



**Бруяцкий Евгений Васильевич,**  
доктор технических наук,  
ведущий научный сотрудник  
Института гидромеханики НАН Украины.

**Научные интересы:** полуэмпирические и численные методы расчета параметров плавучих турбулентных струй и течений в каналах с геометрическими неоднородностями. Моделирование атмосферной диффузии и переноса газоаэрозольных радиоактивных выбросов из труб промышленных предприятий.. Разработка новой нестационарной альтернативной модели турбулентных течений и численный метод расчета их мгновенных, осредненных и пульсационных характеристик.



**Костин Александр Григорьевич,**  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Института гидромеханики НАН Украины.

**Научные интересы:** моделирование и численные исследования: задач аэродинамики обтекания тел вблизи экрана, процессов тепломассопереноса в пограничном слое в системе вода-воздух, течений в каналах при наличии различных геометрических неоднородностей; тепловые расчеты водоемов-охладителей тепловых и атомных электростанций.



**Никифорович Евгений Иванович,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
член-корреспондент НАН Украины,  
заслуженный деятель науки и техники Украины,  
заведующий отделом  
Института гидромеханики НАН Украины

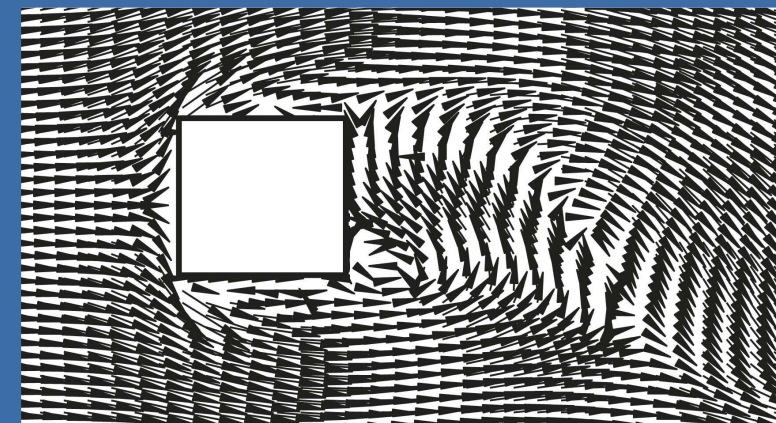
**Научные интересы:** новые модели сплошных сред с усложненными физико-математическими свойствами, модели многокомпонентных сред и их асимптотические свойства, динамика завихренности и стратифицированные пограничные слои при наличии массовых сил, физико-химическая гидродинамика топливных элементов.

МЕТОД КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА В  
КОМПЬЮТЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Е.В. БРУЯЦКИЙ, А.Г. КОСТИН, Е.И. НИКИФОРОВИЧ

Е. В. БРУЯЦКИЙ  
А. Г. КОСТИН, Е. И. НИКИФОРОВИЧ

# МЕТОД КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ



КИЕВ МИЛЕНИУМ 2016

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ ГИДРОМЕХАНИКИ

Е. В. БРУЯЦКИЙ  
А. Г. КОСТИН, Е. И. НИКИФОРОВИЧ

---

МЕТОД КОНТРОЛЬНОГО  
ОБЪЕМА В  
КОМПЬЮТЕРНОЙ  
ГИДРОДИНАМИКЕ

КИЕВ МИЛЕНИУМ 2016

Метод контрольного объема в компьютерной гидродинамике. Бруязкий Е.В, Костин. А.Г., Никифорович Е.И. – Киев.: «Міленіум», 2016. - 520 с.

В монографии представлены основные уравнения гидродинамики и тепломассо-обмена в конечно-объемной и дифференциальной формах. В ней подробно рассматривается численный метод их интегрирования при ламинарном и турбулентном режимах течения несжимаемой однородной или стратифицированной жидкости. Особое внимание уделено моделированию такого класса течений, которые не охватываются концепцией пограничного слоя. К их числу относятся, например, отрывные течения с рециркуляциями и вихреобразованиями, течения о вынужденной и термогравитационной конвекции в ограниченных областях.

При построении конечно-разностных аналогов исходных уравнений гидромеханики и переноса тепла акцент сделан на применение метода контрольного объема к основным интегральным законам сохранения массы, импульса и энергии. Такой подход и использование разнесенных сеток обеспечивает консервативность конечно- разностной схемы системы уравнений движения жидкости в переменных скорость-давление. В книге подробно рассмотрены основные принципы и примеры расчетов сложных течений, иллюстрирующие возможности рассматриваемого метода.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Метод контрольного об'єму в комп'ютерній гідродинаміці. Бруязький Є.В., Костін О.Г., Никифорович Є.І. - Київ.: «Міленіум», 2016. - 520 с.

У монографії представлені основні рівняння гідродинаміки і тепломасообміну в кінцево-об'ємній та диференційній формі. В ній докладно розглядається чисельний метод їх інтегрування при ламінарному та турбулентному режимах течії нестиглої однорідної або стратифікованої рідини. Особливу увагу приділено моделюванню такого класу течій, які не охоплюються концепцією пограничного шару. До їх числа відносяться, наприклад, відривні течії з рециркуляціями та вихроутвореннями, течії про вимушену та термогравітаційну конвекції у обмежених областях.

При побудові кінцево-різницевих аналогів вихідних рівнянь гідромеханіки та переносу тепла акцент зроблено на застосування методу контрольного об'єму до основних інтегральних законів збереження маси, імпульсу і енергії. Такий підхід та використання рознесених сіток забезпечує консервативність кінцево-різницевої схеми системи рівнянь руху рідини у змінних швидкість-тиск. В книзі докладно розглянуті основні принципи і приклади розрахунків складних течій, які ілюструють можливості методу який розглядається.

Для наукових працівників, викладачів, аспірантів та студентів відповідних спеціальностей.

*Утверждена к печати ученым советом Института гидромеханики НАН Украины (протокол № 4 от 25 марта 2014 г.*

Ответственный редактор д. ф.-м. н., проф., чл.-к. НАН Украины,  
заслуженный деятель науки и техники Е. И. Никифорович

Рецензенты: д. ф.-м. н., проф., чл.-к. НАН Украины Г. А. Воробаев;  
д. т. н., проф. Е. А. Шквар

© Е. В. Бруязкий, А.Г. Костин,  
Е.И. Никифорович , 2016  
© «Издательство «Міленіум», 2016

**ISBN 978-988-9184**

*Окружающий нас мир содержит такие субстанции  
как вода и воздух - это два величайших чуда  
творения природы, которые обеспечивают  
существование жизни на планете Земля*

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Гидродинамика является одним из разделов физики, в котором широко и успешно используется математическое моделирование для изучения законов движения жидкостей и газов с целью получения новых знаний и их систематизации.

Постоянный интерес различных исследователей к проблеме взаимодействия жидкости и газа с обтекаемой поверхностью в условиях ламинарного и турбулентного режимов течения обусловлен значительными трудностями определения сил гидродинамического сопротивления и процессов теплообмена между движущейся жидкостью и стенкой. Вследствие сложности рассматриваемых прикладных задач в различных областях гидродинамики, судостроении, машиностроении и аэродинамике они решаются экспериментальными, теоретическими и численными методами. В последние годы успехи в численном решении широкого круга прикладных задач гидроаэродинамики, газовой динамики, теплофизики, метеорологии и геофизики во многом обязаны развитию компьютерных технологий. Параллельно с этим совершенствовались модели турбулентных течений и численные схемы решения нелинейных уравнений движения жидкости и развивались нетрадиционные подходы к построению дискретных аналогов полной системы уравнений гидротермодинамики для задач не подпадающих под концепцию пограничного слоя, то есть при наличии вихревой и циркуляционной структуры течений. Один из этих подходов связан с развитием «метода контрольного объема» в компьютерной гидродинамике.

Суть повышенного интереса к этому методу на современном этапе развития гидродинамики обусловлена тем, что поскольку фундаментальные законы сохранения механики сплошных сред справедливы для любого контрольного объема, мысленно выделенного в жидкости, то они могут быть применены и для произвольной элементарной ячейки расчетной сетки. Такой путь открывает возможность построения дискретных аналогов самих интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии, а не дифференциальных уравнений Навье-Стокса, являющихся их следствием. Благодаря такому подходу произошли существенные изменения в проблеме создания эффективных численных методов интегрирования уравнений



гидродинамики и теплообмена. При этом удастся построить консервативные разностные схемы и свести задачу расчета параметров течения и переноса тепла к решению систем алгебраических уравнений, являющихся конечно-разностными аналогами общих законов сохранения в механике сплошных сред.

К настоящему времени в мировой литературе появилось большое количество журнальных публикаций посвященных различным аспектам этой проблемы. В связи с этим, назрела необходимость обобщения накопленного опыта численного решения задач гидродинамики и теплообмена с помощью «метода контрольного объема».

Цель данной монографии состоит в том, чтобы ознакомить читателя с основными формами уравнений механики сплошных сред и эффективным методом их численного решения в объеме достаточном для проведения самостоятельных численных исследований по проблемам течения вязкой жидкости. В соответствии с этим был определен круг вопросов, подлежащих рассмотрению. Нам хотелось чтобы они представляли интерес для научных работников в различных областях прикладной гидромеханики, применительно к решению разнообразных задач силового и теплового взаимодействия жидкости с обтекаемыми поверхностями в условиях ламинарного и турбулентного режимов течения.

К сожалению, достигнутый к настоящему времени уровень знаний не дает возможности создать законченную теорию турбулентных течений. Многие вопросы этого раздела гидродинамики пока разработаны еще недостаточно для их адекватного математического моделирования. Однако, несмотря на это, в настоящее время стало очевидно, что определенные успехи в этом направлении уже достигнуты и позволяют разработать новую альтернативную модель турбулентных течений и эффективный алгоритм ее численной реализации.

Важным достоинством разработанного численного метода расчета основных гидродинамических параметров движения жидкости является его консервативность по массе, импульсу и энергии, а порядок исходной системы уравнений оказывается на единицу меньше по сравнению с традиционным подходом вследствие использования уравнений движения жидкости в интегральной, а не в дифференциальной форме. Изложению основ этого общего метода в современной модификации и посвящена настоящая книга. В ней большое внимание уделено построению дискретных аналогов основных интегральных соотношений, выражающих законы сохранения массы, импульса и энергии. При этом подробно рассмотрен класс ламинарных и турбулентных течений. В последнем случае приводится новая модель турбулентных течений и метод их расчета.

Достаточно высокий теоретический уровень изложения материала сочетается с простотой и его доступностью для практического

использования специалистами, занимающимися расчетом сложных течений однородных и стратифицированных сред.

Структура книги состоит из предисловия, введения и десяти глав. Нумерация рисунков и формул приводится отдельно по главам, а список литературы единый для всей книги. Оглавление книги достаточно полно раскрывает ее содержание. Естественно, что многие интересные вопросы этой общей проблемы оказались незатронутыми. Однако мы надеемся, что этот недостаток читатель сможет компенсировать, обратившись к другим литературным источникам.

Монография написана по результатам многолетних расчетных исследований, выполненных в Институте гидромеханики Национальной академии наук Украины (Киев). Содержание книги обсуждалось авторами коллективно. Текст книги написан Е. В. Бруяцким. Обзорный материал по ранним алгебраическим и дифференциальным моделям турбулентных течений заимствован из уже опубликованной монографии Е. В. Бруяцкого (1986 г.) [42] и с некоторыми дополнениями включен в книгу в виде глав 5 - 8. Численные расчеты и компьютерная графика выполнены А. Г. Костиным. Постановка задач и анализ результатов осуществлялись авторами совместно. Общая редакция книги выполнена Е. И. Никифоровичем.

В заключение авторы благодарят сотрудников Института гидромеханики НАН Украины к. ф.-м. н. Я. В. Загуменного, к. ф.-м. н. Н. В. Розумнюк, к. ф.-м. н. В. С. Сирого за полезное обсуждение некоторых вопросов при решении конкретных задач.

Считаем приятным долгом отметить помощь Т. П. Градобоевой, оказанную при наборе рукописи на компьютере.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $a, a_t$  — коэффициенты молекулярной и турбулентной температуропроводности;
- $b$  — геометрический поперечный размер;
- $B$  — безразмерный геометрический размер ( $B = b/h$ );
- $Br_v$  — турбулентное вихревое число Бруацкого-Шмидта ( $Br_v = \nu_t / D_v$ );
- $c, C$  — концентрация, безразмерная концентрация вещества ( $C = c/c_0$ );
- $c_p, c_T$  — теплоемкости жидкости;
- $C_p$  — коэффициент давления ( $C_p = 2p/(\rho u_0^2)$ );
- $C_x$  — коэффициент гидродинамического сопротивления;
- $C_y$  — коэффициент гидродинамической подъемной силы;
- $D$  — коэффициент молекулярной диффузии;
- $D_x, D_y$  — коэффициенты турбулентной диффузии;
- $e$  — внутренняя энергия единицы массы;
- $E$  — диссипативная функция;
- $\bar{E}$  — вязкая диссипация;
- $E'$  — пульсация вязкой диссипации;
- $\vec{e}_i$  — единичные орты;
- $Ec$  — число Эккерта;
- $Eu$  — число Эйлера;
- $f$  — произвольная функция, частота, свободный член в уравнении Пуассона;
- $\vec{F}$  — главный вектор массовых сил;
- $Fr$  — плотностное число Фруда ( $Fr = u_0/(N_b L)$ );
- $F_i$  — вектор объемных сил;
- $G^U, G^V$  — вспомогательные функции;
- $Gr$  — число Грасгофа;
- $g$  — ускорение силы тяжести;
- $H$  — теплосодержание, безразмерный линейный размер;
- $h$  — ширина канала, высота препятствия;
- $hx_j, hy_i$  — шаги расчетной сетки;
- $k_R$  — коэффициент генерации вихревой псевдовязкости;
- $k$  — энергия турбулентности;
- $L$  — масштаб турбулентности, длина канала;
- $l$  — длина пути смешения, геометрический продольный размер;
- $m$  — параметр стратификации;
- $m_i$  — компоненты турбулентного потока вещества;

- $N_b$  — частота Брента-Вяйсаля;  
 $P$  — безразмерное давление ( $P = p / \rho u_0^2$ );  
 $\vec{P}$  — вектор поверхностных сил ;  
 $Pe$  — число Пекле;  
 $Pr$  — число Прандтля;  
 $p$  — мгновенное значение давления;  
 $p'$  — пульсации давления;  
 $P_{j,i}$  — сеточная функция давления;  
 $P_{ik}$  — тензор вязких напряжений;  
 $q_n$  — поток теплоты;  
 $Q_v$  — источник порождения вихревой псевдовязкости;  
 $q_{nk}$  — турбулентный поток теплоты;  
 $Q$  — источник теплоты, коэффициент прогонки;  
 $Q_1$  — источник вещества;  
 $Ra$  — число Релея;  
 $R_{j,i}$  — сеточная функция вихревой турбулентной псевдовязкости  
 ( $R = \nu_t / \nu$ );  
 $Re$  — число Рейнольдса осредненного течения ( $Re = u_0 \cdot h / \nu$ );  
 $Ri, Rf$  — интегральное и динамическое числа Ричардсона ;  
 $Re^+$  — турбулентное число Кармана ( $Re^+ = \nu_* h / \nu$ ).  
 $Ra$  — число Релея;  
 $R_{uv}$  — корреляционная функция;  
 $s$  — соленость;  
 $S$  — безразмерная соленость ( $S = s / s_0$ );  
 $S^\Phi$  — источниковое слагаемое;  
 $S_0, S_1, S_2$  — разностные сетки;  
 $S_U, S_V, S_p$  — дисперсии соответствующих компонентов скорости и давления;  
 $Sh$  — число Струхала ( $Sh = f \cdot h / u_0$ );  
 $T_{j,i}$  — сеточная функция температуры;  
 $T_b$  — период плавучести;  
 $u_m$  — локальная осевая скорость в канале ;  
 $U_m$  — безразмерная осевая скорость ( $U_m = u_m / u_0$ );  
 $u_0$  — среднерасходная скорость в канале, масштаб скорости ;  
 $U$  — продольная компонента безразмерной скорости ( $U = u / u_0$ );  
 $V$  — поперечная компонента безразмерной скорости ( $V = v_t / u_0$ );

$U_{j+1/2,i}$  — сеточная функция безразмерной продольной скорости;  
 $V_{j,i+1/2}$  — сеточная функция безразмерной поперечной скорости;  
 $U_*$  — динамическая скорость ( $U_* = \tau_w / \rho$ );  
 $V_*$  — динамическая безразмерная скорость ( $V_* = U_* / u_0$ );  
 $U_i$  — компоненты мгновенных значений скорости ( $i = \overline{1, 3}$ ) ( $u, v, w$ );  
 $U'_i$  — компоненты пульсационных значений скорости;  
 $x, y, z$  — декартовы координаты;  
 $X_c$  — длина циркуляционной зоны ( $X_c = x_c / h$ );  
 $X_p$  — длина зоны подпора ( $X_p = x_p / h$ );  
 $\alpha$  — полярный угол;  
 $\beta$  — коэффициент объемного расширения;  
 $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера;  
 $\text{æ}$  — постоянная Кармана;  
 $\varepsilon$  — малый параметр, скорость диссипации турбулентной энергии;  
 $\varphi$  — диссипативная функция;  
 $\Phi$  — гидродинамическая субстанция, безразмерная диссипативная функция;  
 $\overline{\Phi}_{ik}, \Phi'_{ik}$  — тензоры осредненных и пульсационных скоростей деформации;  
 $\lambda$  — коэффициент теплопроводности, коэффициент сопротивления;  
 $\mu$  — коэффициент динамической вязкости;  
 $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  
 $\Gamma = \tau_{ik}$  — тензор вихревых турбулентных напряжений;  
 $\Pi = p_{ik}$  — тензор вязких напряжений, порождение турбулентной энергии;  
 $\pi$  — суммарный тензор вязких и вихревых напряжений ( $\pi = \Pi + \Gamma$ );  
 $\theta$  — безразмерная температура ( $\theta = (T - T_1) / (T_2 - T_1)$ );  
 $\rho$  — плотность жидкости;  
 $\sigma$  — элемент поверхности;  
 $\tau$  — элемент объема, безразмерное время, турбулентное трение;  
 $\omega, \Omega$  — вихрь скорости, площадь;  
 $\psi$  — функция тока;  
 $\nabla$  — оператор Набла;  
 $\Lambda$  — параметр стратификации;  
 $\Re, Q$  — коэффициенты прогонки;  
 $\mathcal{R}$  — корреляционная функция Тейлора;  
 $\mathcal{R}_L(\tau)$  — автокорреляционная функция пульсаций скорости;



# ВВЕДЕНИЕ

Методу «контрольного объема» принадлежит важная роль в развитии как классической, так и современной вычислительной гидромеханики. Действительно, если обратиться к истории становления такого раздела знаний как гидроаэродинамика, то следует отметить, что она прошла большой и сложный путь своего развития. Ее истоки формировались еще в древние времена. Некоторые законы гидростатики были сформулированы Архимедом (277–212 до н.э.). Большой вклад в развитие основ гидромеханики был сделан Галилеем (1564–1642), Паскалем (1623–1662), Гюйгенсом (1629–1695). Создание первых идей механики жидкости и газа было связано с рассмотрением вопросов взаимодействия жидкой и газообразной среды с твердой поверхностью. Вопросы о сущности сопротивления реальной среды и установления законов сопротивления были предметом изучения многих древних мыслителей, и долгое время представляли непреодолимые трудности. Лишь И. Ньютону (1642–1727) удалось приблизиться к правильному пониманию природы сопротивления. Особое значение имело установление Ньютоном основных законов сохранения и уравнений динамики, обобщение которых на жидкость привело к образованию в теоретической механике самостоятельного раздела – гидродинамики.

Работы Эйлера (1707–1783), Бернулли (1700–1782) и Даламбера (1717–1783) привели к завершению большого этапа развития гидродинамики идеальной жидкости. Затем появились труды Лагранжа (1736–1813) и Коши (1789–1857), посвященные потенциальным плоским течениям, теории волн малой амплитуды и др. Основы учения о движении вязкой жидкости были заложены в 1821 г. французским ученым Навье и получили свое завершение в 1845 г. в работах Стокса (1819–1903).

В настоящее время все жидкости и газы в гидродинамике принято называть сплошными средами, которые на молекулярном уровне представляют собой совокупность разного рода молекул и атомов. Эти частицы находятся в постоянном хаотическом движении и они взаимодействуют друг с другом. Однако, общая механика сплошных сред обычно не рассматривает силы внутреннего взаимодействия частиц на молекулярном уровне, а рассматривает динамику сплошной среды при воздействии внешних силовых и тепловых полей на макроуровне. При этом

предполагается, что жидкая или газообразная среда состоит из элементарных объемов, в каждом из которых имеется много более мелких частиц. Совокупность этих объемов, непрерывно заполняющих изучаемую среду, представляет собой непрерывный континуум.

Особенность механики сплошных сред в отличие от механики твердых тел состоит в том, что она изучает деформируемые элементарные объемы. В силу сложности проблемы для описания и решения прикладных задач гидродинамики широко используется математическое моделирование. Ниже будут рассматриваться дискретная и непрерывная модели сплошной среды с позиций макроскопической теории.

Основным свойством жидких и газообразных сред является их непрерывность и значительная текучесть. Этих двух свойств макромоделей жидкости оказалось достаточно для установления уравнения равновесия жидкости и общих законов ее движения, а замечательный прием выделения в жидкости элементарного «контрольного объема» послужил основой построения балансовых соотношений для основных законов сохранения массы, импульса и энергии. После того как были сформулированы основные постулаты, выражающие интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии, дальнейший существенный шаг в математической модели движения жидкости состоял в переходе от конечно-объемной формы общих интегральных законов сохранения к их дифференциальной форме. Осуществив предельный переход от конечного объема к точке, были получены дифференциальные уравнения динамики идеальной и вязкой сплошной среды.

Переход от конечно-объемной модели к дифференциальной форме исходных уравнений открыл возможности их эффективного аналитического решения путем использования мощного аппарата непрерывных функций и большого арсенала методов решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Таким образом, для математического моделирования и описания движения жидкости или газа были построены две основных модели. Первая, дискретная конечно-объемная модель исходных уравнений гидродинамики, которая основана на рассмотрении основных интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии применительно к выделенному контрольному объему жидкости  $\tau$ , ограниченному поверхностью  $\sigma$ . Полученные при этом интегральные балансовые соотношения, записанные в конечно-объемной форме, являются исходными уравнениями дискретной модели гидродинамики.

Вторая, классическая дифференциальная модель гидродинамики, основана на системе дифференциальных уравнений Навье-Стокса, полученных в результате предельного перехода от конечного контрольного объема к точке.

С тех пор прошло много десятков лет. Однако, несмотря на это, уравнения движения реальной вязкой жидкости до сих пор изучены еще недостаточно. Для них отсутствуют теоремы существования и единственности решения даже при значительных допущениях, а решение конкретных задач обычно осуществляется в приближенной постановке как в случае ламинарных, так и турбулентных течений.

В литературе известно очень ограниченное число случаев допускающих аналитическое интегрирование уравнений Навье-Стокса. Существенной особенностью уравнений Навье-Стокса является их нелинейность и наличие малого параметра при старшей производной, которые в сочетании с пространственным и нестационарным характером движения сплошной среды, позволяют обнаруживать огромное богатство физических явлений и эффектов, присущих природе. В силу сложности интегрирования уравнений Навье-Стокса, широко известны частные случаи этих уравнений в форме: уравнений Стокса и Озеена – для малых чисел Рейнольдса, уравнений в форме Эйлера – для идеальной жидкости, уравнений Прандтля пограничного слоя – для больших чисел Рейнольдса и уравнений свободной конвекции Буссинеска – для стратифицированных течений. Однако они позволяют смоделировать лишь часть гидродинамических явлений и эффектов. Поэтому более глубокое понимание природы и механизма процессов перемешивания, сопротивления, вихреобразования и теплообмена в различных условиях, возможно лишь на основе анализа и решения системы полных уравнений Навье-Стокса, являющихся следствием основных законов сохранения массы, импульса и энергии.

