_q(kr_2)\cos(q\theta_2), \quad d > r_2,$$

$$H_n^{(1)}(kr_2)\cos(n\theta_2) = (-1)^n \sum_{q=-\infty}^{\infty} H_{n+q}^{(1)}(kd) J_q(kr_1)\cos(q\theta_1), \quad d > r_1, \tag{10.57}$$

где (r_1, θ_1) и (r_2, θ_2) — координаты точки наблюдения M в соответствующих системах координат (рис. 10.5).

Используя теорему сложения для цилиндрических функций, подставляем (10.54) в условия (10.55), (10.56) и получаем пару функциональных уравнений. Алгебраизация первого из них осуществляется вследствие ортогональности системы функций $\cos(n\theta_1)$, $n = 0,1,2,\ldots$, на отрезке $[0, 2\pi]$, а второго — вследствие ортогональности системы функций $\cos(n\theta_2)$, $n = 0,1,2,\ldots$, на отрезке $[0, 2\pi]$. Таким образом, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$A_m^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} a_{mn}^{(2)} = b_m^{(1)}, \qquad m = 0,1,2,\ldots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} a_{mn}^{(1)} + A_m^{(2)} = b_m^{(2)}, \qquad m = 0,1,2,\ldots, \tag{10.58}$$

где $a_{mn}^{(1)}$, $a_{mn}^{(2)}$, $b_m^{(1)}$, $b_m^{(2)}$ — коэффициенты, которые вычисляются; ее решение можно получить благодаря редукции бесконечной системы.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда цилиндры пересекаются (рис. 10.5, *а*). Здесь граничные условия на штриховых участках окружностей не определены, поскольку эти участки вообще не являются физическими границами области. Итак, функции $V_1(\theta_1)$ и $V_2(\theta_2)$ не определены на полных окружностях, поэтому воспользоваться ортогональностью систем функций $\cos(n\theta_1)$ и $\cos(n\theta_2)$ нет возможности. Алгебраизация функциональных уравнений при таких условиях приведет к появлению системы алгебраических уравнений первого рода вида (10.14), что, как уже отмечалось выше, является нежелательной ситуацией.

Используя идею продолжения граничных условий, записываем граничное условие для левого цилиндра (рис. 10.5, *а*) таким образом:

---

* Ерофеенко В.Т. Теоремы сложения. — Минск: Наука и техника, 1989. — 225 с.

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_1}{\partial r_1} = f_1(\theta_1), \qquad r_1 = a, |\theta_1| < \theta_0,$$

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial r_1} = V_1(\theta_1), \quad r_1 = a, |\theta_1| > \theta_0, \tag{10.59}$$

где функция $f_1(\theta_1)$ определяет дополнение граничных условий для решения p_1 на нефизическом участке поверхности левого цилиндра. Аналогичное соотношение запишем для правого цилиндра:

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial r_2} = V_2(\theta_2), \qquad r_2 = a, \ |\theta_2| \le \pi - \theta_0,$$

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_2}{\partial r_2} = f_2(\theta_2), \qquad r_2 = a, \ |\theta_2| > \pi - \theta_0, \tag{10.60}$$

где функция $f_2(\theta_2)$ определяет дополнение граничных условий для решения p_2 на нефизическом участке правого цилиндра.

Теперь мы получили возможность воспользоваться ортогональностью систем функций $\cos(n\theta_1)$ и $\cos(n\theta_2)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ и преобразовать функциональную систему уравнений (10.59), (10.60) в бесконечную систему алгебраических уравнений второго рода вида (10.58).

Следует отметить, что как показано в работе [60, с. 142-144] применение теоремы сложения для цилиндрических функций в данной задаче возможно в том случае, когда цилиндры не касаются друг друга. В противном случае соответствующие ряды вида (10.16) расходятся. Поэтому в задаче с пересекающимися цилиндрами следует, используя формулы связи между полярными системами координат $r_1O_1\theta_1$ и $r_2O_2\theta_2$, провести численное интегрирование при определении коэффициентов матрицы.

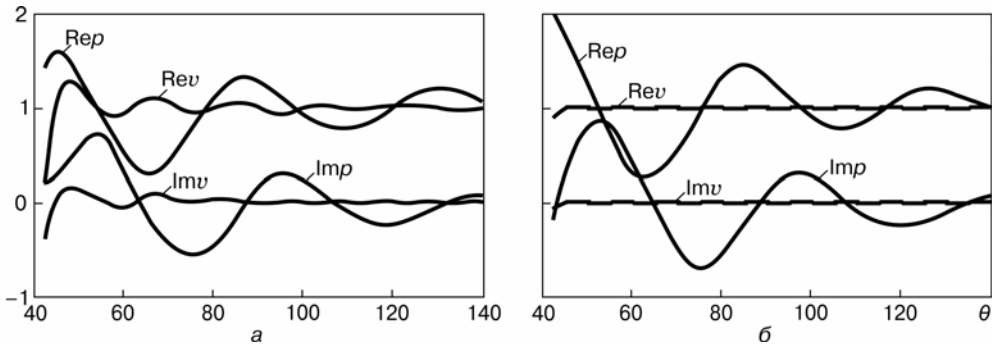


Рис. 10.6. Нормированные кривые колебательной скорости и давления на поверхности излучателя: *а* – $f_1(\theta_1) = f_2(\theta_2) = 0$; *б* – $f_1(\theta_1) = f_2(\theta_2) = V_0$.

На рис. 10.6 приведены некоторые расчеты для излучающей системы (рис. 10.5, *а*) при волновом размере радиуса цилиндров $a/\lambda = 1{,}2$ и волновом расстоянии между осями цилиндров $d/\lambda = 1{,}8$. При таких размерах угол $\theta_0 \approx 41{,}4^\circ$. На излучающих поверхностях задано равномерное распределение колебательной скорости $\left(V_1(\theta_1) = V_2(\theta_2) = V_0\right)$. В бесконечных рядах удерживалось по 20 коэффициентов $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$. На рис. 10.6 представлены расчеты колебательной скорости и давления на поверхности излучателя, нормированные к V_0 и $\rho c V_0$, соответственно. При этом, рис. 10.6, *а* соответствует ситуации, когда на штриховых участках цилиндрических поверхностей задается нулевая скорость, а рис. 10.6, *б* — та же скорость, что и на активной части границы, т.е. V_0.

Как видим, непрерывное продолжение граничных условий на всю поверхность цилиндров (рис. 10.6, *б*) существенно улучшает сходимость метода редукции при нахождении решения бесконечных систем уравнений и вычислении характеристик поля. В этом случае при указанном количестве удержанных коэффициентов $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ получено практически точное решение. При задании на продолжении границ нулевых значений колебательной скорости (рис. 10.6, *а*) сходимость, как это всегда бывает при суммировании рядов Фурье, ухудшается. Существенное отличие между кривыми на рис. 10.6, *а*, *б* наблюдается лишь в зоне вблизи точек пересечения цилиндров (здесь $\theta_0 \approx \ \approx 41{,}4^\circ$). Однако численный эксперимент показывает, что при увеличении количества учтенных коэффициентов $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ оценки характеристик ближнего и дальнего полей приближаются друг к другу.

Здесь следует сделать важное замечание. Дело в том, что продолжение граничных условий на нефизическую поверхность левого цилиндра проведено только для решения p_1, а дополнение граничных условий на нефизическую поверхность правого цилиндра — только для решения p_2. Понятно, что указать, каким должен быть выбор функций $f_1(\theta_1)$ и $f_2(\theta_2)$, которые определяют продолжение граничных условий на нефизические участки границы, невозможно. И все же, основываясь на рассуждениях, которые характерны для конкретной задачи, нужно стремиться к уменьшению разрыва функции в точке, где стыкуются граничные условия на физическом и нефизическом участках поверхности тела. Отметим еще раз, что результат на рис. 10.6, *б* оказался очень удачным.

Подводя итоги, можно сказать, что большое количество практических вычислений и строгий анализ некоторых простых задач [14] приводят к необычному, на первый взгляд, выводу, а именно, *окон-*

чательные количественные оценки характеристик поля не зависят от выбора функций, которые дополняют граничные условия на нефизическом участке границ (в данной задаче это f_1 (θ_1) и f_2 (θ_2)). Таким образом, описанный способ улучшения свойств бесконечных систем, полученных во время решения задачи, является действительно конструктивным и, следовательно, расширяет возможности метода частичных областей.

Рассмотренный выше материал дает общую характеристику метода частичных областей и раскрывает его возможности. Следующие параграфы посвящены построению на базе метода частичных областей решению интересных и в то же время важных для практики своими результатами граничных задач акустики.

10.6. Распространение звука в нерегулярных волноводах

Слово *регулярный* происходит от латинского слова *regularis*, т.е. равномерный, правильной формы. Таким волноводом является плоский волновод, который мы исследовали в параграфе 5.11, или волновод в виде трубы постоянного сечения. Теперь речь будет идти о волноводах, в которых их регулярность нарушается, причем изменение соответствующих характеристик волновода происходит не постепенно, а, наоборот, резко (например, составной волновод, см. рис. 10.1). Неоднородные волноводы такого типа находят широкое применение в акустических и радиоэлектронных устройствах. Понятно, что исследование нерегулярных волноводов значительно сложнее, чем регулярных.

10.6.1. Распространение звука в волноводе с изгибом

На рис. 10.7, а-*в* изображен плоскопараллельный волновод с изгибом, заполненный идеальной средой плотностью ρ, со скоростью звука c. Характерные размеры волновода до и после изгиба равны h_1 и h_2, соответственно. Величина изгиба характеризуется углом θ, он может быть острым, прямым и тупым. Поверхности волновода считаем акустически жесткими, тогда производная от давления по нормали на этих поверхностях равна нулю:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_S = 0. \qquad (10.61)$$

Разделим всю область существования звукового поля на частичные области. Для этого, из угловой точки, образованной верхними границами волновода, опустим перпендикуляры на нижние границы. Итак, получим три области. Как показано на рис. 10.7, *а*, введем две

декартовые системы координат xOy и $x'Oy'$ с общим центром в точке O. Пусть слева на изгиб падает одна из мод области I (см. параграф 5.11):

$$p_0^{(q)}(x,y) = \cos\left(\frac{q\pi y}{h_1}\right)\exp\left(ik_q(x+l)\right), \tag{10.62}$$

где q — номер падающей на изгиб моды (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем). Вследствие ее взаимодействия с изгибом образуется отраженная волна и волна, прошедшая в область II. Отраженную волну представим в виде суперпозиции мод области I. Тогда в системе координат xOy, давление звукового поля в области I запишем в виде

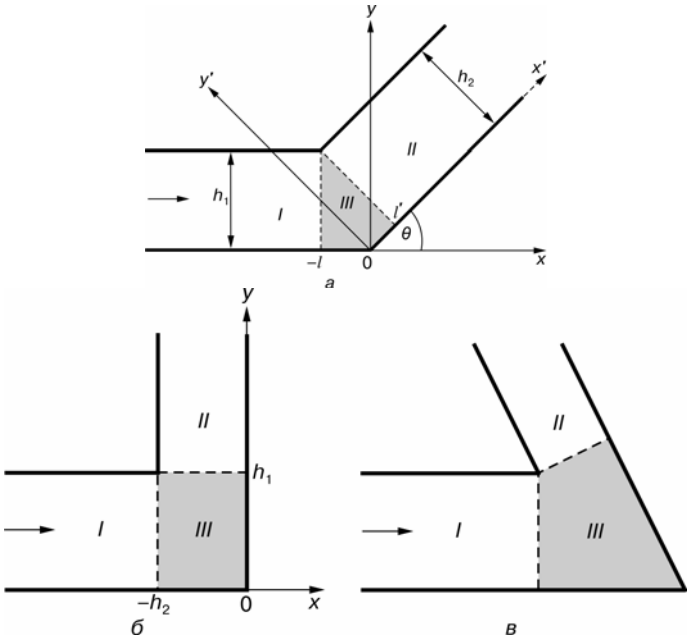


Рис. 10.7. Пример плоского волновода с изгибом:
а — угол изгиба острый; *б* — прямой; *в* — тупой

$$p_{\mathrm{I}}(x,y) = \cos\left(\frac{q\pi y}{h_1}\right)\exp\left(ik_q(x+l)\right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h_1}\right)\exp\left(-ik_n(x+l)\right), \tag{10.63}$$

где

$$k_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (n\pi/h_1)^2}, & \text{если} \quad k > (n\pi/h_1), \quad k = \dfrac{\omega}{c}, \\ i\sqrt{(n\pi/h_1)^2 - k^2}, & \text{если} \quad k < (n\pi/h_1), \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{10.64}$$

Выражение (10.63) является общим решением уравнения Гельмгольца для области I, т.е. его форма не изменится при любых условиях на границе раздела областей I и III.

Аналогично в системе координат $x'Oy'$ запишем поле давления в области II, определяющее прошедшую волну через изгиб:

$$p_{\mathrm{II}}(x',y') = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h_2}\right)\exp\left(i\gamma_n(x'-l')\right), \tag{10.65}$$

где

$$\gamma_n = \begin{cases} \sqrt{k^2-(n\pi/h_2)^2}, & \text{если} \quad k>(n\pi/h_2), \\ i\sqrt{(n\pi/h_2)^2-k^2}, & \text{если} \quad k<(n\pi/h_2). \end{cases} \tag{10.66}$$

Построим решение для области III:

$$p_{\mathrm{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h_1}\right)\exp\left(ik_n(x+l)\right) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_2}\right)\exp\left(-i\gamma_n(x'-l')\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(i\eta_n y\right) + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos\left(\frac{n\pi x'}{l'}\right)\exp\left(i\varsigma_n y'\right), \tag{10.67}$$

где

$$\eta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2-(n\pi/l)^2}, & \text{если} \quad k>(n\pi/l), \\ i\sqrt{(n\pi/l)^2-k^2}, & \text{если} \quad k<(n\pi/l), \end{cases}$$

$$\varsigma_n = \begin{cases} \sqrt{k^2-(n\pi/l')^2}, & \text{якщо} \quad k>(n\pi/l'), \\ i\sqrt{(n\pi/l')^2-k^2}, & \text{якщо} \quad k<(n\pi/l'). \end{cases} \tag{10.68}$$

Решение для области III является общим. Действительно, выражение (10.67) состоит из четырех рядов Фурье с произвольными коэффициентами, что дает возможность выполнить условия сопряжения полей на границах раздела областей I и III, II и III, а также граничные условия на акустически жестких границах области III. При этом первая сумма в формуле (10.67) за счет полноты системы функций $\cos(n\pi x/h_1)$, $n = 0,1,2,\ldots$ на отрезке $y = [0,h_1]$ гарантирует выполнение условий сопряжения звуковых областей на границе раздела областей I и III. Вторая сумма за счет полноты системы функций $\cos(n\pi y'/h_2)$, $n = 0,1,2,\ldots$ на отрезке $y' = [0,h_2]$ обеспечивает выполнение условий сопряжения звуковых полей на границе раздела областей II и III. Третья сумма обеспечивает выполнение граничного условия на жесткой по-

верхности $x=[-l,0]$, $y=0$, а четвертая — на жесткой поверхности $x'=[0,l']$, $y'=0$.

Обратите внимание на знак показателя экспонент в формуле (10.67). Он выбирается таким, чтобы волны распространялись вдоль соответствующей оси вглубь области III. В этом случае амплитуда давления в неоднородных волнах будет уменьшаться от границы вглубь области III.

Условия сопряжения на границах определенных областей и граничные условия на жестких поверхностях области III имеют вид

$$\left.\begin{aligned} p_{\mathrm{I}} &= p_{\mathrm{III}} \\ \frac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial x} &= \frac{\partial p_{\mathrm{III}}}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad x=-l, \quad y=[0,h_1],$$

$$\left.\begin{aligned} p_{\mathrm{II}} &= p_{\mathrm{III}} \\ \frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial x'} &= \frac{\partial p_{\mathrm{III}}}{\partial x'} \end{aligned}\right\} \quad x'=l', \quad y'=[0,h_2],$$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{III}}}{\partial y}=0, \quad x=[-l,0], \quad y=0, \tag{10.69}$$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{III}}}{\partial y'}=0, \quad x'=[0,l'], \quad y'=0.$$

Подстановка выражений (10.63) — (10.67) в условия (10.69) с учетом формул, определяющих связь между системами координат *xOy, x′Oy′*:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta, \end{cases} \tag{10.70}$$

приводит к системе функциональных уравнений. Использование свойства ортогональности системы функций $\cos(n\pi y/h_1)$, $n=0,1,2,\ldots$ на отрезке $[0,h_1]$, системы функций $\cos(n\pi y'/h_2)$, $n=0,1,2,\ldots$ на отрезке $[0,h_2]$, системы функций $\cos(n\pi x/l)$, $n=0,1,2,\ldots$ на отрезке $x=[-l,0]$, системы функций $\cos(n\pi x'/l')$, $n=0,1,2,\ldots$ на отрезке $x'=[0,l']$ дает возможность провести алгебраизацию функциональной системы. В результате этого получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n. Читатель сможет выполнить эти несложные, но достаточно громоздкие преобразования самостоятельно.

Полученное решение позволяет провести анализ звукового поля в волноводе. Большое значение имеют энергетические характеристики прохождения звуковой волны через изгиб волновода. Естественно оп-

ределить коэффициенты прохождения $W^{(q)}$ как отношение среднего потока мощности волны в области II к среднему потоку мощности q-й моды, падающей на изгиб в области I:

$$W^{(q)} = \frac{\int\limits_0^{h_2} \left(p_{\mathrm{II}} \left(\frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial x'} \right)^* + p_{\mathrm{II}}^* \frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial x'} \right) dx'}{\int\limits_0^{h_1} \left(p_0^{(q)} \left(\frac{\partial p_0^{(q)}}{\partial x} \right)^* + \left(p_0^{(q)} \right)^* \frac{\partial p_0^{(q)}}{\partial x} \right) dx}, \qquad (10.71)$$

где * — знак комплексного сопряжения. Напомним, что согласно (4.59) под знаком интеграла с точностью до постоянного множителя $1/(4\omega\rho)$ записана интенсивность. После интегрирования по сечению волновода определяем средний поток мощности. Подставляя выражения (10.62) и (10.65) в (10.71) и проводя соответствующие преобразования, получаем формулу для коэффициента прохождения q-й моды через изгиб волновода:

$$W^{(q)} = \sum_{n=0}^{N_2} W_n^{(q)}, \qquad (10.72)$$

где

$$W_n^{(q)} = \frac{\varepsilon_n h_2 \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_q h_1 \operatorname{Re}(k_q)} |B_n|^2, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = \frac{1}{2}, \quad n > 0. \qquad (10.73)$$

Согласно выражениям (10.72) и (10.73) коэффициент прохождения $W^{(q)}$ представлен в виде суммы энергетических коэффициентов возмущения $W_n^{(q)}$ мод области II, или, иначе, выражение (10.72) можно трактовать как сумму коэффициентов трансформации q-й моды области I в моды области II. Согласно (10.73) число слагаемых N_2 в формуле (10.72) равно количеству однородных (т.е. распространяющихся) нормальных волн области II (для них $\operatorname{Re}(\gamma_n) \neq 0$).

Аналогично, коэффициент отражения $V^{(q)}$, который определяется как отношение среднего потока мощности в отраженной волне к среднему потоку мощности q-й моды, падающей на изгиб в области I, представлен в виде

$$V^{(q)} = \sum_{n=0}^{N_1} V_n^{(q)}, \quad \text{где} \quad V_n^{(q)} = \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(k_n)}{\varepsilon_q \operatorname{Re}(k_q)} |A_n|^2. \qquad (10.74)$$

Согласно закону сохранения энергии должно выполняться условие $V^{(q)} + W^{(q)} = 1$.

Решение бесконечной системы алгебраических уравнений можно получить методом редукции. Количество уравнений в редуцированной системе определяется волновыми размерами соответствующих областей волновода h_1, h_2, l, l' (рис. 10.7). В расчетах количество учтенных мод, определяющих порядок системы уравнений, содержит в себе все однородные волны и несколько (три-четыре, чего оказывается вполне достаточно) неоднородных. При таких условиях закон сохранения энергии выполняется с точностью, не хуже, чем 0,1 %.

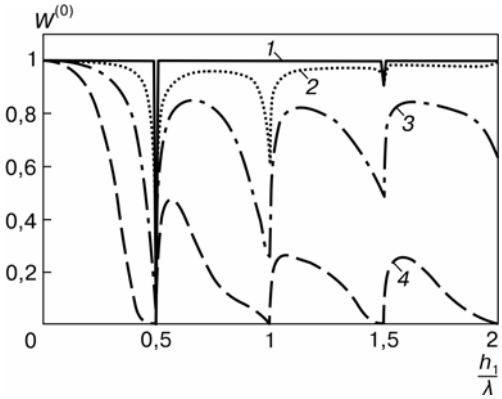


Рис. 10.8. Частотные зависимости энергетического коэффициента прохождения $W^{(0)}$ при $h_1 = h_2 = h$:

1 — θ = 5°; *2* — θ = 45°; *3* — θ = 65°; *4* — θ = 90°

На рис. 10.8 представлены частотные характеристики коэффициента прохождения $W^{(0)}$ нулевой моды (q = 0) области I при разных углах изгиба. Характерные размеры областей I и II полагались одинаковыми, т.е. $h_1 = h_2 = h$. Как видим, для углов изгиба $\theta \le 90°$ наблюдается уменьшение коэффициента прохождения с увеличением угла изгиба θ, что является физически понятным результатом.

При величине $h \ll \lambda$, независимо от угла изгиба волновода θ, коэффициент прохождения $W^{(0)}$ равен единице, что соответствует распространению звука в очень узкой трубе: “волна бежит в такой трубе, не замечая изгибов, так же, как если бы труба была вытянута в прямую линию” [20, с. 168]. Обращает на себя внимание наличие провалов в характеристиках, когда h кратно $\lambda/2$, а при угле $\theta = 90°$ в этих случаях получаем нулевые значения коэффициента прохождения $W^{(0)}$. При $h/\lambda = 0,5$ для всех углов изгиба имеем $W^{(0)} = 0$.

Чтобы понять характер кривых на рис. 10.8 рассмотрим рис. 10.9, где приведены частотные зависимости коэффициентов возбуждения мод $W_n^{(0)}$ области II при падении на изгиб в области I нулевой моды

(q = 0). Напомним, что нулевая мода в однородном волноводе с жесткими границами распространяется при любом волновом размере волновода, в то время как мода с номером $n > 0$ согласно (10.66) является распространяющейся только при выполнении условия $k > n\pi/h_2$ или $h_2 > n\pi/k = n\lambda/2$. На рис. 10.9, *а* представлены кривые, соответствующие изгибу под углом θ = 65°, на рис. 10.9, *б* — θ = 90° при h_1 = $=h_2$ = h. Если волновой размер $h/\lambda < 0{,}5$, то в области II распространяется только нулевая мода (кривая $n = 0$), и она определяет прохождение нулевой моды области I через изгиб. Ситуация изменяется, если h/λ > 0,5. Это наглядно иллюстрирует рис. 10.8. Так, при угле изгиба θ = 65° (рис. 10.9, *а*) при h/λ > 0,5 возбуждается однородная первая мода (кривая n = 1), которая по энергии значительно превосходит нулевую, а при h/λ > 1 доминирует вторая мода (кривая n = 2), и далее с увеличением h/λ доминируют поочередно моды с высшими номерами.

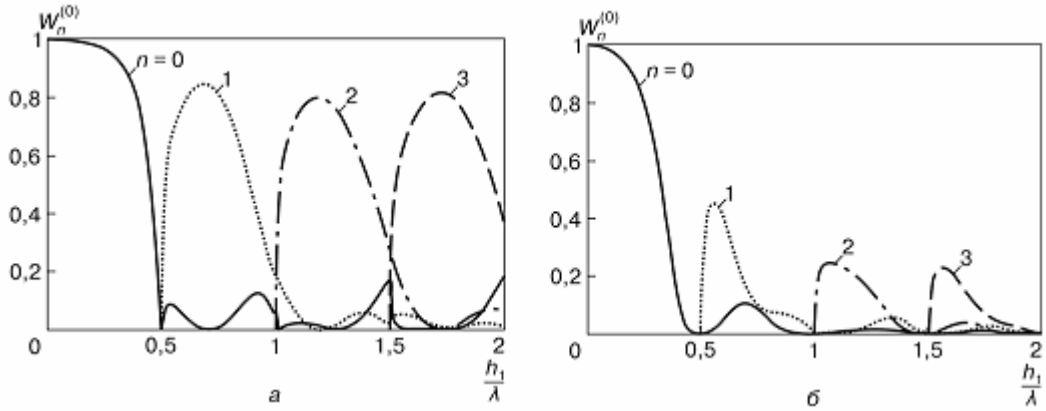


Рис. 10.9. Частотные зависимости энергетических коэффициентов возбуждения мод области II $W_n^{(0)}$ при $h_1 = h_2 = h$:
а — θ = 65°; *б* — θ = 90°

Таким образом, можно говорить о трансформации энергии нулевой моды области I в моды области II с номерами $n \geq 0$. Анализируя графики на рис. 10.8 (здесь $\theta \leq 90°$), следует отметить уменьшение эффективности возбуждения мод области II, когда h кратно $\lambda/2$, а следовательно, — и уменьшение коэффициента прохождения нулевой моды области I через изгиб (рис. 10.8). Если θ = 90° (рис. 10.9, *б*), то при величине h кратной $\lambda/2$, коэффициенты возбуждения мод (а отсюда и коэффициент прохождения) равны нулю, т.е. наблюдается эффект “*запирания*” волновода.

Подобная ситуация имеет место в волноводе при неравных, но кратных, размерах h_1 и h_2. На рис. 10.10 показаны частотные зависимости коэффициентов возбуждения $W_n^{(0)}$ нормальных волн области II при $h_2 = h_1/2$, угол изгиба $\theta = 90°$. При условии $h_1, h_2 \ll \lambda$ полученный результат хорошо совпадает с теорией одномодового волновода, для которого энергетический коэффициент прохождения нулевой моды равен (см. задачу 10.1) [41, с. 157—160]:

$$W^{(0)} = \frac{4h_2/h_1}{(1+h_2/h_1)^2}. \qquad (10.75)$$

Так, при $h_2/h_1 = 0{,}5$ согласно формуле (10.75) имеем $W^{(0)} \approx 0{,}89$, что совпадает с графическими данными на рис. 10.10.

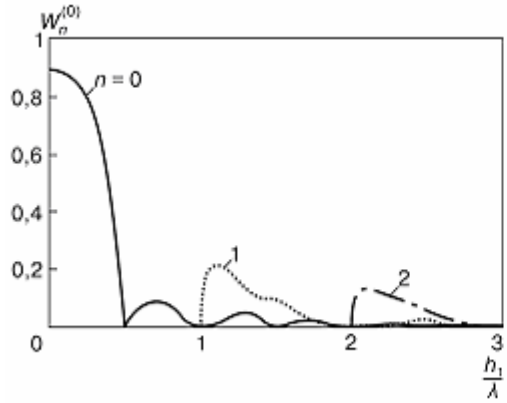


Рис. 10.10. Частотные зависимости энергетических коэффициентов возмущения мод области II $W_n^{(0)}$ при $h_2 = h_1/2$, $\theta = 90°$

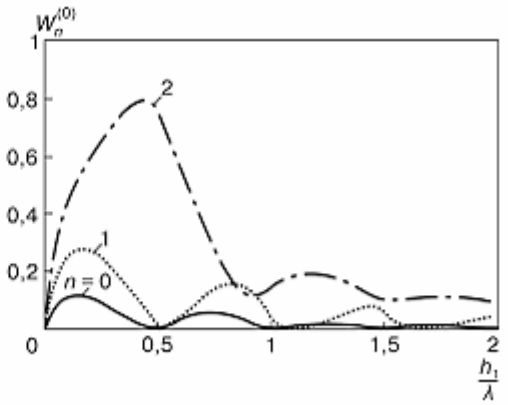


Рис. 10.11. Частотные зависимости энергетических коэффициентов возмущения мод области II $W_n^{(0)}$ при $h_2 = 1{,}2\lambda$, $\theta = 90°$

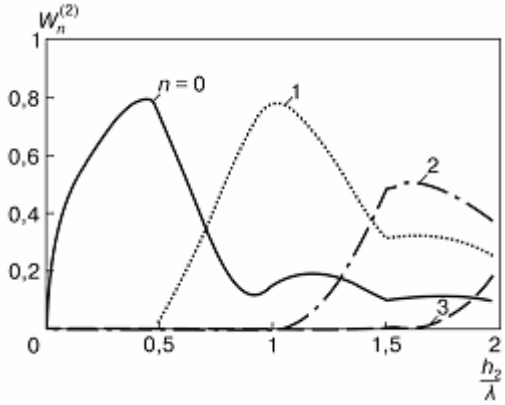


Рис. 10.12. Частотные зависимости энергетических коэффициентов возмущения мод области II $W_n^{(2)}$ при $h_1/\lambda = 1{,}2$, $\theta = 90°$

Анализ приведенных выше графиков для волноводов с кратными величинами h_1 и h_2 позволяет сделать интересный вывод: снижение (а для угла изгиба $\theta = 90°$ "запирание" волновода) связано с моментом зарождения очередной моды волновода. Если характерные размеры волновода не кратны $\lambda/2$, то ситуация изменяется. На рис. 10.11 представлены частотные зависимости величин $W_n^{(0)}$ как функции h_1/λ при фиксированном размере $h_2/\lambda = 1{,}2$, $\theta = 90°$, $q = 0$. Величина $h_2/\lambda = 1{,}2$ позволяет существовать трем однородным модам области II. Как следствие, частотная зависимость коэффициент прохождения $W^{(0)}$ нулевой моды через изгиб не будет содержать в себе нулей.

На рис. 10.12 представлены частотные зависимости коэффициентов $W_n^{(2)}$ при падении на изгиб второй моды области I$(q = 2)$. Здесь размер $h_1/\lambda = 1{,}2$ оставался постоянным, а изменялся волновой размер области II h_2/λ; угол изгиба $\theta = 90°$. Как видим, когда величина h_2 была недостаточна для возникновения однородной второй моды, то вторая мода области I трансформировалась в нулевую, потом в первую и далее, с ростом величин h_2/λ в звуковое поле распространяющихся нормальных волн. Таким образом, возможна трансформация энергии от высшей моды в низшую моду.

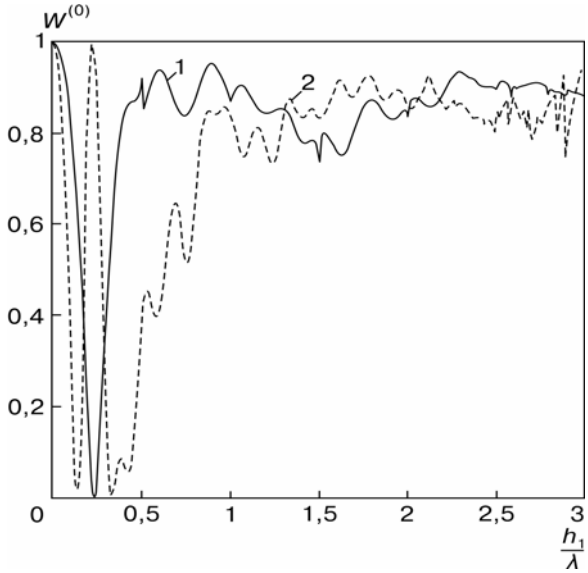


Рис. 10.13. Частотные зависимости энергетического коэффициента проникновения $W^{(0)}$ при $h_1 = h_2 = h$:
1 — $\theta_0 = 125°$; *2* — $\theta_0 = 145°$

Для волноводов с углом изгиба $\theta > 90°$ частотная зависимость коэффициента прохождения $W^{(0)}$ иная, чем для углов $\theta \le 90°$. Напри-

мер, на рис. 10.13 показаны такие характеристики для угла $\theta = 125°$ (кривая *1*) и $\theta = 145°$ (кривая *2*) при $h_1 = h_2 = h$. Можно указать две особенности в частотной характеристике $W^{(0)}$. Первая особенность наблюдается при $h/\lambda < 0{,}5$, когда распространяется только нулевая мода, тогда имеем глубокие "провалы" кривых, и звук почти не проникает сквозь изгиб; вторая — при $h/\lambda > 0{,}5$, когда изгиб волновода становится практически звукопроницаемым, что естественно определяется суперпозицией возбужденных мод с номерами $n > 0$.

В завершении анализа численных расчетов, можно сказать, что с помощью волновода с изгибом можно эффективно изменять структуру звукового поля. Возможна трансформация энергии низшей моды в высшую моду, и наоборот. Очевидно, что волновод с изгибом — это наиболее простое устройство, позволяющее проделать такое преобразование энергии с высокой эффективностью. Примером практического применения есть трансформация энергии нулевой моды в более высокие моды, позволяющая создать условия эффективного ослабления звука в волноводе с поглощающими границами (см. параграф 5.14). Другим практическим применением эффекта трансформации является возможность изменения характеристики направленности излучения из открытого конца волновода с изгибом. (Попробуйте объяснить физический механизм в этих двух примерах.)

10.6.2. Распространение звука в волноводе с ответвлением

На рис. 10.14 представлен плоскопараллельный волновод, который имеет вертикальное ответвление. Угол между ответвлением и волноводом составляет 90°. Характерные размеры волновода с ответвлением определяются величинами h_1 и h_2, соответственно Границы волновода — акустически жесткие. Введем систему координат *xOy* и разделим все пространство волновода на четыре области (рис. 10.14).

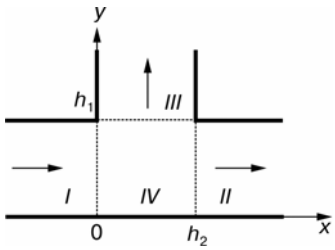


Рис. 10.14. Пример волновода с ответвлением

Пусть слева на зону ответвления падает одна из мод области I в виде (10.62). Предлагаем самостоятельно записать поля давления в выделенных частичных областях и построить решение задачи о рас-

пространении звуковой волны в волноводе с ответвлением. Полученное решение позволит определить энергетические коэффициенты отражения $V^{(q)}$ (формула (10.74)), прохождения в область II основного волновода:

$$W^{(q)} = \sum_{n=0}^{N_2} W_n^{(q)}, \quad W_n^{(q)} = \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(k_n)}{\varepsilon_q \operatorname{Re}(k_q)} |B_n|^2 \tag{10.76}$$

и прохождения в ответвление (область III):

$$W_y^{(q)} = \sum_{n=0}^{N_3} W_{yn}^{(q)}, \quad W_{yn}^{(q)} = \frac{\varepsilon_n h_2 \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_q h_1 \operatorname{Re}(k_q)} |C_n|^2 . \tag{10.77}$$

В формулах (10.76), (10.77) величины N_2 и N_3 определяют количество однородных мод в областях II и III, а B_n и C_n — соответствующие амплитудные коэффициенты. Согласно закону сохранения энергии имеем следующее равенство: $V^{(q)} + W^{(q)} + W_y^{(q)} = 1$.

Рассмотрим некоторые численные расчеты, которые иллюстрируют особенности распространения звука в волноводе с ответвлением. На рис. 10.15 представлены частотные характеристики коэффициентов $W^{(0)}$ (кривая *1*) и $W_y^{(0)}$ (кривая *2*) как функции волнового размера h_1/λ для двух вариантов: $h_2 = h_1/2$ (рис. 10.15, *а*) и $h_2 = h_1$ (рис. 10.15, *б*).

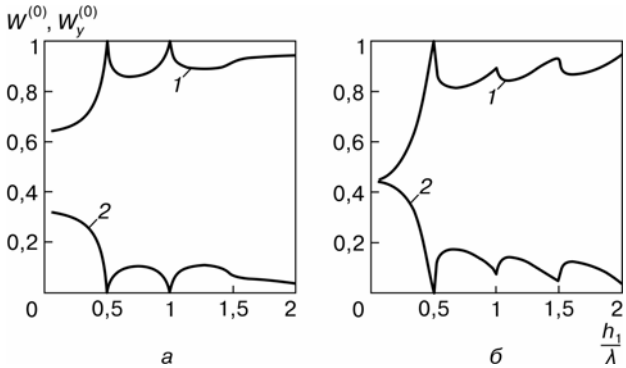


Рис. 10.15. Частотные зависимости энергетических коэффициентов прохождения $W^{(0)}$ (кривая *1*) и $W_y^{(0)}$ (кривая *2*):

а – $h_2 = h_1/2$; *б* – $h_2 = h_1$

Сначала убедимся, что значения $W^{(0)}$ и $W_y^{(0)}$ при $h_1, h_2 \ll \lambda$ на рис. 10.15 совпадают с результатами теории одномодового волново-

да. Согласно этой теории для энергетических коэффициентов прохождения имеем следующие формулы (см. задачу 10.4) [41, с. 171, 178]:

$$W^{(0)} = \left(\frac{2}{2 + h_2/h_1}\right)^2, \quad W_y^{(0)} = \left(\frac{2}{2 + h_2/h_1}\right)^2 \frac{h_2}{h_1}. \qquad (10.78)$$

Вычисляя по формулам (10.78), получаем следующие результаты: при $h_2 = h_1/2$ $W^{(0)} = 0,64$, $W_y^{(0)} = 0,32$; при $h_2 = h_1$ $W^{(0)} = W_y^{(0)} \approx 0,44$. Сравнивая эти данные с графиками на рис. 10.15, отмечаем хорошее совпадение результатов.

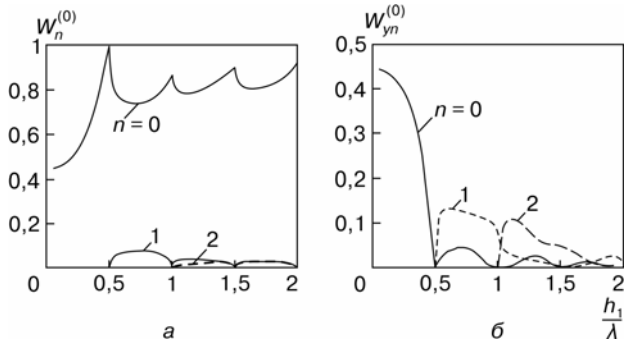


Рис. 10.16. Частотные зависимости энергетических коэффициентов возбуждения мод ($h_1 = h_2$):
а — в области II; *б* — в области III

Анализ графиков на рис. 10.15 позволяет следующий сделать вывод: с увеличением частоты нулевой моды области I, падающей на зону ответвления, наблюдается рост коэффициента $W^{(0)}$ и уменьшение $W_y^{(0)}$. Отметим, что при $h_2/\lambda \le 0,5$ в случае, когда h_1 кратно $\lambda/2$, нулевая мода в ответвление не проникает (оно “закрыто”), а полностью, без отражения, проходит в область II. Ситуация изменяется, если $h_2/\lambda > 0,5$. Очевидно, как и для волновода с изгибом, это связано с зарождением мод области III с номерами $n > 0$. В качестве иллюстрации на рис. 10.16 представлена модовая структура поля области II (рис. 10.16, *а*) и области III (рис. 10.16, *б*) при $h_1 = h_2$. Как видим, в области II доминирует нулевая мода ($n = 0$), а в ответвлении при $h_2/\lambda > 0,5$ доминирует первая мода, а при $h_2/\lambda > 1$ — вторая мода области III. Таким образом, наблюдается трансформация энергии нулевой моды области I в более высокие моды области III. Модовая структура области II определяется плоской волной ($n = 0$).

На рис. 10.17 представлены частотные зависимости коэффициентов $W^{(1)}$ и $W_y^{(1)}$ в случае падения на ответвление первой моды $(q = 1)$; $h_1 = h_2 = h$.. Следует отметить, что при $h < 0{,}9\lambda$ большая часть энергии проходит в ответвление ($W_y^{(1)} > W^{(1)}$). С увеличением частоты наблюдается увеличение коэффициента $W^{(1)}$ и уменьшение $W_y^{(1)}$ с характерными подъемами и спадами в зоне "критических" частот, которые соответствуют зарождению очередной моды волновода. Как и в случае на рис. 10.16, с увеличением волнового размера волновода на определенном частотном интервале доминирует очередная мода области III. Модовая структура области II определяется первой нормальной волной.

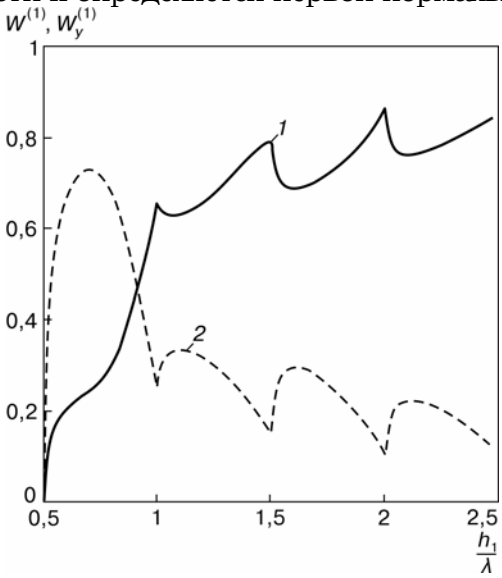


Рис. 10.17. Частотные зависимости коэффициентов $W^{(1)}$ (кривая *1*) и $W_y^{(1)}$ (кривая *2*) при $h_1 = h_2 = h$

10.6.3. Прохождение звука через область сопряжения плоского и клинообразного волноводов

Задача прохождения волны через область стыка плоского и клинообразного волноводов (рис. 10.18) неоднократно исследовалась специалистами в области акустики и электродинамики. При этом большая часть работ посвящена частному случаю: излучению из волновода с плоским фланцем (рис. 10.18, *б*). Построим решение сформулированной задачи при условии произвольного угла раскрыва клинообразного волновода.

Итак, имеем плоский волновод с характерным размером $2h$, который граничит с клинообразным волноводом с углом раскрыва $2\theta_0$ (рис. 10.18, а-*в*): угол раскрыва может быть острым, прямым или ту-

пым. Волноводная структура заполнена идеальной средой плотностью ρ, со скоростью звука c. Поверхности волновода являются акустически жесткими.

Согласно рис. 10.18, *а* вводим декартову xOy и полярную $rO\theta$ системы координат с общим центром O. Вся область существования звукового поля естественно делится на частичные области: I — плоский полубесконечный волновод $x \le x_0$, $|y| \le h$; III — клинообразный волновод $r \ge r_0$, $|\theta| \le \theta_0$; II — переходная область — это часть круга радиуса r_0.

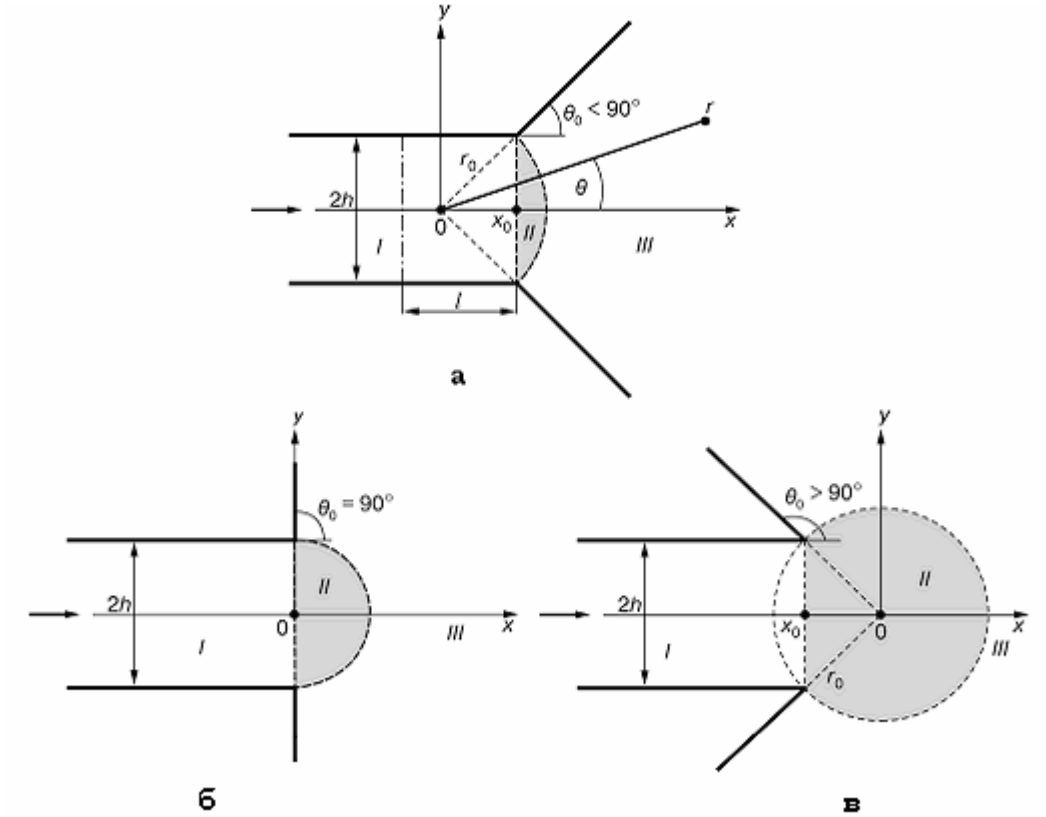


Рис. 10.18. Пример волноводной структуры:
а — угол раскрыва острый; *б* — прямой; *в* — тупой

Пусть слева сторону в области I на зону сопряжения плоского и клинообразного волноводов падает одна из мод плоского волновода. В результате ее взаимодействия с зоной сопряжения образуется отраженная и прошедшая волны в область III. Согласно методу частичных областей следует записать выражения для звуковых полей в областях I-III. Каждое из этих выражений должно иметь общий характер, который позволяет удовлетворить любые граничные условия на границах

раздела частичных областей. Для области I такое выражение содержит в себе падающую волну и полную совокупность однородных и неоднородных отраженных волн:

$$p_{\mathrm{I}}(x,y)=\cos\left(\alpha_q y\right)\exp\left(ik_q\left(x-x_0\right)\right)+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(\alpha_n y)\exp\left(-ik_n\left(x-x_0\right)\right), \tag{10.79}$$

где q — номер падающей моды, а величины α_n определяется согласно условию $\partial p_{\mathrm{I}}/\partial y=0$ при $y=\pm h$ на жестких поверхностях плоского волновода, а именно,

$$\alpha_n=\frac{n\pi}{h},\qquad k_n=\begin{cases}\sqrt{k^2-\alpha_n^2}, & \text{если}\quad k>\alpha_n,\\ i\sqrt{\alpha_n^2-k^2}, & \text{если}\quad k<\alpha_n,\quad k=\omega/c.\end{cases} \tag{10.80}$$

Совокупность произвольных коэффициентов A_n позволит выполнить условия сопряжения полей на границе раздела областей I и II.

Определим вид звукового поля в клинообразном волноводе (область III). Естественно, подобно плоскому волноводу, следует записать совокупность нормальных волн клинообразного волновода. Хотя речь о модах клинообразного волновода еще не шла, однако представить их вид несложно. Вернемся к п. 7.12.1, в котором была рассмотрена задача излучения звука цилиндром. Если имеем плоскую задачу, т.е. колебательная скорость поверхности цилиндра зависит только от угла, то поле определяется суперпозицией цилиндрических волн (см. (7.128)):

$$p(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n H_n^{(1)}(kr)\cos(n\theta). \tag{10.81}$$

Вид угловых функций $\cos(n\theta)$ физически понятен, поскольку, обойдя цилиндр по окружности, попадаем в одну и ту же точку звукового поля, при этом угол изменяется на величину 2π, а давление в формуле (10.81) остается неизменным. Теперь представьте себе, что к поверхности цилиндра приложены две плоскости, которые образуют клинообразный волновод с углом раскрыва $2\theta_0$ (на рис. 10.18, *а* частью поверхности воображаемого цилиндра является криволинейная граница области II). Очевидно, что в такой ситуации формула (10.81) не справедлива. Ее следует скорректировать в соответствии с граничными условиям на жестких границах клинообразного волновода, принимая во внимание, что производная по нормали на поверхностях клинообразного волновода представляет собой производную по углу θ при постоянном r (рис. 10.18). Итак, поле в области III запишем в виде

$$p_{\text{III}}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n H_{\beta_n}^{(1)}(kr)\cos(\beta_n\theta), \tag{10.82}$$

где, согласно граничному условию $\partial p_{\text{III}}/\partial\theta=0$ при $\theta=\pm\theta_0$ на поверхностях клинообразного волновода, находим, что $\beta_n=n\pi/\theta_0$. Радиальные функции $H_{\beta_n}^{(1)}(kr)$ (функции Ханкеля первого рода) выбраны в соответствии с условиями излучения. Последовательность произвольных коэффициентов B_n определяется условиями сопряжения на границе раздела областей II и III.

Теперь построим общее решение для области II. Из полученного решения будет следовать, что волновое поле отличается для углов раскрыва $\theta_0 \le 90°$ (рис. 10.18, *а, б)* и углов $\theta_0 > 90°$ (рис. 10.18, *в)*. Поэтому сначала рассматриваем случай, когда $\theta_0 \le 90°$.

На границе раздела областей I и II $(x=x_0,\ \ |y|\le h)$ полной и ортогональной является система функций $\cos(\alpha_n y)$, $n=0,1,2,\ldots$ На границе раздела областей II и III $(r=r_0,\ \ |\theta|\le\theta_0)$ такими же свойствами обладает система функций $\cos(\beta_n\theta)$, $n=0,1,2,\ldots$. Итак, поле давления в области II можно представить в виде

$$p_{\text{II}}=p_{\text{II}}^{(1)}+p_{\text{II}}^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\cos(\alpha_n y)\exp\left(ik_n(x-x_0)\right)+\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos(\beta_n\theta)J_{\beta_n}(kr). \tag{10.83}$$

Отметим, что знак показателя экспонент в первой сумме выбран таким, чтобы амплитуда неоднородных волн уменьшалась внутри области II. Во второй сумме в качестве радиальных функций взяты функции Бесселя первого рода $J_{\beta_n}(kr)$. Среди частных решений уравнения Бесселя (7.115) целесообразно использовать именно эти функции, ведь, область II имеет конечные размеры, а функции $J_{\beta_n}(kr)$ определяют стоячую волну и не имеют особенностей при $kr\to 0$ (см. асимптотику (8.40)).

Условия сопряжения на границах раздела областей I, II, III (рис. 10.18, *а, б)* имеют вид

$$\left.\begin{aligned} p_{\text{I}}&=p_{\text{II}}\\ \frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial x}&=\frac{\partial p_{\text{II}}}{\partial x}\end{aligned}\right\}\quad x=x_0,\quad |y|\le h,$$

$$\left.\begin{aligned} p_{\text{II}}&=p_{\text{III}}\\ \frac{\partial p_{\text{II}}}{\partial r}&=\frac{\partial p_{\text{III}}}{\partial r}\end{aligned}\right\}\quad r=r_0,\quad |\theta|\le\theta_0. \tag{10.84}$$

Подставляя решения (10.79), (10.82), (10.83) в условия (10.84) и учитывая формулы, которые определяют связь между декартовой и полярной системами координат, приходим к системе функциональных уравнений. Использование свойства ортогональности системы функций $\cos(\alpha_n y)$, $n = 0,1,2,...$ для первых двух уравнений системы (10.84) и системы функций $\cos(\beta_n \theta)$, $n = 0,1,2,...$ для третьего и четвертого уравнений, дает возможность провести алгебраизацию функциональной системы. Как следствие, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно искомых коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n (вид системы достаточно громоздкий, поэтому ее не приводим, но, при желании, читатель сможет получить эту систему самостоятельно).

Теперь рассмотрим случай, когда $\theta_0 > 90°$ (рис. 10.18, *в*). Здесь центр полярной системы координат (точка *O*) смещается вглубь области II. Поэтому, угловые функции в выражении $p_{II}^{(2)}$ (см. (10.83)) должны быть периодическими с периодом 2π, что соответствует полному обходу вокруг точки *O*. Понятно, что такому условию не удовлетворяет система функций $\cos(\beta_n \theta)$, $n = 0,1,2,...$ в решении $p_{II}^{(2)}$. Поэтому ее следует заменить системой функций $\cos(n\theta)$, $n = 0,1,2,...$, которая имеет такую периодичность и является полной и ортогональной на отрезке $\theta = [0;2\pi]$. Таким образом, формулу (10.83) перепишем в виде:

$$p_{II} = p_{II}^{(1)} + p_{II}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\alpha_n y)\exp\left(ik_n\left(x - x_0\right)\right) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\theta) J_n(kr). \tag{10.85}$$

Однако, как следует из рис. 10.18, *в*, конфигурация области II не позволяет воспользоваться ортогональностью системы функций $\cos(n\theta)$, $n = 0,1,2,...$, поскольку граница области II представляет собой только часть окружности радиуса r_0. Эту сложность можно преодолеть, если для решения $p_{II}^{(2)}$ дополнить границу области II до полной окружности радиуса r_0. На рис. 10.18, *в* это штриховая линия в области I $r = r_0$, $\theta_0 \le |\theta| \le \pi$. Таким образом, мы получаем возможность, воспользоваться ортогональностью системы функций $\cos(n\theta)$, $n = 0,1,2,...$ при выполнении граничных условий. Принципиальным моментом является то, что при формировании граничных условий на дополнительном участке границы ($r = r_0$, $\theta_0 \le |\theta| \le \pi$) может быть задано произвольное значение давления или колебательной скорости. Пусть это значение определяется некоторой функцией $f(r_0, \theta)$. Неизвестно, какой должна быть функция $f(r_0, \theta)$, чтобы непрерывно

продолжить решение $p_{\text{II}}^{(2)}$ на дугу $r = r_0$, $\theta_0 \le |\theta| \le \pi$. Все же, в каждой конкретной задаче следует стремиться к уменьшению скачка функции на данном участке границы.

Итак, условия сопряжения в случае, когда $\theta_0 > 90°$, будут иметь вид (выберем вариант доопределения давления на участок $r = r_0$, $\theta_0 \le |\theta| \le \pi$):

$$\left.\begin{aligned} p_{\text{I}} &= p_{\text{II}} \\ \frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial x} &= \frac{\partial p_{\text{II}}}{\partial x} \end{aligned}\right\}, \qquad x = x_0, \quad |y| \le h,$$

$$\frac{\partial p_{\text{II}}}{\partial r} = \frac{\partial p_{\text{III}}}{\partial r}, \qquad r = r_0, \quad |\theta| \le \theta_0, \tag{10.86}$$

$$\begin{cases} p_{\text{II}} = p_{\text{III}}, & r = r_0, \quad |\theta| \le \theta_0, \\ p_{\text{II}}^{(2)} = f(r_0, \theta), & r = r_0, \quad \theta_0 \le |\theta| \le \pi. \end{cases}$$

Алгебраизация первых двух уравнений в системе (10.86) осуществляется с помощью системы функций $\cos(\alpha_n y)$, $n = 0,1,2,\ldots$, ортогональной на отрезке $|y| \le h$, третьего — с помощью системы функций $\cos(\beta_n \theta)$, $n = 0,1,2,\ldots$, ортогональной на отрезке $|\theta| \le \theta_0$ и четвертого, которое содержит в себе два уравнения, объединенных фигурной скобкой, — с помощью функций $\cos(n\theta)$, $n = 0,1,2,\ldots$, ортогональных на отрезке $\theta = [0, 2\pi]$.

Построенное решение дает возможность провести анализ звукового поля в волноводной структуре, представленной на рис. 10.18. Интересно определить угловое распределение квадрата амплитуды давления в клинообразном волноводе:

$$R^{(q)}(r,\theta) = \frac{|p_{\text{III}}(r,\theta)|^2}{\left|p_{\text{III}}(r,\theta^*)\right|^2_{\max}}, \tag{10.87}$$

где q — номер падающей моды в области I; θ^* — угол, который определяет направление максимальной амплитуды давления на расстоянии r. Известно (см. параграф 7.6), что соотношение (10.87) не будет зависеть от расстояния r, если рассматривать звуковое поле в дальней зоне от границы раздела плоскопараллельного и клинообразного волноводов ($kr >> 1$). Учитывая это, подставляем в (10.87) выражение (10.82) с учетом асимптотики функции Ханкеля $H_{\beta_n}^{(1)}(kr)$ при $kr \to \infty$:

$$H_{\beta_n}^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(i\left(kr - \frac{\pi\beta_n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right). \qquad (10.88)$$

В результате имеем выражение для характеристики направленности по интенсивности, которое определяет угловое распределение энергии в дальнем поле клинообразного волновода:

$$R_I^{(q)}(\theta) = \frac{\left| \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) \exp(-i\beta_n \pi/2) \right|^2}{\left| \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\beta_n \theta^*\right) \exp(-i\beta_n \pi/2) \right|^2}. \qquad (10.89)$$

Конечно, следует рассмотреть энергетические характеристики прохождения звуковой волны через границу раздела плоского и клинообразного волноводов. Как и в задаче о волноводе с изгибом (см. (10.71)), коэффициент прохождения $W^{(q)}$ определим как отношение среднего потока мощности волны в области III к среднему потоку мощности q-й моды, падающей на границу раздела волноводов в области I. После ряда преобразований, подобных тем, которые были проделаны в формуле (10.72), получим

$$W^{(q)} = \frac{4\theta_0}{\pi h \operatorname{Re}\left(k_q\right) \varepsilon_q} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n |B_n|^2, \qquad (10.90)$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 1/2$, $n > 0$. Согласно выражению (10.90), коэффициент прохождения представлен в виде суммы энергетических коэффициентов возбуждения мод области III. Аналогично коэффициент отражения имеет вид

$$V^{(q)} = \frac{1}{\operatorname{Re}\left(k_q\right) \varepsilon_q} \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n \operatorname{Re}(k_n) |A_n|^2. \qquad (10.91)$$

Здесь число N определяет количество однородных мод области I. Из закона сохранения энергии следует необходимость выполнения условия $W^{(q)} + V^{(q)} = 1$.

Полученные бесконечные системы алгебраических уравнений решались с помощью редукции. Еще раз подчеркнем, если не интересоваться тонкой структурой поля скорости вблизи ребер, то применение простой редукции к бесконечным линейным алгебраическим уравнениям второго рода целиком оправдано и эффективно. Количество учтенных неизвестных коэффициентов, которое определяет порядок системы, зависит от соотношения длины звуковой волны и характерных размеров волновода. Уменьшение длины волны, естественно, требует увеличения количества членов ряда, определяющего звуко-

вые поля в частичных областях. Критерием оценки качества решения является точность выполнения условий сопряжения на границах частичных областей и выполнение соотношения для закона сохранения энергии.

В данной задаче практические вычисления для диапазона $2h/\lambda < 3$ показывают, что приемлемая точность вычисления (точность выполнения закона сохранения энергии, не хуже, чем 0,1 %) обеспечивается при удержании 10...15 членов ряда для давления в частичных областях. Объем вычислений при этом оказывается небольшим, и можно получить оценку для многих характеристик звукового поля в широком диапазоне частот.

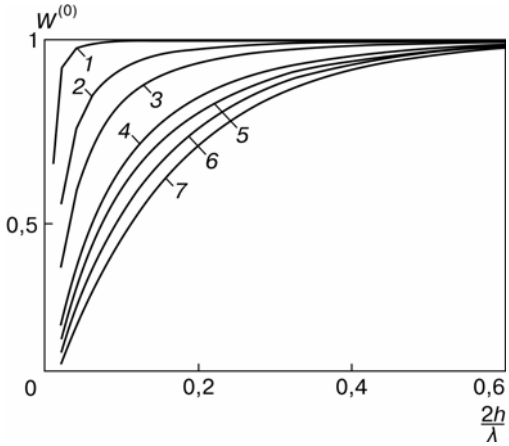


Рис. 10.19. Частотные зависимости коэффициента $W^{(0)}$ при различных углах раскрыва θ_0:
1 — θ_0 = 5°; *2* — θ_0 = 25°; *3* — θ_0 = 45°; *4* — θ_0 = = 90°; *5* — θ_0 = 110°; *6* — θ_0 = 140°; *7* — θ_0 = 180°

На рис. 10.19 приведены частотные зависимости коэффициента прохождения $W^{(0)}$ нулевой моды (q = 0) области I при разных углах раскрыва θ_0. Здесь кривая *7* определяет излучение звука из открытого конца плоского полубесконечного волновода с жесткими границами и вычисляется по формуле [*, с. 38]: $W^{(0)} = 1 - \left[\exp\left(-\pi 2h/\lambda\right)\right]^2$, где λ — длина звуковой волны. Все кривые на рис. 10.19 указывают на увеличении энергии, которая проходит в клинообразный волновод при уменьшении угла раскрыва θ_0. При малых волновых размерах $2h/\lambda$ прохождение энергии из плоскопараллельного волновода в кли-

* Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. — М.: Сов. радио, 1966. — 431 с.

нообразный волновод очень мало. Как видим, даже пятиградусное расширение волновода оказывается эффективным отражателем энергии. Интересно, что уже при $2h/\lambda > 0,6$ практически вся энергия падающей волны проходит в клинообразную часть волновода.

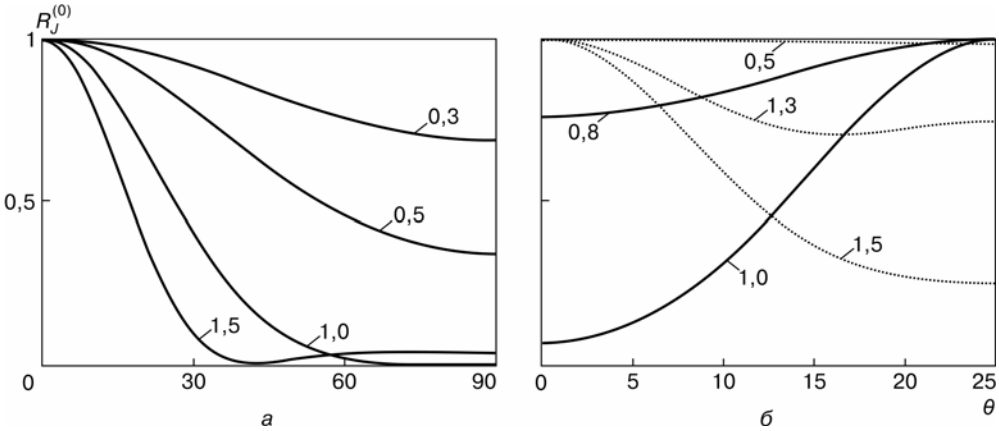


Рис. 10.20. Кривые направленности $R_I^{(0)}(\theta)$ при разных величинах $2h/\lambda$: *а* — θ_0 = 90°; *б* — θ_0 = 25°

Рассмотрим угловое распределение интенсивности звука в клинообразном волноводе. На рис. 10.20 представлены кривые направленности по интенсивности при угле раскрыва θ_0 = 90° (рис. 10.20, *а*) и θ_0 = 25° (рис. 10.20, *б*). Падающей волной в области I является нулевая мода (q = 0). Характеристика кривых — это величина отношения $2h/\lambda$, как видим, при ее увеличении кривая направленности обостряется. Это понятно, ведь величина $2h/\lambda$ определяет физический размер источника, который излучает звук в клинообразный волновод. Поэтому, естественно, увеличение $2h/\lambda$ приводит к обострению кривой направленности.

Интересный эффект наблюдается при относительно небольших углах раскрыва волновода. Так, при θ_0 = 25° (рис. 10.20, *б*), $2h/\lambda \approx 0,8...1,0$ имеем уменьшение потока звуковой энергии вдоль оси волновода (θ = 0°). Понятно, что это явление обусловлено амплитудно-фазовым соотношением возбужденных в клинообразном волноводе мод.

На рис. 10.21 представлены кривые направленности в клинообразном волноводе, когда поле падающей волны задается первой симметричной модой области I (q = 1, $2h/\lambda = 1,1$). Как видим, для малых углов раскрыва (θ_0 < 30°) сохраняется практически то же угловое распределение давления, что и у падающей волны. При увеличении угла

раскрыва вид кривой существенно изменяется. Практически звук вдоль оси волновода не излучается. Основная энергия прошедшей волны локализуется вблизи границ волновода.

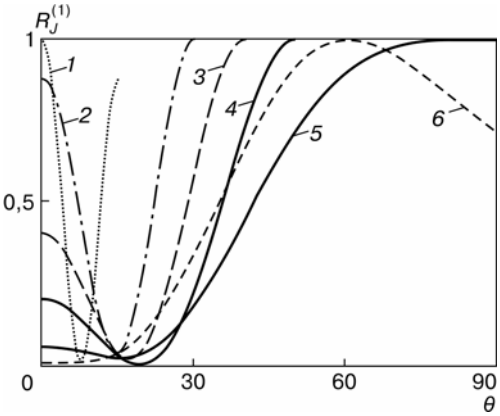


Рис. 10.21. Кривые направленности $R_I^{(1)}(\theta)$ при разных углах раскрыва θ_0 $(2h/\lambda = 1{,}1)$:

1 — θ_0 = 15°; *2* — θ_0 = 30°; *3* — θ_0 = 40°; *4* — θ_0 = = 50°; *5* — θ_0 = 90°; *6* — θ_0 = 130°

Такое явление обусловливает естественный вопрос: как быстро происходит преобразование энергетических потоков в клинообразном волноводе. Для ответа на этот вопрос приведем исследование векторного поля интенсивности в окрестности границы раздела плоскопараллельного и клинообразного волноводов. Проекции вектора интенсивности $\mathbf{I} = \{I_x, I_y\}$ на оси декартовой системы координат *xOy* (см. (4.55)) имеют вид

$$I_x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(p\upsilon_x^*),\ \ I_y = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(p\upsilon_y^*),\ \text{где}\ \upsilon_x = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\ \ \upsilon_y = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial y}. \qquad (10.92)$$

Определив проекции I_x и I_y, можно построить вектор интенсивности **I**.

На рис. 10.22 представлены поля вектора интенсивности на границе раздела плоскопараллельного и клинообразного волноводов. Длина каждой стрелочки определяет относительное значение модуля вектора интенсивности, ее направление — направление потока энергии, а начало стрелочки — точку звукового поля, в которой определялся вектор интенсивности.

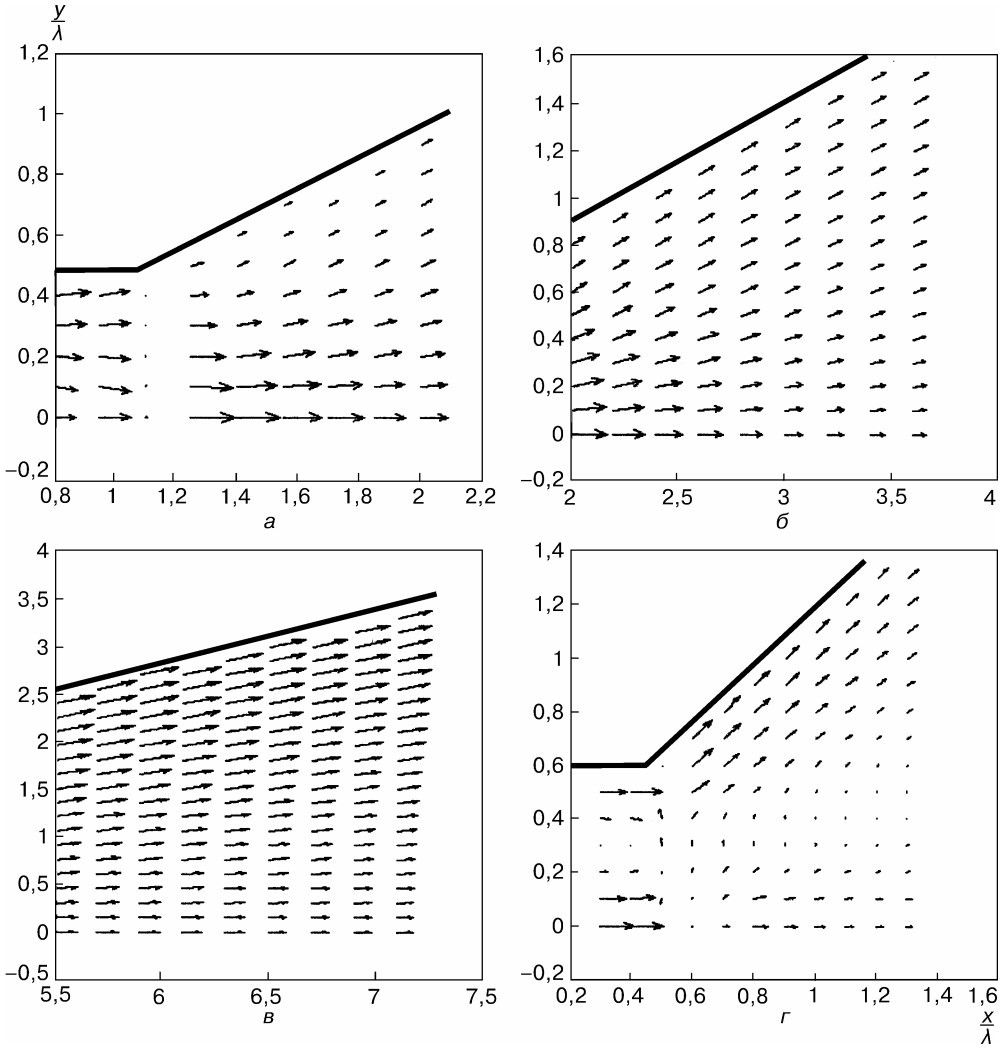


Рис. 10.22. Картина векторного поля интенсивности:

а-в — $2h/\lambda = 1$, $\theta_0 = 25°$, $q = 0$, $W^{(0)} \approx 1$; *г* — $2h/\lambda = 1{,}1$, $\theta_0 = 50°$, $q = 1$, $W^{(1)} \approx 0{,}84$

На рис. 10.22, а-*в* показан процесс пространственного преобразования потоков энергии в клинообразном волноводе при отдалении от зоны сопряжения и падении нулевой моды ($q = 0$) в области I. Если в непосредственной близости от зоны сопряжения (рис. 10.22,*а*) поток энергии сконцентрирован вдоль оси волновода, т.е. практически сохраняется картина потока энергии в плоскопараллельном волноводе, то уже на расстоянии приблизительно 3λ (рис. 10.22, *б*) модуль интенсивности приобретает почти постоянное значение вдоль сечения

волновода. Далее, согласно рис. 10.22, *в*, с увеличением координаты x поток энергии, уменьшаясь вдоль оси волновода, возрастает вблизи клинообразных границ. При дальнейшем увеличении координаты x пространственное распределение модуля вектора интенсивности асимптотически приближается к зависимости, которая определяется кривой с параметром $2h/\lambda = 1$ на рис. 10.20, *б*. Если в области I падает первая симметричная мода ($q = 1$), то картина изменяется, и это можно увидеть на рис. 10.22, *г*. Здесь, как видим, процесс пространственной перестройки потоков энергии происходит достаточно быстро.

Итак, можно сделать вывод, что энергетическая характеристика направленности определяется совокупностью факторов, а именно: волновым размером плоскопараллельного волновода $2h/\lambda$, углом раскрыва клинообразного волновода θ_0 и структурой падающей волны. Эти данные важны для формирования представлений об особенностях излучения звука из клинообразного рупора в открытое пространство.

10.7. Рассеяние звука на клинообразном объекте

Задача о рассеянии волны на клине представляет собой фундаментальную проблему, на решении которой базируются многие представления о волновых процессах в акустике, оптике и радиофизике. Учитывая это, в предыдущем разделе была построена функция Грина для клинообразной области. Особенно интересной является задача о рассеянии волн на клинообразном объекте конечных размеров. Анализ поля рассеяния от подобных объектов лежит в основе построения систем локации.

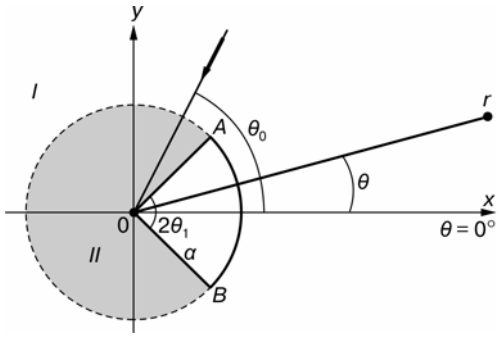


Рис. 10.23. Пример клинообразного объекта

Рассмотрим плоскую задачу рассеяния звука на клинообразном объекте (рис. 10.23), т.е. полагаем, что объект имеет бесконечную протяженность вдоль оси, перпендикулярной к плоскости рисунка. Объ-

ект представляет собой клин с углом $2\theta_1$, стороны которого замкнуты дугой AB окружности радиуса a. Поверхности объекта считаем акустически жесткими. Клинообразный объект находится в идеальной среде плотностью ρ, со скоростью звука c. Чтобы описать геометрию объекта и построить решение задачи, введем полярную систему координат $rO\theta$ с центром в угловой точке клина.

Согласно идее метода частичных областей все пространство существования звукового поля естественно делится на две области: I — вне окружности радиуса a, т.е. $r \geq a$, $0 \leq \theta \leq \leq 2\pi$; II — сектор круга радиусом a, а именно: $0 \leq r \leq a$, $\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$.

Пусть в области I на клинообразный объект (рис. 10.23) падает плоская гармоническая волна с единичной амплитудой давления $p_0 = \exp(-i\mathbf{kr})$, где $\mathbf{k} = \{k\cos\theta_0,\ k\sin\theta_0\}$ — волновой вектор, $\mathbf{r} = \{r\cos\theta,\ r\sin\theta\}$ — вектор, определяющий точку наблюдения в звуковом поле. Знак “минус” в показателе экспоненты указывает на то, что направление распространения плоской волны противоположно направлению роста радиальной координаты r (рис. 10.23). Углы θ_0 и θ определяют, соответственно, угловое направление падения волны и направление на точку наблюдения. Используя значения проекций векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$ на оси декартовой системы координат xOy, перепишем выражение для плоской волны в виде

$$p_0 = \exp\left[-ikr\left(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\right)\right] = \exp(-ikr\cos(\theta - \theta_0)). \qquad (10.93)$$

В дальнейшем нам понадобится представление падающей волны (10.93) в виде ряда (см. (8.25)):

$$p_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J_n(kr)\cos\left(n\left(\theta - \theta_0\right)\right), \qquad (10.94)$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$, если $n > 0$, $J_n(kr)$ — функция Бесселя первого рода. При взаимодействии плоской волны с клинообразным объектом образуется рассеянное поле, которое можно представить в виде суперпозиции цилиндрических бегущих волн типа $H_n^{(1)}(kr)\cos(n\theta)$, $n = 0,1,2,\ldots$ и $H_n^{(1)}(kr)\sin(n\theta)$, $n = 1,2,3,\ldots$ Комбинация угловых функций $\cos(n\theta)$ и $\sin(n\theta)$ необходима, ведь угол падения плоской волны θ_0 считается произвольным, поэтому симметрия отсутствует. Итак, поле давления в области I будет иметь вид

$$p_{\mathrm{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J_n(kr)\cos\left(n\left(\theta - \theta_0\right)\right) +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr)\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(kr)\sin(n\theta). \qquad (10.95)$$

Поле в области II представим в виде суперпозиции стоячих волн:

$$p_{\mathrm{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_{\alpha_n}(kr)\cos(\alpha_n(\theta-\theta_1)), \qquad (10.96)$$

где числа α_n определяются из граничных условий на жестких границах клина $\partial p_{\mathrm{II}}/\partial\theta = 0$ при $\theta = \theta_1$ и $\theta = 2\pi - \theta_1$. Таким образом,

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{2(\pi-\theta_1)}, \quad n = 0,1,2,... \qquad (10.97)$$

Построенные решения для областей I и II действительно общие, т.е. они способны удовлетворить любым условиям на границах частичных областей.

Запишем условия сопряжения на границе раздела частичных областей I и II (рис. 10.23):

$$p_{\mathrm{I}} = p_{\mathrm{II}}, \quad r = a, \quad \theta = \theta_1 - 2\pi - \theta_1, \qquad (10.98)$$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial r}, & r = a, \quad \theta = \theta_1 - 2\pi - \theta_1, \\ 0, & r = a, \quad |\theta| < \theta_1. \end{cases} \qquad (10.99)$$

Алгебраизацию функционального уравнения (10.98) проводим благодаря ортогональности системы функций $\cos(\alpha_n(\theta - \theta_1))$, $n = 0,1,2,...$ на отрезке $\theta = [\theta_1,(2\pi - \theta_1)]$. Алгебраизацию функционального уравнения (10.99) проведем дважды : первый раз—используя систему функций $\cos(n\theta)$, $n = 0,1,2,...$, второй —используя систему $\sin(n\theta)$, $n = 1,2,3,...$ Обе системы функций ортогональны на отрезке $\theta = [0,2\pi]$. Итак, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов A_n, B_n, C_n.

Бесконечная система уравнений решалась методом редукции. Для оценки точности выполнения условий сшивания полей определим отклонение как отношение модуля разности характеристик поля (давление или колебательная скорость) слева и справа от границы раздела частичных областей к амплитуде плоской падающей волны на клинообразный объект. Например, отклонение по давлению определяется по такой формуле: $\delta_p = |p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}| \ / \ |p_0|$.

Проведем анализ отклонения для данной задачи, поскольку, кроме сугубо численных величин, здесь можно проследить интересные моменты. Пусть имеем клинообразный объект с $ka = 15$, $\theta_1 = 45°$. Угол падения плоской волны $\theta_0 = 90°$. Волновой размер объекта достаточно большой, поэтому при счете удерживалось по 40 коэффициентов A_n,

B_n, C_n, соответственно. На рис. 10.24 представлены графики отклонения по давлению δ_p (сплошная кривая) и по колебательной скорости δ_υ (штриховая) вдоль окружности радиуса a ($r = a$). Диапазон углов $\theta = [0, \theta_1]$ и $\theta = [(2\pi - \theta_1), 2\pi]$ соответствует жесткой поверхности объекта (рис. 10.23), поэтому в этом диапазоне углов определялись относительные величины $\delta_p = |p_1| \ / \ |p_0|$, $\delta_\upsilon = |\upsilon_{r1}| \ / \ |\upsilon_{r0}|$.

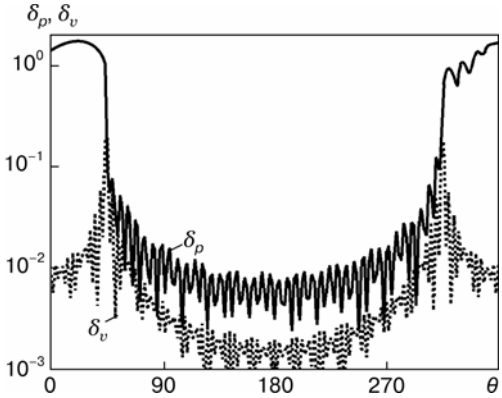


Рис. 10.24. Кривые отклонения по давлению δ_p (сплошная кривая) и по колебательной скорости δ_υ (штриховая) вдоль окружности радиуса $r = a$ (рис. 10.23); $ka = 15°$, $\theta_1 = 45°$, $\theta_0 = 90°$

Следует отметить резкий рост отклонения δ_υ в окрестности ребра клинообразного объекта $\theta = \pm\ \theta_1 = \pm 45°$, $r = a$. Как мы знаем, в рамках используемой модели такой результат целиком предсказуем. При условии $ka = 15$, $\theta_1 = 45°$ жесткие границы объекта имеют значительные волновые размеры. Поэтому амплитуда давления на этой поверхности приблизительно равна удвоенной амплитуде падающей волны. Этот факт находит свое отражение на рис. 10.24 для углов $\theta = 0$—$45°$, $\theta = 315$—$360°$. В целом, если отклонение $\delta < 0{,}1$, то можно считать выполнение граничных условий на границе раздела частичных областей удовлетворительным.

Следует отметить, что “изрезанный” характер кривых на рис. 10.24 — качественный показатель достоверности вычислений. Это обусловлено тем, что ограничение количества уравнений в бесконечной системе вносит погрешность при выполнении граничных условий именно по высоким гармоникам в соответствующих рядах Фурье.

При решении задачи о рассеянии звука препятствием (см. раздел 8), обычно, исследуют звуковое поле в дальней зоне. Здесь рассеянное поле представляет собой сферическую расходящуюся волну. Для плоской задачи, которую мы сейчас исследуем, это соответствует цилин-

дрической расходящейся волне. Согласно (10.95) комплексная амплитуда рассеянной волны имеет вид

$$p_s(r,\theta,\theta_0) = A_0 H_0^{(1)}(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(1)}(kr)\left[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right]. \qquad (10.100)$$

С учетом асимптотик функций Ханкеля при $kr \to \infty$ (см. 10.88) формулу (10.100) можно записать так:

$$p_s(r,\theta,\theta_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(ikr - i\frac{\pi}{4}\right) \times$$

$$\times \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-in\frac{\pi}{2}\right)\left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)\right]. \qquad (10.101)$$

Интенсивность в дальнем поле рассеянной волны определяется известным соотношением $I_{rs} = |p_s|^2/(2\rho c)$. Тогда, согласно (10.101) имеем

$$I_{rs}(r,\theta,\theta_0) = \frac{2I_0}{\pi kr} L(\theta,\theta_0) L^*(\theta,\theta_0), \qquad (10.102)$$

где $I_0 = 1/(2\rho c)$— интенсивность падающей плоской волны единичной амплитуды (10.93), “*” — знак комплексного сопряжения, а

$$L(\theta,\theta_0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-in\pi/2)\left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right). \qquad (10.103)$$

Мощность рассеянной волны при интегрировании (10.103) по окружности радиуса r определится соотношением:

$$P_s(\theta_0) = \int_0^{2\pi} I_{rs}(r,\theta,\theta_0) r d\theta = \frac{2I_0}{\pi k} \int_0^{2\pi} L(\theta,\theta_0) L^*(\theta,\theta_0) d\theta. \qquad (10.104)$$

Полное сечение рассеяния (см. (8.7)) имеет вид

$$\sigma_s(\theta_0) = \frac{P_s(\theta_0)}{I_0} = \frac{2}{\pi k} \int_0^{2\pi} L(\theta,\theta_0) L^*(\theta,\theta_0) d\theta. \qquad (10.105)$$

Подставляя (10.103) в (10.105), получаем следующую формулу для безразмерной величины σ_s:

$$\frac{\sigma_s(\theta_0)}{a} = \frac{2}{ka}\left[2|A_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|A_n|^2 + |B_n|^2\right)\right]. \qquad (10.106)$$

Согласно определению (8.8) позиционное сечение рассеяния $\sigma(\theta, \theta_0) = 2\pi r I_{rs}(\theta, \theta_0) / I_0$. Подставляя в это определение выражение (10.102),

получаем соотношение для безразмерной величины позиционного сечения рассеяния:

$$\frac{\sigma(\theta,\theta_0)}{a} = \frac{4}{ka} L(\theta,\theta_0) L^*(\theta,\theta_0). \qquad (10.107)$$

Если в формуле (10.107) положить угол $\theta = \theta_0$, то получим сечение обратного рассеяния $\sigma_L(\theta_0) = \sigma(\theta = \theta, \theta_0)$.

Перейдем к анализу численных расчетов. На рис. 10.25, *а* представлены величины сечения рассеяния σ_s, σ, σ_L как функций угла падения плоской волны θ_0 на клинообразный объект, для которого $ka = 15$ (или $a \approx 2{,}4\lambda$), $\theta_1 = 45°$. При таких параметрах объект имеет значительные волновые размеры, причем дуга *AB* и грани клина *OA*, *OB* приблизительно одинаковы по волновым размерам.

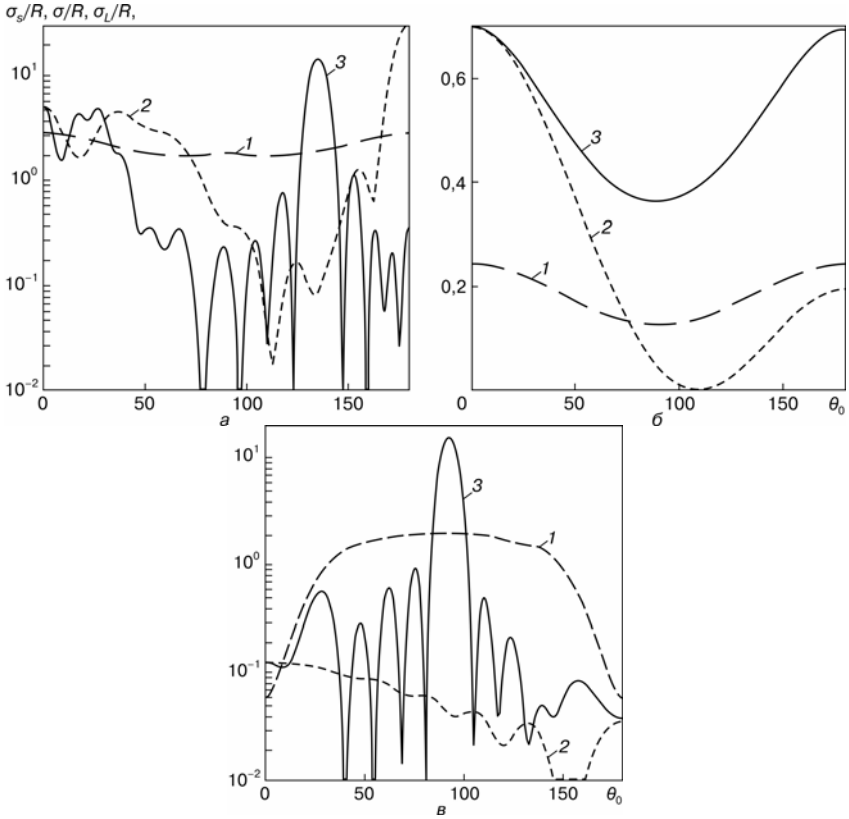


Рис. 10.25. Зависимость сечения рассеяния от угла падения плоской волны θ_0; кривая *1* — σ_s / a, кривая *2* — $\sigma(\theta = 0, \theta^\circ)/a$, кривая *3* — σ_L / a:
а — $ka = 15$, $\theta_1 = 45°$, *б* — $ka = 0{,}7$, $\theta_1 = 45°$, *в* — $ka = 15$, $\theta_1 = 3°$

Как видим, полное сечение рассеяния σ_s (кривая *1*) практически не зависит от угла падения волны θ_0, что обусловлено заданными размерами объекта. Позиционное сечение рассеяния $\sigma(\theta = 0, \theta_0)$ (кривая *2*) характеризует энергию рассеянной волны в направлении $\theta = 0$ как функцию угла падения плоской волны θ_0. Наблюдается наличие "теневого" лепестка (угол падения $\theta_0 = 180°$). Особый интерес представляет сечение обратного рассеяния σ_L (кривая *3*). При углах падения $\theta \approx 0$—$70°$ кривая *3* является плавной, что соответствует отражению волны от поверхности *AB* (рис. 10.23) значительного волнового размера (длина дуги *AB* составляет приблизительно $3{,}75\lambda$). Диапазон углов $\theta \approx 70$—$180°$ можно охарактеризовать как отражение волны от плоского участка *OA* поверхности клинообразного объекта. Здесь наблюдается значительная "изрезанность" кривой *3*. При угле падения $\theta \approx 135°$ имеем так называемый блик, т.е. резкое увеличение амплитуды отраженной волны в противоположном направлении, обусловлено нормальным падением плоской волны на границу *OA* большого волнового размера.

Если резко уменьшать волновой размер объекта, скажем, $ka = 0{,}7$; $\theta_1 = 45°$, как на рис. 10.25, *б*, то, соответственно, уменьшатся величины сечений рассеяния σ_s, σ, σ_L и три кривые становятся плавными.

На рис. 10.25, *в* имеем графики для объекта с большим значением $ka = 15$, но малым углом $\theta_1 = 3°$. Понятно, что геометрия объекта изменилась. Здесь волновая длина дуги *AB* приблизительно в десять раз меньше величины ka и составляет $\sim 0{,}24\lambda$. Отсюда становится понятным ход кривой *1* для полного сечения рассеяния, которая резко спадает в окрестности углов $\theta_0 = 0°$, $180°$. По сравнению с рис. 10.25, *а* значительно уменьшилось позиционное сечение рассеяния $\sigma(\theta = 0, \theta_0)$ (кривая *2*). Величина сечения обратного рассеяния σ_L (кривая *3*) имеет ярко выраженный характерный максимум в окрестности угла падения $\theta_0 = 90°$.

Итак, можем сделать вывод о том, что сечение рассеяния объекта, а, следовательно, и возможность его локации, существенно зависят от геометрии объекта, волновых размеров поверхностей, которые его образуют, и направления падения волны.

10.8. Излучение звука диском

Задача об излучении звука круглым диском занимает особое место в акустике. Указать время, когда она впервые была сформулирована, сейчас вряд ли возможно. Однако можно сказать, что уже во времена Рэлея она вызывала несомненный интерес, и сам Рэлей уделил ей большое внимание [50].

Может возникнуть вопрос – почему на протяжении уже более 150 лет эта задача продолжает оставаться актуальной? Причина этого, как нам представляется, обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, потребностями практики. Действительно, во многих практических ситуациях поле, создаваемое колеблющимися элементами акустических приборов, зачастую вполне удовлетворительно может быть представлено, как поле круглого колеблющегося диска. К таким элементам следует отнести диффузоры, широко используемых в воздушной акустике электродинамических и электростатических громкоговорителей, стержневые и пластинчатые пьезокерамические преобразователи. Кроме этого, данные о поле излучения диска часто используются для оценок полей, создаваемых вибрирующими поверхностями различных строительных конструкций, машин и механизмов.

Вторая причина кроется в том, что задача об излучении круглого диска обладает большой физической и математической содержательностью, а изучение ближнего и дальнего полей излучения диска весьма поучительно и позволяет продемонстрировать интересные особенности такого сложного волнового процесса, как дифракция звука. Кроме этого, такой объект, как круглый диск, имеет сравнительно простую геометрию и поэтому задача об излучении звука диском нередко используется как тестовая при сравнении эффективности различных методов ее решения.

В девятом разделе, на базе интегральных соотношений исследовалось звуковое поле диска, помещенного в акустически жесткий экран. Однако, как было отмечено, анализ ближнего поля на базе интегральных методов является непростой вычислительной задачей.

В данном параграфе покажем, как на базе метода частичных областей можно с единых методических позиций находить решения большого класса задач, где главным элементом является колеблющийся поршень или диск, “встроенный” в различные по форме и акустическим свойствам экраны. При этом никаких ограничений на характер распределения колебательной скорости по поверхности диска не накладывается.

10.8.1. Диск в бесконечном экране

Пусть имеем бесконечный акустически жесткий или мягкий плоский экран (рис. 10.26), в котором расположен круглый диск радиуса a. Экран перпендикулярен к плоскости рисунка. Диск колеблется по гармоническому закону с частотой ω и амплитудой колебательной скорости $\upsilon_z(S) = \upsilon_0$, т. е. скорость на поверхности S диска распределена равномерно. В такой ситуации *диск* называют *поршнем*. Поскольку экран бесконечный, то звуковые волны, которые об-

разуются слева и справа от экрана, не взаимодействуют между собой. Рассмотрим полупространство справа от экрана.

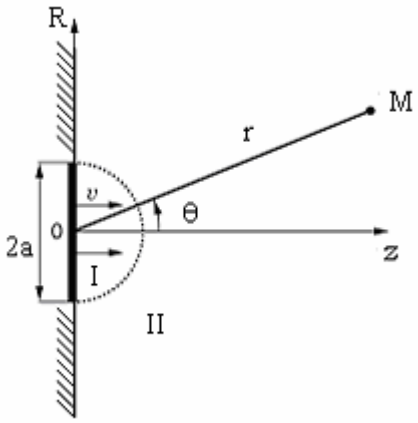


Рис. 10.26. Пример диска в плоском экране

Введем сферическую систему координат (рис. 10.26) с центром в точке O, которая совпадает с центром диска. Положение точки пространства определяется расстоянием r и углами θ и ψ. Угол ψ рассчитывается на плоскости $z = 0$, совпадающей с плоскостью экрана. Поскольку скорость колебаний всех точек диска одинаковая, т. е. имеет место осевая симметрия относительно оси Oz, то характеристики звукового поля не зависят от угла ψ. Согласно методу частичных областей разделим полупространство на две области:

$$1)\ 0 \le r \le a,\ \ 0 \le \theta \le \pi/2;\quad 2)\ a \le r < \infty,\ \ 0 \le \theta \le \pi/2.$$

Построим общее решение уравнения Гельмгольца для каждой из областей. Начнем с области II. Вернемся к седьмому разделу п. 7.12.2, где рассматривался сферический излучатель в свободном пространстве. В случае, когда колебательная скорость поверхности сферы не зависит от угла ψ (т.е. $V(\theta, \psi) \equiv V(\theta)$), звуковое поле сферы представляется в виде суперпозиции (см. (7.195)) сферических волн типа $p = h_m^{(1)}(kr)P_m(\cos\theta)$, $m = 0,1,2,\ldots$, где $h_m^{(1)}(kr)$ — сферические функции Ханкеля первого рода, $P_m(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра. Теперь обратимся к рис. 10.26. Граница раздела областей I и II в виде полусферической поверхности может считаться источником, который создает звуковое поле в области II. Поэтому, можно утверждать, что полусферическая поверхность $r = a$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \psi \le 2\pi$ излучает в область II бегущие волны с полусферическими фронтами. В сферических волнах (7.195) порядок функций $h_m^{(1)}(kr)$ и $P_m(\cos\theta)$ определяется целым числом $m = 0,1,2,\ldots$, что обусловлено расположением сферы

в свободном пространстве. На рис. 10.26 имеем полупространство с жесткой или мягкой границей. Поэтому, волны типа $p = h_{\upsilon}^{(1)}(kr)P_{\upsilon}(\cos\theta)$ должны удовлетворять граничным условиям на поверхности экрана, чего можно достичь правильным выбором величины υ. Граничные условия на жестком экране требуют равенства нулю производной от давления по нормали, что эквивалентно производной по углу θ при $\theta = \pi/2$, т.е. $\partial p/\partial\theta = 0$ при $\theta = \pi/2$. Отсюда получаем следующее условие $\left.\dfrac{dP_{\upsilon}(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\pi/2} = 0$, которое согласно [49, с. 156] приводит к уравнению $\sin(\pi\upsilon/2) = 0$. Итак, $\upsilon_n = 2n$, $n = 0,1,2,\ldots$ Аналогично, в случае мягкого экрана получаем значения $\upsilon_n = 2n+1$, $n = 0,1,2,\ldots$

Таким образом, поле давления в области II представляет собой суперпозицию волн $h_{\upsilon_n}^{(1)}(kr)P_{\upsilon_n}(\cos\theta)$, т.е.

$$p_{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_{\upsilon_n}^{(1)}(kr)P_{\upsilon_n}(\cos\theta). \qquad (10.108)$$

Решение (10.108) будет общим решением в области II, ведь система функций $P_{\upsilon_n}(\cos\theta)$, $n = 0,1,2,\ldots$, является полной и ортогональной на отрезке $\theta = [0, \pi/2]$, (см. [49]):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{\upsilon_n}(\cos\theta)P_{\upsilon_m}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{1}{2\upsilon_n + 1}, & n = m. \end{cases} \qquad (10.109)$$

Здесь в случае жесткого экрана $\upsilon_n = 2n$, $n = 0,1,2,\ldots$, а для мягкого экрана — $\upsilon_n = 2n+1$, $n = 0,1,2,\ldots$ Благодаря подбору произвольных коэффициентов B_n можно удовлетворить условия сопряжения звуковых полей на границе раздела областей I и II.

Теперь построим общее решение для области I. Оно будет состоять из двух слагаемых $p_{\text{I}}^{(1)}$ и $p_{\text{I}}^{(2)}$, причем одно из них должно обеспечить выполнение условий сопряжения полей на границе раздела областей I и II, а второе — граничное условие на поверхности диска. Что касается первого слагаемого $p_{\text{I}}^{(1)}$, то, очевидно, оно имеет вид (10.108), только вместо радиальных функций $h_{2n}^{(1)}(kr)$ (выбираем набор функций для жесткого экрана), описывающих бегущие волны,

целесообразно использовать сферические функции Бесселя $j_{2n}(kr)$, описывающие стоячие волны, ведь область I — конечна и функции $j_{2n}(kr)$ имеют конечное значение при $r = 0$. Напоминаем асимптотику этих функций при $kr \to \infty$:

$$h_n^{(1)}(kr) \approx \frac{1}{kr}\exp\left(i\left(kr - \frac{n+1}{2}\pi\right)\right), \quad j_n(kr) \approx \frac{1}{kr}\cos\left(kr - \frac{n+1}{2}\pi\right). \qquad (10.110)$$

Итак, первая составляющая $p_{\mathrm{I}}^{(1)}$ решения $p_{\mathrm{I}} = p_{\mathrm{I}}^{(1)} + p_{\mathrm{I}}^{(2)}$ в области I имеет вид

$$p_{\mathrm{I}}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n j_{2n}(kr) P_{2n}(\cos\theta). \qquad (10.111)$$

Поразмыслим над второй составляющей $p_{\mathrm{I}}^{(2)}$. Ее можно записать в виде соответствующего ряда Фурье. Однако вид составляющей $p_{\mathrm{I}}^{(1)}$ (10.111) позволяет представить $p_{\mathrm{I}}^{(2)}$ в более простом виде. Действительно, на поверхности диска должно выполняться условие $\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial z} = \upsilon_0$ при $z = 0$, иначе $\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_{\mathrm{I}}}{r\partial\theta} = \upsilon_0$ при $\theta = \pi/2$. Но $\partial p_{\mathrm{I}}^{(1)}/\partial\theta = 0$ при $\theta = \pi/2$, поэтому, на поверхности диска имеем условие

$$\left.\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_{\mathrm{I}}^{(2)}}{r\partial\theta}\right|_{\theta=\pi/2} = \upsilon_0, \quad \text{или} \quad \left.\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_{\mathrm{I}}^{(2)}}{\partial z}\right|_{z=0} = \upsilon_0. \qquad (10.112)$$

Понятно, что решение $p_{\mathrm{I}}^{(2)}$ можно представить в виде плоской волны, а именно, $p_{\mathrm{I}}^{(2)} = D\exp(ikz) = D\exp(ikr\cos\theta)$. Подставив это решение в условие (10.112), определим постоянную D. Итак, $D = \rho c \upsilon_0$.

Таким образом, общее решение в области I имеет вид

$$p_{\mathrm{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n j_{2n}(kr) P_{2n}(\cos\theta) + \rho c \upsilon_0 \exp(ikr\cos\theta). \qquad (10.113)$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются согласно условиям сопряжения звуковых полей на границе раздела областей I и II:

$$p_{\mathrm{I}} = p_{\mathrm{II}}, \quad \frac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial r} = \frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial r}, \quad r = a, \quad \theta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \qquad (10.114)$$

Расписывая условия (10.114) и проводя алгебраизацию функциональной системы благодаря свойству ортогональности (10.109) получаем систему алгебраических уравнений. Для диска в акустически жестком экране эта система имеет вид

$$A_m \frac{j_{2m}(ka)}{4m+1} + \rho c \upsilon_0 a_m = B_m \frac{h_{2m}^{(1)}(ka)}{4m+1},$$

$$A_m \frac{j'_{2m}(ka)}{4m+1} + i\rho c \upsilon_0 b_m = B_m \frac{h_{2m}^{(1)\prime}(ka)}{4m+1}, \qquad (10.115)$$

где $j'_{2m}(ka)$, $h_{2m}^{(1)\prime}(ka)$ — производные по аргументу, $m = 0,1,2,\ldots$,

$$a_m = \int_0^{\pi/2} \exp(ika\cos\theta) P_{2m}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_0^1 \exp(ikax) P_{2m}(x) dx,$$

$$b_m = \int_0^{\pi/2} \exp(ika\cos\theta) P_{2m}(\cos\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta = \int_0^1 \exp(ikax) P_{2m}(x) x dx. \qquad (10.116)$$

Из системы (10.115), используя свойство функций Бесселя,

$$j_{2n}(ka) h_{2n}^{(1)\prime}(ka) - j'_{2n}(ka) h_{2n}^{(1)}(ka) = -\frac{i}{(ka)^2}, \qquad (10.117)$$

находим искомые коэффициенты A_m и B_m. Размерность этих коэффициентов соответствует давлению, т.е. A_n, B_n, Па, но удобнее пользоваться безразмерными коэффициентами $A_n/(\rho c \upsilon_0)$ и $B_n/(\rho c \upsilon_0)$. Итак,

$$A'_m = \frac{A_m}{\rho c \upsilon_0} = (4m+1)(ka)^2 h_{2m}^{(1)\prime}(ka)\left[ia_m + \frac{h_{2m}^{(1)}(ka)}{h_{2m}^{(1)\prime}(ka)} b_m\right], \qquad (10.118)$$

$$B'_m = \frac{B_m}{\rho c \upsilon_0} = (4m+1)(ka)^2 j'_{2m}(ka)\left[ia_m + \frac{j_{2m}(ka)}{j'_{2m}(ka)} b_m\right]. \qquad (10.119)$$

Переписываем формулы (10.108) и (10.113), используя безразмерные коэффициенты A'_n и B'_n:

$$p_{\mathrm{I}} = \rho c \upsilon_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} A'_n j_{2n}(kr) P_{2n}(\cos\theta) + \exp(ikr\cos\theta)\right], \qquad (10.120)$$

$$p_{\mathrm{II}} = \rho c \upsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} B'_n h_{2n}^{(1)}(kr) P_{2n}(\cos\theta). \qquad (10.121)$$

Предлагаем читателю самостоятельно получить аналогичные формулы для диска в акустически мягком экране.

Построенное решение позволяет исследовать различные характеристики звукового поля диска. В начале исследуем сходимость полученного решения, определив невязку при выполнении условий сопряжения звуковых полей на границе областей I и II. Средние значения невязки по давлению $\delta_p = (p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}})/|p_{\mathrm{II}}|$ и колебательной скорости $\delta_\upsilon = (\upsilon_{r\mathrm{I}} - \upsilon_{r\mathrm{II}})/|\upsilon_{r\mathrm{II}}|$ на границе областей I и II приведены в таблице 1 (в расчетах величина $ka = 7$). При проведении процедуры редукции бесконечной системы алгебраических уравнений индекс суммирования, во всех определенных выше суммах, изменялся от 0 до N. Следует отметить, что у края диска ($r = a$, $\theta = 90^\circ$) невязка несколько возрастает (особенно для акустически мягкого экрана), что, в рамках рассматриваемой математической модели, является совершенно естественным и прогнозируемым результатом. Приведенные расчеты дают представление о поточечной сходимости построенного решения в ближнем поле диска.

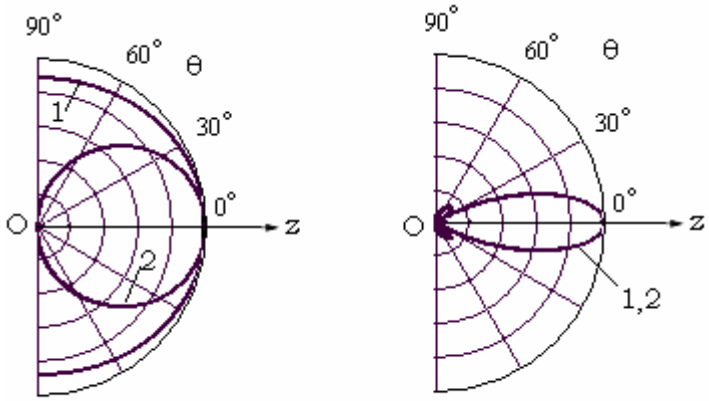
Таблица 1.

	Акустически жесткий экран		Акустически мягкий экран	
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 10$	$N = 20$
$\lvert \mathrm{Re}\,\delta_p \rvert$	10^{-9}	$5 \cdot 10^{-15}$	0,016	0,009
$\lvert \mathrm{Im}\,\delta_p \rvert$	0,012	0,003	0,024	0,01
$\lvert \mathrm{Re}\,\delta_\upsilon \rvert$	$2 \cdot 10^{-9}$	10^{-14}	0,022	0,02
$\lvert \mathrm{Im}\,\delta_\upsilon \rvert$	0,003	0,0007	0,032	0,022

Обратимся к интегральной оценке процесса сходимости, путем сравнения акустической мощности на поверхности диска P_1 (область I) и акустической мощности в дальнем поле диска P_2 (область II). Аналогичные расчеты для невязки по мощности $\delta_{\mathrm{P}} = (\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2)/\mathrm{P}_2$ представлены в таблице 2. Как видно, наблюдается вполне удовлетворительная сходимость построенного решения.

Таблица 2

	Акустически жесткий экран		Акустически мягкий экран	
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 10$	$N = 20$
$\lvert \delta_{\mathrm{P}} \rvert$	10^{-7}	$5 \cdot 10^{-14}$	10^{-3}	10^{-4}



а б

Рис. 10.27. Диаграммы направленности диска в экране:
а – $ka = 1$, б – $ka = 7$;
1 – акустически жесткий экран, 2 – акустически мягкий экран

Перейдем к анализу численных данных о характеристиках звукового поля диска. На рис. 10.27 приведены диаграммы направленности по давлению при двух величинах ka. При малом волновом размере диска ($ka = 1$, рис. 10.27, *а*) формы диаграмм существенно зависят от свойств экрана. Если при жестком экране диск практически ненаправлен (излучает как монополь), то при мягком он существенно направлен (излучает как диполь). При большой величине ka ($ka = 7$, рис. 10.27, *б*), для обоих вариантов экрана, с графической точностью диаграммы направленности совпадают. Это обусловлено тем, что при достаточно большом волновом радиусе диска звуковая энергия в дальнем поле концентрируется в области осевого направления и, как следствие, влияние свойств экрана практически несущественно.

Обратимся теперь к такой важной интегральной характеристике процесса излучения звука как импеданс излучения. Интересно сравнить полученное решение с известными результатами, которые получены благодаря интегральным соотношениям (см. раздел 9). Согласно определению (7.16) сопротивление излучения диска равно $Z_{\text{è}} = \frac{1}{\upsilon_0}\int\limits_S p_{\text{I}}\big|_S dS$, где интегрирование выполняется по поверхности диска *S*. В соответствии с симметрией задачи элементом *dS* может служить элементарное кольцо толщиной *dr* (рис. 10.28), а именно, $dS = 2\pi r dr$. В таком случае имеем

$$Z_{\text{è}} = \frac{2\pi}{\upsilon_0}\int\limits_0^a p_{\text{I}}\left(\theta = \frac{\pi}{2}, r\right) r dr. \qquad (10.122)$$

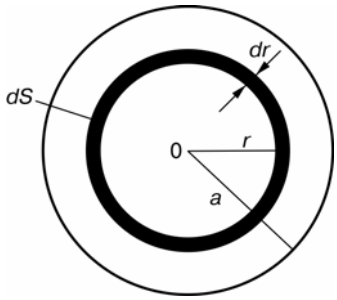


Рис. 10.28. Элементарное кольцо площадью dS на поверхности диска

Подставляя (10.120) в (10.122), получаем расчетную формулу для сопротивления излучения диска в жестком экране:

$$Z_{\text{и}} = \rho c \pi a^2 \left[1 + \frac{2}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} A'_n e_n P_{2n}(0) \right], \qquad (10.123)$$

где

$$e_n = \int_0^{ka} j_{2n}(x)\, x dx. \quad (10.124)$$

Расчеты, проведенные по формулам (9.87) и (10.123) при $ka \le 5{,}5$, показывают, что при удержании шести членов ряда (10.123) кривые, которые определяют действительную и мнимую части сопротивления излучения, с графической точностью совпадают.

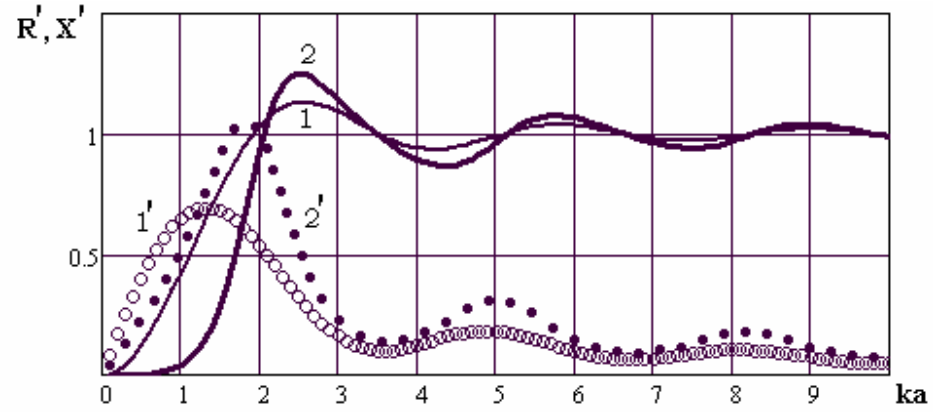


Рис. 10.29. Безразмерный импеданс излучения диска в бесконечном экране: 1,2 – действительные и $1', 2'$ – мнимые части импеданса излучения, $1, 1'$ – акустически жесткий экран, $2, 2'$ – акустически мягкий экран

На рис. 10.29 показаны действительная $R' = \mathrm{Re}(Z_{\text{и}} / \rho c S)$ (кривые 1,2) и мнимая $X' = \mathrm{Im}(Z_{\text{и}} / \rho c S)$ (кривые $1', 2'$) части безразмерного импеданса излучения диска в акустически жестком и акустически мягком экранах как функции волнового радиуса диска ka. Числовые данные нормированы к величине $\rho c S$ — сопротивлению излучения диска в бесконечной трубе с жесткими стенками. Как видим, если при больших значениях ka ход кривых для случаев жесткого и мягкого экранов сближается, то при малых значениях ka поведение действительных частей сопротивления излучения существенно отличается. Это обусловлено тем, что диск в мягком экране эквивалентен осциллирующему диску в свободном пространстве, что приводит при малых волновых размерах диска к так называемому "акустическому короткому замыканию" (см. в конце параграфа 7.8 и ниже п. 10.8.3).

Задача. Объясните, почему колебания диска в мягком экране эквивалентны осциллирующему диску в свободном пространстве, а колебания диска в жестком экране эквивалентны пульсирующему диску в свободном пространстве

10.8.2. Диск в полусферическом экране

Рассмотрим теперь ситуацию, когда диск размещен не в бесконечном экране, а в экране конечных размеров. Например, практический интерес представляет диск на полусфере того же радиуса a (см. рис. 10.30) с акустически жесткой или акустически мягкой сферической поверхностью. Скорость на поверхности диска будем считать равномерной, т. е. $\upsilon_z(S) = \upsilon_0$. Если, для случая диска в бесконечном экране (рис. 10.26), диск "озвучивал" только полупространство, то в ситуации, изображенной на рис. 10.30, диск "озвучивает" уже все пространство. Поэтому область II теперь является внешностью сферы радиуса a, а поле в области I определяется выражением (10.120). Тогда поле в области II следует писать в виде

$$p_{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta). \qquad (10.125)$$

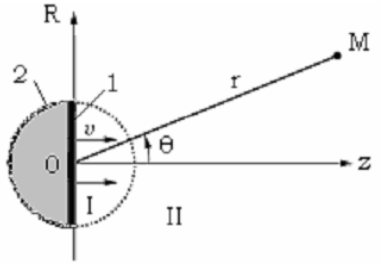


Рис. 10.30. Диск в полусферическом экране:
1 – диск, 2 – полусферический экран

Функциональная система уравнений, определяющая условия сопряжения звуковых полей на границе частичных областей I и II для случая с жесткой полусферой теперь будет иметь следующий вид

$$p_{\mathrm{I}} = p_{\mathrm{II}}, \qquad r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi] \tag{10.126}$$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial r}, & r = a, \ \theta = [0, \pi/2], \ \psi = [0, 2\pi], \\ 0, & r = a, \ \theta = [\pi/2, \pi], \ \psi = [0, 2\pi], \end{cases} \tag{10.127}$$

а для случая с мягкой полусферой следует писать так:

$$p_{\mathrm{II}} = \begin{cases} p_{\mathrm{I}}, & r = a, \ \theta = [0, \pi/2], \ \psi = [0, 2\pi], \\ 0, & r = a, \ \theta = [\pi/2, \pi], \ \psi = [0, 2\pi]. \end{cases} \tag{10.128}$$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial r} = \frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial r}, \quad r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi]. \tag{10.129}$$

Провести дальнейшие выкладки читатель сможет самостоятельно.

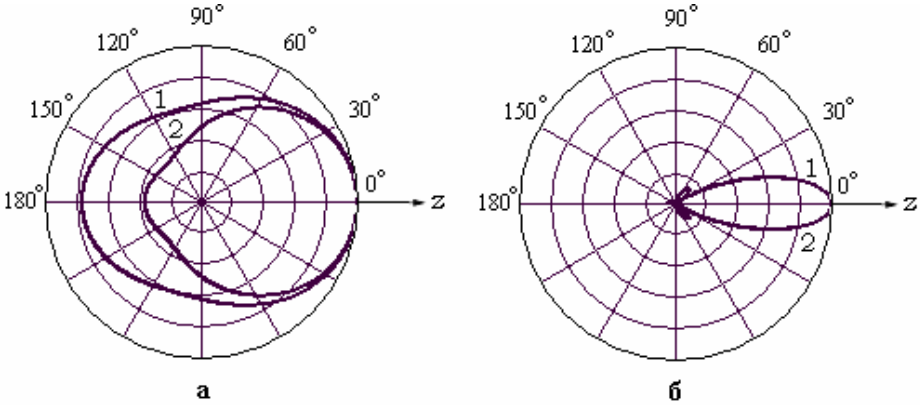


Рис. 10.31. Диаграммы направленности диска в полусферическом экране: а – $ka = 1$, б – $ka = 7$; 1 –жесткая полусфера, 2 – мягкая полусфера

На рис. 10.31 представлены диаграммы направленности диска в полусферическом экране. Как видно, при малом волновом размере диска (рис. 10.31, *а*) влияние свойств полусферы существенно – для акустически мягкой полусферы направленные свойства выражены значительно сильнее, чем в случае акустически жесткой полусферы. В частности уровень тыльного лепестка, в случае мягкой полусферы, примерно в два раза ниже, чем в случае жесткой полусферы. При этом имеется существенное различие в диаграммах для диска на полусфере и в бесконечном экране (сравни рис. 10.31, *а* и рис. 10.27, *а*). При сравнительно большом волновом радиусе ($ka = 7$, рис. 10.31, *б*) свойства полусферы практически не имеют значения и диаграммы направленности фактически совпадает с диаграммами направленно-

сти диска в плоском бесконечном экране (сравни рис. 10.31, *б* и рис. 10.27, *б*).

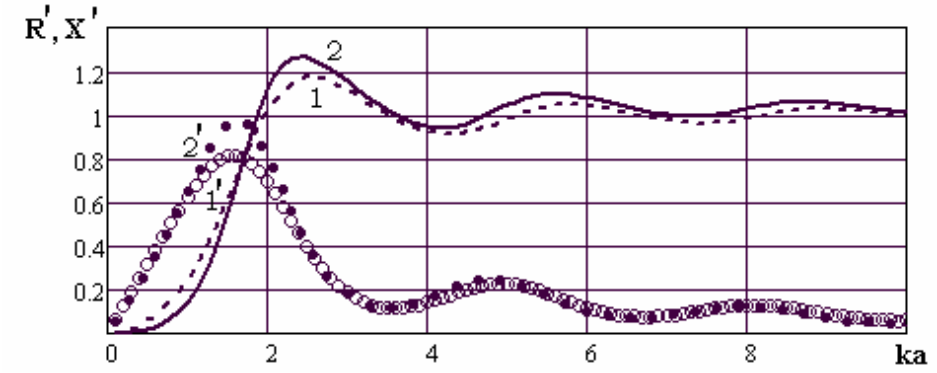


Рис. 10.32. Нормированные действительная (кривые 1,2) и мнимая (кривые $1', 2'$) части импеданса излучения диска в полусферическом экране: $1, 1'$ – жесткая полусфера, $2, 2'$ – мягкая полусфера

Импеданс излучения диска на полусфере как функция волнового радиуса ka показан на рис. 10.32. Сравнивая эти графики с аналогичными графиками для диска в бесконечном экране (рис. 10.29), следует отметить, что если общий характер хода кривых в целом сходен, то в области небольших волновых величин ($ka \le 2$) имеется отличие. Оно проявляется в том, что для диска в плоском бесконечном акустически жестком и акустически мягком экране вещественные части $Z_и$ существенно различаются, а для диска на полусфере это отличие незначительно.

10.8.3. Диск в конечном кольцевом экране

Как мы видели выше, осциллирующий диск (диск в мягком экране), как излучатель звука, менее эффективен в области $ka \le 2$, чем пульсирующий диск (диск в жестком экране). Относительно низкая эффективность осциллирующего диска связана с тем, что на его поверхностях давление имеет разные знаки и за счет этого возникает волновой эффект, известный как акустическое короткое замыкание, который приводит к значительному снижению импеданса излучения. Поэтому, например, громкоговоритель, диффузор которого совершает осциллирующие колебания, размещают в экране, что способствует ослаблению эффекта акустического короткого замыкания и, как следствие, повышению импеданса излучения громкоговорителя на низких частотах и его эффективности в целом. Ниже, на

примере осциллирующего диска, мы рассмотрим степень влияния кольцевого акустически жесткого экрана на его импеданс излучения.

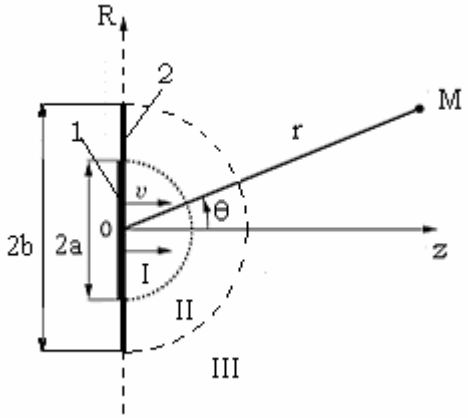


Рис. 10.33. Осциллирующий диск в кольцевом экране конечных размеров: 1 – диск, 2 – жесткий кольцевой экран

Пусть осциллирующий диск, совершающий поршневое движение, расположен в кольцевом экране (рис. 10.33), внешний радиус которого равен b, а внутренний равен радиусу диска a. Для осциллирующего диска поверхность $\theta = \pi/2$, $\psi = [0, 2\pi]$, $r > b$ (пунктирные линии на рис. 10.33) является акустически мягкой. Тогда естественным образом возникают три частичные области: область I – $r \le a$, $\theta = [0, \pi/2]$; область II – $a \le r \le b$, $\theta = [0, \pi/2]$; область III – $r \ge b$, $\theta = [0, \pi/2]$.

Предлагаем читателю самостоятельно записать поля в областях III и I. Поле в области II запишем в виде двух наборов частных решений уравнения Гельмгольца, поскольку эта область ограничена двумя поверхностями: $\theta = [0, \pi/2]$, $r = a$ и $\theta = [0, \pi/2]$, $r = b$. Таким образом,

$$p_{\text{II}} = \sum_{n-0}^{\infty} C_n j_{2n}(kr) P_{2n}(\cos\theta) + \sum_{n-0}^{\infty} D_n y_{2n}(kr) P_{2n}(\cos\theta), \qquad (10.130)$$

где $y_{2n}(kr)$ – сферические функции Бесселя второго рода.

Функциональная система уравнений, определяющая условия сшивания звуковых полей на границах частичных областей, имеет вид

$$p_{\text{I}} = p_{\text{II}}, \qquad r = a,\ \theta = [0, \pi/2],\ \psi = [0, 2\pi], \qquad (10.131)$$

$$\frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial r} = \frac{\partial p_{\text{II}}}{\partial r}, \quad r = a,\ \theta = [0, \pi/2],\ \psi = [0, 2\pi]. \qquad (10.132)$$

$$p_{\text{II}} = p_{\text{III}}, \qquad r = b,\ \theta = [0, \pi/2],\ \psi = [0, 2\pi], \qquad (10.133)$$

$$\frac{\partial p_{\text{II}}}{\partial r} = \frac{\partial p_{\text{III}}}{\partial r}, \quad r = b,\ \theta = [0, \pi/2],\ \psi = [0, 2\pi]. \qquad (10.134)$$

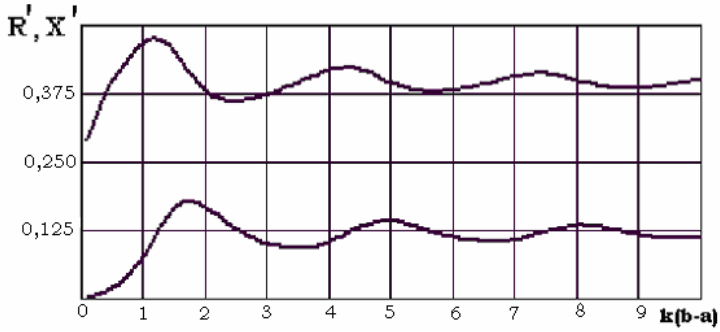


Рис. 10.34. Действительная (кривая 1) и мнимая (кривая 2) части безразмерного импеданса излучения осциллирующего диска в жестком кольцевом экране конечных размеров при фиксированном значении $ka = 0,5$ и переменной величине ширины экрана $k(b-a)$

На рис. 10.34 показана вещественная (кривая 1) и мнимая (кривая 2) части импеданса излучения $Z_{\text{и}}/(\rho c S)$. При этом, волновой радиус диска фиксирован $ka = 0,5$, а переменной величиной является волновая ширина экрана $k(b-a)$. Как видно, при отсутствии экрана, когда $k(b-a) = 0$, вещественная часть импеданса излучения весьма мала и составляет величину около 0,01. Следовательно, и энергетическая эффективность осциллирующего диска, как излучателя звука, тоже будет весьма низка. Однако, с ростом величины $k(b-a)$, вещественная часть импеданса быстро растет и уже при значении $k(b-a) \approx 1,2$ достигает уровня 0,1, что соответствует уровню пульсирующего диска при том же значении $ka = 0,5$ (сравни с кривой 1 на рис. 10.29). В дальнейшем, при $k(b-a) \geq 1.2$, вещественная часть импеданса излучения колеблется, асимптотически приближаясь к величине $\sim 0,12$.

Влияние экрана на диаграмму направленности в значительной степени зависит от волнового размера диска ka. При малых величинах ka экран оказывает существенное влияние на диаграмму направленности, в случае большой величины ka влияние экрана незаметно.

10.8.4. Диск в свободном пространстве

Рассмотрим теперь колебания диска в свободном пространстве, без каких либо экранов (рис. 10.35). Здесь, в принципе, амплитуды и фазы колебательных скоростей на обеих поверхностях диска могут существенно отличаться друг от друга. Более того, характер распределения колебательной скорости по поверхностям диска,

также может быть различным. Однако мы несколько упростим задачу и ограничимся рассмотрением только частного случая, когда колебательная скорость распределена равномерно по обеим поверхностям диска.

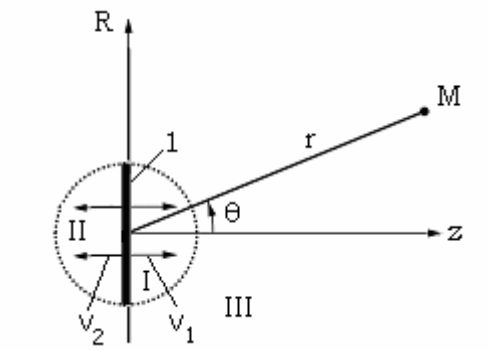


Рис. 10.35. Диск 1 в свободном пространстве без экрана

Итак, пусть амплитуда колебательной скорости правой стороны диска $\upsilon_1 = \upsilon_0$, а на левой стороне соответственно $\upsilon_2 = \upsilon_0 \xi \exp(-i\alpha)$, см. рис. 10.35. Здесь коэффициент ξ определяет соотношение амплитуд скоростей $\xi = |\upsilon_2| / |\upsilon_1|$ по обе стороны диска, а параметр α указывает на запаздывание $(\alpha \geq 0)$ по фазе колебаний левой стороны диска относительно правой стороны. Очевидно, что если $\xi = 1$ и $\alpha = 0$, то имеем задачу об излучении звука пульсирующим диском; если $\xi = 1$ и $\alpha = \pi$, то имеем задачу об излучении звука осциллирующим диском.

Разобьем всю область существования звукового поля на три частичные области: область I – $r \leq a$, $\theta = [0, \pi/2]$; область II – $r \leq a$, $\theta = [\pi/2, \pi]$; область III – $r \geq a$, $\theta = [0, \pi]$. На поверхностях диска должны выполняться следующие граничные условия:

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial n} = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_{\mathrm{I}}}{\partial z} = \upsilon_0, \tag{10.135}$$

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial n} = -\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_{\mathrm{II}}}{\partial z} = \upsilon_0 \xi \exp(-i\alpha), \tag{10.136}$$

где **n** – внешняя нормаль к поверхности диска (рис. 10.35). С учетом граничных условий (10.135) и (10.136) выражения для давления в каждой из частичных областей запишутся в виде

$$p_{\mathrm{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n j_{2n}(kr) P_{2n}(\cos\theta) + \rho c \upsilon_0 \exp(ikr\cos\theta), \tag{10.137}$$

$$p_{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_{2n}(kr) P_{2n}(\cos\theta) + \rho c \upsilon_0 \xi \exp(-i\alpha) \exp(-ikr\cos\theta), \quad (10.138)$$

$$p_{\text{III}} = \sum_{n-0}^{\infty} C_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta). \quad (10.139)$$

Следует отметить, что плоские волны в выражениях (10.137) и (10.138) представляют собой волны, распространяющиеся от поверхности диска.

Для рассматриваемой задачи возможны два равноправных варианта условий сопряжения звуковых полей на границах частичных областей: в одном из них на всей поверхности сферы радиуса a (рис. 10.35) сопрягаем давление по обе стороны от этой поверхности, а в другом – колебательную скорость. Выберем второй вариант, т. е. на границе частичных областей будем иметь такие условия:

$$p_{\text{III}} = p_{\text{I}}, \quad r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \ \psi = [0, 2\pi], \quad (10.140)$$

$$p_{\text{III}} = p_{\text{II}}, \quad r = a, \quad \theta = [\pi/2, \pi], \ \psi = [0, 2\pi], \quad (10.141)$$

$$\frac{\partial p_{\text{III}}}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{\partial p_{\text{I}}}{\partial r}, & r = a, \ \theta = [0, \pi/2], \ \psi = [0, 2\pi], \\ \dfrac{\partial p_{\text{II}}}{\partial r}, & r = a, \ \theta = [\pi/2, \pi], \ \psi = [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (10.142)$$

Алгебраизация функциональных уравнений (10.140) и (10.141) производится, используя свойство ортогональности функций $P_{2n}(\cos\theta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ на отрезках $\theta = [0, \pi/2]$ и $\theta = [\pi/2, \pi]$, а алгебраизация уравнения (10.142) на основе ортогональности функций $P_n(\cos\theta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ на отрезке $\theta = [0, \pi]$.

Выше мы уже достаточно много внимания уделили таким важным характеристикам пульсирующего и осциллирующего дисков, как импеданс излучения и диаграмма направленности. Теперь остановимся подробнее на характере распределения векторов колебательных скоростей $\mathbf{V} = (V_R, V_z)$ и интенсивностей $\mathbf{I} = (I_R, I_z)$ звукового поля вблизи поверхностей диска.

Проекции указанных векторов на оси координат определялись как

$$V_R = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial R}, \quad V_z = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$I_R = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(pV_R^*\right), \quad I_z = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(pV_z^*\right), \quad (10.143)$$

после чего вычислялись сами вектора $\mathbf{V} = (V_R, V_z)$ и $\mathbf{I} = (I_R, I_z)$.

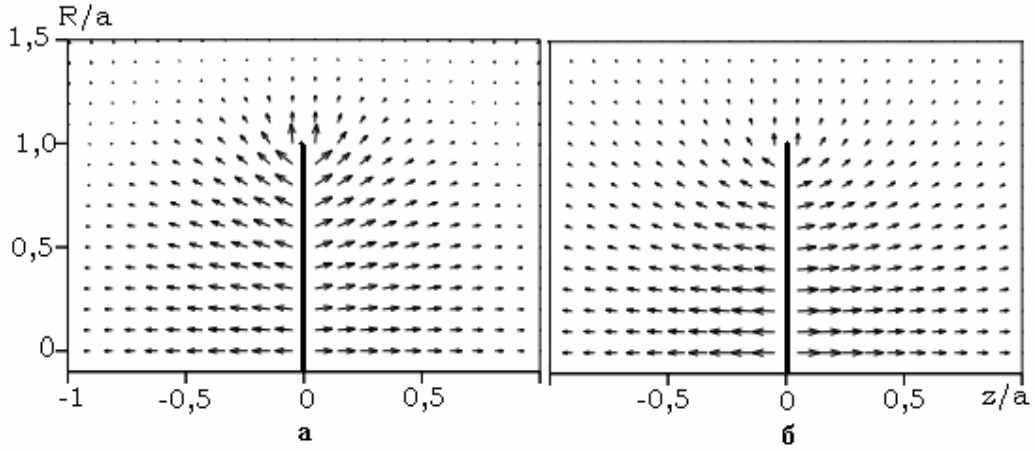


Рис. 10.36. Поле векторов амплитуды колебательной скорости (а) и векторов интенсивности (б) в окрестности пульсирующего диска при $ka = 2$, $\xi = 1$, $\alpha = 0$

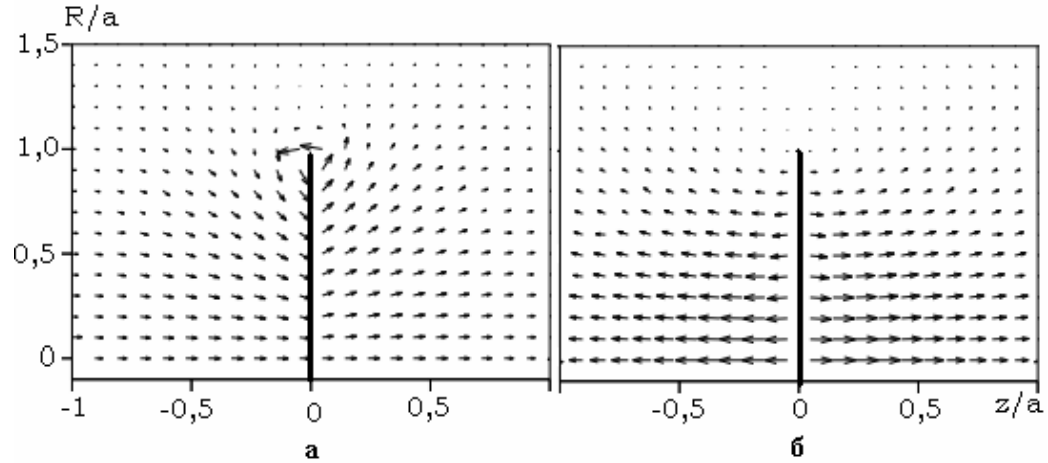


Рис. 10.37. Поле векторов амплитуды колебательной скорости (а) и векторов интенсивности (б) в окрестности осциллирующего диска при $ka = 2$, $\xi = 1$, $\alpha = \pi$

На рис. 10.36 показано поля колебательной скорости и интенсивности вблизи диска при волновом радиусе $ka = 2$ и значении параметров $\xi = 1$, $\alpha = 0$, что соответствует пульсирующему диску. Для сравнения на рис. 10.37 представлены аналогичные поля для осциллирующего диска (здесь $ka = 2$, $\xi = 1$, $\alpha = \pi$). Отметим, что начало каждой стрелочки соответствует точке, в которой определена векторная величина, а длина стрелочки пропорциональна модулю вектора.

Вследствие симметрии звукового поля относительно оси z на рисунках показано только полупространство $R \geq 0$ и половина диска. Как видно, для пульсирующего диска (рис. 10.36) векторы скорости и интенсивности полностью симметричны относительно плоскости $z = 0$, что говорит об отсутствии взаимодействия между звуковыми полями левого и правого полупространств. Это абсолютно правильный результат, поскольку задача о пульсирующем диске в свободном пространстве полностью эквивалентна задаче о колебании диска в плоском жестком бесконечном экране, о чем мы уже говорили выше. Характерной особенностью, представленных на рис. 10.36 полей, является то, что векторы в области центра диска направлены вдоль оси Oz, а по мере приближения к краю диска они постепенно разворачиваются в направлении оси R. При этом амплитуда скоростей и уровни интенсивностей весьма мало изменяются при переходе от центра диска к его краю.

Совершенно иная картина наблюдается у осциллирующего диска, см. рис. 10.37, *а*. Здесь, как и следовало ожидать, поле колебательной скорости становится антисимметричным относительно плоскости $z = 0$. При этом, по мере движения от центра диска к его краю, амплитуда векторов колебательной скорости нарастает, а сами векторы разворачиваются в сторону оси R. Наиболее драматическая ситуация наблюдается в области края диска. Здесь хорошо видно, как окружающая среда “перекачивается” с одной поверхности диска на другую, что является прямым следствием осциллирующего характера движения диска, которое создает на его поверхностях давления противоположного знака. Именно это явление и составляет суть эффекта акустического короткого замыкания, о чем мы уже говорили выше. Что касается поля интенсивности осциллирующего диска (см. рис. 10.37, *б*), то оно так же, как и пульсирующего диска, полностью симметрично относительно плоскости $z = 0$, однако здесь уровень интенсивности плавно спадает при движении от центра диска к его краю. И на краю диска он становится практически равным нулю. Этот факт указывает на то, что вся энергия колебаний края диска расходуется на “перекачку” среды с одной его поверхности на другую, а не на излучение акустической энергии в окружающую среду. Вот почему, при прочих равных параметрах, осциллирующий диск менее эффективен, чем пульсирующий диск. Однако с ростом волнового размера осциллирующего диска негативная роль эффекта короткого акустического замыкания естественно ослабляется и уже при $ka \geq 2$ по эффективности осциллирующий диск становится сравнимым с пульсирующим диском, что хорошо иллюстрируется ходом кривых импеданса излучения на рис. 10.32.

Рассмотрим еще один интересный вариант движения диска, когда одна сторона его колеблется, а другая полностью заторможена (т.е.,

когда $\xi = 0$). Такой диск называют односторонним, интерес к такому диску обусловлен практической потребностью – иметь однонаправленный излучатель для использования в различных акустических приборах.

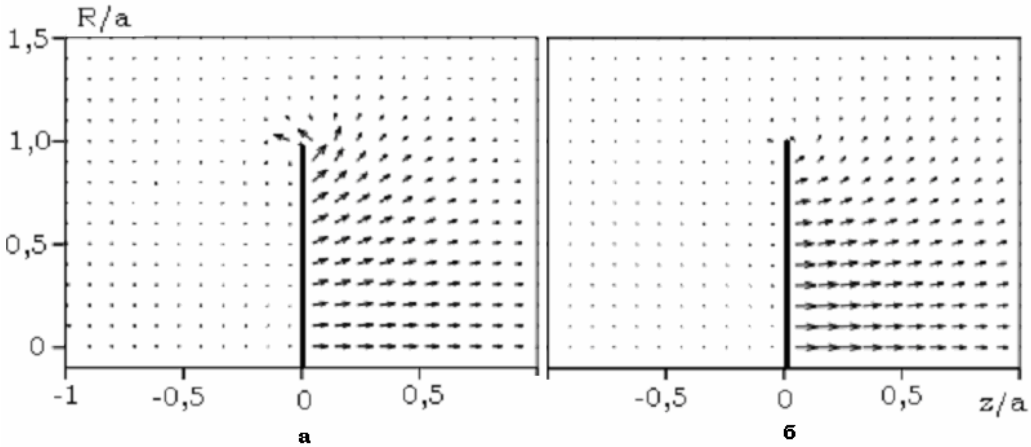


Рис. 10.38. Поле векторов амплитуды колебательной скорости (а) и векторов интенсивности (б) в окрестности одностороннего диска при $ka = 2$ и $\xi = 0$

Нас будут интересовать поля колебательной скорости и интенсивности в окрестности такого диска. Обратимся к рис. 10.38. Как видно, по мере движения от центра диска к его краю, амплитуда векторов колебательной скорости заметно увеличивается, сами вектора разворачиваются в сторону оси R и на краю диска образуют своеобразный “веер”. На тыльной стороне диска, как и положено по условию, колебательная скорость равна нулю. Что касается интенсивности, то она заметно спадает, по мере движения к краю диска, и некоторая ее часть “затекает” за край диска в тыльное пространство. Можно предположить, что, несмотря на отсутствие колебаний тыльной стороны диска, эти два фактора – “веер” колебательных скоростей и “затекание” звуковой энергии должны привести к заметному излучению звука диском в тыльном направлении. Если обратиться к диаграмме направленности такого одностороннего диска (см. рис. 10.39, *а*), то можно убедиться, что относительный уровень тыльного излучения действительно высок и составляет почти 0,45. Таким образом, в области малых и умеренных значений ka односторонний диск в строгом смысле не является однонаправленным излучателем (заметим, что при дальнейшем росте ka уровень тыльного излучения снижается и его действительно можно считать практически однонаправленным).

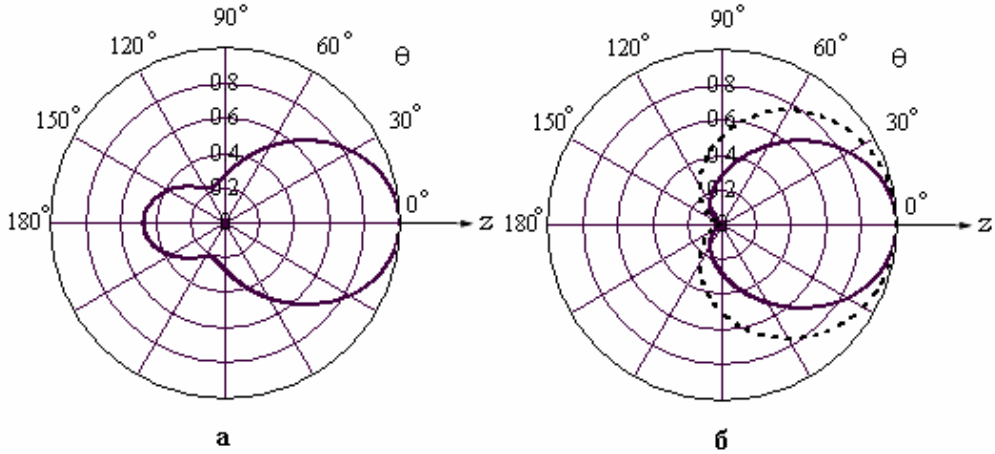


Рис. 10.39. Диаграммы направленности диска при $ka = 2$:
а – односторонний диск, $\xi = 0$; б – диск со сложным амплитудно-фазовым распределением скорости, $\xi = 0,45$, $\alpha = 0,4\pi$; штриховая линия – кардиоида

Возникает естественный вопрос – можно ли путем надлежащего выбора параметров ξ и α сделать диск (при умеренных ka) однонаправленным? Мы провели ряд численных экспериментов и убедились, что, по крайней мере, теоретически это реализуемо. В качестве примера на рис. 10.39, *б* приведена диаграмма направленности для случая, когда $\xi = 0,45$, а $\alpha = 0,4\pi$. Здесь же для сравнения представлена также типичная кардиоидная диаграмма направленности. Как можно убедиться, диск с таким амплитудно-фазовым распределением колебательной скорости по его поверхностям действительно становится однонаправленным излучателем звука с диаграммой направленности похожей на кардиоиду, но значительно более узкой.

В заключение рассмотрим частотные зависимости полной нормированной мощности ($\upsilon_0 = 1$), излучаемой диском, и величины его коэффициента осевой концентрации Ω, рис. 10.40. Кривые на рис. 10.40, *а* нормированы к полной мощности, которую излучает диск в бесконечной трубе с жесткими стенками. Как следует из рис. 10.40, *а*, при $ka \geq 2$ пульсирующий 1 и осциллирующий диски 2 превосходят по мощности односторонний диск 3 в два раза. Этого и следовало ожидать, поскольку пульсирующий и осциллирующий диски излучают звук с обеих своих поверхностей, а односторонний только с одной поверхности. Несколько бóльшую мощность, чем односторонний диск, излучает диск 4, поскольку колеблются у него все же обе поверхности, хотя и не с одинаковой эффективностью. Иначе обстоит дело в области $ka \leq 2$. Здесь излучаемая мощность осциллирующего диска стремительно падает и уже при $ka \leq 1,5$ ее уровень оказывается самым

низким. И причина этого, как мы уже говорили выше, обусловлена акустическим коротким замыканием. Что касается пульсирующего и одностороннего дисков, то соотношение их мощностей остается таким же, как и при больших значениях ka.

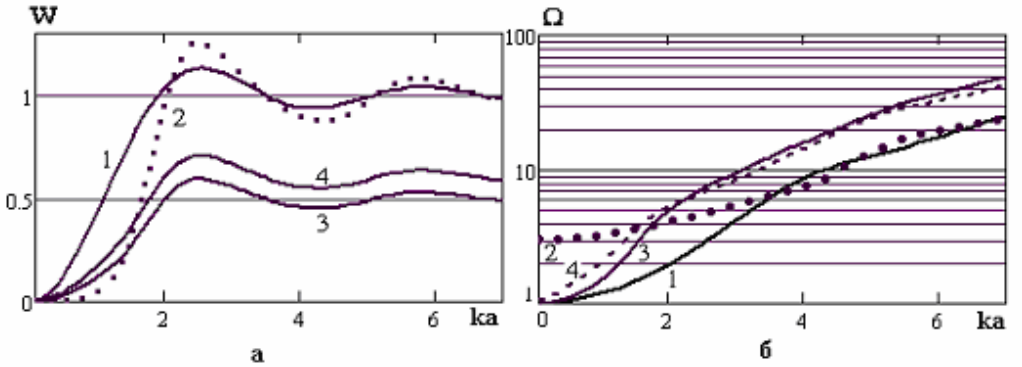


Рис. 10.40. Полная излучаемая диском мощность (а), $\upsilon_0 = 1$ и коэффициент концентрации (б):
1 – пульсирующий диск, 2 – осциллирующий диск, 3 – односторонний диск, 4 – диск при $\xi = 0,45$ и $\alpha = 0,4\pi$

Перейдем к анализу частотной зависимости коэффициента концентрации Ω (рис. 10.40, *б*). Здесь, как и полагается, при $ka \to 0$ коэффициент концентрации осциллирующего диска стремится к трем (убедитесь в этом самостоятельно, см. параграф 7.10), а коэффициент концентрации остальных дисков – к единице. При больших же значениях ka коэффициенты концентрации пульсирующего 1 и осциллирующего 2 дисков растут и становятся практически равными, а коэффициенты концентрации одностороннего диска 3 и диска 4 также становятся равными, но превосходят их ровно в два раза.

10.9. Шумозащитные барьеры

Для последних десятилетий XX и начала XXI века характерна небывалая динамика научно-технического развития. Однако вместе с положительными явлениями этого процесса, к величайшему сожалению, наблюдаются отрицательные последствия. К таким примерам можно отнести и шумовое загрязнение среды, обусловленное, прежде всего, увеличением плотности и скорости потоков транспорта, ростом интенсивности работы различных промышленных механизмов и т.д. Хорошо известно, что действие шума с уровнем, больше 65 дБ, может приводить к полной или частичной потере слуха человека. Вот почему в развитых странах большое внимание уделяется

научным программам, направленным на изучение шумового загрязнения городов и разработку мероприятий по его снижению.

Особенно интересным является метод шумозащиты с помощью *барьеров* (*акустических экранов*), которые размещают между источниками шума и зоной, которую нужно защитить от их действия. Такими зонами могут быть жилые дома, тротуары вблизи транспортных магистралей, рабочие места на производстве. Причина популярности акустических экранов связана с их относительной дешевизной и простотой в использовании. Вместе с тем, оценка эффективности барьеров оказалась непростым делом, поскольку получение достоверных оценок распределения звуковых полей в защитных зонах приводит к необходимости решения соответствующих дифракционных задач в строгой постановке. Дело в том, что в большинстве практических случаев основная часть звуковой энергии транспортных и производственных шумов лежит в области относительно низких частот: это область 50...200Гц (т.е. длина звуковых волн составляет 1,5...6 м). Поскольку реальная высота шумозащитных барьеров, которые строятся рядом с транспортными магистралями, колеблется от 3 до 8 м, то нетрудно убедиться, что их волновой размер будет составлять приблизительно от 0,5 до 5λ. Как мы знаем, при исследовании рассеяния звука на телах, размеры которых сравнимы с длиной звуковой волны, необходимо использовать точные методы при постановке и решении соответствующих задач дифракции. В противном случае результаты оценок рассеянного поля могут оказаться далекими от истины.

В данном параграфе на базе метода частичных областей рассмотрены дифракционные задачи, связанные с акустическими экранами. В качестве результата получены эффективные решения, позволяющие проводить исчерпывающий анализ рассеянных барьерами звуковых полей во всем диапазоне частот, представляющем интерес с практической точки зрения.

Рассмотрим следующую идеализированную физическую модель барьера. Будем считать, что на бесконечной акустически жесткой поверхности, моделирующей поверхность земли, в точке O установлен бесконечный (вдоль направления, перпендикулярного к плоскости рисунка) акустически жесткий тонкий барьер высотой h (рис. 10.41). Справа параллельно барьеру на расстоянии b от него на поверхности земли ($y = 0$) находится линейный гармонический источник звука Q в виде бесконечной пульсирующей нити, моделирующий звук, создаваемый транспортным потоком; буквой M обозначена точка наблюдения. Все полупространство, где может существовать поле, возбуждаемое источником, заполнено идеальной средой плотностью ρ, со скоростью звука c. В дальнейшем будем считать, что этой средой является воздух.

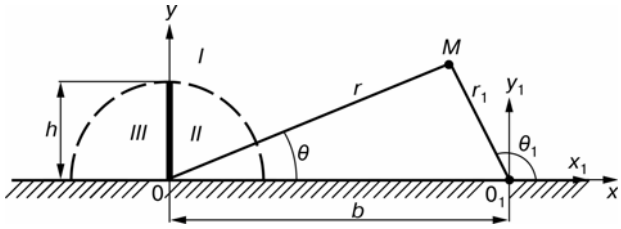


Рис. 10.41. Геометрия задачи

Описанная физическая модель с точки зрения математики эквивалентна плоской задаче, когда звуковая волна не зависит от одной из координат (в нашем случае от координаты, перпендикулярной к плоскости рисунка). Принятые акустические свойства поверхности означают, что нормальная составляющая колебательной скорости звукового поля на них равна нулю. Такая модель, с одной стороны, в общих чертах целиком адекватна ситуациям, встречающимся на практике, а с другой (как будет показано ниже), - позволяет построить аналитическое решение о рассеянии звука на таком препятствии, как барьер.

Для построения решения поставленной задачи введем полярную систему координат $(r,\ \theta)$ с центром в точке O (рис. 10.41). Согласно идее метода частичных областей все пространство существования звукового поля естественным образом разобьем на три области: область I есть внешность полукруга радиусом h, т.е. $r > h$, $0 \le \theta \le \pi$; область II занимает четверть круга радиусом h, т.е. $r < h$, $0 \le \theta \le \pi/2$; область III определяется другой четвертью круга $r < h$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$.

Поместим в точку расположения источника Q центр O_1 второй полярной системы $(r_1,\ \theta_1)$ (рис. 10.41). Поле давления элементарного линейного источника единичной амплитуды определяется как $p_0 = H_0^{(1)}(kr_1)$ (см. (7.133)), где $k = \omega / c$, $\omega = 2\pi f$ — частота. Если $b > h$, то источник звука расположен в области I, а если $b < h$ — то в области II; пусть для определенности $b > h$. Тогда звуковое поле в области I следует записать в виде

$$p_{\mathrm{I}} = H_0^{(1)}(kr_1) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr)\cos(n\theta), \qquad (10.144)$$

где угловые функции $\cos(n\theta)$ выбраны так, что решение автоматически удовлетворяет граничным условиям на жесткой поверхности при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Поскольку поле источника $p_0 = H_0^{(1)}(kr_1)$ представлено в координатах (r_1, θ_1), его нужно записать в координатах (r, θ). Для это-

го можно использовать теорему сложения для цилиндрических функций (см. формулы (10.57)):

$$p_0 = H_0^{(1)}(kr_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n H_n^{(1)}(kb) J_n(kr)\cos(n\theta),$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ при $n > 0$. Понятно, что граничные условия на жесткой поверхности при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ для поля p_0 выполняются. Совокупность произвольных коэффициентов A_n позволяет выполнить условия сопряжения полей на границе раздела областей II и III.

Поле давления в области II запишем в виде

$$p_{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_{2n}(kr)\cos(2n\theta). \tag{10.145}$$

Здесь угловые функции $\cos(2n\theta)$ выбраны в соответствии с граничными условиями на жестких поверхностях плоскости и экрана (при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$). Если выполняется неравенство $b < h$, то поле источника следует представить в виде функции Грина для клина с жесткими поверхностями (см. (9.113) при $\alpha = \pi/2$, $\psi_0 = 0$):

$$G = i\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_{2n}(kr) H_{2n}^{(1)}(kb)\cos(2n\theta), \quad r < b,$$

$$G = i\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_{2n}(kb) H_{2n}^{(1)}(kr)\cos(2n\theta), \quad r > b,$$

и записать в виде слагаемого в правой части формулы (10.126). Последовательность коэффициентов B_n обеспечивает выполнение условий сопряжения полей на границе с областью I.