В настоящее время очевидно, что аналитические методы позволяют рассчитывать лишь очень ограниченный класс течений, да и то в приближенной постановке. Особенно большой эмпиризм присутствует в расчетах турбулентных режимов течения. Эти обстоятельства вызывают необходимость постоянного совершенствования моделей и методов решения задач гидродинамики, газовой динамики и теплообмена.

Традиционный способ численных исследований в области компьютерной гидродинамики основывается, как известно, на интегрировании дифференциальных уравнений Навье-Стокса или Рейнольдса. Использование, например, метода сеток и конечно-разностных аппроксимаций исходных дифференциальных уравнений позволяет построить дискретный аналог исходных уравнений в виде системы разностных алгебраических уравнений, которая может быть решена известными итерационными методами. Однако, такой подход к решению даже уравнений Навье-Стокса, не говоря уже об уравнениях Рейнольдса, очень сложно реализовать в общем случае. Это связано в первую очередь с нелинейностью исходных уравнений, наличием малого параметра перед старшими производными и особыми свойствами монотонности разностных схем, их консервативностью, устойчивостью и экономичностью. А

построение разностных схем с такими свойствами для системы параболо-эллиптических уравнений является очень сложной задачей. По этой причине численные исследования часто проводят в рамках не полных уравнений Навье-Стокса, а с помощью их приближенных форм в виде уравнений Эйлера для идеальной жидкости или уравнений Прандтля для пограничного слоя – в случае вязкой жидкости. Такой подход оказывается удовлетворительным при рассмотрении определенного класса задач, в которых в таком приближении удастся учесть главные особенности исследуемого течения, а второстепенными деталями можно обоснованно пренебречь [35, 109, 118, 143].

Однако во многих прикладных задачах существует интерес к более тонкой вихревой структуре течений, особенности которых невозможно описать в рамках приближенных уравнений Эйлера или Прандтля. Поэтому существует настоятельная необходимость обращения к решению полных нестационарных уравнений Навье-Стокса.

Бурное развитие компьютерной техники и самих вычислительных методов в принципе позволяет достигнуть высоких результатов в области численного интегрирования системы полных дифференциальных уравнений Навье-Стокса. Однако, несмотря на наличие корректной постановки задачи, кажущаяся простота решения этих уравнений в общем случае оказывается обманчивой. Принципиальные трудности решения связаны не только с нелинейностью исходных уравнений, а и с зависимостью кинематической структуры течения и процессов перемешивания от такого основного гидродинамического параметра как число Рейнольдса, рост которого приводит к потере устойчивости течения и его переходу от ламинарного режима течения к турбулентному. Кроме того, в случае несжимаемой однородной жидкости возникает проблема способа расчета давления, так как оно не является основной переменной в исходных уравнениях, и для него нет отдельного уравнения типа уравнения состояния как в случае сжимаемых сред. В то же время совершенно очевидно, что поля скорости и давления должны быть согласованными. Особые трудности возникают и при дискретизации нелинейных конвективных слагаемых в исходных уравнениях движения сплошной среды.

Многие десятилетия казалось, что метод контрольного объема выполнил свое предназначение в этой области знаний и в какой-то степени исчерпал себя. Однако благодаря появлению и развитию электронной вычислительной техники (ЭВМ), метод контрольного объема (МКО), приобрел новое содержание. Мощный прогресс в области компьютерных технологий, которые в силу особенностей электронной техники, оперируют только с дискретными величинами, привел к возрождению интереса к конечно-объемным моделям гидродинамики. Суть этого интереса обусловлена тем, что исходные балансовые соотношения для потоков массы, импульса и энергии справедливы для любого контрольного объема в

жидкости. Поэтому если их записать для элементарной ячейки (дискретного объема) расчетной области, то появляется возможность построения конечно-разностных аналогов непосредственно для интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии. Благодаря такому подходу и совершенствованию компьютерной техники произошли существенные изменения в проблеме создания эффективных численных методов интегрирования уравнений гидродинамики и теплообмена. При этом удается построить полностью консервативные разностные схемы и задача расчета параметров течения сводится к решению систем не дифференциальных или интегральных, а алгебраических уравнений, являющихся разностными аналогами основных законов сохранения. Изложению и развитию этого подхода и посвящена данная работа. Естественно, что при этом нами широко были использованы результаты, полученные нашими предшественниками в этом направлении. Перечислить их всех практически очень сложно, а назвать только часть из них будет некорректно. Поэтому многие из них будут названы ниже в процессе изложения материала книги.

В настоящее время, численное моделирование движения вязкой жидкости на основе уравнений Навье-Стокса сформировалось как самостоятельный раздел механики жидкости и газа, называемый **компьютерной гидродинамикой**. Развитие этого направления было вызвано необходимостью решения актуальных гидродинамических задач, для которых аналитические методы неприменимы. Сложность инженерных задач в различных областях техники и промышленности, для которых экспериментальные исследования становятся слишком дорогими или даже неосуществимыми практически, с одной стороны, и бурное развитие и удешевление компьютерной техники, с другой стороны, привели к широкому развитию методов численного интегрирования уравнения Навье-Стокса. Однако, несмотря на имеющиеся достижения в области экспериментальной и компьютерной гидродинамики, структура течений и модели процессов перемешивания в сложных устройствах по-прежнему остаются в центре внимания исследователей. Разработка эффективных методов решения прикладных задач в области механики жидкости, газа и теплообмена развивается в основном по двум направлениям, связанным с разработкой пакетов прикладных программ на базе мощных современных компьютеров и совершенствованием математических моделей процессов переноса, перемешивания, турбулентности, теплообмена, горения, кавитации, химических реакций и др.

Как правило, информационной основой расчетного процесса служат программы, написанные на одном из языков программирования. Современные специализированные пакеты прикладных программ представляют собой сложные многокомпонентные модульные системы. Пакеты включают в себя каталоги математических моделей исследуемых физических процессов, из элементов которых строится алгоритм решения



рассматриваемой задачи. Пакеты ориентируются на определенную компьютерную базу. Современные достижения в области персональных компьютеров (ПК) дали возможность создавать пакеты на их основе, используя при этом увеличенный объем оперативной памяти.

Благодаря созданию таких пакетов программ появилась принципиальная возможность решать сложные прикладные суперзадачи, однако, время их решения составляет до десятков суток, что существенно ограничивает эффективность их практического использования в проектно-конструкторской деятельности. Решение этой проблемы основывается на идее распараллеливания вычислительных операций и разработке пакетов под многопроцессорные системы кластерного типа, что позволяет многократно сократить время решения задачи.

Казалось бы, наличие таких пакетов и так называемых «солверов» решает все проблемы и позволяет во многих случаях избежать проведения дорогостоящих экспериментов. К сожалению, на самом деле, это не так, потому что используемые каталоги математических моделей далеки от совершенства, а их разработка и усовершенствование является постоянным предметом научных исследований соответствующих специалистов. При этом важнейшими вопросами являются адекватность математических моделей и физических явлений, а также установление пределов их применимости. Ответы на эти вопросы связаны в первую очередь с надежным тестированием моделей и пакета программ в целом на совокупности задач, обычно модельного плана, при наличии для них надежных экспериментальных данных.

Численное исследование гидродинамики и теплообмена на основе решения дифференциальных уравнений Навье-Стокса в основном получили развитие, начиная с 60-х годов XX века. Большой вклад в создание научных школ этого направления внесли К.И. Бабенко [14], О.М. Белоцерковский [24, 25], С.К. Годунов [86, 87], Г.И. Марчук [140], А.А. Самарский [181, 182], Н.Н. Яненко [228] и другие. Важнейшие результаты этих исследований опубликованы не только в периодической литературе, но и в целом ряде монографий [7, 17, 18, 20 - 22, 34, 37, 59, 61, 73, 90, 107, 142, 154, 157 - 159, 161, 165, 173, 177, 178, 182, 196, 208, 220 – 223, 228], в каждой из которых приведена обширная библиография. Среди огромного количества численных схем и методов решения задач гидромеханики особый интерес инженеров и научных работников вызывает проблема гидродинамики плохообтекаемых тел и конструкций, связанных с расчетом отрывных и циркуляционных течений, силового воздействия потока жидкости на тело, процессами перемешивания, вихреобразования, гидродинамического сопротивления, кавитации, теплообмена, горения и т.д. Аналитические и экспериментальные способы определения аэрогидродинамических сил действующих на тело даже с простой геометрией достаточно сложны и требуют значительных затрат средств и времени. Поэтому численное

моделирование и создание эффективных методов расчета течений такого класса является актуальной задачей современной гидроаэродинамики.

Во многих практически важных случаях обтекаемое тело или конструкция, характеризуется наличием на ее поверхности плохообтекаемых геометрических неоднородностей, размеры которых много меньше характерного размера тела. Расчеты обтекания полной конструкции, типа самолета или ракеты, торпеды, подводной лодки представляют собой суперсложную задачу, поэтому отдельные исследователи или малые научные коллективы обычно рассматривают лишь отдельные фрагменты конструкции или неоднородности с относительно простой геометрией.

При обтекании канонических тел (цилиндр, сфера, крыло) характерно отсутствие фиксированного положения области отрыва пограничного слоя на теле и его зависимость от числа Рейнольдса. Предположение о большом удлинении цилиндрических тел или крыла позволяет свести задачу к двумерному обтеканию плоского контура. Большинство известных работ в этой области рассматривают обтекание цилиндров с простейшей круговой и квадратной формой поперечного сечения. При сравнительно небольших числах Рейнольдса результаты вычислений хорошо совпадают с экспериментальными данными, что является следствием сохранения ламинарным течением его устойчивости во всей рассматриваемой области. Однако с ростом числа Рейнольдса отрывающийся пограничный слой теряет устойчивость, и в следе за цилиндром возникают периодические колебания, вихри и трехмерная турбулентность с большим разнообразием частот, что значительно осложняет процесс расчета таких течений.

Информация о структуре течения в вихревом следе за плохообтекаемым телом или фрагментом конструкции нужна во многих случаях, в том числе для оптимизации проектирования технических систем различного назначения, имеющих плохообтекаемые детали, с целью управления сопротивлением или размещением деталей в условиях гидродинамической интерференции.

Принято считать тело или его модельный фрагмент плохообтекаемым, если происходит отрыв пограничного слоя или образование струйно-отрывных и вихревых течений. Следствием этих процессов является увеличение профильного и индуктивного сопротивления и возникновение боковых периодических сил, обусловленных изменением распределения давления за телом или уступом, благодаря воздействию вихревого следа. Типичный вихревой след за телом состоит из вихревой дорожки, образованной дискретными вихрями, периодически отрывающимися от тела, как, например, вихревые дорожки Кармана.

Явления отрыва потока рассматривались рядом исследователей и опубликованы в значительном количестве различных работ. Среди них отметим монографии П. Чжена [218], С.М. Белоцерковского, М.И. Ништа [31],

Л.В.Гогиша, Г.Ю. Степанова [85], И.А. Белова [20 - 22], Ю. А. Быстрова и др. [59]. Вследствие многообразия и сложности отрывных течений результаты исследований основываются на различных подходах. Среди них широко известны экспериментальные методы, асимптотические методы, методы интегральных соотношений и т.д., а в последние годы они решаются численными методами.

Наряду с указанным практически важным классом внешних задач обтекания тел с образованием возвратных рециркуляционных течений, существует большой класс течений о вынужденной и термогравитационной конвекции в ограниченных областях, задачи вентиляции различных помещений, течения в каналах с резко изменяющейся геометрией типа уступов, каверн и т.п. Анализ таких течений также требует рассмотрения полных уравнений Навье-Стокса, решение которых для практически интересных случаев возможно лишь численными методами.

Выбор того или иного конкретного численного метода решения задач гидродинамики определяется многими объективными и субъективными факторами. Среди них следует отметить особенности данного класса задач: сжимаемая или несжимаемая жидкость, тип исходных уравнений, требования, предъявляемые к точности расчета в конкретной ситуации, возможности вычислительной техники и квалификация разработчиков.

Метод численного моделирования обычно состоит из следующих этапов:

- выбор физической модели исследуемого явления и совокупности параметров определяющих его особенности;
- выбор математической модели и системы исходных уравнений, адекватно описывающих исследуемое явление;
- формулировка начально-краевых условий задачи;
- дискретизация исходной системы уравнений;
- разработка и отладка комплекса программ численного решения задачи;
- тестирование конечно-разностной схемы;
- выполнение расчетов, анализ и графическая обработка результатов расчета.

Содержание каждого из перечисленных этапов зависит от класса задач и требований к полноте и точности описания физического процесса.

Трудности получения численных решений уравнений Навье-Стокса существенным образом связаны с геометрией области течения и величиной числа Рейнольдса  $Re$ . При численном решении уравнений Навье-Стокса методом конечных разностей используются как явные, так и неявные разностные схемы различных порядков точности. Существенным обстоятельством является условие монотонности разностной схемы, позволяющее адекватно описывать решение как в области малых, так и больших градиентов искомых переменных. Построить монотонную

разностную схему высокого порядка точности достаточно сложно. Явные схемы более простые, но их устойчивость сильно ограничена значением числа Рейнольдса. Неявные схемы более устойчивы, но при симметричной аппроксимации конвективных слагаемых уравнений движения связаны с жестким условием ограничения на величину шага сетки, а неявные схемы с несимметричными аппроксимациями конвективных членов с первым порядком точности, способствуют появлению значительной сеточной вязкости, сравнимой с молекулярной.

Однако основная принципиальная трудность решения полных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости связана с расчетом поля давлений, так как для его определения нет отдельного уравнения и неизвестны граничные условия. При этом поля скоростей и давления должны быть согласованными. Именно этому вопросу в нашей работе будет уделено особое внимание.

В настоящее время для решения уравнений Навье-Стокса существуют и используются несколько десятков разновидностей разностных схем. Поиски наилучших из них интенсивно продолжаются и в значительной мере опираются на опыт разработчиков и сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными. Однако, несмотря на существование обширной литературы по численным методам решения задач гидродинамики и теплообмена, многие исследователи продолжают испытывать определенные трудности при решении конкретных прикладных задач. Эти трудности связаны с целым рядом различных факторов. Поэтому при написании этой книги авторы поставили перед собой цель последовательно изложить один из эффективных и достаточно универсальных методов численного решения уравнений гидродинамики и теплообмена несжимаемой жидкости для сложных течений с рециркуляциями. Приведенный в книге метод основан на использовании основных интегральных законов сохранения в механике жидкости и построении их дискретных аналогов методом «контрольного объема», который адаптирован к расчету как ламинарных, так и турбулентных режимов течений.

Хотя наше рассмотрение в основном будет основываться на допущении о двумерности задачи, однако обобщение рассматриваемого метода на трехмерный случай вполне очевидно в силу использования естественных физических переменных скорость-давление, а не функции тока и завихренности.

Предполагается, что читатель знаком с основными уравнениями гидротермодинамики и основами численных методов. Поэтому, наряду с кратким изложением этих вопросов, главное внимание сосредоточено на способе дискретизации исходных, но не дифференциальных уравнений Навье-Стокса, а интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии с помощью метода контрольного объема. Следуя этому подходу,

строятся консервативные конечно-разностные схемы для законов сохранения, а затем, подобно методу МАС, с помощью уравнения неразрывности выводится разностное уравнение типа Пуассона для определения давления. Предлагаемый метод обладает простотой и позволяет эффективно решать широкий класс внутренних и внешних задач, для которых характерно существование возвратных течений, явлений вихреобразования, отрыва потока и наличие объемных массовых сил гравитационного или другого происхождения. Этот класс задач имеет большое практическое значение при создании новой техники, атомной энергетики и в других отраслях с химической технологией, где уровень исследований достаточно высок.

В целях удобства и наглядности, прежде чем перейти к дискретизации законов сохранения и численному методу решения дискретных уравнений для ламинарных и турбулентных течений, развиваемый способ дискретизации подробно рассматривается на более простом примере дискретизации дифференциального уравнения переноса тепла методом «контрольного объема». В дальнейшем, наряду с рассмотрением особенностей моделирования ламинарных и турбулентных течений, включая проблему замыкания и модели турбулентности, приводится техника получения конечно-разностных аналогов уравнений движения жидкости и метод их численного решения. Методика доведена до такой степени полноты и универсальности, что читатель может фактически приступить к составлению программы расчета. В то же время авторы сознают, что написание книги по проблемам движения вязкой жидкости и ее взаимодействия с обтекаемой поверхностью в условиях турбулентного режима течения весьма трудная задача и естественно мы не могли полностью охватить даже часть работ в этой области знаний. Поэтому вполне возможно, что она имеет ряд недостатков.

Для оценки точности и надежности, как метода, так и разностной схемы проводились методические расчеты по решению различных тестовых задач. При нашем подходе стационарное решение задачи, если оно существует, получается в результате установления, поэтому процесс решения состоит из многократного повторения шагов по времени. При этом расчет одного временного цикла является единым, а не разбивается на несколько этапов, как это принято в других методах. Кроме того, следует подчеркнуть, что все существующие модели турбулентности до сих пор делились на две категории: к первой из них относятся модели, которые ограничены изучением осредненных характеристик потока; ко второй категории относятся те модели и методы расчета, которые позволяют изучать статистические особенности структуры турбулентных течений. Очевидно, что наиболее успешной должна быть модель турбулентности, которая позволяет с единых позиций рассчитывать как мгновенные характеристики



нестационарного турбулентного течения, так и осредненные с пульсационными статистическими параметрами структуры потока.

В заключение отметим, что существует огромное множество вариантов создания алгоритмов и программ решения задач гидродинамики и теплообмена различной универсальности и общности. Кроме того, отдельно должны быть рассмотрены физические и разностные начально-краевые условия задачи. Поэтому здесь естественно обсуждаются лишь основные принципы, которые облегчат решение интересующей исследователя задачи.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

### 1.1. Общая система уравнений механики жидкости и газа в интегральной конечно-объемной форме

Механика жидкости и газа является наукой о движении. Для понимания движения жидкости и газа и его математического описания необходимы и достаточны представления о массе, силе, скорости и ускорении, т.е., как и в общей механике. Однако, рассматривая движение жидкости с точки зрения механики сплошной среды в отличие от системы материальных точек, приходится иметь дело с величинами и силами непрерывно распределенными в жидкости. Эта особенность принципиально отличает механику жидкости от механики твердого тела. Для того чтобы определить, что следует понимать под массовой плотностью жидкости или газа, представим себе, что из рассматриваемой движущейся жидкости мысленно выделен некоторый объем  $\tau$  произвольной формы с массой  $m$ , ограниченный поверхностью  $\sigma$ . Возьмем малый объем жидкости  $\Delta\tau$ , содержащий внутри данную точку  $M$  пространства, заполненного жидкостью, и пусть масса этого объема  $\Delta m$ . Тогда определяемая как предел скалярная величина

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau} \quad (1.1)$$

при стягивании объема  $\Delta\tau$  к точке называется плотностью жидкости в точке  $M$ . Из выражения (1.1) следует, что

$$dm = \rho d\tau. \quad (1.2)$$

Движение жидкости характеризуется, прежде всего, скоростями ее частиц. Чтобы определить скорость, рассмотрим частицу, которая в момент времени  $t$  находится в некоторой точке  $M$ , определяемой радиусом-вектором  $r=OM$ . В момент  $t_1$  эта частица переместится в точку  $P$ , определяемую радиусом-вектором  $r'=OP$ . Тогда скорость частицы в точке  $M$  определится вектором

$$\bar{v} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{r' - r}{t_1 - t} = \frac{dr}{dt}.$$

Для вывода основных уравнений движения жидкости и газа достаточно привлечь к рассмотрению физические законы сохранения классической механики, которые по существу построены на нескольких постулатах и имеют нелинейную природу.

Первый из них – **закон сохранения массы**, который справедлив для движений со скоростями, много меньшими скорости света. Физический смысл этого постулата состоит в том, что масса жидкости не зависит от времени. Если  $\rho$  - массовая плотность среды, то масса  $m$  выделенного объема  $\tau$  может быть представлена в виде  $m = \iiint_x \rho d\tau$ . Закон сохранения массы означает

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_x \rho d\tau = 0 \quad (1.3)$$

Если в рассматриваемой сплошной среде имеются взвешенные химически активные компоненты, характеризующиеся массовой концентрацией  $c$  в единице массы смеси, или имеется источник их возникновения, то концентрация может изменяться от точки к точке и зависеть от времени. Наличие переменной концентрации в жидкости обуславливает нарушение условий равновесия и появление в среде диффузионного потока вещества  $\vec{q}_\alpha$ . Если возникающие градиенты концентрации малы то можно считать малыми и градиенты парциального потенциала [127]. Тогда для диффузионного потока  $\vec{q}_\alpha$  (числа частиц, проходящих за 1с через единицу площади воображаемой поверхности) можно использовать градиентный закон Фика и записать, что

$$\vec{q}_\alpha = -D \cdot \text{grad } c = -D \frac{\partial c}{\partial x_k}, \quad (1.4)$$

где  $D$  – коэффициент молекулярной диффузии, а знак минус указывает на то, что поток вещества направлен в сторону уменьшения концентрации вещества.

Выделим мысленно в рассматриваемой движущейся среде объем  $\tau$  ограниченный поверхностью  $\sigma$  и запишем баланс вещества, входящего и выходящего из него в единицу времени за счет механизма диффузии. Тогда очевидно, что общее изменение концентрации вещества в контрольном объеме  $\tau$  будет равно потоку вещества через поверхность  $\sigma$ , то есть

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} c d\tau = - \iint_{\sigma} \vec{q}_a d\sigma. \quad (1.5)$$

Пусть дополнительно в некотором элементе объема  $d\tau$  рассматриваемой среды возникает и исчезает вещество благодаря, например, химическим реакциям или радиоактивному распаду. Обозначим через  $S_1(\vec{r})d\tau$  скорость порождения или исчезновения вещества за 1с в объеме  $d\tau$ , характеризуемом некоторой точкой  $\vec{r}$ .

Величину  $S_1$  называют мощностью источника. Тогда вводя величину  $S_1 d\tau$  в баланс вещества в объеме  $\tau$  вместо соотношения (1.5) имеем

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} c d\tau = - \iint_{\sigma} \vec{q}_a d\sigma + \iiint_{\tau} S_1 d\tau. \quad (1.6)$$

Необходимо подчеркнуть, что величина  $S_1$  имеет объемный характер.

Вторым постулатом служит **закон об изменении количества движения** системы материальных точек, занимающих объем  $\tau$  с массой  $m$ , ограниченный поверхностью  $\sigma$ . Его физический смысл заключается в том, что скорость изменения во времени главного вектора количества движения элементарных масс  $K$  равна сумме главных векторов внешних массовых и поверхностных сил. Этот закон записывается в виде соотношения

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F} + \vec{P}, \text{ или}$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \vec{v} d\tau = \iiint_{\tau} \rho \vec{F} d\tau + \iint_{\sigma} \vec{p}_n d\sigma. \quad (1.7)$$

Здесь  $\vec{K}$  – вектор количества движения массы жидкости  $m$ ,  $\vec{F}$  – вектор внешних массовых сил,  $\vec{p}_n$  – вектор напряжений.

Третьим постулатом служит **закон сохранения энергии**, физический смысл которого состоит в том, что скорость изменения во времени полной энергии объема жидкости или газа равна сумме мощностей, развиваемых внешними массовыми и поверхностными силами, скорости объемного поступления энергии и плотности потока энергии через поверхность рассматриваемого объема. Этот закон баланса энергии  $E$  записывается в виде

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) d\tau = \iiint_{\tau} \rho \vec{F} \vec{v} d\tau + \iint_{\sigma} \vec{p}_n \vec{v} d\sigma + \iiint_{\tau} \rho Q d\tau - \iint_{\sigma} \vec{q}_n d\sigma. \quad (1.8)$$

Здесь  $\iiint_{\tau} \rho e d\tau$  – внутренняя энергия массы  $m$ , заключенная в объеме  $\tau$ ;

$\iiint_{\tau} \rho \frac{v^2}{2} d\tau$  – кинетическая энергия массы  $m$ ;  $\iint_{\sigma} \vec{q}_n d\sigma$  – поток теплоты через

поверхность  $\sigma$ ;  $\iiint_{\tau} \rho Q d\tau$  – скорость объемного порождения теплоты;

$\iint_{\sigma} \vec{p}_n \vec{v} d\sigma$  – диссипативные слагаемые.