Аналогично, для области III звуковое поле

$$p_{\text{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_{2n}(kr)\cos\left[2n(\theta - \pi/2)\right]. \tag{10.146}$$

Сформируем систему функциональных уравнений, которая определяет условия непрерывности звукового поля на границах раздела областей I, II, III:

$$p_{\text{I}} = \begin{cases} p_{\text{II}}, & r = h,\ \theta \in [0, \pi/2], \\ p_{\text{III}}, & r = h,\ \theta \in [\pi/2, \pi], \end{cases} \tag{10.147}$$

$$\frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial r} = \frac{\partial p_{\text{II}}}{\partial r}, \quad r = h,\ \theta \in [0, \pi/2], \tag{10.148}$$

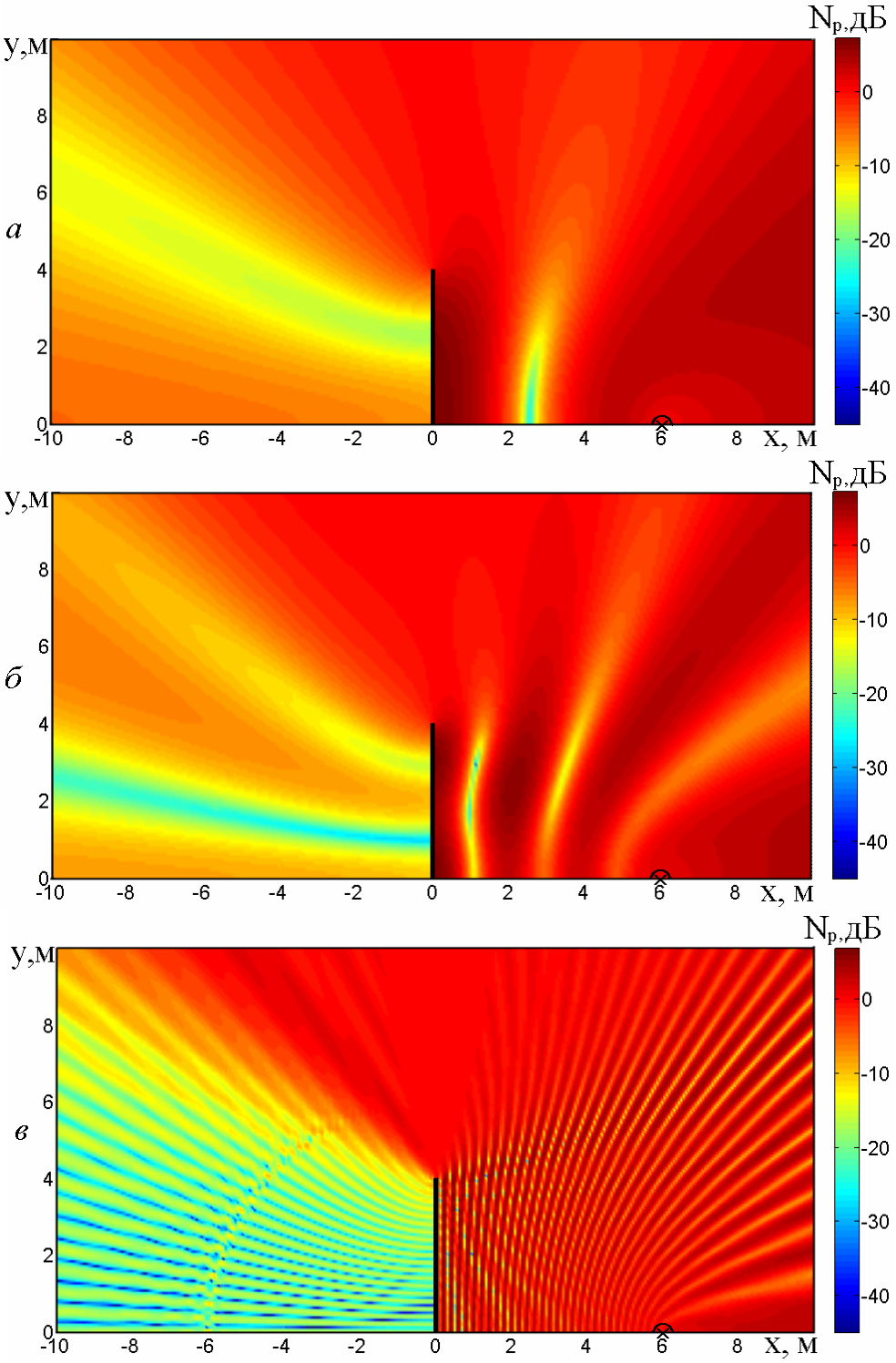
$$\frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial r} = \frac{\partial p_{\text{III}}}{\partial r}, \quad r = h,\ \theta \in [\pi/2, \pi]. \tag{10.149}$$

После подстановки выражений (10.144)—(10.146) в систему (10.147)—(10.149), с учетом ортогональности соответствующих наборов функций, проводим стандартную процедуру алгебраизации функциональных соотношений (10.147)—(10.149), которая приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов A_n, B_n, C_n. Отметим, что когда основной интерес представляют характеристики поля в точках пространства, удаленных от угловых (так и есть в нашей задаче), то, достаточную точность результатов можно обеспечить с помощью метода простой редукции, удерживая в системе определенное количество уравнений. Именно так и будем делать, поскольку нашей целью является анализ звукового поля, рассеянного барьером. Далее, как обычно, исследуется отклонение при выполнении условий сопряжения на границе раздела частичных областей. Опуская этот типичный анализ, отметим, что целиком удовлетворительные для практики результаты можно получить, если общее количество неизвестных комплексных коэффициентов составляет приблизительно 120-240.

Рассмотрим пространственное распределение уровня амплитуды звукового давления N_p как наглядной и информативной характеристики поля. Эта характеристика определяется таким образом: $N_p = 20\lg(|p|/|p_0|)$, где давление p определяется одной из формул (10.144)—(10.146) в зависимости от положения точки наблюдения M, а p_0 — давление источника в точке наблюдения при отсутствии экрана. На рис. 10.42 приведены данные, рассчитанные для разных частот при высоте барьера $h = 4$ м и расстоянии от источника до барьера $b = 6$ м.

Оттенки от черного до белого цветов на рис. 10.42 позволяют представить интерференционную картину звукового поля, которая образуется вследствие суперпозиции волны p_0 от источника и волн, рассеянных барьером. Как видим, с ростом частоты увеличивается общая глубина звуковой тени за барьером, этого и следовало ожидать, учитывая рост волновой высоты барьера. Также с ростом частоты возрастает неравномерность поля за и перед барьером. Построенное решение дает возможность провести оценку шумозащитных свойств барьера для широкого диапазона частот и при разных положениях источника относительно барьера.

Рис. 10.42. Распределение звукового поля вокруг четырехметрового барьера (рисунок размещен на стр. 683), $b = 6$ м:
а — $f = 34$ Гц, *б* — $f = 85$ Гц, *в* — $f = 850$ Гц


Nр,дБ
y,м
а
б
в
x, м
0
-10
-20
-30
-40
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

10.10. Излучение звука системой соосных пьезокерамических колец

В классической постановке задачи об излучении звука считают заданной колебательную скорость на поверхности излучающих тел [31, 41]. Такой подход является в значительной мере оправданным, когда рассматриваются одиночные источники звука. Однако, при изучении излучающих систем, состоящих из нескольких излучателей с автономными источниками питания, важными являются вопросы акустического взаимодействия (в параграфе 7.11 мы рассматривали этот вопрос на примере простейшей ситуации взаимодействия пары точечных источников).

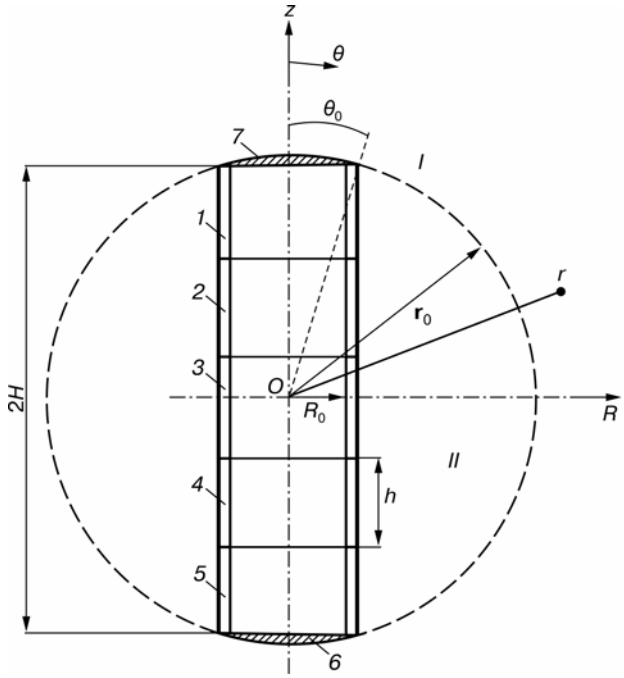


Рис. 10.43. Пример системы соосных колец:
1-5 — кольца, *6*, *7* — экраны

Для исследования свойств одной из практически интересных систем такого типа рассмотрим осесимметричную задачу об излучении звука соосным набором тонких упругих цилиндрических колец, осуществляющих только радиальные колебания (рис. 10.43). Будем считать, что торцы этой конструкции закрыты акустически жесткими экранами, во внутреннем объеме — вакуум, щели между кольцами отсутствуют, однако на их взаимные смещения ограничения не накладываются. На электроды каждого кольца подается электрическое

напряжение, которое гармонически изменяется во времени с частотой ω и в общем случае различается как по амплитуде, так и по фазе. Данная система колец находится в идеальной сжимаемой среде с плотностью ρ и скоростью звука c.

В общих чертах опишем схему построения решения поставленной задачи с использованием метода частичных областей. Для этого введем сферическую (r, θ) и цилиндрическую (R, z) системы координат с общим центром O, а всю область существования звукового поля разделим на две области (рис. 10.43):

I — $r \geq r_0$, $0 \leq \theta \leq \pi$; II — $r \leq r_0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$, $R \geq R_0$, $|z| \leq H$.

Звуковое давление в области I, которая представляет собой внешность сферы радиуса r_0, запишем в виде (см. п. 7.12.2):

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta), \tag{10.150}$$

где $k = \omega / c$. Давление в области II представим в виде суммы двух рядов:

$$p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_0^{(1)}(k_n R)\cos(\alpha_n z) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_{q_n}(kr) T_{q_n}(\cos\theta), \tag{10.151}$$

где α_n определяется из условия жесткой поверхности при $z = \pm H$ (удобно выбрать именно такое условие, ведь экраны *6,7* на рис. 10.43 — акустически жесткие), т.е. $\alpha_n = n\pi/H$. Выбор функций $\cos(\alpha_n z)$ в формуле (10.151) обусловлен симметрией задачи относительно плоскости $z = 0$, поэтому достаточно использовать только четные функции. Величина $k_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, если $k \geq \alpha_n$ и $k_n = i\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}$, если $k \leq \alpha_n$. Если k_n является мнимой величиной, то $H_0^{(1)}(k_n R)$ определяются через соответствующие модифицированные функции Бесселя [49, 52]. Сферические функции Бесселя первого рода нецелого порядка обозначены $j_{q_n}(kr)$ [49, 52]. В выражении (10.151) введено еще такое обозначение:

$$T_{q_n}(\cos\theta) = P_{q_n}(\cos\theta) + L_n Q_{q_n}(\cos\theta),$$

где $P_{q_n}(\cos\theta)$, $Q_{q_n}(\cos\theta)$ — функции Лежандра первого и второго рода. Величины q_n и L_n для случая жестких границ определяются из системы уравнений: $dT_{q_n}/d\theta = 0$ при $\theta = \theta_0$ и $\theta = \pi - \theta_0$.

Выражение (10.151) является общим решением уравнения Гельмгольца в области II, которая ограничена, с одной стороны, цилиндрической поверхностью $R = R_0$, $|z| \leq H$, а с другой — поверхностью сферического пояса $r = r_0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$. Действительно, первый ряд в

выражении (10.151) благодаря ортогональности функций $\cos(\alpha_n z)$, $n = 0,1,2,\ldots$,на отрезке $|z| \le H$ гарантирует удовлетворение любых граничных условий на цилиндрической поверхности области II. Второй ряд благодаря системе функций $T_{q_n}(\cos\theta)$ имеет аналогичные свойства на поверхности сферического пояса, разделяющего области II и III.

При определении радиальных колебаний тонкого пьезокерамического кольца полагаем, что:

1) толщина кольца δ значительно меньше, чем радиус R_0 его срединной поверхности, что позволяет пренебречь изменением механических и электрических величин в радиальном направлении и, следовательно, рассматривать колебание срединной поверхности кольца;

2) высота кольца h настолько меньше его радиуса R_0, что можно пренебречь энергией деформаций изгиба и считать, что в пределах одного кольца смещение его срединной поверхности не изменяется вдоль координаты z.

Тогда, определяя гармоническую зависимость напряженности электрического поля, можно, как это сделано в работе [*], перейти от дифференциального уравнения колебаний тонких колец к уравнению вида (считаем источник электрического напряжения идеальным):

$$F_j + \upsilon_j Z_j = N_j U_j, \tag{10.152}$$

где $j = 1, 2, \ldots, M$—номер кольца, υ_j — колебательная скорость j-го кольца, U_j — электрическое напряжение на j-м кольце, $F_j = \int\limits_{S_j} p_2 dS$ — сила, действующая на внешнюю поверхность j-го кольца, Z_j — собственное механическое сопротивление кольца, N_j — коэффициент электромеханической трансформации. С учетом сил вязкого трения в материале кольца запишем соотношения:

$$Z_j = -i\omega m_j \left(1 - \frac{\omega_{0j}^2}{\omega^2} + i\frac{\omega_{0j}}{\omega Q_j}\right), \quad N_j = \frac{2\pi h_j d_{31}}{s_{11}^E}, \tag{10.153}$$

где d_{31}, s_{11}^E — постоянные пьезокерамического материала [46], m_j, h_j, Q_j— масса, высота и механическая добротность j-го кольца, ω_{0j}— собственная частота j-го кольца в вакууме.

Сформулируем систему функциональных уравнений, которая объединяет условия непрерывности поля на границах раздела областей:

---

[*] Басовский В.Г. Излучение звука конечной решеткой из открытых пьезокерамических колец // Акуст. вісн. — 1998. — **1**, № 2. — С. 3—20.

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = \begin{cases} 0, & r = r_0,\ 0 \le \theta \le \theta_0,\ \pi - \theta_0 \le \theta \le \pi, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial r}, & r = r_0,\ \theta_0 \le \theta \le \pi - \theta_0, \end{cases} \tag{10.154}$$

$$p_1 = p_2, \quad r = r_0,\ \theta_0 \le \theta \le \pi - \theta_0, \tag{10.155}$$

граничные условия на поверхности j-го (j = 1, 2 ,..., M) кольца

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_2}{\partial R} = \upsilon_j, \quad R = R_0 \tag{10.156}$$

и уравнение колебаний j-го (j = 1, 2, ..., M) кольца (10.152).

Далее, о чем уже не раз говорилось, определенная система функциональных уравнений превращается в систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных A_n, B_n, C_n, υ_j, численное решение которой дает возможность определить параметры акустического поля и колебательные скорости колец.

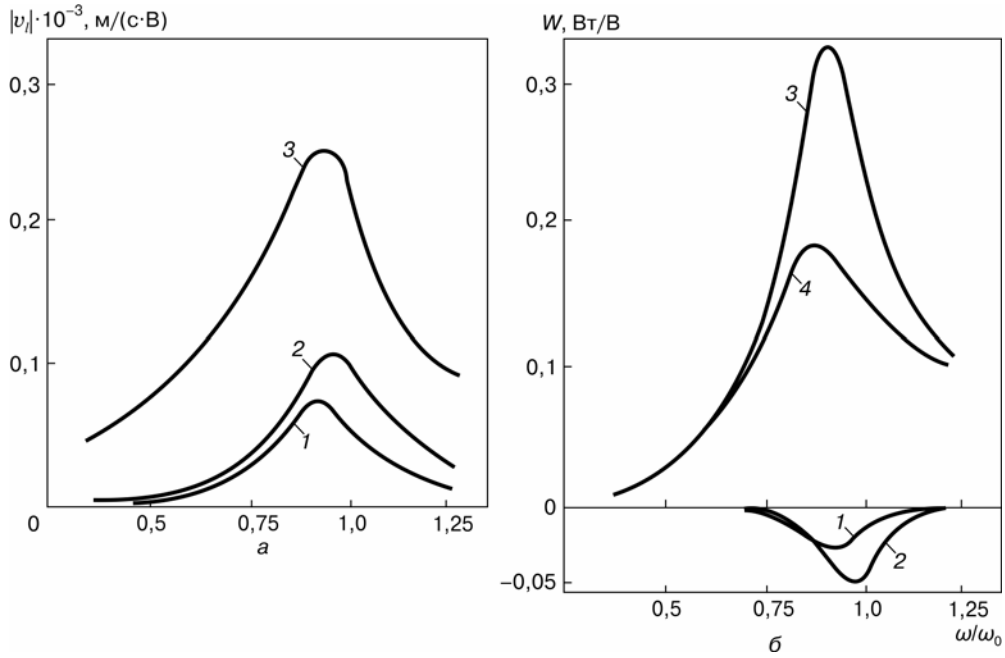


Рис. 10.44. Частотные зависимости модулей колебательных скоростей колец (*а*) и мощностей (*б*) в ближнем (кривые *1—3*) и дальнем (кривая *4*) полях; (номера кривых соответствуют номерам колец)

Расчеты были проведены для набора из пяти идентичных колец, изготовленных из пьезокерамики ЦТБС-3; величины H/R_0, h/R_0, δ/R_0, Q, ρc были равны 1,67; 0,67; 0,11; 21,0; 1,5 · 10^6 кг/(м^{2}с), соответственно. Сначала рассмотрим случай, когда электрическое напряжение

подается только на среднее кольцо, т.е. $U_3 = U_0$; $U_j = 0$, $j = 1,2,4,5$. На рис. 10.44 представлены частотные зависимости модулей колебательной скорости и мощности излучения колец, определенные по отношению к напряжению $U_0 = 1$ В. По сути эти характеристики определяют чувствительность данной антенны в режиме излучения. Заметим, что в соответствии с симметрией задачи (рис. 10.43) относительно плоскости $z = 0$ справедливы равенства $\upsilon_1 = \upsilon_5$, $\upsilon_2 = \upsilon_4$, поэтому количественные данные на рис. 10.44 приведены для первых трех колец.

Общий ход кривых на рис. 10.44 имеет типичный вид, характерный для большинства механических систем, которые колеблются в жидкости. Однако более важным и интересным является тот факт, что колебания среднего ("активного") кольца в окружающей среде вызывают колебания остальных ("пассивных") колец (номера кривых на рис. 10.44 соответствуют номерам колец).

Этот интересный факт указывает на проявление эффекта акустического взаимодействия, вследствие чего "пассивные" кольца начинают поглощать энергию из ближнего поля, которая излучается "активным" кольцом (см. кривые *1*, *2*, рис. 10.44, *б*). Как следствие этих сложных процессов, возникает значительная разница между акустической энергией в дальнем поле (кривая *4*) и энергией на поверхности "активного" кольца (кривая *3*, рис. 10.44, *б*). (На рис. 10.44, *б* энергия излучения имеет положительный знак, а поглощение — отрицательный.) Проведенный анализ позволяет убедиться в том, что различные конструктивные элементы, расположенные вблизи источников звука, могут существенным образом влиять на энергетическую эффективность последних.

Теперь сделаем "активными" все кольца, причем подадим на все кольца одинаковый электрический сигнал. На рис. 10.45 представлены частотные зависимости модуля и фазы колебательных скоростей колец (рис. 10.45, *а*) и их излучаемых мощностей (рис. 10.45, *б*). В приведенных зависимостях естественно выделить три зоны, а именно, первую (низкочастотную) $\omega / \omega_0 < 0{,}6$, вторую (резонансную) $0{,}6 < \omega / \omega_0 < 1{,}1$ и третью (высокочастотную) $\omega / \omega_0 > 1{,}1$. Из рисунка следует, что в первой зоне колебательная скорость колец и их излучаемая мощность достаточно быстро уменьшаются с понижением частоты и, что самое главное, эти параметры становятся одинаковыми для всех колец. Этот факт не является неожиданным, он связан с тем, что с понижением частоты быстро возрастает механическое сопротивление колец (в этой зоне оно имеет упругий характер), в то время как сопротивление излучения падает, поэтому роль взаимодействия колец через поле незначительна, и колебательные скорости полностью определяются собственным механическим сопротивлением колец. На высоких частотах (в третьей зоне) уменьшение колебатель-

ных скоростей и мощностей, но уже с ростом частоты, также обусловлено увеличениям собственного сопротивления колец, которое в этой зоне имеет инерционный характер. Здесь также наблюдается тенденция к выравниванию скоростей и мощностей колец, хотя и не так быстро, как в первой зоне, поскольку действительная часть сопротивления излучения возрастает с частотой, и акустическое взаимодействие играет более весомую роль, чем в первой зоне.

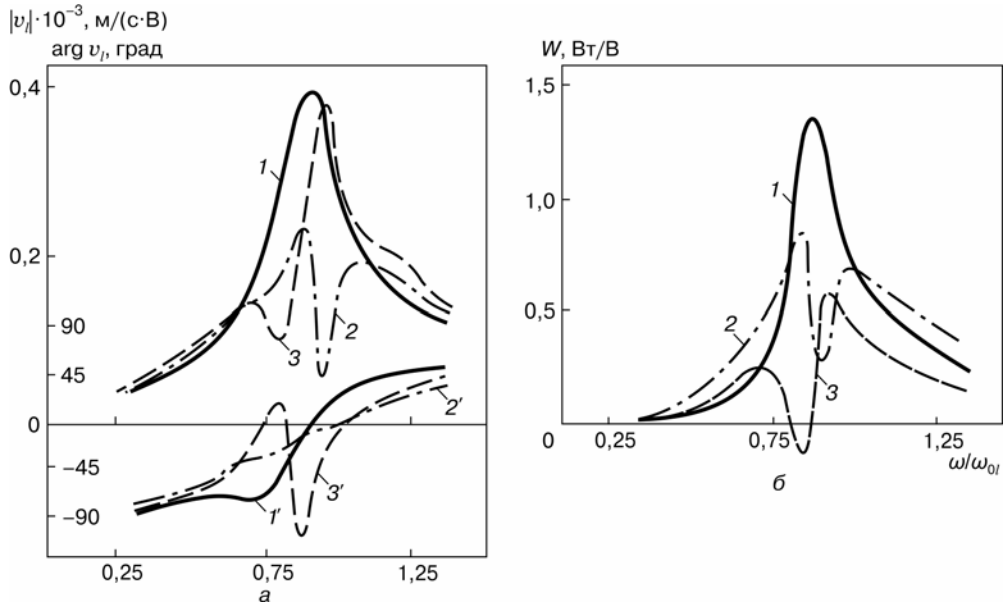


Рис. 10.45. Частотные зависимости модуля и фазы колебательных скоростей колец (*а*) и мощностей в ближнем поле (*б*); (номера кривых соответствуют номерам колец)

Рассмотрим резонансную зону, где собственные механические сопротивления колец сравнимы с сопротивлением излучения, и важную роль начинают играть реакция среды и обмен энергией между кольцами через поле. Действительно, в этой зоне характеристики каждого кольца существенно отличаются от аналогичных характеристик других колец. Например, модули колебательных скоростей на одной и той же частоте могут различаться в 5...8 раз; значения частот, где фазовые кривые приобретает нулевое значение, различны для всех колец. Кроме того, фазовая кривая третьего (центрального) кольца три раза пересекает ось частот, что указывает на многократное изменение полного механического сопротивления кольца (с упругого на инерционный). Поскольку частоты, на которых фазовая кривая пересекает ось абсцисс, есть собственные частоты системы “ кольцо-окружающая среда”, можно утверждать, что акусти-

ческое взаимодействие приводит к расширению и обогащению спектра собственных частот данного источника звука. Расчеты показывают, что увеличение добротности колец и уменьшение их толщины (при сохранении остальных параметров) приводит к увеличению количества точек, где фазовые кривые приобретают нулевые значения, и для других колец.

Теперь обратим внимание на один интересный эффект, который на первый взгляд кажется парадоксальным. Как видно, в резонансной зоне в окрестности частоты $\omega / \omega_0 = 0{,}85$ фаза скорости центральной оболочки становится меньше –90°, т.е. вектор скорости переходит в левую полуплоскость комплексной плоскости. Это означает, что действительная часть полного механического импеданса становится отрицательной, и оболочка из излучателя энергии превращается в потребителя (поглотителя) энергии поля. Этот факт хорошо подтверждается ходом частотной зависимости излучаемой мощности (на указанной частоте мощность приобретает отрицательное значение). Появление такого эффекта вызвано сильным взаимодействием крайних и центрального колец. Это становится более понятным, если учесть, что на частоте $\omega / \omega_0 = 0{,}85$ волновая высота всего набора колец $2H/\lambda = 1{,}0$ и, соответственно, расстояние между центральным кольцом и крайними кольцами становится равным половине длины волны в окружающей среде. Если, кроме того, учесть, что суммарная мощность двух крайних колец превышает мощность центрального кольца, то станет очевидным появление возможности не только затормозить колебание центрального кольца, но и заставить его колебаться с фазой, меньшей, чем $-\pi/2$. Расчеты показывают, что при увеличении добротности колец до 80 поглощение энергии из среды начинает наблюдаться также у второго и четвертого колец, но на более высокой частоте $\omega / \omega_0 = 0{,}93$.

Чтобы более наглядно представить суть волновых процессов, которые происходят в резонансной области частот, исследовали ближнее поле набора колец. На рис. 10.46, *а* представлено ближнее поле вектора интенсивности **I** на частоте $\omega / \omega_0 = 1{,}0$, когда эффект взаимодействия колец сравнительно мал и колебательные скорости колец несущественно различаются между собой как по модулю, так и по фазе. Напомним, что благодаря симметрии задачи относительно оси Oz и плоскости $z = 0$, закономерности поведения потока излучаемой звуковой энергии достаточно рассмотреть лишь в одной четверти плоскости ROz. Как видим, поток энергии ориентирован строго в радиальном направлении. Дополнительный анализ ближнего поля звукового давления показал, что на этой частоте модуль давления и его фаза изменяются незначительно вдоль поверхности колец. Можно лишь отметить, что относительно небольшой максимум давления наблюдается

на поверхности набора колец в зоне между первым и вторым кольцами (и, соответственно, между четвертым и пятым).

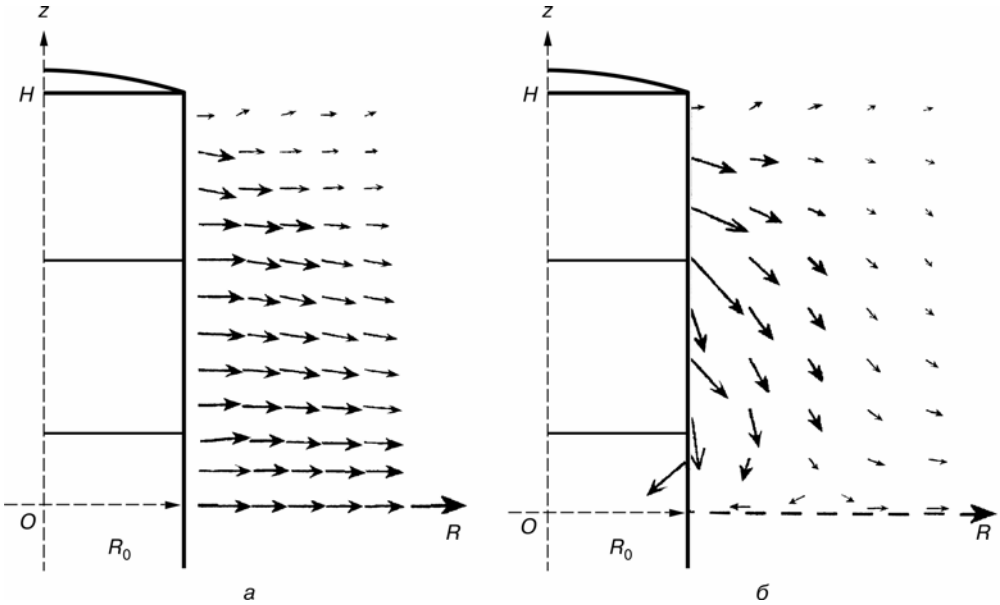


Рис. 10.46. Пример ближнего поля вектора интенсивности:
а — ω / ω_0 = 1,0; *б* — ω / ω_0 = 0,825

Совсем другая ситуация наблюдается, когда взаимодействие колец значительное (например, на частоте ω / ω_0 = 0,825, см. рис. 10.45). Именно для этой частоты на рис. 10.46, *б* показано поле вектора интенсивности звука в ближней зоне колец. Здесь хорошо видно, как поток звуковой энергии излучается первым и вторым кольцами. Далее этот поток разделяется на два потока: один распространяется в среде, а второй вливается в центральное кольцо. Таким образом, как мы уже отмечали выше, центральное кольцо поглощает из среды энергию, которую излучают другие кольца. Анализ ближнего поля звукового давления показал, что в данной ситуации на излучающей поверхности колец наблюдается три пучности давления: по одной в зонах между первым и вторым, и между четвертым и пятым кольцами, а третья - вблизи третьего (центрального) кольца. Эта пучность имеет фазу, противоположную первым двум пучностям. Отметим, что при создании и эксплуатации антенн необходимо избегать подобных режимов работы. Дело в том, что такие режимы приводят к значительным перегрузкам, как электроакустических преобразователей, так и питающих их электрических генераторов и, как следствие, к возможным их разрушениям.

Мы рассматривали возбуждение электроакустических преобразователей с помощью монохроматических гармонических сигналов. Используя терминологию, принятую в акустической технике, говорят, что такие антенны и преобразователи работают в непрерывном режиме. Однако на практике во многих случаях основным режимом работы преобразователей и антенн является импульсный. В частности, так работают антенны акустических и гидроакустических локаторов различного назначения. Кроме того, как правило, измерение (тестирование) акустических характеристик антенн и преобразователей выполняется в помещениях и ограниченных искусственных или естественных водоемах, что практически всегда обусловливает использование импульсного режима [5, 21].

Принимая во внимание вышесказанное, возникают два вопроса, ответы на которые имеют важное теоретическое и практическое значение.

- Какие особенности привносит импульсное возбуждение акустических антенн в колебания ее преобразователей и излучаемое ими поле?
- Будут ли различаться (и насколько) акустические характеристики, измеренные в импульсном и непрерывном режимах работы антенны?

Попробуем ответить на эти вопросы на примере нашей задачи об излучении звука набором пьезокерамических колец. Пусть на электроды колец подается одинаковое электрическое напряжение в виде последовательности радиоимпульсов:

$$U_i(t) = \begin{cases} U_0 \sin(\omega t), & 0 \le t \le \tau_i, \\ 0, & \tau_i \le t \le T_i, \end{cases} \qquad (10.157)$$

где U_0 — амплитуда, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, здесь f — частота и T — период несущей, τ_i и T_i — продолжительность и период следования импульсов. Тогда скважность импульсной последовательности $q = T_i / \tau_i$, а количество периодов несущей в импульсе $N = \tau_i / T$.

В дальнейшем, как это было описано в параграфе 5.15, строим решение задачи для импульсного возбуждения пьезокерамических колец. Перейдем к анализу конкретных результатов расчета. Сначала рассмотрим ситуацию, когда возбуждается только центральное кольцо, а другие полностью заторможены и, следовательно, акустическое взаимодействие между кольцами отсутствует. Пусть на центральное кольцо подается электрический импульс (10.157), для которого $N = 10$ и $q = 3$. При этом рассмотрим два характерных значения частоты, наиболее интересных с практической точки зрения: значение несущей частоты совпадает с частотой резонанса кольца в водной среде

(в данном случае — ω / ω_0 = 0,875); частота несущей ниже резонансной области частот кольца (в данном случае мы приняли ω / ω_0 = 0,5).

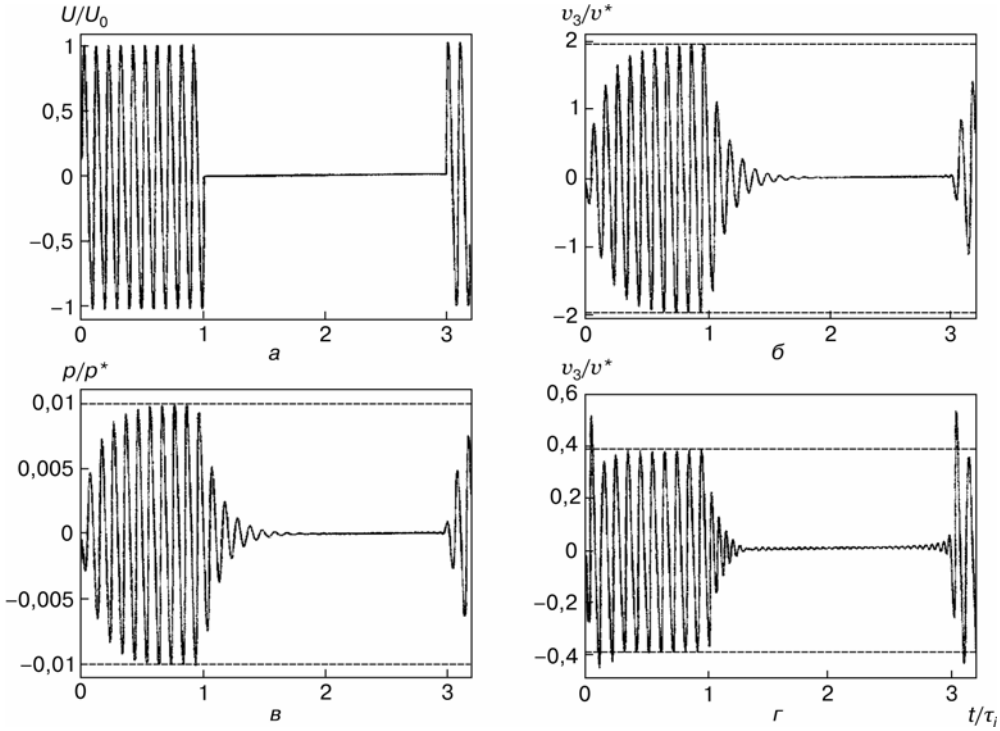


Рис. 10.47. Временные диаграммы системы (возбуждается центральное кольцо, другие заторможены):

а — электрический импульс; *б*, *в* — колебательная скорость центрального кольца и давление в дальнем поле для ω / ω_0 = 0,875; *г* — колебательная скорость центрального кольца для ω / ω_0 = 0,5

На рис. 10.47 представлены временные зависимости исходного электрического сигнала (10.157) и отклика системы (возбуждается только центральное кольцо, другие заторможены), причем вдоль оси абсцисс отложено нормированное время t/τ_i (на графиках показан отрезок времени, немного больший, чем один период следования импульса). На рис. 10.47, *б*, *в* показаны графики колебательной скорости центрального кольца $\upsilon_3(t)/\upsilon^*$ и давления $p\left(t, r, \theta = 90^\circ\right)/p^*$, в дальнем поле в плоскости $z = 0$, когда значение несущей частоты ω / ω_0 = 0,875 (здесь υ^* и p^* — нормирующие постоянные величины). Оба графика иллюстрируют типичные искажения радиоимпульса при прохождении его сквозь механическую (или электрическую) резонансную систему. Действительно, на протяжении приблизительно

первых шести периодов несущей частоты происходит нарастание сигнала по экспоненте, и система асимптотически приближается к стабильному (непрерывному) режиму работы. Здесь и ниже штриховыми горизонтальными линиями указаны уровни колебательной скорости и давления, вычисленные в непрерывном режиме работы антенны. После прекращения действия импульса возбуждения скорость и давление уменьшаются по экспоненциальному закону.

Интересно отметить, что на частотах, ниже резонансной зоны частот кольца, переходные процессы занимают очень малые отрезки времени, и в целом формы импульсов скорости кольца (см. рис. 10.47, *г*) и давления в дальнем поле мало отличаются от формы импульса исходного электрического сигнала на рис. 10.47, *а*. Этого и следовало ожидать, поскольку передаточные функции антенны по скорости и давлению ниже зоны резонанса кольца слабо зависят от частоты (рис. 10.43, 10.44). Вместе с тем в начале и в конце импульса могут наблюдаться короткие резкие “броски” амплитуды колебательной скорости, которые могут отрицательно влиять на эксплуатационную прочность реальных антенн и преобразователей.

Совсем иная ситуация наблюдается, когда в формировании поля принимают участие все кольца и между ними происходит сильное акустическое взаимодействие. Рассмотрим рис. 10.48, а-*в*, на котором представлены графики отклика системы для ситуации, которая соответствует максимуму мощности излучения. Отметим, что указать резонансную частоту антенны нельзя, поскольку при совместной работе колец каждое из них имеет свою резонансную частоту (рис. 10.45). Как видим, акустическое взаимодействие приводит к тому, что формы импульсов колебательных скоростей колец различаются между собой и существенно отличаются от формы исходного электрического импульса. Кроме того, формы импульсов очень далеки от классической формы импульса скорости в случае излучения одним кольцом (см. рис. 10.47, *б*). Законы нарастания и спадания импульса оказываются разными и отличными от экспоненциального закона.

Еще одной характерной особенностью являются сложные и отличные друг от друга по форме колебания колец после прекращения действия импульса возбуждения, причем практически на всем сравнительно большом межимпульсном временном интервале. В акустике такое явление называют *реверберацией* (от латинского слова *reverbero* — отражаю). Отметим, что в архитектурной акустике [31, 34] это явление обусловлено многократным отражением звуковой энергии от стен помещения, в гидроакустике [20, 46] — отражением от пузырьков воздуха в воде, от морского дна.

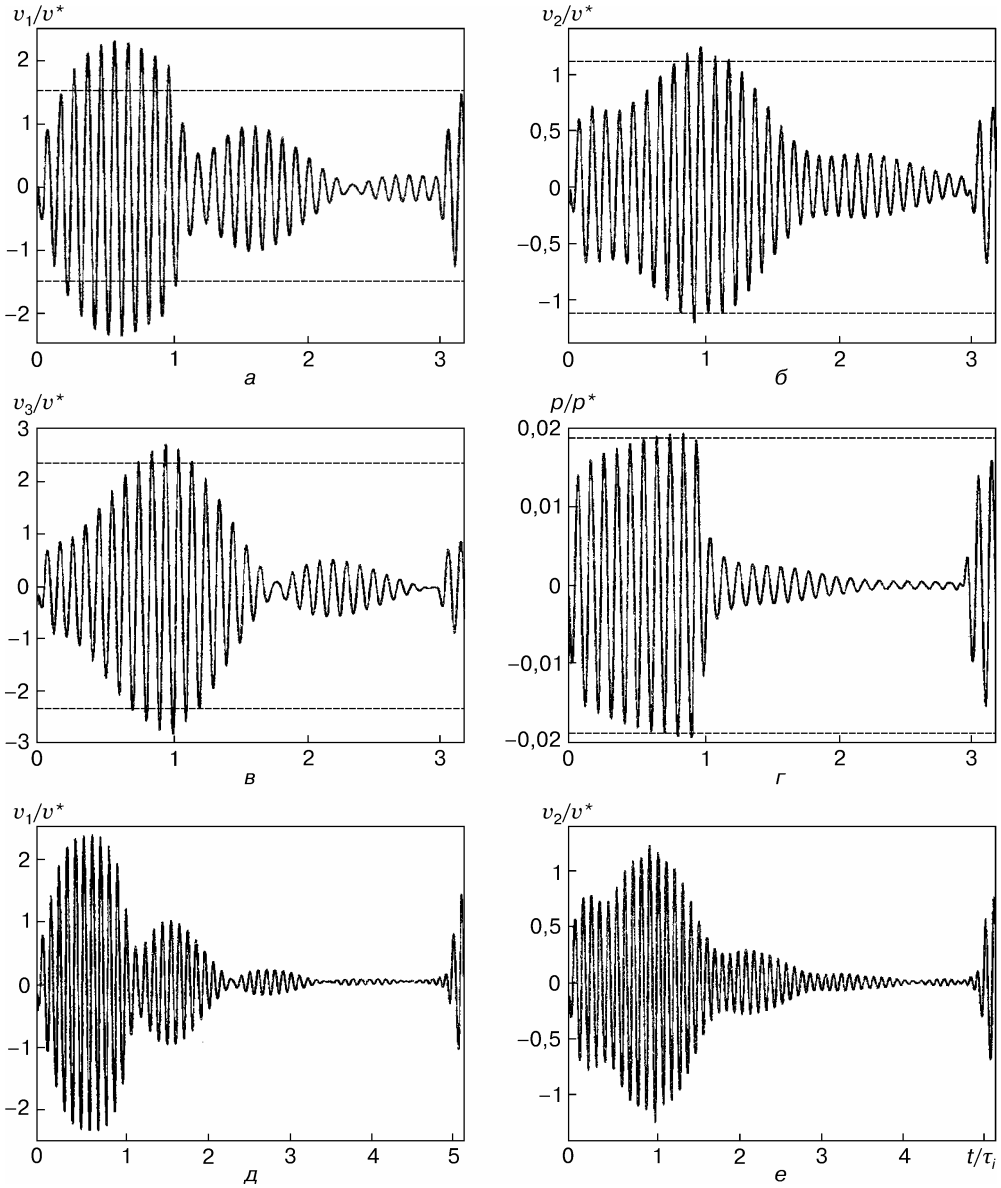


Рис. 10.48. Временные диаграммы системы (возбуждаются все кольца на частоте $\omega / \omega_0 = 0{,}875$): *а-в* — колебательные скорости колец при $q = 3$; *г* — давление в дальнем поле в плоскости $z = 0$ при $q = 3$; *д*, *е* — колебательные скорости первого и второго колец при $q = 5$

В нашем случае реверберация вызвана многократным обменом звуковой энергией между кольцами в окружающей среде. Чтобы иметь более полную картину и выяснить, как долго может происходить процесс реверберации после прекращения действия электрического импульса возбуждения, на рис. 10.48, *д*, *е* приведены колеба-

тельные скорости первого и второго колец при скважности $q = 5$. Хорошо видно, что процесс реверберации длится достаточно долго (на протяжении почти $3\tau_i$), экспоненциально затухая.

Следует обратить внимание и на то обстоятельство, что амплитуда колебаний ближайших к торцевым экранам колец почти в 1,5 раза превышает амплитуду в случае непрерывного режима работы антенны. Поэтому, игнорирование этого явления, а также, указанных выше “бросков” амплитуды колебательной скорости колец, при проектировании антенн может привести к недопустимым усилиям в растяжении пьезокерамического материала колец и, как следствие, к разрушению колец в процессе эксплуатации.

10.11. Задачи

10.1. Определите энергетические коэффициенты отражения и прохождения нулевой моды через изгиб волновода, представленного на рис. 10.7, *б*, при условии, что $h_1 << \lambda$ і $h_2 << \lambda$. Границы волновода - акустически жесткие.

Указания. При таких условиях следует считать, что в волноводе присутствующая только нулевая мода (плоская волна). Вообще, ответ на поставленный в задаче вопрос не зависит от угла изгиба волновода. Ответ будет таким и для составного волновода (рис. 10.1). Это обусловлено тем, что при h_1, $h_2 << \lambda$, среда в окрестности изгиба волновода (рис. 10.7) или стыка волноводов (рис. 10.1) ведет себя практически как несжимаемая жидкость. В результате этого конфигурация “стыковой зоны”, с точки зрения прохождения звука через нее, не имеет практического значения. Итак, можно записать приближенные условия сопряжения полей на границе стыка как равенство давлений и равенство объемных скоростей (напомним, что объемная скорость - это произведение колебательной скорости на площадь сечения волновода).

Ответ: $W^{(0)} = \dfrac{4h_2/h_1}{\left(1+h_2/h_1\right)^2}$, $V^{(0)} = \left(\dfrac{1-h_2/h_1}{1+h_2/h_1}\right)^2$.

10.2. Объясните физический механизм для двух примеров практического применения эффекта, заключающегося в изменении структуры звукового поля в волноводе с изгибом, которые описаны в конце п. 10.6.1.

10.3. С помощью метода частичных областей постройте решение задачи о распространении звука в волноводе с ответвлением (рис. 10.14).

10.4. Определите энергетические коэффициенты отражения и прохождения плоской волны (нулевая мода) при ее распространении в

волноводе с ответвлением (рис. 10.14) при условии, что $h_1 << \lambda$, $h_2 << \lambda$. Границы волновода акустически жесткие. Обратите внимание на указания к задаче 10.1.

Ответ: $V^{(0)} = \left(\dfrac{h_2/h_1}{2+h_2/h_1}\right)^2$, $W^{(0)} = \left(\dfrac{2}{2+h_2/h_1}\right)^2$, $W_y^{(0)} = \dfrac{h_2}{h_1}W^{(0)}$.

10.5. Пусть в клинообразном объекте на рис. 10.23 отсутствует дуга *AB*, т.е. стороны клина не замкнуты. На основе метода частичных областей постройте решение задачи о рассеянии плоской волны на таком объекте, если угол падения волны $\theta_0 = 0°$ или $\theta_0 = 180°$.

Ответ: поскольку дуга *AB* (рис. 10.23) отсутствует, то естественно возникает третья частичная область: $0 \le r \le a$, $|\theta| \le \theta_1$. При заданных направлениях падения волны задача является симметричной относительно оси *Ox*. В связи с этим в формуле (10.95) для поля в области I исчезает ряд с коэффициентами B_n, и поле давления в области II приобретает вид

$$p_{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_{\alpha_n}(kr)\cos(\alpha_n(\pi-\theta)),$$

где $\alpha_n = n\pi / (\pi - \theta_1)$. Поле в области III записывается аналогично:

$$p_{\text{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_{\gamma_n}(kr)\cos(\gamma_n\theta),$$

где $\gamma_n = n\pi / \theta_1$. Условия сопряжения звуковых полей на границах частичных областей можно представить двумя способами (запишите самостоятельно).

10.6. Рассмотреть задачу 10.5 для случая, когда стороны клинообразного объекта (рис. 10.23) замкнуты хордой *AB*, представляющей собой жесткую поверхность.

Ответ: в этом случае область III образована хордой *AB* и дугой *AB*. Поэтому поле в области III нужно представить в виде суперпозиции цилиндрических и плоских волн:

$$p_{\text{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_{\gamma_n}(kr)\cos(\gamma_n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(\beta_n y)\exp(ik_n(x-x_0)),$$

где $\beta_n = n\pi/h$, $h = a\sin\theta_1$, $x_0 = a\cos\theta_1$, $k_n = \sqrt{k^2-\beta_n^2}$, $k = \omega/c$. К системе уравнений сопряжения полей на границах частичных областей нужно добавить граничное условие на жесткой поверхности *AB*: $\dfrac{\partial p_{\text{III}}}{\partial x} = 0$ при $x = x_0$, $|y| \le h$.

РАЗДЕЛ 11

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

26 февраля 1665 г.

...

В то время, как я был вынужден оставаться в постели в течение нескольких дней, я наблюдал за двумя часами в моей мастерской и заметил удивительный эффект, о котором ранее даже не думал. Двое часов, висящих рядом на стене на расстоянии одного или двух футов друг от друга, поддерживали согласованность хода с такой высокой точностью, что их маятники всегда качались вместе, без отклонений. Наблюдая это с восхищением в течение некоторого времени, я, наконец, пришел к выводу, что это происходит вследствие некой симпатии: когда я сообщал маятникам разный ход, то обнаруживал, что через полчаса они всегда возвращались к синхронизму. И поддерживали его до тех пор, пока я не нарушал их ход...

Из письма Христиана Гюйгенса к отцу [40, с. 442]

11.1. Линейные и нелинейные математические модели

Понятия "*линейность*" и "*нелинейность*" имеют не физическое, а математическое происхождение. Однородное линейное уравнение (алгебраическое, дифференциальное, интегральное) можно записать в символьном виде $Lu = 0$, где L — линейный оператор, а u — искомая функция. Свойство линейности означает, что $L(u + v) = Lu + Lv$, $L(\alpha u) = \alpha Lu$, где α — постоянная.

В своих лекциях Фейнман высказал такую мысль [56, вып.2, с. 422]: "Линейные уравнения очень важны. Они *настолько* важны, что физики и инженеры, пожалуй, половину своего времени тратят на решение линейных уравнений". Действительно, существует большое количество линейных математических моделей в самых разных областях науки. Естественно возникают такие вопросы: почему линейные модели механики, оптики, электродинамики сыграли ключевую роль в становлении современного естествознания; в чем причина эффективности линейных моделей.

В качестве ответа на эти вопросы продолжим далее цитировать Фейнмана: "...главная причина заключается в том, что *основные законы физики часто линейны.* ... Если мы поняли линейное уравнение, мы можем в принципе понимать очень многие вещи".

Итак, линейные уравнения адекватно отражают разные явления природы, т.е. при определенных допущениях (например, малые амплитуды колебаний) использование линейных уравнений целиком оправдано - пренебрежение нелинейными членами не изменяет природу самого решения. Популярность линейных уравнений связана также с наличием эффективного математического аппарата, который активно развивался на протяжении последних двухсот лет.

Характерным свойством линейных систем является *принцип суперпозиции*: если u_1 и u_2 — решения уравнения $Lu = 0$, то их линейная комбинация $\alpha u_1 + \beta u_2$ (α и β — постоянные) также будет решением. Действительно, если $Lu_1 = 0$, $Lu_2 = 0$, то $L(\alpha u_1 + \beta u_2) = L(\alpha u_1) + L(\beta u_2) = \alpha Lu_1 + \beta Lu_2 = 0$. Принцип суперпозиции дает возможность эффективно решать неоднородные линейные уравнения $Lu = f$, где функция f не зависит от u. В предыдущих разделах, эти свойства мы широко применяли.

Линейные уравнения движения имеют решения, которые изменяются во времени по гармоническому закону, поэтому различные физические системы (см. рис. 2.1) имеют общие характерные признаки. Именно это обеспечивает широкое использование теории гармонических колебаний в отличие от систем, которые описываются нелинейными уравнениями, решения которых не имеют такого "фамильного свойства". Однако в ряде случаев вследствие линеаризации системы, хотя и осуществленной путем пренебрежения достаточно малых величин, получаем грубое, упрощенное представление действительных процессов с количественными результатами, которые иногда являются непригодными даже для приближенных расчетов. Во всяком случае, линеаризация ограничивает возможность полного и всестороннего раскрытия всех колебательных свойств системы. Часто она приводит к неправильным выводам относительно поведения системы и вообще является недопустимой.

Итак, при общем рассмотрении выясняется, что большинство явлений нашего мира *нелинейные*. Первая наука, которая с этим столкнулась, — это небесная механика. Было выяснено, что период обращения планет зависит от их энергии (первый закон Кеплера*). Вообще нелинейность — неотъемлемая характеристика всякой системы, которая эволюционирует во времени. Сейчас исследованиями нелинейных явлений занимаются не только физики, но и биологи, химики, экономисты. К "нелинейным наукам" можно отнести теорию элемен-

* Кеплер (Kepler) Йоганн (1571—1630) — немецкий астроном и математик.

тарных частиц, динамику атмосферы и океана и много других областей современной науки.

Но в отличие от линейных систем нелинейные системы невозможно рассматривать в рамках одного общего формального подхода, используя, например, принцип суперпозиции или преобразование Фурье. Линейная суперпозиция двух или нескольких колебательных движений нелинейной системы не является колебанием последней. Иначе говоря, из частных решений дифференциального уравнения нелинейной системы невозможно составить общее решение подобно тому, как строилось общее решение линейного уравнения. Если сила, которая действует на систему, разложена в ряд Фурье, то ее влияние на нелинейную систему не будет равняться линейной сумме влияний каждого отдельного гармонического слагаемого этого ряда. Поэтому создание аналитических методов решения для нелинейных задач намного сложнее, чем для линейных задач.

Для большинства важных нелинейных уравнений, которые необходимо исследовать, сегодня не существует решения в аналитическом виде! Их анализ нуждается в объединении современных аналитических методов с расчетами на ЭВМ. Фактически компьютер выступает как соавтор открытия, поэтому именно с появлением ЭВМ стало возможным значительное углубление понимания нелинейных явлений. Конечно, ставить задачу для ЭВМ следует с пониманием, тогда и получим физически разумный ответ.

В процессе развития науки казалось, что “нелинейные трудности” разных задач являются специфическими и не связаны между собой. И только в 30-тые годы XX ст., в значительной степени благодаря деятельности Мандельштама, начало формироваться “*нелинейное мышление*”, “*нелинейная культура*”. Произошло переосмысление в сознании физиков, что позволило рассматривать нелинейные колебательные системы действительно как нелинейные, а не как почти линейные, близкие к линейным. Сформировался своеобразный *нелинейный язык*, который оперировал такими понятиями, как нелинейный резонанс, автоколебания, параметрическое взаимодействие и т.д.

В этом разделе мы лишь “прикоснемся” к богатому миру нелинейных колебаний. Наша цель — не анализ математических методов исследования нелинейных систем, а понимание новых физических явлений, характерных для таких систем. Мы лишь познакомимся с основами нелинейного языка и “нелинейного мышления”. При этом главным моментом при изучении теории “нелинейных колебаний” является понимание того, что это наука, которая исследует простые математические модели фундаментальных явлений, происходящих в мире колебательных систем. Именно этой точки зрения мы придерживаемся, и она положена в основу нашей книги.

11.2. Нелинейный осциллятор

Понимая тесную связь в природе между колебательными и волновыми процессами, в начале книги мы исследовали гармонические осцилляторы и линейный осциллятор с демпфированием. Естественное обобщение этих линейных моделей — это модель *нелинейного осциллятора*. Примером нелинейного осциллятора является колебательная система, динамика которой описывается дифференциальным уравнением второго порядка: для консервативной системы — $\ddot{x} + f(x) = 0$, а для системы с демпфированием — $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + f(x) = 0$. Понятно, что модель нелинейного осциллятора описывает колебательные явления в системах разной физической природы. Поэтому x — это динамическая переменная, о которой говорят как об обобщенной координате, $f(x)$ — некоторая нелинейная функция, 2δ — параметр демпфирования.

Рассмотрим механический осциллятор, в котором частица массой m может свободно двигаться вдоль оси Ox, причем трение отсутствует. В процессе движения на частицу действует сила $F(x)$, которая в данный момент времени зависит от координаты массы m. В соответствии со вторым законом Ньютона имеем уравнение движения $m\ddot{x} = F(x)$, или $\ddot{x} + f(x) = 0$, где $f(x) = -F(x)/m$. Для функции $F(x)$ как функции одной переменной можно записать соотношение

$$V(x) = -\int_0^x F(\xi)d\xi. \tag{11.1}$$

Тогда производная $V'(x) = -F(x)$, и уравнение движения $m\ddot{x} = F(x)$ принимает вид $m\ddot{x} = -V'(x)$. Напомним физический смысл функции $V(x)$. Для этого помножим обе части уравнения $m\ddot{x} + V'(x) = 0$ на $\dot{x}$, тогда $m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}V'(x) = 0$ или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)\right) = 0. \tag{11.2}$$

Итак, производная по времени равна нулю, следовательно, выражение, стоящее в скобках, в процессе динамики системы остается постоянным:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = \text{const}. \tag{11.3}$$

Понятно, что это соотношение представляет собой закон сохранения механической энергии. Первый член определяет кинетическую энергию частицы массой m, а второй $V(x)$ — потенциальную энергию.

Пусть теперь уравнение

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{11.4}$$

определяет консервативный нелинейный осциллятор любой физической природы. Аналогично (11.1) введем функцию

$$U(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi, \tag{11.5}$$

которую называют *потенциальной функцией.* Используя эту функцию, уравнение (11.4) представим в виде

$$\ddot{x} + U'(x) = 0. \tag{11.6}$$

Если потенциальная функция имеет минимум, то в его окрестности система может осуществлять колебания. Пусть потенциальная функция гладкая и минимум существует в точке $x = 0$. Тогда разложение в ряд Тейлора вблизи этой точки имеет вид (учитываем, что $U'(0) = 0$):

$$U(x) = U(0) + \frac{1}{2}U''(0)x^2 + \frac{1}{6}U'''(0)x^3 + \ldots \tag{11.7}$$

Соответствующее разложение в ряд Тейлора функции $f(x)$, описывающей восстанавливающую силу (в общем случае, различной физической природы), будет иметь вид

$$f(x) = U'(x) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \ldots, \tag{11.8}$$

здесь учтено, что $f(0) = 0$.

Поскольку в точке $x = 0$ согласно предположению находится минимум потенциальной функции, то $U''(0) = f'(0) > 0$. Поэтому постоянную $f'(0)$ обозначим как квадрат некоторой величины, а именно: $f'(0) = \omega_0^2$. Кроме того, введем обозначение $f''(0)/2 = \alpha$ и $f'''(0)/6 = \beta$; эти величины могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Если в разложении (11.8) учесть только первый член, то получим уравнение линейного гармонического осциллятора $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Эта модель описывает в линейном приближении консервативные колебания систем различной физической природы (см. рис. 2.1). Это обусловлено тем, что ситуация, когда разложение гладкой функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля начинается с члена первого порядка по x, является *типичной.* При этом в разложении потенциальной функции $U(x)$ вблизи минимума первым отличным от постоянной величины является квадратичный член по x, а именно:

$U''(0)x^2/2 = \omega_0^2 x^2/2$ (пусть $U(0) = 0$). *Ситуация, отличная от указанной, является очень специфической в природе.*

Учитывая два члена в разложении Тейлора, получим уравнение *осциллятора с квадратичной нелинейностью:*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0, \tag{11.9}$$

разложение потенциальной функции, которого имеет члены второй и третьей степени по x:

$$U(x) = \frac{1}{2}U''(0)x^2 + \frac{1}{6}U'''(0)x^3 = \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3}.$$

Понятно, что модель (11.9) описывает консервативные колебания в системе, когда амплитуда колебаний уже не настолько мала, чтобы можно было бы ограничиться линейным приближением в разложении функции $f(x)$, и в то же время не настолько велика, чтобы были существенными следующие члены ряда Тейлора. В этом случае говорят о *слабой нелинейности.*

Модель с квадратичной нелинейностью (11.9) неприемлема в ситуации, когда потенциальная функция является симметричной. Если $U(-x) = U(x)$ и, соответственно, $f(-x) = -f(x)$, то коэффициент $\alpha = 0$. Поэтому для учета нелинейных эффектов необходимо принять во внимание следующий, кубический, член в ряде (11.8). Получим другую универсальную модель — *осциллятор с кубической нелинейностью:*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \tag{11.10}$$

Его потенциальная функция имеет в разложении члены второй и четвертой степени по x: $U(x) = \omega_0^2 x/2 + \beta x^4/4$ и является четной функцией.

11.3. Период колебаний нелинейного осциллятора

Выведем общую формулу для периода колебаний нелинейного консервативного осциллятора. Для уравнения осциллятора в виде (11.4) закон сохранения энергии (11.3) можно записать следующим образом:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E, \tag{11.11}$$

где E — полная энергия колебаний. Из уравнения (11.11) имеем

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2\left(E - U(x)\right)}. \tag{11.12}$$

Знак плюс соответствует движению системы в течение полупериода, когда направление скорости совпадает с направлением оси Ox, а знак минус — когда направление движения противоположное. Разделяя переменные в (11.12), получаем

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - U(x)\right)}}. \qquad (11.13)$$

Понятно, что движение является периодическим, когда $U(x) \le E$, причем *точки поворота* при движении системы $x_{\min}$ и $x_{\max}$ представляют собой корни уравнения $E = U(x)$. Итак, период колебаний определяется формулой

$$T = 2\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - U(x)\right)}}. \qquad (11.14)$$

Для линейного осциллятора $U(x) = \omega_0^2 x^2/2$, поэтому уравнение (11.14) примет вид

$$T = 2\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2E - \omega_0^2 x^2}} = \frac{2}{\omega_0}\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad (11.15)$$

где $a = \sqrt{2E}/\omega_0$. В таком случае интеграл легко определить:

$$T = \frac{2}{\omega_0}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \qquad (11.16)$$

т.е. получаем известный результат для периода гармонических колебаний. Поскольку зависимость от энергии E в формуле (11.16) отсутствует, колебания являются *изохронными*, т.е. период T не зависит от амплитуды колебаний.

В общем случае (см. формулу (11.14)) период колебаний зависит от энергии осциллятора. Итак, *неизохронность,* т.е. зависимость периода от амплитуды колебаний, — это один из фундаментальных нелинейных эффектов.

11.4. Фазовое пространство

При исследовании нелинейных колебаний широко используют *метод фазового пространства.* Возьмем, например, колебательную систему, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка типа (11.4). Обозначив первую производную $dx/dt = \upsilon$ (в механических системах это скорость частицы), можно

свести описание динамики нелинейного осциллятора (11.4) к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = \upsilon,$$
$$\dot{\upsilon} = -f(x). \qquad (11.17)$$

Из курса математики известно, что согласно теореме существования и единственности, решение этой системы однозначно определяется, если в качестве начальных условий заданы значения *двух* переменных x и $\upsilon = \dot{x}$. Тогда решение системы (11.17) в виде двух переменных $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ полностью описывает *состояние* осциллятора. Функции $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ можно рассматривать как независимые координаты двумерного пространства — *фазового пространства.* О таком пространстве принято говорить как о *фазовой плоскости.* Понятно, если бы уравнение движения системы имело вид дифференциального уравнения N-го порядка, то с помощью соответствующей замены переменных его можно было бы свести к системе N дифференциальных уравнений первого порядка. При решении такой системы получаем N переменных, совокупность которых образует N-мерное фазовое пространство. Точку в фазовом пространстве, которая определяет состояние системы в определенный момент времени, называют *фазовой точкой.* Изменение состояния системы во времени соответствует движению фазовой точки вдоль некоторой ориентированной траектории, которую называют *фазовой траекторией.*

Согласно теореме о существовании и единственности фазовые траектории не могут пересекаться. В противоположном случае это бы означало, что для одного и того же состояния, которое соответствует одной точке в фазовом пространстве, система имела бы разные варианты эволюции во времени, что не имеет физического смысла для системы, в которой отсутствуют любые случайные параметры.

Осциллятор как физическая колебательная система является системой с одной степенью свободы. Он описывается дифференциальным уравнением второго порядка, которое эквивалентно двум уравнениям первого порядка. Поэтому одному дифференциальному уравнению первого порядка удобно поставить в соответствие половину степени свободы. Итак, система, которая определяется N уравнениями первого порядка, имеет $N/2$ степеней свободы. Например, система имеет полторы степени свободы, если она описывается тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка.

11.5. Особые точки и их классификация

Оставим на некоторое время нелинейный осциллятор и рассмотрим систему, которая эволюционирует во времени и описыва-

ется двумя дифференциальными уравнениями первого порядка общего вида:

$$\dot{x} = h(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \tag{11.18}$$

Особый интерес вызывают решения системы (11.18), не зависящие от времени, в этом случае производные dx/dt и dy/dt равны нулю. Для таких решений получаем систему уравнений:

$$h(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0. \tag{11.19}$$

Это алгебраическая система двух уравнений с двумя неизвестными, в типичном случае такая система имеет корни. Каждая пара (x_0, y_0), удовлетворяющая системе (11.19), соответствует некоторой точке на фазовой плоскости. Эти точки называют *особыми* или *недвижимыми точками*. С физической точки зрения особые точки соответствуют состояниям равновесия системы. С помощью достаточно простого анализа можно исследовать поведение фазовых траекторий в окрестности особой точки, и на его основе провести классификацию особых точек. Обладая знаниями о свойствах особых точек и их расположении на фазовой плоскости, можно сделать выводы относительно структуры фазового пространства и характера возможных колебательных процессов в системе.

Итак, пусть (x_0, y_0) — особая точка системы (11.18). Будем искать близкое к особой точке решение в виде

$$x(t) = x_0 + \tilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \tilde{y}(t). \tag{11.20}$$

Подставим эти выражения в (11.18) и разложим функции в правых частях обеих уравнений в ряды Тейлора по малым величинам $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, пренебрегая при этом членами второго и высших порядков малости. При этом учтем, что $h(x_0, y_0) = 0$ и $g(x_0, y_0) = 0$, ведь (x_0, y_0) — особая точка. Как следствие, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= h_x(x_0, y_0)\tilde{x} + h_y(x_0, y_0)\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= g_x(x_0, y_0)\tilde{x} + g_y(x_0, y_0)\tilde{y}, \end{aligned} \tag{11.21}$$

где нижние индексы означают частные производные функций $h(x, y)$ и $g(x, y)$ по соответствующему аргументу.

Система (11.21) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Для ее решения традиционно рекомендуется искать решение в виде $\tilde{x}(t) = a\exp(\lambda t)$, $\tilde{y}(t) = b\exp(\lambda t)$. Тогда величины a и b должны удовлетворять линейной системе уравнений:

$$\begin{cases}\left(h_x(x_0,y_0)-\lambda\right)a+h_y(x_0,y_0)b=0,\\ g_x(x_0,y_0)a+\left(g_y(x_0,y_0)-\lambda\right)b=0.\end{cases} \tag{11.22}$$

Она имеет решение, если

$$(h_x(x_0,\ y_0)-\lambda)(g_y(x_0,\ y_0)-\lambda)-g_x(x_0,\ y_0)h_y(x_0,\ y_0)=0,$$

или

$$\lambda^2-S\lambda+D=0, \tag{11.23}$$

где $S=h_x(x_0,\ y_0)+g_y(x_0,\ y_0)$; $D=h_x(x_0,\ y_0)g_y(x_0,\ y_0)-g_x(x_0,\ y_0)h_y(x_0,\ y_0)$. Решение (11.23) представим в виде

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(S\pm\sqrt{S^2-4D}\right). \tag{11.24}$$

Последовательно подставляя в (11.22) корни λ_1 и λ_2, определяем решения системы (11.22) относительно неизвестных a и b. Для корня λ_1 находим числа a_1 и b_1, а для λ_2 — a_2 и b_2, соответственно. Итак, частные решения системы (11.21) имеют вид

$$\tilde{x}_1=a_1\exp(\lambda_1 t),\quad \tilde{y}_1=b_1\exp(\lambda_1 t),$$

$$\tilde{x}_2=a_2\exp(\lambda_2 t),\quad \tilde{y}_2=b_2\exp(\lambda_2 t). \tag{11.25}$$

Эти решения характеризуют поведение фазовых траекторий вблизи особой точки $(x_0,\ y_0)$: в направлении вектора с координатами $\{a_1,\ b_1\}$ поведение фазовой траектории определяется экспоненциальной зависимостью $\exp(\lambda_1 t)$, а в направлении вектора с координатами $\{a_2,\ b_2\}$ — экспоненциальной зависимостью $\exp(\lambda_2 t)$.

Общее решение системы (11.21) определяется суперпозицией частных решений (11.25):

$$\tilde{x}=c_1\tilde{x}_1+c_2\tilde{x}_2=c_1a_1\exp(\lambda_1 t)+c_2a_2\exp(\lambda_2 t),$$

$$\tilde{y}=c_1\tilde{y}_1+c_2\tilde{y}_2=c_1b_1\exp(\lambda_1 t)+c_2b_2\exp(\lambda_2 t), \tag{11.26}$$

где c_1 и c_2 — постоянные, которые находят из начальных условий в момент времени $t=0$: $\tilde{x}(0)=\tilde{x}_0$, $\tilde{y}(0)=\tilde{y}_0$. Эти условия соответствуют на фазовой плоскости координатам точки, из которой начинается фазовая траектория (она расположена вблизи особой точки $(x_0,\ y_0)$, см. (11.20)).

Итак, характер фазовых траекторий в окрестности особой точки определяется корнями λ_1, λ_2 (рис. 11.1):

1) $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, здесь начальное возмущение со временем затухает и стремится к нулю, т.е. система приближается к особой точке. О та-

кой особой точке говорят, что она *устойчивая.* В данном случае ее называют *устойчивый узел.*

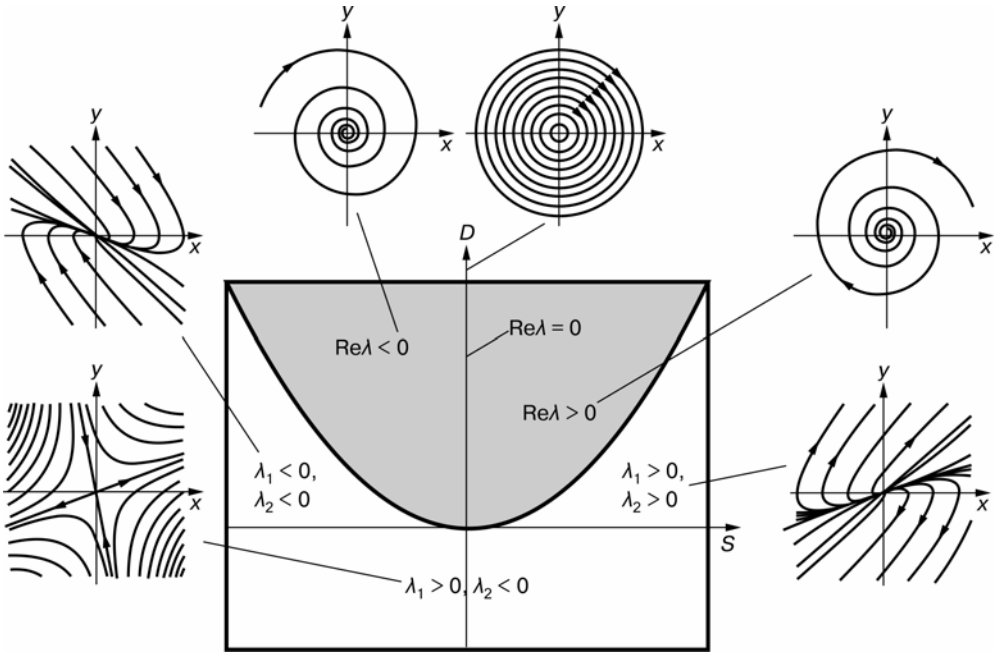


Рис. 11.1. Области значений корней λ_1 и λ_2 на плоскости параметров (S, D), которые соответствуют разным типам особых точек [26, с. 67]:
в темной области корни λ_1 и λ_2 являются комплексно сопряженными; на графиках показаны фазовые траектории в окрестности особых точек

2) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, здесь начальное возмущение возрастает, и система удаляется от особой точки. О такой точке говорят, что она *неустойчивая.* Имеем *неустойчивый узел.*

3) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, здесь наблюдается экспоненциальное уменьшение в одном направлении и экспоненциальное увеличение в другом; такая особая точка неустойчивая, ведь со временем система удаляется от нее. Такую особую точку называют *седло.* Фазовые траектории, которые идут в седловую точку и уходят от нее, называются *сепаратрисами* (от латинского слова *separatio* — разделение). Как мы убедимся ниже, сепаратрисы действительно разделяют области фазовой плоскости, где наблюдается движение разного характера. Графически на рис. 11.1 сепаратрисы пересекаются в седловой точке, что противоречит, как уже отмечалось, математическим условиям и физическому смыслу. Однако фактически пересечения нет (об этом см. п. 11.6.1).

4) $\lambda_{1,2} = \lambda' \pm i\lambda''$, здесь согласно (11.26) зависимость возмущения во времени определяется выражением $\exp(\lambda' t)\cos(\lambda'' t + \psi)$. Если $\lambda' > 0$, то

особая точка неустойчивая, ее называют *неустойчивый фокус*; в ее окрестности фазовые траектории раскручиваются по спирали от особой точки;

5) $\lambda_{1,2} = \lambda' \pm i\lambda''$, причем $\lambda' < 0$, здесь имеем устойчивую особую точку, которую называют *устойчивый фокус*; в ее окрестности фазовые траектории закручиваются по спирали по направлению к особой точке.

Все другие ситуации соответствуют положению системы на плоскости параметров (S, D) (рис. 11.1) на границах между рассмотренными областями. Они неинтересны с физической точки зрения, ведь любое малое изменение параметров системы смещает ее в одну из областей, тем самым, изменяя природу особой точки и характер фазовых траекторий в ее окрестности. Такое резкое изменение динамики системы называется *бифуркацией* (от латинского слова *bifurcus* — раздвоение), а значение параметра, при котором бифуркация имеет место, — бифуркационным параметром.

Исключение составляет случай, когда $S = 0$, $D > 0$. Дело в том, что на этой границе "живут" консервативные системы. Для нее согласно (11.24) $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{D}$, поэтому зависимость возмущения от времени является гармонической, т.е. $\cos(\lambda t + \psi)$. Такую особую точку называют *центром*. В окрестности особой точки типа центр фазовые траектории имеют вид вложенных одна в одну замкнутых кривых, что характеризует периодическое движение колебательной системы. Понятно, что выбор конкретной фазовой траектории обусловливается начальным возмущением.

Перечисленные выше типы особых точек определяют динамику колебательной системы на фазовой плоскости и характеризуют природу состояния равновесия колебательной системы. Фактически особые точки являются организующими центрами динамики колебательной системы. Их расположение на фазовой плоскости в совокупности с типичными траекториями называют *фазовым портретом динамической системы* (словосочетание "динамическая система" указывает на то, что исследуется математическая модель любой по природе физической системы). Фазовый портрет позволяет единым взглядом оценить характер движения (в общем случае, динамики) в системе.

11.6. Фазовый портрет динамической системы

Рассмотрим основные положения процесса построения фазового портрета динамической системы. Для этого проведем более детальное исследование вида фазовых траекторий в окрестности особых точек.

11.6.1. Консервативная система

Пусть для консервативного осциллятора $\ddot{x} + f(x) = 0$ функции $f(x)$ соответствует потенциальная функция $U(x)$ (см. (11.4), (11.5)). Точки, в которых функция $f(x)$ равна нулю, являются точками состояния равновесия. Действительно, в состоянии равновесия система может находиться неограниченное время; этой ситуации соответствует решение уравнения в виде постоянной $x(t) = x_0$, $\upsilon(t) = \dot{x}(t) = 0$. Поскольку $f(x) = U'(x)$, то состояние равновесия — это точки, где потенциальная функция имеет локальные максимумы или минимумы. Минимум $U(x)$ определяет устойчивое состояние равновесия, а максимум $U(x)$ — неустойчивое. В первом случае смещение частицы из точки равновесия приводит к появлению восстанавливающей силы, которая стремится возвратить систему в состояние равновесия, а во втором — к появлению силы, которая способствует дальнейшему ее движению от состояния равновесия. В точках равновесия скорость осциллятора равна нулю, поэтому на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ эти точки расположены на оси абсцисс. Это особые точки на фазовой плоскости осциллятора.

В типичном случае локальные максимумы и минимумы гладкой потенциальной функции — это квадратичные экстремумы, т.е. в окрестности точки экстремума график функции аппроксимируется параболой (см. формулу (11.7)). Случай квадратичного экстремума охватывает большинство практически интересных ситуаций, тогда как иной вид потенциальной функции характеризует очень специфическую ситуацию.

Чтобы определить вид фазовых траекторий, обратимся к закону сохранения энергии (11.11). Постоянная E — это полная энергия осциллятора, которую определяют в соответствии с начальными условиями, подставляя в левую часть уравнения (11.11) значение $x(0)$ и $\dot{x}(0)$ для момента $t = 0$. Тогда при $t > 0$, т.е. в процессе колебаний осциллятора, фазовая точка на плоскости $(x, \dot{x})$ будет вычерчивать линию, которая соответствует данному значению постоянной E, т.е. получаем конкретную фазовую траекторию. При других начальных условиях получим другое значение постоянной E, и ему будет соответствовать другая кривая. Итак, полагая для постоянной E разные значения, можем построить совокупность фазовых кривых на фазовой плоскости.