Рассматривая уравнения (1.3), (1.6)–(1.8), представляющие собой конечно-объемную интегральную форму записи основных уравнений механики жидкости, легко видеть, что в левой их части стоят производные по времени от тех или других динамических мер движения, которые представляют собой интегралы по некоторому объему  $\tau$ , занимаемому жидкостью в данный момент времени.

Чтобы раскрыть смысл, выражаемый основными законами сохранения в каждой точке рассматриваемой сплошной среды, и перейти к дифференциальной форме уравнений движения, необходимо выполнить дифференцирование объемного интеграла с переменным пределом. Поскольку подынтегральная функция может выражать различную по физическому смыслу гидродинамическую субстанцию типа массы, импульса или энергии, целесообразно подробно рассмотреть операцию

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi d\tau = \frac{dJ}{dt}, \quad J = \iiint_{\tau} \Phi d\tau,$$

где  $\Phi$  – некоторая гидродинамическая субстанция в рассматриваемой точке  $M$ .

В общем случае гидродинамическая субстанция  $\Phi$  может быть скалярной, векторной или тензорной величиной. Изменение во времени интеграла  $J$  происходит по двум причинам: от изменения гидродинамической субстанции  $\Phi$  в объеме  $\tau$ , определяемом радиусом-вектором  $r$  и вследствие деформации границ объема  $\tau$ .

Для определения производной  $dJ/dt$  в переменных Эйлера рассмотрим два близких момента времени  $t$  и  $t' = t + \Delta t$  и учтем, что от  $t$  зависит не только подынтегральная функция, но и область интегрирования  $\tau$ . Частицы жидкости, занимавшие в момент  $t$  объем  $\tau$ , ограниченный поверхностью  $\sigma$ , в момент времени  $t'$  займут объем  $\tau'$ , ограниченный поверхностью  $\sigma'$ . Общую часть объемов  $\tau$  и  $\tau'$  обозначим через  $\tau_0$  (рис.1.1), а объем, заключенный между поверхностями  $\sigma_2$  и  $\sigma'_2$  и образованный теми частицами, которые вышли из поверхности  $\sigma_2$  – через  $\tau_2$ . Объем,



заклученный между поверхностями  $\sigma_1$  и  $\sigma'_1$  и образованный частицами, которые за время  $\Delta t$  вошли внутрь поверхности  $\sigma_1$  – через  $\tau_1$ .

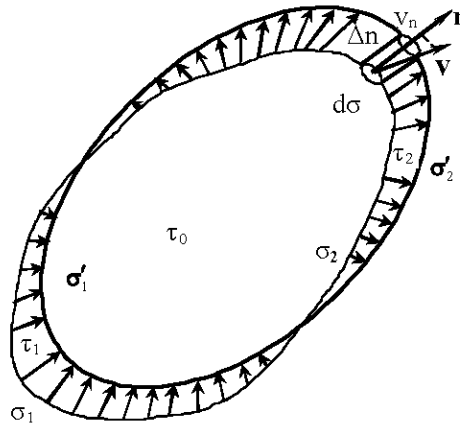


Рис. 1.1. Схема для оценки приращения элементарного объема

Очевидно, что  $\tau = \tau_0 + \tau_1$  и  $\tau' = \tau_0 + \tau_2$ . Величины, отвечающие моменту времени  $t'$  будем отмечать штрихами, а моменту  $t$  – оставим без штрихов. Тогда

$$J = \iiint_{\tau} \Phi d\tau = \iiint_{\tau_0 + \tau_1} \Phi d\tau; \quad J' = \iiint_{\tau_1} \Phi' d\tau = \iiint_{\tau_0 + \tau_2} \Phi' d\tau.$$

Поэтому для приращения интеграла за малое время  $\Delta t$  можно записать

$$\begin{aligned} \Delta J = J' - J &= \iiint_{\tau_0 + \tau_2} \Phi' d\tau - \iiint_{\tau_0 + \tau_1} \Phi d\tau = \iiint_{\tau_0} (\Phi' - \Phi) d\tau + \\ &+ \iiint_{\tau_2} \Phi' d\tau - \iiint_{\tau_1} \Phi d\tau. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подынтегральная функция  $\Phi' - \Phi$  при малых  $\Delta t$  по теореме о среднем значении функции с точностью до малых высшего порядка равна  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Delta t$ .

Учитывая это, приходим к равенству

$$\Delta J = \Delta t \iiint_{\tau_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\tau + \iiint_{\tau_2} \Phi' d\tau - \iiint_{\tau_1} \Phi d\tau. \quad (1.10)$$

Рассмотрим стоящие в правой части уравнения объемные интегралы и оценим изменение объема  $d\tau$  за промежуток времени  $\Delta t$  [63]. Пусть  $\Delta n$  – нормальное перемещение  $d\sigma$  за время  $\Delta t$ ,  $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$  – проекция скорости точек поверхности  $\sigma$  на внешнюю нормаль (см. рис. 1.1). Тогда элемент

объема  $d\tau = d\sigma\Delta n = d\sigma v_n \Delta t$ . Поэтому  $\iiint_{\tau_2} \Phi' d\tau = \Delta t \iint_{\sigma_2} \Phi' v_n d\sigma$ . Поскольку на поверхности  $\sigma_1$  нормальная составляющая скорости  $v_n$  отрицательна,  $\iiint_{\tau_1} \Phi d\tau = -\Delta t \iint_{\sigma_1} \Phi v_n d\sigma$ . Отсюда, учитывая, что при  $\Delta t \rightarrow 0$  объем  $\tau_0$  обращается в  $\tau$ , а  $\Phi'$  в  $\Phi$ , получаем

$$\Delta J = \Delta t \iiint_{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\tau + \Delta t \iint_{\sigma_2} \Phi v_n d\sigma + \Delta t \iint_{\sigma_1} \Phi v_n d\sigma. \quad (1.11)$$

Но так как  $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$ , то выражение (1.11) преобразуется к виду

$$\Delta J = \Delta t \left( \iiint_{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\tau + \iint_{\sigma} \Phi v_n d\sigma \right).$$

Разделив обе части полученного равенства на  $\Delta t$  и устремив  $\Delta t$  к нулю, получим

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\tau + \iint_{\sigma} \Phi v_n d\sigma.$$

Или, используя известное преобразование Остроградского–Гаусса для перехода от интеграла по поверхности к интегралу по объему

$$\iint_{\sigma} \Phi v_n d\sigma = \iiint_{\tau} \operatorname{div}(\Phi \vec{v}) d\tau,$$

окончательно находим следующее выражение для индивидуальной производной по времени от объемного интеграла гидродинамической субстанции  $\Phi$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi d\tau = \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\Phi \vec{v}) \right] d\tau. \quad (1.12)$$

Поскольку область интегрирования  $\tau$  подвижна, естественно, что результат дифференцирования интеграла  $J$  по времени оказался зависящим от поля скоростей  $\vec{v}$ , с которым движутся точки объема  $\tau$ . Стоящее в правой части уравнения (1.12) подинтегральное выражение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\Phi \vec{v}) = \frac{d\Phi}{dt} + \Phi \operatorname{div} \vec{v}. \quad (1.13)$$

Тогда (1.12) можно записать

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi d\tau = \iiint_{\tau} \left( \frac{d\Phi}{dt} + \Phi \operatorname{div} \vec{v} \right) d\tau. \quad (1.14)$$

Формулы (1.12) и (1.14) представляют собой интегральную дивергентную запись общего закона переноса гидродинамической субстанции  $\Phi$ , выражающего разложение индивидуальной производной по времени от объемного интеграла гидродинамической субстанции  $\Phi$  на локальную и конвективную части. Они позволяют легко получить дивергентную запись основных уравнений механики жидкости из законов сохранения.

## 1.2. Дивергентная дифференциальная форма основных законов сохранения. Уравнения Навье-Стокса

**Уравнение неразрывности.** Используя приведенный выше общий закон переноса (1.12), (1.14), легко получить дивергентную форму записи законов сохранения массы, количества движения и энергии. Особенно просто получается уравнение неразрывности. Применим формулы (1.12) и (1.14) непосредственно к выражению (1.3). Положив  $\Phi = \rho$ , получим

$$\iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] d\tau = 0; \quad \iiint_{\tau} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) d\tau = 0.$$

Откуда в силу справедливости этих равенств для любого объема  $\tau$  имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0; \quad (1.15)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.16)$$

Уравнения (1.15) и (1.16) – две эквивалентные формы записи уравнения неразрывности.

**Уравнение сохранения концентрации химического компонента или пассивной примеси.** Аналогично закону сохранения массы можно получить дивергентную форму записи для закона изменения концентрации вещества в движущейся среде с помощью общего закона переноса (1.12) или (1.14). Действительно, применим формулы (1.12) и (1.14) к выражению (1.6) и используя формулу Остроградского-Гаусса для перехода от интеграла по поверхности к интегралу по объему, соответственно получим

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} c d\tau = \iiint_{\tau} \left( \frac{dc}{dt} + c \cdot \operatorname{div} \vec{v} \right) d\tau = - \iiint_{\tau} \operatorname{div} \vec{q}_d d\tau + \iiint_{\tau} S_1 d\tau, \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} c d\tau = \iiint_{\tau} \left( \frac{dc}{dt} + \operatorname{div} (c \vec{v}) \right) d\tau = - \iiint_{\tau} \operatorname{div} \vec{q}_d d\tau + \iiint_{\tau} S_1 d\tau. \quad (1.18)$$

Откуда, в силу справедливости этих равенств для любого объема  $\tau$ , имеем

$$\frac{dc}{dt} + c \cdot \operatorname{div} \vec{v} = - \operatorname{div} \vec{q}_d + S_1, \quad (1.19)$$

$$\frac{dc}{dt} + \operatorname{div} (c \vec{v}) = - \operatorname{div} \vec{q}_d + S_1. \quad (1.20)$$

Уравнения (1.19) и (1.20), как и уравнения сохранения массы, представляют собой две (неконсервативную и консервативную соответственно) эквивалентные формы записи уравнения переноса концентрации химического компонента  $c$ . Если порождение химического вещества отсутствует, то есть источниковый член  $S_1 = 0$ , то имеем случай обычной пассивной примеси типа солености в воде.

Если теперь воспользоваться классическим законом Фика для диффузионного потока вещества  $\vec{q}_d = -D \operatorname{grad} c$ , то уравнения (1.19) и (1.20) можно записать в виде

$$\frac{dc}{dt} + c \cdot \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} c) + S_1, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} (c \vec{v}) = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} c) + S_1. \quad (1.22)$$

Кроме того, уравнение (1.22) может иметь еще одну полезную дивергентную форму записи

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} (c \vec{v} - D \operatorname{grad} c) = S_1. \quad (1.23)$$

**Уравнение переноса количества движения.** Для получения дивергентной записи закона переноса количества движения применим формулу (1.14) к выражению (1.7). Положив  $\Phi = \rho \vec{v}$ , получаем

$$\iiint_{\tau} \left[ \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} - \rho \vec{F} \right] d\tau = \iint_{\sigma} \vec{p}_n d\sigma. \quad (1.24)$$

Преобразовав стоящий в правой части уравнения (1.24) поверхностный интеграл в объемный по формуле Остроградского-Гаусса

$$\iint_{\sigma} \bar{p}_n d\sigma = \iint_{\sigma} \Pi n d\sigma = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \Pi d\tau,$$

получим

$$\iiint_{\tau} \left[ \frac{d}{dt}(\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} - \rho \vec{F} - \operatorname{div} \Pi \right] d\tau = 0. \quad (1.25)$$

Поскольку (1.25) имеет место для любого  $\tau$ , следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} - \rho \vec{F} - \operatorname{div} \Pi = 0. \quad (1.26)$$

Выполнив дифференцирование в первом слагаемом уравнения (1.26), его можно переписать в следующем виде:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \Pi. \quad (1.27)$$

Полученное уравнение – дивергентная запись закона переноса количества движения в общем случае. Замечая, что второй член в левой части выражения (1.27) в силу уравнения неразрывности (1.16) равен нулю, окончательно имеем

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \Pi. \quad (1.28)$$

Это уравнение движения сплошной среды в напряжениях [132]. Оно справедливо для любой сплошной среды, обладающей свойством текучести и является основой теоретической гидроаэромеханики.

**Уравнение переноса энергии.** Для преобразования интегральной записи закона сохранения энергии (1.8) применим формулу (1.14). Положив

$$\Phi = \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right), \text{ получим}$$

$$\iiint_{\tau} \left[ \frac{d}{dt} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \operatorname{div} \vec{v} - \rho \vec{F} \vec{v} - \rho Q \right] d\tau = \iint_{\sigma} \bar{p}_n \vec{v} d\sigma - \iint_{\sigma} \vec{q}_n d\sigma,$$

или

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} \left[ \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) \left( e + v^2/2 \right) + \rho \frac{d}{dt} \left( e + v^2/2 \right) - \rho \vec{F} \vec{v} - \rho Q \right] d\tau = \\ & = \iint_{\sigma} \bar{p}_n \vec{v} d\sigma - \iint_{\sigma} \vec{q}_n d\sigma. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Выполнив в левой части уравнения (1.29) дифференцирование по  $t$  второго члена подинтегрального выражения и преобразовав, как и раньше, стоящие справа поверхностные интегралы в объемные, найдем

$$\iiint_{\tau} \left[ \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) (e + v^2/2) + \rho \frac{de}{dt} + \rho \frac{d(v^2/2)}{dt} - \rho \vec{F} \vec{v} - \rho Q - \operatorname{div}(\Pi \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{q}_n \right] d\tau = 0. \quad (1.30)$$

Откуда в силу справедливости уравнения (1.30) для произвольного объема  $\tau$  имеем

$$\left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) (e + v^2/2) + \rho \frac{de}{dt} + \rho \frac{d(v^2/2)}{dt} - \rho \vec{F} \vec{v} - \rho Q - \operatorname{div}(\Pi \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{q}_n = 0.$$

Поскольку первый член этого уравнения равен нулю в силу уравнения неразрывности (1.16), получаем

$$\rho \frac{de}{dt} + \rho \frac{d(v^2/2)}{dt} - \rho \vec{F} \vec{v} - \rho Q - \operatorname{div}(\Pi \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{q}_n = 0. \quad (1.31)$$

Если ввести в рассмотрение полное теплосодержание единицы массы  $H = e + p/\rho + \frac{v^2}{2} = I + \frac{v^2}{2}$ , где  $I$  – энтальпия единицы массы, уравнение энергии можно записать в виде

$$\rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \vec{F} \vec{v} + \operatorname{div}(\Pi \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{q}_n + \rho Q. \quad (1.32)$$

Уравнение (1.32) есть дифференциальная запись закона сохранения энергии в общем случае. Чтобы получить уравнение только для тепловой внутренней энергии  $e$  нужно из уравнения (1.32) для суммарной энергии (кинетическая плюс тепловая) вычесть уравнение кинетической энергии, которое можно получить из уравнений движения просто путем математических преобразований без привлечения дополнительных физических соображений. С этой целью умножив (1.28) скалярно на  $\vec{v}$  получим

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \operatorname{div} \Pi - \rho \vec{F} \vec{v} = 0.$$

Или, преобразуя второе слагаемое с помощью оператора  $\nabla$  по известной [132] формуле векторного анализа

$$\operatorname{div}(\Pi \vec{v}) = \nabla(\Pi \vec{v}) = (\nabla \Pi) \vec{v} + \Pi(\nabla \vec{v}) = \vec{v} \operatorname{div} \Pi + (\Pi \nabla) \vec{v},$$

имеем:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \operatorname{div}(\Pi \vec{v}) + (\Pi \nabla) \vec{v} - \rho F \vec{v} = 0. \quad (1.33)$$

Вычитая уравнение (1.33) из (1.31), находим следующую, часто используемую форму записи уравнения для внутренней энергии

$$\rho \frac{de}{dt} = (\Pi \nabla) \vec{v} - \operatorname{div} \vec{q}_n + \rho Q. \quad (1.34)$$

Первый член правой части этого выражения имеет смысл объемного источника внутренней энергии, обусловленный действием вязких сил. Его обычно называют диссипативной функцией. Если обозначить  $(\Pi \nabla) \vec{v} = -\Phi_{in}$ , то получим:

$$\rho \frac{de}{dt} = -\Phi_{in} - \operatorname{div} \vec{q}_n + \rho Q. \quad (1.35)$$

В тензорной записи  $\Phi_{in} = P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  и для ньютоновской вязкой жидкости в двумерном случае она записывается в виде

$$\Phi_{in} = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Уравнение (1.34) с помощью формулы (1.13) и уравнения неразрывности можно записать в следующем дивергентном виде:

$$\rho \frac{de}{dt} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) = (\Pi \nabla) \vec{v} - \operatorname{div} \vec{q}_n + \rho Q. \quad (1.36)$$

Это наиболее употребительная форма уравнения переноса внутренней энергии.

Полученные дифференциальные уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.37)$$

переноса количества движения

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \operatorname{div} \Pi + \rho \vec{F} \quad (1.38)$$

и уравнение переноса внутренней энергии  $e$

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(e \vec{v}) \right] = -\operatorname{div} \vec{q}_n - \Phi_{in} + \rho Q \quad (1.39)$$

описывают движение жидкости и газа и справедливы для любых сплошных сред. Такая форма записи основных уравнений гидромеханики позволяет

легко получить систему исходных уравнений движения однородной или стратифицированной жидкости в любой ортогональной системе координат, включая прямоугольную декартову, цилиндрическую, сферическую и специальную систему координат, для которых известны соответствующие коэффициенты Ламэ  $H_1, H_2, H_3$  [42].

Несмотря на то, что полученная система уравнений гидромеханики является достаточно полной, но она не окончательная в том смысле, что в нее входят неизвестные составляющие тензора напряжений  $\Pi = p_{ik}$  и внутренняя энергия  $e$ . Поэтому необходимо дополнительно ввести модели сплошной среды, которые конкретизировали бы свойства рассматриваемых жидкостей, таких, как вода, воздух, нефть и т.д. Решение этого вопроса тесно связано с выбором функциональной зависимости тензора  $p_{ik}$  от некоторых гидродинамических инвариантов и определением внутренней энергии потока  $e$ .

**Уравнение динамики идеальной жидкости.** Простейшей моделью сплошной среды является так называемая идеальная жидкость, в которой на площадках выделенного произвольного жидкого объема считают отсутствующими касательные напряжения, т.е.  $p_{ik} = 0, i \neq k$ , а присутствуют лишь нормальные напряжения ( $p_{ii} \neq 0$ ). Основные уравнения идеальной жидкости могут быть получены путем упрощения общих уравнений движения Навье-Стокса. Действительно, опуская в них слагаемые с вязкостью, то есть полагая в системе уравнений Навье-Стокса  $\mu = 0$  получаем систему уравнений движения для идеальной жидкости, которую принято называть системой уравнений Эйлера. В соответствии с уравнением (1.38) она записывается в виде

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } P + \rho \vec{F}$$

и совместно с уравнением неразрывности  $\text{div } \vec{v} = 0$  они образуют замкнутую систему уравнений относительно скоростей и давления. При этом тензор напряжений в идеальной жидкости обладает сферической симметрией, то есть  $P = -p \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор.

Теория идеальной жидкости математически хорошо разработана. В ней используется мощный аппарат теории функции комплексного переменного [35, 118, 132, 143, 188].

Если использовать известное векторное преобразование [132]

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v},$$

то уравнения Эйлера можно представить в форме Громека - Лэмба [132]



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) + \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F}.$$

Большой практический интерес представляет случай, когда объемные силы имеют потенциал и движение баротропно, то есть

$$\vec{F} = -\text{grad } \Pi$$

и существует функция давления  $\mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}$ . Тогда уравнения Эйлера записываются в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi \right) + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = 0. \quad (1.40)$$

Если предположить, что идеальная жидкость под действием потенциального поля объемных сил движется стационарно с функцией давления  $\mathcal{P}$ , то при безвихревом движении, когда  $\text{rot } \vec{v} = 0$ , из него следует широко известное уравнение Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi = \text{const.}$$

В случае движения несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) имеем

$$\mathcal{P} = \frac{p - p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \text{const.}$$

Тогда, ограничиваясь случаем массовых объемных сил в виде сил тяжести и направляя ось  $z$  вверх получаем

$$\Pi = gz + \text{const.}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае уравнение Бернулли выполняется вдоль линии тока или вдоль вихревой линии и принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.}$$

Или переходя от плотности  $\rho$  к удельному весу  $\gamma = \rho g$  получим

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const.}$$

В таком виде отдельные слагаемые уравнения Бернулли имеют размерность длины и их сумму называют гидравлической высотой [132]. При этом  $v^2/2g$  называется скоростной высотой,  $p/\gamma$  – пьезометрической и  $z$  – нивелирной высотами. Эта форма уравнения Бернулли имеет важное значение в гидравлике и гидротехнике.

Другой интересный случай нестационарного движения идеальной жидкости имеем когда поле безвихревое, а скорость является потенциальным вектором, то есть

$$\vec{v} = \text{grad} \varphi, \quad \text{rot} \vec{v} = 0.$$

В этом случае из уравнений Эйлера в форме Громека-Лэмба (1.40) легко получить первый интеграл уравнений движения. Действительно, предполагая независимыми операции локального дифференцирования по времени  $\partial/\partial t$  и пространственного дифференцирования в операторе  $\text{grad}$ , будем иметь

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \varphi = \text{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Тогда из уравнений Эйлера (1.40) получаем равенство

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0,$$

интегрирование которого приводит к нахождению первого интеграла уравнений движения в следующем виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t),$$

которое принято называть интегралом Лагранжа – Коши, где  $f(t)$  – произвольная функция времени, определяемая из начально-краевых условий.

Интеграл Лагранжа – Коши в теории нестационарного движения идеальной жидкости играет такую же роль, как и уравнение Бернулли при стационарном движении.

Нетрудно видеть, что введенная выше скалярная функция  $\varphi$ , зависящая от пространственных координат и времени, вследствие уравнения неразрывности  $\text{div} \vec{v} = 0$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\text{div} \cdot \text{grad} \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Для определения решения этого уравнения в конкретном случае движения идеальной жидкости необходимо подчинить это решение соответствующим начальным и граничным условиям.

**Модель вязкой жидкости.** Следующей в порядке сложности моделью сплошной среды является модель вязкой жидкости, в которой при движении кроме нормальных напряжений  $p_{ii}$  наблюдаются и касательные напряжения

$p_{ik}, i \neq k$ . Наличие касательных напряжений и свойство прилипания жидкости к твердым стенкам существенно отличают вязкую жидкость от идеальной.

Имеющиеся напряжения в вязкой жидкости вызывают деформацию ее элементов. Поэтому при построении модели вязкой сплошной среды предполагается, что между тензорами напряжений и скоростей деформации существует определенная связь. В случае изотропной ньютоновской вязкой жидкости эта связь имеет линейный характер и определяется обобщенным законом Ньютона [132], согласно которому полное напряжение, действующее в направлении  $x_i$  на площадку, перпендикулярную  $x_k$ , в декартовой системе координат записывается в виде

$$\Pi = p_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu\Phi_{ik} - \mu'\frac{\partial\bar{v}_k}{\partial x_k}\delta_{ik}, \quad (1.41)$$

где тензор скоростей деформации  $\Phi_{ik} = \partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i$ ;  $\mu' = 2\mu/3$ ;  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера.

Коэффициент пропорциональности  $\mu$  в формуле (1.41) представляет собой физическую характеристику жидкости, в общем случае зависящую от температуры и называемую динамическим коэффициентом вязкости жидкости,  $\mu'$  - так называемый второй коэффициент вязкости, учет которого важен лишь в задачах с быстропротекающими процессами типа взрывов, при прохождении газа сквозь скачок уплотнения и в других случаях.

Система уравнений неразрывности (1.37), движения (1.38) и энергии (1.39) совместно с выражениями для компонент тензора напряжений (1.41) представляет собой окончательную общую систему уравнений гидромеханики, именуемыми уравнениями Навье-Стокса. Уравнения Навье-Стокса содержат в себе описание физических процессов локального переноса, конвективного переноса и диффузии.

В общем случае уравнения переноса массы, импульса и энергии включают в себя воздействие большого количества факторов, например, наличие химических реакций, лучистый теплообмен и т.д. Однако, поскольку на данном этапе нас интересует не подробная запись этих уравнений, а лишь общая форма основных уравнений, то можно ограничиться рассмотрением частных случаев.

Используя соотношение (1.41) система уравнений Навье-Стокса (1.37), (1.38) может быть записана в следующей тензорной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0,$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right]. \quad (1.42)$$

В случае несжимаемых сред, которые в дальнейшем и будут рассматриваться, эти уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Рассмотрим теперь уравнение энергии (1.39). Для несжимаемых капельных сред внутреннюю энергию  $e$  с точностью до несущественной аддитивной постоянной можно принять равной

$$e = c_p T,$$

где  $c_p$  – коэффициент теплоемкости жидкости при постоянном давлении. В этом случае уравнение энергии (1.39) может быть записано в следующей тензорной форме

$$\rho \left[ \frac{\partial (c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (c_p v_k T) \right] = p_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_{nk}}{\partial x_k} + \rho Q. \quad (1.44)$$

Если теперь предположить, что источники тепла  $Q$  отсутствуют, удельная теплоемкость жидкости  $c_p = \text{const}$ , вязкой диссипацией пренебречь, а для потока  $q_{nk}$  воспользоваться градиентным законом Фурье

$$q_{nk} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k},$$

то уравнение энергии в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (v_k T)}{\partial x_k} \right] = \frac{\partial T}{\partial x_k} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right). \quad (1.45)$$

Система уравнений Навье-Стокса (1.43) для случая несжимаемой жидкости с помощью уравнения неразрывности также может быть записана в следующей консервативной (дивергентной) форме

$$\rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial (v_i v_k)}{\partial x_k} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (1.46)$$

Легко видеть, что форма уравнений (1.46) отличается от формы (1.43) записью конвективных слагаемых.

Типичная задача, связанная с решением системы уравнений гидродинамики (1.46), формулируется следующим образом: найти значения зависимых переменных  $\vec{v}$  и  $p$  в ограниченной или безграничной области, имеющей границу  $\Gamma$  при заданном на этой границе условии

$$\vec{v} = \vec{v}_\Gamma$$

и известных значениях скорости  $\vec{v}$  в начальный момент времени  $t = 0$  при принятых в задаче характерных масштабах длины, скорости и времени. Граничные значения  $\vec{v}_\Gamma$  должны удовлетворять условию

$$\int_{\Gamma} \vec{v}_\Gamma \cdot \vec{n} d\sigma = 0,$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор нормальный к контуру  $\Gamma$ , а начальные значения скорости должны удовлетворять уравнению неразрывности  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^0 = 0$  в каждый момент времени.

### **1.3. Математическая модель вязкой стратифицированной несжимаемой жидкости**

Наряду с движением однородной жидкости большой практический интерес представляет случай так называемых стратифицированных течений, т.е. движение температурно-неоднородных или разноплотностных сред в поле сил тяжести. Для описания таких течений система уравнений движения Навье-Стокса в случае температурно-стратифицированной жидкости должна быть дополнена уравнением энергии, что вносит в модель свою специфику, связанную с появлением объемных сил плавучести и взаимным влиянием полей скорости и температуры.

Рассмотрим подробнее систему исходных дифференциальных уравнений для температурно-стратифицированного потока вязкой теплопроводной жидкости, температура которой изменяется незначительно (атмосферный воздух, речная или морская вода) и влиянием этого изменения на значения основных констант жидкости — вязкость и теплопроводность, можно пренебречь. Вместе с тем будем пока предполагать, что внутренние источники тепла в жидкости отсутствуют. Лучистым обменом также будем пренебрегать и следовательно, процесс теплопереноса полностью будет определяться конвекцией и теплопроводностью.

При принятых допущениях система дифференциальных уравнений температурно-стратифицированного потока с учетом наличия объемных сил плавучести будет состоять из уравнений движения Навье-Стокса., уравнения

сохранения массы и уравнения переноса тепла, которые в прямоугольной декартовой системе координат в тензорной форме записываются соответственно в виде:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] + \rho g_2 \delta_{ik}, \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = 0, \quad (1.48)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + \mu \varphi \quad (1.49)$$

здесь  $\rho$  - плотность,  $v$  - скорость,  $p$  - давление,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $T$  - температура,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости,  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера,  $\varphi$  - диссипативная функция.

Для замыкания системы уравнений (1.47) – (1.49) необходимо задать уравнение состояния

$$\rho = \rho(p, T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0) - \alpha(p - p_0)], \quad (1.50)$$

где  $\rho_0$ ,  $T_0$ ,  $p_0$  - характерные значения плотности, температуры и давления.

При относительно малых скоростях, рассматриваемая среда предполагается несжимаемой и изменение плотности за счет изменения давления мало по сравнению с ее изменением за счет температуры. Тогда уравнением состояния служит закон теплового расширения

$$\rho - \rho_0 = -\beta \rho_0 (T - T_0), \quad (1.51)$$

который обычно используется для случая стратификации жидкости вследствие неоднородности температуры.

Система уравнений (1.47) – (1.51) обладает большой общностью и с ее помощью описывается широкий класс течений. Однако для общего анализа и решения эта система уравнений достаточно сложна и прежде всего в силу нелинейности уравнений движения и учета переменности плотности. Поэтому во многих практических случаях принимается ряд гипотез и допущений, упрощающих исходную систему дифференциальных уравнений. В рассматриваемом далее классе задач используется система допущений широко известная как приближение Буссинеска [74 - 76, 164]. В этом приближении плотность  $\rho$  будет зависеть только от температуры и не зависит от давления. При этом уравнение сохранения массы переходит в уравнение несжимаемости. В системе уравнений движения плотность, за исключением архимедовой силы плавучести, принимается постоянной и

равной  $\rho_0$ . Кроме того, как отмечалось выше, коэффициенты вязкости, теплопроводности и удельной теплоемкости считаются постоянными.

Далее будем предполагать, что температура в невозмущенной области  $T_S$  линейно зависит от вертикальной координаты  $y$

$$T_S(y) = T_0 - my, \quad (1.52)$$

где  $m = (T_0 - T_H) / H$  - параметр стратификации,  $T_0$  - температура при  $y = 0$ ,  $T_H$  - температура при  $y = H$ ,  $H$  - характерный вертикальный размер. При сделанных предположениях рассматриваемая система уравнений гидротермодинамики для температурно-стратифицированной среды в приближении Буссинеска записывается в виде [164]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \beta T' g_2 \delta_{ik}, \\ \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + v_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} + vm &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( a \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right) + \frac{\nu}{c_p} \varphi, \end{aligned} \quad (1.53)$$

где  $p$  - избыточное давление над гидростатическим,  $T' = T - T_S = T - T_0 + my$  - избыточная температура, отсчитываемая от невозмущенной температуры  $T_S$ ,  $\nu = \mu / \rho_0$  - коэффициент кинематической вязкости,  $a = \lambda / (\rho_0 c_p)$  - коэффициент температуропроводности,  $\rho_0$  - плотность, соответствующая температуре  $T_0$ . Система уравнений (1.53) представляет собой математическую модель вязкой стратифицированной несжимаемой весомой жидкости, находящейся в поле сил тяжести.

Приближение Буссинеска широко используется при решении задач геофизики, конвективного теплообмена [74, 164] и в других областях. В этой системе уравнений искомыми величинами являются вектор скорости  $\vec{v}$ , избыточные давление  $p$  и температура  $T'$ . Особенностью системы уравнений (1.53) является то, что эффекты сжимаемости и акустических волн здесь отфильтрованы благодаря тому, что в приближении Буссинеска рассчитываются малые отклонения давления и температуры от средних гидростатических. Это обстоятельство очень существенно при конструировании численной схемы решения такого класса задач.

Таким образом, из (1.53) следует, что в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y$  основными уравнениями двумерной задачи будут

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] -$$

$$-g\beta(T_H - T_0) \left( \frac{T - T_0}{T_H - T_0} + \frac{y}{H} \right), \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + vm = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \bar{v}\varphi, \quad (1.57)$$

где  $u$ ,  $v$  - продольная и вертикальная компоненты скорости соответственно.

Здесь следует отметить, что в литературе часто встречается ошибка при записи исходной системы уравнений движения (1.54), когда вторые слагаемые в квадратных скобках отсутствуют. Это, по-видимому, связано с их схожестью с уравнением неразрывности (1.56), но указанные слагаемые содержат не само уравнение неразрывности, а производные от него, и поэтому пренебрегать ими в общем случае нельзя.

Далее будем предполагать, что изучаемый поток имеет неоднородность плотности жидкости, которая связана не только с неоднородностью температуры, а дополнительно содержит некоторую пассивную примесь в виде мелких частиц, либо другие химически активные компоненты с массовой концентрацией  $c$ . Тогда к анализу следует присоединить еще уравнение диффузии (1.22) для этой химической компоненты в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) + Q_c, \quad (1.58)$$

где  $D$  - коэффициент молекулярной диффузии,  $Q_c$  - источниковое слагаемое. В этом случае уравнение состояния (1.51) будет иметь более общий вид [164]

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T T' - \beta_c c'), \quad (1.59)$$

где  $c'$  - избыточная концентрация,  $\beta_c$  - коэффициент концентрационного расширения, а сила плавучести в уравнении движения также соответственно скорректируется, если значение  $\beta_c c'$  существенно по сравнению со значением  $\beta_T T'$ , где

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,C}, \quad \beta_c = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{P,T}.$$



Запишем выше приведенную систему исходных уравнений (1.53) и (1.58) в безразмерной форме. В качестве характерных масштабных параметров задачи в общем случае можно принять: за линейный размер величину  $L$ , за характерную скорость потока величину  $u_0$ , характерное время задачи определим как конвективное время  $t_0 = L/u_0$ , за характерную температуру и концентрацию примем  $(T_H - T_0)$  и  $c_0$  соответственно. Тогда, положив:  $x = LX$ ,  $y = LY$ ,  $v = u_0 V$ ,  $u = u_0 U$ ,  $t = \tau L/u_0$ ,  $p = \rho_0 u_0^2 P$ ,  $\theta = (T - T_0)/(T_H - T_0)$ ,  $c = c_0 C$  после очевидных преобразований получаем следующую систему уравнений в безразмерных величинах для двумерного случая

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right]; \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + Ri_0 \left( \theta + \frac{b}{H} Y \right); \quad (1.60) \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) - V \frac{b}{H}; \quad (1.61) \\ \frac{\partial C}{\partial \tau} + U \frac{\partial C}{\partial X} + V \frac{\partial C}{\partial Y} &= \frac{1}{Pe_d} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \right). \quad (1.62) \end{aligned}$$

Система уравнений (1.60) – (1.62) содержит следующие безразмерные параметры задачи:

$$\text{Re} = \frac{u_0 L}{\nu} \quad - \text{число Рейнольдса}; \quad Ri_0 = \frac{g \beta (T_0 - T_H) L}{u_0^2} \quad - \text{число Ричардсона};$$

$$Pe = \frac{u_0 L}{a} = \text{Re} \cdot \text{Pr} \quad - \text{тепловое число Пекле}; \quad Pe_d = \frac{u_0 L}{D} = \text{Re} \cdot Sc -$$

диффузионное число Пекле;  $\text{Pr} = \nu/a$  – число Прандтля;  $Sc = \nu/D$  – число Шмидта. Отметим, что в такой постановке температура входит не только в уравнение энергии, но и в уравнение импульса и следовательно тепловая задача связана с гидродинамической. В уравнении (1.61) слагаемое с диссипацией опущено.

Приведенная система уравнений содержит описание линейной температурной стратификации потока при наличии характерного масштаба скорости  $u_0$ . В случае задач свободноконвективного движения и тепломассообмена, когда внешний масштаб скорости отсутствует, для

масштаба скорости принимается величина  $u_0 = \nu / L$ , а для масштаба времени  $L^2 / \nu$ . В этом случае система уравнений (1.60) – (1.62) сохраняет тот же вид, но с заменой безразмерного параметра задачи  $Ri_0$  - числа Рачирдсона на число Грасгоффа  $Gr = g\beta_T L^3 \Delta T / \nu^2$  [42], при этом формально число Рейнольдса  $Re$  в уравнениях исчезает, так как оно становится равным единице. Действительно  $Re = \frac{u_0 L}{\nu} = \frac{\nu L}{L \nu} = 1$ . Следовательно основными параметрами задачи в этом случае будут числа Грасгоффа и Прандтля. Концентрация  $C$  в рассматриваемом случае является пассивной примесью и не влияет на поле скорости и температур. Следовательно гидродинамическая и тепловая задачи связаны, а концентрационная отделена. Если параметры  $Ri_0$  или  $Gr$  равны нулю, то рассматриваемая система уравнений сводится к уравнениям движения Навье-Стокса для однородной несжимаемой жидкости.

Особый практический интерес представляет случай движения стратифицированной жидкости в природе, который встречается в геофизических задачах. В этих случаях соленая вода является стратифицированной жидкостью, так как ее плотность неоднородна из-за наличия примеси соли. В таких задачах в качестве модели стратификации обычно принимают экспоненциальную модель. Тогда степень стратификации характеризуется масштабом плавучести  $\Lambda$ , который представляет собой вертикальное расстояние, на котором концентрация солености изменяется в «е» раз. Вследствие слабой стратификации приближение Буссинеска остается справедливым. Поэтому такие течения описываются системой уравнений, состоящей из уравнений Навье-Стокса, уравнения несжимаемости и уравнения диффузии концентрации солености  $s$ , которые записываются в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial(v_i v_k)}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \beta_s s' g_2 \delta_{ik}, \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \frac{\partial(v_k s')}{\partial x_k} = D_s \frac{\partial^2 s'}{\partial x_k^2} + v_y / \Lambda.$$

В этой системе уравнений использовано следующее уравнение состояния

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_s (s - s_0)], \quad \beta_s = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{P,T}.$$

Здесь  $s' = s - s_0$  - избыточная соленность,  $\nu$  - кинематическая вязкость жидкости,  $D_S$  - коэффициент диффузии соли,  $v_y$  - компонента скорости в направлении градиента солености,  $\Lambda = |d(\ln \rho)/dy|^{-1}$  - параметр стратификации или масштаб плавучести. Величину  $N_b = (g/\Lambda)^{1/2}$  - называют частотой Брента - Вайсаля, а величину  $T_b = 2\pi/N_b$  - периодом плавучести.

Если как обычно ввести масштабы длины, скорости, времени и давления, то рассматриваемая система в безразмерных переменных принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial \tau} + \frac{\partial (V_i V_k)}{\partial X_k} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial X_k} \left( \frac{\partial V_i}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k}{\partial X_i} \right) + Sg_2 \delta_{ik} / (\text{Fr}^2 (L/\Lambda)), \\ \frac{\partial V_k}{\partial X_k} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial (V_i S)}{\partial X_k} &= \frac{1}{Pe_s} \frac{\partial^2 S}{\partial X_k^2} + V_y L/\Lambda, \quad \Lambda \gg L. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Здесь  $\text{Re} = \frac{u_0 \cdot L}{\nu}$  - число Рейнольдса,  $Pe_s = \frac{u_0 \cdot L}{D_s}$  - число Пекле солености,

$\text{Fr} = \frac{u_0}{N_b \cdot L}$  - плотностное число Фруда.

Другой практический интерес представляет случай движения среды стратифицированной по температуре, который встречается в задачах атмосферной диффузии. Строго говоря, воздух представляет собой смесь кислорода, азота и других газов. Если концентрация смеси в воздухе принимается постоянной, то смесь можно рассматривать как однородную сплошную среду. В этом случае для описания движения воздушных масс в атмосфере можно использовать уравнения сохранения массы и изменения количества движения в обычном виде (1.41), учтя при этом переменность плотности и наличие объемной архимедовой силы плавучести. Кроме того, в постановке задачи необходимо принять уравнение состояния для рассматриваемой среды. Во многих прикладных задачах плотность воздуха может существенно изменяться при больших изменениях скорости и температуры в потоке. Опыт показывает, что расширение газа сопровождается изменением температуры в потоке. Следовательно такие течения должны изучаться с использованием основных термодинамических соотношений, а среда может рассматриваться как совершенный газ с

постоянными удельными теплоемкостями и тогда для неё справедливо уравнение состояния в виде

$$P = \rho RTM,$$

где  $P$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $T$  – температура,  $R = c_p - c_v$  – газовая постоянная,  $M$  – молярная масса. Следовательно, необходимо более полно учитывать термодинамику потока, когда изменение температуры приводит к сжатию или расширению фиксированного объема сплошной среды. Поэтому в этом случае исходные уравнения следует усложнить подобно тому как это делается в теории сжимаемой жидкости [15].

Одна из трудностей решения рассматриваемой системы уравнений движения несжимаемой сплошной среды связана с расчетом давления  $P$ . В общем случае уравнение для определения давления  $P$  можно получить путем воздействия оператора  $div$  на уравнения количества движения.

Рассмотрим исходную систему уравнений Навье-Стокса в прямоугольной декартовой системе координат. При отсутствии внешних сил эта система исходных нестационарных уравнений движения несжимаемой жидкости может быть записана в следующей дивергентной тензорной форме [24, 42]

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ -V_i V_k + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial V_i}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k}{\partial X_i} \right) \right], \quad \frac{\partial V_k}{\partial X_k} = 0 \quad (1.65)$$

Уравнения (1.65) записаны в безразмерных величинах с использованием общепринятых обозначений:  $V$  – скорость,  $P$  – давление,  $\tau$  – время,  $\text{Re} = u_0 L / \nu$  – число Рейнольдса. По повторяющемуся индексу подразумевается суммирование. Далее удобно ввести оператор  $G^i(V_i)$ , который представляет собой дивергенцию от суммы конвективных и диффузионных слагаемых в уравнении (1.65)

$$G^i(V_i) = \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ -V_i V_k + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial V_i}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k}{\partial X_i} \right) \right]. \quad (1.66)$$

Тогда в символической форме система уравнений движения (1.65) записывается в следующем виде

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + G^i(V_i), \quad \frac{\partial V_k}{\partial X_k} = 0. \quad (1.67)$$

Или в эквивалентной векторной форме

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\text{grad } P + \vec{G}(\vec{V}), \quad \text{div } \vec{V} = 0. \quad (1.68)$$

Если теперь применить операцию  $div$  к первому уравнению системы (1.68), тогда с учетом уравнения неразрывности, получаем следующее эллиптическое уравнение Пуассона для давления

$$div grad P = div \vec{G}(\vec{V}) \quad \text{или} \quad \Delta P = \frac{\partial G^i(V_i)}{\partial X_i}, \quad (1.69)$$

где  $\Delta = div grad$  – оператор Лапласа.

Применительно к двумерному случаю в координатной форме безразмерные уравнения движения (1.60) и неразрывности можно записать еще в следующей консервативной форме

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\partial(U^2)}{\partial X} - \frac{\partial(UV)}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial X} \right), \quad (1.70)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{\partial(VU)}{\partial X} - \frac{\partial(V^2)}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \right), \quad (1.71)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (1.72)$$

Продифференцируем уравнение (1.70) по  $X$ , а уравнение (1.71) по  $Y$  и сложим их почленно. Тогда с учетом уравнения несжимаемости получим,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = & -\frac{\partial^2(U^2)}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2(UV)}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2(V^2)}{\partial Y^2} + \\ & \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( 2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( 2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Таким образом, давление  $P$  может быть определено путем решения уравнения Пуассона  $\Delta P = f^P(X, Y)$ . Здесь правая часть уравнения (1.73) обозначена через  $f^P(X, Y)$ , а  $\Delta$  – оператор Лапласа. Однако при его решении, например, методом последовательной верхней релаксации, возникают значительные трудности из-за граничных условий, которые не очевидны и обычно являются условиями второго рода (Неймана). В силу этих и ряда других обстоятельств в гидродинамике большое распространение получил метод решения двумерных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, связанный с переходом от естественных переменных – скорость, давление  $(u, v, p)$  к переменным – завихренность  $\omega$  и функция тока  $\psi$ , которые по определению для двумерной задачи связаны со скоростями следующими соотношениями:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.74)$$

Использование новых переменных  $(\omega, \psi)$  удобно тем, что позволяет исключить из рассмотрения давление  $p$  и преобразовать систему уравнений движения в переменных  $(u, v, p)$  в систему уравнений для  $(\omega, \psi)$  - переменных.

Чтобы исключить давление из системы уравнений (1.70), (1.71) запишем их в размерных величинах и продифференцируем первое уравнение по  $y$ , а второе – по  $x$ . Тогда вычитая из первого результата второй, а затем используя формулы (1.74) и уравнение неразрывности, получим следующее уравнение для переноса завихренности  $\omega$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1.75)$$

и уравнение Пуассона для функции тока  $\psi$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega. \quad (1.76)$$

В результате такой замены переменных смешанная парабола-эллиптическая система уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости преобразовалась в параболическое уравнение завихренности для  $\omega$  и эллиптическое уравнение Пуассона для функции тока  $\psi$ . Численные методы решения этих уравнений разработаны достаточно хорошо. К тому же функция тока на границе обычно удовлетворяет условию Дирихле, а не Неймана, как в случае давления.

Однако наряду с положительными сторонами такого подхода имеются и существенные недостатки, которые связаны, во-первых, с трудностью постановки и удовлетворения граничных условий для завихренности, а во-вторых, отсутствием возможности обобщения этого подхода на случай пространственных и турбулентных течений. Поэтому далее предпочтение будет отдано подходу с использованием уравнений Навье-Стокса, записанных в естественных физических переменных – скорость, давление  $(u, v, p)$ . Заметим, что для сжимаемой жидкости давление в общем случае описывается эволюционным уравнением вида  $\partial p / \partial t = \varphi_1(x, y, t)$ .

Для дальнейшего полезно отметить, что общая система дифференциальных уравнений переноса температурно-стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска (1.53), так же как и в случае однородной жидкости, может быть преобразована с помощью уравнения

неразрывности к следующей эквивалентной системе дифференциальных уравнений в дивергентной (консервативной) форме:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial(v_i v_k)}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] + g_2 \beta T' \delta_{ik}; \quad (1.77)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0; \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial(v_k T')}{\partial x_k} + v_2 m = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \alpha \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right) + \tilde{v} \varphi, \quad \tilde{v} = \nu / c_p; \quad (1.79)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(v_k c)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( D \frac{\partial c}{\partial x_k} \right). \quad (1.80)$$

Именно эта форма уравнений удобна для построения консервативных конечно-разностных схем. Здесь последнее слагаемое  $\varphi$  в уравнении (1.79) представляет собой диссипативную функцию, которая для двумерной задачи имеет вид

$$\varphi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Соответствующая система безразмерных уравнений с учетом линейной стратификации в этом случае принимает вид:

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} + \frac{\partial(V_i V_k)}{\partial X_k} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial V_i}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k}{\partial X_i} \right) \right] + Ri_0 \left( \theta + \frac{b}{H} Y \right) \delta_{ik}; \quad (1.81)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial X_k} = 0; \quad (1.82)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(V_k \theta)}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left( \frac{1}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial X_k} \right) - V_2 \frac{b}{H} + \tilde{v} \tilde{\Phi}; \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{\partial(V_k C)}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left( \frac{1}{Pe_d} \frac{\partial C}{\partial X_k} \right). \quad (1.84)$$

Нетрудно заметить, что интересующие нас зависимые переменные – скорость, температура и концентрация подчиняются некоторому обобщенному дифференциальному уравнению переноса. Действительно, если ввести в рассмотрение зависимую переменную  $\Phi \approx (V, \theta, C)$ , то она будет удовлетворять следующему каноническому дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(V_k \Phi)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) + S^\Phi, \quad (1.85)$$

где  $S^\Phi$  – источниковый член. Конкретный вид коэффициента переноса  $\Gamma^\Phi$  и источникового члена  $S^\Phi$  зависит от физического смысла переменной  $\Phi$  (масса, импульс, температура, концентрация). Запишем это обобщенное дифференциальное уравнение в следующей дивергентной форме

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \operatorname{div}(V\Phi - \Gamma^\Phi \operatorname{grad} \Phi) = S^\Phi. \quad (1.86)$$

Легко видеть, что рассматриваемое модельное уравнение в дивергентной форме содержит четыре основных слагаемых, описывающих локальный перенос, конвективный перенос, диффузионный перенос и источниковый член соответственно. В заключение заметим, что хотя консервативная и неконсервативная формы записи исходных дифференциальных уравнений эквивалентны, но в конечно-разностном виде они могут существенно отличаться друг от друга, оказывая влияние на результаты расчетов.