На рис. 11.1 представлен вид фазовых траекторий вблизи особых точек. Определим более детально их структуру для случаев, показанных на рис. 11.2. В окрестности точки локального минимума x_1 (рис. 11.2, *а*) представление потенциальной функции в виде ряда Тейлора

имеет вид: $U(x) = c_0 + (1/2)c_2(x - x_1)^2 + \ldots$, где $c_0 = U(x_1)$, $c_2 = U''(x_1) > 0$. Тогда в окрестности точки x_1 выражение (11.11) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{c_2(x - x_1)^2}{2} = E - U(x_1). \qquad (11.27)$$

На плоскости $(x, \dot{x})$ это уравнение представляет собой совокупность эллипсов (рис. 11.2, *а*) с центром в точке (x_1, 0), размеры которых определяются величиной $\left[E - U(x_1)\right]$. Точка (x_1, 0) это особая точка типа центр (см. рис. 11.1). На рис. 11.2, *а* показаны случаи, когда величина $E = U_0, U_1, U_2$, здесь $U_0 = U(x_1)$. Если $E = U_0$, то фазовая кривая вырождается в точку ($x = x_1$, $\dot{x} = 0$), которая является состоянием равновесия. Для значений $E < U(x_1)$ фазовых траекторий не существует, что следует из формулы (11.27) и рис. 11.2, *а*.

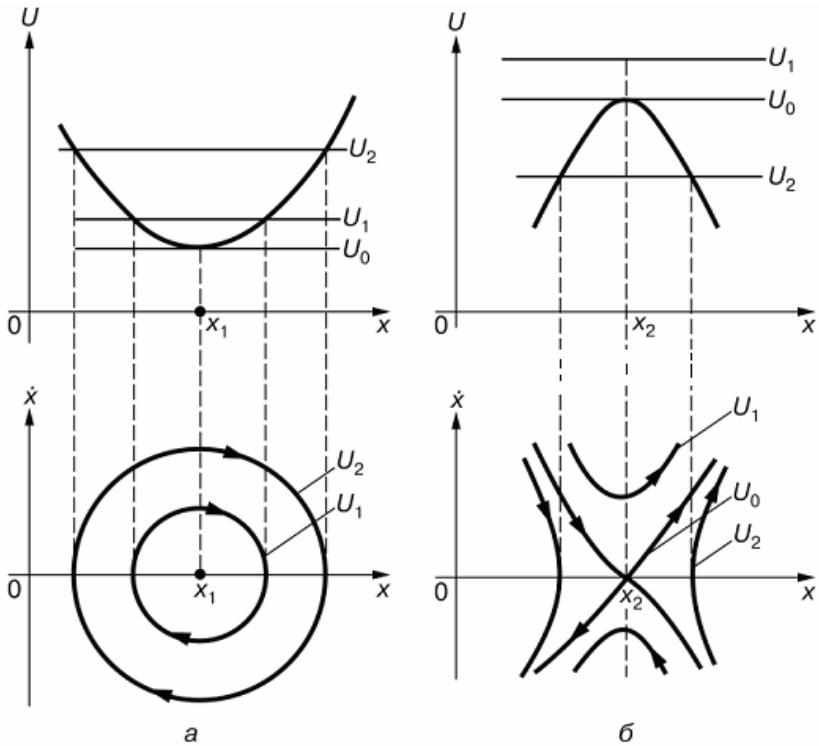


Рис. 11.2. Фазовые траектории в окрестности особой точки типа центр (*а*) и седло (*б*)

В окрестности локального максимума (на рис. 11.2, *б* это точка x_2) потенциальная функция имеет вид ряда $U(x) = c_0 - (1/2)c_2(x - x_2)^2 + \ldots$, где $c_2 = -U''(0) > 0$. Для малых отклонений от состояния равновесия $x = x_2$ выражение (11.11) имеет вид

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{c_2\left(x - x_2\right)^2}{2} = E - U\left(x_2\right). \qquad (11.28)$$

Выражение (11.28) определяет на фазовой плоскости семейство гипербол. Имеем особую точку типа седло. При значении $E = U(x_2)$ (на рис. 11.2, *б* $U_0 = U\left(x_2\right)$), гипербола вырождается в две прямые, которые пересекаются в точке $(x_2, 0)$ — это сепаратрисы. Однако фактически сепаратрисы в точке седла не пересекаются, поскольку не содержит в себе точку седла. Система, которая следует вдоль сепаратрисы, при $x \to x_2$ будет иметь согласно (11.28) скорость $\dot{x} \to 0$, т.е. колебательная система входит в состояние равновесия и выходит из него с бесконечно малой скоростью, а, следовательно, бесконечно долго. Другими словами, система может лишь приближаться или отдаляться от неустойчивого состояния равновесия асимптотически ($t \to \infty$). Действительно, при начальном состоянии, которое точно соответствовало бы состоянию равновесия, система осталась бы в нем навсегда. При этом любое малое отклонение энергии системы в ту или другую сторону изменяет движение системы, поэтому движение реальной системы, соответствующее на фазовой плоскости сепаратрисе, невозможно.

Приведенные рассуждения дают возможность не только провести анализ фазовых траекторий вблизи особых точек, но и исследовать на качественном уровне характер движения на всей фазовой плоскости, если потенциальная функция $U(x)$ определена для всех x. Например, на рис. 11.3 построен фазовый портрет динамической системы (11.17) по заданному графику $U(x)$. Отметим особую роль сепаратрис: они разделяют фазовую плоскость на области с качественно различным характером движения системы (на рис. 11.3 сепаратрисам соответствуют значения $E = U_1$ и $E = U_2$). Так, сепаратриса ($E = U_2$) отделяет область фазовой плоскости, где отсутствуют замкнутые фазовые траектории, от области, где есть замкнутые фазовые траектории.

Итак, если задана потенциальная функция $U(x)$, то построение фазового портрета можно осуществить в такой последовательности:

1) располагаем координатные оси Ox и $O\dot{x}$ фазовой плоскости точно под графиком функции $U(x)$;

2) на оси абсцисс Ox обозначаем особые точки, соответствующие устойчивым состояниям равновесия в локальных минимумах функции $U(x)$ (центры) и неустойчивым — в локальных максимумах (седла);

3) проводим на графике функции $U(x)$ горизонтальные касательные в точках максимума; их точки пересечения с кривой $U(x)$ определят границы раздела областей сепаратрисами соответствующих седел;

4) проводим линии сепаратрис, имеющие в точках седел кривые, которые пересекаются (имеют вид крестика), а также совокупность замкнутых, вложенных одна в одну овальных кривых вокруг центров;

5) стрелки, которые обозначают направление движения вдоль фазовых траекторий, расставляем таким образом, чтобы в верхней полуплоскости они были направлены право, а в нижней — влево, ведь $\dot{x} > 0$ соответствует увеличению координаты x во времени, а $\dot{x} < 0$ — уменьшению.

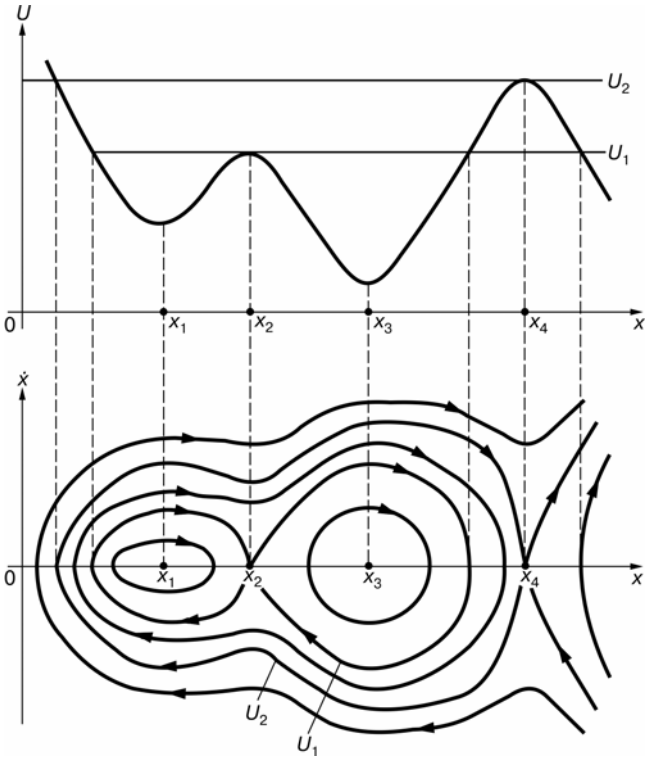


Рис. 11.3. Построение фазового портрета динамической системы

11.6.2. Диссипативная система

Модель нелинейного осциллятора с демпфированием описывается уравнением $\ddot{x} + 2\delta x + f(x) = 0$, где постоянная $\delta > 0$ имеет смысл параметра демпфирования. Такая модель хорошо описывает механические и акустические осцилляторы, когда сила трения про-

порциональна скорости, а также электрический колебательный RLC-контур. Поразмыслим, как изменится фазовый портрет нелинейного осциллятора при наличии демпфирования по сравнению с консервативной системой.

Введем, как и раньше, потенциальную функцию $U(x)=\int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi$, тогда уравнение движения запишем в виде $\ddot{x}+U'(x)=-2\delta\dot{x}$. Умножим это уравнение на $\dot{x}$ и запишем его левую часть как производную:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}+U(x)\right)=-2\delta\dot{x}^2. \qquad (11.29)$$

Если $\delta = 0$, то имеем случай консервативного осциллятора, когда фазовая точка на плоскости $(x,\dot{x})$ следует вдоль кривой в соответствии с уравнением $\dot{x}^2/2+U(x)=E$, E = const. Если $\delta > 0$, то производная становится отрицательной, и, следовательно, величина $\dot{x}^2/2+U(x)$ со временем уменьшается. Когда величина δ мала, то это уменьшение происходит медленно. В этой ситуации несложно понять, каким будет фазовый портрет. Теперь фазовая траектория не будет замкнутой, как в консервативном случае, а будет закручиваться по спирали. Это соответствует затухающим колебаниям осциллятора. Особая точка колебательной системы, являющаяся устойчивым состоянием равновесия, к которой траектории приближаются по спирали, — есть *устойчивый фокус*.

При большом значении δ характер движения вблизи устойчивого состояния равновесия изменяется: вместо осцилляций имеем постепенное затухание отклонений от неподвижной точки. В этом случае имеем особую точку типа *устойчивый узел*.

В окрестности седла фазовые траектории расположены качественно так же, как и в консервативном случае.

В случае линейного осциллятора с демпфированием (см. уравнение (2.27)) имеем устойчивый фокус при $\delta < \omega_0$ (рис. 11.4, *а*), где ω_0 — собственная частота соответствующего консервативного осциллятора, и устойчивый узел — при $\delta > \omega_0$ (рис. 11.4, *б*).

В теории динамических систем вводят понятие *аттрактора* (от английского глагола *to attract* — притягивать). А*ттрактор — это конечное состояние некоторого процесса или эволюции системы.* В наших задачах аттрактор представляет собой некоторое множество в фазовом пространстве диссипативной системы, к которому асимптотически приближаются все фазовые траектории из определенной области. Эту область называют *бассейном притяжения* данного аттрак-

тора. В общем случае аттракторы могут иметь разную природу (с некоторыми из них мы встретимся ниже). В фазовом пространстве диссипативного осциллятора аттрактор представляет собой одну точку — устойчивый фокус или устойчивый узел. Если потенциальная функция $U(x)$ имеет более чем один минимум, то имеем соответственно несколько аттракторов, у каждого из которых свой бассейн притяжения. При этом сепаратриссы разделяют эти бассейны на фазовой плоскости.

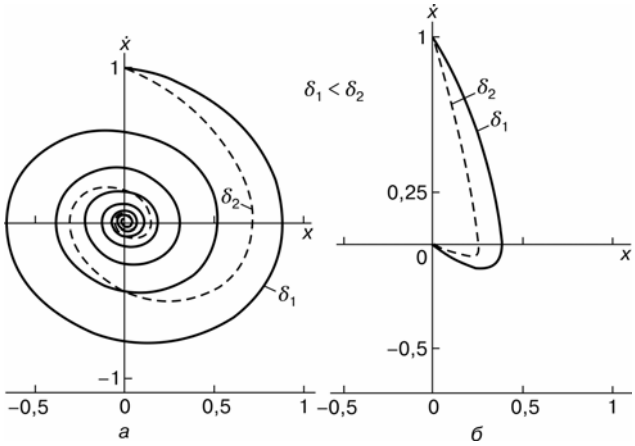


Рис. 11.4. Пример фазовых траекторий линейного осциллятора с демпфированием (2.27); начальные условия: $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 1$; $\omega_0 = 1$:
а — $\delta < \omega_0$, $\delta_1 = 0{,}085$, $\delta_2 = 0{,}25$; *б* — $\delta > \omega_0$, $\delta_1 = 1{,}05$, $\delta_2 = 1{,}75$

11.7. Осциллятор с нелинейностью синуса

11.7.1. Аналитический подход

Уравнение осциллятора с нелинейностью в виде функции синуса (2.4) описывает колебание маятника (рис. 2.1, *д)*. Оказывается, что аналогичное уравнение определяет поведение систем и в ряде других физических задачах. Этот факт позволяет рассматривать осциллятор с нелинейностью синуса как базовую модель. Кроме того данное нелинейное уравнение дает возможность его аналитического исследования при помощи *эллиптических функций Якоби* * [26, 49]. Такая ситуация при исследовании нелинейного уравнения является достаточно редкой.

Перепишем уравнение (2.4) в виде

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \tag{11.30}$$

* Якоби (Jacobi) Карл Густав Якоб (1804—1851) — немецкий математик.

где $\omega_0^2 = g/l$ — квадрат собственной частоты линейного маятника с уравнением движения $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$. Потенциальная функция (см. (11.5)) маятника $U(\theta) = -\omega_0^2 \cos\theta$. Фазовый портрет представлен на рис. 11.5. Минимумы потенциальной функции существуют при $\theta = 2\pi n$, $n = 0,1,2,\ldots$ и соответствуют состоянию равновесия типа центр, максимумы — при $x = 2\pi n + \pi$, $n = 0,1,2,\ldots$ и соответствуют седлам на фазовой плоскости. На рис. 11.5, можно выделить три качественно различных типа фазовых траекторий, которым соответствует различный характер движения маятника:

1) колебательные движения маятника, в этом случае фазовые траектории замкнуты вокруг особой точки типа центр;

2) движение по сепаратрисам, которые следуют от седла до седлу;

3) вращательные движения.

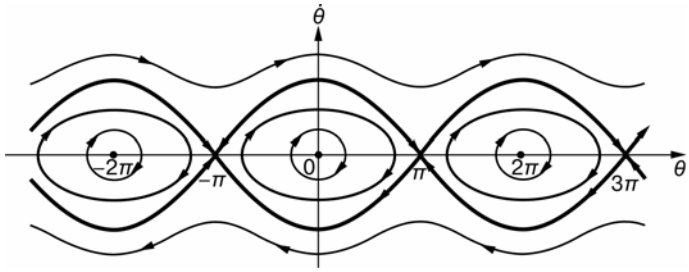


Рис. 11.5. Фазовый портрет осциллятора (11.30)

Запишем для уравнения (11.30) закон сохранения энергии:

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2 \cos\theta = E, \tag{11.31}$$

где $E = \text{const}$ — полная энергия системы. Колебательным движениям соответствуют значения $-1 < E/\omega_0^2 < 1$, вращательным — $E/\omega_0^2 > 1$, движениям по сепаратриссе — $E/\omega_0^2 = 1$. Интересным для нас является колебательное движение маятника, на нем и сосредоточим свое внимание.

Рассмотрим задачу с такими начальными условиями:

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \tag{11.32}$$

Тогда $E = -\omega_0^2 \cos\theta_0$. Из уравнения (11.31) получим

$$\dot{\theta} = \pm\omega_0\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)} = \pm 2\omega_0\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{11.33}$$

Знак плюс соответствует верхней половине фазовой траектории, а минус — нижней. Оставим в дальнейшем в выражении (11.33) верхний знак. Введем обозначение $m = \sin(\theta_0/2)$ и новую переменную

$$\sin(\theta/2) = m \sin\varphi, \tag{11.34}$$

где изменение угла θ от 0 к θ_0 приводит к изменению φ от 0 до $\pi/2$. Тогда разделяя переменные в (11.33), получаем дифференциальное уравнение движения маятника:

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega_0\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}. \tag{11.35}$$

Согласно общему определению периода $T = \oint \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}}$, где интегрирование выполняется по всей замкнутой фазовой траектории, проинтегрируем уравнение (11.35) и найдем период колебаний:

$$T = \frac{4}{\omega_0}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}} = \frac{4}{\omega_0}K(m) = T_0\frac{2}{\pi}K(m), \tag{11.36}$$

где $T_0 = 2\pi/\omega_0$ — период колебаний линейного маятника. Интеграл $K(m)$ называют *полным эллиптическим интегралом.* График функции $K(m)$ представлен на рис. 11.6. Как следует из рисунка, $K(0) = \pi/2$, $\lim\limits_{m\to 1} K(m) = \infty$.

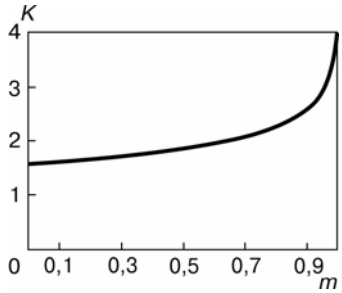


Рис. 11.6. График функции $K(m)$

Согласно (11.36) период колебаний маятника зависит от амплитуды колебаний, другими словами энергии в системе, поэтому колебания маятника *неизохронные.* Если $m << 1$, т.е. $\theta_0 << \pi$, $E/\omega_0^2 \approx -1$, то $T \approx 2\pi/\omega_0$, что совпадает с периодом колебаний линейного осциллятора. При увеличении энергии колебаний период постепенно возрастает и при $\theta_0 \to \pi$, $E/\omega_0^2 \to 1$, т.е. при приближении траектории на фазовой плоскости к сепаратрисе, стремится к бесконечности.

Определим добавку к периоду линейных колебаний T_0, если начальный угол отклонения маятника θ_0 достаточно мал ($m << 1$). Тогда полагая в формуле (11.36) $\left(1-m^2\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1+(m^2\sin^2\varphi)/2$, получаем приближенную формулу для периода колебаний T нелинейного осциллятора:

$$T \approx T_0\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{m^2\sin^2\varphi}{2}\right)d\varphi = T_0\left(1+\frac{m^2}{4}\right) = T_0\left(1+\frac{\sin^2(\theta_0/2)}{4}\right), \qquad (11.37)$$

или, учитывая, что $m = \sin(\theta_{0/2}) << 1$,

$$T \approx T_0\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right). \qquad (11.38)$$

Таким образом, при увеличении амплитуды колебаний θ_0 период возрастает, причем добавка за счет нелинейности достаточно мала: маятник можно считать изохронным при выполнении условия $\theta_0^2/16 << 1$. Например, при угле $\theta_0 = 30°$ относительное изменение периода равно 0,017, т.е. не более двух процентов.

Теперь определим закон движения маятника. Для этого найдем решение уравнения (11.35) при начальном условии $\theta(0) = \theta_0$. Если $\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi} \neq 0$, то его решение единственное и

$$\int_0^t dt = \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}};$$

отсюда, учитывая, что $\sin\varphi_0 = \dfrac{\sin(\theta_0/2)}{m} = 1$, получаем

$$t = \frac{1}{\omega_0}\left[\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}} - \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}\right] = \frac{1}{\omega_0}\left[F(\varphi;m)-K(m)\right]. \qquad (11.39)$$

Здесь $F(\varphi, m)$ — специальная функция, которую называют *неполным эллиптическим интегралом 1-го рода.* При $0 \le m^2 \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi/2$ функция F является действительной. Очевидно, что $F(\pi/2;\ m) = K(m)$.

Формула (11.39) устанавливает связь между временем t и отклонением маятника от положения равновесия, т.е. фактически определяет закон движения осциллятора. Используя определение эллиптических функций [26, 49], можно записать точное решение для колебательного движения маятника:

$$\theta(t) = 2\arcsin[m\,\mathrm{sn}(\omega_0 t;\ m)], \quad \dot{\theta}(t) = 2m\,\mathrm{cn}(\omega_0 t;m), \qquad (11.40)$$

где $\mathrm{sn}(\omega_0 t;\ m)$ и $\mathrm{cn}(\omega_0 t;\ m)$ — эллиптический синус и эллиптический косинус.

На рис. 11.7, *а* представлены зависимости $\theta(t)$ при относительно малой амплитуде колебаний $\theta_0 = 25°$, $E/\omega_0^2 \approx -0{,}906$, а на рис. 11.7, *б* — при большой амплитуде колебаний $\theta_0 = 175°$, $E/\omega_0^2 \approx 0{,}996$. В первом случае имеем колебания, близкие к гармоническим, а во втором — существенно нелинейные (или, как говорят иначе, *ангармонические*) с увеличением периода колебаний. Таким образом, наглядно проявляются основные свойства нелинейных осцилляторов: *неизохронность* и *ангармоничность*.

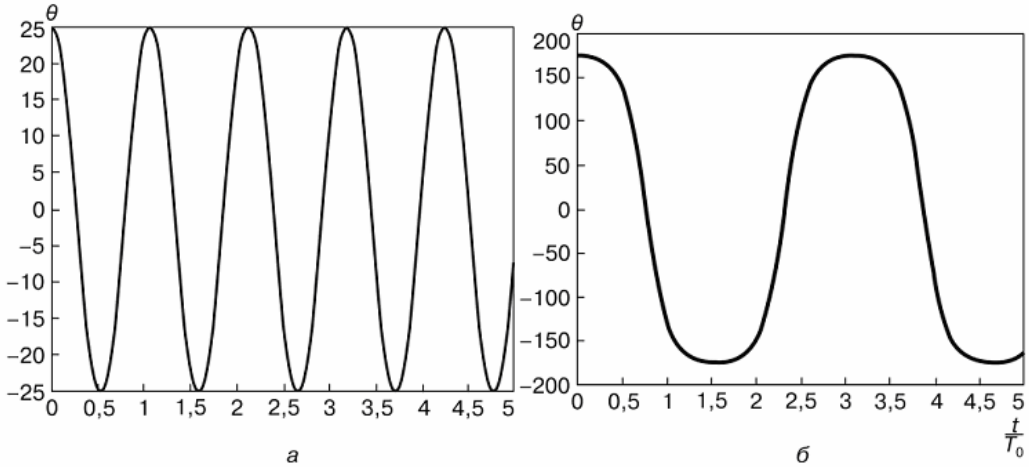


Рис. 11.7. Зависимость координаты θ от нормированного времени:
а — слабонелинейные колебания вблизи положения равновесия ($\theta_0 = 25°$, $E/\omega_0 \approx -0{,}906$); *б* — сильнонелинейные колебание вблизи сепаратрисы ($\theta_0 = 175°$, $E/\omega_0 \approx 0{,}996$)

11.7.2. Асимптотический метод

Случаи, когда удается найти точные решения нелинейных уравнений, достаточно редки. Поэтому в теории колебаний разработано значительное количество приближенных, или *асимптотических,* методов [26, 36, 38]. Нашей целью не является их описание, на примере маятника мы лишь познакомимся с некоторыми основными идеями математического и физического характера при таком подходе.

Вспомним уравнение маятника (11.30): $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$. Здесь функция синуса $\sin\theta = \theta - \theta^3/6 + \theta^5/120 - \ldots$ определяет нелинейность восстанавливающей силы. Рассмотрим случай *слабой нелинейности*, т.е. будем исследовать относительно малые колебания маятника. По-

этому оставим в ряде для функции $\sin\theta$ первые два члена. Тогда уравнение движения примет вид

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta - \frac{1}{6}\omega_0^2\theta^3 = 0. \qquad (11.41)$$

При исследовании нелинейных систем широко используется процедура приведения уравнения движения к *безразмерному виду*; при этом естественно появляются малые параметры. Вообще следует отметить, что условием применения любого асимптотического метода является наличие малого (или большого) параметра. Ниже мы будем приводить такую процедуру, но сейчас этого делать не будем по двум причинам: во-первых, малый параметр в уравнении (11.41) мы уже имеем, а во-вторых, для начала, исследование исходного уравнения движения является более наглядным.

Итак, перепишем уравнение (11.41) в виде

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + \varepsilon\omega_0^2\theta^3 = 0, \qquad (11.42)$$

где $\varepsilon = -1/6$. Величина ε, которая по модулю меньше единицы, и есть малый параметр. Она определяет отклонение характеристики восстанавливающей силы от линейной зависимости.

Уравнение (11.42) отличается от уравнения гармонического осциллятора $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ наличием слагаемого $\varepsilon\omega_0^2\theta^3$ с малым параметром ε. Поэтому, вероятно, правильным будет следующий вывод: в действительности решением уравнения (11.42) является несколько откорректированное решение уравнения гармонического осциллятора $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$. Если это действительно так, то логично искать решение уравнения (11.42) в виде ряда по степеням малого параметра ε:

$$\theta = \theta^{(0)} + \varepsilon\theta^{(1)} + \varepsilon^2\theta^{(2)} + \ldots \qquad (11.43)$$

где $\theta^{(0)}$, $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$,... — это так называемые нулевое, первое, второе и другие приближения искомого решения. Понятно, что чем больше членов ряда (11.43) можно определить, тем более точным будет полученное решение. Остановимся на двух членах ряда (11.43), или, как говорят в этом случае, определим нулевое и первое приближения в решении (11.43), т.е.

$$\theta = \theta^{(0)} + \varepsilon\theta^{(1)}. \qquad (11.44)$$

Подставляем решение (11.44) в уравнение (11.42). При этом в соответствии с намерением получить первое приближение удерживаем в нем члены, которые содержат в себе параметр ε в степени, не выше первой. Как следствие, получаем следующее уравнение:

$$\left(\ddot{\theta}^{(0)} + \omega_0^2\theta^{(0)}\right) + \varepsilon\left(\ddot{\theta}^{(1)} + \omega_0^2\theta^{(1)} + \omega_0^2\left(\theta^{(0)}\right)^3\right) = 0. \qquad (11.45)$$

Приравнивая в (11.45) к нулю выражения при соответствующих степенях ε (ведь величины разных порядков малости не могут уравновесить одна другую), получаем систему уравнений:

$$\varepsilon^0 : \ \ddot{\theta}^{(0)} + \omega_0^2\theta^{(0)} = 0, \qquad (11.46)$$

$$\varepsilon^1 : \ \ddot{\theta}^{(1)} + \omega_0^2\theta^{(1)} + \omega_0^2\left(\theta^{(0)}\right)^3 = 0. \qquad (11.47)$$

Уравнение нулевого приближения (11.46) является уравнением гармонического осциллятора, решение которого имеет вид

$$\theta^{(0)} = a\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (11.48)$$

где амплитуда a и начальная фаза φ — постоянные, которые определяются из начальных условий

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \qquad (11.49)$$

Подставляя решение (11.48) в (11.47), определяем уравнение для $\theta^{(1)}$:

$$\ddot{\theta}^{(1)} + \omega_0^2\theta^{(1)} = -\omega_0^2 a^3\cos^3(\omega_0 t + \varphi). \qquad (11.50)$$

Это уравнение формально совпадает с уравнением консервативного линейного осциллятора под внешним воздействием. Его решение записываем в виде:

$$\theta^{(1)} = a_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \tilde{\theta}^{(1)}, \qquad (11.51)$$

где первое слагаемое в (11.51) определяет решение соответствующего однородного уравнения, описывающего собственные колебания осциллятора. Его амплитуда a_1 и начальная фаза φ_1 снова определяются из начальных условий (11.49). Второе слагаемое — это частное решение неоднородного уравнения (11.50), описывающего вынужденные колебания осциллятора, т.е. отклик на внешнее воздействие. В соответствии с теорией линейных колебаний в спектре вынужденных колебаний будут присутствовать те же частоты, что и в спектре внешней силы. В данном случае это первая и третья гармоники. Действительно, воспользовавшись соотношением $\cos^3 z = (1/4)\cos(3z) + (3/4)\cos(z)$, перепишем уравнение (11.50) в виде

$$\ddot{\theta}^{(1)} + \omega_0^2\theta^{(1)} = -\omega_0^2\frac{a^3}{4}\cos\left(3\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right) - \omega_0^2\frac{3a^3}{4}\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right). \qquad (11.52)$$

Вследствие линейности уравнения (11.52) его частное решение можно представить в виде суммы двух решений, которые удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\theta}^{(1)} + \omega_0^2\theta^{(1)} = -\omega_0^2\,\frac{a^3}{4}\cos\left(3\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right), \tag{11.53}$$

$$\ddot{\theta}^{(1)} + \omega_0^2\theta^{(1)} = -\omega_0^2\,\frac{3a^3}{4}\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right). \tag{11.54}$$

Решение уравнения (11.53) легко находится и имеет вид гармонических колебаний с частотой внешней силы:

$$\tilde{\theta}^{(1)} = \frac{a^3}{32}\cos\left(3(\omega_0 t + \varphi)\right). \tag{11.55}$$

В уравнении (11.54) внешнее воздействие имеет частоту, равную частоте собственных колебаний осциллятора. В этом случае согласно теории линейных колебаний (п. 2.2.2) возникает резонанс, который приводит к неограниченному росту амплитуды колебаний по линейному закону. Соответствующее решение имеет вид

$$\tilde{\theta}^{(1)} = -\frac{3a^3\omega_0 t}{8}\sin(\omega_0 t + \varphi). \tag{11.56}$$

Итак,

$$\theta^{(1)} = a_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) - \frac{3a^3\omega_0 t}{8}\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{a^3}{32}\cos\left(3\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right). \tag{11.57}$$

Полученное решение $\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)}$ (см. (11.48), (11.57)) имеет *четыре* постоянные a, φ, a_1, φ_1, для определения которых имеем только *два* начальных условия (11.49). При решении подобных задач существует два варианта: первое [36, с. 120] — постоянные a, φ, a_1, φ_1 связаны между собой, поэтому для их нахождения достаточно двух начальных условий (11.49). Однако обычно выбирают другой вариант. Поскольку постоянных четыре, а условий два, то можно две постоянные выбрать произвольно. Наиболее удобно положить $a_1 = 0$. Физически это означает, что во всех составляющих решения, выше нулевого, слагаемые, которые определяют собственные колебания, равны нулю. В дальнейшем именно так будем делать.

Таким образом, решение с точностью до членов порядка ε^2 имеет вид

$$\theta = a\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \varepsilon\left[-\frac{3a^3\omega_0 t}{8}\sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{a^3}{32}\cos\left(3\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right)\right]. \tag{11.58}$$

Обратим внимание на то, что каким бы малым не был параметр ε второй член в решении (11.58) неограниченно растает со временем. Поэтому, справедливость разложения (11.43) при значительных промежутках времени нарушается или, как говорят, *разложение не является равномерно пригодным по t.* Это явно не физический результат.

В чем причина возникшей ситуации? Ответ на этот вопрос следует искать в таком свойстве нелинейной системы, как зависимость периода колебаний системы от амплитуды. Действительно, выбранная форма решения обусловливает движение с постоянным периодом $2\pi/\omega_0$, т.е. периодом колебаний в нулевом приближении. Это и является причиной такого противоречия, которого можно избежать только при условии поиска решения с периодом, отличным от периода колебаний в линейном приближении.

Поскольку отличие периода искомого решения от периода $T_0 = 2\pi/\omega_0$ должно существенно зависеть от меры нелинейности системы, которая определяется параметром ε, то естественно ввести в рассмотрение новую частоту, которая записывается в виде ряда по степеням параметра ε:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon q + \varepsilon^2 q_1 + \ldots, \tag{11.59}$$

где поправки $q, q_1, \ldots$ описывают эффекты неизохронности. Ограничимся в (11.59), как и ранее, первым приближением $\omega = \omega_0 + \varepsilon q$; отсюда $\omega_0 = \omega - \varepsilon q$, а ω_0^2 в рамках первого приближения определяется формулой

$$\omega_0^2 = \omega^2 - 2\varepsilon q\omega. \tag{11.60}$$

Подставив (11.60) в (11.42), получим

$$\ddot{\theta}^2 + \omega^2\theta - 2\varepsilon q\omega\theta + \varepsilon\omega^2\theta^3 - 2\varepsilon^2 q\omega\theta^3 = 0. \tag{11.61}$$

Теперь, подставляя выражение (11.44) в (11.61) и пренебрегая слагаемыми с ε^2, приходим к уравнению

$$\left[\ddot{\theta}^{(0)} + \omega^2\theta^{(0)}\right] + \varepsilon\left[\ddot{\theta}^{(1)} + \omega^2\theta^{(1)} - 2q\omega\theta^{(0)} + \omega^2\left(\theta^{(0)}\right)^3\right] = 0. \tag{11.62}$$

Уравнение в нулевом приближении $\ddot{\theta}^{(0)} + \omega^2\theta^{(0)} = 0$ имеет решение

$$\theta^{(0)} = a\cos(\omega t + \varphi). \tag{11.63}$$

Тогда уравнение в первом приближении

$$\ddot{\theta}^{(1)} + \omega^2\theta^{(1)} = 2q\omega\theta^{(0)} - \omega^2\left(\theta^{(0)}\right)^3$$

перепишем в виде

$$\ddot{\theta}^{(1)} + \omega^2\theta^{(1)} = \left[2q\omega a - \frac{3}{4}a^3\omega^2\right]\cos(\omega t + \varphi) - \frac{a^3\omega^2}{4}\cos(3(\omega t + \varphi)). \qquad (11.64)$$

Первое слагаемое в правой части (11.64) вносит в решение составляющую вида (11.56), что не соответствует реальной ситуации. Но теперь мы имеем возможность, благодаря выбору величины q, освободиться от первого слагаемого в правой части, который приводит к решению, не имеющему физического смысла. Таким образом, определим величину q так, чтобы

$$2q\omega a - \frac{3}{4}a^3\omega^2 = 0\,, \qquad (11.65)$$

отсюда

$$q = \frac{3}{8}\omega a^2. \qquad (11.66)$$

Тогда уравнение (11.64) примет вид

$$\ddot{\theta}^{(1)} + \omega^2\theta^{(1)} = -\frac{\omega^2 a^3}{4}\cos\left(3\left(\omega t + \varphi\right)\right). \qquad (11.67)$$

Его решение (напомним, что решение соответствующего однородного уравнения не пишем) представим в виде

$$\theta^{(1)} = \frac{a^3}{32}\cos\left(3\left(\omega t + \varphi\right)\right). \qquad (11.68)$$

Таким образом, имеем следующее решение в первом приближении:

$$\theta(t) = a\cos\left(\omega t + \varphi\right) + \frac{\varepsilon a^3}{32}\cos\left(3\left(\omega t + \varphi\right)\right), \qquad (11.69)$$

где частота ω, согласно формуле (11.66) и соотношению $\omega = \omega_0 + \varepsilon q$, определяется так:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - (3/8)\varepsilon a^2} \approx \omega_0\left(1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8}\right) \qquad (11.70)$$

и, как следует из выражения (11.70), зависит от амплитуды колебаний a.

Остается определить a и φ в соответствии с начальными условиями (11.49). Очевидно, что из условия $\dot{\theta}(0) = 0$ имеем $\varphi = 0$. Тогда из условия $\theta(0) = \theta_0$ получим $a + \varepsilon a^3/32 = \theta_0$, откуда, отбрасывая малые слагаемые, получаем $a = \theta_0$.

Как видим, решение (11.69) несколько отличается от гармонического закона за счет присутствия колебаний с частотой 3ω. Если бы мы искали решение во втором, третьем и следующих приближениях, то оно содержало бы в себе и более высокие гармоники, однако, очевидно, с еще меньшими амплитудами.

Положив в формуле (11.70) $\varepsilon = -1/6$ и $a^2 = \theta_0^2$, определим период колебаний маятника $T = 2\pi/\omega$:

$$T = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right), \quad T_0 = 2\pi/\omega_0, \tag{11.71}$$

данное соотношение совпадает с формулой (11.38), полученной на основе аналитического подхода к исследованию колебаний маятника.

11.8. Осциллятор с квадратичной нелинейностью, как математическая модель теплового расширения кристалла

Рассмотрим интересный пример, который показывает, как механизм нелинейных колебаний позволяет понять хорошо известное физическое явление. Речь идет о тепловом расширении кристаллического вещества, такого, как хлористый калий (KCl). Потенциальная энергия взаимодействия двух соседних ионов противоположного знака в кристаллической решетке KCl определяется соотношением [39, с. 330]:

$$V(r) = -\frac{\alpha e^2}{r} + \frac{\beta}{r^9}, \tag{11.72}$$

где α и β — положительные константы; e — заряд электрона; r — расстояние между ионами; для KCl $\alpha \approx 0{,}3$. Первое слагаемое в (11.72) определяет потенциальную энергию кулоновского притяжения, а второе слагаемое — потенциальную энергию взаимного отталкивания. График функции $V(r)$ показан на рис. 11.8. Постоянную β можно определить через α и расстояние r_0, соответствующее положению равновесия, при котором имеет место равенство сил отталкивания и притяжение. Согласно рентгеноструктурному анализу для KCl $r_0 = 3{,}12\,\text{Å}$. Поскольку $\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r=r_0} = \frac{\alpha e^2}{r_0^2} - \frac{9\beta}{r_0^{10}} = 0$, то отсюда

$$\beta = \frac{\alpha e^2 r_0^8}{9}. \tag{11.73}$$

Рис. 11.8. График потенциальной энергии взаимодействия ионов противоположного знака в кристаллической решетке

Будем полагать, что смещения ионов в кристаллической решетке от положения равновесия $r = r_0$ малы. Раскладывая функцию $V(r)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $r = r_0$, имеем

$$V(r) = V(r_0) + x\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r=r_0} + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_0} + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{d^3V}{dr^3}\right)_{r=r_0} + \ldots, \qquad (11.74)$$

где $x = r - r_0$. Поскольку $(dV/dr)_{r=r_0} = 0$, то изменение потенциальной энергии, которая характеризует колебательное движение ионов вблизи положения равновесия, определяется формулой (слагаемыми с высшими степенями x пренебрегаем):

$$V(r) - V(r_0) = V(x) \approx \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_0} + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{d^3V}{dr^3}\right)_{r=r_0}. \qquad (11.75)$$

Используя формулу (11.73), получаем

$$\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_0} = -\frac{2\alpha e^2}{r_0^3} + \frac{9\cdot 10\beta}{r_0^{11}} = \frac{8\alpha e^2}{r_0^3} = K,$$

$$\left(\frac{d^3V}{dr^3}\right)_{r=r_0} = \frac{6\alpha e^2}{r_0^4} - \frac{9\cdot 10\cdot 11\beta}{r_0^{12}} = -\frac{104\alpha e^2}{r_0^4} = -B. \qquad (11.76)$$

Согласно этим формулам перепишем соотношение (11.75) для потенциальной энергии колебательного движения в виде

$$V(x) = \frac{Kx^2}{2} - \frac{Bx^3}{6}. \qquad (11.77)$$

Тогда силу взаимодействия между ионами можно определить следующим образом:

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -Kx + \frac{Bx^2}{2}. \qquad (11.78)$$

Первое слагаемое для $V(x)$ представляет собой квадратичную зависимость потенциальной энергии от величины $x = r - r_0$, что характерно для линейной колебательной системы; это слагаемое обусловливает линейную составляющую в выражении для силы (11.78). Коэффициент B характеризует нелинейную составляющую в восстанавливающей силе $F(x)$.

Если колебания ионов настолько малы, что вторыми слагаемыми в выражениях (11.77) и (11.78) можно пренебречь, то это приводит к тому, что нижняя часть кривой потенциальной энергии на рис. 11.8 является параболической и ионы в кристаллической решетке выполняют гармонические колебания относительно положения равновесия $x = 0$ (т.е. $r = r_0$). Возникает вопрос, что же произойдет при дальнейшем увеличении энергии ионов (например, за счет нагревания), когда следует учитывать и второе слагаемое в выражениях (11.77) и (11.78). Запишем уравнение движения ионов в решетке:

$$m\ddot{x} = -Kx + \frac{B}{2}x^2$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{B}{2m}x^2 = 0, \qquad (11.79)$$

где $\omega_0^2 = K/m$ — собственная частота колебаний ионов в линейном приближении.

Представим уравнение (11.79) в безразмерном виде. Для этого введем безразмерные время и координату:

$$\tau = \omega_0 t, \quad \xi = \frac{x}{b}, \qquad (11.80)$$

где b — характерный масштаб колебаний. Тогда, поделив уравнение (11.79) на ω_0^2 и используя новые переменные, получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \xi - \varepsilon\xi^2 = 0, \qquad (11.81)$$

где $\varepsilon = Bb/(2m\omega_0^2) = Bb/(2K) = 13b/(2r_0)$ (см. (11.76)) — параметр нелинейности. Рассмотрим случай *слабой нелинейности,* когда $\varepsilon << 1$, т.е. уравнение (11.81) имеет *малый параметр.*

Как и в предыдущем параграфе, будем искать решение дифференциального уравнения (11.81) в первом приближения, т.е. в виде $\xi = \xi^{(0)} + \varepsilon\xi^{(1)}$. Подставляя выражение $\xi = \xi^{(0)} + \varepsilon\xi^{(1)}$ в уравнение (11.81) и отбрасывая слагаемые, содержащие в себе ε^2 и ε^3, получим следующее уравнение:

$$\ddot{\xi}^{(0)} + \varepsilon\ddot{\xi}^{(1)} + \xi^{(0)} + \varepsilon\xi^{(1)} - \varepsilon\left(\xi^{(0)}\right)^2 = 0. \qquad (11.82)$$

Отсюда имеем

$$\ddot{\xi}^{(0)} + \xi^{(0)} = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{\xi}^{(1)} + \xi^{(1)} = \left(\xi^{(0)}\right)^2. \qquad (11.83)$$

Решение первого уравнения (11.83) запишем в виде $\xi^{(0)} = a\cos\tau$ (в нашей задаче начальная фаза не важна). Подставив его во второе уравнение (11.83), с учетом тригонометрического равенства $\cos^2\tau = (1 + \cos(2\tau))/2$ запишем

$$\ddot{\xi}^{(1)} + \xi^{(1)} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\cos(2\tau). \qquad (11.84)$$

Частное решение этого уравнения таково: $\xi^{(1)} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6}\cos(2\tau)$. Итак, решение с точностью до членов порядка ε^2 имеет вид (учтем, что $\tau = \omega_0 t$):

$$\xi(t) = a\cos(\omega_0 t) + \varepsilon\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6}\cos(2\omega_0 t)\right]. \qquad (11.85)$$

В предыдущем параграфе был рассмотрен маятник как система с кубической нелинейностью (см. (11.41)), а в данной задаче о колебаниях ионов в решетке кристалла речь идет о системе с квадратичной нелинейностью (см. (11.79)). Интересно отметить, что в рамках первого приближения при исследовании колебаний маятника мы вынуждены были учитывать его неизохронность, а в системе с квадратичной нелинейностью (11.81) частота колебаний не зависит от амплитуды колебаний a. Здесь нет противоречия. Если бы рассматривалось колебание ионов в рамках второго приближения, т.е. когда $\xi = \xi^{(0)} + \varepsilon\xi^{(1)} + \varepsilon^2\xi^{(2)}$, то в решении было бы получено бесконечно возрастающее во времени слагаемое. А это свидетельствовало бы о том, что следует учитывать неизохронность колебаний.

Вернемся к решению (11.85). Напомним, что $\xi = x/b = (r - r_0)/b$ определяет безразмерную величину отклонения ионов от положения равновесия в решетке кристалла. Определим среднее за период $T_0 = 2\pi/\omega_0$ значение решения (11.85):

$$\langle\xi\rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \xi(t)\,dt = \frac{\varepsilon a^2}{2}.$$

Величина $\langle\xi\rangle > 0$, она пропорциональна квадрату амплитуды колебаний a^2, т.е. энергии. Это означает, что с ростом энергии колебаний ионов увеличивается не только амплитуда колебаний, но и расстояние между ионами. Из курса физики известно, что энергия таких колебаний определяется произведением $kT^{(абс)}$, где k — постоянная Больцмана*, $T^{(абс)}$ — абсолютная температура вещества. Отсюда, получаем следующее приближенное соотношение: $\langle\xi\rangle \sim a^2 \sim T^{(абс)}$. Таким образом, проведенный анализ нелинейной колебательной системы позволил понять причины теплового расширения твердого вещества.

11.9. Собственные колебания газового пузырька в жидкости

Еще в 1917 г. в связи с проблемой *кавитации*** (от латинского слова *cavitas* — полость) Рэлей вывел уравнение колебаний сферического пузырька газа, расположенного в идеальной несжимаемой жидкости. Это уравнение представляет собой уравнение нелинейного осциллятора. Конечно, нас интересуют его решения, описывающие пульсации пузырька. Но помимо этого, уравнение Рэлея является замечательной иллюстрацией построения математической модели физического явления. Поэтому выведем уравнение Рэлея.

Пусть пузырек выполняет пульсирующие колебания. Поместим начало сферической системы координат в центре пузырька. Понятно, что вследствие симметрии задачи все характеристики движения жидкости вокруг пузырька зависят лишь от радиальной координаты r. Учитывая этот факт, запишем исходные уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости. В сферической системе координат для скорости жидкости υ_r можно записать одномерное уравнение Эйлера (см. п. 4.1.2):

---

* Больцман (Boltzmann) Людвиг (1844—1906) — австрийский физик.

** Мощное звуковое поле в жидкости порождает маленькие парогазовые пузырьки, которые под действием этого поля могут расти, захлопываться и вызывать такие эффекты, как химические реакции, эрозия, излучение звука в широком диапазоне частот [23].

$$\frac{\partial \upsilon_r}{\partial t} + \upsilon_r \frac{\partial \upsilon_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}, \tag{11.86}$$

где ρ — плотность жидкости; P — давление. Первое слагаемое в левой части (11.86) определяет локальное ускорение, а второй — ускорение переноса. Соответствующее уравнение непрерывности (см. п. 4.1.3) будет иметь вид

$$\frac{\partial\left(r^2\upsilon_r\right)}{\partial r} = 0. \tag{11.87}$$

Физическое содержание уравнения (11.87) понятно: количество жидкости, которая протекает через условно выделенную вокруг пузырька сферическую поверхность радиусом r, является величиной постоянной. Уравнения (11.86) и (11.87) справедливы при $r \geq R$, где R — радиус пузырька.

Решение уравнения (11.87) очевидно: $\upsilon_r = C/r^2$, где постоянная C определяется из граничного условия на поверхности пузырька $\upsilon_r(R) = \dot{R}$, которое выражает равенство скоростей поверхности пузырька $\dot{R}$ и жидкости на поверхности пузырька (напомним, что точка над буквой обозначает производную по времени t). Отсюда $C = R^2\dot{R}$ и, следовательно, решение

$$\upsilon_r(r,t) = \frac{R^2}{r^2}\dot{R} \tag{11.88}$$

определяет характер изменения с расстоянием r колебательной скорости частиц среды, окружающей пульсирующий пузырек.

Наша цель получить уравнение для функции $R(t)$, решение которого описывает изменение во времени радиуса пузырька, т.е. определяет его колебательный процесс. Для этого интегрируем уравнение (11.86) по r от r до ∞. Учитывая, что на бесконечности $\upsilon_r = 0$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_r^\infty \upsilon_r dr\right] - \frac{\upsilon_r^2}{2} + \frac{1}{\rho}\left(P(\infty) - P(r)\right) = 0, \tag{11.89}$$

где $P(\infty) = P_0$ — гидростатическое давление в жидкости. Теперь подставим (11.88) в (11.89):

$$\frac{1}{r}\left(R^2\ddot{R} + 2R\dot{R}^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4\dot{R}^2 - \frac{1}{\rho}\left(P(r) - P_0\right) = 0$$

и, положив $r = R$, получим *уравнение Рэлея*:

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2-\frac{1}{\rho}\left(P(R)-P_0\right)=0. \qquad (11.90)$$

Чтобы определить давление в жидкости на поверхности пузырька $P(R)$, используем граничное условие равенства давлений снаружи и внутри на поверхности пузырька. Давление снаружи равно сумме давления жидкости $P(R)$ и давления, обусловленного силами поверхностного натяжения, $2\sigma/R$ (σ — коэффициент поверхностного натяжения), т.е. $P(R) + 2\sigma/R$. Давление внутри равно давлению газа в пузырьке $P_r(R)$. Полагая процессы, происходящие в газе, адиабатическими (см. (4.19)), можно для $P_r(R)$ записать следующее выражение:

$$P_r(R)=\left(P_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}, \qquad (11.91)$$

где γ — показатель адиабаты; R_0 — стационарное значение радиуса пузырька, когда $P(R)\big|_{R=R_0}=P_0$. Приравняв $P_r(R)$ и давление снаружи $P(R)+2\sigma/R$, получим

$$P(R)=\left(P_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}-\frac{2\sigma}{R}. \qquad (11.92)$$

Если рассматривать малые колебания, когда $|R-R_0| \ll R_0$, то уравнение (11.90) с учетом (11.92) можно привести к уравнению линейного осциллятора. Для этого обозначим $R - R_0 = \xi$ и, подставив $R = R_0 + \xi$ в (11.90) и (11.92), получим такое уравнение:

$$(\xi+R_0)\ddot{\xi}+\frac{3}{2}\dot{\xi}^2-\frac{1}{\rho}\left[\left(P_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{1}{1+\xi/R_0}\right)^{3\gamma}-\frac{2\sigma}{R_0+\xi}-P_0\right]=0$$

Далее, раскладывая степенную функцию в ряд Тейлора и отбрасывая члены, содержащие квадратичные величины ξ^2 и $\dot{\xi}^2$ (ведь $(\xi/R_0)\ll 1$), получим уравнение гармонического осциллятора:

$$\ddot{\xi}+\frac{3\gamma}{\rho R_0^2}\left(P_0+\frac{3\gamma-1}{3\gamma}\cdot\frac{2\sigma}{R_0}\right)\xi=0. \qquad (11.93)$$

Отсюда определяем частоту малых колебаний ω_0 пузырька:

$$\omega_0=\frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3\gamma}{\rho}\left(P_0+\frac{3\gamma-1}{3\gamma}\cdot\frac{2\sigma}{R_0}\right)}. \qquad (11.94)$$

Как и ожидалось, величина ω_0 тем больше, чем меньше стационарный радиус пузырька R_0.

Уравнение (11.90) с учетом (11.92) и (11.94) удобно переписать в безразмерном виде, для чего введем безразмерные переменные $\tilde{R} = R/R_0$ и $\tau = \omega_0 t$. После простых преобразований получим

$$\tilde{R}\frac{d^2\tilde{R}}{d\tau^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{d\tilde{R}}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{3\gamma + (3\gamma - 1)\chi}\left(\frac{1+\chi}{\tilde{R}^{3\gamma}} - \frac{\chi}{\tilde{R}} - 1\right) = 0, \qquad (11.95)$$

где $\chi = 2\sigma/(R_0 P_0)$.

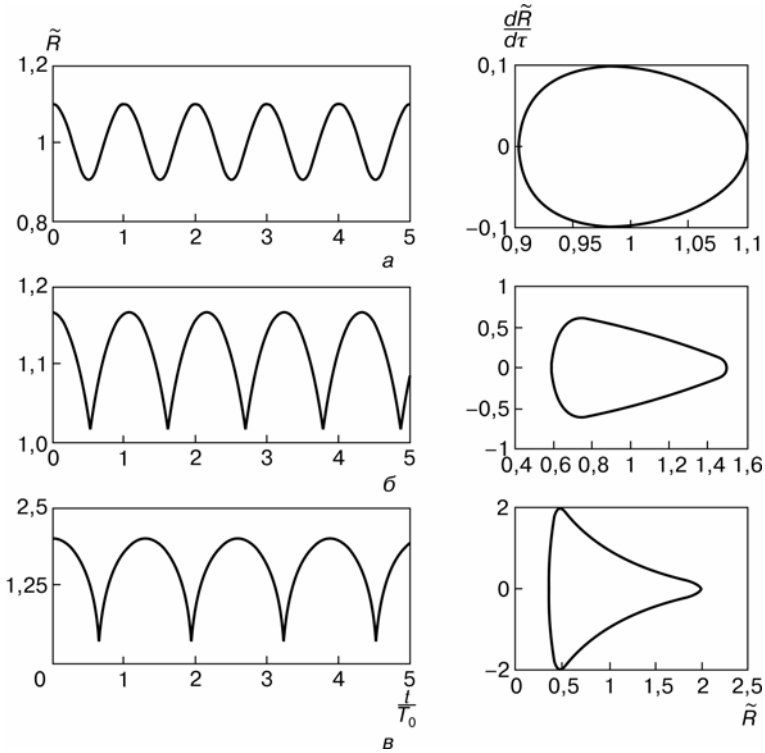


Рис. 11.9. Фазовый портрет колебаний пузырька в жидкости (справа) и временные зависимости радиуса пузырька $\tilde{R}(t/T_0)$ (слева) при разных амплитудах колебаний $A \equiv R_{\max}/R_0$:

а — 1,1; *б* — 1,5; *в* — 2;

R_0 = 10 мкм, P_0 = 100 кПа, σ = 0,0725 Н/м, χ = 0,145, для воздуха γ = 1,4

На рис. 11.9 (слева) приведены временные зависимости радиуса пузырька (вдоль оси абсцисс отложено нормированное время t/T_0, $T_0 = 2\pi/\omega_0$), а на рис. 11.9 (справа) — фазовые траектории осциллятора (11.95) на плоскости с координатами ($\tilde{R}$, $d\tilde{R}/d\tau$). Параметром кривых является амплитуда колебаний, которая определяется начальны-

ми условиями $\tilde{R}(0) = A \equiv R_{\max}/R_0$, $d\tilde{R}(0)/d\tau = 0$. Как видим, в случае колебаний с относительно малой амплитудой (рис. 11.9, *а*), колебания близки к гармоническим. При этом фазовая кривая близка к эллиптической кривой (рис. 11.9, *а*). С ростом амплитуды (рис. 11.9, *б*, *в*) колебания становятся негармоническими, что имеет свое отражение на фазовой плоскости. При этом период колебаний с увеличением амплитуды возрастает.

11.10. Автоколебания

11.10.1. Автоколебания — типичное природное явление

"Ни один инженер не смог бы создать что-либо подобное сердцу — изумительной и удивительной вибрационной машине. ... Непрерывно действуя в течении всей жизни человека, сердце поддерживает себя, по крайней мере частично, результатами своего же собственного действия. Но, строго говоря, оно не остается из года в год неизменным, так как процесс поддержания сердечной деятельности неизбежно и постепенно меняет само это колебательное устройство" [5, с. 154]. Грустно звучат последние строки. Однако такова жизнь человека и, понимая уникальность нашего организма, мы должны заботиться о сердце, которое представляет собой удивительную автоколебательную систему.

Автоколебания — это особые колебания системы. Они не имеют ничего общего с вынужденными колебаниями, когда система находится под действием внешней силы. Они отличаются от собственных колебаний системы, как механизмом возникновения, так и механизмом сохранения амплитуды. Как известно, собственные колебания системы представляют собой колебания вблизи положения устойчивого равновесия. Амплитуда этих колебаний определяется начальным смещением и начальной скоростью. Вследствие наличия демпфирования, присущего любой реальной системе, собственные колебания являются затухающими.

Возникает вопрос: могут ли возникать в системе незатухающие колебания без влияния внешней колебательной силы. Оказывается, что могут. В этом случае для поддержки колебаний система должна быть связанной с любым (вообще не колебательным) источником энергии, за счет которого она могла бы пополнять затраты энергии вследствие действия сил демпфирования. Чтобы колебания были незатухающими (стационарными), система за период колебаний должна взять у источника столько же энергии, сколько затрачивает за

данный промежуток времени. Для этого система должна сама руководить поступлением энергии от источника. Системы, которые имеют такие свойства, Андронов* назвал *автоколебательными*, а незатухающие колебания, которые они осуществляют, — *автоколебаниями*.

Если присмотреться к окружающему миру, то окажется, что автоколебательные системы, разные по своим свойствам, встречаются нам везде — это духовые и смычковые музыкальные инструменты; часовые механизмы; электронные генераторы; разнообразные регуляторы, которые применяются в технике; поршневые двигатели; механические автоколебания, обусловленные трениям, очень распространены в виде разного рода скрипов; автоколебания, связанные с образованием вихрей при обтекании потоком среды некоторых препятствий (струна, стержень, крыло самолета) или проникновением потока сквозь узкие щели; процессы в живом организме, например, дыхание и работа сердца.

Если перечень таких непохожих явлений объединяется термином "*автоколебания*", то это означает, что такие явления имеют некоторые общие свойства и могут рассматриваться с единой точки зрения. Следует отметить, что исследование конкретной автоколебательной системы может быть очень сложным. В этом параграфе мы проанализируем общие характеристики автоколебательных систем и попробуем провести некоторые исследования.

11.10.2. Основные определения и свойства

Современное определение автоколебаний можно сформулировать следующим образом [26, с. 155]. *Автоколебания — это незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе, тип и свойства которых определяются самой системой и не зависят от начальных условий* (*разве что в конечной области*).

Обсудим это определение. Во-первых, следует отметить, что естественные макроскопические системы теряют свою энергию со временем. Это происходит, например, вследствие механического трения, электрического сопротивления или других механизмов необратимого преобразования энергии системы в тепло. Поэтому, исключая из рассмотрения примеры типа планетарных систем (где диссипацией, вероятно, можно пренебречь) или колебаний молекул (которые описываются законами квантовой механики), будем рассматривать диссипативные системы, где всегда нужно учитывать, что без постоянного поступления энергии в систему колебания затухают. Поэтому автоко-

---

* Андронов Александр Александрович (1901—1952) — российский физик, академик АН СРСР (1946).

лебательная система должна иметь *внутренний источник энергии.* В маятниковых часах колебания поддерживаются за счет потенциальной энергии поднятого груза или сжатой пружины. Электронные часы или другие электронные генераторы потребляют энергию от электрического источника питания. Ритмическое сокращение сердечной мышцы или излучение световых импульсов светлячками происходит по счет химических реакций в этих системах.

Во-вторых, отметим, что автоколебаниям свойственна устойчивость колебаний системы относительно их возмущения. Как мы знаем, периодические движения в консервативной системе описываются совокупностью замкнутых кривых на фазовой плоскости. Если вследствие некоторого возмущения изменилось движение в такой системе, то она и в дальнейшем останется в возмущенном состоянии. Другими словами, консервативная периодическая система "помнит" начальные условия. Теперь вернемся к автоколебательной системе, где также происходит периодическое движение. На фазовой плоскости такому движению также соответствует замкнутая кривая, которую называют *предельным циклом.* Такое название отражает специфику автоколебаний. Дело в том, что когда мы "столкнем" фазовую точку с предельного цикла, она со временем вернется на него, т.е. автоколебательная система восстанавливает свое движение при его нарушении. Это означает, что автоколебания в системе *не зависят от начальных условий.* Со временем фазовая траектория, соответствующая некоторым начальным условиям, стремится к предельному циклу, т.е. в колебательной системе после переходного процесса возникают колебания, которым соответствует движение фазовой точки по предельному циклу. Итак, предельный цикл представляет собой аттрактор. Таким образом, автоколебания зависят только от параметров системы, а не от начальных условий. Слова в определении "разве что, в конечной области" — означают, что, в принципе, могут существовать несколько аттракторов, каждый из которых имеет свой бассейн притяжения.

Существенным моментом для поддержания установившихся колебаний в автоколебательной системе является ее нелинейность. Для понимания физической природы этого момента рассмотрим энергетический баланс колебаний. Пусть колебания уже происходят. Понятно, что энергия этих колебаний должна затухать вследствие трения (или вследствие передачи колебательной энергии потребителю). Однако потери энергии пополняются за счет источника, от которого порция энергии в течение каждого периода (или вообще периодически) поступает в колебательную систему. Понятно, что установившиеся колебания возможны в том случае, когда поступление энергии от источника за период будут точно равняться потерям энергии за то же время. Это условие баланса энергии и является условием существования незату-

хающих колебаний. Если баланс будет нарушен, например, пополнение затрат будет недостаточным, то колебания будут затухать. Если же, наоборот, энергии от источника будет поступать чрезмерно, то колебания будут нарастать.

Теперь можно составить представление и о механизме самовозбуждения. Если вначале, т.е. при наименьших амплитудах, поступление энергии превышает потери, то амплитуда колебаний нарастает. Если бы это соотношение между поступлением и потерями энергии сохранялось всегда, то амплитуда увеличивалась бы бесконечно. Таким образом, для получения установившихся колебаний необходимо, чтобы, начиная с некоторого значения амплитуды, потери возрастали при дальнейшем увеличении амплитуды быстрее, чем пополнение энергии от источника. При таком условии возможно достижение энергетического баланса.

Все это иллюстрируется графиком на рис. 11.10, *а*, здесь энергия, поступающая от источника обозначена E_+, энергия потерь в колебательной системе — E_-. Энергии E_+ и E_- зависят от амплитуды колебаний A. Точка пересечения кривых E_+ и E_- соответствует балансу энергий; абсцисса этой точки — амплитуде A_0 установившихся колебаний. График на рис. 11.10, *а* дает возможность провести простой анализ устойчивости установившегося колебательного движения системы. Напомним, что устойчивым положением равновесия называют такое состояние системы, когда система к нему возвращается, будучи из него выведенной свободными колебаниями. Неустойчивое положение равновесия, наоборот, соответствует ситуации, когда система при наименьшем отклонении не возвращается к нему. Аналогично можно говорить об устойчивом колебательном движении — оно имеет место, если система, колебательное движение которой нарушено некоторым внешним воздействием, возвращается к начальному режиму после окончания действия внешнего воздействия. Наоборот, движение будет неустойчивым, если любое малое внешнее воздействие выводит систему из колебательного режима, от которого система отходит все дальше. Для наших целей достаточно такого упрощенного понятия об устойчивости.

Рассмотрим теперь, устойчивым или неустойчивым является движение, представленное на рис. 11.10, *а*. Для проверки устойчивости возьмем два значения амплитуды — меньше и больше, чем A_0 (штриховые линии на рис. 11.10, *а*). Легко видеть, что в первом случае имеем $E_+ > E_-$ и, значит, амплитуда колебаний будет нарастать, пока не достигнет значения A_0. Во втором случае $E_+ < E_-$ и, соответственно, амплитуда будет уменьшаться, пока не достигнет значения A_0. Итак, точка пересечения с абсциссой A_0 есть точка устойчивого колебательного движения.

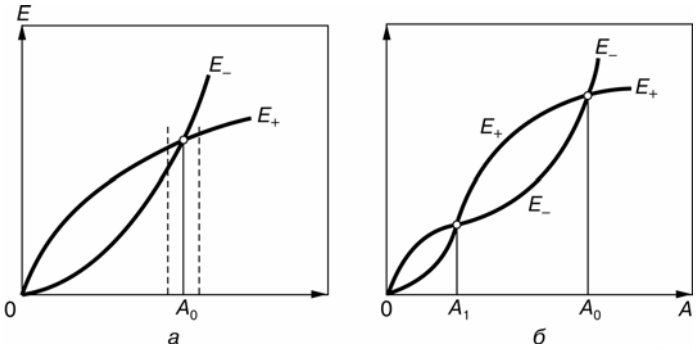


Рис. 11.10. Энергетические диаграммы диссипации энергии (E_-) и притока энергии в систему от источника (E_+)

Начало координат O, где пересекаются кривые E_+ и E_-, является положением равновесия. Причем это положение равновесия неустойчивое; в чем нетрудно убедиться, рассматривая колебательный процесс при некоторой малой амплитуде. Таким образом, *условием самовозбуждения автоколебательной системы является условие неустойчивости ее состояния равновесия.*

Кривые E_+ и E_- могут пересекаться в нескольких точках (рис. 11.10, *б*). На рисунке видно три точки пересечения. Рассуждая аналогично, легко установить, что две из них устойчивые (точки с абсциссами O и A_0). Поскольку начало координат O является точкой устойчивого равновесия, то система в отсутствии внешнего воздействия будет сохранять состояние покоя. Однако это не означает, что в ней устойчивые автоколебания невозможны. Действительно, представим себе, что некоторый внешний толчок возбуждает в системе колебания с амплитудой, большей, чем A_1. Если это произойдет, то в дальнейшем система будет раскачиваться самостоятельно до амплитуды A_0.

Такой случай, когда для самораскачки автоколебательной системы нужен начальный толчок, называется *жестким самовозбуждением.* В противоположность этому, случай (рис. 11.10, *а*), когда для раскачивания системы достаточно малого начального возбуждения, которое всегда возникает вследствие тех или иных флуктуаций, — называется *мягким самовозбуждением.*

На основе проведенного анализа можно сделать еще один вывод принципиального характера. Если бы система была линейной, то, как потери энергии, так и ее прирост возрастали бы по одинаковому закону, а именно: пропорционально квадрату амплитуды. Графически кривые E_+ и E_- были бы представлены двумя параболами, которые проходят через начало координат, но больше не имеют точек пересечения, при этом одна из парабол была бы расположена выше. В этом случае или система не возбуждается совсем, или она мягко самовоз-

буждается, но амплитуда колебаний бесконечно возрастает. Поэтому режим установившихся колебаний с конечной амплитудой возможен только в нелинейной системе. Отметим, что нелинейные свойства может иметь любое звено, которое входит в структуру автоколебательной системы.

Приведенные рассуждения позволяют выделить в простых автоколебательных системах следующие основные элементы:

- колебательную систему с демпфированием;
- источник энергии и преобразователь энергии источника в энергию колебаний;
- нелинейный ограничитель;
- звено обратной связи.

Хотя речи о звене обратной связи не было, но читатель, наверное, подсознательно понимал, что в системе такое звено должно быть. Действительно, за счет этого звена колебательная система должна *сама* регулировать поступление энергии в систему от источника таким образом, чтобы выполнялись две условия, которые называют амплитудным и фазовым:

1) энергия источника, которая преобразуется в энергию колебаний, должна компенсировать потери;

2) эта энергия должна поступать в колебательную систему в нужной фазе, чтобы содействовать усилению колебаний.

Ниже на примере конкретной автоколебательной системы попробуем выделить приведенные выше основные элементы.

11.10.3. Маятниковые часы

В 1656 г. Гюйгенс запатентовал первые маятниковые часы. Уже через два года часовой мастер из Утрехта Самюэль Костер построил маятниковые часы и гарантировал недельное отклонение менее восьми минут [40, с. 19]. Это изобретение сыграло выдающуюся роль в развитии физики, астрономии и техники. Свою повседневную жизнь мы не представляем без часов, и, наверное, никогда не задумывались над тем, какая идея положена в основу их работы. Оказывается, что часы любой конструкции представляет собой автоколебательную систему.

Прежде чем говорить о часах, являющихся достаточно сложной системой, рассмотрим конструкцию маятника на рис. 11.11 [*]. Маятник представляет собой автоколебательную систему, причем механизм ее действия очень прост. В начальный момент времени ключ *5*

---

[*] Агафонов Ф.И., Селицер С.И. Необычный маятник // Квант. — 1988. — № 11, 12. — С. 57—58.

разомкнут и контакты *2* и *3* замкнуты. При замыкании ключа по виткам спиральной пружины проходит ток и сила Ампера**, действующая между ними, вынуждает их притягиваться один к другому. Как следствие, пружина сжимается, и электрический контур между контактами *2* и *3* размыкается. Далее, пружина начинает разжиматься, снова замыкается электрический контур, и так далее. Происходят незатухающие колебания. Как и в любой автоколебательной системе, здесь можно выделить следующие составные части:

- источник энергии — батарея *4*;
- колебательная система — пружина;
- устройство, которое регулирует поступление энергии в колебательную систему, — пружина и контакты *2* и *3*;
- звено обратной связи. Действие звена состоит в том, что электрический ток (внешний фактор) порождает магнитное поле, которое вызывает сжатие пружины и размыкание электрического контура. При этом появляется сила упругости (внутренняя сила пружины), которая снова замыкает электрический контур. Понятно, что этот механизм имеет нелинейный характер.

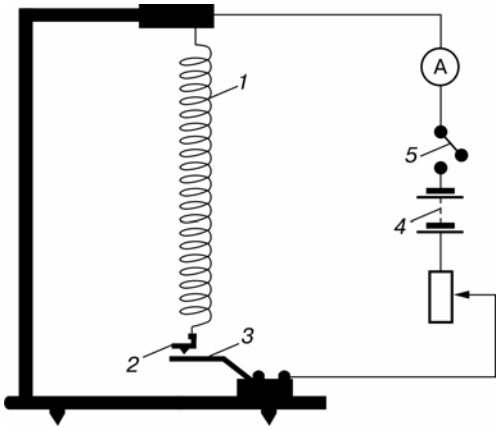


Рис. 11.11. Схема маятника:

1 — пружина; *2* и *3* — контакты; *4* — электрическая батарея; *5* — ключ

Отметим, что сила тяжести существенной роли не играет, поэтому такая система будет функционировать и в невесомости. Поступление энергии в колебательную систему равно потерям энергии за счет трения, поэтому такая система будет выполнять незатухающие колебания до тех пор, пока не исчерпается источник энергии.

** Ампер (Ampere) Андрэ Мари (1775—1836) — французский физик и математик.

Теперь рассмотрим маятниковые часы. На рис. 11.12 представлены основные элементы одного из простейших вариантов маятниковых часов [13, с. 109—110]. На оси *A* подвешен маятник с присоединенным к нему равноплечным рычагом *1* — анкером (маятник на рисунке не показан). На оси *B* расположено ходовое колесо *2*, которое вынуждает двигаться гиря. Она подвешена на цепи, которая перекинута через зубчатое колесо, расположенное на оси *B*. Анкер и ходовое колесо сцепляются благодаря взаимодействию палетт *3* с зубьями ходового колеса *2*. Если бы сцепления не было, то анкер и маятник под действием начального толчка выполняли бы свободные затухающие колебания, а ходовое колесо поворачивалось бы до тех пор, пока гиря не оказалась бы в своем нижнем положении. Понятно, что никаких автоколебаний в такой ситуации не возникает. Однако в состоянии сцепления, представленного на рис. 11.12, система становится автоколебательной.

Поверхности палетт a_1 и a_2 представляют собой поверхности круговых цилиндров, осью которых является ось *A*. Когда зуб ходового колеса находится в контакте с любой из этих поверхностей, то направление силы, с которой он давит на нее, проходит через ось *A* и ее момент относительно этой оси равен нулю. Ходовое колесо, а следовательно и гиря при этом неподвижны. Поверхности b_1 и b_2 — плоские. Когда зуб ходового колеса скользит по ним, то возникает момент силы относительно оси маятника *A*. Под действием этого момента анкер отклоняется по часовой стрелке, когда зуб касается поверхности b_1, и против часовой стрелки, когда зуб касается поверхности b_2. При этом ходовое колесо поворачивается на определенный угол (за период колебаний маятника ходовое колесо поворачивается на два зуба), и гиря соответственно опускается. Таким образом, маятник колеблется свободно (при этом, или поверхность a_1, или a_2 скользит по поверхности зуба ходового колеса) за исключением коротких (по сравнению с его собственным периодом) промежутков времени, в течение которых происходит контакт между одним из зубьев ходового колеса и одной из плоскостей b_1, b_2, при этом маятник получает короткий импульс влево или вправо. Эти моменты силы возникают при соответствующих положениях маятника; они задаются не извне, как при вынужденных колебаниях, а определяются движением маятника. Палетты и зубья ходового колеса сконструированы так, что поверхность b_1 попадает под зуб, когда маятник проходит через вертикальное положение, двигаясь справа налево, а поверхность b_2 попадает под зуб, когда маятник также проходит через вертикальное положение, но двигаясь слева направо. Таким образом, в обоих случаях момент силы направлен по *ходу* маятника, т.е. содействует его раскачиванию.

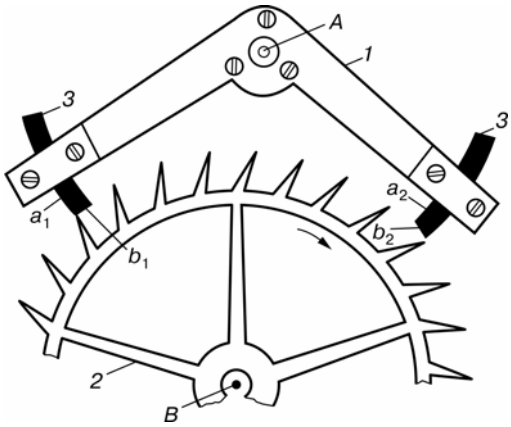


Рис. 11.12. Элементы конструкции маятниковых часов:
1 — анкер; *2* — ходовое колесо; *3* — палеты

Еще раз подчеркнем, что момент, который действует на анкер со стороны ходового колеса, не является внешним воздействием и не является определенной функцией времени. Он определяется конструкцией часов, внутренним механизмом взаимодействия колебательной части системы (маятник с анкером) и источником (поднятой гирей). Таким образом, этот момент M — функция не времени, а положения маятника θ и его скорости $\dot{\theta}$, т.е. $M = M(\theta, \dot{\theta})$. Понятно, что для данной конструкции M — нелинейная функция, $M \neq 0$ только в малой окрестности точки $\theta = 0$.

Нетрудно выделить в описанном устройстве основные части автоколебательной системы:

- источник энергии — потенциальная энергия гири;
- колебательная система — маятник;
- обратная связь между источником энергии и колебательной системой обусловливается контактом палетт с зубьями ходового колеса (этот процесс описан выше). Звену обратной связи свойственна нелинейность.

Такие маятниковые часы являются автоколебательной системой с жестким возбуждением, поскольку начальный толчок для ее запуска должен иметь определенное конечное значение.

11.10.4. Свойство фазы на предельном цикле автоколебаний

Здесь рассмотрим важное отличие автоколебаний от вынужденных колебаний. Как автоколебания, так и вынужденные колебания системы описываются замкнутой кривой в фазовом простран-

стве, которая притягивает траектории со своего бассейна. Вместе с тем эти кривые существенным образом различаются [40, с. 60]: *фаза на предельном цикле автоколебаний свободная, тогда как фаза на устойчивой замкнутой кривой, соответствующей вынужденным колебаниям, однозначно определяется фазой внешней силы.*

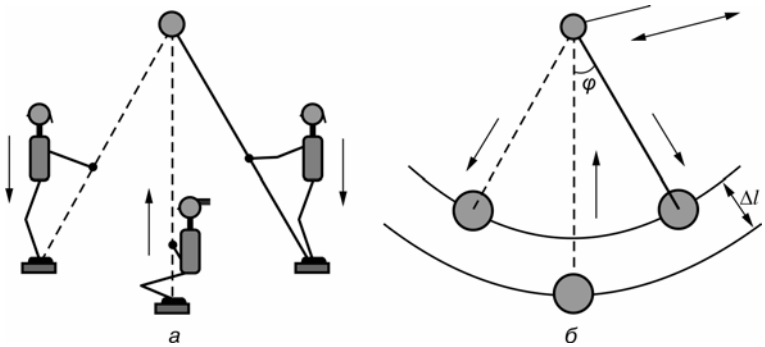


Рис. 11.13. Пример автоколебательной системы — человек на качелях (*а*); качели под действием внешней силы (*б*)

Например, рассмотрим всем знакомую систему — качели (рис. 11.13, *а*). Как раскачать качели известно каждому: после того, как качели некоторым образом отклонены от положения равновесия, человек должен приседать, когда они приближаются к одной из точек максимального отклонения, и подниматься, когда они проходит через положение равновесия. Перемещая свой центр масс, человек передает энергию системе; эта энергия компенсирует потери за счет сил трения и, как следствие, поддерживает стационарные колебания. Понятно, что источником энергии в данном случае есть энергия мышц, колебательной системой - маятник переменной длины, обратная связь осуществляется человеком, который перемещает центр масс (и, соответственно, длину маятника) в благоприятный момент времени. Наиболее важно здесь то, что эти движения осуществляются не в соответствии с некоторым заданным периодическим ритмом, а в соответствии с положением качели. Действительно, период свободных колебаний маятника изменяется с амплитудой, поэтому и период движений человека также должен изменяться с амплитудой. Это свойство и определяет автоколебательный характер системы — человек на качелях.

Во многих учебниках по теории колебаний качели рассматриваются как классический пример параметрического возбуждения колебательной системы (см. параграф 11.14). Однако качели целесообразно считать автоколебательной системой, поскольку частота изменения положения центра масс человека не является постоянной, а все время приспосабливается к частоте колебаний самих качелей.

Теперь рассмотрим другие качели, которые имеют устройство, периодически изменяющее длину каната (рис. 11.13, *б*). Тогда, если качели несколько отклонятся от вертикали, то возникнут колебания значительной амплитуды (это хорошо известный эффект параметрического возбуждения, о котором будет идти речь в параграфе 11.14). При этом маятник имеет максимальную длину, когда находится в вертикальном положении, и минимальную — в крайних положениях отклонения.

На первый взгляд обе системы — автоколебательные качели (рис. 11.13, *а*) и качели, которые колеблется под действием внешней силы (рис. 11.13, *б*), — кажутся очень похожими. Обе они демонстрируют возбуждение колебаний, но между ними есть существенное различие, которое можно увидеть, если возмущать движение системы, например, подталкивать или затормаживать маятники и наблюдать за их движениями достаточно долго. В результате возмущения маятник качелей, которые выполняет вынужденные колебания (рис. 11.13, *б*), стремится к положению, которое бы он занимал в отсутствии возмущения, тогда как автоколебательные качели (рис. 11.13, *а*) могут быть определены в произвольном положении, которое зависит от возмущения. Другими словами, фаза обычных качелей (рис. 11.13, *а*) свободная, а фаза качелей на рис. 11.13, *б* определяется фазой внешней силы.

11.11. Автоколебательные системы с нелинейной силой трения

Как отмечалось выше, автоколебания являются типичным природным явлением. При исследовании реальной системы возможно использование различных математических моделей в виде систем с сосредоточенными параметрами, систем с распределенными параметрами, сплошной среды. При этом анализ математической модели автоколебаний может быть очень сложным. Нашей задачей является усвоение основных закономерностей этого интересного явления на примере системы с малым числом степеней свободы.

11.11.1. Отрицательное трение как механизм возбуждения автоколебаний

Наиболее известным механизмом возбуждения автоколебаний является так называемое *отрицательное трение* (*отрицательное сопротивление*). Это действительно очень распространенный механизм возбуждения автоколебаний в системах различной физической природы. Так, звучание смычковых инструментов объясняется именно природой сил трения между смычком и струной.

В начале запишем уравнение энергетического баланса. Напомним, что для консервативной системы колебательная энергия $E = \text{const}$, поэтому $dE / dt = 0$. Для диссипативных систем $dE / dt = -P(t) < 0$, причем мощность потерь в системе $P(t) > 0$. Для автоколебательной системы в установившемся режиме изменение колебательной энергии E за период T равно нулю, т.е. уравнение энергетического баланса имеет вид $E(t + T) - E(t) = 0$. Очевидно, что такое равенство возможно, если вместе с уменьшением колебательной энергии, которое происходит в течение некоторой части периода, в течение другой часть периода происходит пополнение колебательной энергии. Первая ситуация возникает, когда мощность силы трения $P(t) > 0$, а вторая — когда $P(t) < 0$. Только при условии, что функция $P(t)$ будет знакопеременной, возможно уравнение энергетического баланса автоколебательной системы, т.е. работа силы трения за период T равна нулю:

$$\int_0^T P(t)dt = 0. \qquad (11.96)$$

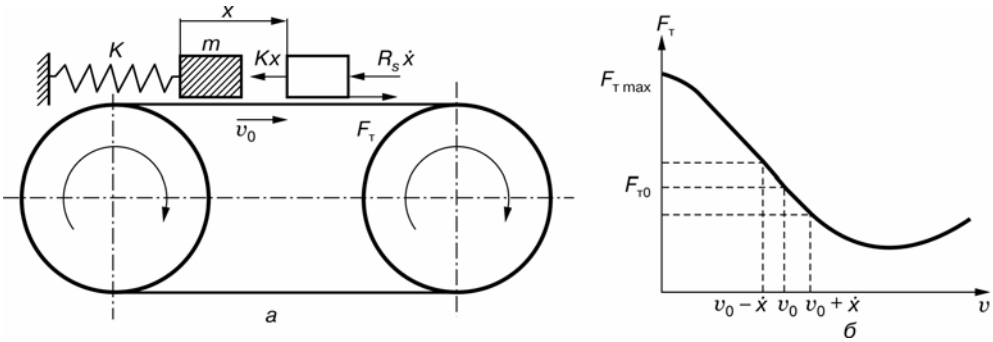


Рис. 11.14. Пример автоколебательной системы (*а*) и зависимость силы сухого трения $F_т$ от относительной скорости движения v (*б*)

Чтобы понять природу такого явления, когда силы трения являются причиной нарастающих колебаний, рассмотрим устройство, представленное на рис. 11.14, *а*. Это устройство состоит из двух вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями барабанов, которые приводят в движение бесконечную ленту, скорость которой υ_0 считаем постоянной. На ленте лежит масса m, движение которой ограничивается пружиной с коэффициентом жесткости K.

Вспомним некоторые сведения из курса физики [46]. Трение между поверхностями двух твердых тел, при отсутствии смазки между ними, называется *сухим*, а между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями таких сред, называют *вязким*. Силы трения направлены по касательной к скользящим поверхностям (или слоям), причем так, что они противодействуют их отно-

сительному смещению. В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности относительно другой, но и при попытке вызвать такое скольжение. Поэтому в последнем случае ее называют *силой трения покоя*; она приобретает значение, равное внешней силе и изменяется в интервале от нуля до некоторой $F_{\text{тmax}}$, которое определяет минимальное значение внешней силы, при которой удается сдвинуть тело с места (под внешней силой понимаем ее проекцию на направление, параллельное касательной к скользящим поверхностям).

Если внешняя сила превысит $F_{\text{тmax}}$, то тело начнет скользить, причем его ускорение будет определяться результирующей двух сил: внешней силы и силы трения скольжения $F_{\text{т}}$. Сила трения $F_{\text{т}}$ зависит от относительной скорости поверхностей υ (скорости скольжения). Характер этой зависимости определяется природой и состоянием скользящих поверхностей. Характерная зависимость силы $F_{\text{т}}$ от скорости скольжения υ представлена на рис. 11.14, *б*. Как видим, сила трения покоя может изменяться от нуля до некоторой максимальной величины $F_{\text{т max}}$. Характеристика силы трения скольжения состоит из двух участков: с увеличением скорости υ она сначала уменьшается (спадающий участок), а затем увеличивается (восходящий участок).

Рассмотрим устройство, представленное на рис. 11.14, *а*. Если масса m находится в состоянии равновесия, то сила упругости пружины $Kx_0 = F_{\text{т}0}$, где $F_{\text{т}0}$ — сила трения скольжения, действует на массу со стороны ленты. При этом статическое смещение массы $x_0 = F_{\text{т}0}/K$. Пусть в момент времени $t = 0$ вследствие некоторого возмущения масса m выведена из состояния равновесия, в произвольный момент времени $t > 0$ дополнительное смещение массы будет x. Тогда ее скорость равна $\dot{x}$, а скорость скольжения массы относительно ленты — $\upsilon = \upsilon_0 - \dot{x}$ (считаем $|\dot{x}| < \upsilon_0$). В процессе движения на массу m действуют три силы: реакция пружины $-K(x + x_0)$, сила трения скольжения $F_{\text{т}}(\upsilon)$ и сила внешнего сопротивления $-R_{\text{S}}\dot{x}$, которую можно считать пропорциональной скорости $\dot{x}$ (например, сила сопротивления воздушной среды). Соответствующее дифференциальное уравнение движения массы имеет вид

$$m\ddot{x} = -K(x + x_0) - R_{\text{S}}\dot{x} + F_{\text{т}}. \qquad (11.97)$$

Упростим ситуацию: при малых колебаниях, когда скорость $\dot{x}$ мала по сравнению с υ_0, можно использовать линейное выражение:

$$F_{\text{т}}(\upsilon) = F_{\text{т}}\left(\upsilon_0 - \dot{x}\right) \approx F_{\text{т}}(\upsilon_0) - R'\dot{x} = F_{\text{т}0} - R'\dot{x}, \qquad (11.98)$$

т.е., разложив функцию $F_{\text{т}}(\upsilon_0 - \dot{x})$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\upsilon = \upsilon_0$ по степеням малой величины $\dot{x}$, оставляем два слагаемых;

здесь $R' = \left.\dfrac{dF_{\text{т}}}{d\upsilon}\right|_{\upsilon=\upsilon_0}$ определяет тангенс угла наклона характеристики трения (рис. 11.14, *б*) в точке с координатами (υ_0, $F_{\text{т}0}$). Подставляя в (11.97) выражения (11.98) и $Kx_0 = F_{\text{т}0}$, получаем такое уравнение движения:

$$m\ddot{x} + (R' + R_S)\dot{x} + Kx = 0. \qquad (11.99)$$

Сравнивая уравнение (11.99) с уравнением линейного осциллятора с демпфированием (2.26), отмечаем, что сумма ($R' + R_s$) представляет собой эффективный коэффициент трения. Если ($R' + R_s$) > 0, то со временем колебания постепенно затухают. Это происходит, когда точка (υ_0, $F_{\text{т}0}$) находится на восходящем участке характеристики трения, где $R' > 0$.

На спадающем участке характеристики силы трения величина R' становится отрицательной, и если сумма ($R' + R_s$) равна нулю, то в уравнении (11.99) пропадает слагаемое, которое определяет демпфирование, и возбужденное движение будет представлять собой гармонические колебания. Если сумма ($R' + R_s$) будет отрицательной, то колебания вблизи положения равновесия со временем будут нарастать.

Природу отрицательного коэффициента трения на спадающем участке характеристики силы трения можно объяснить, исходя из следующих соображений. Когда масса перемещается в направлении движения ленты (вправо), относительная скорость ее скольжения по ленте будет уменьшаться; когда же масса перемещается против направления движения ленты (влево), относительная скорость скольжения массы по ленте будет увеличиваться. При этом если масса двигается в направлении движения ленты, то сила трения, действующая со стороны ленты на массу, выполняет положительную работу, поскольку направления силы трения и движения массы совпадают. Наоборот, когда масса двигается против движения ленты, то сила трения выполняет отрицательную работу, поскольку направления движения массы и силы трения противоположны. Поведение массы будет зависеть от того, как зависит сила трения скольжения от скорости скольжения.

Если сила трения возрастает со скоростью υ, то при движении массы вправо сила трения уменьшается, и сила упругости пружины будет больше, чем сила трения, — масса вернется в положение равновесия; то же самое происходит при движении массы влево, когда скорость скольжения увеличивается, а значит, возрастает и сила трения, которая снова вернет массу в положение равновесия, поскольку она стала больше силы упругости. Иными словами, положительная работа силы трения будет меньше, чем отрицательная работа, т.е. си-

ла трения больше мешает движению массы, чем помогает ей. Таким образом, когда сила трения возрастает при увеличении скорости скольжения, то положение равновесия массы на ленте соответствует устойчивому состоянию равновесия.

Совсем иначе будет вести себя масса, если сила трения уменьшается с увеличением скорости скольжения. Когда масса двигается вправо, т.е. в сторону движения ленты, то относительная скорость движения υ уменьшается, а сила трения увеличивается и ее приращение направлено вправо, т.е. в сторону движения. Масса будет растягивать пружину, и двигаться вправо. Это движение закончится, когда сила упругости пружины станет больше, чем сила трения, которая не может быть превысить силу трения покоя. Тогда масса начнет перемещаться навстречу движению ленты, т.е. возвращаться к положению равновесия. Когда масса двигается влево, то сила трения уменьшается вследствие увеличения скорости скольжения υ. Здесь положительная работа силы трения доминирует над отрицательной работой, и сила больше помогает, чем препятствует движению массы. Таким образом, если точка (υ_0, $F_{т0}$) лежит на спадающем участке характеристики силы трения $F_т$, то силы, которые возникают при случайном движении массы в одну или другую сторону от положения равновесия, выводят массу далеко от положения равновесия, т.е. состояние равновесия оказывается неустойчивым. Масса не возвращается к положению равновесия, а выполняет колебания. В целом за период колебаний сила трения скольжения, действующая со стороны ленты на массу, выполняет положительную работу. Вначале эта работа идет на увеличение энергии колебаний массы (пока колебания нарастают), а потом компенсирует те потери энергии, которые возникают вследствие того, что при больших амплитудах колебаний массы скорость скольжения выходит за пределы спадающего участка кривой $F_т(\upsilon)$. Устанавливается такая амплитуда колебаний массы, при которой поступление энергии за часть периода, в течение которого скорость скольжения массы лежит в пределах спадающего участка кривой $F_т(\upsilon)$, в точности компенсирует те потери энергии, которые происходят в течение другой часть периода, когда скорость скольжения массы выходит за пределы спадающего участка кривой $F_т(\upsilon)$. С данной стационарной амплитудой и будут происходить автоколебания массы.

Проведенный анализ линеаризованного уравнения движения (11.99) позволил определить устойчивость положения равновесия, вблизи которого система осуществляет малые колебания. В общем случае такой анализ позволяет понять начальный этап возбуждаемых колебаний. Но в случае неустойчивости анализ не дает возможность проследить дальнейшее развитие процесса колебаний. Понятно, что здесь следует учитывать нелинейные члены уравнения движения, ко-

торые начинают играть более весомую роль при увеличении амплитуды колебаний. При этом тип нелинейности существенным влияет на развитие процесса.

11.11.2. Осциллятор Рэлея

Например, рассмотрим колебательную систему, для которой сила трения описывается нелинейной функцией скорости $F_{\text{т}}\left(\dot{\xi}\right) = R_1\dot{\xi} - R_3\dot{\xi}^3$ (коэффициенты $R_1 > 0,\ R_3 > 0$). Соответствующее дифференциальное уравнение движения, которое называется *уравнением Рэлея*, имеет вид

$$m\ddot{x} - R_1\dot{x} + R_3\dot{x}^3 + Kx = 0. \qquad (11.100)$$

При малых отклонениях от состояния равновесия основное значение имеет линейное слагаемое силы трения, которое в данном случае определяет дестабилизирующее действие. Поэтому состояние равновесия является неустойчивым, и малые начальные возмущения будут вызывать постепенный рост колебаний. Но при этом будет увеличиваться демпфирующее влияние кубического слагаемого, так, что нарастание колебаний замедлится, и движение будет стремиться к режиму автоколебаний, для которого характерно постоянное значение амплитуды.

При немалых начальных возбуждениях системы демпфирующее действие кубического слагаемого вначале будет более весомым, чем дестабилизирующее действие линейного слагаемого, т.е. колебания в начале процесса будут затухать. Но с уменьшением колебаний влияние кубического слагаемого также будет уменьшаться, и движение будет стремиться к такому же стационарному режиму, который характеризуется балансом противоположных воздействий.

Для дальнейшего анализа автоколебаний в системе уравнение Рэлея (11.100) целесообразно привести к безразмерному виду. Такой вид уравнения является очень удобным при исследовании нелинейных систем, поскольку естественно возникают характеристические параметры системы. Введем следующие безразмерные переменные: $\tau = \omega_0 t$, $\xi = x/x_0$ ($\omega_0 = \sqrt{K/m}$ — собственная частота соответствующего консервативного линейного осциллятора, x_0 — статическое смещение массы m). Итак, уравнение (11.100) будет иметь вид

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \mu\left(1 - \alpha\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2\right)\frac{d\xi}{d\tau} + \xi = 0, \qquad (11.101)$$

где $\mu = R_1\omega_0/K$; $\alpha = R_3 x_0^2\omega_0^2/R_1$. Для определенности положим параметр $\alpha = 1$. Тогда уравнение Рэлея

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \mu\left(1 - \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2\right)\frac{d\xi}{d\tau} + \xi = 0 \qquad (11.102)$$

будет иметь один безразмерный параметр μ. Запишем уравнение (11.102) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, которая определяет фазовое пространство осциллятора. Введя фазовые переменные $x_1 = \xi$ и $x_2 = d\xi/d\tau$, получим

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu\left(1 - x_2^2\right)x_2 - x_1. \qquad (11.103)$$

Рекомендуем читателю, согласно параграфу 11.4, определить особые точки системы уравнений (11.103) и классифицировать их. В ходе такого исследования нетрудно убедиться в том, что уравнение Рэлея имеет одну особую точку $x_1 = x_2 = 0$, которая является устойчивым узлом при $\mu < -2$, устойчивым фокусом при $-2 < \mu < 0$, неустойчивым фокусом — при $0 < \mu < 2$ и неустойчивым узлом при $\mu > 2$. Итак, если выполняется условие самовозбуждения $\mu > 0$, то на фазовой плоскости образуется предельный цикл, который соответствует режиму периодических автоколебаний.

На рис. 11.15 приведены фазовые портреты (слева) и временные зависимости скорости x_2 (справа, на оси абсцисс отложено нормированное время t/T_0, $T_0 = 2\pi/\omega_0$) при разных значениях параметра μ (результаты получены путем численного решения на ЭВМ системы уравнений (11.103)). На фазовом портрете представлены две траектории, которые соответствуют разным начальным условиям, а именно: если начальная точка находится внутри и снаружи предельного цикла:

1) $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0{,}01$;
2) $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1{,}5$.

Временные зависимости скорости приведены для первого варианта начальных условий.

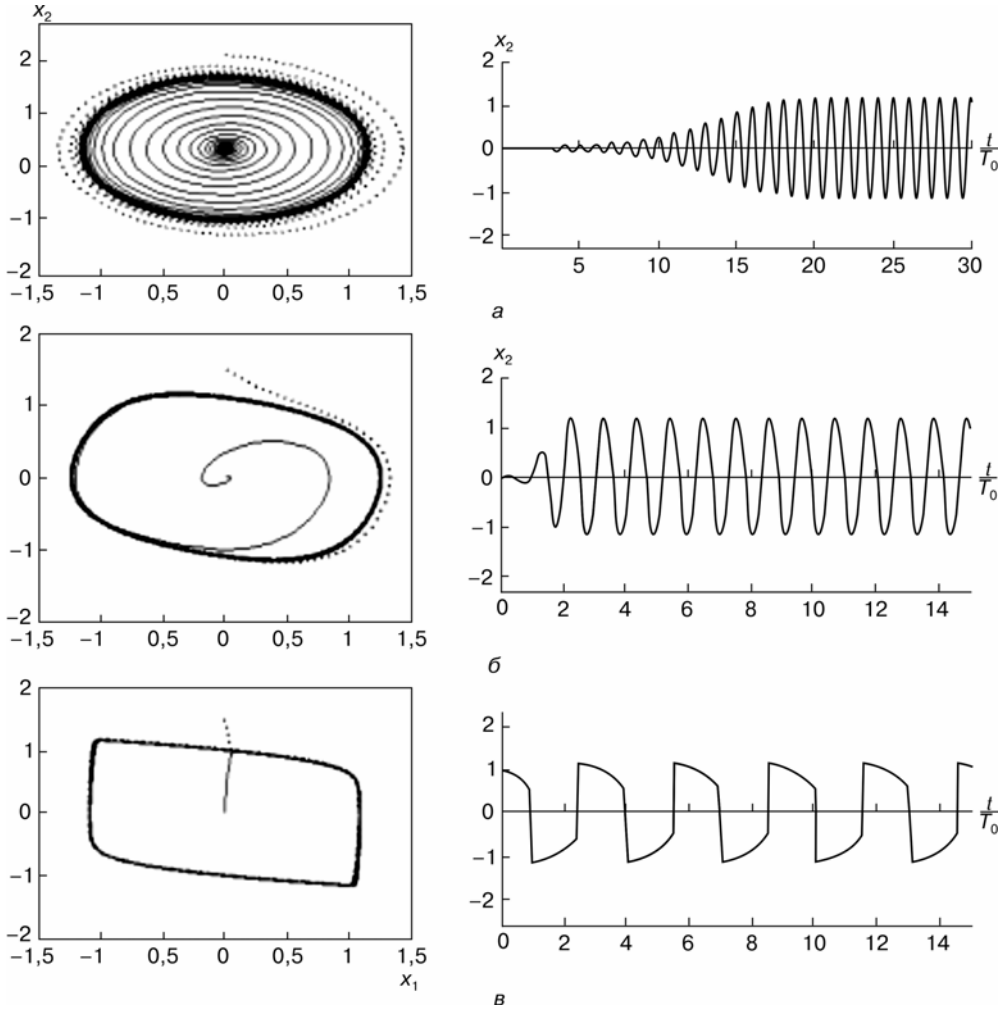


Рис. 11.15. Фазовые портреты (слева) и временные зависимости скорости колебаний (справа) осциллятора Рэлея, μ:
а — 0,1; *б* — 1; *в* — 10

При $\mu = 0{,}1$ (рис. 11.15, *а*) автоколебания являются квазигармоническими. До выхода на предельный цикл имеем длинный (по сравнению с периодом колебаний) переходной процесс. Соответственно, на фазовой плоскости фазовая точка выполняет много оборотов вокруг начала координат. При $\mu << 1$ период автоколебаний практически не зависит от μ и примерно равен периоду собственных колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$. При $\mu \approx 1$ (рис. 11.15, *б*) колебания уже существенно не гармонические. На фазовой плоскости предельный цикл в виде эллипса сменяется другой замкнутой кривой, причем выход фазовой точки на предельный цикл происходит в течение несколько периодов.

Наконец при $\mu >> 1$ (рис. 11.15, *в*) на графике временной зависимости можно четко выделить участки быстрого и медленного изменения величины $x_2 = d\xi/d\tau$. Такие колебания называются *релаксационными*, т.е. связанными с *релаксацией* (от латинского слова *relaxatio* — уменьшение, ослабление). Здесь время выхода фазовой точки на предельный цикл очень мало. При $\mu >> 1$ время релаксации системы (т.е. временной отрезок медленного изменения величины x_2), а, следовательно, и период автоколебаний полностью определяется значением параметра μ. Вследствие этого и возникло само понятие "релаксационные автоколебания". Системы с релаксационными автоколебаниями характеризуются существенной нелинейностью и значительным обменом энергии с источником.

Графики на рис. 11.15 позволяют сделать следующие общие выводы: если в автоколебательной системе потери энергии на трение малы по сравнению с энергией колебательного движения, то и энергия, необходимая для компенсации потерь, также мала (для уравнения (11.101) это соответствует малому значению параметра μ). Поступая в систему малыми порциями, энергия компенсирует потери энергии, которые возникают при колебаниях, но при этом очень мало изменяется сам процесс колебаний. Автоколебания по форме близки к гармоническим, и их период почти совпадает с периодом собственных колебаний системы. Если потери на трение значительные, а значит, и велика энергия, которая поступает от источника, то автоколебания могут по форме значительно отличаться от гармонических, и их период может существенно отличаться от периода собственных колебаний. Поэтому, например, маятник хороших часов, у которых потери на трение малы, выполняет колебания, которые по форме почти не отличаются от гармонических, а их частота почти точно совпадает с частотой собственных колебаний маятника, (это обеспечивает точность хода часов).

11.11.3. Почему звучит скрипка

Звучание скрипки обусловлено движением смычка. Понятно, что нельзя объяснить все сложные явления, связанные с особенностями звучания скрипки. Однако попробуем в принципе разобраться, почему возникают колебания струны скрипки, когда по ней проводят смычком [*].

Сила трения между смычком и струной — это сила сухого трения. Природа этой силы уже изучалась, и на рис. 11.14, *б* приведена ее типичная характеристика со спадающим и восходящим участками.

---

[*] Асламазов Л.Г., Варламов А.А. Удивительная физика. — М.: Наука, 1987. — С. 48—53.

Итак, пусть смычок двигается с постоянной скоростью υ_0, а струна отклонена от положения равновесия таким образом, чтобы равнодействующая сил упругости уравновесила силу трения скольжения $F_т(\upsilon_0)$. Если струна случайно отклонится в сторону движения смычка, то относительная скорость $\upsilon = \upsilon_0 - \dot{x}$ ($\dot{x}$ — скорость струны) уменьшится. Если относительная скорость смычка и струны при колебаниях струны находится в пределах спадающего участка зависимости силы трения от скорости (рис. 11.14, *б*), то, как следствие, сила трения возрастет и струна отклонится еще больше. При дальнейшем отклонении упругая сила в некоторый момент обязательно превысит силу трения, ведь сила трения скольжения не может быть больше, чем максимальное значение силы трения покоя $F_{т\,max}$, и струна начнет двигаться в противоположную сторону. Она пройдет положение равновесия, снова отклонится, остановится и т.д.: таким образом, будут возбуждаться колебания струны.

Важно, что эти колебания будут незатухающие. Действительно, при движении струны в направлении движения смычка сила трения скольжения выполняет положительную работу, а в противоположном направлении — отрицательную. Но скорость скольжения $\upsilon_0 - \dot{x}$ в первом случае меньше, чем скорость $\upsilon_0 + \dot{x}$ во втором, а сила трения $F_т(\upsilon_0 - \dot{x})$, наоборот, больше, чем $F_т(\upsilon_0 + \dot{x})$. Таким образом, положительная работа сил трения при движении струны в направлении движения смычка больше, чем отрицательная работа при противоположном движении струны, и в целом сила трения выполняет положительную работу. Амплитуда колебаний будет увеличиваться, но до определенной величины. Когда скорость скольжения выходит за пределы спадающего участка, отрицательная работа силы трения может стать больше положительной. Энергия, а, следовательно, и амплитуда колебаний будут уменьшаться.

Таким образом, струна будет колебаться с амплитудой, при которой полная работа сил трения равна нулю. Здесь следует отметить, что часть положительной работы компенсирует затраты энергии на возбуждение колебаний корпуса скрипки, к которому прикреплены струны. Сами колебания корпуса скрипки возбуждают звуковые волны в окружающей среде, ведь струна является очень неэффективным источником звука (см. п. 7.12.1). Итак, часть положительной работы силы трения скольжения тратится на создание звуковой энергии, которую излучает скрипка. С такой постоянной амплитудой и будут происходить незатухающие колебания струны.

Возникновение звуковых колебаний при движении одного твердого тела по поверхности другого происходит достаточно часто: сухое трение в дверных завесах может вызвать их скрип; скрипят половицы, обувь; скрип можно вызвать, если просто пальцем провести по

любой гладкой поверхности. Явления, которые здесь возникают, аналогичны возбуждению колебаний струны скрипки. Вначале скольжения нет, и возникает упругая деформация. Дальше происходит отрыв, и возбуждаются колебания тела. Колебания не затухают, поскольку благодаря спадающей характеристике сил сухого трения поступает необходимая энергия за счет работы этих сил.

При изменении характера зависимости сил трения от скорости скрип пропадает. Известно, например, что для этого достаточно смазать скользящие поверхности. В случае, когда сила вязкого трения пропорциональна скорости, условий, необходимых для возбуждения колебаний, нет. Наоборот, если необходимо вызвать колебания, поверхности специально обрабатывают, чтобы достичь более резкого уменьшения сил трения при увеличении скорости. Например, для этого смычок скрипки натирают канифолью.

11.12. Вынужденные колебания нелинейного осциллятора

Как нам известно, вынужденными называют колебания, которые возникают и поддерживаются за счет внешнего воздействия на систему, не имеющую других источников энергии. Можно выделить два способа внешнего воздействия: первый из них - это непосредственное силовое влияние на систему, второй - параметрическое влияние, когда внешняя сила заставляет периодически изменяться некоторый параметр колебательной системы (например, длину нити маятника). Второй способ внешнего воздействия рассмотрим в параграфе 11.14, а сейчас сосредоточим свое внимание на первом.

В линейных системах с внешним воздействием отклик системы представляют собой сумму собственных и вынужденных колебаний. С течением времени собственные колебания затухают и в системе остаются чисто вынужденные колебания или, как говорят иначе, в системе присутствует стационарный режим колебаний.

В нелинейных системах с внешним воздействием суперпозиции собственных и вынужденных колебаний не существует. Поэтому в таких системах вынужденные колебания нужно определять как стационарные процессы (время $t \to \infty$), когда про начальные условия система "забыла". Понятно, что для этого система должна быть диссипативной. Итак, будем считать, что в системе присутствует диссипация энергии, а время наблюдения достаточно велико, чтобы обеспечить независимый от начальных условий режим вынужденных колебаний.

11.12.1. Нелинейный резонанс

Рассмотрим систему, в которой нелинейность связана с нелинейностью восстанавливающей силы $F_в$, а сила демпфирования — линейная. Для системы с одной степенью свободы при гармонической внешней силе имеем уравнение движения:

$$m\ddot{x} = -R\dot{x} + F_в + F_0 \cos(\omega t), \qquad (11.104)$$

где ω — частота внешней силы; R — коэффициент демпфирования. Пусть нелинейная восстанавливающая сила определяется выражением

$$F_в = -Kx\left[1 \pm \left(\frac{x}{d}\right)^2\right], \qquad (11.105)$$

где K — коэффициент жесткости; d — имеет значение смещения, при котором нелинейная часть восстанавливающей силы равна линейной составляющей. Знак плюс соответствует ситуации, когда восстанавливающая сила изменяется быстрее, чем по линейному закону. Такую колебательную систему называют системой с *жесткой нелинейностью*. Если взять знак минус, то $F_в$ будет изменяться медленнее, чем по линейному закону. Соответственно, в этом случае говорят о системе с *мягкой нелинейностью*.

Подставив (11.105) в (11.104), получим

$$m\ddot{x} + R\dot{x} + Kx\left[1 \pm \left(\frac{x}{d}\right)^2\right] = F_0 \cos(\omega t). \qquad (11.106)$$

Перед тем как начать решать уравнение (11.106), нужно привести его к безразмерному виду и определить безразмерные параметры, которые характеризуют поведение исследуемой системы. Для этого выполним следующие преобразования. Поделим (11.106) на коэффициент жесткости K:

$$\frac{\ddot{x}}{\omega_0^2} + \frac{R}{K}\dot{x} + \left[1 \pm \left(\frac{x}{d}\right)^2\right]x = x_{ст} \cos(\omega t), \qquad (11.107)$$

где $\omega_0^2 = K/m$ — квадрат собственной частоты соответствующей линейной системы; $x_{ст} = F_0 / K$ — смещение в системе при статической нагрузке. В (11.107) присутствуют два характерных масштаба системы — $x_{ст}$ и d. Перепишем (11.107), введя новый параметр $\varepsilon = (x_{ст}/d)^2$ и поделив уравнение на $x_{ст}$:

$$\frac{\ddot{x}}{x_{\text{ст}}\omega_0^2}+\frac{R}{K}\frac{\dot{x}}{x_{\text{ст}}}+\frac{x}{x_{\text{ст}}}\left[1\pm\varepsilon\left(\frac{x}{x_{\text{ст}}}\right)^2\right]=\cos(\omega t). \qquad (11.108)$$

Используем следующие обозначения:

$$\frac{x}{x_{\text{ст}}}=\xi,\quad \omega_0 t=\tau,\quad \frac{\omega}{\omega_0}=\gamma,\quad \left(\frac{x_{\text{ст}}}{d}\right)^2=\varepsilon. \qquad (11.109)$$

Тогда (11.108) приобретает вид

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+\frac{1}{Q}\frac{d\xi}{d\tau}+\xi\left[1\pm\varepsilon\xi^2\right]=\cos(\gamma\tau), \qquad (11.110)$$

где $Q=K/(R\omega_0)=m\omega_0/R=\omega_0/(2\delta)$ — добротность системы (см. (2.61)).

Уравнение (11.110) безразмерное. При этом появился очень важный безразмерный параметр ε, определяющий степень нелинейности системы. Нас будут интересовать системы со слабой нелинейностью, т.е. когда $\varepsilon << 1$.

Рассмотрим наиболее важную ситуацию, когда частота внешнего воздействия ω близка к собственной частоте осциллятора ω_0. Для линейной системы ($\varepsilon = 0$) установившийся отклик системы на внешнее влияние определяется следующим образом: $\xi = A\cos(\gamma\tau - \varphi)$. Если это пробное решение подставить в нелинейное уравнение (11.110), то в слагаемом с ξ^3 будет присутствовать

$$\cos^3(\gamma\tau-\varphi)=\left(\frac{3}{4}\cos(\gamma\tau-\varphi)+\frac{1}{4}\cos(3(\gamma\tau-\varphi))\right). \qquad (11.111)$$

Как следует из выражения (11.111), в отклике появилось колебание с частотой, которая втрое больше, чем частота внешнего воздействия. Тогда пробное решение $\cos(n(\gamma\tau - \varphi))$ приводит к появлению в отклике составляющей $\cos((n + 2)(\gamma\tau - \varphi))$. Поэтому приходим к такому выводу: решение уравнения (11.110), которое определяет установившиеся вынужденные колебания нелинейного осциллятора, следует искать в виде

$$\xi(\tau)=\sum_n \xi_n\cos(n(\gamma\tau-\varphi)),\quad n=1,3,5... \qquad (11.112)$$

Подставив (11.112) в (11.110), получим

$$-\gamma^2\xi_1\cos(\gamma\tau-\varphi)-\frac{\gamma}{Q}\xi_1\sin(\gamma\tau-\varphi)+\xi_1\cos(\gamma\tau-\varphi)\pm\varepsilon\xi_1^3\cos^3(\gamma\tau-\varphi)+...=\cos(\gamma\tau). \qquad (11.113)$$

Здесь остановимся и сделаем важное замечание. Следует понять, что согласно соотношению (11.113) в нелинейной системе все гармоники

в отклике *взаимосвязаны*, так что ни одна из них не может изменяться, не влияя на другие. Чтобы этот утверждение выглядело более наглядно, устремим в (11.110) и (11.113) добротность $Q \to \infty$, т.е. сделаем переход к консервативной системе. Понятно, что такой шаг является "условным", ведь вынужденные колебания консервативной системы определяются природой собственных и чисто вынужденных колебаний, однако в нелинейной системе принцип суперпозиции не справедлив. Можно также считать, что диссипация очень мала, но время наблюдения велико, и потому собственные колебания в системе затухли. Итак, при таких условиях с учетом тождества (11.111) формула (11.113) приобретает вид (считаем $\varphi = 0$):

$$\sum_n A_n(\xi_1, \xi_3, \xi_5, \ldots)\cos(n\gamma\tau) = \cos(\gamma\tau), \quad n = 1,3,5,\ldots, \tag{11.114}$$

где $A_n(\xi_1, \xi_3, \xi_5, \ldots)$ — коэффициенты при $\cos(n\gamma\tau)$. Для выполнения равенства (11.114) необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} A_1(\xi_1, \xi_3, \xi_5, \ldots) &= 1, \\ A_3(\xi_1, \xi_3, \xi_5, \ldots) &= 0, \\ A_5(\xi_1, \xi_3, \xi_5, \ldots) &= 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned} \tag{11.115}$$

Система (11.115) наглядно иллюстрирует взаимосвязь гармонических составляющих отклика осциллятора. Рекомендуем читателю, оставив в бесконечной сумме (11.112) два слагаемых (ведь $\varepsilon \ll 1$) $\xi(\tau) = \xi_1 \cos(\gamma\tau) + \xi_3 \cos(3\gamma\tau)$, расписать систему (11.115) относительно двух коэффициентов A_1 и A_3:

$$A_1 = \left(1 - \gamma^2\right)\xi_1 \pm \frac{3}{4}\varepsilon\xi_1\left(\xi_1^2 + \xi_1\xi_3 + 2\xi_3^2\right) = 1, \tag{11.116}$$

$$A_3 = \left(1 - (3\gamma)^2\right)\xi_3 \pm \frac{1}{4}\varepsilon\left(\xi_1^3 + 6\xi_1{}^2\xi_3 + 3\xi_3^3\right) = 0. \tag{11.117}$$

Система уравнений (11.116), (11.117) иллюстрирует в явном виде взаимосвязь между первой и третьей гармониками.

Рассмотрим диссипативный осциллятор. За генерацию высших гармоник с частотами $n\gamma$, $n = 1,3,5\ldots$, отвечает член $\varepsilon\xi^3$ в уравнении (11.110). Поскольку величина $\varepsilon << 1$ и, как мы полагаем, частота внешнего воздействия ω близка к собственной частоте осциллятора ω_0, то можно записать приближенное уравнение для амплитуды первой гармоники ξ_1. Для этого, учитывая (11.111), оставляем в (11.113) только члены с $n = 1$:

$$\left[\xi_1 - \gamma^2\xi_1 \pm \frac{3}{4}\varepsilon\xi_1^3\right]\cos(\gamma\tau - \varphi) - \frac{\gamma}{Q}\xi_1 \sin(\gamma\tau - \varphi) = \cos(\gamma\tau). \qquad (11.118)$$

Перепишем это выражение в таком виде:

$$C\cos(\gamma\tau - \varphi) - D\sin(\gamma\tau - \varphi) = \cos(\gamma\tau), \qquad (11.119)$$

где $C = \xi_1 - \gamma^2\xi_1 \pm (3/4)\varepsilon\xi_1^3$, $D = \gamma\xi_1/Q$. Уравнение (11.119) справедливо, если $C = \cos\varphi$ и $D = \sin\varphi$, ведь $\cos\varphi\cos(\gamma\tau - \varphi) - \sin\varphi\sin(\gamma\tau - \varphi) = \cos(\gamma\tau)$. Отсюда величины C и D связаны соотношениям $C^2 + D^2 = 1$. Подставив в уравнение $C^2 + D^2 = 1$ выражения для C и D, найдем связь между амплитудой первой гармоники ξ_1 и нормированной частотой внешнего воздействия $\gamma = \omega / \omega_0$:

$$\left[1 - \gamma^2 \pm \frac{3}{4}\varepsilon\xi_1^2\right]^2 + \left(\frac{\gamma}{Q}\right)^2 = \frac{1}{\xi_1^2}, \qquad (11.120)$$

а также соотношение, которое определяет сдвиг фазы между внешней силой и откликом системы:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{D}{C} = \frac{\gamma}{Q} \cdot \frac{1}{1 - \gamma^2 \pm 3\varepsilon\xi_1^2/4}. \qquad (11.120а)$$

Определим зависимость амплитуды ξ_1 от частоты внешнего воздействия γ. Сначала, чтобы облегчить анализ, устремим $Q \to \infty$ (это соответствует системе без демпфирования). Тогда перепишем (11.120) в виде

$$\gamma^2 = \left(1 \pm \frac{3}{4}\varepsilon\xi_1^2\right) - \frac{1}{\xi_1}. \qquad (11.121)$$

Уравнение (11.121) можно получить из (11.116), положив $|\xi_3| << |\xi_1|$, что действительно справедливо в диапазоне частот вблизи ω_0. Еще раз подчеркнем, что решение уравнения (11.121) имеет “условный” характер, ведь его следует рассматривать как частное решение неоднородного уравнения. Получить общее решение, прибавив к частному общее решение соответствующего однородного уравнения, нет возможности, поскольку принцип суперпозиции не работает. Однако характер влияния демпфирования на резонансную кривую осциллятора по сравнению с консервативной системой для нас уже понятен. Поэтому, исследовав достаточно простое уравнение (11.121), мы выясним поведение кривой, которая определяется уравнением (11.120).

На рис. 11.16, *а* представлена зависимость амплитуды ξ_1 (кривая *1*) от частоты γ^2 для системы с жесткой нелинейностью (знак плюс в уравнении (11.121)) при $\varepsilon = 0{,}1$. Данная кривая является результатом

сложения параболы $1+(3/4)\varepsilon\xi_1^2$ (кривая *2*) и гиперболы — $1/\xi_1$ (кривая *3*). Как и в случае линейного осциллятора (рис. 2.10) кривая отклика на внешнее воздействие имеет две ветви: в одной смещение находится в фазе, а в другой — в противофазе с внешней силой. Обе ветви асимптотически приближаются к кривой $1+(3/4)\varepsilon\xi_1^2$. Понятно, что полуплоскость $\gamma^2 < 0$ не имеет физического смысла.

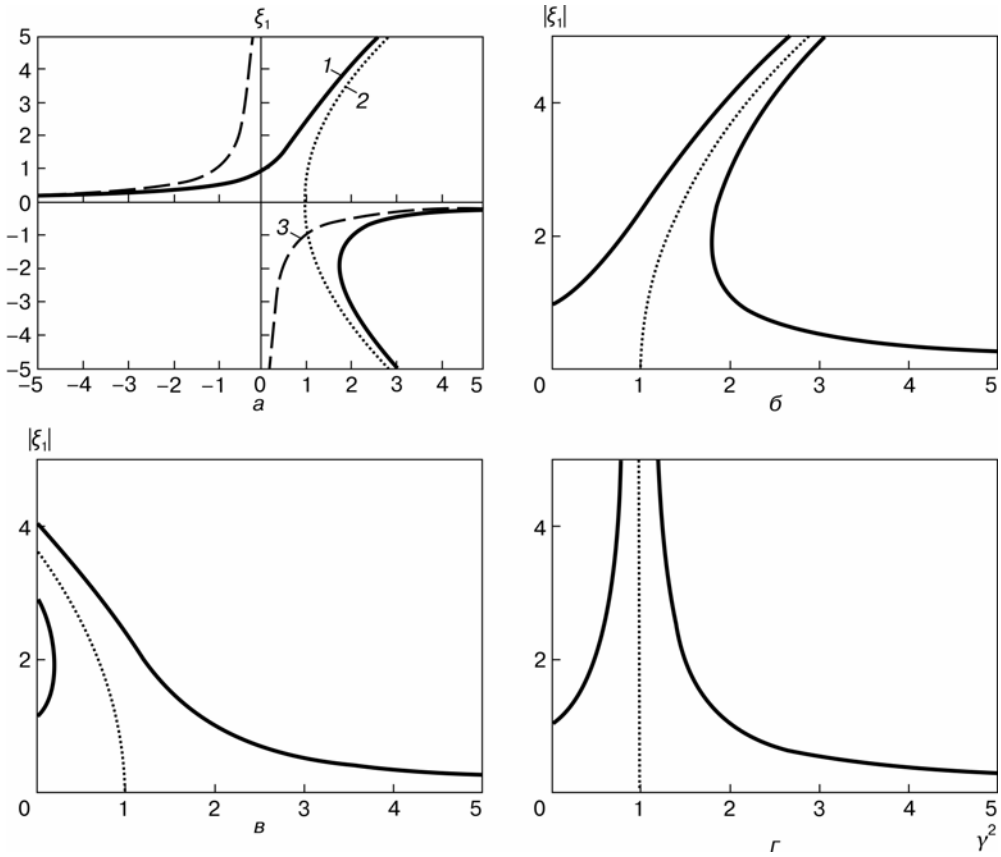


Рис. 11.16. Резонансные кривые консервативного осциллятора ($\varepsilon = 0{,}1$): *а*, *б* — жесткая нелинейность; *в* — мягкая нелинейность; *г* — линейный осциллятор ($\varepsilon = 0$)

На рис. 11.16, *б* представлены зависимости модуля $|\xi_1|$ от γ^2 для системы с жесткой нелинейностью ($\varepsilon = 0{,}1$), на рис. 11.16, *в* — для системы с мягкой нелинейностью (знак минус в уравнении (11.121)). Рис. 11.16, *г* соответствует линейной системе ($\varepsilon = 0$). Интересно отметить, что парабола $\gamma^2 = 1 \pm (3/4)\varepsilon\xi_1^2$ (для линейной системы на рис.

11.16, *г* она преобразуется в прямую линию) определяет связь между частотой и амплитудой свободных колебаний консервативного нелинейного осциллятора. При этом выражение $\gamma = \sqrt{1 \pm (3/4)\varepsilon\xi_1^2} \approx 1 \pm (3/8)\varepsilon\xi_1^2$ совпадает с формулой (11.70) для частоты свободных колебаний осциллятора с кубической нелинейностью, которая получена асимптотическим методом. Линию $\gamma^2 = 1 \pm (3/4)\varepsilon\xi_1^2$ называют *скелетной кривой.*

Приведенные графики позволяют отметить следующие особенности колебаний нелинейной системы:

1) отсутствие бесконечного роста амплитуды ξ_1 как при совпадении ω с ω_0, так и при $\omega \neq \omega_0$, что обусловлено зависимостью периода колебаний нелинейной системы от ее амплитуды;

2) неоднозначность процесса колебаний в зависимости от направления изменения частоты внешней силы ω. Это связано с неоднозначностью зависимости ξ_1 от γ^2 для ряда частот. Для системы с жесткой нелинейностью эти частоты находятся выше, а для системы с мягкой нелинейностью — ниже частоты линейного резонанса ω_0. Понятно, что наклон резонансной кривой на рис. 11.16, *б*, *в* зависит от значений параметра ε: чем значение ε больше, тем сильнее наклоняется резонансная кривая вправо или влево, соответственно. При $\varepsilon = 0$ (линейная система, рис. 11.16, *г)* наклон отсутствует;

3) параметр $\varepsilon = (x_{ст}/d^2)$, но $x_{ст} = F_0/K$; отсюда следует, что *параметр нелинейности зависит от амплитуды F_0 внешней силы*, этот вывод очень важен.

Вернемся к нелинейному диссипативному осциллятору, и в качестве примера рассмотрим систему с жесткой нелинейностью. Чтобы детальнее проанализировать уравнение (11.120), преобразуем его к удобной для проведения вычислений форме. Для этого введем следующие обозначения:

- $P = \frac{3}{4}\varepsilon Q^3 = \frac{3}{4}\left(\frac{F_0}{Kd}\right)^2 Q^3$ — безразмерный параметр, характеризующий внешнее воздействие;
- $y = \frac{3}{4}\varepsilon Q \xi_1^2$ — безразмерный параметр, характеризующий амплитуду вынужденных колебаний;
- $\Delta = \left(\gamma^2 - 1\right)Q$ — безразмерное отклонение частоты.

Тогда соотношение (11.120) примет вид

$$(y - \Delta)^2 + \frac{\Delta}{Q} + 1 = \frac{P}{y}. \qquad (11.122)$$

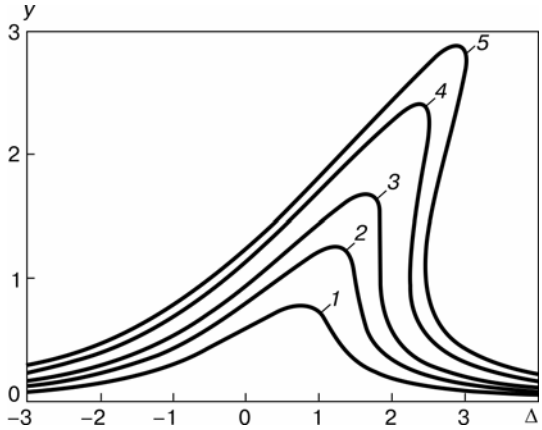


Рис. 11.17. Резонансные кривые нелинейного осциллятора с диссипацией: *1-5* — P = 0,8; 1,3; 1,77; 2,6; 3,2; Q = 30

Используя разные значения параметра внешнего воздействия P, строим ряд кривых $y = y(P)$, которые представляют собой резонансные кривые нелинейного осциллятора в безразмерных координатах y и Δ (рис. 11.17). Резонансные кривые, которые находятся ниже кривой *3*, характеризуются однозначной зависимостью амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней силы. Резонансные кривые такого типа представляют собой несколько деформированные кривые зависимости амплитуды колебаний от частоты для линейного осциллятора с демпфированием. Для системы с жесткой нелинейностью их максимумы смещены вправо. Для кривой *3* характерно появление вертикальной касательной. При дальнейшем увеличении амплитуды внешнего воздействия резонансные кривые располагаются выше кривой *3*, и в них появляются участки с вертикальными касательными, которые определяют область неоднозначной зависимости амплитуды колебаний от частоты внешнего воздействия. Появление этой неоднозначности и связанные с ней явления заслуживают специального обсуждения.

На рис. 11.18 представлено поведение одной резонансной кривой диссипативного осциллятора с жесткой нелинейностью (сравните с рис. 11.16, *б*). Определим координаты точки M пересечения резонансной кривой со скелетной кривой $1-\gamma^2+3\varepsilon\xi_1^2/4=0$. Для точки M в соответствии с (11.120) имеем $\xi_1^2 = Q^2/\gamma^2$. Подставляя это соотношение в уравнение скелетной кривой $1-\gamma^2+3\varepsilon\xi_1^2/4=0$, получаем уравнение для абсциссы точки M: $\gamma^4-\gamma^2-3\varepsilon Q^2/4=0$. Отсюда координаты точки M имеют следующие значения:

$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+3\varepsilon Q^2}\right), \quad \tilde{\xi}_1 = \frac{Q}{\tilde{\gamma}}. \tag{11.123}$$

В случае линейного осциллятора ($\varepsilon = 0$) $\tilde{\gamma} = 1$, $\tilde{\xi}_1 = Q$.

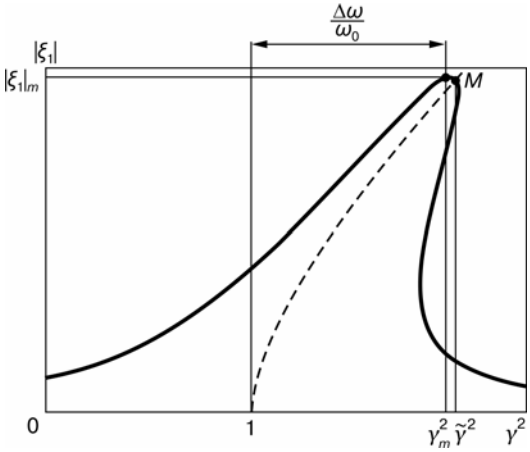


Рис. 11.18. Резонансные кривые диссипативного нелинейного осциллятора с жесткой нелинейностью

Напомним, что величина Q — это соотношение между резонансной амплитудой линейных колебаний $x_л$ и статическим смещением $x_{ст}$ (см. (2.68)), т.е. $Q = x_л / x_{ст}$, а $\varepsilon = (x_{ст}/d)^2$. Таким образом, величину

$$\varepsilon Q^2 = \left(\frac{x_л}{d}\right)^2 \tag{11.124}$$

можно рассматривать как *меру нелинейности осциллятора в области максимума амплитуды колебаний.*

Если $\varepsilon Q^2 << 1$, то координаты точки M (11.123) можно определить по следующим упрощенным формулам:

$$\tilde{\gamma}^2 \approx 1 + \frac{3}{4}\varepsilon Q^2, \quad \tilde{\xi}_1 \approx \frac{Q}{\left(1+(3/8)\varepsilon Q^2\right)}. \tag{11.125}$$

Частота максимальной амплитуды колебаний γ_m немного смещена влево от частоты $\tilde{\gamma}$. Но, если $Q \gg 1$ можно считать, что $\gamma_m \approx \tilde{\gamma}$. Итак, частота γ_m не совпадает с собственной частотой линейной системы $\gamma = 1$. Это следствие нелинейности системы. На рис. 11.18 величина $\Delta\omega / \omega_0$ соответствует относительному сдвигу частоты максимальной амплитуды колебаний относительно частоты резонанса линейной сис-

темы ω_0. При условии $Q \gg 1$, используя формулу (11.125), можно записать следующее равенство:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \gamma_m - 1 \approx \tilde{\gamma} - 1 = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\varepsilon Q^2} - 1 \approx \frac{3}{8}\varepsilon Q^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{x_\Delta}{d}\right)^2. \qquad (11.126)$$

Как видим, величина $\Delta\omega$ пропорциональна степени нелинейности системы. Отметим, что в случае $\varepsilon Q^2 \ll 1$ ($Q \gg 1$), как следует из второй формулы (11.125), максимальная амплитуда $\xi_{1m} \approx \tilde{\xi}_1 \approx Q$, т.е. совпадает с амплитудой колебаний линейной системы на частоте резонанса ω_0.

Рассматривая далее свойства кривой отклика, особое внимание следует уделить участку кривой, где для одного γ^2 имеем три значения $|\xi_1|$ (рис. 11.19). При этом очень важно, с какой стороны подходить к области неоднозначности. Двигаясь со стороны низких частот, приходим в точку D_1, потом система скачкообразно переходит в точку D_1', а дальше следуем однозначно вдоль кривой. Если двигаться со стороны высоких частот, то приходим в точку D_2; потом система скачкообразно переходит в точку D_2', а далее следуем однозначно вдоль кривой. Такое поведение осциллятора наблюдается и в эксперименте. Итак, на участке кривой D_1D_2 удержать систему невозможно, т.е. возникает неустойчивое колебательное движение — любого малого отклонения достаточно, чтобы система скачком изменила свое состояние.

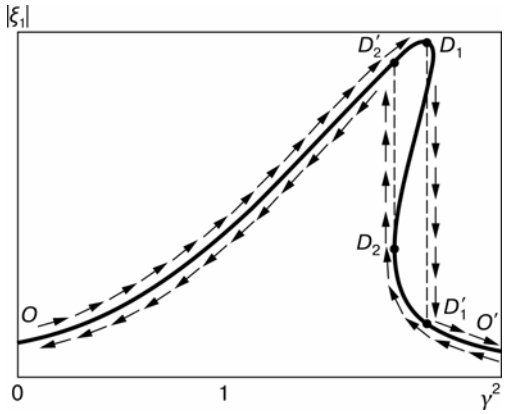


Рис. 11.19. График нелинейного резонанса. Стрелки показывают направление движения вдоль резонансной кривой при изменении частоты внешнего воздействия

Таким образом, неоднозначность поведения системы зависит от начальных условий: от того, с какой стороны по оси частот прибли-

жаемся к области неустойчивого движения D_1D_2. Другими словами, система помнит свое предыдущее состояние и, исходя из этого, следует или вдоль ветви $D_2'O$, или вдоль — $D_1'O'$. В этом проявляется особенность нелинейного мира. При уменьшении параметра нелинейности ε (например, вследствие уменьшения амплитуды внешней силы F_0) область неустойчивого движения будет сокращаться до тех пор, пока при некотором значении ε точки D_1 и D_1' не совпадут (рис. 11.17).

Интересно сравнить результаты приближенного анализа с динамикой исходной системы (11.110). Для этого нужно численно решить на ЭВМ дифференциальное уравнение (11.110) и сравнить решение с аналитическими результатами, отметив при этом характерные особенности нелинейного резонанса. Величина, которую нужно сравнить с аналитическими результатами — это амплитуда колебаний в установившемся режиме. Эту величину будем определять путем численного решения уравнения (11.110).

Зададим некоторое отрицательное значение параметра Δ (на рис. 11.17 $\Delta = -3$) и произвольные начальные условия для ξ и $d\xi/d\tau$ (пусть $\xi(0) = 0$ и $d\xi(0)/\ d\tau = 0$). Численно решением на ЭВМ уравнение (11.110) до момента установления стационарного режима колебаний. При этом параметры ε и γ следует выбирать в соответствии с заданным безразмерными величинами $P = 3\varepsilon Q^3/4$, $\Delta = (\gamma^2 - 1)Q$ и Q. На рис. 11.20, *а* представлена временная зависимость решения уравнения (11.110) $\xi(\tau)$ при $\Delta = -3$, $P = 3{,}2$ и $Q = 30$.

Итак, определив амплитуду ξ_0 колебательного процесса $\xi(\tau)$ в установившемся режиме, обозначим ее на графике точкой с координатами $\Delta = (\gamma^2 - 1)Q$ и $y = 3\varepsilon Q\xi_0^2/4$; в координатах Δ и y представлена резонансная кривая, полученная аналитическим путем. Далее придав некоторое приращение величине Δ, повторим численное решение уравнения (11.110) с начальными условиями, которые берутся как следствие установившихся колебаний для предыдущей точки. Тем самым получим следующую точку на графике и т.д. Таким образом, сначала проходим весь интервал изменения параметра Δ в одном направлении, а потом будем двигаться вдоль оси Δ в противоположном направлении.

На рис. 11.20, *б*, *в* приведены результаты расчетов для $P = 3{,}2$, $Q = 30$. Сплошная кривая соответствует формуле (11.122), точки, обозначенные кружками, представляют численные результаты решения уравнения (11.110), полученные при движении вдоль резонансной кривой слева направо (рис. 11.20, *б*) и справа налево (рис. 11.20, *в*). Как видим, во-первых, качественное описание явлений при нелинейном резонансе подтверждается, наблюдается неоднозначность пове-

дения системы в зависимости от начальных условий и ее скачкообразные переходы. Во-вторых, имеем целиком удовлетворительное количественное соответствие.

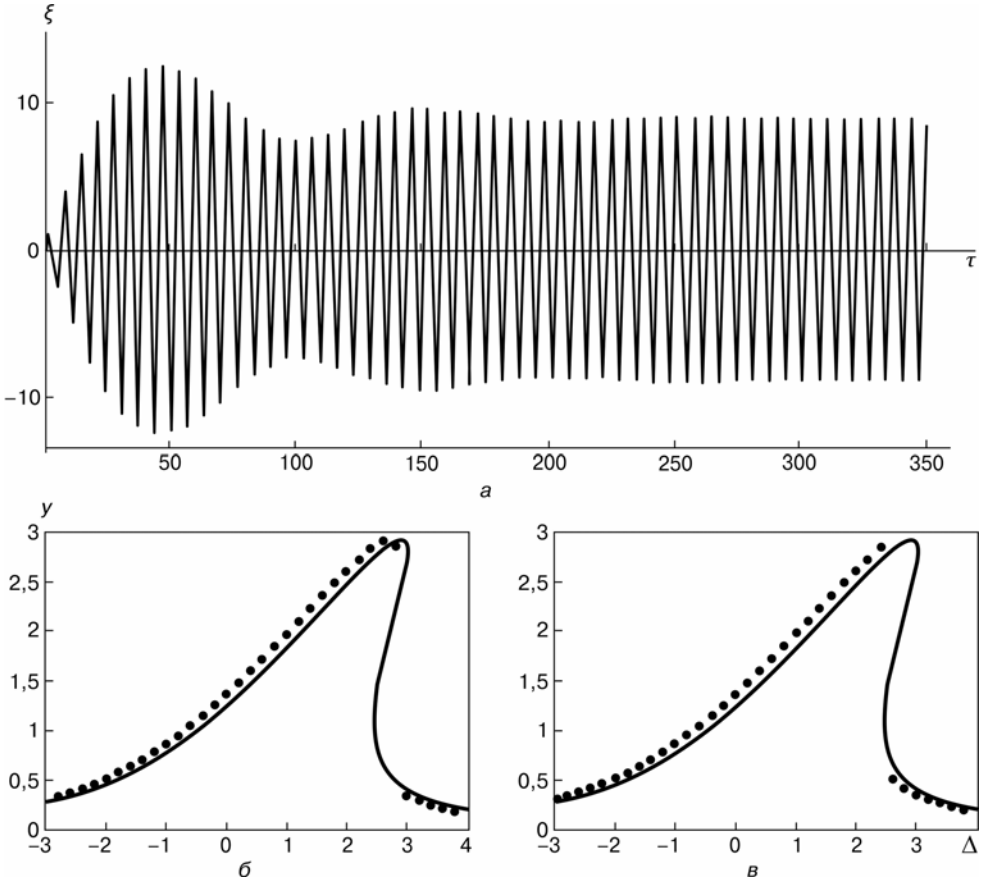


Рис. 11.20. Пример нелинейного резонанса:

а — зависимость $\xi(\tau)$, которая получена путем численного решения уравнения (11.110) при $\Delta = -3$, $P = 3{,}2$; $Q = 30$; *б*, *в* — сопоставление приближенных аналитических результатов (сплошная кривая) согласно формуле (11.122) и численных расчетов (кружки) уравнения (11.110) (кружками обозначены точки, полученные при движении вдоль резонансной кривой слева направо (*б*) и справа налево (*в*))

Рассмотренные выше явления в колебательной системе называют *нелинейным резонансом*. О нем можно говорить как об основном резонансе, поскольку, как оказывается, резонансные явления в нелинейной системе могут наблюдаться не только в области собственной частоты ω_0.

11.12.2. Резонанс на гармониках и субгармониках

В нелинейной системе при гармоническом внешнем воздействии процесс колебаний не является чисто гармоническим и имеет гармонические компоненты высших частот, кратные частоте внешнего воздействия. Поэтому, если частота одной из гармонических компонент, которые возникли в результате нелинейности системы, близка к собственной частоте системы, то амплитуда этой компоненты может существенным образом увеличиться, т.е. имеем *резонанс на гармониках.*

Рассмотрим уравнение (11.117) для консервативного осциллятора, учитывая при этом "условность", о которой выше шла речь. Понятно, что если для частот внешнего воздействия ω, близких к ω_0, справедливо соотношение $|\xi_3| \ll |\xi_1|$ (ведь $\varepsilon \ll 1$), то для других частот ω такое условие может не выполняться. Разделив (11.117) на ξ_3, перепишем выражение в следующем виде (с вариантом жесткой нелинейности):

$$(3\gamma)^2 = \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon\xi_1^2 + \frac{3}{4}\varepsilon\xi_3^2\right) + \frac{\varepsilon\xi_1^3}{4\xi_3}. \qquad (11.127)$$

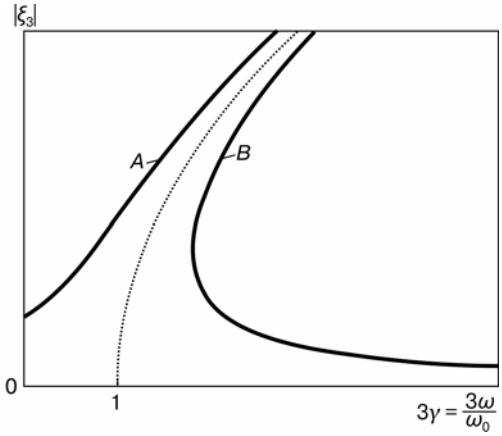


Рис. 11.21. Резонансная кривая для амплитуды третьей гармоники

Как и для уравнения основного резонанса (11.121), можно построить кривую (см. рис. 11.21), которая представляет зависимость модуля амплитуды третьей гармоники $|\xi_3|$ от безразмерной частоты $3\gamma = 3\omega / \omega_0$. Поведение резонансной кривой показывает, что значительную амплитуду утроенной частоты 3ω можно наблюдать не при $3\omega \approx \omega_0$, а при $3\omega > \omega_0$, что требует выведения рабочего режима системы в эту область частот. Действительно, как следует из (11.127), при

$(3\gamma)^2 = 1 + 3/2\,\varepsilon\xi_1^2$ имеем $|\xi_3| = |\xi_1|/\sqrt[3]{3}$. И только при условии $3\omega > \omega_0$ возможен выход на ветвь *A*, где амплитуда колебаний утроенной частоты может стать достаточно существенной. Выход системы на данный режим возможен за счет постепенного изменения частоты внешней силы, например, начиная с $\omega = \omega_0/3$. Подобная ситуация для основного резонанса представлена на рис. 11.18.

Как следует из рис. 11.21, возможно существование различных режимов колебаний утроенной частоты (ветви *A* и *B*) и установившийся режим зависит от начальных условий и "истории" системы. Эта особенность аналогична соответствующим свойствам для основного резонанса. Естественно учет демпфирования внесет понятные изменения в ход резонансной кривой.

Нелинейные колебательные системы имеют также свойство генерировать *субгармоники*, т.е. колебания, частоты которых связаны с частотой внешнего воздействия ω соотношением $\omega_n = \omega/n$, $n = 2,3,4,\ldots$ Возникновение этих колебаний можно объяснить, исходя из следующих физических рассуждений. Как известно, для линейного уравнения $\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = F_0\cos(m\omega_0 t)$ общее решение имеет вид суммы двух слагаемых: одно из них описывает вынужденные колебания системы с частотой $m\omega_0$, а второе соответствует свободным колебаниям с частотой ω_0, причем последние зависят от начальных условий. Однако при наличии в линейной системе демпфирования, свободные колебания затухают и в системе остаются чисто вынужденные колебания с частотой внешнего воздействия $\omega = m\omega_0$. В нелинейной системе все гармоники взаимосвязаны, так что ни одна из них не может измениться, не влияя на другую; поэтому колебания с частотой $m\omega_0$ могут порождать и поддерживать гармонику с частотой ω_0, а отсюда возможно возникновение явления резонанса.

Снова вернемся к консервативному ($Q \to \infty$) осциллятору (11.110) с жесткой кубической нелинейностью, учитывая "условность" дальнейшего анализа. В системах этого типа чаще всего наблюдаются субгармонические колебания с частотой $\omega/3$, где ω — частота внешнего воздействия. Обратим внимание именно на эту субгармонику.

Исходя из физических соображений, учтем наличие субгармоники в отклике системы и запишем решение в виде

$$\xi(t) = \xi_{1/3}\cos(\gamma\tau/3) + \xi_1\cos(\gamma\tau) + \ldots$$

В первом приближении будем использовать два первых слагаемых этого выражения. После подстановки решения $\xi(t) = \xi_{1/3}\cos(\gamma\tau/3) + \xi_1\cos(\gamma\tau)$ в уравнение (11.110) (при $Q \to \infty$) его левая часть будет иметь вид, подобный соотношению (11.114), а именно: $A_{1/3}\cos(\gamma\tau/3) + A_1\cos(\gamma\tau) + \ldots$, где $A_{1/3}$ и A_1 — функции амплитуд $\xi_{1/3}$ и

ξ_1. Отсюда в первом приближении для выполнения уравнения движения получим $A_{1/3} = 0$ и $A_1 = 1$, или

$$\xi_{1/3}\left(1-\frac{\gamma^2}{9}+\frac{3}{4}\varepsilon\left(\xi_{1/3}^2+2\xi_1^2+\xi_{1/3}\xi_1\right)\right)=0, \qquad (11.128)$$

$$\left(1-\gamma^2\right)\xi_1+\frac{1}{4}\varepsilon\left(\xi_{1/3}^3+6\xi_{1/3}^2\xi_1+3\xi_1^3\right)=1. \qquad (11.129)$$

Прежде всего, следует отметить, что системе уравнений (11.128), (11.129) удовлетворяет решение $\xi_{1/3} = 0$, которому соответствуют вынужденные колебания с частотой внешней силы. Действительно, если положить $\xi_{1/3} = 0$, то уравнение (11.128) будет выполняться всегда, а (11.129) будет иметь вид уравнения (11.121), которое получено как первое приближение при исследовании основного резонанса.

Если допустить, что $\xi_{1/3} \neq 0$, то уравнение (11.128) можно разделить на $\xi_{1/3}$. Тогда оно станет квадратичным уравнением относительно как $\xi_{1/3}$, так и ξ_1. Решив его относительно $\xi_{1/3}$, получим

$$\xi_{1/3}=-\frac{1}{2}\xi_1\left[1\pm\sqrt{\frac{16}{27\varepsilon\xi_1^2}\left(\gamma^2-9\right)-7}\right]. \qquad (11.130)$$

Для того чтобы $\xi_{1/3}$ была действительной величиной и имела физический смысл, необходимым является следующее условие:

$$\frac{16}{27\varepsilon}\left(\gamma^2-9\right)-7\xi_1^2\geq 0 \qquad (11.131)$$

или

$$\gamma^2\geq\gamma_*^2, \quad \gamma_*^2=9+\frac{189}{16}\varepsilon\xi_1^2. \qquad (11.132)$$

Таким образом, если частота вынуждающей силы будет увеличиваться, то субгармонические колебания возникнут только тогда, когда величина γ достигнет значения γ_*, при котором амплитуда колебаний будет равна $\xi_{1/3} = -\xi_1/2$.

Если полагать, что $\varepsilon << 1$, то формула (11.130) примет простой вид:

$$\xi_{1/3}\approx\pm\sqrt{\frac{4}{27\varepsilon}\left(\gamma^2-9\right)}, \qquad (11.133)$$

а условие (11.132) можно представить в виде: $\gamma > \gamma_0 = 3$. Для получения соответствующего приближения основной амплитуды ξ_1, следует решить уравнение (11.129), содержащее в себе все слагаемые, кроме $3\xi_1^3/4$, которое намного меньше других слагаемых. Тогда с учетом (11.133) имеем

$$\xi_1 \approx \frac{\frac{1}{4}\varepsilon\xi_{1/3}^3 - 1}{1 + \frac{7}{9}\gamma^2}. \qquad (11.134)$$

Отметим, что, как следует из (11.133) и (11.134), при $\gamma^2 = 9 + 27\sqrt[3]{\varepsilon/4}$ амплитуда ξ_1 равна нулю. Это соответствует ситуации, когда вынужденные колебания с частотой ω практически полностью переходят в субгармонические колебания с частотой $\omega/3$. Как и для основного резонанса системы и резонанса на гармониках, следует особенно отметить важность соответствующих начальных условий для возникновения субгармонических колебаний. Но если субгармонические колебания возникают, то их амплитуда может значительно превышать амплитуду основных колебаний, частота которых равна частоте внешней силы ω.

При проведении анализа не учитывались силы демпфирования. Понятно, что их наличие уменьшает амплитуду субгармонических колебаний, а при значительном демпфировании субгармонические колебания вообще могут не возникнуть.

Таким образом, реакция нелинейной системы на воздействие синусоидальной силы в общем случае не является гармонической. Наличие в отклике системы гармоник или субгармоник — характерный признак нелинейной системы. Возможны даже резонансные явления на частотах гармоник или субгармоник. Все это очень важно в конкретных ситуациях. Приведем два примера.

Как известно, наше ухо является нелинейной системой. Нелинейность слухового аппарата проявляется в том, что при действии на барабанную перепонку довольно громкого синусоидального звука с частотой ω в нем появляются гармоники с частотой 2ω, 3ω и т.д. Поскольку в сигнале, действующем на ухо, этих гармоник нет, то их назвали *субъективными гармониками.* Их наличие определяется методом звукового зонда: если к звуку, под действием которого возникают субъективные гармоники, прибавить второй звук, частоту $\tilde{\omega}$ и громкость которого можно изменять, то при приближении частоты $\tilde{\omega}$ к частоте субъективной гармоники 2ω на фоне громкого основного звука можно услышать биения, которые возникают вследствие взаимодействия звука зонда и субъективной гармоники (см. параграф 2.7). Наиболее резкие биения прослушиваются при условии равенства амплитуд звука зонда и субъективной гармоники. Поэтому, отрегулировав амплитуду давления звука зонда до получения более четких биений, можно оценить амплитуду субъективной гармоники. При увеличении интенсивности звука субъективные гармоники резко увеличиваются и могут даже превысить интенсивность основного тона.

Другой пример можно привести из области электроакустики, которая занимается вопросами приема и излучения звуковых волн в воздухе. Все электроакустические аппараты (например, микрофоны и громкоговорители) являются линеаризованными системами, т.е. характеризуются примерно линейными соотношениями входных и выходных величин. Превышение определенных границ этих величин приводит к появлению гармоник и субгармоник в выходном сигнале по отношению к гармоническому входному сигналу. Слух человека очень чувствителен к такому изменению сигнала, поэтому при проектировании громкоговорителя в этом аспекте выдвигаются жесткие требования. При существенной нелинейности громкоговорителя появляются разные посторонние звуки, хрип, звон и т.п.; они сопровождают работу громкоговорителя, когда его колебательная система находится в области неустойчивого движения.

11.13. Хаос при вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора

С древних времен считалось, что умение предсказывать – удел мудрецов, и вместе с тем, предвидение – это одна из основных целей науки. Развитие математики существенно расширило возможности исследователей в проведении научного прогноза. Оказалось, например, что движение небесных тел можно рассчитывать, решая дифференциальные уравнения, которые могут быть достаточно сложными, и для их решения нужно будет приложить немало усилий. Такая работа увлекла ученых на многие годы и, казалось, единственным препятствием будут чисто математические трудности, которые со временем преодолеют.

Однако с развитием науки возникло понимание того, что нельзя сделать, какие цели не стоят перед научным исследованием. Так, с появлением термодинамики стало понятно, почему никогда не построят вечный двигатель. Квантовая механика показала, что мы принципиально лишены возможности измерить с заранее заданной точностью одновременно координату и импульс элементарной частицы. На множество непреодолимых барьеров указала теория относительности. По сути, понимание новых ограничений стало признаком фундаментальных теорий.

В этом ряду важное место занимают работы последних лет, связанные с предсказуемостью. Стимулом к таким исследованиям послужила работа американского метеоролога Лоренца*, опубликованная в 1963 году. Лоренц поставил перед собой вопрос: почему при наличии мощных ЭВМ нельзя дать надежный, достаточно долгосроч-

* Лоренц (Lorenz) Едвард Нортон (1917—2008) — американський математик.

ный прогноз погоды. Он предложил простую модель, которая описывала динамику атмосферы, просчитал её на ЭВМ и, получив результат, не отмахнулся от него как от ошибки вычислений, а отнесся очень серьезно. Этот результат – возникновение хаотических, напоминающих случайные, колебаний. При этом модель Лоренца была детерминированной, т.е. в уравнениях её динамики полностью отсутствовали случайные параметры.

Таким образом, в системе, где будущее однозначно определяется прошлым, Лоренц обнаружил конечный горизонт прогноза. Это явление получило название *детерминированного* (*динамического*) *хаоса*. Вслед за работой Лоренца начались интенсивные исследования данного явления.

Оказалось, что динамический хаос свойственен не только физическим нелинейным системам. В настоящее время хаосу посвящено много книг и обзоров, большое число статей опубликовано в ведущих научных журналах мира по математике, физике, химии, биологии, астрономии, экономике и других. Особо следует отметить тот факт, что явление детерминированного хаоса было обнаружено в системах с малым числом степеней свободы. Конечно, если исследовать систему с большим числом степеней свободы, например газ, жидкость, то даже интуитивно мы понимаем, что предусмотреть траекторию движения микрообъема такой среды невозможно. Но сейчас речь идет о системах с малым числом степеней свободы!