## 1.4. Математическая модель диффузии химического компонента с простейшей кинетикой

Рассмотрим теперь случай, когда в движущейся жидкости есть несколько химических компонентов. Обозначим массовую концентрацию  $k$ -ой компоненты через  $c_k$ . Тогда уравнение переноса для  $c_k$  в соответствии с уравнением (1.86) можно записать в виде

$$\frac{\partial c_k}{\partial \tau} + \operatorname{div} (c_k \vec{v} - D \cdot \operatorname{grad} c_k) = R_k, \quad (1.87)$$

где  $c_k$  – масса химического компонента  $k$  в единице массы смеси, то есть массовая концентрация,  $D$  – коэффициент диффузии,  $R_k$  – скорость образования  $k$ -го компонента в результате химических реакций в единичном объеме. Уравнение (1.87) физически показывает, что изменение концентрации рассматриваемого химического компонента в движущейся среде происходит за счет механизмов конвекции, диффузии и источника  $R_k$ .

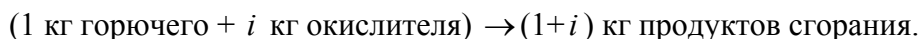
Системы химических реакций, рассматриваемые в инженерной практике, обычно весьма сложны. Например, углеводородное горючее может содержать сотни отдельных химических компонентов, которые, соединяясь с кислородом, образуют многочисленные промежуточные продукты сгорания с малым временем существования, помимо стабильных



окислов  $H_2O$ ,  $CO$  и  $CO_2$ . Даже если бы наша квалификация и возможности вычислительной техники позволяли включить все эти компоненты и реакции в схему расчета, то и тогда этого бы не удалось сделать, так как термодинамические свойства и коэффициенты переноса, а также константы химического равновесия для огромного большинства компонентов неизвестны.

В этих условиях соответствующие специалисты используют обычно идеализированную модель реального процесса, в которой учитываются существенные факторы и отбрасываются второстепенные. При расчете, например, процессов горения, часто удается получить полезные результаты, ограничиваясь рассмотрением идеализированной реакции между горючим и окислителем (кислородом). При этом промежуточными продуктами реакции пренебрегают, а горючее и кислород рассматривают как простые реагенты, которые всегда соединяются в одном и том же соотношении. Такой процесс схематизации бывает полезно распространить и на процедуру расчета.

Рассмотрим теперь исходное уравнение переноса концентрации  $c_k$  используя концепцию простой химической реакции. Обозначим соответствующие химические компоненты значком  $c$  с индексами «гор» и «ок» и предположим, что горючее и окислитель соединяются в следующем соотношении



Тогда, если через  $R_{гор}$  и  $R_{ок}$  обозначить скорости образования горючего и окислителя в процессе химической реакции, то наше предположение сводится к соотношению

$$R_{гор} = R_{ок} / i, \quad (1.88)$$

где  $i$  – коэффициент стехиометрии.

Дифференциальные уравнения для  $c_{гор}$  и  $c_{ок}$  согласно (1.87) имеют вид

$$\frac{\partial c_{гор}}{\partial t} + \operatorname{div} \left( c_{гор} \vec{v} - D_{эф}^{гор} \cdot \operatorname{grad} c_{гор} \right) - R_{гор} = 0, \quad (1.89)$$

$$\frac{\partial c_{ок}}{\partial t} + \operatorname{div} \left( c_{ок} \vec{v} - D_{эф}^{ок} \cdot \operatorname{grad} c_{ок} \right) - R_{ок} = 0. \quad (1.90)$$

Легко видеть, что с помощью уравнения (1.88) источниковые члены в системе (1.89), (1.90) можно исключить. С этой целью разделим уравнение (1.86) на  $i$  и вычтем его из уравнения (1.89). В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( c_{гор} - \frac{c_{ок}}{i} \right) + \operatorname{div} \left[ \left( c_{гор} - \frac{c_{ок}}{i} \right) \vec{v} - \left( D_{эф}^{гор} \operatorname{grad} c_{гор} - D_{эф}^{ок} \operatorname{grad} \frac{c_{ок}}{i} \right) \right] = 0. \quad (1.91)$$

Теперь хорошо видно, что при выполнении условия  $D_{эф}^{zop} = D_{эф}^{ок}$  в каждой точке потока, полученное уравнение сильно упрощается. Известно, что для турбулентных течений это условие хорошо выполняется, а в случае ламинарных течений отклонения от него наблюдаются, но в силу их малости будем их считать несущественными. Поэтому примем

$$D_{эф}^{zop} = D_{эф}^{ок} \equiv D_{zo} \quad (1.92)$$

и введем обозначение

$$\varphi_{zo} = c_{zop} - c_{ок} / i. \quad (1.93)$$

Тогда уравнение (1.91) приводится к каноническому виду уравнения переноса скалярной субстанции  $\varphi_{zo}$

$$\frac{\partial \varphi_{zo}}{\partial t} + \text{div} (\varphi_{zo} \vec{v} - D_{zo} \cdot \text{grad} \varphi_{zo}) = 0. \quad (1.94)$$

Это уравнение будет справедливо при расчете горения как в случаях, когда скорость реакции определяется физическими процессами, так и тогда, когда она определяется кинетикой процесса.

Интересно отметить, что предположение о равенстве коэффициентов переноса не только свело два уравнения для отдельных реагентов к одному уравнению, но и само это уравнение оказалось тождественным уравнению для химически инертного компонента, то есть как и для пассивной примеси или температуры.

Не всегда можно упростить запись уравнений диффузии с химическими реакциями, как это было сделано выше. Однако, даже в тех случаях, когда приходится учитывать источниковый член, полезно исходное уравнение привести к такому виду, чтобы в них источниковый член либо отсутствовал, либо был мал, так как он сильно влияет на сходимость итерационного процесса решения задачи численным методом.

Общее уравнение переноса скалярной гидродинамической субстанции  $\Phi$  в канонической дифференциальной форме может быть записано в виде (1.86). В определенных задачах источниковый член  $S^\Phi$  представляет собой скорость образования химического компонента  $R_j$  в результате химической реакции в единице объема смеси. Эта величина относится к области химической кинетики, которая дает соотношения, связывающие  $R_j$  с местным давлением, температурой и концентрацией. Например, если компонент  $j$  соединяется с компонентом  $k$ , в результате чего образуется компонент  $l$ , то соответствующее соотношение может иметь вид

$$R_j = K_1 p m_l \cdot \exp(-E_1 / RT) + K_2 p^2 m_l m_k \cdot \exp(-E_2 / RT), \quad (1.95)$$

где  $K_l, K_2, E_1, E_2$  – постоянные; первое слагаемое описывает образование  $j$  при разложении  $l$ , а второе – исчезновение  $j$  в результате соединения с  $k$ .

Заметим, что химическая кинетика дает алгебраические уравнения, связывающие значения  $R_j$  с другими зависимыми переменными. Эти уравнения часто бывают нелинейными, надежность правильного определения соответствующих констант обычно невысока, а иногда и сомнительна. Поэтому этот вопрос требует отдельного обсуждения и выходит за рамки нашего рассмотрения.

В заключение заметим, что получить аналитическое решение системы уравнений Навье-Стокса очень сложно. В литературе известно очень мало таких решений и все они получены при большом числе различных допущений. Поэтому перспективным направлением их решения являются численные методы. Однако и в этом случае проблема расчета поля давления вызывает большие сложности, так как в системе уравнений движения несжимаемой жидкости отсутствует уравнение для его определения.

### 1.5. Пример точного решения уравнений Навье-Стокса для распределения скорости в плоском канале при полностью развитом течении

Для тестирования численных методов решения уравнений движения несжимаемой жидкости большой интерес представляют случаи простых течений для которых получены аналитические решения. В качестве такого примера рассмотрим стационарное двумерное неизотермическое течение несжимаемой жидкости в горизонтальном канале с параллельными стенками. Общая система уравнений движения и переноса тепла для таких течений в дифференциальной форме записывается в виде [226]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.96)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]; \quad (1.97)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]; \quad (1.98)$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \phi, \quad (1.99)$$

где диссипативная функция  $\phi$  в случае двумерной задачи равна

$$\phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (1.100)$$

Особенно простые точные решения приведенной системы уравнений получаются для случаев полностью развитых течений в плоском канале.

Рассмотрим случай развитого изотермического течения в канале, когда стенки канала и движущаяся жидкость имеют одинаковую температуру. Такое течение принято называть течением Пуазейля. Движение жидкости в канале происходит под действием перепада давления в направлении оси  $x$ . Начало декартовой прямоугольной системы координат находится в точке 0 на нижней стенке канала. Скорость течения на стенках канала вследствие прилипания равна нулю. Течение в таком канале по определению считается развитым, когда профиль продольной скорости  $u$  зависит только от координаты  $y$  и не зависит от  $x$ . В этом случае из уравнений движения и неразрывности можно получить их точное решение.

Действительно, из физической постановки задачи очевидно, что на установившемся участке канала, то есть в случае полностью развитого течения, поперечная скорость  $v$  будет отсутствовать. Тогда из уравнения неразрывности (1.96) следует, что  $\partial u / \partial x = 0$  и, следовательно

$$u = u(y), \quad v = 0. \quad (1.101)$$

Поэтому из дифференциальных уравнений движения (1.97), (1.98) для развитого течения в плоском канале для  $x$  и  $y$  направлений имеем

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.102)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (1.103)$$

Для удобства введем в рассмотрение безразмерные величины

$$Y = y/h, \quad X = x/h, \quad U = u/u_{cp}, \quad P = \frac{P}{\rho u_{cp}^2}, \quad (1.104)$$

где  $h$  - ширина канала,  $u_{cp}$  - среднерасходная скорость.

Запишем теперь уравнения (1.102) и (1.103) в следующей безразмерной форме

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = \text{Re} \frac{\partial P}{\partial X}; \quad \frac{\partial P}{\partial Y} = 0, \quad (1.105)$$

где  $Re = \frac{u_{cp} \cdot h}{\nu}$  - число Рейнольдса,  $u_{cp} = \int_0^h u(y) dy$  - среднерасходная скорость.

Из уравнений (1.105) следует, что поскольку давление не зависит от  $Y$ , то градиент давления в продольном направлении  $X$  постоянен, то есть  $\partial P / \partial X = const$ . Поэтому первое уравнение (1.105) становится обыкновенным дифференциальным уравнением относительно скорости  $U$ . При выбранной системе координат, граничные условия прилипания жидкости на твердых стенках канала для  $U$  записываются в виде

$$U(0) = 0, \quad U(1) = 0. \quad (1.106)$$

С учетом сказанного, первое уравнение (1.105) легко интегрируется аналитически и при граничных условиях (1.106) его решение записывается в виде

$$U(Y) = \frac{Re}{2} \frac{\partial P}{\partial X} (Y - 1)Y. \quad (1.107)$$

Зная распределение скорости поперек канала в форме (1.107) определим безразмерную среднерасходную скорость по формуле

$$U_{cp} = \int_0^1 U(Y) dY = \frac{Re}{2} \frac{\partial P}{\partial X} \int_0^1 (Y^2 - Y) dY = -\frac{Re}{12} \frac{\partial P}{\partial X}. \quad (1.108)$$

Вспоминая теперь, что по определению  $U_{cp} = 1$ , следовательно из (1.108) для постоянного градиента давления  $\partial P / \partial X$  имеем

$$\frac{\partial P}{\partial X} = -\frac{12}{Re}. \quad (1.109)$$

В более общем случае при анализе течения в канале или трубе градиент давления можно выразить через коэффициент сопротивления  $\lambda$ , зависящий от числа Рейнольдса

Подставляя значение градиента давления (1.109) в формулу (1.107) для распределения скорости окончательно получаем

$$U(Y) = 6(1 - Y)Y. \quad (1.110)$$

Уравнение (1.110) показывает, что продольная скорость  $U(Y)$  в плоском канале на установившемся участке является параболической функцией поперечной координаты  $Y$ . Она равна нулю на стенках канала при  $Y=0$ ,  $Y=1$  и имеет максимальное значение  $U_m$  на оси канала. Действительно, полагая в

(1.110)  $Y = 0,5$  находим значение осевой максимальной скорости в виде

$$U_m = \frac{3}{2} \quad \text{или} \quad u_m = \frac{3}{2} u_{cp} \quad (1.111)$$

Полученное решение (1.110) принято называть параболой Пуазейля. Таким образом в рассматриваемом случае продольная скорость в плоском канале имеет универсальный профиль Пуазейля независимо от числа Рейнольдса.

Введем теперь в рассмотрение коэффициент сопротивления  $\lambda$  движению жидкости сквозь плоский канал шириной  $h$  и длиной  $l$  с помощью общепринятой формулы [132]

$$\lambda = \frac{2R_x}{\rho u_{cp}^2 \cdot l \cdot 1}$$

Здесь  $R_x$  - сила действующая со стороны жидкости на участок плоского канала длиной  $l$  равная  $R_x = (p_1 - p_2) \cdot h$ . Следовательно для коэффициента сопротивления имеем

$$\lambda = \frac{2(p_1 - p_2) \cdot h}{\rho u_{cp}^2 \cdot l} \quad (1.112)$$

Тогда переходя к безразмерным переменным  $P = p / \rho u_{cp}^2$ ,  $L = l / h$  и учитывая формулу (1.109) для градиента давления из выражения (1.112) получим закон сопротивления для плоской трубы в виде

$$\lambda = \frac{2\Delta p \cdot h}{\rho u_{cp}^2 \cdot l} = 2 \frac{P_1 - P_2}{L} = -2 \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{24}{\text{Re}}. \quad (1.113)$$

где  $\text{Re} = \frac{u_{cp} \cdot h}{\nu}$ ,  $h$  - ширина канала. Практический интерес обычно представляют две постановки задачи. В первой задаче задан необходимый расход в канале  $Q = u_{cp} \cdot h$ , а требуется определить перепад давления  $\Delta P$  на заданном участке длиной  $L$ , который обеспечит этот расход. Во второй задаче, задан перепад давления  $\Delta P$  на участке длиной  $L$ , а требуется определить секундный объемный расход жидкости  $Q$  через поперечное сечение канала  $h$ . Важно отметить, что перепад давления и расход в канале взаимосвязаны и они не могут назначаться произвольно в конкретных расчетах.

## 1.6. Пример точного решения для распределения температуры в неизотермическом плоском канале при развитом поле скоростей

В этом разделе рассматривается задача о расчете распределения температуры и теплообмена в плоском неизотермическом канале для случая полностью развитого ламинарного течения. Предполагается, что в длинном канале шириной  $h$  течет жидкость с локальной температурой  $T$ , а температура стенок канала имеет температуру  $T_l$  отличную от температуры жидкости. При этом поле скоростей и поле температур полностью установившиеся.

В такого класса течениях опорной температурой обычно выбирается средняя температура жидкости в поперечном сечении канала  $T_{cp}$ , которая определяется по формуле

$$T_{cp} = \frac{1}{S} \int T(y) dS, \quad (1.114)$$

где  $S$  - поперечное сечение канала.

В целом распределение температуры в рассматриваемом канале существенно двумерное и описывается уравнением переноса тепла (1.99). Физические характеристики жидкости примем постоянными. Чтобы определить распределение температуры на развитом участке нужно получить решение этого уравнения в предположении, что поле скоростей носит уже развитый характер и описывается выше полученной параболой Пуазейля.

По аналогии с динамической задачей будем считать, что в случае неизотермической задачи, когда температура стенок канала отлична от температуры жидкости в канале, тепловой пограничный слой будет полностью развитым, если температура жидкости в канале не будет зависеть от продольной координаты  $x$ , то есть

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

а будет зависеть только от поперечной координаты  $y$ , то есть  $T = T(y)$ .

Рассмотрим решение задачи по распределению температуры при условиях, когда температура верхней и нижней стенок канала поддерживается одинаковой и равна  $T_l$ . Следовательно граничные условия для температуры на стенках канала имеют вид

$$T(0) = T(h) = T_l. \quad (1.115)$$

Будем считать, что профиль скорости в канале параболический и определен формулой (1.110). В этом случае удастся получить простое и точное решение для распределения температуры. Действительно, в рассматриваемом случае диссипативная функция  $\phi = (\partial u / \partial y)^2$ ,  $\nu = 0$  и  $T$  не зависят от  $x$ . Поэтому вся левая часть уравнения (1.99), описывающая перенос тепла посредством конвекции, исключается. Следовательно, поле температур в канале определяется только механизмом теплопроводности в поперечном направлении  $y$  и теплом, образующимся вследствие трения жидкости о стенки канала.

Учитывая сказанное, исходное уравнение переноса тепла (1.99) преобразуется к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} = -\mu \left( \frac{du}{dy} \right)^2. \quad (1.116)$$

Для удобства решения перейдем к безразмерным величинам по формулам  $y = Y \cdot h$ ,

$$u = U \cdot u_{cp}, \quad \theta = \frac{T - T_1}{T_{cp} - T_1} \quad \text{и} \quad \text{вспомним, что} \quad \lambda = \rho c_p a, \quad \text{где} \quad a -$$

коэффициент температуропроводности,  $\nu = \mu / \rho$  - коэффициент кинематической вязкости. Тогда, используя выражение (1.110) для скорости, уравнение (1.116) в безразмерных переменных преобразуется к виду

$$\frac{d^2 \theta}{dY^2} = -36 \cdot \text{Pr} \cdot Ec (1 - 4Y + 4Y^2), \quad (1.117)$$

где  $Ec = \frac{u_{cp}^2}{c_p (T_{cp} - T_1)}$  - число Эккерта,  $\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$  - число Прандтля.

Полученное уравнение относительно безразмерной температуры  $\theta$  легко интегрируется аналитически и при граничных условиях (1.115), когда

$$\theta(0) = \theta(1) = 0, \quad (1.118)$$

его решение записывается в виде

$$\theta = 6 \cdot \text{Pr} \cdot Ec (1 - 3Y + 4Y^2 - 2Y^3) Y. \quad (1.119)$$

Выражение (1.119) показывает, что распределение температуры по поперечной координате  $Y$  описывается параболой четвертой степени. Естественно, избыточная температура  $\theta$  удовлетворяет заданному значению на стенках канала и имеет максимальное значение на оси канала. Полагая в формуле (1.119)  $Y = 0,5$ , для осевой температуры получаем



$$\theta_m = \frac{3}{4} \cdot \text{Pr} \cdot Ec. \quad (1.120)$$

Среднее значение температуры  $\theta_{cp}$  рассчитывается по формуле (1.114) и для нее находим

$$\theta_{cp} = 6 \cdot \text{Pr} \cdot Ec \int_0^1 (Y - 3Y^2 + 4Y^3 - 2Y^4) dY = \frac{3}{5} \text{Pr} \cdot Ec. \quad (1.121)$$

Откуда следует связь осевой максимальной и средней температуры в виде

$$\theta_m = \frac{5}{4} \theta_{cp} = 1,25 \cdot \theta_{cp}. \quad (1.122)$$

Из полученного решения (1.119) следует, что числа Прандтля и Эккерта являются важными параметрами для температурного пограничного слоя и теплопередачи, так как позволяют оценить влияние тепла, возникающего вследствие трения о стенку, на охлаждающее действие жидкости, соприкасающейся со стенкой. При больших скоростях течения может возникнуть даже такая ситуация, когда более теплая, чем жидкость, стенка будет не охлаждаться, а нагреваться теплом, возникающим в жидкости вследствие трения. Это явление имеет фундаментальное значение для проблемы охлаждения обтекаемой стенки при больших скоростях или очень вязкой жидкости.

Поток тепла от стенки единичной длины к жидкости определяется законом Фурье по формуле

$$q = -a \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (1.123)$$

Для его определения продифференцируем по  $Y$  выражение (1.119) для температуры  $\theta$ . Будем иметь

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = 6 \text{Pr} \cdot Ec [1 + (-6 + 12Y - 8Y^2)Y]. \quad (1.124)$$

Общий поток тепла  $Q$  от двух стенок единичной длины будет равен

$$Q = q_1 + q_2 = a \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} - a \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=1}. \quad (1.125)$$

Нетрудно видеть, что каждый из потоков тепла  $q_1$  и  $q_2$  определяется соотношением

$$q_1 = 6 \text{Pr} \cdot Ec, \quad q_2 = -6 \text{Pr} \cdot Ec. \quad (1.126)$$

Следовательно, суммарный поток тепла от обеих стенок канала равен

$$Q=12Pr \cdot Ec . \quad (1.127)$$

Если определить число Нуссельта соотношением  $Nu = \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot \frac{h}{T_1 - T_{cp}} = \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}$ , то для него получим следующее значение

$$Nu = 6 Pr \cdot Ec. \quad (1.128)$$

Другим практически интересным случаем решения системы уравнений движения вязкой жидкости является течение в цилиндрической круглой трубе, которое рассматривается ниже.

### 1.7. Пример точного решения уравнений Навье-Стокса для распределения скорости в круглой трубе при развитии течения

Рассмотрим установившееся ламинарное течение в цилиндрических круглых трубах. Такое течение принято называть течением Гагена-Пуазейля. Пусть цилиндрическая труба имеет круговое сечение, радиус которого обозначим через «а». В качестве исходных уравнений движения жидкости примем уравнение Навье-Стокса в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  [42] с центром расположенным на оси трубы. Ось трубы примем совпадающей с осью  $Oz$ . Несжимаемая жидкость течет вдоль этой трубы и внешние силы отсутствуют. При развитии течения оно стационарно и в каждой точке скорость направлена параллельно оси трубы и следовательно для компонентов скорости имеем

$$v_r = v_\theta = 0, \quad v_z = v(r, \theta, z).$$

При этих допущениях система исходных уравнений движения жидкости в цилиндрической системе координат принимает следующий простой вид:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (1.129)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Первые два из этих уравнений показывают, что давление « $p$ » может зависеть только от  $z$ , а последнее уравнение показывает, что скорость  $v$  есть функция только от  $r$  и  $\theta$ . Но тогда правая часть третьего уравнения не зависит от  $z$  и поэтому левая часть этого уравнения тоже не может зависеть

от  $z$ . Следовательно градиент давления  $\frac{\partial p}{\partial z}$  в продольном направлении есть величина постоянная

$$\frac{\partial p}{\partial z} = const.$$

Поэтому из третьего уравнения следует, что скорость  $v(r, \theta)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = const = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_2 - p_1}{l} = -\frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (1.130)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  давление в двух точках на оси  $\theta z$ , отстоящих друг от друга на расстоянии  $l$ . Очевидно, что при выбранной системе координат скорость  $v$  должна удовлетворять граничному условию прилипания на стенке

$$v = 0 \text{ при } r = a \quad (1.131)$$

и быть ограниченной на оси трубы, то есть при  $r = 0$ . Далее будем искать решение уравнения (1.130) зависящее только от  $r$  и удовлетворяющее условию (1.131). Предполагая, что  $v = v(r)$ , уравнение (1.130) можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r.$$

Интегрируя это уравнение по  $r$  находим

$$r \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + A.$$

Разделив обе части этого уравнения на  $r$  и снова его интегрируя получим

$$v = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + A \ln r + B, \quad (1.132)$$

где  $A$  и  $B$  - постоянные интегрирования. В силу условия ограниченности скорости  $v$  при  $r = 0$ , постоянную интегрирования  $A$  принимаем равной нулю  $A = 0$ . Тогда граничное условие (1.131) дает

$$\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} a^2 + B = 0. \text{ Откуда } B = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} a^2.$$

Следовательно решение уравнения (1.130) при условии (1.131) имеет вид

$$v = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (a^2 - r^2)$$

и можно показать, что никакого другого решения не существует [118]. Заменяя постоянный градиент давления через его перепад на участке длиной  $l$  находим

$$v = \frac{(p_1 - p_2)}{4\mu l} (a^2 - r^2). \quad (1.133)$$

Из (1.133) видно, что распределение скорости в круглой трубе подчиняется параболическому закону. Тогда максимальная скорость имеет место на оси трубы. Полагая в (1.133)  $r = 0$  для осевой скорости получим

$$v_m = \frac{(p_1 - p_2)a^2}{4\mu l}. \quad (1.134)$$

Расход жидкости через поперечное сечение трубы в единицу времени определится по формуле

$$Q = \int_0^a 2\pi r \cdot v \cdot dr = \frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{(p_1 - p_2)}{l}. \quad (1.135)$$

Тогда для среднерасходной скорости  $v_o$  имеем

$$v_o = Q / \pi a^2 = \frac{a^2}{8\mu} \frac{(p_1 - p_2)}{l} = \frac{1}{2} v_m, \quad (1.136)$$

откуда  $v_m = 2v_o$ , то есть максимальная осевая скорость в круглой трубе равна двум среднерасходным. Касательные напряжения в жидкости  $p_{rz}$  вычисляются по формуле

$$p_{rz} = \mu \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{(p_1 - p_2)r}{2l}. \quad (1.137)$$

С помощью формул (1.134)-(1.136) определяется интересующий нас перепад давления  $(p_1 - p_2)$  через расход жидкости в трубе  $Q$  и через среднерасходную скорость  $v_o$  в виде

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{8\mu l \cdot Q}{\pi a^4}, \quad p_1 - p_2 = \frac{8\mu l \cdot v_o}{a^2}. \quad (1.138)$$

Введем в рассмотрение коэффициент сопротивления  $\lambda$  для круглой трубы по формуле [132]

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{2a} \frac{\rho v_o^2}{2}. \quad (1.139)$$

Тогда выражая  $\Delta p$  через  $v_o$  по (1.138) и вводя в рассмотрение число Рейнольдса  $Re = v_o \cdot 2a / \nu$  после простых преобразований получим следующий закон сопротивления для цилиндрических круглых труб

$$\lambda = \frac{4a}{l \cdot \rho v_0^2} \cdot \frac{8\mu l \cdot v_0}{a^2} = \frac{32\nu}{v_0 \cdot a} = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (1.140)$$

Задача о течении в трубе имеет большое практическое значение. Исторически этому вопросу были посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования, которые привели к открытию важных закономерностей. Так, например, О. Рейнольдс установил известное условие перехода от ламинарной формы течения к турбулентной.