Как свидетельство таких перемен в науке процитируем торжественное заявление, с которым выступил в 1986 г. всемирно известный английский гидромеханик сэр Дж. Лайтхилл*, бывший в то время президентом Международного союза теоретической и прикладной механики: “*Тут я должен остановиться и снова выступить от имени широкого всемирного братства тех, кто занимается механикой. Мы все глубоко сознаем сегодня, что энтузиазм наших предшественников по поводу великолепных достижений ньютоновской механики побудил их к обобщениям в этой области предсказуемости, в которые до* 1960 *г. мы все охотно верили, но которые, как мы теперь понимаем, были ложными. Нас не покидает коллективное желание признать свою вину за то, что мы вводили в заблуждение широкие круги образованных людей, распространяя идеи о детерминизме систем, удовлетворяющих законам движения Ньютона, – идеи, которые, как выяснилось после* 1960 *г., оказались неправильными.*”

---

* Лайтхилл (Ligthill) Джеймс (1924—1988) — английский физик.
Ligthill J. The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonain Dynamics // Proceeding of the Royal Society. – 1986. – P. 35–50.

В нашей книге мы не имеем возможности, даже кратко, рассказать об этой проблеме, и поэтому рекомендуем специальную литературу [2, 17, 26, 28, 29, 54]. Наша цель состоит в том, чтобы только указать читателю на возможность появления сложной динамики в нелинейной системе с малым числом степеней свободы. Ниже, выполнив численные расчеты, приведем примеры хаотичного режима колебаний нелинейного осциллятора, который находится под гармоническим внешним воздействием.

11.13.1. Некоторые особенности исследования хаоса

Очевидно, что для системы с одной степенью свободы, которая характеризуется фазовым пространством размерностью $N = 2$ (фазовая плоскость), режим динамического хаоса невозможен. Действительно, хаотическому изменению во времени смещения $x(t)$ и скорости $\dot{x}(t)$ осциллятора должно соответствовать хаотичное перемещение фазовой точки на фазовой плоскости, которая неизбежно приведет к пересечению фазовой траектории. А это, как мы знаем, невозможно. Однако уже в фазовом пространстве размерностью $N = 3$ возможно возникновение сложного поведения траектории. В диссипативных системах хаос ассоциируется с наличием в фазовом пространстве *странного аттрактора* — сложно построенного множества, которое притягивает к себе все траектории из соответствующего бассейна аттрактора.

Итак, приведем некоторые сведения о фазовом пространстве осциллятора, совершающего вынужденные колебания. Если внешнее воздействие на систему с одной степенью свободы отсутствует, то мы имеем колебательную систему (11.18) с двумерным фазовым пространством. При наличии периодического внешнего воздействия динамика такой системы в общем случае будет определяться системой двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = h(x, y, t), \qquad \dot{y} = g(x, y, t), \tag{11.135}$$

где x и y — динамические переменные. Функции h и g зависят от времени t согласно периодическому закону. Понятно, что состояние системы определяется тремя величинами (x, y, t) и, следовательно, фазовое пространство имеет размерность $N = 3$. Для того чтобы получить соответствующую систему трех дифференциальных уравнений, введем дополнительную динамическую переменную $z = t$, тогда $\dot{z} = 1$ и будем иметь следующую систему уравнений:

$$\dot{x} = h(x, y, z), \quad \dot{y} = g(x, y, z), \quad \dot{z} = 1. \tag{11.136}$$

Очень удобным инструментом в случае исследования колебательных систем типа (11.136) является *отображения Пуанкаре*. Процеду-

ра его построения следующая. Выделим в трехмерном фазовом пространстве (x, y, z) плоскость $z = t_0$ (рис. 11.22); ее называют *сечением Пуанкаре*. Координатами в сечении Пуанкаре являются переменные x и y. Возьмем фазовую траекторию, которая стартует из некоторой точки (x, y) в сечении, и проследим за ней до момента времени $t = t_0 + T$, где T — период внешнего воздействия. Пусть в этот момент времени значения динамических переменных равны x' и y'. Понятно, что они зависят от выбора начальных x и y и связанны с ними функциональными соотношениями:

$$x' = F_1(x, y), \quad y' = F_2(x, y). \tag{11.137}$$

Выполняя далее сечение Пуанкаре через период T, мы, в сущности, сводим анализ динамики колебательной системы к повторению той же процедуры, с теми же функциями F_1 и F_2. Таким образом, описание динамики сводится к последовательным итерациям двумерного отображения (11.137), которое и является отображением Пуанкаре.

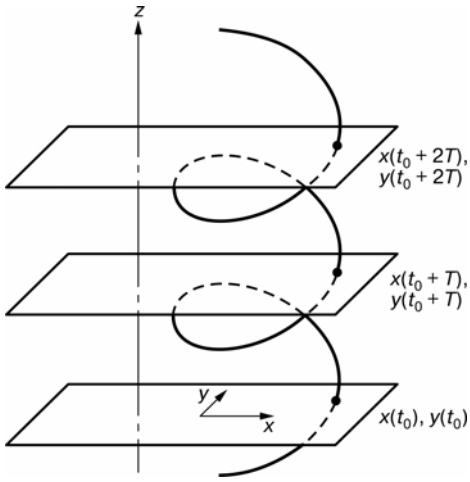


Рис. 11.22. Пример построения сечения Пуанкаре

Исследовать алгебраические уравнения (11.137) намного проще, чем исходные дифференциальные (11.136), ведь время принимает дискретные значения и, тем самым, резко уменьшается количество информации, которую следует рассмотреть. Фактически от анализа системы в трехмерном фазовом пространстве мы переходим к анализу отображения на плоскости. Такой подход может казаться не правомерным. Но важность момента состоит в том, что *отображение Пуанкаре содержит в себе все особенности, характерные для фазового портрета колебательной системы.*

Вообще отображение Пуанкаре является одним из основных рабочих инструментов в исследовании динамики нелинейных систем. Тот факт, что от описания в терминах дифференциальных уравнений можно перейти к описанию в терминах итераций отображения, имеет большое методологическое значение. Как образно отметил Арнольд* [**, с. 1311], "*математическое описание мира базируется на деликатном взаимодействии непрерывных* (*плавных*) *и дискретных* (*скачкообразных*) *явлений*".

Найти явный вид отображения Пуанкаре для конкретных нелинейных систем удается только тогда, когда дифференциальные уравнения допускают аналитическое решение. Обычно приходится реализовывать построение отображения Пуанкаре численно.

11.13.2. Осциллятор с кубической нелинейностью при гармоническом внешнем воздействии

Уравнение движения осциллятора с кубической нелинейностью при гармоническом внешнем воздействии имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = B\cos(\omega t). \qquad (11.138)$$

Здесь коэффициент δ определяет диссипативные процессы в системе, а коэффициенты α и β характеризуют восстанавливающую силу; ω и B — частота и амплитуда гармонического внешнего воздействия.

Перепишем уравнение (11.138) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, введя для этого новые переменные $y = \dot{x}$, $z = \omega t$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -2\delta y - \alpha x - \beta x^3 + B\cos z, \\ \dot{z} &= \omega. \end{aligned} \qquad (11.139)$$

Эта система определяет фазовые траектории, или, как говорят, *фазовый поток*, в трехмерном фазовом пространстве.

Для описания различных типов колебаний системы (11.139), как и любой другой нелинейной системы, строят *карту динамических режимов*: на плоскости параметров выделяют области значений параметров, которые соответствуют тому или иному колебательному режиму. Например, для системы (11.139) можно зафиксировать коэф-

---

* Арнольд Владимир Игоревич (н. 1937) — российский математик, академик АН СССР (1990 р.).

** Арнольд В.И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры? // УФН. — 1999. — **169**, №12. — С. 1311—1323.

фициенты δ, α, β, тогда плоскость параметров образуют амплитуда B и частота внешнего воздействия ω. При построении таких карт обращает на себя внимание сложная картина расположения областей с различным характером движения, что наблюдается практически во всех системах с хаосом.

Не выполняя кропотливой работы относительно построения карты динамических режимов системы (11.139), рассмотрим несколько ситуаций, иллюстрирующих типичные колебательные режимы нелинейного осциллятора. Зафиксируем параметры $2\delta = 0{,}1$, $\alpha = \beta = 1$; $\omega = 1$, а переменным параметром будет амплитуда внешней силы B. Начальные условия: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

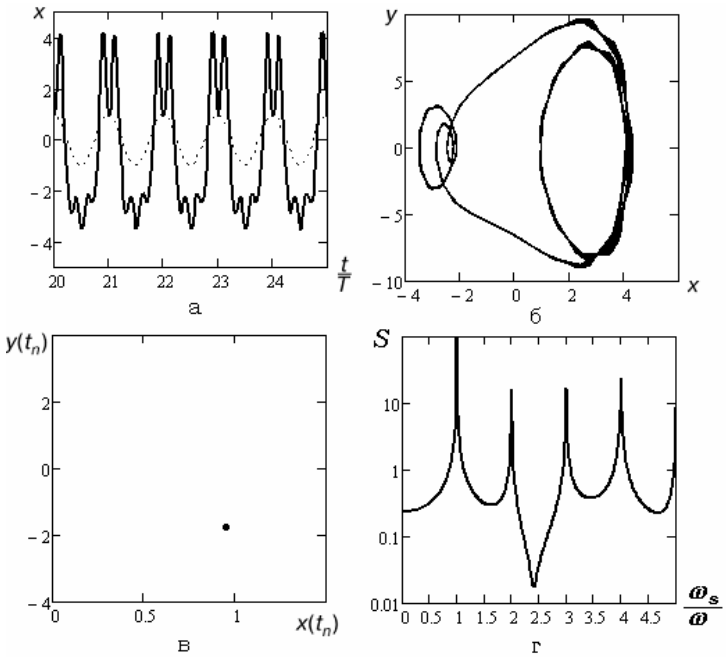


Рис. 11.23. Пример исследования нелинейного осциллятора (11.139) при $2\delta = 0{,}1$; $\alpha = \beta = 1$; $\omega = 1$; $B = 29$

Пусть $B = 29$. На рис. 11.23, *а* представлена зависимость координаты x от t/T, где $T = 2\pi/\omega$ — период внешнего воздействия (пунктирная линия отображает гармоническую зависимость внешнего воздействия). Как следует из рисунка, в системе после переходного режима (он не показан) происходит устойчивое периодическое движение с периодом T. Вследствие значительной нелинейности в системе зависимость $x(t)$ на рис. 11.23, *а* существенно отличается от кривой гармонического внешнего воздействия. Естественно, в спектре отклика системы $x(t)$ появляются гармоники, кратные частоте внешнего

воздействия (рис. 11.23, *г*; вдоль оси абсцисс отложена частота, нормированная к частоте внешнего воздействия ω).

На рис. 11.23, *б* приведена проекция фазовой траектории в трехмерном фазовом пространстве (*x, y, z*) на плоскость (*x, y*), которая представляет собой замкнутую кривую, вследствие периодического движения осциллятора. На рис. 11.23, *в* представлено сечение Пуанкаре, где определяются динамические переменные $x(t_n)$, $y(t_n)$ в моменты времени $t = nT, n = 0,1,2,...$ Как следует из рисунка, в отображении Пуанкаре имеем одну точку, т. е. после переходного процесса система осуществляет периодическое движение с периодом внешнего воздействия $T = 2\pi/\omega$.

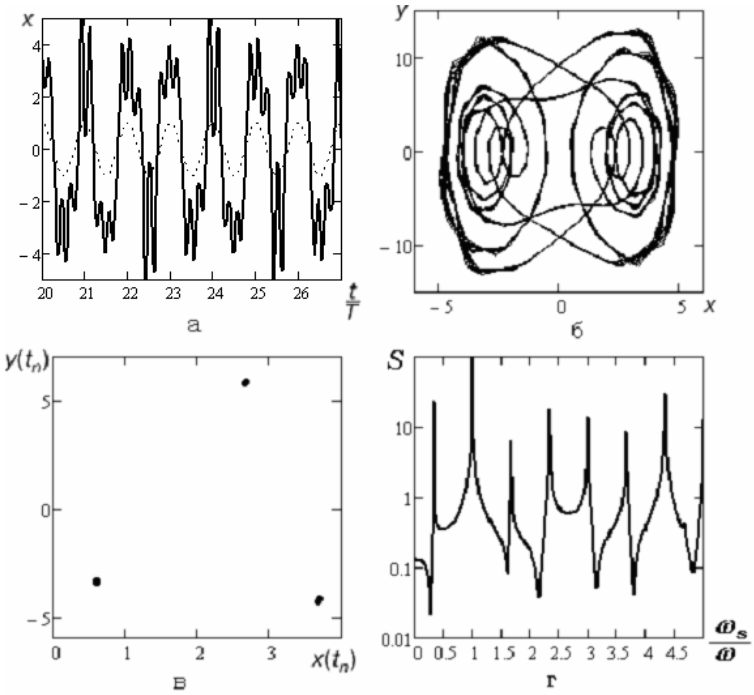


Рис. 11.24. Пример исследования нелинейного осциллятора (11.139) при $2\delta = 0{,}1$; $\alpha = \beta = 1$; $\omega = 1$; $B = 38$

Изменим амплитуду внешнего воздействия: пусть $B = 38$. Период движения в системе увеличился в три раза и равен $3T$ (рис. 11.24, *а*). Проекция фазовой траектории на плоскость (x, y) приведена на рис. 11.24, *б*, а соответствующее отображение Пуанкаре представлено на рис. 11.24, *в* (переходной режим не показан). Как видим, отображение Пуанкаре — это три точки, которые представляют собой "след" аттрактора системы в сечении Пуанкаре. В этом случае говорят, что произошла *бифуркация* (от латинского слова *bifurcus* — раз-

двоение) — утроение периода. Видим, что проекция фазовой траектории (рис. 11.24, *б*) представляет собой замкнутую кривую, но достаточно сложной структуры. И наоборот, отображение Пуанкаре на рис. 11.24, *в* ясно демонстрирует, что в системе происходит периодическое движение с периодом $3T$. Спектр колебания осциллятора дискретный и содержит при этом частоту $\omega/3$.

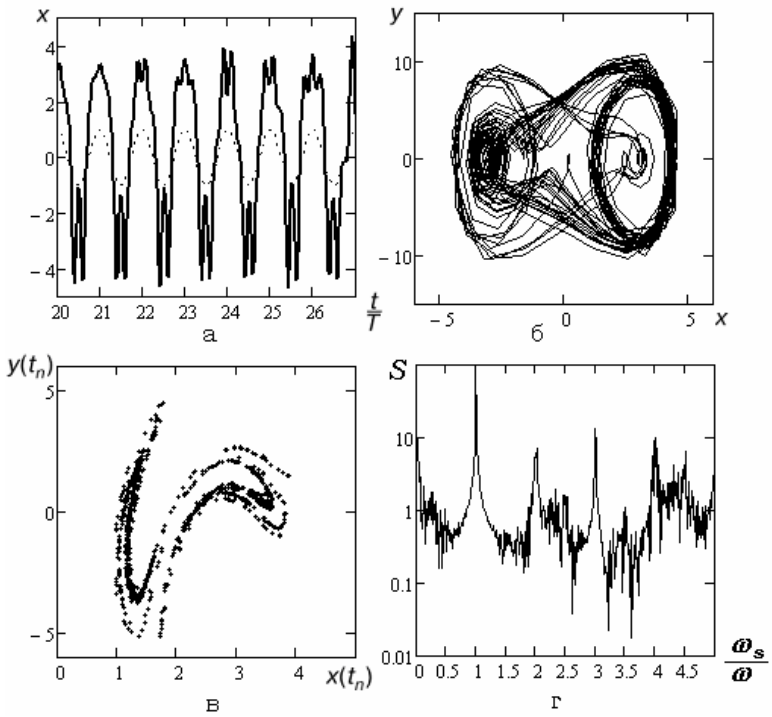


Рис. 11.25. Пример исследования нелинейного осциллятора (11.139) при $2\delta = 0{,}1$; $\alpha = \beta = 1$; $\omega = 1$; $B = 35$:

Хаотичный режим в системе можно наблюдать при амплитуде $B = 35$ (рис. 11.25). Как видим, временная зависимость переменной $x(t)$ на рис. 11.25, *а* не является регулярной. Понятно, что спектр такого колебания (рис. 11.25, *г*), наряду с дискретными составляющими, будет непрерывным и широкополосным, что характерно для хаотичных колебаний. Проекция аттрактора (рис. 11.25, *б*) на плоскость переменных (x, y) не является характерной замкнутой кривой, наоборот, кривая заполняет хаотически некоторую область на фазовой плоскости. Итак, в трехмерном фазовом пространстве образуется странный аттрактор со сложной внутренней структурой.

Рассмотрим сечение Пуанкаре (рис. 11.25, *в*). Оказывается, что точки в отображении Пуанкаре образуют характерный рисунок!

Имеем удивительный результат! Дело в том, что такой характерный рисунок наблюдается именно при наличии хаоса в детерминированной системе. Этот рисунок указывает на то, что “случайность здесь имеет детерминированную основу”. Если бы внешнее воздействие на систему было действительно случайным, то отображение Пуанкаре представляло бы собой некоторое лишенное формы образование.

В завершении этого пункта еще раз отметим, что необычное словосочетание “*детерминированный хаос*” означает, что речь идет именно о детерминированной системе, где элемент случайности в любом виде отсутствует. Поэтому флуктуации, которые наблюдаются в состоянии хаоса, только кажутся случайными — их значение полностью обусловлено начальными условиями. Возникает вопрос: что понимать под хаотичным поведением детерминированной системы, как отличить хаотичный режим от другого сложного во времени колебательного процесса. Хотя универсального определения динамического хаоса до сих пор, наверное, нет, считают, что одним из основных его свойст является *непредсказуемость*. Это свойство называют *существенной зависимостью от начальных условий* (СЗНУ).

Поясним это свойство. Рассмотрим две реализации колебательного процесса системы с начальными условиями, которые слегка различаются. Если система выполняет регулярные колебания, то естественно, что колебательные процессы для двух вариантов начальных условий будут практически одинаковыми. В фазовом пространстве расстояние между соответствующими фазовыми траекториями остается для любого момента $t > 0$ таким же малым, как в начальный момент времени $t = 0$. Ситуация совсем изменится, если система будет выполнять хаотичные колебания. В этом случае при любом малом изменении в начальных условиях колебания, для двух вариантов начальных условий, со временем будут разными. В фазовом пространстве соответствующие фазовые траектории со временем расходятся. В этом и есть суть понятия СЗНУ.

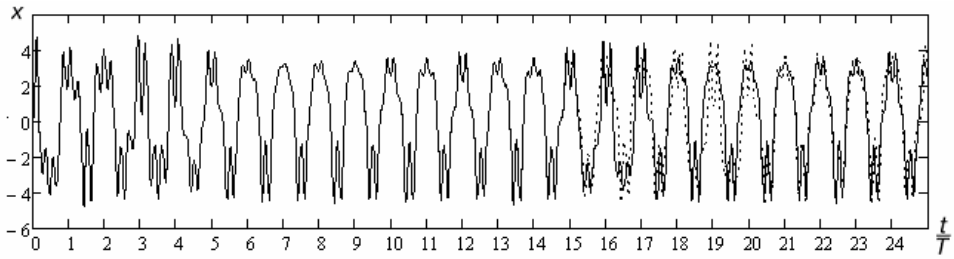


Рис. 11.26. Временные зависимости хаотичного режима переменной $x(t)$ осциллятора (11.139) ($2\delta = 0{,}1$, $\alpha = \beta = 1$, $\omega = 1$, $B = 35$) при начальных условиях: сплошная линия — $(x, y, z) = (0{,}0{,}0)$, штриховая — $(x, y, z) = (0{,}0001;\ 0;\ 0)$

Например, на рис. 11.26 представлены временные зависимости хаотичного режима переменной $x(t)$ осциллятора (11.139) при незначительном изменении в начальных условиях. Как видим, со временем колебательные процессы становятся разными.

В реальной жизни, на практике, мы никогда не имеем абсолютно точной информации относительно начальных условий. Всегда существуют погрешности, пусть и очень малые при их измерении. Раньше считалось, что в детерминированной системе, при наличии ЭВМ, мы всегда можем сделать прогноз (например, дать надежный прогноз погоды), несмотря на малые погрешности измерения текущего состояния. Если существует хаос, это не так. Никакая мощная ЭВМ не даст нам точный прогноз на основе математической модели с существенной зависимостью от начальных условий.

Это характерное свойство хаотичных систем Лоренц назвал *эффектом бабочки*, которое нашло образное отражение в названии одной из его статей: “Предсказание: сможет ли взмах крылышек бабочки в Бразилии привести к торнадо в Техасе?”

11.13.3. Хаотизация колебаний пузырька газа в жидкости под действием звукового поля

Задача исследования хаотичных колебаний пузырька газа в жидкости под действием гармонического звукового поля возникла в связи с проблемой кавитации (см. параграф 11.9). При кавитации экспериментально наблюдался шумовой спектр звукового поля. Длительное время это явление объяснялось наличием большого количества пузырьков в жидкости. Однако специальные эксперименты [*], в которых удалось контролировать в жидкости лишь один пузырек, показали, что возникновение посторонних шумов происходит и в этом случае.

Этот факт стимулировал дальнейшее развитие математической модели колебаний пузырька в жидкости под действием гармонической звуковой волны. При этом в отличие от уравнения (11.90) было учтено давление пара в пузырьке $P_п$, сжимаемость и вязкость жидкости, наличие внешнего гармонического звукового поля $p_{çâóê}\sin(\omega t)$. В работе [28, с. 92—94] представлены результаты соответствующих численных расчетов при следующих параметрах: R_0 = 10 мкм, $p_{звук}$ = = 90 кПа, P_0 = 100 кПа, $P_п$ = 2,33 кПа, $\sigma = 0{,}0725$ Н/м, ρ = 998 кг/м^3, γ = 4/3, динамическая вязкость жидкости η = 0,001 Нс/м^3, скорость звука c = 1500 м/с. Частота звуковой волны изменялась от 60 до 72 кГц; было выявлено, что в этом диапазоне колебания радиуса пу-

---

[*] Lauterborn W., Suchla E. Bifurcation Superstructure in a Model of Acoustic Turbulence // Physical Review Letters. — 1984. — **53**, N 24. — P. 2304—2307.

зырька имели хаотический характер. Пример таких колебаний представлен на рис. 11.27 [28, с. 93]. На рис. 11.27, *а* показана временная зависимость радиуса пузырька $\tilde{R}(t)$ ($\tilde{R} = R/R_0$, R_0 — стационарный радиус пузырька), а на рис. 11.27, *б* — портрет аттрактора в сечении Пуанкаре.

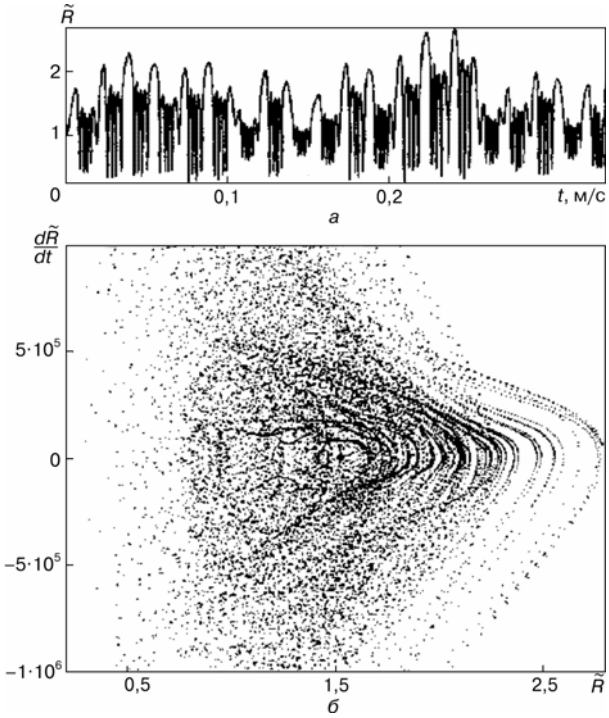


Рис. 11.27. Пример хаотических колебаний пузырька при $\omega/(2\pi) = 65$ кГц [28, с. 93]:

а — временная зависимость нормированного радиуса $\tilde{R}(t)$; *б* — отображение Пуанкаре

11.14. Параметрические колебания нелинейных систем

Специфическим типом внешнего воздействия на колебательную систему является периодическое изменение параметров системы во времени. Такое воздействие называют *параметрическим*. Главный интерес при исследовании таких колебаний вызывает возможность роста амплитуды колебаний и анализ условий возникновения этого явления, которое называют *параметрическим резонансом*.

11.14.1. Энергетический анализ явления параметрического возбуждения колебательной системы

Попробуем понять физику этого явления на примере маятника, у которого длина нити l периодически изменяется на величину Δl (рис. 11.13, *б*). Когда маятник проходит среднее положение будем немного подтягивать нить (на величину Δl) и настолько же будем опускать нить вниз, когда маятник находится в максимальном положении отклонения. Ради простоты будем полагать, что длина нити изменяется скачкообразно.

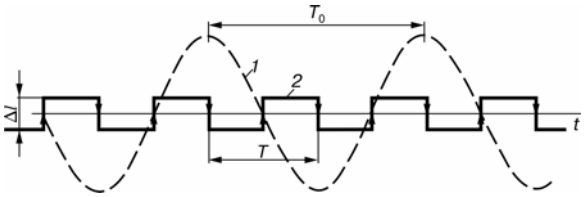


Рис. 11.28. Временные зависимости угла отклонения маятника $\varphi(t)$ (кривая *1*) и изменения длины нити (кривая *2*)

Это иллюстрирует рис. 11.28, на котором представлены кривые колебаний маятника $\varphi(t)$ и изменения длины нити со временем. При подтягивании нити вверх выполняется положительная работа A_1, т.е. увеличивается энергия маятника, а при отпускании нити — отрицательная работа A_2, т.е. энергия у маятника отбирается. Понятно, что в среднем положении нить натянута сильнее, чем в положении максимального отклонения, в первом случае сила натяжения нити не только уравновешивает силу тяготения, но и передает маятнику центростремительное ускорение, а во втором — только уравновешивает составляющую силы тяжести вдоль нити. Поэтому положительная работа A_1 будет больше, чем модуль отрицательной работы A_2. Аналогичное явление возникает и при раскачивании человека: в среднем положении его прижимает к качелям, мышцы ног напряжены сильнее, и работа при разгибании ног оказывается большей, чем при сгибании (рис. 11.13, *а*).

Вернемся к рис. 11.13, *б*. Натяжение нити в среднем положении $F_1 = mg + m\upsilon_0^2/l$, а при максимальном отклонении — $F_2 = mg\cos\varphi_0$. Здесь m — масса шарика, υ_0 – скорость шарика в среднем положении, l — длина нити, φ_0 — максимальный угол отклонения. Работа, выполненная внешней силой за один период, определяется формулой

(будем считать, что изменение длины маятника $\Delta l \ll l$, это позволяет считать величину υ_0^2/l постоянной в процессе подъема шарика):

$$A_1 + A_2 = \Delta E = 2\left(F_1\Delta l - F_2\Delta l\right) = \frac{2\Delta l}{l}\left[mgl\left(1-\cos\varphi_0\right) + 2\frac{m\upsilon_0^2}{2}\right]. \qquad (11.140)$$

Выражение в квадратных скобках формулы (11.140) есть не что иное, как утроенная полная энергия колебаний маятника *E*. Поэтому получаем: $\frac{\Delta E}{E} = 6\frac{\Delta l}{l}$ или

$$\Delta E = 6\frac{\Delta l}{l}E. \qquad (11.141)$$

Как видим, через каждый период *T* энергия колебаний увеличивается на величину, пропорциональную энергии системы.

Теперь определим потери энергии на преодоление сил трения в системе. Пусть коэффициент трения равен *R*; тогда при условии приблизительно гармонических колебаний маятника $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_0 t)$ (ω_0 — собственная частота маятника) работа сил трения $F_{\text{тр}} = R\dot{\varphi}l$ за период $T_0 = 2\pi/\omega_0$ равна интегралу от мощности сил трения:

$$\Delta A = \int_0^{T_0} F_{\text{тр}}\dot{\varphi}l dt = R\omega_0^2\varphi_0^2 l^2 \int_0^{T_0}\cos^2(\omega_0 t)dt = \frac{T_0}{2}R\omega_0^2\varphi_0^2 l^2. \qquad (11.142)$$

Поскольку полная энергия колебаний $E = m\upsilon_0^2/2 = m(\omega_0\varphi_0 l)^2/2$, а логарифмический декремент затухания $\theta = \delta T_0 = RT_0/(2m)$ (см. формулу (2.13)), то формулу (11.142) можно переписать в виде

$$\Delta A = \frac{R}{m}T_0 E = 2\theta E. \qquad (11.143)$$

Итак, потеря энергии за период синусоидальных колебаний также пропорциональна энергии колебаний. Сравнивая (11.141) и (11.143), получим условие, при выполнении которого приращение энергии доминирует над потерей и в системе происходит увеличение амплитуды колебаний:

$$\frac{\Delta l}{l} > \frac{\theta}{3}. \qquad (11.144)$$

Процесс возбуждения колебаний вследствие периодического изменения одного из параметров системы (в данном случае — длины нити) называют *параметрическим возбуждением колебаний* или *параметрическим резонансом*. Увеличение амплитуды колебаний сис-

темы, а значит, и рост энергии системы происходит вследствие работы внешних сил, которые изменяют параметр системы. Если длина нити будет изменяться с той же периодичностью, но по другому закону, то качественно будет получен тот же результат, хотя коэффициент в соотношении (11.144) будет не $1/3$, а больше, поскольку исследуемый выше скачкообразный закон изменения длины нити является оптимальным для передачи энергии.

При этом принципиальными являются фазовые соотношения между изменением параметра системы и собственными колебаниями. Действительно, если изменить фазу модуляции параметра относительно собственных колебаний, т.е. в среднем положении отпускать нить, а в крайних положениях ее поднимать, то получим не нарастание колебаний, а наоборот, их затухание. Таким образом, для возникновения параметрического резонанса необходимы соответствующие фазовые соотношения между модуляцией параметра и собственными колебаниями. Если частота модуляции параметра несколько отличается от частоты, при которой имел место параметрический резонанс, то решить, какие процессы доминируют — нарастание или затухание колебаний, при помощи таких простых соображений невозможно. Ответ может дать математическая теория явления.

Отметим, что параметрические колебания в отличие от вынужденных колебаний не возбуждаются, когда система находится в положении равновесия. Однако при некоторых условиях, например, при соответствующем соотношении собственной частоты колебаний ω_0 и частоты возбуждения ω положение равновесия может стать неустойчивым, и потому при незначительном воздействии могут возникнуть параметрические колебания.

В случае маятника параметр изменялся дважды за период колебаний. Однако энергия за счет изменения параметра может поступать один раз за период, два раза за три периода и вообще при выполнении условия $\omega = \dfrac{2\omega_0}{n}$ или $T = \dfrac{nT_0}{2}$ ($n = 1, 2, \ldots$, ω и T — частота и период изменения параметра, ω_0 и T_0 — частота и период собственных колебаний маятника). При этом конечно, поступление энергии в систему за период будет тем меньше, чем больше n.

11.14.2. Гармоническое параметрическое возбуждение в системе

Проведенный в предыдущем пункте упрощенный энергетический анализ указывает на возможное параметрическое возбуждение в системе. Попробуем определить основные особенности этого явления. Сначала рассмотрим линейную колебательную систему. С одной стороны, такой подход более доступен для анализа, а с дру-

гой — он наглядно раскрывает принципиальную роль нелинейности колебательной системы при ее параметрическом возбуждении.

Математическое описание параметрического резонанса в линейных системах осуществляется с помощью линейного дифференциального уравнения с переменными во времени коэффициентами. Полный анализ такой задачи довольно сложен. Поэтому остановимся только на вопросе поиска значений параметров системы, при которых возможны нарастающие колебания, т.е. возникает параметрический резонанс.

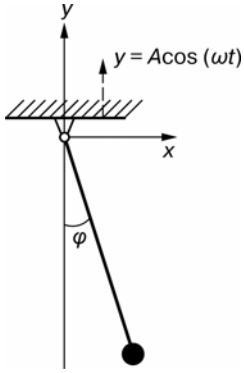


Рис. 11.29. Пример маятника, точка подвеса которого совершает гармонические колебания в вертикальном направлении

Рассмотрим колебания математического маятника (рис. 11.29), которые возбуждаются вследствие вертикального колебания точки подвеса маятника по закону $y(t) = A\cos(\omega t)$. Записывая уравнение колебаний маятника, учитываем силу инерции, которая возникает вследствие движения точки подвеса, и силу тяжести; силу трения считаем пропорциональной скорости. Пусть φ определяет угол отклонения маятника от положения равновесия, тогда, проектируя на касательную к траектории движения массы m указанные силы, согласно второму закону Ньютона имеем

$$m\ddot{\varphi}l = -\left(mg + m\ddot{y}\right)\sin\varphi - R\dot{\varphi}l, \qquad (11.145)$$

где l — длина маятника; R — коэффициент трения. Отсюда имеем следующее дифференциальное уравнение нелинейных колебаний маятника:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\left(1 - 2\mu\cos(\omega t)\right)\sin\varphi = 0. \qquad (11.146)$$

Здесь $2\delta = R/m$ — коэффициент затухания; $\omega_0^2 = g/l$ — квадрат собственной частоты линейной системы; $2\mu = A\omega^2/(l\omega_0^2)$ — коэффициент параметрического возбуждения; $\sin\varphi = \varphi - \varphi^3/3! + \varphi^5/5! - \ldots$.

Рассмотрим линейную задачу при гармоническом параметрическом возбуждении. Пренебрегая силами трения и нелинейными членами в разложении $\sin\varphi$ в ряд, получаем уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\left(1 - 2\mu\cos(\omega t)\right)\varphi = 0, \qquad (11.147)$$

которое называют *уравнением Матье*[*]. Оно является основной моделью в теории параметрических колебаний в линейных системах. Уравнение (11.147) перепишем в безразмерном виде, введя замену $2\tau = \omega t$:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \left(a - 2b\cos\left(2\tau\right)\right)\varphi = 0, \qquad (11.148)$$

где

$$a = \left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^2, \qquad b = a\mu = \frac{2A}{l}. \qquad (11.149)$$

Коэффициент a характеризует относительную частоту параметрического возбуждения, а коэффициент b — глубину модуляции параметра колебательной системы. Еще раз подчеркнем, что для многих важных колебательных систем дифференциальное уравнение параметрических колебаний можно привести к виду уравнения Матье (11.148). Поэтому проведенный анализ колебаний маятника имеет общие свойства и переменную φ можно рассматривать как обобщенную координату.

Уравнение (11.148) детально исследовано математиками; более того, его решения образуют особый класс специальных функций — *функций Матье*. Полный анализ решений уравнения (11.148) достаточно сложен, и приводить его не будем. Отметим только, что при некоторых условиях получаем решения, которые являются периодическими. Однако в общем случае решения не являются точно периодическими.

Важной характеристикой решения уравнения Матье является его устойчивость. При некоторых значениях коэффициентов a и b со временем τ переменная φ увеличивается, что указывает на неустойчивость решения. При других значениях a и b решение остается огра-

---

[*] Матье (Mathieu) Эмиль Леонард (1835—1890) — французский астроном и математик.

ниченным и является устойчивым. Сделаем несколько замечаний качественного характера. Если $b = 0$ и $a > 0$, то решение соответствует простым гармоническим колебаниям. Если b отлично от нуля, но его значение достаточно мало, так что $|2b| < a$, то выражение $a - 2b\cos(2\tau)$ остается все время положительным. В этом случае можно предположить, что решения будут подобны гармоническим функциям. Если $b = 0$, а $a < 0$, то решения уравнения (11.148) имеют неколебательный характер и описываются экспоненциальной функцией, возрастающей со временем τ. Поэтому, если $a < 0$ или, если $|2b| > a$, то множитель при φ становится отрицательным хотя бы на части периода своего изменения. Можно предположить, что при этом решения в определенной мере аналогичны неустойчивым экспоненциальным функциям. Таким образом, поведение решения уравнения Матье (11.148) зависит от значений коэффициентов a и b. Этот факт иллюстрирует карта динамических режимов (рис. 11.30) на плоскости параметров (a, b), которая демонстрирует границы неустойчивости решений уравнения Матье. Картина симметрична относительно оси a, поскольку знак b в уравнении (11.148) не имеет значения.

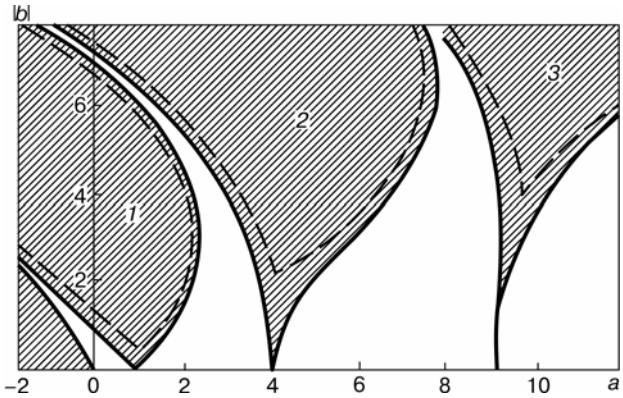


Рис. 11.30. Границы зон неустойчивости (заштрихованные области) на плоскости параметров (a, b) для уравнения Матье:

цифры соответствуют номерам резонансов; сплошные линии — $\delta = 0$, штриховые — $\delta = 0{,}1$

Заштрихованные области изменения параметров (a, b) являются областями неустойчивости. Они имеют клювообразную форму и расположены в окрестности резонансных частот

$$a \approx n^2 \text{ или } \omega \approx \frac{2\omega_0}{n}, \quad n = 1, 2, 3... \tag{11.150}$$

При значениях параметров a и b из зоны неустойчивости случайное отклонение системы от положения равновесия приводит к нарастанию амплитуды колебаний, т.е. существует параметрический резонанс. Не заштрихованные области являются зонами устойчивости. В этих областях в случае консервативной системы происходит сложный процесс незатухающих колебаний, а при наличии демпфирования, присущего любой реальной системе, — затухающий процесс колебаний. На границе раздела областей устойчивости и неустойчивости существует баланс энергий, что соответствует чисто периодическим колебаниям. Понятно, что в реальный системе удержать такой режим колебаний невозможно, поскольку незначительные изменения в условиях колебаний сдвинут систему в область или устойчивости, или неустойчивости. Вообще границы между областями устойчивости и неустойчивости имеют достаточно сложный вид. В целом, решение устойчиво при $a > 0$ и $|2b| < a$ и в основном неустойчиво вне этой области. Однако существуют узкие области, в которых эти общие рассуждения неверны, например — области неустойчивости для малых значений $|b|$ вблизи $a = 1^2,\ 2^2,\ 3^2, \ldots$ Есть также узкие области устойчивости при отрицательных a.

Область, в которой $n = 1$ ($a = 1$), называют *главной областью неустойчивости.* С увеличением модуляционного коэффициента b область неустойчивости расширяется. Поэтому параметрический резонанс возникает не только при выполнении соотношения (11.150) для частот ω и ω_0 , а и в окрестности этого соотношения, что отличает его от резонанса в режиме вынужденных колебаний, происходящего только при $\omega = \omega_0$. Отметим, что скорость нарастания амплитуды колебаний различна для разных областей неустойчивости, а внутри каждой области изменяется от максимального значения при точном выполнении частотного соотношения (11.150) до нуля на границе областей.

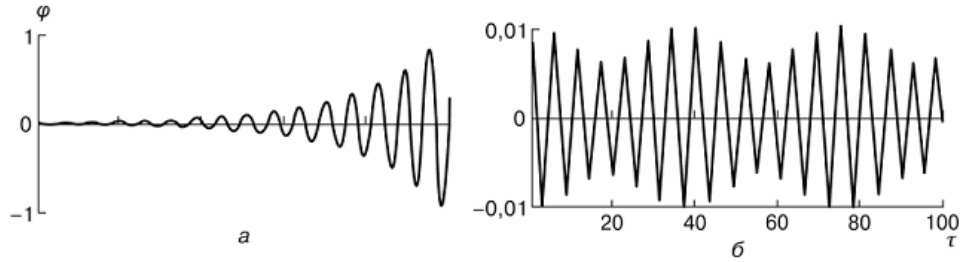


Рис. 11.31. Решения уравнения Матьє, параметры a и b:
а — $a = 1{,}0$, $b = 0{,}1$; *б* — $a = 1{,}2$, $b = 0{,}1$

Характерные для уравнения Матье решения по своему виду могут быть достаточно сложными. Два примера таких решений, полученных с помощью ЭВМ, приведены на рис. 11.31. Каждое из них соответствует начальным условиям $\varphi = 0{,}01$; $d\varphi/d\tau = 0$ при $t = 0$. Проанализируйте самостоятельно графики на рис. 11.31 и определите положение точки с координатами (a, b) на карте динамических режимов (рис. 11.30).

Для консервативной системы в области неустойчивости происходит неограниченное возрастание амплитуды параметрических колебаний по экспоненциальному закону. Оказывается, что учет в математической модели *линейного демпфирования*:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\delta\frac{d\varphi}{d\tau} + (a - 2b\cos(2\tau))\varphi = 0, \qquad (11.151)$$

не стабилизирует неустойчивость, а только сужает границе зон неустойчивости (на рис. 11.30 они показаны штриховыми линиями). Таким образом, для возникновения параметрического резонанса при наличии демпфирования амплитуда воздействия должна превышать некоторое пороговое значение, которое увеличивается с ростом номера резонанса. В таком случае говорят, что неустойчивость имеет *пороговый характер*.

В связи с этим можно сделать следующее интересное замечание. Если оставить параметры системы неизменными и плавно изменять только частоту параметрического воздействия ω, то коэффициент b будет постоянным и на карте динамических режимов (рис. 11.30) образуется прямая линия $|b| = \text{const}$. Поскольку с увеличением ω величина a уменьшается, то при росте частоты точка двигается вдоль прямой линии справа налево (начиная с $a = +\infty$). В случае консервативной системы в процессе движения точка пересекает бесконечное количество областей устойчивости и неустойчивости. При наличии в системе демпфирования прямая $|b| = \text{const}$ пересекает только конечное число областей неустойчивости, поэтому не исключено, что при достаточно большом демпфировании точка останется в зоне устойчивости. Например, согласно рис. 11.30 при коэффициенте $b = 4$ вызвать в осцилляторе параметрический резонанс, соответствующий областям с $n \geq 3$, невозможно.

Таким образом, при наличии демпфирования колебания осциллятора в области устойчивости будут затухающие, а в области неустойчивости, несмотря на наличие демпфирования, они могут неограниченно нарастать. Понятно, что это нефизический результат.

Из этих соображений следует, что нелинейность, которую мы до сих пор не учитывали, играет принципиальную роль в теории пара-

метрических колебаний. Только учет нелинейных эффектов позволяет ответить на вопрос, как закончится развитие неустойчивости на протяжении продолжительного времени, и определить характеристики установившегося режима колебаний. Аналогичная ситуация наблюдалась и для автоколебаний.

Об особенностях исследования параметрических колебаний в нелинейной системе можно узнать из специальной литературы [26, 38]. Мы лишь отметим, что в нелинейных системах даже при отсутствии демпфирования, как и при силовом резонансе (см. параграф 11.12), не происходит бесконечного роста параметрически возбужденных колебаний. Это является следствием того, что нелинейным системам присуща *неизохронность*, т.е. зависимость собственной частоты колебаний от амплитуды. Это приводит к выходу системы из зоны параметрического резонанса; другими словами, нарушаются необходимые частотные и фазовые соотношения, а в результате прекращается поступление энергии в систему со стороны механизма, изменяющего параметр.

11.14.3. Маятник Капицы

Здесь рассмотрим интересную задачу о возможности устойчивости вертикального положения перевернутого маятника (рис. 11.32). Понятно, что, при неподвижной опоре это положение неустойчиво. Однако колебания точки подвеса маятника по гармоническому закону $y(t) = A\cos(\omega t)$ могут содействовать возникновению в этом положении устойчивости. Убедимся в этом. Чтобы получить уравнение движения маятника в данном случае, достаточно изменить знак перед членом, содержащем ускорение g, в уравнении (11.145). Соответственно, коэффициент a в уравнении (11.148) изменит знак, а именно: $a = -(2\omega_0/\omega)^2$, другие величины останутся неизменными.

В соответствии с картой динамических режимов (рис. 11.30) верхнее положение маятника (когда $a < 0$) может быть устойчивым. На карте каждому значению b соответствует некоторая достаточно узкая область значений $a < 0$, в пределах которой состояние равновесия маятника устойчиво. На рис. 11.33 представлен фрагмент карты при малых значениях параметра b (когда $0 < |b| < 1$), что соответствует небольшим амплитудам A колебаний точки подвеса маятника. На рис. 11.33 представлены приближенные уравнения линий, разделяющих зоны устойчивости и неустойчивости. Таким образом, в зоне устойчивости для фиксированного значения b параметр a лежит в интервале $-b^2/2 < a < 1 - b - b^2/8$.

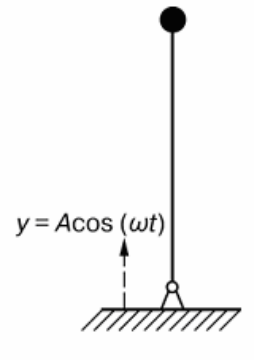


Рис. 11.32. Пример перевернутого маятника

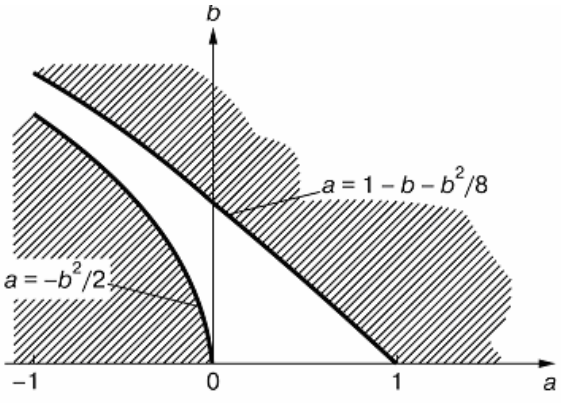


Рис. 11.33. Фрагмент карты динамических режимов (рис. 11.30)

При малых значениях амплитуды A, т.е. при малых значениях параметра b, правая часть неравенства удовлетворяется при любых отрицательных значениях a и практически остается одно неравенство $a > -b^2/2$, т.е. $|a| < b^2/2$. Подставляя в это неравенство выражения для a и b, получаем условие устойчивости в виде $A\omega > \sqrt{2gl}$.

Это неравенство определяет нижний уровень максимальной скорости $A\omega$ колебаний точки подвеса, которая обеспечивает устойчивость перевернутого маятника. Как видим, указанная скорость должна превышать скорость свободного падения тела с высоты, равной длине маятника.

Вот что пишет об этом интересном явлении Капица* [**]: “Мы реализовали это с помощью простого прибора, схематически представленного на рис. 11.34. На оси небольшого электродвигателя *1* с большим количеством оборотов (мы использовали электродвигатель от швейной машины) эксцентрично насажен шариковый подшипник *2*; к обойме подшипника присоединена тяга *3*, которая вызывает колебания рычага *4*. Один конец рычага *4* поворачивается в неподвижной опоре, а к другому — подвешивается стержень маятника *5* так, чтобы он мог свободно колебаться.

Когда прибор приведен в действие, то стержень маятника ведет себя так, как будто для него существует особая сила, направленная вдоль оси колебаний подвеса. Поскольку частота колебаний подвеса

---

* Капица Петр Леонидович (1894—1984) —российский физик, академик АН СССР (1939), лауреат Нобелевской премии (1978).

** Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. — 1951. — **21**. — С. 588—601.

велика, то изображение стержня маятника воспринимается глазом несколько размыто, и колебательное движение незаметно. Поэтому явление устойчивости производит неожиданное впечатление. Если маятнику сообщить толчок в сторону, то он начинает качаться как обычный маятник... Эти колебания затухают, и маятник приходит в вертикальное положение".

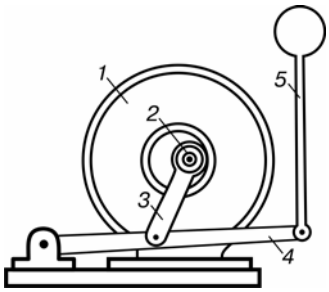


Рис. 11.34. Схема прибора для опытов с маятником Капицы

11.15. Синхронизация колебаний

11.15.1. Синхронизация — фундаментальное нелинейное явление

Слово "*синхронизация*" происходит от греческого слова σύγχρονοζ — одновременный. Рассмотрим некоторую нелинейную диссипативную систему, которой присущ режим периодических автоколебаний. Образом установившегося режима в фазовом пространстве будет предельный цикл — замкнутая фазовая траектория, к которой приближаются все другие траектории. Приложим к системе внешнее периодическое воздействие, с временным периодом близким к периоду автоколебаний системы. При этом наблюдается интересное явление: в определенном интервале частоты внешней силы колебания системы синхронизируются с внешним воздействием по частоте, причем такой частотный интервал (*полоса синхронизации*) тем шире, чем больше интенсивность воздействия. Этот эффект — *синхронизация внешней силой* наблюдается в системах самой разнообразной природы [40] — в механических системах, радиотехнических и электронных устройствах, лазерах, биологических объектах.

Принципиальным для понимания эффекта синхронизации является то, что периодические автоколебания характеризуются *свободной фазой, т.е. значения фазы одинаково допустимы* (см. п. 11.10.4). Если на систему, которая выполняет автоколебания, повлиять толчком,

то она снова вернется в режим постоянных автоколебаний с той же амплитудой, но, в общем случае, с другой фазой. Если существует периодическое внешнее воздействие, то даже при его малой амплитуде появившийся сдвиг фазы постепенно будет накапливаться, и за некоторое время фаза окажется существенно сдвинутой. В итоге это может привести к режиму синхронизации.

Следует подчеркнуть существенное отличие между вынужденными колебаниями и явлением синхронизации. Магнитный маятник в переменном поле электромагнита колеблется с частотой магнитного поля. Если эта частота изменится, то изменится и частота колебаний маятника. Однако этот случай не может быть назван синхронизацией, поскольку одна из двух взаимодействующих систем, а именно: маятник, не имеет собственного ритма. Действительно, если мы разрушим связь между системами, например, расположим металлическую пластину между электромагнитом и маятником, то со временем маятник остановится. Итак, *не бывает синхронизации без наличия автоколебаний в системе.*

Если мы имеем две слабо связанные автоколебательные системы, то можно говорить, что каждая из них осуществляет внешнее воздействие на другую. Как следствие, может возникнуть такой установившийся режим, в котором колебания в обеих системах происходят синхронно с одной и той частотой. Это эффект *взаимной синхронизации связанных систем.*

Здесь следует особенно подчеркнуть, что речь идет именно о слабой связи между автоколебательными системами. Если связь не слабая, то она накладывает сильные ограничения на движение двух систем и естественно рассматривать всю систему как единое целое, например, два маятника часов, соединенных жесткой связью. Понятно, что достаточно сложно определить границу между слабой и сильной связями. Скажем так: введение связи не должно качественно изменять поведение каждой из взаимодействующих систем и не должно лишать систему ее индивидуальности. В частном случае, если одна система перестает колебаться, то это не должно помешать другой системе поддерживать свой собственный ритм.

Поэтому, если в некотором эксперименте мы имеем переменные, изменяющиеся во времени синхронно, то это не обязательно означает, что мы наблюдаем синхронизацию.

Таким образом, одного наблюдения недостаточно, чтобы сделать вывод о наличии синхронизации. *Синхронизация — это сложный динамический процесс, а не состояние* [40, с. 38]. В обоих случаях синхронизации (внешняя и взаимная) проявляются одинаковые эффекты синхронизации, которые определяются двумя механизмами: захватом собственных частот (и соответственно фаз) или же подавлением одной из собственных частот взаимодействующих систем.

Впервые эффект синхронизации был описан в XVII столетии Гюйгенсом для механических автоколебательных систем — маятниковых часов. О своем открытии он писал в письме к отцу от 26 февраля 1665 года (см. эпиграф к данному разделу). Как следует из этого письма, открытие синхронизации было сделано в то время, когда Гюйгенс был болен и, вынужденный оставаться несколько дней в постели, наблюдал за двумя часами, висевшими на стене. Гюйгенс не только описал сам эксперимент, но и дал замечательное качественное объяснение эффекта взаимной синхронизации [40, с. 19-20].

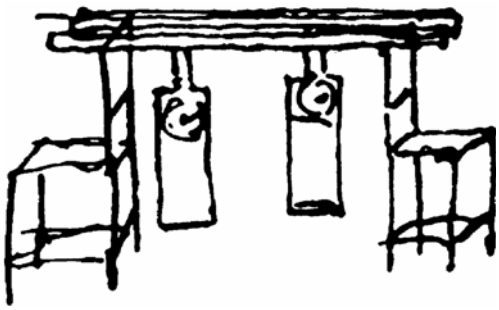


Рис. 11.35. Оригинальный рисунок Христиана Гюйгенса, иллюстрирующий его эксперименты с двумя маятниковыми часами, подвешенными к общей балке [40, с. 20]

“Очень важно отметить, что когда мы подвесили двое ... часов к одной и той же деревянной балке (рис. 11.35), оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились. Тиканье обоих часов было слышно в одно и то же мгновение. Если это совпадение искусственно нарушалось, то оно само восстанавливалось в короткое время. Сначала я был поражен этим странным явлением, но, наконец, после внимательного исследования нашел, что причина лежит в незаметном движении самой балки. Колебания маятника сообщают некоторое движение и самым часам, как бы тяжелы они ни были. А это движение передается балке, и, если маятники сами не двигались в противоположных направлениях, то теперь это произойдет с необходимостью, и только тогда движение балки прекратится. Но эта причина не была бы достаточно эффективна, если бы ход обоих часов не был с самого начала очень однороден и согласован между собой”.

Таким образом, Гюйгенс понял, что согласованность ритма двух часов была вызвана невозможными для восприятия глазом движениями балки. В современной терминологии это означает, что часы были синхронизированы в противофазе за счет связи через балку.

В середине XIX столетия Рэлей описал интересное явление синхронизации в акустических системах [50, т. 2, с. 216].

“Когда две органные трубы с одинаковой высотой звука расположены рядом, возникают последствия, которые изредка приводят к практическим проблемам. В экстремальных случаях трубы могут заставить друг друга почти замолчать. Даже если взаимное влияние не столь сильно, то оно может, тем не менее, быть причиной того, что трубы будут звучать в унисон, несмотря на неизбежные малые различия”.

Итак, Рэлей наблюдал не только взаимную синхронизацию, когда разные, но схожие, органные трубы начинают звучать в унисон, но и эффект гашения колебаний, когда связь приводит к подавлению колебаний во взаимодействующих системах.

На сегодня эффект синхронизации исследован в разных устройствах: от маятниковых часов до музыкальных инструментов, электронных генераторов, силовых электрических устройств и лазерах; вообще, для него найдено много применений в инженерном деле. Большое значение имеет исследование синхронизации в биологических системах, где она встречается на различных уровнях. Представление о синхронизации позволяет объяснить совсем нетривиальные и необычные явления, такие как подстройка биологических ритмов живых существ под внешнее воздействие (например, суточный цикл), синхронизация свечения скопления светлячков, игра в унисон ансамбля скрипачей, синхронизация аплодисментов в театре и т.п.

В современной нелинейной динамике определился более широкий взгляд на синхронизацию, чем в классической теории колебаний. Здесь мы рассматриваем только периодические автоколебания. Но выяснилось, что возможны и более сложные режимы автоколебаний, в том числе квазипериодические и даже хаотические. Понятно, что возможно возникновение разных ситуаций. Так при однонаправленной связи систем можно говорить о синхронизации систем внешним сигналом — регулярным или хаотическим. При наличии взаимного влияния двух систем могут возникнуть разнообразные режимы взаимной синхронизации. Но эти вопросы выходят за рамки нашей книги.

11.15.2. Синхронизация периодических автоколебаний внешним воздействием

В этом пункте, в общих чертах, рассмотрим простейший случай синхронизации — захват частоты периодических автоколебаний внешней силой. Такая однонаправленная связь между автоколебательной системой и внешним воздействием — это не только упрощение, позволяющее дать наиболее ясное описание эффекта синхро-

низации, но и модель, которая соответствует многим реальным ситуациям. В качестве примера можно привести биологические часы, которые задают *циркадный* (от латинских слов *circa* — близко, *dies* — день, т.е. близкий к суточному) ритм клеток и организмов. Этот ритм управляется периодическим влиянием, которое возникает вследствие вращения Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца. Понятно, что такое влияние — однонаправленное.

В параграфе 11.11 было рассмотрено уравнение Рэлея (11.102), представляющее модель автоколебательной системы с нелинейной силой трения. В нем положительное нелинейное сопротивление зависит от скорости $\dot{x}$. Если теперь определить эту составляющую как функцию обобщенной координаты x, то получим уравнение Ван дер Поля*:

$$\ddot{x} - \varepsilon\left(1 - x^2\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (11.152)$$

Модели Рэлея (11.102) и Ван дер Поля (11.152) — это базовые (т.е. наиболее простые) модели автоколебательных систем, генерирующих квазигармонические колебания. Кроме того, они описывают целый ряд механических, электронных и биологических систем, в которых наблюдаются автоколебания. Они также являются базовыми моделями для исследования эффектов синхронизации как при действии внешней периодической силы (вынужденная синхронизация), так и при взаимодействии двух связанных генераторов (взаимная синхронизация).

Для исследования вынужденной синхронизации введем в уравнение (11.152) гармоническую внешнюю силу и рассмотрим динамику периодически возбуждаемого осциллятора Ван дер Поля:

$$\ddot{x} - \varepsilon\left(1 - x^2\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = a\cos(\omega\, t), \qquad (11.153)$$

где a и ω — амплитуда и частота внешней силы; ω_0 — собственная частота осциллятора; ε — параметр, который определяет степень нелинейности и глубину обратной связи в системе.

Пусть нелинейность в системе слабая, т.е. $0 < \varepsilon << 1$. В этом случае при $a = 0$ автоколебания в системе близки к гармоническим. Пусть также амплитуда a внешней силы есть малая величина и частоты ω_0 и ω близки друг другу. Указанные условия позволяют применить для исследования осциллятора (11.153) *метод Ван дер Поля* [26, 36, 38].

Согласно методу Ван дер Поля будем находить решение уравнения (11.153) в виде квазигармонического колебания:

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[A(t)\exp(i\omega t)\right] = \frac{1}{2}A(t)\exp(i\omega t) + \frac{1}{2}A^*(t)\exp(-i\omega t), \qquad (11.154)$$

---

* Ван дер Поль (Van der Pol) Балтазар (1889—1959) — голландский физик.

где звездочка обозначает комплексное сопряжение; $A(t)$ — комплексная амплитуда, которая изменяется медленно, в сравнении с функцией $\exp(i\omega t)$. Модуль и аргумент функции $A(t)$ определяют медленные изменения амплитуды и фазы колебаний. В связи с этим этот метод называют также *методом медленного изменения амплитуды.*

Далее нетрудно определить, что

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}\dot{A}(t)\exp(i\omega t) + \frac{i\omega}{2}A(t)\exp(i\omega t) +$$

$$+\frac{1}{2}\dot{A}^*(t)\exp(-i\omega t) - \frac{i\omega}{2}A^*(t)\exp(-i\omega t). \qquad (11.155)$$

Отметим, что вместо одной зависимой переменной по сути введено две: A и A^*. Поэтому между этими величинами можно ввести дополнительную связь. Пусть

$$\dot{A}(t)\exp(i\omega t) + \dot{A}^*(t)\exp(-i\omega t) = 0. \qquad (11.156)$$

Тогда выражение (11.155) упрощается:

$$\dot{x}(t) = \frac{i\omega}{2}A(t)\exp(i\omega t) - \frac{i\omega}{2}A^*(t)\exp(-i\omega t). \qquad (11.157)$$

Продифференцируем (11.157), с учетом (11.156) получим

$$\ddot{x}(t) = i\omega\dot{A}(t)\exp(i\omega t) - \frac{\omega^2}{2}A(t)\exp(i\omega t) - \frac{\omega^2}{2}A^*(t)\exp(-i\omega t). \qquad (11.158)$$

Подставляя (11.254), (11.157), (11.158) в исходное уравнение (11.153) и разделив его на exp ($i\omega t$), после ряда преобразований будем иметь следующее уравнение:

$$i\omega\dot{A} + (\omega_0^2 - \omega^2)\frac{A}{2} + (\omega_0^2 - \omega^2)\frac{A^*}{2}\exp(-i2\omega t) - \varepsilon\Bigg[i\omega\frac{A}{2} -$$

$$-i\omega\frac{A^3}{8}\exp(-i2\omega t) + i\omega\frac{A\left(A^*\right)^2}{8}\exp(-i2\omega t) - i\omega\frac{A^2A^*}{8} -$$

$$-i\omega\frac{A^*}{2}\exp(-i2\omega t) + i\omega\frac{\left(A^*\right)^3}{8}\exp(-i4\omega t)\Bigg] = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\exp(-i2\omega t). \qquad (11.159)$$

Теперь *усредним* уравнение (11.159) по периоду внешней силы $T = 2\pi/\omega$:

$$\langle \xi(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt. \qquad (11.160)$$

Поскольку $A(t)$ — функция, которая изменяется медленно на протяжении периода T, то при усреднении ее можно вынести за знак интеграла. Тогда быстро осциллирующие составляющие (т.е. слагаемые, которые имеют комплексные экспоненты) в уравнении (11.159) превратятся в нули, и в результате получим уравнение

$$i\omega\dot{A} + \left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\varepsilon\omega\right)\frac{A}{2} + i\varepsilon\omega\frac{A^2A^*}{8} = \frac{a}{2}. \qquad (11.161)$$

Чтобы уменьшить количество параметров введем следующие обозначения:

$$\Delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega}, \quad b = \frac{a}{2\omega}. \qquad (11.162)$$

С учетом (11.162) представим уравнение (11.161) в виде

$$i\dot{A} + \left(\Delta - i\frac{\varepsilon}{2}\right)A + i\varepsilon\frac{A^2A^*}{8} = b. \qquad (11.163)$$

Запишем комплексную амплитуду в виде $A(t) = B(t)\exp\left[i\varphi(t)\right]$. Тогда из уравнение (11.163) получим

$$i\dot{B}\exp(i\varphi) - B\dot{\varphi}\exp(i\varphi) + \left(\Delta - i\frac{\varepsilon}{2}\right)B\exp(i\varphi) + i\frac{\varepsilon}{8}B^3\exp(i\varphi) = b. \qquad (11.164)$$

Умножив (11.164) на exp $(-i\varphi)$ и выделив действительную и мнимую части, получим уравнение для мгновенной амплитуды $B(t)$ и мгновенной фазы $\varphi(t)$:

$$\dot{B} = \frac{\varepsilon B}{2}\left(1 - \frac{B^2}{4}\right) - b\sin\varphi, \qquad (11.165)$$

$$\dot{\varphi} = \Delta - \frac{b}{B}\cos\varphi. \qquad (11.166)$$

Отметим, что полученная в приближении медленного изменения амплитуды и фазы система уравнений (11.165), (11.166) может описывать колебательный процесс в исходном уравнении (11.153) при условии, что $b \le 0{,}05$ [3, с. 97].

Уравнения (11.165), (11.166) по смыслу представляют собой усредненные по времени уравнения (см. (11.160)). Поэтому неподвижной точке (состоянию равновесия) системы (11.165), (11.166) ($\dot{B} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$)

будет отвечать периодическое решение исходного уравнения (11.153), а периодическому решению (11.165), (11.166) — двухчастотное квазипериодическое решение (11.153).

Предположим, что решением системы (11.165), (11.166) является неподвижная точка $\dot{B} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ и она устойчива. Условие $\dot{B} = 0$ означает постоянное во времени значения амплитуды ($B(t)$ = const), а условие $\dot{\varphi} = 0$ — постоянное значение фазы ($\varphi(t)$ = const) комплексной амплитуды $A(t) = B(t)\exp(i\varphi(t))$. Тогда, согласно (11.154), решением уравнения (11.153) будет $x(t) = B_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, где B_0 и φ_0 — постоянные. Таким образом, частота автоколебаний осциллятора (11.152) изменится и будет равна частоте внешней силы ω. При этом амплитуда колебаний во времени изменяться не будет. Автоколебательная система “подстроиться” по частоте, т. е. будет иметь место эффект вынужденной синхронизации.

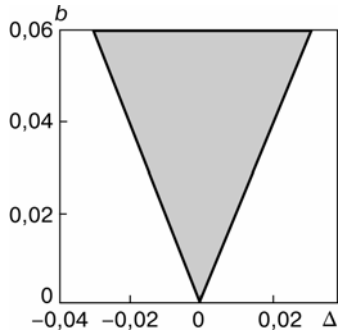


Рис. 11.36. Область синхронизации, или язык Арнольда (серый цвет), на плоскости параметров (b,Δ)

Расчеты показывают [26, 40], что на плоскости параметров (b,Δ) (рис. 11.36) существует область значений (область синхронизации), в которой неподвижная точка системы (11.165), (11.166) является устойчивой, что соответствует, как мы уже знаем, периодическому решению исходного уравнения (11.153). На границе этой области неподвижная точка теряет устойчивость, и из неподвижной точки рождается предельный цикл, т.е. имеем периодическое решение системы (11.165), (11.166). Это означает, что на плоскости параметров мы вышли из области устойчивости, и исходное уравнение (11.153) будет иметь двухчастотное решение. Соотношение этих частот может быть произвольным, в том числе и иррациональным. В таком случае имеем дело не с периодическим, а с квазипериодическим колебательным процессом, который называют *режимом биений* (см. параграф 2.7). На рис. 11.36

область синхронизации выделена серым цветом, ее называют *языком Арнольда* (по форме напоминает язык).

Рассмотрим возможность дальнейшего упрощения анализа нашей задачи. Как отмечалось, параметр нелинейности ε является малой величиной ($\varepsilon << 1$). Пусть амплитуда внешнего воздействия b также малая величина, причем $b << \varepsilon << 1$. Тогда в нулевом приближении по b (т.е., отбрасывая второе слагаемое в правой части уравнения (11.165)) определяем амплитуду установившихся ($\dot{B} = 0$) колебаний $B = 2$ и подставляем ее в уравнение (11.166). Такую подстановку можно осуществить, поскольку соответствующий член в уравнении (11.166) имеет множитель b. Как следствие, получим уравнение для одной переменной — фазы комплексной амплитуды колебаний:

$$\dot{\varphi} = \Delta - \frac{b}{2}\cos\varphi. \qquad (11.167)$$

Такое упрощение дает возможность, в рамках указанных предположений, легко определить область устойчивости $(\dot{\varphi} = 0)$ на плоскости параметров (b,Δ). Понятно, что данная область определяется условием $|\Delta| < b/2$. Если зафиксировать амплитуду воздействия b и изменять его частоту (т.е. параметр Δ), то синхронизация будет существовать в интервале значений отклонений частот $|\Delta| < b/2$, который называют *полосой синхронизации*. Ее ширина, в рамках принятых приближений, увеличивается прямо пропорционально амплитуде воздействия (см. рис. 11.36).

С целью иллюстрации правомерности проведенного приближенного анализа, приведем некоторые результаты численного решения на ЭВМ исходного уравнения (11.153). На рис. 11.37 представлены результаты такого решения при $\varepsilon = 0{,}1$, $\omega_0^2 = 1$, $b = a/(2\omega) = 0{,}04$ и разных частотах внешнего воздействия ω, а именно, рис. 11.37, *а* — $\omega/\omega_0 = 1{,}015$; *б* — $\omega/\omega_0 = 1{,}025$; *в* — $\omega/\omega_0 = 1{,}035$.

Как видим, рис. 11.37, *а* соответствует режиму синхронизации, а 11.37, *б*, *в* — режиму биений. На рис. 11.37, *б*, *в*, где имеет место режим биений, можно наблюдать постепенное уменьшение периода биений при увеличении отклонения Δ. Согласно рис. 11.36 численные значения параметров b и Δ, соответствующие расчетам на рис. 11.37, *а*, находятся внутри языка Арнольда, а для других расчетов — вне области синхронизации.

Очевидно фазовые портреты осциллятора (11.153) при указанных на рис. 11.37 параметрах будут разными. В этом не трудно убедиться. Представим уравнение (11.153) в виде системы дифференциаль-

ных уравнений первого порядка, введя фазовые переменные $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \omega t$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon\left(1 - x_1^2\right)x_2 - \omega_0^2 x_1 + a\cos x_3, \\ \dot{x}_3 &= \omega. \end{aligned} \qquad (11.168)$$

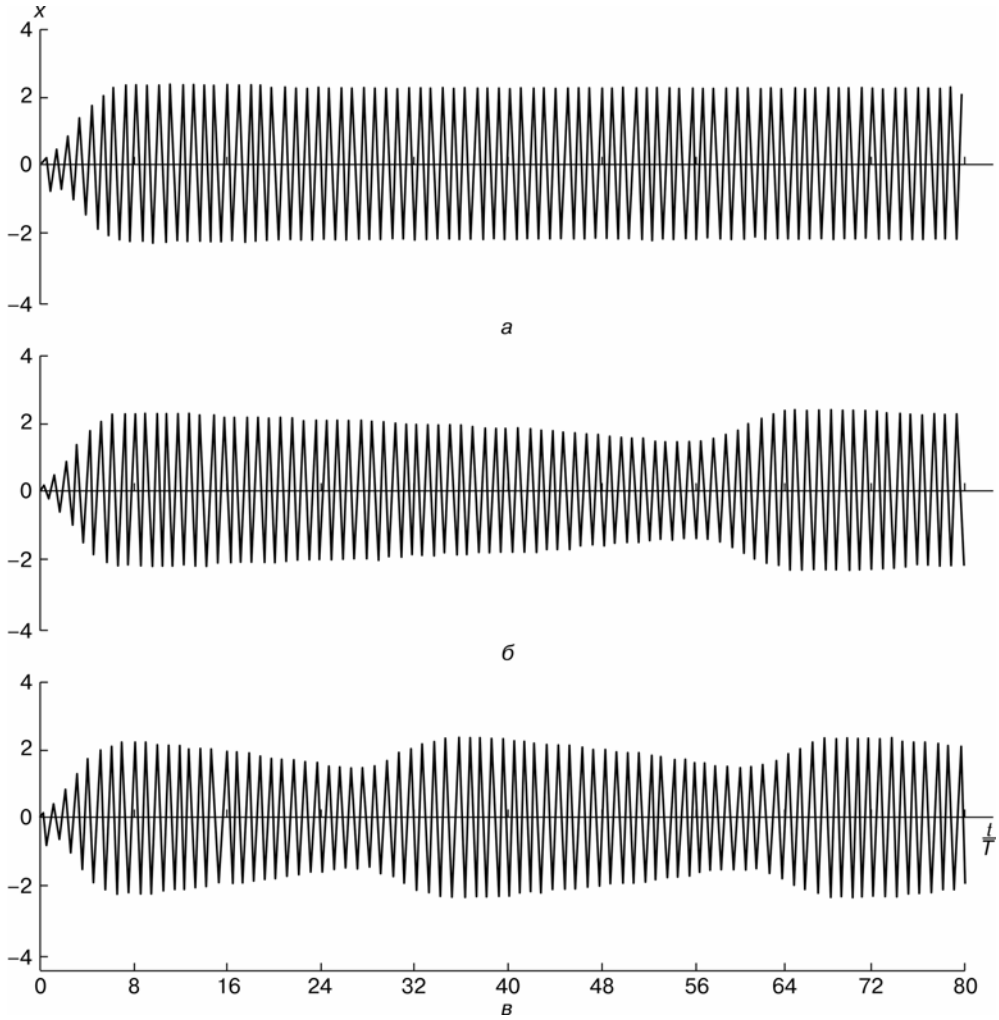


Рис. 11.37. Численное решение уравнения Ван дер Поля (11.153) при $\varepsilon = 0{,}1$; $\omega_0^2 = 1$; $b = 0{,}04$ и разных частотах внешнего влияния ω/ω_0:

а — 1,015; *б* — 1,025; *в* — 1,035. На оси абсцисс отложено нормированное время t/T, $T = 2\pi/\omega$; (начальные скорость и смещение осциллятора равны нулю)

Численное решение системы (11.168) показано на рис. 11.38. Здесь представлены проекции фазового портрета на плоскость фазовых переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ для двух значений частоты внешнего воздействия рис. 11.38, *а* — $\omega/\omega_0 = 1{,}015$; *б* — $\omega/\omega_0 = 1{,}035$ (начальный участок колебательного процесса отброшен). Рис. 11.38, *а* соответствует рис. 11.37, *а*, здесь наблюдается режим синхронизации, при котором частота автоколебаний становится равной частоте внешнего воздействия. Рис. 11.38, *б* соответствует рис. 11.37, *в*, тут в отклике системы присутствуют две частоты, что определяет возникновение биений. Проекция фазового портрета на рис. 11.38, *б* представляет собой двумерный тор, "толщина" тора определяется глубиной амплитудной модуляции в зависимости $x(t)$ на рис. 11.37, *в*. На рис. 11.38, *б* расчеты намеренно представлены для относительно небольшого интервала времени, чтобы показать, как фазовая траектория заполняет поверхность тора. При увеличении промежутка времени поверхность тора на рисунке полностью окрасится в черный цвет.

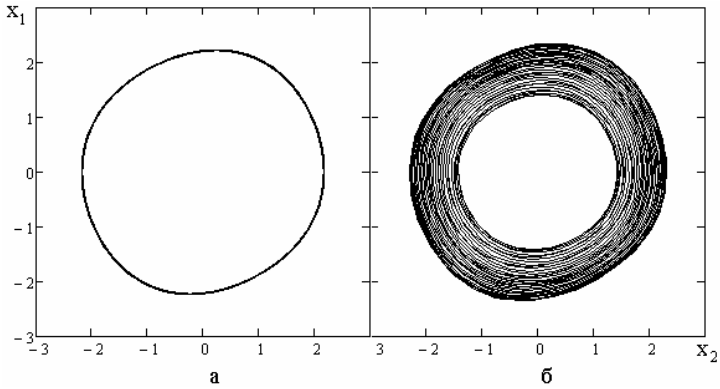


Рис. 11.38. Численное решение системы уравнений (11.168) при $\varepsilon = 0{,}1$; $\omega_0^2 = 1$; $b = 0{,}04$ и разных частотах внешнего влияния ω/ω_0:
а — 1,015; *б* — 1,035

11.16. Задачи

11.1. Масса m колеблется на пружине, для которой зависимость упругой силы от деформации имеет вид $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты. Постройте фазовый портрет системы. В чем его отличие от фазового портрета соответствующей линейной системы? Укажите область на фазовой плоскости, в пределах которой систему можно считать линейной.

11.2. При каких значениях параметра γ осциллятор $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\sin x=0$ будет иметь в начале координат устойчивый фокус, а при которых — устойчивый узел?

11.3. Проведите исследование уравнения маятника $\ddot{\theta}+\sin\theta=0$ с помощью ЭВМ. Получите зависимости $\theta(t)$ и $\dot{\theta}(t)$ для разных амплитуд колебаний θ_0, постройте соответствующие траектории на фазовой плоскости.

11.4. С помощью модели маятника в виде осциллятора с кубической нелинейностью оцените угловую амплитуду колебаний маятника, для которой период на 1% отличается от значения, которое дает линейная теория.

11.5. Определите период малых колебаний массы m, которая двигается вдоль оси Ox, если зависимость потенциальной энергии от координаты x имеет вид $U(x)=U_0\left[(x/l)^3-3x/l\right]$.

Указание: разложите потенциальную энергию в ряд Тейлора вблизи минимума, оставляя при этом два ненулевых члены ряда.

Ответ: $2\pi\sqrt{ml^2/(6U_0)}$.

11.6. Определите с точностью до числовой постоянной период колебаний массы m, если потенциальная энергия $U(x)=k|x|^n$, $n>1$. Покажите, что колебания будут изохронными только при $n=2$. Как изменяется период колебаний для разных n, если амплитуда колебаний стремится к нулю.

Ответ: при $1<n<2$ период колебаний уменьшается, а при $n>2$ увеличивается при условии, что амплитуда колебаний стремится к нулю.

11.7. В работе [24, с. 52] описан следующий опыт. Возьмите два камертона, которые соответствуют двум нотам с частотами 440 и 523 Гц. Возбуждая их, можно услышать не только эти две ноты, но и колебание, которое близко к третьей ноте с частотой 349 Гц. Это явление связано с нелинейностью слуха. Какой характер нелинейности проявляется в этом опыте?

Ответ: кубический.

11.8. Исследуйте устойчивость малых колебаний маятника (рис. 11.29) при $\omega=10$ с$^{-1}$, $l=0{,}5$ м, $A=10$ мм.

Ответ: в данном случае параметры (11.149) равны $a\approx 0{,}784$, $b=0{,}04$; итак, согласно рис. 11.30 колебания маятника устойчивые.

11.9. Найдите наименьшую частоту $f_{\min}$, при которой перевернутый маятник (рис. 11.32) устойчив, если $l=0{,}2$ м, $A=5$ мм.

Ответ: $f_{\min}\approx 63$ Гц.

РАЗДЕЛ 12

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Штормит весь вечер, а пока
заплаты пенные латают
разорванные швы песка,
Я наблюдаю свысока,
Как волны головы ломают.

В.С. Высоцкий[*]

12.1. Нелинейная акустика как раздел физики нелинейных волн

В четвертом разделе была получена полная система уравнений акустики идеальной среды. Эта система уравнений оказалась нелинейной, но, принимая во внимание малость амплитуды звуковых волн, была выполнена ее линеаризация. При этом полагалось, что относительные возмущения начального состояния среды — это малые величины порядка μ (здесь μ — некоторый малый параметр):

$$\frac{\rho_{\sim}}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \sim \mu, \quad \frac{p}{P_0} = \frac{P - P_0}{P_0} \sim \mu.$$

При этих условиях скорость υ является малой величиной порядка μ по сравнению со скоростью звука c_0, т.е. $\upsilon / c_0 \sim \mu$. Напомним, что ρ_0 и P_0 — плотность и давление в невозмущенной среде, а $c_0 = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$, где $\gamma = C_P / C_\upsilon$ для газов и эмпирическая постоянная для жидкостей.

В линейной теории параметры плоской звуковой волны связаны между собой соотношениями

$$\frac{p}{\upsilon} = \rho_0 c_0, \quad p = c_0^2 \rho_{\sim}, \tag{12.1}$$

тогда перепишем условия малости параметров звуковой волны в таком виде:

[*] Высоцкий Владимир Семенович (1938—1980) — российский поэт, актер, автор и исполнитель песен.

$$\frac{\upsilon}{c_0} = \frac{\rho_\sim}{\rho_0} = \frac{p}{\rho_0 c_0^2} \sim \mu \ll 1. \qquad (12.2)$$

В гидродинамике [29] отношение скорости потока к скорости звука называют *числом Маха*. Согласно терминологии в акустике отношения амплитуды колебательной скорости υ_0 звуковой волны к скорости звука c_0 называют *акустическим числом Маха** для волны с частотой ω, т.е. $M = \upsilon_0/c_0$. Для исходной гармонической волны пишут также M_ω, подчеркивая тем самым, что речь идет об акустическом числе Маха для волны с частотой ω. В дальнейшем будем говорить кратко — число Маха. Итак, согласно (12.2) степень малости величин $\rho_\sim$ и p относительно параметров невозмущенной среды ρ_0, P_0 определяется числом Маха. Отметим, что для нелинейных звуковых волн типичными являются величины $M = 10^{-4}...10^{-2}$, т. е., действительно, $M << 1$. Например, на “болевом пороге”, когда восприятие звука ухом человеком сопровождается болевым ощущением, амплитуды звукового давления и колебательной скорости приблизительно составляют 200 Па и 0,5 м/с. Это соответствует числу $M \approx 10^{-3}$.

Если вернуться к параграфу 4.1, то можно увидеть (см. сравнительный анализ величин $\partial\upsilon/\partial t$ и $\upsilon\partial\upsilon/\partial x$), что в ходе процесса линеаризации уравнений акустики отбрасываемые члены соотносятся с оставшимися, как $M : 1$. Понятно, что погрешность при линеаризации будет тем меньше, чем меньше число Маха. Однако, как правило, эта погрешность накапливается, и поэтому при произвольном значении M звуковая волна при распространении постепенно изменяется по сравнению с волной, которая является решением линейной системы уравнений акустики. Для очень малых M звуковая волна может затухнуть прежде, чем станет заметной изменение формы звуковой волны. Однако скорость накопления погрешности возрастает вместе с амплитудой волны. Поэтому, начиная с некоторых значений числа Маха, изменение волны становится существенным даже при наличии поглощения. В таких случаях говорят о *волне конечной амплитуды* (или *нелинейной волне*), в то время как при исследовании линейной системы уравнений акустики говорят о волне *бесконечно малой амплитуды* (или *линейной волне*).

В задачах линейной акустики выполняется принцип суперпозиции, и, следовательно, волны не взаимодействуют между собой и распространяются независимо. Это прямое следствие линейности системы уравнений акустики. Если брать за основу нелинейную систему уравнений, то принцип суперпозиции перестает выполняться, и возникает большое количество так называемых *нелинейных эф-*

* Max (Mach) Эрнст (1838—1916) — австралийский физик и философ.

фектов. К ним можно отнести изменение формы начальной синусоидальной волны на пилообразную, возникновение комбинационных частот (в случае распространения нескольких волн), нелинейное поглощение, разные параметрические эффекты, рассеяние звуковых волн одна на другой, акустические течения, радиационное давление, кавитация и многое другое. Весь этот круг вопросов принято называть *нелинейной акустикой*.

Нелинейную акустику можно отнести к тем важным разделам физики нелинейных волн, которые имеют давнюю историю и вместе с тем переживают сейчас новый период интенсивного развития. Рост интереса к нелинейным акустическим явлениям начался в 1960-х годах, и для этого есть весомые причины. Прежде всего, это развитие вычислительной техники, позволившее получить численные решения дифференциальных уравнений, описывающих распространение волн в различных средах.

Вторым толчком стало создание мощного математического аппарата, позволяющего, в принципе, определить точное аналитическое решение ряда нелинейных уравнений в частных производных.

Третий важный фактор — это широкие экспериментальные возможности нелинейной акустики. Дело в том, что для акустических волн, длины которых довольно малы при относительно небольших частотах, необходимые уровни нелинейности достаточно просто получить в воде и в воздухе. Поэтому они оказываются удобным объектом для физического эксперимента.

Вообще исследования в области нелинейной акустики приобретают все большее практическое значение, причем круг таких проблем сейчас существенно расширился. В качестве примера приведем использование нелинейных эффектов распространения звука в приборах неразрушительного контроля, которые используются в промышленности и медицине. В приборах с малой интенсивностью звука, где процесс взаимодействия звуковых волн со средой является линейным, используется одно уникальное свойство звуковых волн — их возможность проникать на достаточно большую глубину. Акустическая “прозрачность” материала и биоткани позволяет ультразвуку (обычно это частоты в диапазоне от 500 кГц до 15 МГц) “считывать” в среде необходимую информацию и переносить ее в приемное устройство, где происходит обработка рассеянной волны или прошедшей волны через среду. В последнее время в промышленности, строительстве, геофизике и медицине все большее внимание уделяется нелинейным методам неразрушающего контроля и диагностики. Эти методы открывают принципиально новые возможности для получения информации о свойствах среды. Нелинейная диагностика использует свойство акустической волны “запоминать” свойства своего “партнера” - другой волны, с которой она пе-

ресекается в некоторой конечной области пространства, а также “запоминать” физические параметры того объема среды, где возникло пересечение волн. Ко второй группе нелинейных акустических методов, которые используются в биологии и медицине, можно отнести “силовое” воздействие звуковой волны значительной мощности. Примерами областей применения данного свойства являются ультразвуковая терапия и хирургия.

Вообще количество научных работ, посвященных вопросам нелинейной акустики, не уменьшается. Много интересной информации по нелинейной диагностике можно найти в обзоре [42]; дополнительном выпуске *“Акустического журнала”* (2005 г.), посвященном смежным с акустикой и геофизикой вопросам.

Природа, действительно, нелинейна и многогранна по своим проявлениям. Однако вместе с осмыслением исследователями этого факта пришло и понимание того, что практически вся многогранность нелинейных волновых процессов может быть сведена к небольшому количеству типичных ситуаций, которые описываются с помощью одних и тех же уравнений (их называют *эталонными*), или, другими словами, с помощью небольшого количества математических моделей. Вообще в целом ряде научных исследований понятие “понимаю” означает “могу рассчитать, могу использовать”. В науках о нелинейных явлениях “понимаю” значит “могу предложить достаточно простую модель”. Это очень важный момент! В данном разделе рассмотрим свойства ряда эталонных уравнений и тем самым сделаем первый шаг в мир нелинейных волновых процессов.

12.2. Простые волны

12.2.1. Волны Римана

Рассмотрим распространение плоской волны в идеальной среде, которая позволяет исследовать волновые процессы в газе или жидкости при отсутствии поглощения. Параметры невозмущенной среды: ρ_0 — плотность, P_0 — давление. Пусть плоская волна распространяется вдоль оси Ox декартовой системы координат. Такое предположение делает задачу одномерной, что естественно облегчает ее анализ. Исходными уравнениями служат уравнения идеальной жидкости (см. раздел 4), которые для одномерного движения запишутся в виде

уравнение движения

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{12.3}$$

уравнение неразрывности

$$\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}, \qquad (12.4)$$

уравнение состояния

$$P = P\ (\rho) \quad \text{или} \quad \rho = \rho\ (P). \qquad (12.5)$$

Напомним, что υ — колебательная скорость частиц среды, $\rho = \rho_0 + \rho_\sim$ — плотность среды, $\rho_\sim$ — переменная плотность, $P = P_0 + p$ — давление в среде, p — акустическое давление.

Уравнение состояния можно записать в виде ряда

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0}\cdot(\rho-\rho_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial\rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}\cdot(\rho-\rho_0)^2+\ldots \qquad (12.6)$$

Здесь целесообразно сделать следующее замечание. Нелинейность уравнений движения (12.3) и неразрывности (12.4) не обусловлены свойствами среды. Поэтому такую нелинейность называют *геометрической*. Наоборот, в уравнении состояния (12.6), которое связывает между собой приращения давления и плотности, нелинейные члены обусловлены свойствами среды. Такую нелинейность называют *физической*.

В разделе 4 при условии, что число Маха M << 1, была проведена линеаризация системы уравнений (12.3)—(12.5) и получено волновое уравнение. Сейчас не будем пренебрегать нелинейными членами, а попробуем получить решение системы уравнений (12.3)—(12.5). Впервые такое решение получил Риман* в 1860 г. Задача о распространении плоской волны в идеальной среде является одной из немногих задач, которая дает возможность получить точное решение.

Согласно системе уравнений (12.3)—(12.5), волновой процесс описывается двумя функциями: колебательной скоростью $\upsilon(x, t)$ и плотностью $\rho(x, t)$ или давлением $P(x, t)$. Последние связаны между собой через уравнение состояния $\rho = \rho(P)$ или $P = P(\rho)$. В случае линейной теории для описания плоской волны было достаточно одной функции, поскольку справедливы соотношения (12.1).

Итак, для описания нелинейной волны нужно знать две функции: $\upsilon(x, t)$ и $P(x, t)$ или $\rho(x, t)$. Сделаем следующее предположение: пусть одна из этих функций может быть выражена через другую. Вообще волновой процесс, в котором все параметры, описывающие этот процесс, могут быть определены в виде функций одного из них, например,

$$\rho = \rho\ (\upsilon), \quad P = P\ (\upsilon) \quad \text{или} \quad \upsilon = \upsilon\ (P), \quad \rho = \rho\ (P), \qquad (12.7)$$

---

* Риман (Riemann) Георг Фридрих Бенгард (1826—1866) — немецкий математик.

называют *простой волны*. Очевидно, простые волны являются обобщением бегущих линейных волн. Однако если функциональная зависимость содержит интегралы или производные, то волна не является простой. Физически это означает появление дисперсии, т.е. зависимость эволюции волнового возмущения от его спектрального состава.

Пусть давление $P(x, t)$ является функцией колебательной скорости $\upsilon(x, t)$. Тогда производная $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{d\upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$, а для производной $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ с учетом уравнения состояния $\rho = \rho(P)$ имеем $\frac{\partial \rho(P)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial P}\frac{dP}{d\upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$. Это предположение приводит уравнения (12.3) и (12.4) к виду

$$\begin{gathered}\rho\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \rho\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{dP}{d\upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0,\\ \rho\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \rho}{\partial P}\frac{dP}{\partial \upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial P}\frac{\partial P}{d\upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = 0.\end{gathered} \tag{12.8}$$

Вспомним, что $\left(\frac{d\rho}{dP}\right)_{P=P_0} = \frac{1}{c_0^2}$ определяет скорость линейной волны (P_0 и ρ_0 — давление и плотность невозмущенной среды). По аналогии обозначим производную $\frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{c^2}$. Что определяет величина c? Очевидно, это скорость волны бесконечно малой амплитуды (линейной волны), но в среде с параметрами P и ρ, т.е. P и ρ — средние значения давления и плотности на некотором участке. Именно при этом среднем значении давления определяется производная $\partial\rho/\partial P$. Поэтому величину c можно назвать *местной скоростью звука*.

С учетом данного определения уравнения (12.8) приобретают вид

$$\rho\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \left(\rho\upsilon + \frac{dP}{d\upsilon}\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0, \tag{12.9}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{dP}{d\upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \left(\rho + \frac{\upsilon}{c^2}\frac{dP}{d\upsilon}\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0. \tag{12.10}$$

Система уравнений (12.9), (12.10) является однородной системой уравнений относительно $\partial\upsilon/\partial t$ и $\partial\upsilon/\partial x$. Она имеет решение, если ее детерминант равен нулю. Легко убедиться, что это условие приводит к соотношению

$$\frac{dP}{d\upsilon} = \pm\rho c, \tag{12.11}$$

откуда

$$\upsilon = \pm\int \frac{dP}{\rho c}. \qquad (12.12)$$

Итак, формулы (12.11) и (12.12) устанавливают связь между P, ρ и υ в нелинейной плоской бегущей волне. Выбор знака в последнем соотношении зависит от направления распространения волны. Рассмотрим волну, которая распространяется в положительном направлении оси Ox (знак плюс). Тогда с учетом соотношения (12.11) уравнение (12.9) или (12.10) преобразуется в следующее нелинейное уравнение для колебательной скорости частичек среды υ:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \left[c(\upsilon) + \upsilon\right]\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0. \qquad (12.13)$$

Получите самостоятельно уравнение для давления P в нелинейной волне, проведя аналогичные преобразования с уравнениями (12.3) и (12.4), но полагая при этом, что колебательная скорость υ является функцией давления P. Естественно, снова будет получено соотношение (12.11), а именно, уравнение для давления будет иметь вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \left[c(P) + \upsilon(P)\right]\frac{\partial P}{\partial x} = 0. \qquad (12.14)$$

Понятно, что подобные выкладки приводят и к уравнению для плотности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[c(\rho) + \upsilon(\rho)\right]\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \qquad (12.15)$$

Формулы (12.11)—(12.15) дают точное решение поставленной задачи. Проведем его анализ. Еще раз отметим, что величина c, которая фактически определяет скорость звука в соответствии с линейной теорией $c^2 = \partial P/\partial\rho$, является функцией состояния среды, т.е. производная берется при среднем значении плотности на данном участке среды. Пусть x есть некоторая точка наблюдения, в которой имеем определенное давление и колебательную скорость. Несложно убедиться в том, что, когда точка наблюдения x двигается со скоростью $(c + \upsilon)$, то параметры звукового поля (P, ρ, υ) остаются постоянными. Действительно, приравнивая к нулю полный дифференциал от некоторого параметра звукового поля (например, υ) в точке наблюдения x при условии, что скорость перемещения этой точки $dx/dt = c + \upsilon$, имеем

$$\frac{d\upsilon(x,t)}{dt} = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + (c + \upsilon)\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0.$$

Сравнивая полученное выражение с уравнением (12.13), убеждаемся в справедливости этого утверждения.

Таким образом, каждая точка профиля бегущей плоской волны с некоторыми значениями P, ρ и υ, перемещается при распространении волны с постоянной скоростью $(c + \upsilon)$. При этом скорость $(c + \upsilon)$ зависит от значений параметров звукового поля P, ρ и υ, а следовательно, будет зависеть от координаты x. Поэтому скорость $(c + \upsilon) = c_\Lambda$ называют *локальной фазовой скоростью* или просто *локальной скоростью*.

Итак, искомое решение для колебательной скорости имеет вид

$$\upsilon = \Phi\left(t - \frac{x}{c_\Lambda}\right) = \Phi\left(t - \frac{x}{c + \upsilon}\right), \qquad (12.16)$$

где Ф — произвольная функция. Подобное решение имеют уравнения для давления (12.14) и плотности (12.15), мы в дальнейшем анализе будем опираться на уравнение для колебательной скорости (что, разумеется, не является принципиальным). Таким образом, выражение (12.16) является неявным решением уравнения (12.13). Это и есть *решение Римана*, определяющее нелинейную бегущую волну. Решение Римана — это точное решение нелинейных уравнений акустики (12.3)—(12.5).

Конкретная функциональная зависимость $c(\upsilon)$ определяется свойствами среды и уравнением состояния (12.5). Запишем эту зависимость для идеальной среды (идеальная сжимаемая жидкость). Поскольку звуковые волны распространяются практически адиабатически, то уравнение состояния (см. (4.19)) имеет вид

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \quad \text{или} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma}. \qquad (12.17)$$

Отметим, что для газов всегда $\gamma > 1$ (так, для воздуха при 20 °С и атмосферном давлении $\gamma = 1{,}43$). В случае жидкостей уравнения (12.17) можно рассматривать как приближенные эмпирические; в этом случае постоянные γ и P_0 определяются по данным эксперимента. Для жидкостей P_0 представляет собой внутреннее давление, обусловленное взаимодействием молекул.

Дифференцируя по плотности одно из уравнений (12.17), получаем выражение для местной скорости звука $c^2 = \partial P/\partial\rho$:

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \qquad (12.18)$$

где c_0 — скорость звука в соответствии с линейной теорией:

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}. \qquad (12.19)$$

Приравнивая дифференциалы левой и правой частей уравнения (12.18), получаем

$$\frac{2c}{c_0^2}dc = \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{dP}{P_0}. \qquad (12.20)$$

Отсюда с учетом (12.18) и (12.19) имеем соотношение

$$\frac{dP}{\rho c} = \frac{2}{\gamma-1}dc. \qquad (12.21)$$

Подставим (12.21) в выражение (12.12):

$$\upsilon = \int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\rho c} = \int_{c_0}^{c}\frac{2}{\gamma-1}dc = \frac{2}{\gamma-1}(c-c_0). \qquad (12.22)$$

Из формулы (12.22) получаем выражение для местной скорости звука при адиабатических процессах сжатия:

$$c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}\upsilon. \qquad (12.23)$$

Тогда локальная фазовая скорость (см. (12.14)) имеет вид

$$c_\Lambda = c + \upsilon = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}\upsilon + \upsilon = c_0 + \frac{\gamma+1}{2}\upsilon = c_0\left(1 + \frac{\gamma+1}{2}\frac{\upsilon}{c_0}\right). \qquad (12.24)$$

Имея соотношения (12.17) и (12.22), нетрудно определить связи (12.7) между параметрами P, ρ, υ для адиабатического уравнения состояния:

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{\upsilon}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{\upsilon}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}. \qquad (12.25)$$

Подставляя (12.24) в (12.16), записываем выражение для нелинейной волны колебательной скорости:

$$\upsilon = \Phi\left(t - \frac{x}{c_0}\left(1 + \frac{\gamma+1}{2}\frac{\upsilon}{c_0}\right)^{-1}\right). \qquad (12.26)$$

Таким образом, формулы (12.24)—(12.26) определяют процесс распространения нелинейной волны в идеальной среде при условии адиа-

батичности волнового процесса. Перед тем как провести его анализ попробуем ответить на следующий вопрос. Как определить локальную фазовую скорость, если уравнение состояния для среды отличается от уравнения для идеального газа? Для этого следует рассмотреть уравнение состояния в виде ряда (12.6). В задачах нелинейной акустики, где числа Маха невелики ($M \approx 10^{-4}...10^{-2}$), обычно ограничиваются двумя членами в ряде (12.6). Тогда уравнение состояния (12.5) имеет вид

$$p = P - P_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0} \cdot \rho_\sim + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0} \cdot \rho_\sim^2, \qquad (12.27)$$

где $\rho_\sim = \rho - \rho_0$. Перепишем (12.27) следующим образом:

$$p = A\frac{\rho_\sim}{\rho_0} + \frac{1}{2}B\left(\frac{\rho_\sim}{\rho_0}\right)^2, \qquad (12.28)$$

здесь

$$A = \rho_0\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0}, \quad B = \rho_0^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}. \qquad (12.29)$$

Как известно, постоянная A — линейный коэффициент упругости, тогда постоянную B можно определить как нелинейный коэффициент упругости. Единицы измерения коэффициентов A и B одинаковы. Очевидно, отношение B/A характеризует степень нелинейности среды. Так, для воздуха $B/A \approx 0{,}4$, для воды $B/A \approx 4{,}2$ ... $6{,}1$ (при температуре $t = 0...100°C$). С этой точки зрения жидкости более нелинейные, чем газы.

Понятно, что мощные нелинейные волны, которые возникают при взрывах и разрядах, где число Маха близко к единице, требуют для своего описания других законов распространения, но эти случаи мы не рассматриваем.

Дифференцируя (12.28) по плотности, определяем значение местной скорости звука в таком виде:

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\frac{A}{\rho_0} + \frac{B}{\rho_0}\frac{\rho_\sim}{\rho_0}} = c_0\sqrt{1 + \frac{B}{A}\frac{\rho_\sim}{\rho_0}}, \qquad (12.30)$$

где $c_0 = \sqrt{A/\rho_0}$ — скорость распространения линейной волны (см. (12.29) и (12.19)). Поскольку согласно (12.2) $\rho_\sim/\rho_0 = \upsilon/c$, то, учитывая, что $M << 1$, переписываем (12.30) в виде

$$c = c_0\sqrt{1 + \frac{B}{A}\cdot\frac{\upsilon}{c_0}} \approx c_0 + \frac{B}{2A}\upsilon. \qquad (12.31)$$

Как видим, зависимость местной скорости звука c от переменной величины υ обусловлена только упругой нелинейностью среды, которая определяется соотношением $B/(2A)$. Величину $\varepsilon_ф = B/(2A)$ называют *коэффициентом физической нелинейности.*

Тогда выражение для локальной скорости приобретает вид

$$c_л = c + \upsilon = c_0 + \frac{B}{2A}\upsilon + \upsilon = c_0 + \varepsilon\upsilon(x,t), \qquad (12.32)$$

где величину

$$\varepsilon = \varepsilon_г + \varepsilon_ф = 1 + \frac{B}{2A} \qquad (12.33)$$

называют *коэффициентом акустической нелинейности.* Величина $\varepsilon_г = 1$ есть *коэффициент геометрической нелинейности.*

Принимая во внимание (12.32), записываем уравнение (12.13) для колебательной скорости в виде

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + (c_0 + \varepsilon\upsilon)\frac{\partial\upsilon}{\partial x} = 0. \qquad (12.34)$$

Для адиабатического процесса коэффициент ε легко получить из формул (12.29) для постоянных A и B и уравнения адиабаты Пуассона (12.17):

$$A = \rho_0 c_0^2, \quad B = \rho_0 c_0^2(\gamma - 1), \quad \varepsilon = \frac{\gamma + 1}{2}. \qquad (12.35)$$

Итак, для газов коэффициент ε выражается через показатель адиабаты $\gamma = C_p/C_V$. Например, для воздуха ($\gamma = 1{,}4$) имеем $\varepsilon = 1{,}2$. В случае жидкостей ε измеряется экспериментально. Так, для воды $\varepsilon = 3{,}1...4{,}1$ при изменении температуры от 0 до 100 °С. Измерения показали, что для однородных сред (в том числе и твердых тел) величина ε практически не превышает 10^1.

Однако для структурно-неоднородных сред экспериментально были получены значения $\varepsilon \sim 10^2...10^3$... Так, наличие парогазовых пузырьков в воде резко повышает нелинейные свойства среды. Причины появления таких больших значений коэффициента ε иные, чем в случаях физической и геометрической нелинейностей. В данном случае говорят о третьем типе нелинейности — “*структурном*” [42].

Перепишем выражение (12.26) для нелинейной волны, воспользовавшись формулой (12.32) для локальной скорости:

$$\upsilon = \Phi\left(t - \frac{x}{c_0}\left(1 + \varepsilon\frac{\upsilon}{c_0}\right)^{-1}\right). \qquad (12.36)$$

Выражение (12.36) показывает, что относительно неподвижной системы координат волна распространяется со скоростью

$$c_л = c_0\left(1+\varepsilon\frac{\upsilon}{c_0}\right),$$

т.е. скорость перемещения точек профиля волны разная. Те точки, в которых $\upsilon > 0$, перемещаются со скоростями $c_л > c_0$ и соответствуют областям сжатия. Наоборот, в области растяжения $\upsilon < 0$, и поэтому эти области перемещаются со скоростями $c_л < c_0$. Точки, которым соответствует фаза нулевого сжатия, распространяются со скоростью $c_л = c_0$ (рис. 12.1, *а*).

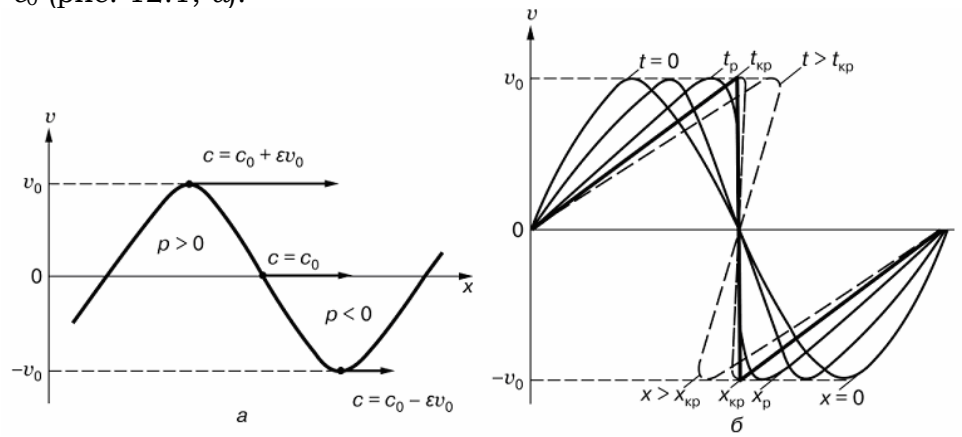


Рис. 12.1. Изменение “профиля” исходной гармонической волны в процессе ее распространения

Таким образом, начальный “профиль” волны в процессе распространения деформируется. На рис. 12.1, *б* представлены изменения, происходящие в профиле исходной гармонической волны. Пренебрежение нелинейными членами в уравнениях акустики (12.3)-(12.5) приводит к линейному волновому уравнению, решением которого являются волны, не изменяющие форму при распространении. Таким образом, деформирование исходного профиля волны связано именно с сохранением этих нелинейных членов.

В процессе изменения профиль волны приобретает форму, близкую к пилообразной, и далее зависимость $\upsilon(x)$ становится неоднозначной (штриховая линия на рис. 12.1, *б*). Такая форма может реализоваться, например, для волн на поверхности воды в зоне прибоя. Но для плоской звуковой волны профиль, изображенный штриховой линией на рис. 12.1, *б* физического смысла не имеет, поскольку значению координаты x соответствуют три значения колебательной скорости (давления, плотности). Полученный результат говорит о том, что в уравнении (12.13) не были учтены те или иные факторы, способные

остановить переход к неоднозначной зависимости $\upsilon(x)$. К таким факторам, как мы узнаем далее, принадлежат диссипация и дисперсия. Поэтому в данной ситуации мы будем говорить, что в профиле волны возникает *поверхность разрыва*, т.е. скачок величин, которые характеризуют звуковую волну (давление, плотность, колебательная скорость). О разрыве иначе говорят как об *ударной волне*. Понятно, что в такой ситуации волна перестает быть простой.

12.2.2. Графический анализ деформации профиля волны Римана

Формула (12.36) представляет собой неявную функцию. Однако с помощью графических построений можно проанализировать поведение простой волны. Для этого зададим конкретный вид начального возмущения. Пусть при $x = 0$ имеем гармоническую зависимость колебательной скорости $\upsilon = \upsilon_0 \sin(\omega t)$. Согласно (12.36) деформация гармонического профиля описывается соотношением:

$$\upsilon = \upsilon_0 \sin\left[\omega t - \frac{\omega x}{c_0}\left(1 + \varepsilon \frac{\upsilon}{c_0}\right)^{-1}\right]. \qquad (12.37)$$

Изменение профиля волны удобно наблюдать в сопровождающей системе координат, т.е. системе, которая двигается вместе с волной со скоростью c_0. Понятно, что для линейной волны ее профиль в сопровождающей системе координат будет неизменным. В сопровождающей системе координат время $\tau = t - x/c_0$. Тогда

$$\upsilon = \upsilon_0 \sin\left(\omega\tau + \frac{\omega x}{c_0}\frac{\varepsilon\,\upsilon/c_0}{1+\varepsilon\,\upsilon/c_0}\right). \qquad (12.38)$$

Первое слагаемое в аргументе функции синуса описывает распространение волны и связанное с этим запаздывание сигнала, а второе — постепенное изменение профиля волны. При $M = \upsilon_0/c_0 \to 0$ имеем плоскую линейную волну, параметры которой зависят только от τ. Выражение (12.38), которое неявно определяет υ, может быть представлено в виде соотношения относительно $\omega\tau$:

$$\omega\tau = \arcsin\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right) - \frac{\omega}{c_0} x \frac{\varepsilon M\,\upsilon/\upsilon_0}{1 + \varepsilon M\,\upsilon/\upsilon_0}. \qquad (12.39)$$

Проанализируем данное выражение графически. На рис. 12.2, *а* построены графики функций $\omega\tau = \arcsin(\upsilon/\upsilon_0)$ и второго слагаемого правой части выражения (12.39) для двух разных значений x_1 и x_2 параметра x ($x_2 > x_1$). Интересующая нас деформация профиля пред-

ставлена на рис. 12.2, *б* путем сложения графиков начального возмущения $\omega\tau = \arcsin(\upsilon/\upsilon_0)$ и соответствующей гиперболы.

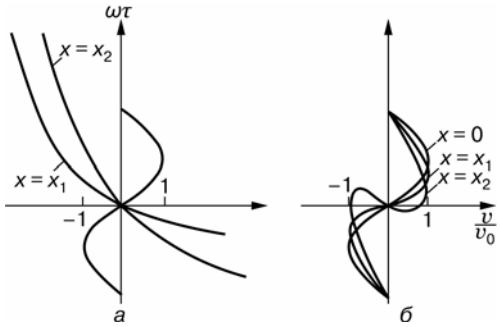


Рис. 12.2. Графический анализ деформации профиля волны ($x_2 > x_1$)

Как следует из рисунка, области сжатия и разряжения изменяются по-разному. Область разряжения деформируется сильнее. Деформация профиля волны носит накопительный характер, т.е. увеличивается с увеличением пройденного волной пути. Деформация профиля волны тем сильнее, чем больше число Маха *M*. Поэтому, значение *M* может служить мерой нелинейности акустического волнового процесса.

12.3. Методы получения приближенных уравнений нелинейной акустики

Понимание закономерностей нелинейных волновых процессов невозможно без теоретического исследования. Такое исследование базируется на анализе уравнений акустики для тех или иных моделей реальной среды, где наблюдается волновой процесс. Однако даже для самой простой модели — идеальной среды (см. раздел 4) — нелинейные уравнения акустики довольно сложные, и решение возможно только в отдельных случаях, одно из которых (простая волна) рассмотрено в параграфе 12.2. В такой ситуации необходимыми и перспективными являются приближенные методы анализа. Суть их состоит в том, чтобы в некотором диапазоне параметров волнового процесса заменить точные уравнения приближенными и сделать это таким образом, чтобы не исказить главные особенности исследуемого волнового процесса, и при этом не касаться несущественных деталей. Такая работа нуждается в глубоком знании физики исследуемых волновых процессов и даже акустической интуиции.

Пути упрощения точных уравнений могут быть определены на основе анализа простых примеров. В частности, в предыдущем пара-

графе было отмечено, что процесс распространения волны большой амплитуды условно разделяется на два процесса: процесс распространения волны без изменения профиля и процесс деформации профиля волны. Понятно, что точные уравнения целостно описывают процесс *распространения-деформации*. Успех при упрощении точных уравнений возможен, если попытаться отделить математическое описание деформации профиля волны от описания процесса распространения волны. Это удается сделать в двух случаях:

1) когда деформации профиля волны представляют собой малые поправки к исходной волне;

2) когда изменение профиля волны происходит медленно.

Факторы “малости” и “медленности” позволяют выделить в уравнениях малые по величине слагаемые и пренебречь ими. Итак, мы осмыслили возможность существования двух методов получения приближенных уравнений акустики. Ниже рассмотрим их.

12.3.1. Метод последовательных приближений

Изучая распространение нелинейной волны, мы убеждаемся, что изменение профиля волны накапливается постепенно в процессе распространения, причем тем медленнее, чем меньше амплитуда первоначального сигнала. Если рассматривать сигналы “умеренной” амплитуды на небольших расстояниях их распространения, то в пределах этого участка нелинейность волнового процесса приводит к появлению только небольших изменений в профиле линейной волны. Тогда функции, описывающие волну: $P(x,t)$, $\upsilon(x,t)$, $\rho(x,t)$, можно записать в виде рядов:

$$P = P_0 + p' + p'' + \ldots,$$
$$\upsilon = \upsilon' + \upsilon'' + \ldots,$$
$$\rho = \rho_0 + \rho' + \rho'' + \ldots, \qquad (12.40)$$

где P_0, ρ_0 — параметры невозмущенной среды;

p', υ', ρ' — переменные, связанные с распространением линейной волны; если ограничить ряд этими величинами, то получим *первое* (или *линейное*) *приближение*; о параметрах p', υ', ρ' говорят как о *величинах первого порядка малости*;

p'', υ'', ρ'' — *величины второго порядка малости* (или *квадратичные добавки*), при ограничении ряда этими величинами говорят о *втором приближении* и так далее. Существенным моментом являются выполнение соотношений $P_0 >> p' >> p'' >> p'''$ и т.д.

Метод последовательных приближений дает возможность получить достаточно простые уравнения для каждой из величин (p', p'' и т.д.) отдельно. Причем каждая из величин следующего порядка может

быть определена через величину предыдущего порядка. Ограничимся нахождением уравнений для p' и p'' в случае плоских волн (когда $P = P(x,t)$). Тогда уравнения (12.40) приобретут вид:

$$P = P_0 + p' + p'',$$
$$\upsilon = \upsilon' + \upsilon'',$$
$$\rho = \rho_0 + \rho' + \rho''. \qquad (12.41)$$

Перепишем систему уравнений (12.3) — (12.5) еще раз:

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x},$$
$$\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \qquad (12.42)$$
$$P = P_0 + A\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} + \frac{B}{2}\frac{(\rho-\rho_0)^2}{\rho_0^2}.$$

Здесь в ряде (12.6) оставлено только два члена, т.е. использована запись уравнения состояния (12.27), соответствующая выбранной степени приближения. Согласно (12.35) $A = \rho_0 c_0^2$, и $B/2 = (\varepsilon - 1)\rho_0 c_0^2$.

Итак, подставим (12.41) в (12.42). Предлагаем читателю провести эту достаточно громоздкую процедуру самостоятельно. Следует отметить, что в процессе подстановки появляются члены, порядок малости которых выше второго. Напомним, что при умножении малых величин их порядки малости складываются. Например, $\rho'\partial\upsilon'/\partial x$ — величина второго порядка, $\rho''\partial\upsilon'/\partial t$ и $\rho'\upsilon'\partial\upsilon'/dx$ — величины третьего порядка. (Вообще, величины разных порядков малости отличаются одна от другой скоростью стремления к нулю, т.е. соотношения между ними определяются при переходе к пределу.)

Подстановка приводит к следующему результату:

$$\left[\rho_0\frac{\partial\upsilon'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x}\right] + \left[\rho_0\frac{\partial\upsilon''}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial x} + \rho'\frac{\partial\upsilon'}{\partial t} + \rho_0\upsilon'\frac{\partial\upsilon'}{\partial x}\right] = 0, \qquad (12.43)$$

$$\left[\rho_0\frac{\partial\upsilon'}{\partial x} + \frac{\partial\rho'}{\partial t}\right] + \left[\rho_0\frac{\partial\upsilon''}{\partial x} + \frac{\partial\rho''}{\partial t} + \upsilon'\frac{\partial\rho'}{\partial x} + \rho'\frac{\partial\upsilon'}{\partial x}\right] = 0, \qquad (12.44)$$

$$\left[p' - c_0^2\rho'\right] + \left[p'' - c_0^2\rho'' - \frac{(\varepsilon-1)c_0^2}{\rho_0}(\rho')^2\right] = 0. \qquad (12.45)$$

В этих формулах квадратными скобками выделены величины разных порядков малости. Возникает вопрос, при каких условиях указанные суммы равны нулю. Ответ на этот вопрос является одним из ключе-

вых моментов преобразований, которые здесь выполняются. Дело в том, что величины разных порядков малости (они выделяются квадратными скобками) не могут уравновесить одна другую, поэтому следует приравнивать их к нулю каждую отдельно. Тогда получаем следующие системы уравнений относительно p', υ', ρ' и p'', υ'', ρ'':

$$\left.\begin{aligned} &\rho_0 \frac{\partial \upsilon'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \\ &\rho_0 \frac{\partial \upsilon'}{\partial x} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0, \\ &p' - c_0^2 \rho' = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &\rho_0 \frac{\partial \upsilon''}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial x} = F_1, \\ &\rho_0 \frac{\partial \upsilon''}{\partial x} + \frac{\partial \rho''}{\partial t} = F_2, \\ &p'' - c_0^2 \rho'' = F_3, \end{aligned}\right\} \tag{12.46}$$

где

$$F_1 = -\rho' \frac{\partial \upsilon'}{\partial t} - \rho_0 \upsilon' \frac{\partial \upsilon'}{\partial x},$$

$$F_2 = -\upsilon' \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \rho' \frac{\partial \upsilon'}{\partial x},$$

$$F_3 = \frac{(\varepsilon - 1) c_0^2}{\rho_0} (\rho')^2. \tag{12.47}$$

Из третьих уравнений в системах (12.46) имеем $\rho' = p' / c_0^2$ и $\rho'' = p'' / c_0^2 - F_3 / c_0^2$. Учитывая эти соотношения, переписываем (12.46) в виде

$$\left.\begin{aligned} &\rho_0 \frac{\partial \upsilon'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \\ &\rho_0 \frac{\partial \upsilon'}{\partial x} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &\rho_0 \frac{\partial \upsilon''}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial x} = F_1, \\ &\rho_0 \frac{\partial \upsilon''}{\partial x} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p''}{\partial t} = F_2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial F_3}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{12.48}$$

Продифференцируем уравнения, записанные в первой строке, по x, а уравнения во второй строке по t, а затем вычтем одно из другого. В результате, приходим к волновому уравнению для линейной волны $p'(x,t)$ и для слагаемого второго приближения $p''(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0, \tag{12.49}$$

$$\frac{\partial^2 p''}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} = Q(p', \upsilon'), \tag{12.50}$$

где

$$Q(p',\upsilon') = \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial t} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 F_3}{\partial t^2}. \qquad (12.51)$$

Используя связь между p', υ' и ρ' (см. (12.46)), можно привести выражение (12.51) к виду

$$Q(p',\upsilon') = -2\frac{\partial^2 E_{\text{К}}}{\partial x^2} - 2\frac{\varepsilon - 1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E_{\text{П}}}{\partial t^2} \qquad (12.51\text{а})$$

где $E_{\text{К}} = \dfrac{\rho_0 (\upsilon')^2}{2}$ и $E_{\text{П}} = \dfrac{(p')^2}{2\rho_0 c_0^2}$ — объемные плотности мгновенных значений кинетической и потенциальной энергий в “линейной” волне.

Решая уравнение (12.49), находим $p'(x,t)$ — волна первого приближения, или линейная волна. Зная параметры p', υ' этой волны, получаем правую часть уравнения (12.50) и, решая его, определяем добавку второго приближения. Поскольку уравнение (12.50) — волновое, добавка представляет собой также волну, распространяющуюся, как и линейная волна, со скоростью c_0.

Интересной является следующая интерпретация правой части уравнения (12.50). Обычно, правая часть уравнения определяет некоторое постороннее воздействие, связанное с источником энергии. Это позволяет рассматривать волну $p''(x,t)$ как результат излучения некоторой системы источников, распределенных по объему среды, причем сами источники будто бы рождены линейной волной $p'(x,t)$. Интерпретация правой части уравнения (12.50), как системы источников, не является обязательной, но она очень полезна, ведь позволяет использовать в дальнейшем анализе опыт и интуицию, полученные при изучении явлений линейной акустики.

Аналогично можно получить волновые уравнения и для слагаемых более высоких приближений, причем оказалось, что правые части уравнений определяются через параметры добавок с более низкими номерами. Другими словами, эти уравнения образуют рекуррентную систему.

12.3.2. Метод медленно изменяющегося профиля

Метод последовательных приближений не приводит к грубым ошибкам до тех пор, пока каждая следующая поправка на порядок меньше предыдущей, т.е. $p'' << p' << P_0$. В ходе накопления нелинейных искажений при распространении звука это условие перестает выполняться, что и ограничивает область применения метода после-

довательных приближений. Рассмотрим второй метод, который имеет более широкие возможности.

В методе медленно изменяющегося профиля используют следующее предположение: нелинейные деформации профиля волны накапливаются медленно, так, что их приращения на интервале длины волны незначительны.

Теперь под p', υ, ρ' будем понимать изменения давления, скорости и плотности, обусловленные волной; эти параметры содержат в себе как линейные волны, так и нелинейные поправки, т. е. $P = P_0 + p'$ и $\rho = \rho_0 + \rho'$.

Для применения метода важно отделить "быстрые" изменения параметров среды, обусловленные распространением волны (чередование областей сжатия и разряжения), от медленных изменений профиля волны, определяющихся нелинейностью процесса и проявляющихся после большого количества сжатий и разряжений. Этого удается достичь, если ввести сопровождающую волну систему координат.

Вместо координат t, x рассмотрим координаты

$$\tilde{x} = x, \quad \tau = t - x/c_0. \tag{12.52}$$

В этих переменных

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon}{\partial \tilde{x}}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + \frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial \tilde{x}}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial \tilde{x}} - \frac{1}{c_0}\frac{\partial \upsilon}{\partial \tau} \tag{12.52а}$$

(аналогичные соотношения имеют место для величин p' и ρ').

В линейной акустике идеальной среды, где бегущая волна описывается формулой вида $p' = p'(t - x/c_0) = p'(\tau)$, форма волны в сопровождающей системе координат остается неизменной, ведь она зависит лишь от τ. При наличии нелинейных деформаций профиля волны имеем зависимость p' от τ и $\tilde{x}$, т.е. $p' = p'(\tau, \tilde{x})$, причем зависимость от $\tilde{x} = x$ является "медленной". Эту медленность будем характеризовать с помощью малого параметра μ, который имеет такой же порядок малости, как и величины p'/P_0, ρ'/ρ, υ/c_0 (см. (12.2)).

Итак, будем считать, что $p' = p'(\tau, \mu\tilde{x})$, $\upsilon = \upsilon(\tau, \mu\tilde{x})$, $\rho' = \rho'(\tau, \mu\tilde{x})$. Обозначим $x_1 = \mu\tilde{x}$, тогда вторая формула в (12.52а) примет вид

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = \mu\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1} - \frac{1}{c_0}\frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}. \tag{12.52б}$$

Поскольку координата $\tilde{x} = x$ — медленная, то будем считать, что производная $\frac{\partial}{\partial x} \equiv \mu\frac{\partial}{\partial x_1}$ увеличивает порядок малости на единицу, т.е.,

если производная $\frac{\partial \upsilon}{\partial \tau} \sim \mu$ — величина первого порядка малости, то $\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \mu \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1} \sim \mu^2$ является величиной второго порядка малости.

Перейдем в уравнениях (12.42) к новым координатам, отбрасывая при этом величины, выше второго порядка малости. Предлагаем читателю самостоятельно выполнить предложенные преобразования и получить уравнения:

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\upsilon - \frac{p'}{\rho_0 c_0}\right) = -\mu \frac{\partial p'}{\partial x_1} - \rho' \frac{\partial \upsilon}{\partial \tau} + \frac{\rho_0}{c_0} \upsilon \frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}, \tag{12.53}$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\upsilon - \frac{c_0}{\rho_0} \rho'\right) = \mu \rho_0 c_0 \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial (\rho' \upsilon)}{\partial \tau}, \tag{12.54}$$

$$p' - c_0^2 \rho' = \frac{(\varepsilon - 1) c_0^2}{\rho_0} (\rho')^2. \tag{12.55}$$

В правых частях уравнений стоят величины второго порядка малости, а величины более высокого порядка (например, $\mu\partial(\rho'\upsilon)/\partial\tau$) отброшены.

С помощью (12.55) определим ρ' через p' и $(\rho')^2$, а потом подставим в (12.54). Таким образом, будем иметь

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\upsilon - \frac{p'}{\rho_0 c_0}\right) = \mu \rho_0 c_0 \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial (\rho' \upsilon)}{\partial \tau} - \frac{(\varepsilon - 1) c_0}{\rho_0} \frac{\partial (\rho')^2}{\partial \tau}. \tag{12.56}$$

Как видим, левые части уравнений (12.53) и (12.56) одинаковы, поэтому можно приравнять их правые части. Сделайте самостоятельно и получите уравнение, которое содержит в себе только величины второго порядка малости. Не изменяя порядок малости в полученном уравнении, можно исключить из него ρ' и υ, используя соотношения (12.1), которые справедливы для звуковых волн в линейном приближении (рассматриваем волну бегущую в положительном направлении оси Ox.):

$$\upsilon = \frac{p'}{\rho_0 c_0}, \quad \rho' = \frac{p'}{c_0^2}. \tag{12.57}$$

После подстановки (12.57) и проведения замены $\mu\partial/\partial x_1$ на $\partial/\partial x$, приходим к уравнению относительно давления p':

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} = 0. \tag{12.58}$$

Аналогично можно исключив p' и ρ', получить уравнение относительно колебательной скорости υ (выполните преобразования самостоятельно):

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2}\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial \tau} = 0. \qquad (12.59)$$

Приведенный вывод уравнений (12.58) и (12.59) иллюстрирует метод медленного изменения профиля. Его эффективность можно оценить, сравнивая решение уравнения (12.59) с точным решением (12.36), полученным для простой волны.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решение уравнения (12.59) определяется формулой $\upsilon = \Phi\left(\tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2}\upsilon x\right)$. Теперь рассмотрим точное решение (12.36): если отбросить слагаемое $\varepsilon\upsilon/c_0$, малое по сравнению с единицей, то получим линейную волну $\upsilon = \Phi(t - x/c_0)$, соответствующую решению в первом приближении. Выполняя простые преобразования в формуле (12.36), приходим к приближенному решению с величинами $\varepsilon\upsilon/c_0$ в первой степени (это второе приближение). Итак,

$$\upsilon = \Phi\left[t - \frac{x}{c_0\left(1+\varepsilon\upsilon/c_0\right)}\right] = \Phi\left[t - \frac{x\left(1-\varepsilon\upsilon/c_0\right)}{c_0\left(1-\left(\varepsilon\upsilon/c_0\right)^2\right)}\right] \approx$$

$$\approx \Phi\left[t - \frac{x}{c_0}\left(1 - \varepsilon\frac{\upsilon}{c_0}\right)\right] = \Phi\left(\tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2}\upsilon x\right). \qquad (12.60)$$

Как видим, решение $\upsilon = \Phi\left(\tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2}\upsilon x\right)$ вытекает из точного решения (12.36) при $\varepsilon\upsilon/c_0 << 1$, т.е. $\varepsilon M << 1$. Условие $\varepsilon M << 1$ соответствует слабонелинейной среде. Однако сами нелинейные деформации профиля волны при этом могут быть значительными вследствие того, что они накапливаются в процессе распространения волны.

Применение метода медленного изменения профиля особенно эффективно при исследовании волн в неидеальной среде, для которой решение точных уравнений неизвестно.

12.4. Графический анализ деформации профиля простой волны на основе приближенного решения

Пусть, как и в п. 12.2.2, где проведено исследование деформации профиля простой волны в соответствии с точным решением Римана, начальное возбуждение имеет гармоническую зависимость (см. формулу (12.37)). Тогда (12.60) будет иметь вид

$$\upsilon = \upsilon_0 \sin\left(\omega\tau + \frac{\omega\varepsilon}{c_0^2}\upsilon x\right) = \upsilon_0 \sin\left(\omega\tau + \omega\varepsilon \mathrm{M}\frac{x}{c_0}\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right). \qquad (12.61)$$

Отсюда

$$\omega\tau = \arcsin\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right) - z\frac{\upsilon}{\upsilon_0}, \quad z = \frac{\omega}{c_0}\varepsilon \mathrm{M} x. \qquad (12.62)$$

Графический анализ, аналогичный рис. 12.2, приведен на рис. 12.3. Как следует из рисунка, гипербола во втором приближении вырождается в прямую линию, тангенс угла наклона которой увеличивается пропорционально x. Как видим, в отличие от рис. 12.2, при графическом анализе приближенного решения области сжатия и разряжения деформируются одинаково.

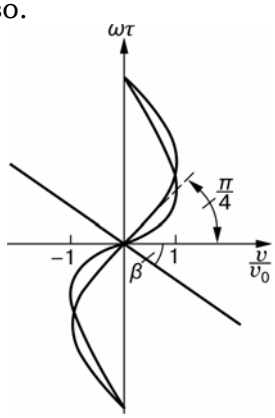


Рис. 12.3. Графический анализ деформации профиля волны

Если угол $\beta = \mathrm{arctg}(z)$ будет равен $\pi/4$, то в профиле волны появится неоднозначность, означающая образование разрыва. Итак, безразмерное расстояние $z = 1$ соответствует длине пути образования разрыва $x_\text{р}$, имеющего вид

$$x_\text{р} = \frac{c_0^2}{\omega\varepsilon\upsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon \mathrm{M}}, \quad \left(\lambda = \frac{c_0}{f}\right). \qquad (12.63)$$

Как уже отмечалось, при $x > x_р$ решение в виде простой волны (12.60) не справедливо. Это связано с тем, что в исходных уравнениях не учитываются потери акустической энергии. В нелинейной волне при возникновении разрывов диссипация звуковой энергии резко увеличивается, собственно и формируя при этом поверхность разрыва. Понятно, что реально ударная волна представляет собой скачок не математического смысла, а такой, который напоминает очень крутую (хотя и плавную) ступеньку.

Изменение профиля волны будет накапливаться и за расстоянием $x = x_р$, приводя к образованию пилообразной волны. Расстояние $x_{кр}$ (назовем его критическим), на котором завершается формирование пилообразной волны, можно найти из следующего условия: на этом расстоянии гребень волны догоняет впадину. Рассматривая рис. 12.1 (и вспоминая задачи по математике для пятого класса о велосипедистах), нетрудно определить время $t_{кр}$, за которое гребень догонит впадину: $t_{кр} = 0{,}5\lambda/(2\varepsilon\upsilon_0) = \lambda/(4\varepsilon\upsilon_0)$. За это время вся волна в целом, распространяясь со средней скоростью c_0, удаляется от источника ($x = 0$) на расстояние

$$x_{кр} = c_0 t_{кр} = \frac{c_0\lambda}{4\varepsilon\upsilon_0} = \frac{\lambda}{4\varepsilon M} = \frac{\pi c_0^2}{2\varepsilon\omega\upsilon_0} = \frac{\pi}{2}x_р, \qquad (12.64)$$

на котором и формируется пилообразная волна.

Согласно (12.63), (12.64) $x_р$ и $x_{кр}$ зависят от длины волны (или частоты), числа М и нелинейных свойств среды (параметр ε). Если расстояние $x_р$ соответствует безразмерному расстоянию $z = 1$, то по формуле (12.64) расстояние $x_{кр}$ соответствует безразмерному расстоянию $z = \pi/2$. В дальнейшем при $x > x_р$ нелинейная волна будет затухать вследствие значительной диссипации (поглощения) звуковой энергии в тонком слое вокруг фронта ударной волны.

12.5. Нелинейное взаимодействие в простых волнах

Изменение профиля исходной гармонической волны при распространении на спектральном языке означает появление высших гармоник относительно частоты первой гармоники, которая задается источником. Определим спектр простой волны при условии начального гармонического возмущения $\upsilon = \upsilon_0\sin(\omega t)$. Итак,

$$\upsilon(x,\tau) = \upsilon_0 \sin\left(\omega\tau + z\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right), \qquad (12.65)$$

где $\tau = t - \dfrac{x}{c_0}$, $z = \dfrac{\varepsilon\omega}{c_0^2}\upsilon_0 x$. Запишем (12.65) в виде ряда Фурье по синусам:

$$\upsilon(x,\tau) = \upsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega\tau), \tag{12.66}$$

где коэффициенты ряда Фурье определяются по хорошо известной нам формуле:

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(\omega\tau + z\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)\sin(n\omega\tau)\,d(\omega\tau). \tag{12.67}$$

Здесь возникает проблема: интеграл необходимо вычислить от функции, которая задана неявно. Приведем (12.67) к интегралу от явной функции, используя замену переменной $\omega\tau + z\upsilon/\upsilon_0 = \xi$. Тогда согласно (12.65) имеем

$$\upsilon/\upsilon_0 = \sin\xi, \quad \omega\tau = \xi - z\sin\xi, \quad d(\omega\tau) = (1 - z\cos\xi)d\xi.$$

Тогда

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\xi \sin(n\xi - nz\sin\xi)(1 - z\cos\xi)\,d\xi.$$

Этот интеграл можно вычислить [49]:

$$B_n = \frac{2J_n(nz)}{nz}, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{12.68}$$

Подставляя (12.68) в (12.66), получим

$$\frac{\upsilon}{\upsilon_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(nz)}{nz}\sin(n\omega\tau), \quad z = \frac{\varepsilon\omega}{c_0^2}\upsilon_0 x. \tag{12.69}$$

Согласно (12.63) параметр $z = x/x_{\text{р}}$; тогда (12.69) можно переписать в виде

$$\frac{\upsilon(x,\tau)}{\upsilon_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n\left(nx/x_{\text{р}}\right)}{nx/x_{\text{р}}}\sin(n\omega\tau). \tag{12.70}$$

Полученный результат называется *решением Бесселя-Фубини** и представляет собой другую форму общего решения системы уравнений (12.3)—(12.5). Выражение (12.70) определяет спектральный состав нелинейной волны как функции пройденного волной пути от источника в пределах $0 < x < x_{\text{р}}$. Решение Бесселя-Фубини показывает,

* Фубини (Fubini) Гвидо (1870—1943) — итальянский математик.

что нелинейная волна во время распространения обогащается все более высокими гармониками, амплитуда которых увеличивается с расстоянием. *Рост энергии гармонических составляющих происходит за счет первой гармоники.* В этом нетрудно убедиться, воспользовавшись разложением функции Бесселя в ряд [49]:

$$B_n = \frac{2J_n(nz)}{nz} = \left(\frac{nz}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}\left[1 - \frac{(nz)^2}{4(n+1)} + \ldots\right]. \qquad (12.71)$$

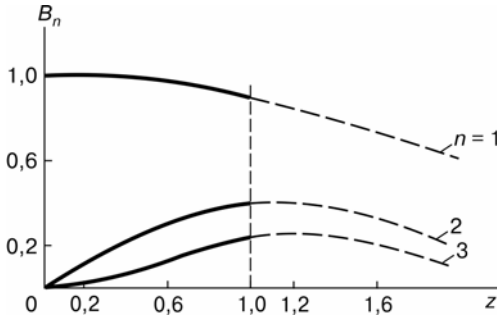


Рис. 12.4. Зависимость нормированных к величине υ_0 амплитуд первых трех гармоник от безразмерного расстояния $z = x/x_р$

Количественная картина изменения спектрального состава нелинейной волны в соответствии с решением (12.71) представлена на рис. 12.4 в виде зависимости нормированных к величине υ_0 амплитуд первых трех гармоник B_n от безразмерного расстояния $z = x/x_р$, (υ_0 — амплитуда первой гармоники при $x = 0$, т.е. амплитуда волны вблизи источника). Снова отметим, что графики имеют смысл при $z < 1$. Как видим, амплитуда первой гармоники ($n = 1$), при малых $z = x/x_р$, уменьшается как $B_1 \sim (1 - z^2/8)$, в то время как амплитуда второй гармоники ($n = 2$) возрастает как $B_2 \sim z/2$, следовательно, увеличивается линейно с расстоянием x. Высшие гармоники возрастают более медленно.

Рис. 12.5. Формирование пилообразных волн [43, с. 1012]:
1 — гармоническое начальное возмущение, *2* — сложный сигнал

Таким образом, во время распространения нелинейной волны в среде без дисперсии происходит лавинообразный рост числа спектральных компонент волнового поля, что в пространственно-временных представлениях соответствует образованию разрывов в профиле волны [43, 44]. Интересно отметить, что при этом любое периодическое возмущение на больших расстояниях превращается в “пилу”. На рис. 12.5 [43, с. 1012] представлен процесс преобразования периодического сигнала при его распространении в квадратично-нелинейной среде (см. (12.28)) в “пилу”. Как следует из рисунка, во время распространения образуется одинаковый профиль как для начального гармонического возмущения (кривая *1*), так и для более сложного сигнала (кривая *2*). В средах с более сложными нелинейными свойствами могут существовать пилообразные волны других типов.

Важно отметить следующий момент: *после образования пилообразной волны она остается квазистабильной*, т.е. при ее дальнейшем распространении изменяются только отдельные параметры (например, пиковое значение возмущения). Профиль волны достаточно устойчив и мало изменяется как при взаимодействии “пил” между собой, так и при слабом влиянии дополнительных факторов — дифракции, дисперсии и т.п. [43]. Таким образом, пилообразная волна представляет собой универсальный объект, устойчивость которого связана с сильным проявлением нелинейных свойств среды.

12.6. Нелинейные волны в среде с диссипацией. Уравнение Бюргерса

Поскольку в идеальной жидкости звуковая волна не поглощается, то, очевидно, что причина поглощения звука в реальной среде связана с рядом физических механизмов, которые сопровождают процесс распространения звука. Как нам уже известно (см. п. 4.1.1), одним из главных механизмов поглощения звука является вязкость. Явление вязкости обусловлено тем, что движение частичек сплошной среды сопровождается появлением механических напряжений, которые пропорциональны разности скоростей движения отдельных частиц (т.е. градиенту скорости движения частиц).

Обсудим, как учесть вязкость в уравнениях нелинейной акустики. Здесь следует отметить два момента. Во-первых, в точных уравнениях акустики вязкие напряжения учитываются введением только одного слагаемого в уравнение Эйлера. Поэтому дальнейшие преобразования в значительной мере подобны преобразованиям, выполненным для случая идеальной среды. Понятно, что учет вязкости лишь в одном из трех уравнений нуждается в объяснениях. Во-вторых, при выводе приближенного уравнения следует оценить порядки малости

слагаемых. При этом будем считать, что вязкость и факторы, приводящие к деформации профиля волны, рассматриваются как эффекты одного порядка малости.

Проследим основные этапы преобразований, ограничиваясь, как и раньше, рассмотрением плоских волн, распространяющихся вдоль оси *Ox*. Обратимся к уравнению Эйлера (12.3). В правой части уравнения стоит величина $(-\partial P/\partial x)$, которая является следствием упругих напряжений $(-P)$, действующих на частицу среды (см. вывод уравнения Эйлера в п.4.1.2). Соответственно вязкие напряжения $\sigma' = \eta\partial\upsilon/\partial x$ образуют добавку вида $\eta\partial^2\upsilon/\partial x^2$, где η — *динамическая вязкость* или *ньютоновский коэффициент вязкости*, η, кг/(м · с). Итак, уравнение Эйлера примет вид

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\eta\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}. \qquad (12.72)$$

В большинстве практически важных случаев вязкие напряжения как минимум на порядок меньше упругих. Это позволяет считать η такой же малой величиной, как μ.

Уравнение неразрывности (12.4) остается неизменным, а уравнение состояния приобретает более сложный вид за счет того, что поглощение звука в вязкой среде приводит к изменению энтропии s. Поэтому уравнение состояния примет вид $P = P(\rho, s)$. Однако можно считать [44, с. 42], что изменение энтропии за счет вязкости является малой величиной третьего порядка малости. Пренебрегая изменением энтропии, возвращаемся к уравнению состояния $P = P(\rho)$.

Далее, на основе метода медленно изменяющегося профиля выполняем преобразования, которые были сделаны при выводе приближенного уравнения (12.58). Поскольку изменяется только уравнение Эйлера, то в правой части (12.53) должны появиться новые слагаемые, которые образуются из выражения $\eta\partial^2\upsilon/\partial x^2$ при переходе к сопровождающей системе координат. Учитывая, что (см. (12.52б))

$$\eta\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}=\frac{\eta}{c_0^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\tau^2}-2\frac{\mu\eta}{c_0}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\tau\partial x_1}+\mu^2\eta\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_1^2},$$

находим, что нужный порядок малости (второй) имеет только слагаемое $\frac{\eta}{c_0^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\tau^2}$ (все другие слагаемые более высоких порядков). Это слагаемое будет присутствовать в правой части уравнения (12.53) и, разумеется, должно присутствовать в искомом уравнении. Заменяя υ на $p'/(\rho_0 c_0)$, получаем, что для учета вязкости в уравнении (12.58) вместе

с членом $\frac{\partial p'}{\partial x}$ имеем слагаемое $-\frac{\eta}{\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2}$. Итак, получаем уравнение, которое носит название *уравнения Бюргерса*[*]:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{\eta}{\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} = 0. \qquad (12.73)$$

Проанализируем роль отдельных составляющих этого уравнения. Если отбросить все члены, кроме первого, то из уравнение $\partial p'/\partial x = 0$ следует, что $p' = p'(\tau) = p'(t - x/c_0)$ и соответственно волна (в этом приближении) распространяется без искажения. Второе слагаемое учитывает нелинейные изменения профиля волны, накапливающиеся во время распространения волны, а третье слагаемое (диссипативный член) — влияние поглощение.

Соотношение между вторым и третьим слагаемыми определяет относительную роль нелинейности и поглощения. Оценим это соотношение. Пусть имеем исходную гармоническую волну $p' = p_0 \sin(\omega\tau) = \upsilon_0 \rho_0 c_0 \sin(\omega\tau)$. Тогда порядки величин таковы:

$$\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} \sim \frac{\varepsilon \rho_0 \omega \upsilon_0^2}{c_0}, \quad \frac{\eta}{\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} \sim \frac{\eta \omega^2 \upsilon_0}{c_0^2}.$$

Отсюда отношение нелинейного члена к диссипативному имеет порядок величины

$$\mathrm{Re} = \frac{\varepsilon \rho_0 c_0 \upsilon_0}{\omega \eta} = \frac{\varepsilon c_0 \upsilon_0}{\omega \nu}, \quad \left(\nu = \frac{\eta}{\rho_0}\right), \qquad (12.74)$$

которая носит название *акустического числа Рейнольдса*[*]. Величину $\nu = \eta/\rho_0$ называют *кинематической вязкостью*, ν = м²/с.

В качестве примера приведем численные значения коэффициентов η и ν для воды и воздуха при температуре 20 °С:

η = 0,01 г · см⁻¹ · с⁻¹, ν = 0,01 см² · с⁻¹ (вода);

η = 1,8 · 10⁻⁴ г · см⁻¹ · с⁻¹, ν = 0,15 см² · с⁻¹ (воздух).

Коэффициенты вязкости зависят от температуры, причем при росте температуры для жидкостей вязкость уменьшается, а для газов она несколько возрастает.

Как видно из формулы (12.74), при больших числах Рейнольдса определяющая роль принадлежит нелинейности волнового процесса, а при малых — поглощению.

---

[*] Бюргерс (Burgers) Иоганн Мартинс (1895—1981) — голландский физик.

[*] Рейнольдс (Reynolds) Осборн (1842—1912) — английский физик.

При малых значениях числа Рейнольдса в уравнении (12.73) можно пренебречь нелинейным членом. Тогда получим линейное уравнение

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\eta}{\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} = 0, \qquad (12.75)$$

которое определяет эволюцию волны при наличии диссипации в среде. Плоская гармоническая волна $p' = \exp(-i\omega\tau - \delta x)$ является решением уравнения (12.75) при условии, что коэффициент (убедитесь самостоятельно)

$$\delta = \frac{\eta}{\rho_0 c_0^3}\omega^2 = \frac{\nu}{c_0^3}\omega^2 .$$

Итак, имеем гармоническую волну вида $p' = p_0(x)\exp\left[-i\omega\left(t - x/c_0\right)\right]$, в которой амплитуда как функция пространственной координаты x уменьшается по экспоненциальному закону: $p_0(x) = \exp(-\delta x)$. По физическому содержанию δ — коэффициент поглощения (см. параграф 5.3). Итак, коэффициент $\nu/c_0^3 = \eta/(\rho_0 \tilde{n}_0^3)$ в уравнении (12.75) — это множитель у квадрата частоты ω^2 в коэффициенте поглощения линейной звуковой волны. Таким образом, проведенный анализ разрешил не только определить характер спадания амплитуды линейной волны в среде с диссипацией, но и установить зависимость коэффициента поглощения от частоты.

Уравнение Бюргерса — это одно из основных уравнений в нелинейной акустике. Оно хорошо исследовано. Здесь важно отметить, что уравнение Бюргерса удается свести к линейному уравнению при помощи специальных преобразований [44]. Таким образом, возникает возможность построить аналитическое решение для ряда важных случаев начального профиля волны. Мы не будем проводить такой анализ, а лишь отметим, что уравнение Бюргерса описывает структуру и расположение фронта ударной волны и поэтому, в отличие от уравнения для простых волн, не требует дополнительных условий для определения профиля волны после образования разрыва. Кроме этого, сам разрыв уже не считается бесконечно тонким; это область конечной ширины, которая определяется конкуренцией между нелинейными увеличениями крутизны и диссипативным размыванием. В этой области диссипативный член уравнения Бюргерса имеет наибольшее значение, что обусловливает эффективное поглощение энергии волны.

Проведем приближенную оценку параметров ударной волны, полагая, что она образована в результате взаимной компенсации эффектов нелинейности и диссипации. Тогда нелинейный и диссипативный члены в уравнении (12.73) должны быть одного порядка:

$$\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p'}{\partial \tau} \sim \frac{\eta}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2},$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\varepsilon}{2}(p')^2\right) \sim \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\eta \frac{\partial p'}{\partial \tau}\right). \qquad (12.76)$$

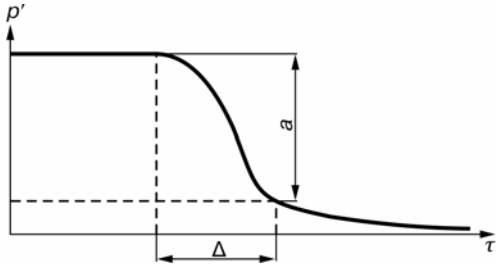


Рис. 12.6. Стационарная ударная волна уравнения Бюргерса

Введем амплитуду ударной волны a и характерную ширину фронта Δ (рис. 12.6). Тогда из соотношения (12.76) следует, что $\varepsilon a^2/2 \sim \eta a/\Delta$, откуда получаем связь между параметрами ударной волны:

$$\frac{\varepsilon a \Delta}{2\eta} = \text{const}. \qquad (12.77)$$

Итак, согласно (12.77), ширина фронта Δ тем больше, чем больше коэффициент η и чем меньше амплитуда a, или коэффициент ε. Строгий анализ уравнения Бюргерса подтверждает справедливость такой приближенной оценки.

В завершении параграфа приведем следующие качественные рассуждения о распространении нелинейной волны в среде с поглощением, всегда имеющим место в реальной среде. Если поглощение довольно мало и нелинейные эффекты преобладают над диссипативными, то весь процесс распространения волны можно разделить на три этапа. На первом этапе ($0 < z = x/x_р < 1$) происходит изменение профиля волны по закону простой волны. В точке $z = 1$ начинает образовываться разрыв, который достигает максимального значения при $z = \pi/2$. При $z > 2$ профиль волны становится почти пилообразным. На втором этапе форма фронта волны стабилизируется в результате конкуренции нелинейных и диссипативных процессов, но амплитудное значение колебательной скорости уменьшается. В конце второго этапа амплитуда волны в результате поглощения уменьшается настолько, что доминирующими становятся диссипативные эффекты. На третьем этапе амплитуда волны уже не зависит от своего

значения в начале процесса распространения; волна снова становится гармонической и ее распространение происходит в соответствии с законами линейной акустики. В случае, когда диссипативные процессы в среде преобладают над нелинейными, нелинейность оказывается слабой и на любом расстоянии для амплитуд гармоник с номерами n и $n + 1$ выполняется условие $B_{n+1} << B_n$.

Метод медленно изменяющегося профиля может быть обобщен и на трехмерный случай, когда волна представляет собой пучок, который расходится вследствие дифракции. Соответствующее уравнение было получено в 1970 г., и носит название *уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова* (*ХЗК*)*:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3}p'\frac{\partial p'}{\partial\tau}-\frac{\eta}{\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 p'}{\partial\tau^2}\right]=\frac{c_0}{2}\Delta_\perp p,$$

где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — лапласиан по поперечным координатам.

Первое слагаемое в уравнении ХЗК определяет изменение давления вдоль оси пучка, второе и третье слагаемые определяют влияние нелинейности и поглощения, соответственно. Поперечный лапласиан $\Delta_\perp p$ определяет дифракционные изменения пучка. Отбрасывая те или иные члены в уравнении ХЗК можно получить упрощенные уравнения, позволяющие отдельно проанализировать влияние нелинейности, поглощения, дифракции на процесс распространения акустических волн. Точного аналитического решения для уравнения ХЗК пока не найдено, но приближенные решения могут быть получены. Уравнение ХЗК оказалось особенно полезным для расчета так называемых параметрических антенн [19].

12.7. Нелинейные волны в среде с релаксацией. Уравнение Кортевега-де Вриза-Бюргерса

Многочисленные эксперименты и теоретические работы [23, 33] позволили выяснить, что при распространении упругих волн в среде происходят процессы периодической перестройки ее структуры или состояния. Такие процессы получили название *релаксационных* (от латинского слова *relaxatio* — уменьшение, ослабление). Релаксационные процессы разнообразны, но, несмотря на различную физическую природу, им присущи общие закономерности (они происходят будто бы по некоторой единой схеме). Мы не будем рассматривать физику конкретного релаксационного процесса. Этим сложным вопросам посвящена специальная литература [33].

---

*Хохлов Рэм Викторович (1926—1977) — российский физик, академик АН СРСР (1974).

Однако, обобщая, можно сказать, что характерной особенностью любого релаксационного процесса является то, что при изменении плотности среды изменяется некоторый параметр ξ, характеризующий структуру вещества среды. При изменении ρ от ρ_1 до ρ_2 параметр должен изменяться от ξ_{01} к ξ_{02}. Суть релаксационного процесса состоит в том, что параметр ξ не успевает изменяться вслед за ρ и, таким образом, в динамическом режиме в любой момент времени ξ отличается от $\xi_0(\rho)$. Вследствие такого запаздывания, как мы убедимся позже, в среде с релаксацией наблюдается дополнительное поглощение звука, а также зависимость фазовой скорости от частоты.

Если бы изменение ρ происходило очень медленно ($\omega \to 0$), то параметр ξ мало отличался бы от ξ_0, и в каждый момент процесс перестройки структуры был бы предельно близок к равновесному. Тогда скорость была бы такой же, как в идеальной среде: $c_0^2 = (\partial P/\partial p)_{\xi=\xi_0}$ (индекс “0” у c соответствует низким частотам). При очень быстрых изменениях ρ ($\omega \to \infty$) параметр ξ вообще не успевает измениться и практически сохраняет значение ξ_{00}, которое он имел бы в невозмущенной среде. Оказывается, что упругие свойства среды в каждом из этих случаев различны, а, следовательно, различны скорости звука: $c_\infty^2 = (\partial P/\partial p)_{\xi=\xi_{00}} \neq c_0^2$, причем $c_\infty > c_0$ [23, с. 47-48]. Следовательно, имеет место изменение скорости звука с частотой, т. е. *дисперсия*. Мерой дисперсионных свойств среды является величина

$$m = \frac{\left(c_\infty^2 - c_0^2\right)}{c_0^2}.$$

Практически всегда эта величина мала ($m << 1$), т.е. того же порядка, что и p'/P_0, ρ'/ρ_0 и υ/c_0, где $\rho' = \rho - \rho_0$, $p' = P - P_0$.