Рассмотренная задача о течении в круглой трубе имеет строгое аналитическое решение, однако оно применимо только для случаев ламинарного режима течения, которое имеет место при малых числах Рейнольдса, как например, в тонких капиллярных трубках. На рис. 1.2 приведено сравнение теоретического расчета по формуле (1.140) с результатами измерений Г. Хагена [226], которые, как видим, хорошо согласуются с экспериментальными данными в области умеренных чисел Рейнольдса.

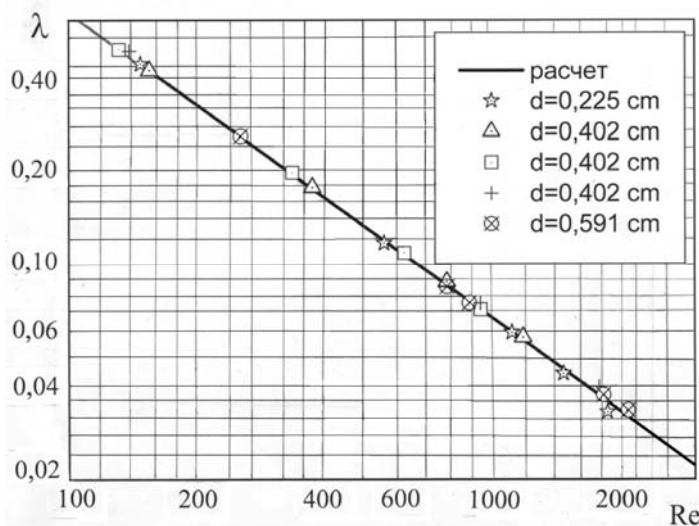


Рис. 1.2. Зависимость коэффициента сопротивления  $\lambda$  от числа Рейнольдса для ламинарных течений в круглой трубе [226].

Далее наша задача состоит в разработке общего метода численного решения дифференциальных уравнений вида (1.77), (1.86), (1.94) при различных начально-краевых условиях. Этот путь будет состоять из следующих основных этапов:

- сведение исходных уравнений к системе алгебраических конечно-разностных уравнений, связывающих значения искомых переменных в каждом узле расчетной сетки с их значениями в соседних узлах;

- преобразование этих уравнений к виду, удобному для численного решения, например, итерационным методом;
- построение алгоритма итерационного метода решения задачи.

Способ реализации этих этапов в основном будет стандартный, но иногда мы будем отходить от него с целью модификации предлагаемого метода для повышения его точности и экономичности.

## 1.8. Метод сеток и дискретизация дифференциальных уравнений

Общая теория методов построения разностных схем для дифференциальных уравнений математической физики рассмотрена в монографиях А.А. Самарского [181, 182], С.К. Годунова, В.С. Рябенского [87], Г.И. Марчука [140], П. Роуча [178], Н.Н. Яненко [228], Р. Рихтмайера, К. Мортон [173] и других. В задачах механики жидкостей и газа широко известны три группы численных методов: метод характеристик, метод конечных элементов и метод конечных разностей. Существуют еще и другие специфические методы, как например, спектральный метод [151, 163] и др. Удобство использования каждого из них зависит от типа рассматриваемого уравнения – гиперболического, параболического или эллиптического, геометрии расчетной области и т.п. Наиболее распространенным методом численного решения задач гидродинамики и теплообмена является метод конечных разностей [157, 164, 178, 182, 184, 274]. Привлекательность метода конечных разностей связана с его универсальностью и сравнительной простотой получения дискретных уравнений, пригодных для непосредственного решения на ЭВМ. Этот метод широко применяется для решения нелинейных уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов. Имеющиеся трудности его использования связаны с необходимостью запоминания в процессе расчетов больших массивов чисел для обеспечения высокой точности и устойчивости получаемых решений. Рассмотрим подробно этот метод.

Согласно методу конечных разностей рассматриваемая функция  $f$  описывается ее значениями в конечном числе точек  $(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N)$ , то есть область непрерывного аргумента заменяется расчетной областью и в ней вводится расчетная сетка, которая представляет собой дискретную совокупность узловых точек на плоскости или в пространстве  $(t, x, y, z)$ . Функция рассматриваемая на расчетной сетке называется **сеточной функцией** и обозначается через  $f_j = f(x_j)$ , где  $x_j$  - узлы сетки и  $j = \overline{1, N}$ . В некоторых сложных задачах вводят не одну, а несколько сеток. В случае

нестационарных задач дискретные значения переменных в узлах сетки представляются на дискретных временных интервалах (слоях).

Важным частным случаем является равномерная пространственно-временная прямоугольная сетка

$$S_0(t^n, x_j, y_i, z_k), \quad t^n = n \cdot \Delta t, \quad x_j = x_0 + j \cdot \Delta x, \quad y_i = y_0 + i \cdot \Delta y, \quad z_k = z_0 + k \cdot \Delta z,$$

где  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  - положительные числа называемые шагами сетки по  $t, x, y, z$  соответственно,  $n, j, i, k$  - целые числа. Совокупность узлов соответствующих фиксированному значению  $n$ , называется слоем. Для краткости шаги часто обозначают  $\Delta x = h_j, \Delta y = h_i, \Delta z = h_k$ . Сеточные функции  $f(t, j, i, k)$  иногда рассматривают как элементы векторного пространства.

Уравнения в которых присутствует независимая переменная, играющая роль времени, обычно называют эволюционными уравнениями. В гидромеханике система исходных уравнений в частных производных часто содержит такое слагаемое. Поэтому обычно задача состоит в построении их решения в заданной области  $D$  не только при заданных граничных условиях, но и при известном начальном условии зависимых переменных.

Основная идея численного метода сеток состоит в том, что дифференциальное уравнение и краевые условия заменяются сеточными уравнениями, связывающими искомые функции в узлах сетки. Совокупность узлов сетки, используемых при построении сеточного уравнения, называется **шаблоном**. Рассматриваемые сеточные уравнения вместе с описанием сетки называют **разностной схемой**. Замену дифференциальных уравнений их конечно-разностными соотношениями принято называть **дискретизацией** исходных дифференциальных уравнений, а получающиеся при этом системы алгебраических уравнений называют их **дискретными аналогами**. При получении этих уравнений необходимо использовать определенные допущения о характере поведения рассматриваемой зависимой переменной  $f$  в интервале между двумя соседними узловыми точками.

Дискретный аналог представляет собой систему алгебраических уравнений, связывающих значение зависимой переменной  $f$  в некоторой группе узловых точек. То, что в дискретный аналог входят значения только в нескольких узловых точках, является следствием кусочного характера выбранных профилей. При этом значение переменной  $f$  в некоторой узловой точке оказывает влияние только на распределение  $f$  в ее ближайшей окрестности. Предполагается, что при очень большом числе узловых точек решение дискретных уравнений сближается с точным решением соответствующего дифференциального уравнения. Это следует из того, что при сближении узловых точек изменение  $f$  между соседними

точками становится малым, а тогда конкретный характер предполагаемого профиля становится несущественным.

Для приближенного восстановления функции по ее дискретным значениям часто используют интерполяционные полиномы. Поэтому одним из способов построения разностных аппроксимаций для производных функций, входящих в рассматриваемое уравнение, основан на замене функции  $f(x)$  ее интерполяционным полиномом. Другой, наиболее часто используемый способ, опирается на известное разложение функций в ряд Тейлора на принятом сеточном шаблоне.

По определению производная от непрерывной функции  $f$  по аргументу  $x$  выражается формулой

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}.$$

В теории дифференциальных уравнений интервал  $\Delta x \sim h$  стремится к нулю. В конечно-разностных выражениях размер шага должен оставаться конечным. Поэтому сеточные аппроксимации производных, получаемых непосредственно с помощью разложения в ряды Тейлора, определяются по формулам следующего вида:

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \dots \quad \text{разности «вперед» - } 0(\Delta t);$$

$$\frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots \quad \text{разности «вперед» - } 0(h);$$

$$\frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots \quad \text{разности «назад» - } 0(h);$$

$$\frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots \quad \text{центральные разности - } 0(h^2);$$

$$\frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \dots \quad \text{центральные разности - } 0(h^2).$$

Здесь многоточием обозначены члены высших порядков малости. Это наиболее простые конечно-разностные формулы для производных. При таком подходе точность аппроксимации зависит в первую очередь от шага расчетной сетки  $h$  и от порядка отбрасываемых членов в разложении Тейлора. Поэтому важной характеристикой сетки является ее шаг по пространству  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  и времени  $(\Delta t)$ . В областях с большими градиентами параметров шаг должен быть мелким по сравнению с шагом



для областей где функции искомых величин являются гладкими. Кроме шага, важным является и угол пересечения сеточных линий. Обычно различают ортогональные и косоугольные сетки. Очевидно, что неравномерный шаг и неортогональность существенно усложняют дискретизацию исходных уравнений. Поэтому выбор того или иного типа сетки существенным образом влияет на процесс решения задачи и качество получаемых результатов.

В методе конечных разностей характерным является разделение разностных схем на явные и неявные схемы различного порядка точности. К явным относятся схемы, которые при вычислении искомых переменных на данном шаге используют лишь результаты предыдущего вычислительного шага. В неявных схемах для получения значения в точке на данном шаге могут быть использованы значения того же шага вычислений, что приводит к необходимости решения системы алгебраических уравнений [61, 65]. Каждая из названных схем имеет определенные преимущества и недостатки. Явные схемы более просты, но требуют достаточно жестких ограничений на величину шага дискретизации сетки. Это ограничение обусловлено известным критерием устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви [181]. Неявные схемы не столь чувствительны к величине шага сетки, но более сложны в компьютерной реализации.

Поясним суть явных и неявных схем на примере уравнений Навье-Стокса при отсутствии внешних сил, записанных в следующей дивергентной тензорной форме для безразмерных величин

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta \tau} + \delta \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ V_i^{n+1} V_k^{n+1} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial V_i^{n+1}}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k^{n+1}}{\partial x_i} \right) \right] + \\ + (1 - \delta) \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ V_i^n V_k^n - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial V_i^n}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k^n}{\partial x_i} \right) \right] = - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс  $n$  означает последовательные дискретные моменты времени,  $\delta$  - постоянная величина  $0 \leq \delta \leq 1$ . Если  $\delta = 0$ , то получаем явную схему аппроксимации, а при  $\delta = 1$  получаем чисто неявную схему.

Погрешностью аппроксимации называется разность между дифференциальным уравнением и его конечно-разностным аналогом. Исходя из этого, условием согласованности разностной схемы, является стремление к нулю погрешности аппроксимации при измельчении расчетной сетки.

Важное место в численных методах занимает понятие устойчивости и монотонности разностной схемы. Обычно оно строго применимо лишь при решении задачи, например, маршевым методом. Разностная схема

называется устойчивой, если на каждом шаге по маршевой координате любая ошибка не возрастает при переходе от одного шага к другому. В общем случае устойчивость разностной схемы понятие довольно тонкое. Методы анализа устойчивости в основном разработаны лишь для линейных уравнений в частных производных. Однако эти результаты часто используют и для нелинейных уравнений.

Построить монотонную разностную схему высокого порядка точности очень трудно. Обычно явные методы связаны с ограничением по числу Рейнольдса, а неявные схемы связаны с жестким условием монотонности на шаг сетки при несимметричной аппроксимации конвективных слагаемых соответствуют появлению значительной численной вязкости.

В вычислительной гидродинамике широко известно условие устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви [181, 208], которое ограничивает шаг по времени  $\Delta t$  :

$$\Delta t(\text{Re} \cdot \Delta x \cdot \Delta y) \leq 0,25.$$

Выполнение условий устойчивости и согласованности достаточно для сходимости разностной схемы, под которой понимается стремление решения конечно-разностного аналога уравнения в частных производных к решению исходного дифференциального уравнения при заданных начально-краевых условиях.

При оценке сходимости расчетной схемы нужно различать итерационную и аппроксимационную сходимость. Под итерационной сходимостью понимают процесс получения решения конечно-разностного уравнения методом итераций с некоторой заданной точностью. Под аппроксимационной сходимостью подразумевается сходимость решения конечно-разностного уравнения к решению исходного дифференциального уравнения при стремлении к нулю размера шага по времени и пространству. Существует целый ряд различных способов оценки сходимости схемы для различных типов задач, однако общих строгих математических критериев пока не существует.

Важность решаемых в гидродинамике проблем предъявляет высокие требования к вопросам достоверности и надежности разрабатываемых программ и конечных расчетных результатов, получаемых с помощью методов компьютерной гидромеханики. В настоящее время уже существуют некоторые общие требования и стандартные приемы для качественной и количественной оценки ошибок и погрешностей, возникающих на различных стадиях численного исследования [21, 24, 142, 181].

При проведении конкретных расчетов наиболее удобными являются регулярные сетки с постоянными шагами  $\Delta x$  и  $\Delta y$  во всей расчетной области. Однако практически такие сетки использовать затруднительно либо из-за того, что граница расчетной области не совпадает с узлами регулярной

сетки, либо из-за необходимости сгущать сетку в некоторых подобластях для достижения требуемой точности решения задачи. Поскольку с этой проблемой приходится сталкиваться часто, то этому вопросу в компьютерной гидродинамике уделялось значительное внимание [21, 62, 165, 178]. В настоящее время существуют общие рекомендации построения нерегулярных и адаптивных сеток вводимых из-за криволинейной формы границы области или по каким-либо другим причинам. Кратко они сводятся к следующему:

- использованию очень мелких равномерных сеток и переносу граничных условий в узел сетки ближайший к границе, либо использованию линейной интерполяции для определения значения искомой функции в приграничных узлах сетки, расположенных на расстоянии от границы области, меньшее шага сетки;
- применению преобразования координат, переводящее неравномерную сетку в физических координатах в равномерную сетку в вычислительной области;
- использованию адаптивных алгоритмов решения краевых задач;
- построению конечно-разностной схемы, пригодной для решения рассматриваемых уравнений на неравномерной сетке.

Следует подчеркнуть, что дискретизация исходных уравнений существенно проще на сетке с равномерным шагом. Поэтому удобно осуществлять ее в трансформированной плоскости, как, например в случае использования криволинейных систем координат [165]. Метрические коэффициенты, определяющие связь сеток в физической и преобразованной плоскостях, вводятся в преобразованные формы исходных уравнений. Таким образом, задача построения сетки сводится к нахождению координат узлов в физической плоскости и к расчету в этих точках метрических коэффициентов или функций преобразования.

Моделирование течения в безграничном пространстве требует бесконечную область представлять в виде конечной расчетной области. В случае внешнего обтекания какого-либо тела или препятствия безграничным потоком наибольший интерес будет представлять центральная область, где расположено тело. Тогда рекомендуется, чтобы размер ячейки прогрессивно увеличивался при удалении от центра. Растягивая ячейки вблизи краев расчетной области, можно без увеличения объема требуемой памяти расширить расчетную область.

Для конечной проверки надежности численного метода необходимо результаты тестовых вычислений сравнивать по возможности с данными экспериментов, результатами аналитических и асимптотических исследований, а также другими численными данными, полученными иными способами.

В методе конечных разностей для уравнений Навье-Стокса существует большой выбор различных возможностей дискретизации исходных уравнений. Прежде всего существует два варианта выбора зависимых переменных, описывающих рассматриваемое течение. Это либо естественные переменные – скорость, давление, либо – функция тока, вихрь. Разностные схемы в обоих этих вариантах характеризуются некоторыми общими основными признаками:

- структура схемы: явная или неявная;
- схемы: консервативные или неконсервативные;
- способ аппроксимации конвективных членов (односторонние разности, симметричные, с разностями против потока) и т.д.;
- метод решения разностных уравнений;
- структура и способ построения конечно-разностной сетки: равномерная, разнесенная, неструктурная, структурированная и т.д.

После того как сделан выбор математической модели для практического решения задачи численным методом, необходимо выполнить два важных этапа:

- выбор разностной сетки и способ построения дискретных аналогов исходных уравнений;
- решение полученной системы разностных алгебраических уравнений с помощью сходящейся итерационной процедуры.

Метод конечных разностей широко используется для решения как линейных, так и нелинейных уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов. Часто применяемые конечно-разностные схемы могут использовать как лагранжевы, так и эйлеровы подходы. В первом случае координатная сетка связывается с жидкими частицами. Это удобно для течений со сравнительно малыми относительными смещениями. Во втором случае, когда расчетная сетка фиксируется в пространстве, для расчета течений с большими деформациями, применяется эйлерова схема. Примером смешанного Лагранже-Эйлерова подхода является известная схема «маркеров и ячеек» (MAC) [212], предложенная Ф. Харлоу и Дж. Велчем [278].

Эффективность решения конкретных задач в значительной мере зависит от расположения узлов расчетной сетки. При увеличении числа узлов точность решения возрастает, однако увеличивается и размерность алгебраических систем уравнений и, следовательно, время счета. Поэтому для уменьшения затрат машинного времени число узлов необходимо минимизировать, но при этом нужно обеспечить заданную точность решения. Совершенно очевидно, что размер сетки и точность решения разностной задачи зависят от поведения искомых функций в смысле их гладкости.

Для каждого уравнения в частных производных существует множество его конечно-разностных аналогов, из которых обычно нельзя выбрать наилучший со всех точек зрения. Поэтому в первую очередь при использовании метода конечных разностей надо стремиться к использованию консервативных схем исходных уравнений задачи, а во вторую очередь, выбрать подходящий для программной реализации метод решения системы алгебраических уравнений.

Важно помнить, что во всех случаях численное решение представляется конечным числом дискретных значений и каждое значение определено с ограниченной точностью. Это означает, что при численном решении задачи, часть информации неизбежно теряется. В результате в расчетах присутствует некоторая неопределенность, проистекающая из процедуры дискретизации. Источником неопределенности является потеря информации о детальной непрерывной структуре решения в пределах дискретных пространственных ячеек и временных шагов. Эта проблема имеет место во всех случаях, когда для представления непрерывных распределений используется конечное число значений. Поэтому аналитические решения являются более предпочтительными чем численные, если их удастся получить.

Поскольку исходные уравнения гидромеханики и тепломассопереноса являются следствием физических законов сохранения (массы, импульса, энергии), то естественно требовать от разностных схем сохранения соответствующих интегральных соотношений не только в окрестности расчетной точки, но и во всей области течения. Такие схемы принято называть консервативными. Обычно для построения консервативных конечно-разностных схем используют исходные дифференциальные уравнения задачи, записанные в дивергентной (консервативной) форме, которые были рассмотрены выше. Однако наряду с традиционными подходами построения конечно-разностных форм общих уравнений гидродинамики возможны и другие варианты. Один из таких эффективных способов получения конечно-разностных аналогов уравнений гидромеханики связан с дискретизацией самих интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии, а не их следствия – дифференциальных уравнений Навье-Стокса. Такой подход, основанный на использовании метода контрольного объема, гарантирует получение полностью консервативной формы конечно-разностных уравнений. Наряду с этим он обладает и рядом других достоинств. Подробно этот вопрос будет обсуждаться нами далее в третьей главе.

## 1.9. Краткий анализ методов численного решения уравнений Навье-Стокса

Течения жидкости и газа как с дозвуковыми, так и сверхзвуковыми скоростями встречаются в природе и в различных областях техники. В силу их сложности и большой практической значимости закономерности движения жидкости исследуются как экспериментальными так и теоретическими методами. Основу теоретических исследований всех прикладных задач составляют фундаментальные дифференциальные уравнения движения сплошной среды именуемые уравнениями Навье-Стокса. Наиболее перспективным направлением их решения являются численные методы. Вследствие этого в течение многих лет усилия механиков и математиков были направлены на разработку численных методов решения задач динамики вязкой жидкости, описываемых как полными, так и приближенными формами уравнений Навье-Стокса. Развитие этого научного направления было обусловлено необходимостью решения широкого круга прикладных задач гидродинамики, теплообмена, аэродинамики и газовой динамики. Среди них особое место занимали проблема снижения сопротивления тел, движущихся в воздухе или в воде, интенсификация и управление процессами перемешивания и тепломассообмена в различных технических устройствах и системах. Определяющее значение в этих вопросах имеют знания о структуре и локальных характеристиках течения, которые не всегда можно получить аналитическими или экспериментальными методами. Поэтому создание надежных численных методов расчета структуры течений вязкой жидкости, учитывающих реальную геометрию тел и технических систем является важной и актуальной задачей в механике жидкости и газа.

При численном решении задачи важным этапом является конечно-разностная аппроксимация системы исходных уравнений и начально-краевых условий. Численные методы в гидромеханике сначала интенсивно развивались применительно к гидроаэродинамике больших скоростей, когда необходимо учитывать эффекты сжимаемости. Поэтому в первую очередь именно для этого класса задач различными исследователями был накоплен большой опыт численного решения уравнений гидромеханики и газовой динамики. В дальнейшем успехи в области численных методов интегрирования уравнений Навье-Стокса шли почти параллельно с ростом уровня развития компьютерных технологий.

Если обратиться к истории этого вопроса, то можно считать, что активная разработка численных методов решения уравнений Навье-Стокса началась в 60-е годы XX века. С тех пор появилось большое количество работ по численному интегрированию уравнений Навье-Стокса на основе

различных подходов и разностных схем. Обзор первых работ этого направления имеется в [37, 157, 178, 181, 222].

Первоначально численные методы основывались на использовании явных схем, однако условие устойчивости решения в этих схемах сильно ограничены значением числа Рейнольдса. Использование неявных схем предпочтительнее, так как они обладают большей областью устойчивости, но они более сложны при реализации, поскольку требуют обращения блочно-трехдиагональных матриц и способствуют появлению значительной аппроксимационной вязкости. В последующие годы значительную популярность приобрели неявные схемы метода переменных направлений [263, 337], схемы расщепления [28, 140] и другие экономичные разностные схемы [141, 210, 228].

Наиболее ранние и широко известные явные конечно-разностные схемы это схемы Лакса и Лакса-Вендрофа [7]. Эти схемы можно назвать основополагающими в практике развития конечно-разностных схем, так как многие более поздние эффективные схемы и алгоритмы были созданы на их основе.