Перейдем к выводу уравнений распространения звука. В среде с релаксацией уравнения Эйлера и неразрывности остаются неизменными, изменяется лишь уравнение состояния: теперь $P = P(\rho, \xi, s)$. Однако можно считать, что, как и в случае вязкой среды, изменением энтропии s можно пренебречь. Тогда $P = P(\rho, \xi)$. Разложим эту зависимость в ряд по степеням ρ' и (ξ—ξ_0). При этом следует учитывать, что изменения, вызванные релаксационными процессами, малы по сравнению с изменением параметров среды, вызванных самой звуковой волной (аналогично тому, как вязкие напряжения малы по сравнению с упругими). Поэтому будем считать величину ($\xi - \xi_0$) малой по сравнению с ρ'. Итак, с точностью до величин второго порядка малости

$$P - P_0 \equiv p' = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\xi_0} \cdot \rho' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\xi_0} \cdot (\rho')^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} \cdot (\xi - \xi_0). \quad (12.78)$$

С учетом соотношений (см. (12.29), (12.35)),

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\xi_0} = c_0^2, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\xi_0} = \frac{(\varepsilon - 1)c_0^2}{\rho_0},$$

уравнение (12.78) примет вид

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{(\varepsilon - 1)c_0^2}{\rho_0}(\rho')^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} \cdot (\xi - \xi_0). \quad (12.79)$$

Поскольку в системе уравнений акустики (уравнение Эйлера, неразрывности и состояния) появилась новая неизвестная функция $\xi(t,x)$, то эту систему следует дополнить еще одним уравнениям — *уравнением релаксации.* Здесь уместными будут следующие физические рассуждения. Для состояния, близкого к равновесному, можно считать, что скорость изменения параметра ξ, т.е. $d\xi/dt$, пропорциональна разности $(\xi - \xi_0)$.Тогда уравнение релаксации будет иметь вид

$$\frac{d\xi}{dt} = -b(\xi - \xi_0), \quad (12.80)$$

где $b = 1/\tau_р$, $\tau_р$ — время релаксации. Нетрудно убедиться в том, что закон приближения ξ к равновесному значению ξ_0 при начальном условии $\xi(t = 0) = \xi(0)$ имеет экспоненциальную форму:

$$\xi = \xi_0 + [\xi(0) - \xi_0]\exp\left(-\frac{t}{\tau_д}\right).$$

Для гармонической волны с частотой ω скорость звука в среде с релаксацией изменяется от c_0 при $\omega\tau_р \to 0$ до c_∞ при $\omega\tau_р \to \infty$.

Подставив (12.80) в (12.79), получим такое уравнение:

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{(\varepsilon - 1)c_0^2}{\rho_0}(\rho')^2 - \frac{1}{b}\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} \cdot \frac{d\xi}{dt}. \quad (12.81)$$

Исключим ξ из уравнений (12.79) и (12.81). Для этого продифференцируем (12.79) по t. При дифференцировании следует обратить внимание на то, что параметр ξ_0 соответствует текущему значению плотности, т.е. равновесное состояние ξ_0 является функцией плотно-

сти: $\xi_0 = \xi_0(\rho) \approx \xi_{00} + \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} \cdot \rho'$. С учетом этого производную $(\partial P/\partial \rho)_{\xi_0}$ представим в виде

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\xi_0} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\xi_{00}} + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} \cdot \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}, \tag{12.82}$$

или

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} \cdot \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} = c_0^2 - c_\infty^2. \tag{12.83}$$

Таким образом, после дифференцирования имеем

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{(\varepsilon - 1) c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial (\rho')^2}{\partial t} + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} \cdot \frac{d\xi}{dt} - \left(c_0^2 - c_\infty^2\right) \frac{\partial \rho'}{\partial t}. \tag{12.84}$$

Умножим (12.81) на b и сложим с (12.84), при этом учтем соотношение $c_\infty^2 - c_0^2 = mc_0^2$; таким образом, $d\xi/dt$ будет изъято. Итак, получаем уравнение состояния, которое устанавливает связь между изменениями давления p' и плотности ρ' в среде с релаксацией:

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial t} + bp'\right) - c_0^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + b\rho'\right) = \frac{(\varepsilon - 1) c_0^2}{\rho_0} \left[\frac{\partial (\rho')^2}{\partial t} + b(\rho')^2\right] + mc_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t}. \tag{12.85}$$

Уравнение (12.85) записано таким образом, что в правой части стоят величины второго порядка малости (напомним, что $m << 1$). После перехода к сопровождающей системе координат производная $\partial/\partial t$ заменится на $\partial/\partial\tau$. Дальнейшие преобразования удобно провести, если воспользоваться операторными обозначениями. Дело в том, что операторная форма записи позволяет упростить запись сложных уравнений, при этом процедура преобразований становится более наглядной. Обозначим символами Q и D дифференциальные операторы

$$Q = \frac{\partial}{\partial \tau} + b, \quad D = \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Тогда выражение (12.85) приобретет следующий вид

$$Q\left(p' - c_0^2 \rho'\right) = F_3, \tag{12.86}$$

где F_3 — совокупность членов второго порядка малости в правой части (12.85). Если в этих слагаемых выразить ρ' через p', воспользовавшись формулой первого приближения $\rho' = p'/c_0^2$, то

$$F_3 = \frac{(\varepsilon - 1)}{\rho_0 c_0^2} Q\left((p')^2\right) + mD(p'). \qquad (12.87)$$

Уравнения Эйлера (12.3) и неразрывности (12.4) после перехода к сопровождающей системе координат (12.52), с использованием формул первого приближения $p'/\upsilon = \rho_0 c_0$, $\rho' = p'/c_0^2$, имеют во втором приближении такой вид (напомним, что координату x полагаем медленной, поэтому, например, производная $\partial p'/\partial x$ имеет второй порядок малости; проделайте все преобразования самостоятельно):

$$D\left(\upsilon - \frac{p'}{\rho_0 c_0}\right) = F_1, \qquad (12.88)$$

$$D\left(\upsilon - \frac{c_0}{\rho_0}\rho'\right) = F_2, \qquad (12.89)$$

где

$$F_1 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0^2 c_0^3}\frac{\partial\left((p')^2\right)}{\partial \tau}. \qquad (12.90)$$

Из уравнения (12.86) получим

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2}p' - \frac{1}{c_0^2}Q^{-1}(F_3), \qquad (12.91)$$

где Q^{-1} — обратный оператор. Подставив (12.91) в выражение (12.89), получим

$$D\left(\upsilon - \frac{p'}{\rho_0 c_0}\right) = F_2 - \frac{1}{\rho_0 c_0}DQ^{-1}(F_3). \qquad (12.92)$$

Приравнивая правые части (12.88) и (12.92) и расшифровывая обозначения, приходим к уравнению

$$-\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0 c_0^3}D\left[(p')^2\right] - \frac{1}{c_0}D\left[\frac{(\varepsilon - 1)}{\rho_0 c_0^2}(p')^2 + mQ^{-1}\left(\frac{\partial p'}{\partial \tau}\right)\right], \qquad (12.93)$$

или

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3}p'\frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{m}{2c_0}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(Q^{-1}\left(\frac{\partial p'}{\partial \tau}\right)\right) = 0. \qquad (12.94)$$

Обратный оператор Q^{-1} определяет решение дифференциального уравнения с соответствующей правой частью, а именно:

$$\frac{dy}{d\tau} + by = \frac{\partial p'}{\partial \tau}.$$

Его решение [8], имеет вид

$$y = \tilde{y}\exp\left[-\left(\tau - \tilde{\tau}\right)\right] + \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} \frac{\partial p'}{\partial \tau'} \exp\left[-b\left(\tau - \tau'\right)\right] d\tau'.$$

Здесь величины $\tilde{\tau}$ и $\tilde{y}$ определяют точку, через которую проходит решение $y(\tau)$. Пусть при $\tilde{\tau} = -\infty$ величина $\tilde{y} = 0$. Тогда уравнение (12.94) перепишется следующим образом:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{m}{2c_0} \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\int_{-\infty}^{\tau} \left(\frac{\partial p'}{\partial \tau'} \right) \exp\left(-b\left(\tau - \tau'\right)\right) d\tau' \right) = 0. \quad (12.95)$$

Сравнивая (12.95) и (12.58), отметим, что уравнение пополнилось интегральным слагаемым, которое описывает эффекты, связанные с релаксацией (а именно: влияние поглощения и дисперсии скорости звука), в то время как первые два слагаемых описывают (как и в (12.58)) эффекты распространения и нелинейную деформацию профиля волны.

Уравнение (12.95) является интегро-дифференциальным. Его можно упростить, если предположить, что p' изменяется достаточно медленно на интервале, равному времени релаксации $\tau_р = 1/b$, т.е. значительно медленнее, чем экспонента под знаком интеграла (12.95). Это позволяет заменить $\partial p'/\partial \tau'$ двумя первыми членами разложения этой функции в ряд по степеням $(\tau' - \tau)$:

$$\frac{\partial p'}{\partial \tau'} = \left(\frac{\partial p'}{\partial \tau'} \right)_{\tau'=\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau'^2} \right)_{\tau'=\tau} \cdot \left(\tau' - \tau\right)$$

и вычислить интеграл в (12.95). Как следствие, получим дифференциальное *уравнение Кортевега* – де Вриза** – Бюргерса* (проделайте эти несложные вычисления самостоятельно):

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{m}{2c_0} \frac{1}{b} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} + \frac{m}{4c_0} \frac{1}{b^2} \frac{\partial^3 p'}{\partial \tau^3} = 0. \quad (12.96)$$

Структура этого уравнения указывает на то, что изменение формы профиля волны, мерой которого является производная $(\partial p'/\partial x)_{\tau=\text{const}}$, определяется нелинейностью среды (второе слагаемое),

---

* Кортевег (Korteweg) Дидегик Иоганн (1848 –1941) – голландский физик.

**де Вриз (Vries) Густав (точные данные жизни не известны) — ученик Кортевега.

поглощением (третье слагаемое, сравните (12.96) с уравнением Бюргерса (12.73)) и дисперсией звука (четвертое слагаемое). Если отбросить третье слагаемое, то получим уравнение Кортевега – де Вриза, которое описывает распространение волн в среде с дисперсией, но без поглощения. Уравнение (12.96) не изменит свою структуру, если учесть вязкость и теплопроводность среды. При этом изменится лишь коэффициент при $\partial^2 p'/\partial\tau^2$, который в этом случае пополнится слагаемыми, учитывающими поглощение за счет вязкости и теплопроводности.

12.8. Плоские бегущие волны в слабонелинейной поглощающей среде с дисперсией

Перепишем уравнение Кортевега-де Вриза-Бюргерса в таком виде:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - a_1 p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - a_2 \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} + a_3 \frac{\partial^3 p'}{\partial \tau^3} = 0, \qquad (12.97)$$

где обозначения a_1, a_2, a_3 понятны из (12.96). Это уравнение позволяет исследовать совместное влияние нелинейности, вязкости и релаксации на структуру волны. Однако поиск точного решения данного уравнения — это сложная задача. В нашей ситуации на первом этапе исследования целесообразно получить приближенное решение, используя наиболее простые методы.

Итак, применим метод последовательных приближений. Согласно этому методу, ограничиваясь вторым приближением, представим p' в виде суммы двух слагаемых: $p' = p^{(1)} + p^{(2)}$, причем $p^{(2)} << p^{(1)}$. Понятно, что полученное ниже решение имеет область применимости, ограниченную условием малости нелинейной добавки $p^{(2)}$ по сравнению с линейной волной $p^{(1)}$. Подставляя $p' = p^{(1)} + p^{(2)}$ в (12.97), получаем уравнение для $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ (выполните самостоятельно):

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} - a_2 \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial \tau^2} - a_3 \frac{\partial^3 p^{(1)}}{\partial \tau^3} = 0, \qquad (12.98)$$

$$\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x} - a_2 \frac{\partial^2 p^{(2)}}{\partial \tau^2} - a_3 \frac{\partial^3 p^{(2)}}{\partial \tau^3} = a_1 p^{(1)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \tau} \equiv F. \qquad (12.99)$$

Пусть неискаженная волна — гармоническая и будем считать, что в начале координат ($x = 0$) искажения еще отсутствуют, т.е. $p^{(2)}\Big|_{x=0} = 0$. Решение уравнения (12.98) представим в виде, который соответствует волне, распространяющейся в среде с поглощением (см. параграф 5.3):

$$p^{(1)} = p_m \exp\left[-i(\omega t - kx) - \alpha_1 x\right] = p_m \exp\left[-i\left(\omega\tau + \delta(\omega)x\right) - \alpha_1 x\right], \qquad (12.100)$$

где $\tau = t - x/c_0$, $\delta(\omega) = k_0 - k$, $k_0 = \omega/c_0$, $k = \omega/c$.

Подставив (12.100) в уравнение (12.98), определяем величины $\delta(\omega)$ и α_1:

$$\alpha_1 = a_2\omega^2, \quad \delta(\omega) = a_3\omega^3. \qquad (12.100а)$$

Согласно (12.100) в среде с поглощением и релаксацией имеем волну, амплитуда которой уменьшается по экспоненциальному закону, а фазовая скорость зависит от частоты $c \equiv c(\omega) \neq c_0$. Действительная часть решения (12.100) будет такова:

$$p^{(1)} = p_m \exp(-\alpha_1 x)\cos\left(\omega\tau + \delta(\omega)x\right). \qquad (12.101)$$

Имея решение (12.101), находим нелинейную добавку второго приближения $p^{(2)}$ из уравнения (12.99). Его правая часть F играет роль некоторой возбуждающей силы, действующей вдоль оси Ox. Вычисляя F, находим, что зависимость $F(t,x)$ имеет структуру бегущей волны удвоенной частоты:

$$F = -\frac{a_1}{2}\omega p_m^2 \exp(-2\alpha_1 x)\sin\left(2\omega\tau + 2\delta(\omega)x\right). \qquad (12.102)$$

Фазовая скорость этой “волны влияния” — такая же, что и волны первого приближения $p^{(1)}$.

Решение неоднородного уравнения (12.99) состоит из двух частей: решения соответствующего однородного уравнения (с частотой 2ω) и частного решения. Первое из них $p_1^{(2)}$, аналогично (12.101), имеет вид

$$p_1^{(2)} = A\exp(-\alpha_2 x)\sin\left(2\omega\tau + \delta(2\omega)x + \varphi\right), \quad (12.103)$$

где $\alpha_2 = a_2(2\omega)^2$, A і φ — неизвестные постоянные.

Для того чтобы найти частное решение неоднородного уравнения (12.99), целесообразно представить (12.102) в виде суммы экспоненциальных слагаемых: $F = F_1 + F_1^*$, где * — знак комплексного сопряжения,

$$F_1 = \frac{i}{4}a_1\omega p_m^2 \exp\left[i\left(2\omega\tau + 2\delta(\omega)x\right) - 2\alpha_1 x\right]. \qquad (12.104)$$

В силу линейности уравнения (12.99) его решение также будет суммой комплексно-сопряженных слагаемых. Будем искать одно из них в виде экспоненты с таким же показателем, что и в (12.104), но с неизвестной амплитудой. Подставляя искомое решение в (12.99), находим

амплитуду, и после ряда несложных преобразований (сделайте самостоятельно) получаем

$$p_2^{(2)} = \frac{-a_1\omega p_m^2 \exp(-2\alpha_1 x)}{2\sqrt{(\alpha_2 - 2\alpha_1)^2 + (\delta(2\omega) - 2\delta(\omega))^2}} \cos(2\omega\tau + 2\delta(\omega)x - \theta(\omega)), \qquad (12.105)$$

где

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\alpha_2 - 2\alpha_1}{\delta(2\omega) - 2\delta(\omega)}. \qquad (12.105а)$$

Подберем амплитуду A и фазу φ в формуле (12.103) таким образом, чтобы нелинейная составляющая $p^{(2)} = p_1^{(2)} + p_2^{(2)}$ была равна нулю при $x = 0$. Понятно, что A совпадает с амплитудой волны $p_2^{(2)}$, взятой с противоположным знаком, а $\varphi = -\theta(\omega)$. Объединяя $p_1^{(2)}$ и $p_2^{(2)}$, находим

$$p^{(2)} = \frac{a_1\omega p_m^2}{2\sqrt{(\alpha_2 - 2\alpha_1)^2 + (\delta(2\omega) - 2\delta(\omega))^2}} \times \qquad (12.106)$$

$$\times\left[\exp(-\alpha_2 x)\cos(2\omega\tau + \delta(2\omega)x - \theta) - \exp(-2\alpha_1 x)\cos(2\omega\tau + 2\delta(\omega)x - \theta)\right].$$

Формула (12.106) позволяет проанализировать совокупную роль нелинейности, поглощения и дисперсии скорости звука на начальном отрезке пути распространения волны, где еще справедливы предположения метода последовательных приближений.

Рассмотрим частные случаи. Пусть дисперсия отсутствует, т.е. $\delta(\omega) = \delta(2\omega) = 0$. Тогда

$$p^{(2)} = \frac{a_1\omega p_m^2}{2(\alpha_2 - 2\alpha_1)}\left(\exp(-\alpha_2 x) - \exp(-2\alpha_1 x)\right)\sin(2\omega\tau). \qquad (12.107)$$

Пусть поглощение также стремится к нулю. Тогда, используя приближение $\exp(-\alpha x) \approx 1 - \alpha x$, получаем

$$p^{(2)} = -\frac{a_1\omega p_m^2}{2} x \sin(2\omega\tau). \qquad (12.108)$$

Таким образом, нелинейность волнового процесса приводит (в рамках второго приближения) к росту амплитуды второй гармоники, которая пропорциональна отрезку пути x. При больших значениях x пропорциональность нарушается, и рост второй гармоники ограничивается [28, 44]. При наличии поглощения амплитуда второй гармоники вначале увеличивается, поскольку растет разность величин

$\exp(-2\alpha_1 x) - \exp(-\alpha_2 x)$ в формуле (12.107), а потом уменьшается, ведь каждая экспонента стремится к нулю с увеличением значения x. Такое поведение второй гармоники обусловлено наличием в волновом процессе двух противодействующих факторов: нелинейности, которая порождает высшие гармоники (в том числе вторую) и диссипации, которая приводит к поглощению высших гармоник (тем более эффективному, чем выше номер гармоники). Можно говорить, что за счет нелинейности энергия начального гармонического сигнала большой амплитуды перекачивается в область высших частот, где наблюдается большее поглощение, чем на частоте первой гармоники ($\alpha \sim \omega^2$). Поэтому сигналы большой амплитуды поглощаются сильнее, чем сигналы малой амплитуды одинаковой частоты, и потому профиль первоначально гармонической волны, который со временем деформируется, приобретает снова синусоидальную форму.

Рассмотрим теперь влияние дисперсии при отсутствии поглощения ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$). В этом случае

$$p^{(2)} = \frac{a_1 \omega p_m^2}{\delta(2\omega) - 2\delta(\omega)} \sin\left(\frac{2\delta(\omega) - \delta(2\omega)}{2} x\right) \sin\left(2\omega\tau + \frac{\delta(2\omega) + 2\delta(\omega)}{2} x - \theta\right). \tag{12.109}$$

Напомним, что $\tau = t - x/c_0$, $\delta(\omega) = -a_3\omega^3$. При малых значениях параметра a_3 (т.е. при слабой дисперсии) первый синусоидальный множитель в (12.109) как функция координаты x изменяется значительно медленнее, чем второй, что позволяет рассматривать его как огибающую зависимости $p^{(2)}(x)$. Наличие этого множителя определяет пространственные биения волны второй гармоники. Причина возникновения биений — различные фазовые скорости волн первой и второй гармоник, что является результатом дисперсии скорости звука.

Действительно, при отсутствии дисперсии $\delta(\omega) = \delta(2\omega) = 0$ волна вынуждающей силы F, порожденная первой гармоникой, и соответствующая ей волна $p_2^{(2)}$ — вынужденное колебание распространяются с той же скоростью, что и волна $p_1^{(2)}$ (см. (12.102), (12.105), (12.103)). В результате фазы вынуждающей силы F и колебания $p_1^{(2)}$ в каждой точке пространства совпадают. Это явление называется *синхронизмом*. Вследствие синхронизма волна второй гармоники $p^{(2)} = p_1^{(2)} + p_2^{(2)}$ усиливается во время распространения (см. (12.108)). В среде с поглощением (но без дисперсии) также наблюдается синхронизм, но появляется конкурирующий фактор — повышенное поглощение второй гармоники по сравнению с первой, которое вначале

замедляет рост амплитуды второй гармоники, а потом приводит к ее уменьшению. В дисперсионной среде волновые числа вынуждающей силы F и второй гармоники: $2k_0 + 2\delta(\omega) = 2k_0 - 2a_3\omega^3$ и $2k_0 + \delta(2\omega) = 2k_0 - 8a_3\omega^3$ различны, а, следовательно, различны и фазовые скорости. Вследствие этого синхронизм нарушается. В некоторых точках пространства вынуждающая сила поддерживает колебания удвоенной частоты, а других частот ослабляет, в результате чего наблюдается картина пространственных биений (см. (12.109)) второй гармоники в отличие от монотонного роста ее амплитуды, как в (12.108).

12.9. Солитоны

Дисперсия, как и поглощение, оказывают влияние на уровень высших гармоник в спектре сигнала и, таким образом, на его профиль. Физически это связано с тем, что разные спектральные компоненты распространяются с разными скоростями, что ограничивает накопление нелинейных эффектов, приводящих к появлению резких изменений в профиле волны. Итак, и поглощение, и дисперсия (за счет нарушения синхронизма) сдерживают действие нелинейности и выступают (в данном случае) в роли конкурирующих с ней факторов. Если пренебречь поглощением, то оказывается возможной ситуация, когда нелинейные эффекты и эффекты, обусловленные дисперсией, уравновешивают друг друга. Этой ситуации соответствует стационарное (т.е. волна с неизменным профилем) решение уравнения Кортевега-де Вриза (уравнение (12.97) при $a_2 = 0$) [28, 45]. Решение имеет вид одиночного импульса и называется *одиночной волной* или *солитоном*. Последнее название происходит от английского словосочетания *solitary wave* — одиночная волна. Итак, само название волны подчеркивает локализованный характер такого решения уравнения Кортевега-де Вриза (КдВ). Вид солитона КдВ приведен на рис. 12.7.

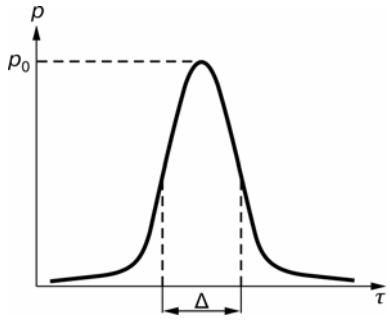


Рис. 12.7. Зависимость давления от τ для солитона уравнения Кортевега-де Вриза

Оценим его характерные параметры, считая, что нелинейный член в уравнении КдВ (см. (12.97) при $a_2 = 0$) уравновешивается дисперсионным:

$$a_1 p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} \sim a_3 \frac{\partial^3 p'}{\partial \tau^3}, \quad \text{иначе} \quad a_1 \frac{(p')^2}{2} \sim a_3 \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2}. \qquad (12.110)$$

Обозначим амплитуду солитона p_0 и его характерную ширину Δ (рис. 12.7). Тогда, как следует из соотношения (12.110), $a_1 p_0^2/2 \sim a_3 p_0/\Delta^2$, откуда получим связь между параметрами солитона:

$$\frac{a_1}{a_3} \frac{p_0 \Delta^2}{2} = \text{const}. \qquad (12.111)$$

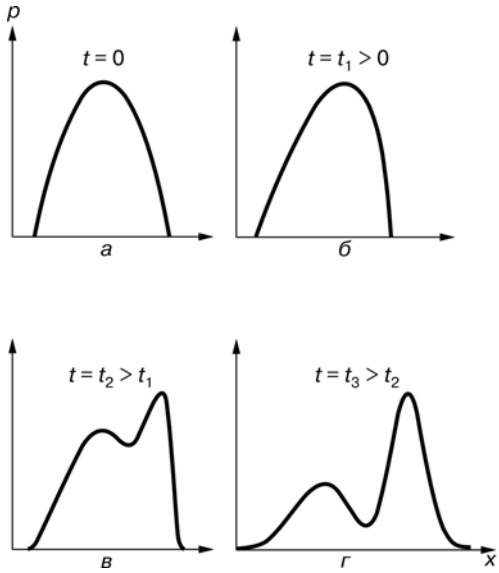


Рис. 12.8. Эволюция начального возмущения в нелинейной среде с дисперсией, которая завершается образованием солитонов [45, с. 26]

Как следует из соотношения, чем больше амплитуда солитона, тем он уже. Анализ точного решения уравнения КдВ подтверждает справедливость соотношения (12.111). Вообще солитоны имеют очень интересные свойства. Например, оказывается, что их скорость тем больше, чем больше амплитуда. Другое свойство иллюстрирует рис. 12.8 [45, с. 26], на котором представлена эволюция начального возмущения в рамках уравнения КдВ. Как следует из рисунка, процесс формирования резкого изменения профиля останавливается и происходит образование одного или нескольких солитонов, число которых определяется начальными условиями.

Образование солитонов возможно в случаях, когда дисперсионные эффекты значительно преобладают над эффектами поглощения, например, гравитационно-капиллярные волны на поверхности жидкости. Впервые одиночную волну на поверхности воды наблюдал Рассел* в 1838 г. Для звуковых волн в жидкостях и газах характерно противоположное соотношение, а именно: преимущество диссипации над дисперсионными эффектами. Однако в структурно-неоднородных средах, где существует акустическая дисперсия, наблюдаются эффекты солитонного характера [28].

12.10. Нелинейное взаимодействие акустических волн

Две волны, бесконечно малой амплитуды, проходя сквозь некоторую область среды, создают интерференционную картину, в которой взаимное усиление колебаний в одних местах и ослабление в других объясняется суперпозицией волн, приходящих в точку наблюдения со сдвигом фаз. При конечной амплитуде хотя бы одной из двух волн, кроме интерференции, наблюдается их взаимодействие, которое выражается в появлении новых волн, что обусловлено нелинейностью волнового процесса.

Нелинейное взаимодействие волн — одно из наиболее важных эффектов нелинейной акустики, которое уже нашло применение в технике. Чтобы понять главные особенности этого сложного явления, рассмотрим простой случай, а именно: распространение двух плоских волн $p_1(x,t)$ и $p_2(x,t)$ вдоль оси Ox. При этом одновременно рассмотрим две ситуации: когда волны распространяются в одном направлении и в противоположных направлениях.

Воспользуемся методом последовательных приближений, поскольку при изучении поля встречных волн нельзя ввести сопровождающие координаты и применить метод медленно изменяющегося профиля.

Итак, пусть волны первого приближения $p_1'(x,t)$ и $p_2'(x,t)$ — плоские гармонические волны с частотами ω_1 и ω_2. Тогда в первом приближении звуковое давление в среде имеет вид

$$p' = p_1' + p_2' = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A_2 \cos(\omega_2 t \mp k_2 x). \qquad (12.112)$$

Верхний знак (здесь и в дальнейшем) во втором слагаемом соответствует распространению волн в одном направлении, нижний — распространению волн навстречу друг другу; $k_1 = \omega_1/c_0$, $k_2 = \omega_2/c_0$.

---

* Рассел (Russell) Джон Скотт (1808—1882) — английский ученый и инженер-изобретатель.

Волны второго приближения (нелинейное слагаемое p'') найдем с помощью уравнения (12.50). Его правую часть, выполняющую роль возбуждающей силы, которая действует вдоль оси Ox, определим через p' и υ'. Подставляя $p' = p_1' + p_2'$ и $\upsilon' = \left(p_1' \pm p_2'\right)/\left(\rho_0 c_0\right)$ в формулу (12.51а) для возбуждающей силы, получаем

$$Q = Q_{11} + Q_{22} + Q_{12}, \tag{12.113}$$

где Q_{11} выражается через $\left(p_1'\right)^2$, а Q_{22} — через $\left(p_2'\right)^2$. Добавка Q_{12} определяется произведением $p_1' p_2'$ и имеет вид

$$Q_{12} = \frac{-2}{\rho_0 c_0^2}\left\{\pm\frac{\partial^2\left(p_1' p_2'\right)}{\partial x^2} + \frac{(\varepsilon - 1)}{c_0^2}\frac{\partial^2\left(p_1' p_2'\right)}{\partial t^2}\right\}. \tag{12.114}$$

Волновое уравнение (12.50) есть линейное уравнение, и поэтому согласно принципу суперпозиции каждому слагаемому в (12.113) соответствует свое решение. Так, Q_{11} отвечает за появление второй гармоники в волне $p_1(x,t)$, а Q_{22} обусловливает появление второй гармоники в волне $p_2(x,t)$. Это, как уже мы понимаем, приведет к изменению профиля взаимодействующих волн. Слагаемое Q_{12} собственно и определяет взаимодействие волн.

Поскольку $p_1' p_2'$ можно записать в виде

$$p_1' p_2' = \frac{A_1 A_2}{2}\left\{\cos\left[\left(\omega_1 + \omega_2\right)t - \left(k_1 \pm k_2\right)x\right] + \cos\left[\left(\omega_1 - \omega_2\right)t - \left(k_1 \mp k_2\right)x\right]\right\}, \tag{12.115}$$

то, согласно (12.115), слагаемое Q_{12} делится на две компоненты, которые имеют смысл вынуждающих сил суммарной частоты ($\omega_1 + \omega_2$) и разностной частоты ($\omega_1 - \omega_2$). Под их влиянием в среде возникают волны суммарной и разностной частот, которые являются следствием нелинейного взаимодействия волн с частотами ω_1 и ω_2.

Рассмотрим компоненту разностной частоты ($\omega_1 - \omega_2$). Это связано с тем, что во многих случаях данная компонента представляет наибольший интерес, ведь в реальной среде за счет поглощения все высокочастотные составляющие быстро затухают.

После дифференцирования в (12.114) находим

$$Q_{12}^{-} = \frac{A_1 A_2}{\rho_0 c_0^4}\left[\pm\left(\omega_1 \mp \omega_2\right)^2 + (\varepsilon - 1)\left(\omega_1 - \omega_2\right)^2\right]\cos\left[\left(\omega_1 - \omega_2\right)t - \left(k_1 \mp k_2\right)x\right]. \tag{12.116}$$

Под действием вынуждающей силы (12.116) в среде возникает волна разностной частоты ($\omega_1 - \omega_2$):

$$p^- = B(x)\cos\left[\left(\omega_1 - \omega_2\right)t - \frac{\omega_1 - \omega_2}{c_0}x\right]. \qquad (12.117)$$

Очевидно, характер изменения амплитуды $B(x)$ этой волны зависит от направления распространения волн $p_1(x,t)$ и $p_2(x,t)$. Действительно, если волны распространяются в одном направлении, то фазы вынуждающей силы Q_{12}^- и волны p^- совпадают в каждой точке среды, ведь $(k_1 - k_2)x = (\omega_1 - \omega_2)x/c_0$, и наблюдается синхронизм. В этом случае $B(x)$ будет нарастать линейно с координатой x, ведь во время распространения именно эта фазовая синхронность обеспечивает постоянное поступление энергии к волне p^-.

Если волны распространяются навстречу друг другу, то явление синхронизма отсутствует, ведь $\left(k_1 + k_2\right)x \neq \left(\omega_1 - \omega_2\right)x/c_0$. В этом случае можно говорить о некоторых пространственных биениях и, разумеется, возбуждение волны p^- будет малоэффективным.

Из этих качественных рассуждений мы делаем важный вывод: эффект возбуждения волны p^- с разностной частотой $(\omega_1 - \omega_2)$ в значительной мере зависит от направления движения волн с частотами ω_1 и ω_2, и, как оказывается, является наиболее эффективным, когда волны $p_1(x,t)$ и $p_2(x,t)$ распространяются в одном направлении.

Рассмотренная ситуация взаимодействия плоских волн в идеальной среде представляет собой достаточно упрощенную модель взаимодействия. Отметим основные моменты реальной среды, которые оказывают влияние на эффект взаимодействия волн. Во-первых, это наличие поглощения в реальной среде. Во-вторых, это дисперсия скорости звука, хотя для таких сред, как вода и воздух, этот фактор не имеет большого значения, ведь дисперсия практически отсутствует. И, в-третьих, то, что сами волны не являются плоскими, а представляют собой пучки, которые за счет дифракции распространяются в зону геометрической тени.

Таким образом, наличие в среде дисперсии приводит к несинхронному взаимодействию волн, распространяющихся в одном направлении. Наличие поглощения и дифракционного расширения пучка ограничивает зону эффективного взаимодействия волн, распространяющихся в одном направлении.

12.11. Параметрические излучатели и приемники звука

До 1960 года в ряде исследований было показано, что в

ультразвуковом диапазоне частот, даже при небольших интенсивностях звука, гармоники и волны комбинационных ($\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$) частот в слабовязких жидкостях (таких, например, как вода) благодаря нелинейным свойствам генерируются достаточно сильно. Проанализировав это явление, американский акустик Вестервелт (Westervelt, 1963 г.) и, независимо от него, Зверев* и Калачев пришли к мысли о возможности создания параметрических излучающих и приемных антенн. В таких антеннах излучающими или приемными элементам является сам объем нелинейной среды, в котором происходит взаимодействие волн.

Введенный Вестервелтом термин "*параметрический*" не соответствует принятому в теории колебаний понятию параметрического возбуждения. Точнее было бы говорить о нелинейной антенне. Однако этот срок настолько крепко вошел в научный язык специалистов, что попытки изменить его не имеют смысла [37, с. 129].

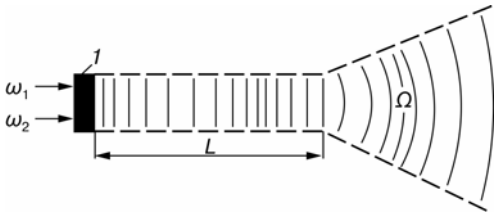


Рис. 12.9. Схема параметрического излучателя звука:
1 — излучатель звука, *L* — длина области взаимодействия

На рис. 12.9 представлена схема излучающей параметрической антенны. Две интенсивные волны с близкими частотами ω_1 и ω_2, распространяющиеся в одном направлении, взаимодействуют между собой. При этом вместе с другими частотами появляется разностная частота $\Omega = |\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$. Так, для воды значения ω_1 и ω_2 удобно выбирать в диапазоне приблизительно до нескольких сотен килогерц. Если, например, $\omega_1/2\pi = 100$ кГц, $\omega_2/2\pi = 99$ кГц, $\Omega/2\pi = 1000$ Гц, то волна с частотой Ω поглощается значительно слабее, чем волны с частотами ω_1 и ω_2. Поэтому эта волна сможет пройти значительно большее расстояние, чем волны ω_1 и ω_2. Понятно, что эффективность такой излучающей антенны невелика, однако, несмотря на это, такая антенна обладает очень ценными свойствами.

Прежде всего, — это острая характеристика направленности для волны с частотой Ω. При этом сам излучатель, создающий в среде

* Зверев Виталий Анатольевич (р. 1924 г.) — российский радиофизик и акустик, чл.-кор. РАН.

волны с частотами ω_1 и ω_2, может иметь малые размеры по сравнению с длиной волны на частоте Ω. Чтобы оценить направленность параметрической антенны, сравним ее с направленностью обычной антенны, которая также излучает волну с частотой Ω.

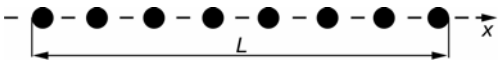


Рис. 12.10. Пример антенны в виде набора ненаправленных излучателей

В параметрической антенне полезный сигнал возникает за счет действия на среду вынуждающей силы $Q_{12}^{-}(x,t)$ (формула (12.116)), которая имеет характер бегущей волны. Расположим на отрезке L (рис. 12.10), длина которого равна длине области эффективного взаимодействия волн с частотами ω_1 и ω_2, обычные ненаправленные излучатели (например, пьезокерамические) и настроим их фазы таким образом, чтобы максимум излучения полученной антенны совпадал с направлением излучения параметрической антенны, т.е. вдоль оси Ox. Для этого, как известно, необходимо ввести фазовые сдвиги для компенсации разности хода от отдельных излучателей до точки приема на оси Ox. При этом возбуждение элемента антенны с координатой x на частоте Ω будет определяться соотношением $\cos(\Omega(t - x/c_0))$, что совпадает с точностью до постоянного множителя с формулой (12.116), в которой взят верхний знак. Отсюда следует, что направленность параметрической антенны определяется размером зоны взаимодействия L и близка к направленности обычной фазированной антенны длиной L. Поскольку в реальной ситуации размер L достаточно велик, то направленность параметрической антенны может быть острой (в гидроакустических параметрических антеннах величина L достигает сотен метров).

Параметрическая антенна привлекательна не только тем, что она бестелесная и может иметь гигантские размеры. У нее есть очень важное принципиальное преимущество перед антенной, которая представляет собой решетку из обычных ненаправленных элементов. Дело в том, что фазы отдельных элементов необходимо настраивать между собой с высокой точностью. Это сложная техническая задача. Необходимо обеспечить не только идентичность как фазовых, так и амплитудных характеристик многих элементов антенны, но и их точное расположение. Точность выполнения этих операций остается конечной при любых усилиях. Вследствие этого, такая антенна имеет боковое поле, которое, к сожалению, невозможно заранее точно рассчитать. Это поле существенно портит характеристику антенной решетки. Вообще, теоретически, антенна в виде фазированной решетки всегда имеет боковое поле.

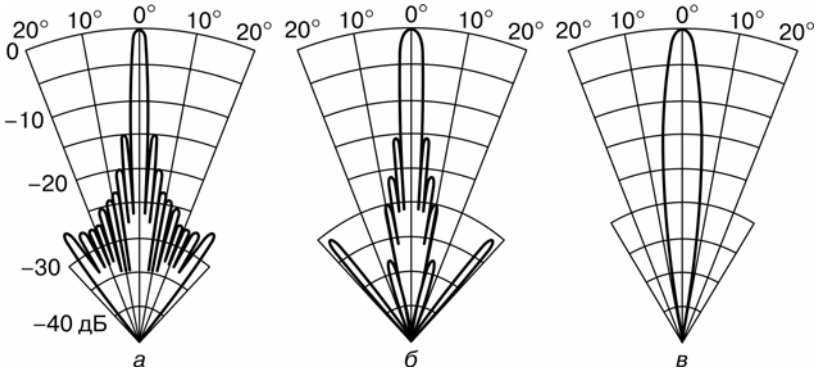


Рис. 12.11. Характеристики направленности излучения параметрической антенны [23, с. 103]:
на частотах f_1 = 418 кГц (*а*) и f_2 = 482 кГц (*б*),
на разностной частоте $\Omega/(2\pi)$ = 64 кГц (*в*)

Параметрическая антенна имеет исключительное свойство — у нее нет боковых лепестков, наличие которых является типичным для обычных антенн. В качестве примера, на рис. 12.11 приведены характеристики направленности плоского излучателя диаметром 7,5 см на частотах f_1 = 418 кГц (рис. 12.11, *а*), f_2 = 482 кГц (рис. 12.11, *б*) и направленность волн разностной частоты $\Omega/2\pi$ = 64 кГц (рис. 12.11, *в*) [23, с.103]. Из рисунка следует, что на частоте Ω дифракционные лепестки отсутствуют. Другой важной особенностью является широкополостность параметрической антенны. Действительно, изменяя частоты f_1 и f_2 электрических сигналов, можно получить плавное изменение частоты Ω в широких пределах.

Указанные свойства параметрических антенн очень важны, наличие этих свойств обусловливает интерес к таким антеннам. Особенно это касается гидроакустики. Здесь параметрические антенны находят разнообразные применения. Узкая характеристика направленности с подавленными боковыми лепестками дает возможность передавать сигналы на морском мелководье и позволяет не учитывать посторонние сигналы, появляющиеся вследствие отражения от поверхности моря и его дна. Широкополостность параметрической антенны дает возможность перестраивать частоту Ω и добиваться максимума рассеянного объектом сигнала на его резонансной частоте. Так осуществляется поиск и классификация затонувших объектов, даже если они засыпаны слоем ила, ведь низкочастотные волны вследствие малого поглощения проникают в слои ила.

Нелинейное взаимодействие волн в жидкостях или газах может быть использовано и для приема слабых сигналов. Принцип действия приемной параметрической антенны представлен на рис. 12.12. Из-

лучатель *1* частоты ω (накачка) создает достаточно узкий пучок интенсивных звуковых волн. Величина L определяет длину приемного луча. Слабый сигнал частоты $\Omega << \omega$ падает под некоторым углом θ к оси пучка. В области взаимодействия L волна сигнала распространяется в среде, параметры которой изменяются мощной волной накачки, вследствие чего регистрирующий преобразователь *2* принимает волну накачки, модулированную волной сигнала. Дальше схема обработки *3* выделяет параметры сигнала. Фактически прием сигнала происходит на длине базы L, а, следовательно, приемная антенна является “бестелесной”.

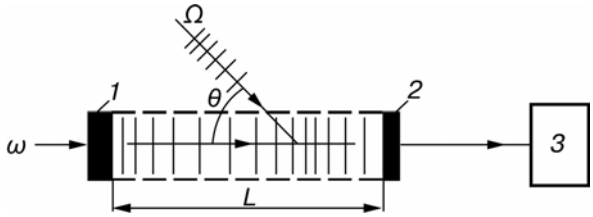


Рис. 12.12. Схема параметрического приемника звука:
1 — излучатель волны накачки; *2* — электроакустический преобразователь; *3* — схема обработки; L — область взаимодействия (длина приемного луча)

По результатам параграфа 12.10 можно сделать следующие выводы. Эффективность возбуждения волн с частотами $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$ будет максимальной в случае распространения волн накачки и сигнала в одном направлении, т.е. при угле падения волны сигнала $\theta = 0°$. Итак, максимум характеристики направленности приемной параметрической антенны расположен в направлении, противоположном направлению распространения волны накачки.

Перспективным является применение параметрических приемников в электроакустике, где средой является воздух: речь идет о параметрическом микрофоне. В конце данного раздела приведем отрывок из статьи Зверева [*, с. 691—692], в котором автор делится впечатлениями об испытаниях лабораторного макета параметрического микрофона.

“С помощью лабораторного макета параметрического микрофона, приемный луч которого имел длину 1 м, мы недавно провели такой эксперимент. В небольшой комнате одновременно разговаривали (каждый о своем) все, кто принимал участие в создании макета микрофона (5 человек). Из них только один находился там, где звук его голоса распространялся вдоль ультразвукового луча. Итак, произошло

---

* *Зверев В.А.* Как зарождалась идея параметрической акустической антенны // Акустический журнал. — 1999. — **45**, № 5. — С. 685—692.

следующее. При воспроизведении записи с обычного микрофона ничего невозможно было разобрать. Голоса людей, которые одновременно говорили, заглушали друг друга. При воспроизведении записи с параметрического микрофона, сделанной одновременно с записью на обычном микрофоне, был слышен голос только того человека, который говорил в направлении принимаемого звукового луча.

Такой микрофон хорошо приглушает реверберацию и может находиться в поле громкоговорителя, озвучивающего помещение, не возбуждая генерацию. Вполне очевидно, что будущее принадлежит именно таким бестелесным микрофонам, которые имеют целый ряд принципиальных преимуществ над существующими микрофонами".

12.12. Задачи

12.1. Будут ли наблюдаться изменения в профиле звуковой волны, если сжатия и растяжения происходят по изотермическому закону ($\gamma = 1$)?

12.2. Является ли сферическая волна простой?

12.3. Почему уравнения метода медленно изменяющегося профиля дают возможность описать значительные нелинейные эффекты, в то время при помощи метода последовательных приближений можно рассчитать только малые нелинейные добавки?

12.4. На границе $x = 0$ нелинейной среды колебательная скорость равна сумме гармонических составляющих

$$\upsilon(0,t) = \upsilon_1 \sin(\omega_1 t) + \upsilon_2 \sin(\omega_2 t).$$

Решая уравнение простых волн (12.59) методом последовательных приближений, определите амплитуды υ_+ и υ_- комбинационных гармоник $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$. Сравните эффективность генерации для суммарной и разностной частот.

Ответ: $\upsilon_\pm = \dfrac{\varepsilon}{2c_0^2}\upsilon_1\upsilon_2(\omega_1 \pm \omega_2)x, \quad \dfrac{\upsilon_-}{\upsilon_+} = \dfrac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1 + \omega_2} < 1.$

12.5. На каком расстоянии от излучателя мощного ультразвука в воде образуется разрыв? Интенсивность ультразвуковой волны 10 Вт/см^2, частота 1 МГц, коэффициент акустической нелинейности $\varepsilon = 4$.

Ответ: приблизительно 25 см.

12.6. Определите амплитуды колебательной скорости, смещения и ускорения частиц среды под действием звуковой волны и значения числа Маха в задаче 12.5.

Ответ: приблизительно 36 см/с, $6 \cdot 10^{-6}$ см, $2 \cdot 10^8$ см/с^2. Как следует из решения задачи, смещения частиц невелико даже в мощных ульт-

развуковых полях, но ускорения — очень большие. Числа Маха малы, этот факт мы не раз отмечали.

12.7. Какой должна быть интенсивность волны в воде на частоте 200 кГц, чтобы разрыв образовался на расстоянии 10 м?

Ответ: приблизительно 0,15 Вт/см^2.

12.8. Определите число Маха и расстояние, на котором образуется разрыв для плоской монохроматической волны в воздухе, если уровень интенсивности 140 дБ (шум двигателя реактивного самолета) и частота 3300 Гц.

Ответ: приблизительно $2 \cdot 10^{-3}$, 6 м.

12.9. При каких значениях числа Рейнольдса определяющую роль играет нелинейность волнового процесса, а при каких — поглощение?

12.10. Какие предположения были сделаны при переходе от уравнений метода медленно изменяющегося профиля для среды с релаксацией к уравнениям Кортевега-де Вриза-Бюргерса.

РАЗДЕЛ 13

АКУСТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Измерить океан глубокий,
Сочесть пески, лучи планет
Хотя и мог бы ум высокий, —
Тебе числа и меры нет!

Г.Р. Державин[*]

В последнем разделе рассмотрена проблема измерения параметров звукового поля. Этому важному вопросу посвящено много работ [4, 21], однако наша цель состоит в том, чтобы, рассказывая о некоторых основных методах измерения давления или колебательной скорости, осветить их физическую суть, не рассматривая при этом технические проблемы.

13.1. Общие положения

При измерении любой физической величины следует или непосредственно, или косвенным путем сравнивать ее с величиной, принятой за единицу измерения. Понятно, что такое сравнение можно выполнять, пользуясь некоторым устройством. Всю совокупность технических средств, с помощью которых осуществляется это сравнение, называют *измерительной аппаратурой*. Для того чтобы устройство стало измерительной аппаратурой нужно провести его *градуировку* (от латинского слова *gradus* — шаг, степень), т.е. получить количественную оценку характеристик измерительной аппаратуры. Например, целью градуировки измерителя звукового давления со стрелочным индикатором должно быть установление соответствия между углом отклонения стрелки индикатора и звуковым давлением, действующим на электроакустический преобразователь.

Измерительная акустическая аппаратура состоит из электроакустического преобразователя и электронных блоков с индикаторами. Обычно градуировку электроакустического преобразователя и электронной части аппаратуры проводится отдельно. В дальнейшем бу-

[*] Державин Гаврила Романович (1743—1816) — российский поэт.

дем вести речь только о градуировке электроакустического преобразователя.

Приведем определения основных характеристик электроакустического преобразователя:

- чувствительность электроакустического преобразователя в режиме излучения — отношение звукового давления, которое создает преобразователь на заданном расстоянии, к току возбуждения преобразователя;
- чувствительность в режиме приема — отношение электрического напряжения на выходе преобразователя к звуковому давлению в месте расположения преобразователя при его отсутствии (чувствительность по полю).

Все методы градуировки преобразователей разделяют на абсолютные и относительные. К *абсолютным* принадлежат такие методы градуировки, которые не нуждаются в наличии некоторого эталона. *Относительные* методы построены на использовании эталонного преобразователя, характеристики которого определены абсолютным методом. Понятно, что относительные методы технически реализуются значительно проще, чем абсолютные, ведь, по сути, все сводится к процедуре сравнения эталонного и исследуемого преобразователей (см. п. 13.4). Ниже рассмотрим два наиболее известных абсолютных метода градуировки: *метод диска Рэлея* и *метод взаимности*.

13.2. Измерение колебательной скорости и акустического давления методом диска Рэлея

Звукоизмерительный диск или *диск Рэлея* (рис. 13.1) для воздушной среды представляет собой тонкую (толщиной приблизительно 0,05 мм) стеклянную или изготовленную из легкого металла или слюды пластинку *1* диаметром примерно (5...10) мм, которая подвешена на тонкой кварцевой нити *2* таким образом, что плоскость диска лежит в вертикальной плоскости. При этом диск сориентирован так, что угол между направлением распространения звуковой волны и нормалью к поверхности диска равен 45°. Для наблюдения за отклонением диска его можно посеребрить или приклеить к нему зеркальце *5*. Движение диска обусловлено тем, что при обтекании диска частицами среды возникают силы, которые стремятся повернуть его поперек направления движения звуковой волны. Угол поворота диска измеряется с помощью светового “зайчика” на шкале *3*. Впервые звукоизмерительный диск применил Рэлей, поэтому его называют также диском Рэлея.

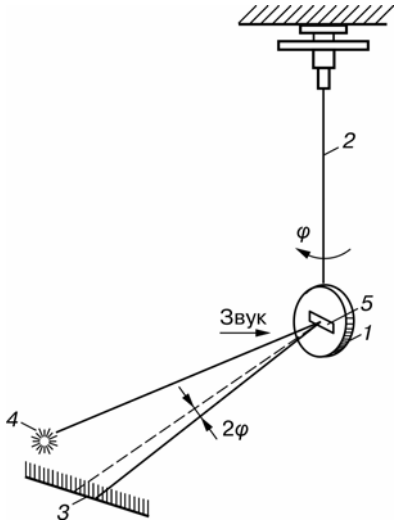


Рис. 13.1. Схема измерения колебательной скорости методом диска Рэлея: *1* — круглая пластинка, *2* — нить, *3* — шкала, *4* — источник света, *5* — зеркальце

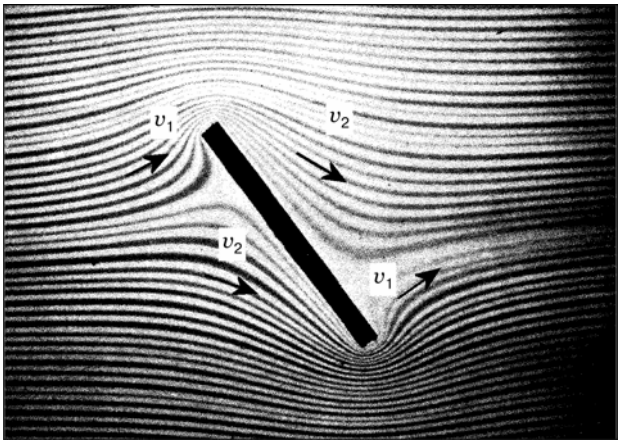


Рис. 13.2. Линии тока газа или жидкости вблизи пластинки

Поведение диска в потоке среды можно объяснить, анализируя картину обтекания некоторой пластинки этим потоком (рис. 13.2). Как следует из рисунка, падающий поток разделяется. Одна его половина тормозится и обтекает меньшую часть передней части пластинки со скоростью v_1; вторая — обтекает ее большую часть с большей скоростью v_2. На задней части пластинки картина имеет тот же характер, но область больших скоростей находится непосредственно напротив области малых скоростей на передней части пластинки. Согласно

закону Бернулли* $\rho\frac{\upsilon^2}{2}+p=\text{const}$, поэтому если $\upsilon_1<\upsilon_2$, то $p_1>p_2$. Вследствие разности давлений p_1-p_2 на пластинку будет действовать момент, который стремится повернуть ее поперек потока в положение, при котором $\upsilon_1=\upsilon_2$. При этом линии тока станут симметричными, и момент исчезнет. Изменение направления потока не изменяет картину линий тока, и направление момента также не изменится. Поэтому пластинка стремится повернуться и в переменном поле колебательной скорости, которое характерно для звуковых волн.

Согласно теории [4, с. 84], момент M, действующий на диск в поле гармонической звуковой волны, записываем в следующем виде

$$M=\frac{4}{3}\rho a^3\upsilon_{\text{эф}}^2\sin(2\varphi_0), \tag{13.1}$$

где ρ — плотность среды; a — радиус диска; $\upsilon_{\text{эф}}$ — эффективное значение колебательной скорости частиц среды в звуковой волне, φ_0 — начальный угол между направлением звуковой волны и нормалью к поверхности диска. Понятно, что для максимальной чувствительности диска начальный угол φ_0, как уже отмечалось, выбирают равным 45°. Вывод формулы (13.1) выполнен на основе решения гидроаэродинамической задачи об обтекании диска потоком при следующих предположениях:

1) диск — бесконечно тонкий неподвижный сплюснутый эллипсоид, расположенный в потоке несжимаемой среды;

2) на диск не действуют вязкие силы или силы, обусловленные теплопроводностью;

3) течение вокруг диска ламинарное.

Рассмотрим рис. 13.1. В поле звуковой волны диск стремится закрутить нить**. Вследствие этого диск будет поворачиваться на угол φ, пока момент со стороны среды не уравновесится крутильной упругостью нити. Угол поворота измеряют оптическим методом (при повороте диска на угол φ световой “зайчик” отклоняется на угол 2φ; убедитесь в этом самостоятельно, проведя соответствующие геометрические построения): $\varphi=x/(2R)$, где x — линейное отклонение вдоль шкалы светового “зайчика”; R — расстояние от диска до шкалы.

Зная угол φ, можно определить момент закручивания нити

---

* Бернулли (Bernoulli) Даниил (1700—1782) — швейцарский физик и математик. Большое значение для развития механики жидкостей и газов имел трактат Бернулли “Гидродинамика” (1783 р.). С выходом этого трактата появился термин *гидродинамика*.

** Предполагается, что диаметр диска намного меньше длины звуковой волны.

$$M = G\varphi, \tag{13.2}$$

где G — крутильная жесткость нити, которую можно вычислить, если знать период собственных колебаний T крутильного маятника, у которого элементом массы является масса диска, а элементом упругости — крутильная упругость нити. В соответствии с уравнением движения (2.5) крутильная жесткость нити G равна

$$G = \frac{4\pi^2}{T_0^2} I_д, \tag{13.3}$$

где $I_д = ma^2/4$ — момент инерции диска; m — масса диска; T_0 — период собственных колебаний системы нить-диск, который связан с измеренным периодом колебаний T данной системы соотношением (см. формулу (2.37)) $T_0 = T/\sqrt{1+\left(\theta/(2\pi)\right)^2}$, ($\theta$ — логарифмический декремент затухания).

С учетом (13.1) — (13.3) получаем следующую формулу для квадрата эффективного значения колебательной скорости частиц среды в звуковом поле

$$\upsilon_{эф}^2 = \frac{3M}{4a^3\rho\sin(2\varphi_0)} = \frac{3\pi^2 m\varphi}{4\rho a T_0^2 \sin(2\varphi_0)}. \tag{13.4}$$

Как следует из формулы (13.4), диск Рэлея является частотно-независимым измерительным устройством. Это очень важное свойство диска Рэлея. Но для его обеспечения необходимо, чтобы диаметр диска был мал по сравнению с длиной звуковой волны.

В завершение рассмотрим в общих чертах один из вариантов практической реализации абсолютной градуировки микрофона по полю с помощью диска Рэлея. Для этого можно использовать устройство, которое называют *бесконечной акустической трубой.* В такой трубе на одном конце находится излучатель, а на другом — конструкция, поглощающая звук. Таким образом, в трубе создается плоская бегущая волна. Связь между давлением и колебательной скоростью в плоской бегущей волне имеет вид $p = \rho c\upsilon$. Итак, принимая во внимание формулу (13.4), мы имеем возможность с помощью диска Рэлея определить звуковое давление в плоской бегущей волне. Далее, в то место, где был расположен диск, помещаем исследуемый микрофон и проводим измерение напряжения на его выходе. Отношение этого напряжения к давлению и определяет чувствительность микрофона.

13.3. Градуировка электроакустических преобразователей на основе принципа взаимности

Использование диска Рэлея — это довольно сложная и кропотливая работа. Поэтому в инженерной практике нашел широкое применение другой абсолютный метод градуировки, а именно: метод взаимности. В основу метода положен принцип взаимности, примененный к электроакустическим преобразователям.

13.3.1. Формулирование принципа взаимности для электроакустических преобразователей

Возьмем *обратимый* электроакустический преобразователь, т.е. преобразователь, который работает и как излучатель, и как приемник. Большинство электроакустических преобразователей, используемых на практике, являются обратимыми [11]. Принцип взаимности устанавливает связь характеристик такого преобразователя, когда он работает в режиме приема и в режиме излучения.

В параграфе 9.13 мы определили свойство функции Грина в виде соотношения (9.148), которое представляет собой математическую формулировку принципа взаимности. Рассмотрим теперь общую ситуацию [60, с. 78-82], когда речь идет не о точечном источнике, а о двух источниках звука конечного размера, которые характеризуются производительностями q_1 и q_2 на единицу объема, занятого источниками. Звуковые поля давления, образованные этими источниками, удовлетворяют неоднородному уравнению:

$$\Delta p_1 + k^2 p_1 = -q_1, \quad \Delta p_2 + k^2 p_2 = -q_2. \tag{13.5}$$

Далее следует провести выкладки аналогичные тем, что проделаны в параграфе 9.13 (см. рис. 9.21, в данном случае вместо точечных источников, местоположение которых определено векторами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$, в объеме V располагаются источники с производительностями q_1 и q_2, которые занимают некоторые области A и B, например см. рис. 13.3). Как результат, получите самостоятельно такое соотношение:

$$\int_V q_1 p_2 dV = \int_V q_2 p_1 dV\,. \tag{13.6}$$

Выражение (13.6) является математической формулировкой принципа взаимности для источников звука конечных размеров.

Если источники звука малы по сравнению с длиной звуковой волны, то можно полагать, что давление p_2 незначительно изменяется в пределах области A, которую занимает источник q_1 (рис. 13.3). Аналогичное утверждение справедливо и для давления p_1 в области B, ко-

торую занимает источник q_2. Поэтому давление можно вынести за знак интеграла и переписать формулу (13.6) в виде

$$p_2(A)Q_1(A) = p_1(B)Q_2(B), \tag{13.7}$$

где $Q_1(A) = \int\limits_V q_1 dV$, $Q_2(B) = \int\limits_V q_2 dV$ — полные производительности источников, которые, в силу их взаимной пропорциональности в выражении (13.7), можно определить как полные объемные скорости источников. Условие (13.7) означает, например, следующее [60, с. 80]. Если излучение в области A производится излучателем с концентратором звука (рупором), а прием в области B — без концентратора, то общий эффект не будет отличаться от эффекта, который имел бы место, если бы излучение проводилось без концентратора, а прием — с концентратором. Если к тому же $Q_1 = Q_2$, то

$$p_2(A) = p_1(B). \tag{13.8}$$

Таким образом, при выполнении равенства $Q_1 = Q_2$, источник Q_1 вызывает в области B такое же звуковое давление, как и источник Q_2 в области A. При этом имеется в виду, что поверхности источников заторможены.

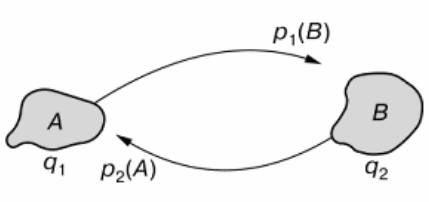


Рис. 13.3. К выводу принципа взаимности

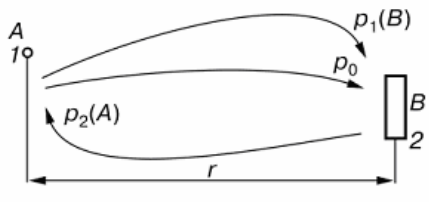


Рис. 13.4. Пример к сравнению свойств преобразователя в режимах приема и излучения

Принцип взаимности используется для сопоставления свойств обратимого преобразователя, работающего в качестве излучателя и в качестве приемника [60, с. 81-82]. Возьмем малую пульсирующую сферу *1* и исследуемый преобразователь *2* (рис. 13.4). Звуковое давление p_0, которое развивается сферой в том месте, где находится преобразователь *2* (при его отсутствии), определяется формулой (см. параграф 7.5)

$$p_0 = -i\omega\rho\frac{Q}{4\pi r}\exp(ikr) = -i\rho c\frac{Q}{2r\lambda}\exp(ikr), \tag{13.9}$$

где Q — объемная скорость сферы; r — расстояние между сферой и преобразователем.

Разделим обе части равенства (13.7) на p_0. Тогда с учетом (13.9) и того, что $Q_1(A) \equiv Q$, можно записать

$$\frac{p_1(B)}{p_0} = -\frac{2r\lambda \exp(-ikr)}{i\rho c}\frac{p_2(A)}{Q_2(B)}. \qquad (13.10)$$

Левая часть данного выражения — это отношение звукового давления на преобразователе к звуковому давлению в свободном поле, поэтому отношение характеризует свойства преобразователя как приемника. Множитель $p_2(A)/Q_2(B)$ в правой части определяет отношение давления в волне, излучаемой преобразователем, к его объемной скорости и, таким образом, характеризует свойства преобразователя как излучателя. Величина $2r\lambda/(\rho c)$ называется *параметром взаимности.* Как видим, этот параметр зависит от частоты. Следует особенно подчеркнуть, что параметр взаимности существенно зависит от типа волнового поля. В данном случае мы имели сферическую волну, поэтому полученная величина $2r\lambda/(\rho c)$ является параметром взаимности в поле сферической волны.

Применительно к электроакустическим преобразователям принцип взаимности формулируется следующим образом [21, с. 99]: чувствительность обратимого линейного электроакустического преобразователя в режиме излучения $E_И$ и приема $E_П$ однозначно связаны между собой через параметр взаимности H, а именно,

$$E_П = HE_И. \qquad (13.11)$$

Значение параметра взаимности при определенных условиях работы преобразователя *не зависит* от параметров преобразователя, а определяется условиями излучения в той среде, где работает преобразователь. Так, при излучении и приеме сферических волн параметр взаимности равен

$$H = \frac{2r\lambda}{\rho c} = \frac{4\pi r}{\rho\omega}, \qquad (13.12)$$

а в случае излучения и прием плоских волн, которые, как мы знаем, можно создать колеблющемся поршнем в акустической трубе (рис. 5.1), имеем (получите формулу (13.13) самостоятельно)

$$H = \frac{2S}{\rho c}, \qquad (13.13)$$

где S — площадь поперечного сечения трубы. Формулы (13.12), (13.13) справедливы в газах и жидкостях в условиях свободного поля, т.е. при отсутствии отраженных волн. Такие условия обеспечиваются в заглушенных камерах.

13.3.2. Метод трех преобразователей

Широкое применение получил метод трех преобразователей как наиболее универсальный метод градуировки на основе принципа взаимности. Он имеет много разновидностей. В качестве примера рассмотрим градуировку, т.е. определение чувствительности, приемников звукового давления (в воздухе — это микрофон, а в жидкости — гидрофон) [21]. Для проведения градуировки приемника звукового давления нужно иметь излучатель звука и обратимый преобразователь. При этом излучатель и исследуемый приемник могут быть необратимыми. Процедура градуировки состоит из трех этапов измерений, которые представлены на рис. 13.5.

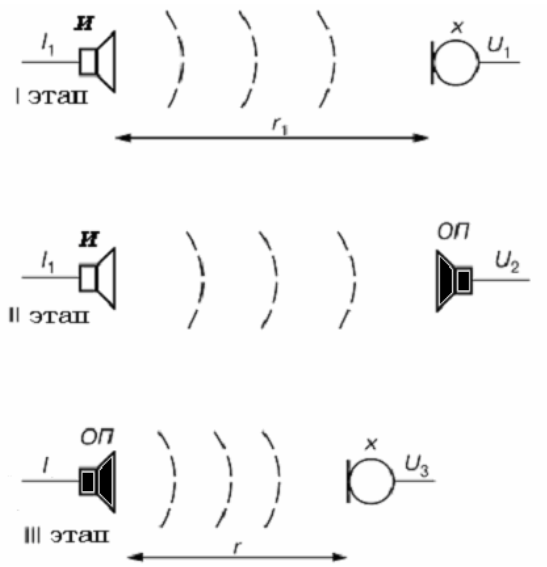


Рис. 13.5. Процедура градуировки методом трех преобразователей на основе принципа взаимности:

И — излучатель, *ОП* — обратимый преобразователь, *X* — исследуемый приемник

Первый этап измерений. Излучатель звука создает на расстоянии r_1 в месте расположения исследуемого приемника звуковое давление p. На выходе приемника звука возникает напряжение

$$U_1 = pE_x, \tag{13.14}$$

где E_x — чувствительность исследуемого приемника; напряжение U_1 измеряется.

Второй этап измерений. Режим работы источника звука не изменяется, а на место приемника звука устанавливают обратимый пре-

образователь, который работает в режиме приема. Поскольку давление p остается таким же, то на выходе обратимого преобразователя возникает напряжение

$$U_2 = pE_{П2}, \tag{13.15}$$

где $E_{П2}$ — чувствительность обратимого преобразователя в режиме приема; напряжение U_2 измеряется.

Третий этап измерений. Обратимый преобразователь используется в режиме излучения, т.е. как источник звука. Он возбуждается током I и создает на расстоянии r, где помещен исследуемый приемник, давление p_1. Это давление вызывает напряжение U_3 на выходе исследуемого приемника

$$U_3 = p_1 E_x. \tag{13.16}$$

Сила тока I, напряжение U_3 и расстояние r измеряются.

Согласно определению, чувствительность обратимого преобразователя в режиме излучения равна $E_{И2} = p_1 / I$. Тогда чувствительность обратимого преобразователя в режиме приема можно записать в виде

$$E_{П2} = HE_{И2} = H\frac{p_1}{I}. \tag{13.17}$$

Из соотношения (13.17) определяем давление p_1 и подставляем полученное выражение в (13.16):

$$U_3 = \frac{E_{П2}E_x I}{H}. \tag{13.18}$$

Решая совместно (13.14), (13.15) и (13.18), находим величину

$$E_x = \sqrt{\frac{U_1 U_3}{U_2 I}H}. \tag{13.19}$$

Принципиально важно, что никаких ограничений на размеры, тип и другие особенности исследуемого приемника этот метод не накладывает. Источник звука может создавать стационарное звуковое поле любого типа. При этом следует использовать соответствующее выражение для параметра взаимности H. Важным свойством описанного процесса градуировки на основе принципа взаимности является то, что определение чувствительности преобразователя сводится к электрическим измерениям. Непосредственное измерение таких акустических величин, как звуковое давление и колебательная скорость, сопровождается значительными трудностями, в то время как измерение электрических величин — напряжение, сопротивление, сила тока — можно выполнить достаточно просто и с высокой точностью.

В инженерной практике применяются несколько вариантов градуировки на основе метода взаимности. В них используются разные звукового поля или разные конструктивные элементы измерительной аппаратуры. Каждый из таких вариантов имеет свои особенности и области применения. Однако рассмотрение этих важных вопросов выходит за рамки нашей книги, а ознакомиться с ними можно в специальной литературе [4, 21].

13.4. Относительные методы градуировки

Если имеется эталон, т.е. электроакустический преобразователь, который прошел градуировку абсолютным методом в метрологической организации, то градуировка исследуемого преобразователя сводится к простой процедуре сравнения его с эталоном.

Идеальными условиями получения правильных результатов при относительной градуировке является единое время проведения измерения, одно и то же место расположения преобразователей в звуковом поле и единая (идентичная) используемая аппаратура при проведении измерений с исследуемым преобразователем и эталоном. Практически полностью эти требования не могут быть выполнены.

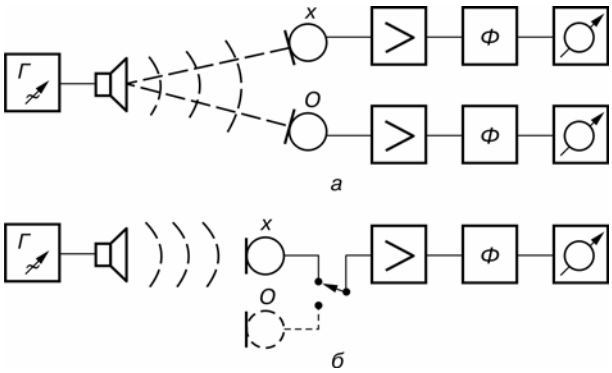


Рис. 13.6. Градуировка приемника звука сверкой (*а*) и замещением (*б*): *O* — эталонный приемник, *X* — исследуемый приемник

Выделяют два метода сравнения — *сверка* и *замещение*. Рассмотрим в качестве примера градуировку приемника звука.

При сверке придерживаются единого времени, поскольку на оба приемника одновременно падает звуковая волна (рис. 13.6, *а*). Поскольку сложно расположить приемники в одном и том же месте, то их следует располагать в точках с одинаковыми значениями звукового поля. Идентичность аппаратуры не сохраняется, ее следует контролировать в процессе измерений.

При замещении эталона исследуемым приемником (рис. 13.6, *б*) сохраняется одно и то же место и идентичность аппаратуры, но не сохраняется одновременность. Это требует поддержки стабильности работы генератора и стабильных условий работы излучателя (имеется в виду температура, давление в среде).

При сравнительных измерениях следует учитывать направленность преобразователей: приемник нужно ориентировать максимумом направленности на направление излучения. Расстояние между излучателем и приемником должно превышать расстояние, необходимое для формирования характеристик направленности преобразователя (см. параграф 7.6): $r \geq 2\left(D_1^2 + D_2^2\right)/\lambda$, где D_1 и D_2 — наибольшие размеры излучателя и приемника, λ — длина звуковой волны.

Для искомой чувствительности E_x, которая определяется посредством процедуры сравнения, имеем соотношение

$$E_x = \frac{U_1}{U_0} E_0, \tag{13.20}$$

где U_1 и U_0 — напряжения на выходе исследуемого и эталонного приемников, E_0 — чувствительность эталонного приемника.

Необходимо также подчеркнуть, что условия проведения измерений по температуре, статическому давлению, влажности должны соответствовать условиям, при которых выполнялась градуировка эталонного приемника (они приведены в его паспорте).

13.5. Задачи

2.1. Опишите физический смысл параметра взаимности?

2.2. Назовите последовательность операций при проведении градуировки преобразователя на основе принципа взаимности.

2.3. Обратимый преобразователь создает в воздухе на частоте 200 Гц в режиме излучения на расстоянии одного метра звуковое давление 0,1 Па при токе возбуждения 0,5 А. Определите его чувствительность в режиме приема.

Ответ: 1,56 мВ/Па.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акивис М.А., Гольдберг В.В.* Тензорное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 351 с.

2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. — М.: Физматлит, 1959. — 912 с.

3. *Анищенко В.С.* Знакомство с нелинейной динамикой. — Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед. — 2002. — 144 с.

4. *Беранек Л.* Акустические измерения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1952. — 626 с.

5. *Бишоп Р.* Колебания. — М.: Наука, 1986. — 190 с.

6. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

7. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). — М.: Наука, 1982. — 335 с.

8. *Бронштейн И.И., Семендяев И.А.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1981. — 720 с.

9. *Брычков Ю.А., Маричев О.Н., Прудников А.П.* Таблицы неопределенных интегралов. — М.: Наука, 1986. — 192 с.

10. *Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З.* Основы теории дифракции. — М.: Наука, 1982. — 272 с.

11. *Вахитов Я.Ш.* Теоретические основы электроакустики и электроакустическая аппаратура. — М.: Искусство, 1982. — 415 с.

12. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. — М.: Наука, 1966. — 168 с.

13. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. — М.: ГИ ФМЛ, 1959. — 572 с.

14. *Гринченко В.Т.* Развитие метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях // Гидромеханика. — 1996. — Вып. 70. — С. 27—40.

15. *Гринченко В.Т., Вовк И.В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. — К.: Наук. думка, 1986. — 240 с.

16. *Грінченко В.Т., Дідковський В.С., Маципура В.Т.* Теоретичні основи акустики. — К.: ІЗМН, 1998. — 376 с.

17. *Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А.* Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. — К.: Наук. думка, 2005. — 263 с.

18. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. — К.: Наук. думка, 1981. — 284 с.

19. *Зарембо Л.К., Тимошенко В.И.* Нелинейная акустика. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 104 с.

20. *Исакович М.А.* Общая акустика. — М.: Наука, 1973. — 495 с.

21. *Колесников А.Е.* Акустические измерения. — Л.: Судостроение, 1983. — 256 с.

22. *Красильников В.А.* Звуковые волны в воздухе, воде и твердых телах. — М.: Гостехиздат, 1954. — 440 с.

23. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. — М.: Наука, 1984. — 400 с.

24. *Крауфорд Ф.* Волны. — М.: Наука, 1984. — 512 с.

25. *Крылов В.В.* Основы теории излучения и рассеяния звука. — М.: МГУ, 1989. — 117 с.

26. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. — М.: Физматлит, 2002. — 292 с.

27. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981. — 598 с.

28. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. — М.: Наука, 1997. — 496 с.

29. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 736 с.

30. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. — М.: Наука, 1987. — 248 с.

31. *Лепендин Л.Ф.* Акустика. — М.: Высш. шк., 1978. — 448 с.

32. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. — М.: Наука, 1972. — 512 с.

33. *Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П.* Основы молекулярной акустики. — М.: Наука, 1964. — 514 с.

34. *Морз Ф.* Колебания и звук. — М.; Л.:Гостехиздат, 1949. — 496 с.

35. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 385 с.

36. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984. — 535 с.

37. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. — М.: Наука, 1990. — 237 с.

38. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. — М.: Наука, 1991. — 256 с.

39. *Пейн Г.* Физика колебаний и волн. — М.: Мир, 1979. — 389 с.

40. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003. — 496 с.

41. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. — М.: МГУ, 1960. — 335 с.

42. *Руденко О.В.* Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // УФН. — 2006. — **176,** № 1. — С. 77—95.

43. *Руденко О.В.* Нелинейные пилообразные волны // Там же. — 1995. — **165,** № 9. — С. 1011—1036.

44. *Руденко О.В., Солуян С.Н.* Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975. — 267 с.

45. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. — М.: Физматлит, 2000. — 272 с.

46. *Свердлин Г.М.* Прикладная гидроакустика. — Л.: Судостроение, 1976. — 279 с.

47. *Сивухин Д.В.* Механика. — М.: Наука, 1989. — 576 с.

48. *Скучик Е.* Основы акустики. В 2 т. — М.: Мир, 1976. — Т. 1. — 520 с.; Т. 2. — 542 с.

49. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 830 с.

50. *Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. В 2 т. — М.: Гостехиздат, 1955. — Т. 1. — 503 с.; Т. 2. — 475 с.

51. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. — М.: Наука, 1979. — 560 с.

52. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 736 с.

53. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Колебания и волны. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 224 с.

54. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 240 с.

55. *Ультразвук.* Маленькая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1979. — 440 с.

56. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фэйнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1977.

57. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. В 2 т. — М.: Мир, 1978. — Т. 1. — 547 с.; Т. 2. — 555 с.

58. *Физическая* акустика. Т. 1. — Ч. А / Под. ред. У. Мэзона. — М.: Мир, 1966. — 592 с.

59. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. — М.: Мир, 1964. — 427 с.

60. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1972. — 348 с.

61. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. — Л.: Судостроение, 1989. — 304 с.

62. *Шутилов В.А.* Основы физики ультразвука. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. — 280 с.