Среди явных схем, используемых для решения уравнений Навье-Стокса в случае сжимаемой жидкости, отметим схемы Мак-Кормака [138], Дюфорти-Франкеля [178], Лакса-Вендроффа [7]. Эти схемы относятся к консервативным схемам [103, 208]. Схема Лакса построена на трехточечном шаблоне, отличается простотой, имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый по времени, но обладает большой аппроксимационной вязкостью, зависящей от шага по времени. Усовершенствованная схема Лакса-Вендроффа в первом варианте была одношаговой, а во втором – двухшаговой, в которой первый шаг представляет собой метод Лакса, а второй шаг – центрированный метод «чехарда». Основная идея двухшаговой схемы Мак-Кормака состоит в использовании схемы «предиктор-корректор».

Все явные схемы имеют жесткие ограничения на максимальный размер шага по времени, которые следуют из известного условия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви [178, 181]. Для преодоления этого ограничения часто используют неявные схемы [193], которые теоретически устойчивы при любых размерах временных шагов. На этой основе для повышения вычислительной эффективности был разработан метод переменных направлений. Среди неявных схем широко известны схема Бима-Уорминга [34] и схема Мак-Кормака [138]. Разностная схема Бима-Уорминга обладает тем достоинством, что эта схема являясь при определенных значениях параметров безусловно устойчивой, имеет второй порядок аппроксимации по времени.

Обзор численных методов решения уравнений Навье-Стокса для течений сжимаемого газа, основанных на нестационарных явно-неявных и

неявных разностных схемах, а также факторизованных методах рассмотрен в работах Дж. Шенга [224], А.А. Приходько [165] и других.

Эффективные конечно-разностные алгоритмы решения задач механики жидкости и газа изложены в работах А.А. Самарского [181, 182], Н.Н. Яненко [228], Г.И. Марчука [140], О.М. Белоцерковского [24, 25], С.К. Годунова [86, 87], Р. Рихтмайера [173], П. Роуча [178], Р. Мак-Кормака [138], П.Н. Вайбищевича [62], К. Флетчера [206], С. Патанкара [158], С. Патанкара, Д. Сполдинга [159], Ф. Харлоу [212] и других.

Развитые в последующие годы численные методы расчета различных классов течений (сжимаемые, несжимаемые) такими исследователями как В.М. Ковеня [107, 108], В.И. Полежаев [164], С.А. Исаев [102], И.А. Белов [18-21], В.К. Андерсон [7], Ю.Д. Шевелев [223], О.М. Белоцерковский [23-25], В.А. Гущин [92 - 94], А.А. Приходько [165], А. М. Госмен [90], Ю. А. Кваша [104], и др. позволили существенно повысить эффективность и сократить время решения уравнений Навье-Стокса для сложных задач, что дало возможность проводить сравнительный анализ различных схем и моделей применительно к сложным течениям.

Наиболее значительные достижения в области численного интегрирования уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа связывают с методом расщепления [28, 92, 107, 139, 140, 181]. В этом направлении следует отметить работы Н.Н. Яненко, который разработал «метод дробных шагов» [228]. Систематическому изложению метода расщепления уравнений по физическим процессам и пространственным переменным для уравнений Навье-Стокса в случае сжимаемого газа посвящены работы [7, 20, 22, 62, 107].

Хороший современный обзор работ по численным методам решения уравнений газовой динамики и уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа имеется у О.М. Белоцерковского [25, 29], П.А. Вайбищевича [62], А.А. Приходько [165] и других.

Обращаясь к случаю несжимаемой жидкости на первый взгляд может показаться, что это частный случай сжимаемой жидкости и следовательно методы решения уравнений Навье-Стокса для сжимаемых сред можно легко распространить для расчета течений несжимаемых жидкостей. Однако это не так. Во-первых, в случае сжимаемой жидкости есть уравнение связывающее давление и плотность. Во-вторых, в явных методах решения уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости шаг во времени ограничен условием устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви. Из этого следует, что временной шаг стремится к нулю при приближении скорости звука к бесконечности, что характерно для несжимаемой жидкости. Поэтому для расчетов таким способом потребуется бесконечно большое количество машинного времени. Неявные методы, такие как схема Бима-Уорминга [34] и др. допускают увеличение шага  $\Delta t$ , но при этом ошибка аппроксимации становится недопустимо большой. Таким образом, даже при помощи



неявной схемы практически нельзя рассчитать течение несжимаемой жидкости, на основе уравнений Навье-Стокса для сжимаемой среды. Поэтому существующее в настоящее время большое количество численных методов решения уравнений Навье-Стокса для сжимаемой и несжимаемой жидкости является следствием отсутствия универсальных методов и необходимости индивидуальных подходов к решению каждого класса задач. Критерием применимости и эффективности метода для выделенного класса задач остается сравнительный численный и физический эксперимент.

Основная трудность решения уравнений Навье-Стокса для случая несжимаемой жидкости связана с расчетом поля давления. Поэтому разработка методов расчета течений вязкой несжимаемой жидкости шла по двум направлениям. К первому направлению относятся методы основанные на записи исходных уравнений относительно естественных переменных скорость-давление  $(V, P)$ . Ко второму направлению относятся методы, использующие преобразованные переменные функцию тока – завихренность. Хотя эти методы исторически развивались параллельно, но большая часть из них разработана применительно к системе  $(\Psi - \Omega)$ , так как при таком подходе удастся исключить давление из рассмотрения.

Существенный успех в решении уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление был достигнут благодаря использованию идеи искусственной сжимаемости [7, 256, 257]. А. Чорин был первым, кто предложил для решения уравнений Навье-Стокса в случае несжимаемой жидкости, записанных относительно естественных переменных – скорость - давление, включить слагаемое с искусственной сжимаемостью, которое обращается в нуль, когда решение устанавливается во времени. При этом уравнения Навье-Стокса образуют смешанную систему гиперболически-параболических уравнений, которая решается методом установления.

Численное решение системы уравнений Навье-Стокса в физических переменных скорость-давление практически началось с 1965 г., когда появился ряд работ [186, 212, 233, 256], в которых были предложены способы задания уравнения для давления. Затем появились более эффективные численные алгоритмы для решения уравнений несжимаемой жидкости.

Одним из наиболее ранних и получивших широкую известность метод решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости является предложенный в работе Ф. Харлоу [212, 278] метод маркеров и ячеек (МАС). Этот метод характерен тем, что исходные уравнения Навье-Стокса записываются в естественных физических переменных скорость-давление, а для построения конечно-разностной схемы используется разнесенная сетка. Одной из ключевых идей метода МАС является сведение задачи к решению

дискретного уравнения Пуассона для давления, которое решается на каждом временном слое.

Метод (MAC) или метод «частиц в ячейках» сочетает в себе черты лагранжева и эйлерова подходов. Область интегрирования здесь разбивается неподвижной (эйлеровой) сеткой; однако сплошная среда моделируется дискретной совокупностью «частиц» фиксированной массы (лагранжева сетка частиц), которые и движутся через эйлерову сетку ячеек. Частицы служат для определения параметров самой жидкости, то есть массы импульса и энергии, в то время как эйлерова сетка используется для определения параметров поля давления, плотности, температуры. Метод «частиц в ячейках» или метод маркеров и ячеек (MAC) (Marker-and-Cell) позволяет исследовать сложные течения, однако он обладает и рядом недостатков. Главный из них состоит в том, что из-за представления сплошной среды конечной дискретной совокупностью частиц, методу присуща вычислительная неустойчивость. Это особенно очевидно, когда в задаче встречаются сильно разряженные области, как например, в газодинамических задачах [30].

Наряду с этим, в указанном подходе серьезную проблему вызывает постановка граничных условий для давления. Упрощенная версия метода MAC (Simple MAC, SMAC) позволила устранить некоторые недостатки. Различные примеры численной реализации такого подхода имеются в работах [20, 27, 28, 64, 221, 278, 336].

В дальнейшем этот метод получил широкое развитие, а использование разнесенной сетки и уравнения Пуассона для давления сохранилось и в более поздних модификациях.

Предложенный О.М. Белоцерковским и Ю.М. Давыдовым [29] метод «крупных частиц» основывается по существу на алгоритме метода «частиц в ячейках» Ф. Харлоу [212]. В этом варианте метода только уравнение неразрывности аппроксимируется в виде потоков массы через эйлерову ячейку, а остальные уравнения, взятые в дивергентной форме, аппроксимируются простейшими конечно-разностными соотношениями. О.М. Белоцерковский и Ю.М. Давыдов [29] разработали «метод крупных частиц» для исследования сложных газодинамических течений. Базируясь на уравнениях Эйлера, они вместо совокупности частиц в ячейках использовали законы сохранения в форме уравнений баланса для ячейки конечных размеров.

В.А. Гущин и В.В. Щенников, используя основные принципы метода «крупных частиц» и схемы SMAC, исследовали течение несжимаемой жидкости в рамках уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление [28, 94].

Дальнейшее развитие методов решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости связано с использованием концепции расщепления.

В отличие от классической схемы формального расщепления многомерных операторов на одномерные или схемы факторизации, применяется процедура расщепления по физическим процессам, реализованная первоначально в известном методе «частиц в ячейках» предложенном Харлоу [212], которая затем развивалась другими авторами. Особенно эффективной для решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости оказалась схема расщепления по физическим процессам, предложенная и развитая О.М. Белоцерковским, В.Н. Гуциным, В.В. Щенниковым [28]. Согласно этому подходу процесс решения системы уравнений Навье-Стокса основывается на расщеплении временного цикла и использовании трехэтапного итерационного метода. Согласно этой схеме вначале рассчитывается промежуточное поле скоростей из уравнений движения без учета градиента давления. Затем при этих значениях скоростей решается уравнение Пуассона для давления и далее определяются новые значения скоростей с учетом вклада от полученного давления.

С точки зрения эффективности этого метода наиболее интересным является использование двух нестационарных неявных схем. Запишем систему нестационарных уравнений Навье-Стокса в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ v_i v_k - \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Пусть в момент времени  $t^n$  известно поле скорости  $v_i^n$  и поле давления  $p^n$ . Тогда для неизвестных скоростей и давления в момент времени  $t^{n+1}$  используется следующая схема расщепления [24].

На этапе I предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет механизмов конвекции и диффузии. Тогда на этом этапе определяется промежуточное значение для скорости  $\tilde{v}_i^n$  с помощью исходных уравнений, но без слагаемого с градиентом давления, то есть

$$\frac{\tilde{v}_i - \tilde{v}_i^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \tilde{v}_i^n \tilde{v}_k^n - \nu \left( \frac{\partial \tilde{v}_i^n}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{v}_k^n}{\partial x_i} \right) \right] = 0.$$

Решив это уравнение, например, методом переменных направлений, находим искомое промежуточное значение скорости  $\tilde{v}_i$ .

На этапе II предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет градиента давления, то есть разностное уравнение движения имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - \tilde{v}_i}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}.$$

Тогда применяя оператор  $div$  к этому уравнению и используя уравнение неразрывности на  $(n+1)$  слое  $\frac{\partial v_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0$  для определения давления получим следующее уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{\rho_0}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_i},$$

из которого по известному полю  $\tilde{v}_i$  рассчитывается давление  $p^{n+1}$  на  $(n+1)$  слое.

На III этапе по известному давлению  $p^{n+1}$  и промежуточной скорости  $\tilde{v}_i$  находится новое значение скорости  $v_i^{n+1}$  на  $(n+1)$  слое.

В целом, конечно-разностные алгоритмы, основанные на концепции расщепления по физическим процессам, не зависят от пространственной размерности задачи и позволяют получать как установившиеся во времени решения, так и нестационарные. Они легко обобщаются на случай криволинейных систем координат, допускают возможность их адаптации на случай расчета турбулентных режимов течения и учета влияния объемных сил гравитационного или иного происхождения.

Одной из главных проблем, как для методов  $(\Omega - \Psi)$ , так и методов  $(\bar{V} - P)$ , остается задача расчета поля давления. Источником трудностей является то обстоятельство, что в системе уравнений несжимаемой жидкости отсутствует явное уравнение для давления. При переходе к переменным завихренность – функция тока давление исключается из расчетов. Для решения уравнения переноса завихренности часто используется схема метода переменных направлений. Решение уравнения Пуассона для функции тока может быть выполнено различными итерационными методами. Определенные трудности при таком подходе связаны с выбором граничных условий для вихря скорости. Кроме того, здесь исключается возможность его обобщения на трехмерные задачи и турбулентные режимы течения.

Поиск путей согласования давления и компонентов скорости привел к варианту введения разнесенных сеток для различных искомым переменных задачи. Такой подход оказался ключевым при совершенстве расчетных алгоритмов решения уравнений Навье-Стокса в естественных переменных – скорость, давление. Применение разнесенных сеток эффективно использовалось рядом авторов при численной дискретизации уравнений Навье-Стокса в физических переменных скорость-давление [212]. Дальнейшее развитие этого направления привело к созданию семейства алгоритмов SIMPLE. Аббревиатура SIMPLE происходит от Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations. Этот метод был предложен S.V. Pa-

tankar, P.V. Spolding в работе [159, 336] и детально развит С.В. Патанкар в работе [158]. В методе SIMPLE для дискретизации исходных уравнений Навье-Стокса используется метод «конечных объемов» на разнесенной сетке.

Характерная особенность метода SIMPLE состоит в построении разностной схемы относительно приращений зависимых переменных и использовании итерационной процедуры решения системы дискретных уравнений. Итерационная процедура при этом рассматривается как метод установления для решения нестационарных уравнений. На разнесенной сетке для различных зависимых переменных используются разные контрольные объемы. Поэтому сеточные индексы зависимых переменных оказываются сдвинутыми относительно друг друга.

Общая процедура SIMPLE метода использует схему «предиктор-корректор». На шаге «предиктор», используя некоторое начальное поле давления, решаются уравнения движения и определяется предварительное поле скорости, которое еще не удовлетворяет уравнению неразрывности. На шаге «корректор» решается уравнение Пуассона для давления, правая часть которого определена с использованием предварительного поля скорости. Далее поле давления и поле скоростей корректируются соответствующими поправками, исходя из условия соленоидальности поля скорости [373].

Со временем появилось множество модификаций метода SIMPLE. Среди них отметим такие процедуры расчета и коррекции давления как SIMPEC (SIMPLE Corrected), SIMPLER (SIMPLE Efficiently Revised), PISO (Pressure Implicit with Splitting Operators), позволяющие добиться лучшего согласования поля давления и скоростей, уменьшить затраты машинного времени и увеличить скорость сходимости решения, которые рассмотрены, например, в работах [20, 24, 25, 27, 67, 68, 158].

В работах А.А. Приходько [165] рассмотрены две группы алгоритмов расчета двумерных и трехмерных уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости, записанных в криволинейной неортогональной системе координат. Первая группа алгоритмов применяется при решении уравнений Навье-Стокса в физических переменных скорость-давление. В одном из алгоритмов для решения исходной системы уравнений использовалась неявная факторизованная схема типа Бима-Уорминга [34]. При стандартном приеме факторизации она приводит к неявной схеме переменных направлений, при этом, получаемые блочные трехдиагональные матрицы, определяются методом векторной прогонки.

Вторая группа численных алгоритмов основана на решении уравнений Навье-Стокса в переменных функция тока – вихрь. Для решения уравнения переноса завихренности А.А. Приходько [165] с сотрудниками использовал несколько алгоритмов. Среди них схему с разностями против потока [178], интегроинтерполяционный метод [90], схему Леонардо [311], неявную

факторизованную схему [34], схему с разностями против потока и TVD-схемы. Более подробно эти вопросы изложены в монографии [165].

Принципиально постановка задачи для уравнений Навье-Стокса в естественных физических переменных – скорость, давление ( $\vec{V} - P$ ) аналогична постановке задачи, описываемой системой уравнений для функции тока и завихренности ( $\Psi - \Omega$ ). Однако все-таки имеются и различия, связанные с преимуществами и недостатками каждого из этих подходов которые подробно обсуждаются П. Роучем [178]. Здесь лишь отметим, что методы решения уравнений движения в переменных ( $\vec{V} - P$ ) можно обобщать на трехмерные случаи [213, 250, 251].

Методы, разработанные для анализа устойчивости решения ( $\Psi - \Omega$ ) - системы, можно непосредственно применять и для исследования устойчивости решения ( $\vec{V} - P$ ) системы. После линеаризации уравнения движения будут аналогичны по виду с линеаризованным уравнением переноса вихря, и для исследования их устойчивости можно использовать одни и те же методы, получая при этом одни и те же условия устойчивости.

Границы рассчитываемых на практике областей течения имеют обычно достаточно сложную геометрию. Поэтому иногда целесообразно использование криволинейных, а в общем случае и неортогональных систем координат [121]. Однако такой подход порождает известные сложности, связанные с появлением в исходных уравнениях членов, содержащих символы Кристоффеля. Наличие этих слагаемых чувствительных к неортогональности и неравномерности расчетных сеток, может приводить к существенной потере точности решения. Кроме того, в этом случае часто нарушается консервативность численной схемы. Для учета реальной геометрии различных устройств наибольшей гибкостью обладает метод конечных элементов [295, 332]. Однако, несмотря на последние достижения в области повышения точности аппроксимации в методе конечных элементов [65, 119], конечно-разностные алгоритмы, основанные на методе контрольного объема [20, 278], превосходят метод конечных элементов по эффективности и точности [121]. В конечно-разностных алгоритмах проще реализуются возможности повышения точности результатов расчетов за счет применения TVD схем высокого порядка.

Первая проблема, с которой столкнулись исследователи при попытке применения SIMPLE процедур в неортогональных системах координат, было рассогласование полей скорости и давления с образованием так называемого шахматного поля давления и скорости [192]. Основная идея SIMPLE – подобных алгоритмов заключается в том, что для расчета давления используется разностное уравнение, полученное из дискретных аналогов уравнений количества движения и уравнения неразрывности. При

этом большое значение имеет способ аппроксимации градиента давления в уравнении количества движения. В исходных алгоритмах [33, 300], записанных для декартовой системы координат, на шахматной сетке, градиент давления вычисляется с помощью значений давления в двух соседних узлах. В этом случае не возникает рассогласования полей скорости и давления [318], а сеточный шаблон для давления включает  $2D+1$  узел, где  $D$  – размерность задачи. В результате на регулярной сетке получается матрица системы алгебраических уравнений с  $2D+1$  диагональю, а для решения таких систем разработаны эффективные итерационные методы [178, 181]. Если уравнение количества движения записывается в проекции на базисные векторы декартовой системы координат, то при переходе к неортогональной системе координат на сетке близкой к ортогональной, система дискретных уравнений для скорости и давления распадается на две независимые системы. Большое число работ посвящено устранению этого недостатка. В [252] и [284] использована частично совмещенная сетка, где составляющие скорости хранятся в узлах контрольного объема для давления, при этом авторами отмечались трудности с получением сходящегося решения из-за осцилляции поля давления. В [332] предложен метод коррекции давления на полностью совмещенной сетке, использующий предположение о близости сетки к ортогональной.

На сегодняшний день различными авторами создано огромное количество разностных алгоритмов. Каждый алгоритм обладает уникальными свойствами, которые играют решающую роль при численном исследовании прикладных задач, как например [255, 334]. В данной работе, как будет показано далее, в качестве исходной системы уравнений гидродинамики будет использована система не дифференциальных уравнений Навье-Стокса, а основные интегральные законы сохранения массы и импульса. Такой нетрадиционный подход и использование разнесенных сеток обеспечивает получение консервативных разностных схем и согласованность полей скорости и давления.

В заключение отметим, что при расчетах установившихся течений исходную систему уравнений можно использовать как в стационарном, и в нестационарном виде, рассматривая во втором случае искомое решение как предел при  $t \rightarrow \infty$  (метод установления). Во многих случаях для определенного класса течений существует это асимптотическое устойчивое стационарное решение, но лишь для чисел Рейнольдса меньших некоторого критического числа  $Re_{кр}$ . При увеличении числа  $Re$  стационарное решение перестает быть единственным и начинает зависеть от начальных условий. При дальнейшем увеличении числа  $Re$  реализуются только нестационарные режимы. При этом течение теряет свою устойчивость и приводит к появлению сложных вихревых структур. Описание таких режимов течений

приводит к проблеме турбулентности, которая подробно обсуждается в соответствующих главах далее.

## 1.10. Метод контрольного объема

Численное решение уравнений гидродинамики и теплообмена предполагает предварительный выбор желательной формы записи исходных уравнений, выбор подходящей расчетной сетки, и выбор способа построения конечно-разностного аналога рассматриваемых уравнений.

Традиционный способ построения численных алгоритмов решения краевых задач математической физики методом конечных разностей использует дифференциальную форму исходных уравнений и состоит в том, что в рассмотрение вводится расчетная сетка с совокупностью дискретных узловых точек в каждой из которых определяют значения сеточных функций. Затем эти функции и их производные заменяют эквивалентными им конечно-разностными соотношениями. Следует заметить, что этот прием обеспечивает разностную аппроксимацию отдельных производных уравнения лишь в точке. Поэтому такая расчетная схема может быть консервативной только в случае дивергентной формы исходных дифференциальных уравнений, так как только в этом случае может быть обеспечено выполнение законов сохранения. Однако это не единственный способ построения дискретных аналогов исходной системы уравнений механики жидкости и теплообмена, который во многом определяет эффективность всего численного алгоритма решения задачи.

Другим, заслуживающим внимания эффективным способом построения дискретных аналогов, является метод «контрольного объема», который выгодно отличается от других методов. Этот метод очень сходен с интегральным методом и допускает ясную физическую интерпретацию. Его идейная сторона известна и в виде метода потоков он эффективно использовался при решении газодинамических задач [9, 10, 26], а в последние годы в различных вариантах все чаще применяется в прикладных расчетах [68, 158, 165, 212] как метод «конечных объемов».

В данном варианте построения дискретного аналога уравнений гидромеханики и переноса тепла методом контрольного объема заложен принцип разностной аппроксимации не дифференциальных уравнений переноса, а самих интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии. Ценность этого подхода состоит в том, что разностные аналоги интегральных законов сохранения обеспечивают свойство консервативности разностной схемы по массе, импульсу и энергии независимо от величины шагов сетки, что является несомненным его достоинством.

Желая использовать метод контрольного объема для построения дискретного аналога уравнений гидромеханики и теплообмена, вспомним,



что их дифференциальная форма является следствием рассмотрения фундаментальных физических законов сохранения, массы, импульса и энергии, записанных в интегральной конечно-объемной форме. Причем эти интегральные уравнения справедливы для произвольного объема и естественно их можно применить и для отдельной «ячейки» разностной сетки. Поэтому если конечно-разностную схему строить исходя из метода «контрольного объема» применительно к ячейке расчетной области, то такая схема должна обеспечить адекватную аппроксимацию исходных интегральных уравнений сохранения не только в небольшой области сетки, содержащей несколько соседних узлов, но и обеспечит выполнение интегральных законов сохранения для всей расчетной области. Любая согласованная разностная схема, построенная традиционными способами, обеспечивает лишь приближенное выполнение законов сохранения в большой области, а консервативная разностная схема гарантирует точное выполнение этих законов, конечно без учета погрешности округления в процессе итераций.

Метод контрольного объема принципиально отличается от других методов построения разностных схем. Главное отличие, как уже отмечалось, в том, что известные методы, например, метод разложения функций в ряд Тейлора, и другие, имеют дело с дифференциальными уравнениями в частных производных. При этом предполагается, что эти уравнения корректно описывают законы сохранения и являются их следствием. При таком подходе осуществляется формальная дискретизация отдельных производных в дифференциальных уравнениях с помощью определенных математических средств, а законы сохранения уже не контролируются. Поэтому такие разностные схемы не всегда являются консервативными.

В противоположность этому, метод «контрольного объема» основанный на дискретизации фундаментальных интегральных законов сохранения, обладает свойством консервативности по массе, импульсу и полной энергии на каждом временном слое, при этом консервативность здесь имеет место как в каждом локальном контрольном объеме(ячейке), так и интегрально во всей расчетной области. И в этом смысле он является наиболее универсальным. Вследствие того, что этот метод сохраняет дискретную природу решения на всех этапах, то он приводит к построению более точных схем вблизи границ расчетной области, а это очень важно для скорости процесса сходимости решения.

Основная идея «метода контрольного объема» легко поддается прямой физической интерпретации. Метод основан на использовании исходных уравнений гидромеханики в интегральной конечно-объемной форме. Если их записать для выделенного контрольного объема расчетной сетки, то удастся построить их дискретные аналоги путем интегрирования по

каждому контрольному объему. При вычислении интегралов используют кусочно-гладкие профили между узловыми точками.

Выпишем законы сохранения массы ( $m$ ), импульса ( $\vec{K}$ ) и энергии ( $e$ ) в интегральном виде применительно к объему  $\tau$ , ограниченному поверхностью  $\sigma$ . В общем случае эти законы, как было показано выше, записываются в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = 0; \\ \frac{d\vec{K}}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \vec{v} d\tau = \iiint_{\tau} \text{div} \Pi d\tau + \iiint_{\tau} \rho \vec{F} d\tau; \\ \rho \frac{de}{dt} &= \rho \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} e d\tau = \iiint_{\tau} \text{div} (\Pi \cdot \vec{v}) d\tau - \iiint_{\tau} \text{div} \vec{q}_n d\tau + \iiint_{\tau} \vec{F} \rho \vec{v} d\tau + \iiint_{\tau} \rho S d\tau.\end{aligned}$$

Так как эти уравнения справедливы для произвольного объема, то их можно применить и к выделенной ячейке  $D_{j,i}$ , разностной сетки.

Для построения разностных аналогов этих законов сохранения сначала удобно рассмотреть дивергентную интегральную форму разложения субстанциональной производной по времени для каждой гидродинамической субстанции  $\Phi(\rho, \vec{K}, e)$  на локальную и конвективную части по известной формуле (1.12)

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi d\tau = \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div} (\Phi \cdot \vec{v}) \right] d\tau.$$

При построении конечно-разностных аналогов выписанных уравнений сохранения необходимо выполнить их интегрирование по каждому элементарному объему (ячейке). В результате получим дискретный аналог каждого интегрального уравнения, в который входят значения переменной  $\Phi$  в нескольких соседних узловых точках в зависимости от структуры принятого шаблона. Заметим, что при таком подходе выполняется конечно-разностная аппроксимация не отдельных производных, а всего уравнения в целом.

Полученный таким образом дискретный аналог выражает закон сохранения субстанции  $\Phi$  для конечного контрольного объема. Важным свойством метода контрольного объема является баланс потоков, который имеет место при любом числе контрольных объемов. Таким образом, интегральный метод, оказывается применимым даже при решении на грубой сетке, так как удовлетворяет точным интегральным балансам потоков.

Остановимся еще на некоторых отличительных чертах рассматриваемого метода. В методе контрольного объема, в отличие от других

методов, потоки гидродинамических субстанций должны вычисляться с учетом направления вектора скорости жидкости, что приводит к использованию несимметричных аппроксимационных формул. Направление скорости учитывается в том смысле, что любая характеристика среды, то есть субстанция  $\Phi$ , в некоторой точке определяется ее значением в предыдущей точке, находящейся против течения, то есть расположенной выше по потоку. Наличие конвективного переноса, и особенно в случае наличия возвратных и вихревых рециркуляционных областей течения, делает пространство течения неизотропным, то есть неоднородным по различным направлениям, что должно учитываться при конструировании разностных схем в форме баланса соответствующих потоков.

Благодаря дивергентному представлению конвективных производных обеспечивается такой перенос соответствующих субстанций через замкнутую контрольную поверхность, что после суммирования таких соотношений по нескольким сложным объемам, остаются лишь потоки через внешнюю поверхность суммарного объема, а потоки через соприкасающиеся поверхности сложных контрольных объемов взаимно уничтожаются. Наличие этого свойства в методе контрольного объема и обеспечивает консервативность разностной схемы, построенной с его помощью.

Таким образом, в методе контрольного объема при конечно-разностном представлении основных уравнений сохранения массы, импульса и энергии они строго выполняются. Кроме того, использование метода контрольного объема приводит к разностным уравнениям, порядок которых на единицу меньше по сравнению с уравнениями получаемыми прямыми методами дискретизации дифференциальных уравнений Навье-Стокса.

Следует подчеркнуть, что при рассмотрении конкретных течений, потоки рассматриваемой субстанции  $\Phi$  между двумя соседними контрольными объемами в зависимости от направления векторов потока изменяются, причем в одних объемах (ячейках) они могут увеличиваться, а в других уменьшаться на величину, определяемую балансовыми соотношениями потоков массы, импульса и энергии через общие участки границ. Такой способ вычислений и обеспечивает свойство консервативности.

Очень важным моментом в методе контрольного объема является алгоритм вычисления потоков на гранях контрольного объема, а также возможность противопоточных аппроксимаций на этих гранях с одновременным выполнением законов сохранения.

Разностные схемы построенные различными методами для нелинейных уравнений могут отличаться друг от друга. Чтобы понять их различие необходимо решать одну и ту же задачу разными способами. По-видимому, ни один из известных методов не гарантирует абсолютную устойчивость

построенной разностной схемы, однако метод контрольного объема лучше других обеспечивает консервативность разностной схемы.

При развитии метода «контрольного объема», который будет обсуждаться в дальнейшем более подробно, мы сохраняем идеи интегральных методов, МАС метода «частиц в ячейках» Р. Харлоу [212, 278], SIMPLE метода С Патанкара, Р. Сполдинга [159], метода «дробных шагов» Н.Н. Яненко [228], метод «крупных частиц» О.М. Белоцерковского, Ю.М. Давыдова [29] и метода «потоков» О.М. Белоцерковского, Л.И. Северинова, А.В. Бабакова [9, 10, 26]. Однако мы рассматриваем уже не дискретные частицы и уравнения Эйлера, а непрерывные потоки массы, импульса и энергии через грани выделенного контрольного объема в вязкой несжимаемой жидкости [44, 49]. В нашем, более общем случае, среда моделируется жидкими контрольными объемами, совпадающими в данный момент времени с ячейкой эйлеровой сетки. Система контрольных объемов, моделирующая сплошную среду, распределена в начальный момент времени по ячейкам эйлеровой сетки в соответствии с начальными данными. Каждая ячейка характеризуется системой переменных, выражающих массу, импульс, энергию и т.п. При эйлеровом способе описания движения жидкости все ячейки в расчетной области фиксированы. В качестве основных зависимых переменных используются скорость, давление и температура. Однако в принципе это могут быть и другие гидродинамические субстанции, такие как концентрация химического компонента, турбулентная энергия или турбулентная вязкость.

При решении рассматриваемых в дальнейшем стационарных задач гидромеханики и теплообмена на основе метода контрольного объема, предполагается использование принципа установления, поэтому исходные уравнения будут записаны для нестационарного случая.

Конечно-разностная аппроксимация исходных эволюционных уравнений гидродинамики и теплообмена сводится к дискретизации фактически двух видов слагаемых уравнений, которые представляют собой две автономные задачи. Первая связана с дискретизацией нестационарных слагаемых по времени, а вторая связана с дискретизацией по пространству конвективных и диффузионных слагаемых.

Дискретизация по времени обычно не вызывает каких либо проблем, так как методы численного решения задач Коши хорошо известны [103, 181]. Значительные трудности вызывает дискретизация по пространству конвективных слагаемых. В соответствии с теоремой Годунова [87] это обусловлено сложностью построения численной схемы высокого порядка точности без нарушения условия монотонности схемы. С другой стороны строго монотонные схемы, такие как, схемы с разностями «против потока», обладают большой схемной вязкостью, что приводит к потере точности решения. Считается, что одним из способов преодоления этих трудностей,

является использование так называемых гибридных схем и TVD - схем (Total Variation Diminishing).

Численные алгоритмы, которые принадлежат к классу TVD характеризуются тем, что при их использовании схемная ошибка со временем не возрастает. Они обеспечивают получение решения со вторым порядком точности там, где течение близко к равномерному и устраняют флуктуации значений зависимых переменных, обусловленных ошибками их аппроксимации в области с большими градиентами. Кроме того, при решении практических задач разностные схемы могут быть реализованы в полностью дискретной или полудискретной формулировке. В первом случае законы сохранения при построении дискретных аналогов интегрируются по контрольному объему одновременно по времени и по пространству. В случае полудискретного алгоритма система законов сохранения интегрируется сначала по пространству, а потом полученные уравнения интегрируются по времени. Такой подход является более простым и гибким. Главное требование тут состоит в том, чтобы на дискретном уровне сохранялись стационарные решения. Такие численные схемы называют хорошо сбалансированными.

В данной работе численный алгоритм основывается на схеме «против потока», а для построения дискретных аналогов системы уравнений ламинарного и турбулентного движения используется метод контрольного объема. Выполненное в работе тестирование этого алгоритма для течений в плоских каналах при наличии геометрических неоднородностей на его стенках показало, что он хорошо описывает гидродинамические процессы таких течений при относительно произвольной форме геометрических неоднородностей.

В заключение отметим, что независимо от способа дискретизации исходных уравнений, результат решения системы разностных алгебраических уравнений позволяет определить значение искомой переменной лишь в дискретных точках, а ее изменение в промежутках между точками не определяется. Однако эта трудность легко преодолевается с помощью процедуры интерполяции для профилей внутри рассматриваемого объема.

## ГЛАВА 2

# ПРИМЕР ДИСКРЕТИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА МЕТОДОМ КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА

### 2.1. Установившаяся одномерная теплопроводность

При дискретизации исходных уравнений гидромеханики и переноса тепла методом контрольного объема будут использоваться интегральные законы сохранения массы, импульса, энергии и модели градиентного переноса для потоков рассматриваемой гидродинамической субстанции  $\Phi$ . Следовательно, необходимо будет использовать определенные приемы интегрирования и разностной аппроксимации для соответствующих производных. Чтобы подвести читателя к этому вопросу сначала рассматривается более простой пример дискретизации методом контрольного объема линейного уравнения переноса тепла, записанного в дифференциальной форме. На этом примере будет продемонстрирована не только техника построения конечно-разностного аналога уравнения переноса тепла, но и приобретен соответствующий опыт, необходимый для выполнения дискретизации основных законов сохранения массы, импульса и энергии методом контрольного объема, записанных в интегральной конечно – объемной форме.

Прежде чем приступить к конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения переноса интересующей нас гидродинамической субстанции  $\Phi(x, y, z, t)$  выпишем для нее следующие, обычно встречающиеся формы:

- интегральная дивергентная форма

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi d\tau = \iiint_{\tau} \text{div} \Pi^{\Phi} d\tau + \iiint_{\tau} S^{\Phi} d\tau ;$$

- дифференциальная векторная форма:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \vec{v}) = \nabla \cdot (\Gamma^{\Phi} \nabla \Phi) + S^{\Phi} ;$$

- тензорная дивергентная форма:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial(\Phi_i v_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \right) + S^\Phi. \quad (2.1)$$

Легко видеть, что все три формы уравнений переноса гидродинамической субстанции  $\Phi$  являются эквивалентными. Однако, с точки зрения общности, только первая из них – интегральная, содержит слагаемое с напряжениями в жидкости, характерными для уравнений количества движения, где гипотеза градиентного переноса пока не использована.

Для рассмотрения техники дискретизации дифференциальных уравнений рассматриваемого типа с помощью метода контрольного объема, остановимся подробно сначала на случае, когда субстанцией  $\Phi$  является температура ( $\Phi = T$ ), то есть на уравнении переноса тепла. Из уравнения (2.1) видно, что оно содержит четыре основных слагаемых, описывающих локальный перенос, конвективный перенос, диффузию и источниковый член соответственно.

На первом этапе в рассматриваемом уравнении переноса тепла, для простоты, опустим конвективные слагаемые. Однако, позднее они также будут подробно рассмотрены. Отбрасывание конвективных слагаемых в уравнении (2.1) приводит к задаче чистой теплопроводности на примере которой очень удобно рассмотреть, как физический процесс, так и математические особенности решения этой задачи с точки зрения нашего подхода. Однако, совершенно очевидно, что метод решения не будет ограничен только процессами теплопроводности, так как в математической физике существует и ряд других физических процессов, описываемых аналогичными уравнениями. Кроме того, рассматриваемый здесь подход будет иметь много общего при обосновании численного метода решения уравнений количества движения, включая вопросы их дискретизации и методы решения получаемых систем алгебраических уравнений.

Итак, в качестве примера построения конечно-разностного аналога исходного уравнения переноса тепла методом контрольного объема, сначала рассмотрим стационарную одномерную задачу теплопроводности в неподвижной среде при наличии источника  $S$ . В рассматриваемом случае уравнение переноса тепла согласно (2.1) примет вид:

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0, \quad (\Gamma^\Phi = \lambda, \quad S^\Phi = S), \quad (2.2)$$

где  $T$  – температура,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $S$  – скорость образования теплоты в единице объема. В общем случае коэффициент теплопроводности может зависеть от  $x$  и  $T$ . Однако, пока мы ограничимся более простым случаем, когда  $\lambda = \lambda(x)$ .

Для получения дискретного аналога одномерного уравнения (2.2) методом контрольного объема, введем сетку с координатами  $x_j = j \Delta x$  и выберем шаблон узловых точек. Расположение узловых точек (●) и основные обозначения показаны на рис. 2.1.

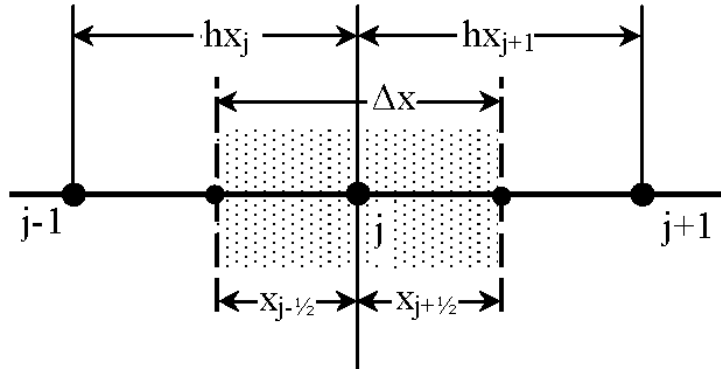


Рис. 2.1. Шаблон узловых точек и грани контрольного объема для одномерной задачи

В центре нашего внимания будет произвольная внутренняя точка  $j$ , окруженная точками  $j-1$  и  $j+1$ . Штриховой линией показаны границы контрольного объема. Обозначим эти границы через  $x_{j+1/2} = (j+1/2)\Delta x$  и  $x_{j-1/2} = (j-1/2)\Delta x$ . При этом  $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2} = (hx_j + hx_{j+1})/2$ . Выбор таких обозначений оказывается полезным в дальнейшем при переходе к переменному шагу. Для рассматриваемой одномерной задачи предположим, что размеры контрольного объема в направлениях  $y, z$  равны единице, т.е. объем равен  $\Delta x \cdot 1 \cdot 1$ . Интегрируя (2.2) по контрольному объему ячейки, получаем:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left( \frac{d}{dx} \lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} S dx = \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_{x_{j+1/2}} - \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_{x_{j-1/2}} + \bar{S} \cdot \Delta x = 0, \quad (2.3)$$

где  $\bar{S}$  – среднее по контрольному объему значение величины  $S$ . Предполагая далее, что профиль температуры между двумя узлами имеет кусочно-линейный характер, после простых преобразований и аппроксимации производных соответствующими разностями, из (2.3) получим следующий дискретный аналог уравнения (2.2):

$$\frac{\lambda_{j+1/2} (T_{j+1} - T_j)}{hx_{j+1}} - \frac{\lambda_{j-1/2} (T_j - T_{j-1})}{hx_j} + \bar{S} \cdot \Delta x = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) полезно записать в стандартной форме, явно связывающее значение величины  $T_j$  с ее значениями в соседних точках:



$$C_j T_j = A_j T_{j-1} + B_j T_{j+1} + F_j, \quad (2.5)$$

где коэффициенты дискретизации  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $F_j$  определяются через коэффициент  $\lambda$  и шаги сетки по следующим формулам:

$$A_j = \frac{\lambda_{j-1/2}}{hx_j}, \quad B_j = \frac{\lambda_{j+1/2}}{hx_{j+1}}, \quad C_j = A_j + B_j, \quad F_j = \bar{S} \Delta x. \quad (2.6)$$

Это стандартный вид дискретного аналога одномерного уравнения переноса тепла. В левой части этого уравнения находится температура  $T_j$ , соответствующая центральной узловой точке  $j$ , а в правой — значения температур в двух соседних точках  $(j+1)$  и  $(j-1)$ , а также слагаемое, моделирующее источник постоянной величины  $F_j$ . Ниже будет показано, что эта структура дискретного уравнения (2.5) сохраняется и для более общих двухмерного или трехмерного случаев, хотя при этом число соседних точек возрастает [158].

Рассмотрим особо аппроксимацию источникового члена  $S$  в исходном уравнении. Очень часто в прикладных задачах слагаемое  $S$  зависит от искомой переменной, то есть, в данном случае, от переменной  $T$ , тогда эту зависимость желательно учесть. Это легко делается в случае линейной зависимости. Для этого достаточно представить среднее значение  $\bar{S}$  в виде:

$$\bar{S} = S_0 + S_1 T_j, \quad (2.7)$$

где  $S_0$  представляет собой постоянную составляющую, а  $S_1$  — коэффициент. Тогда дискретный аналог уравнения теплопроводности сохраняет свой вид (2.5), но коэффициенты дискретизации несколько изменяются. То есть в этом случае имеем:

$$C_j T_j = A_j T_{j-1} + B_j T_{j+1} + F_j,$$

где

$$A_j = \frac{\lambda_{j-1/2}}{hx_j}, \quad B_j = \frac{\lambda_{j+1/2}}{hx_{j+1}}, \quad C_j = A_j + B_j - S_1 \Delta x, \quad F_j = S_0 \Delta x. \quad (2.8)$$

Вспомним теперь, что при выводе дискретного аналога (2.5) использовалось простейшее линейное приближение для профиля температуры. Конечно, возможно применение и других интерполяционных функций, что ведет к существованию множества способов получения дискретных аналогов рассматриваемого уравнения. Чтобы как-то уменьшить число этих вариантов, необходимо следить, чтобы решение имело физически правдоподобный характер и сохраняло полный баланс потоков, т.е. должны выполняться интегральные законы сохранения рассматриваемой величины во всей расчетной области.

Такую возможность сохранения полного баланса дает метод контрольного объема. Но при этом необходимо обеспечить правильный расчет потоков на границах контрольного объема. Эти ограничения и их анализ позволяют сформулировать некоторые общие правила построения дискретных аналогов [158].

1. Прежде всего при записи дискретных аналогов должно выполняться соответствие потоков на границах контрольного объема. Несоответствие потоков может возникнуть если используется не линейный, а квадратичный профиль, или потоки тепла на гранях контрольного объема определяются с помощью лишь одного значения коэффициента теплопроводности в центральной точке  $\lambda_j$  и т.п.

2. В большинстве задач гидродинамики и теплообмена изменение значения зависимой переменной обусловлено механизмами конвекции и диффузии. Следовательно, увеличение значения зависимой переменной в одной узловой точке должно, при прочих равных условиях, привести к увеличению, а не уменьшению, значения переменной в соседней узловой точке. Это приводит к тому, что знаки коэффициентов перед значениями зависимой переменной в соседних точках  $A_j$ ,  $B_j$  и коэффициент  $C_j$  перед ее значением в центральной точке  $j$  должны быть одинаковыми, то есть должно выполняться неравенство  $C_j > 0$ ,  $A_j + B_j > S_1 \Delta x = F_j$  или  $F_j > 0$ .

3. Из определения коэффициента  $C_j$  при наличии линеаризованного источника видно, что он может стать отрицательным за счет коэффициента  $S_l$ . Этого можно избежать потребовав, чтобы коэффициент  $S_l$  всегда был отрицательным или равен нулю.

4. Часто в рассматриваемое уравнение входят только производные зависимой переменной. То есть оно определяется с точностью до постоянной. Это свойство дифференциального уравнения должно удовлетворяться и в дискретном аналоге. Можно показать, что это будет выполняться если  $C_j = A_j + B_j$ .

Для узловых точек, показанных на рис. 2.1 нет необходимости чтобы отрезки  $hx_j$  и  $hx_{j+1}$  были равны. Это позволяет использовать неравномерные сетки, преимущества которых хорошо известны. Однако до решения задачи зависимость  $T$  от  $x$  неизвестна, поэтому выбор неравномерной сетки остается, казалось бы, открытым. Тем не менее, всегда имеются некоторые качественные представления о поведении решения, из которых могут быть получены полезные соображения о структуре неравномерной сетки. Другие рекомендации могут быть получены при использовании сначала крупных сеток. Особенность данного метода, основанного на методе контрольного объема, как раз и состоит в том, что даже при крупной сетке метод дает физически правдоподобные результаты. Таким образом, соответствующая неравномерная сетка может быть выбрана обоснованно. Число узловых

точек, необходимое для требуемой точности выбранного метода решения, должно распределяться в расчетной области в соответствии со спецификой решаемой задачи и возможностями вычислительной техники.

## 2.2. Теплопроводность граней контрольного объема, граничные условия

В уравнении (2.4) коэффициент теплопроводности  $\lambda_{j+1/2}$  был использован для обозначения  $\lambda$  на грани  $x_{j+1/2}$  контрольного объема и соответственно  $\lambda_{j-1/2}$  на грани  $x_{j-1/2}$ . Если коэффициент теплопроводности является функцией независимой переменной  $x$ , то  $\lambda$  будет известно только в целых узловых точках  $j-1, j, j+1$  и т.д. В этом случае необходимо значение  $\lambda_e$  на грани контрольного объема определить через значения коэффициентов теплопроводности в узловых точках с целым индексом. Переменность коэффициента  $\lambda$  может быть обусловлена различными причинами, включая неоднородность среды, турбулентность и т.п.

Наиболее простым способом определения  $\lambda_e$  на грани контрольного объема является предположение о линейном изменении  $\lambda$  между узлами  $j$  и  $j+1$ .

Пусть

$$\lambda_e = \lambda_{j+1/2} = (1 - \beta)\lambda_{j+1} + \beta\lambda_j, \quad (2.9)$$

где  $\beta$  — коэффициент, равный отношению отрезков

$$\beta = \frac{x_{j+1/2}}{hx_{j+1}},$$

показанных на рис. 2.1. Если грань контрольного объема расположить посередине между узловыми точками, то  $\beta = 0.5$  и  $\lambda_e$  на грани контрольного объема согласно (2.9) будет равно среднему арифметическому, то есть:

$$\lambda_e = \lambda_{j+1/2} = (\lambda_j + \lambda_{j+1})/2.$$

Однако это простое приближение не всегда обеспечивает хорошую аппроксимацию и часто приводит к численной неустойчивости. Выше, при получении дискретного аналога уравнения (2.2) уже использовалась оценка теплового потока для грани контрольного объема в виде:

$$q_e = \frac{\lambda_e(T_{j+1} - T_j)}{hx_{j+1}}. \quad (2.10)$$

Однако А. А. Самарский [181] и С. Патанкар [158] после анализа этого вопроса рекомендовали коэффициенты теплопроводности на грани контрольного объема определять как среднее геометрическое, то есть:

$$\lambda_e = \frac{\lambda_j \lambda_{j+1}}{(1-\beta)\lambda_{j+1} + \beta\lambda_j}.$$

Тогда при  $\beta = 0.5$  имеем:

$$\lambda_{j+1/2} = \frac{2\lambda_j \lambda_{j+1}}{\lambda_j + \lambda_{j+1}}. \quad (2.11)$$

Дискретный аналог (2.5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, которые, из-за большой их размерности, необходимо решать численно. В более сложных задачах приходится сталкиваться с системами и нелинейных алгебраических уравнений. Методы их решения хорошо разработаны и обычно связаны с использованием либо прямых, либо итерационных методов.

Обратимся теперь к анализу граничных условий, которые играют важную роль при решении системы разностных алгебраических уравнений. Предположим, что для одномерной задачи шаблон узловых точек выбран и показан на рис. 2.2. На каждую из двух границ расчетной области приходится по одной узловой точке ( $j=1, j=N$ ).

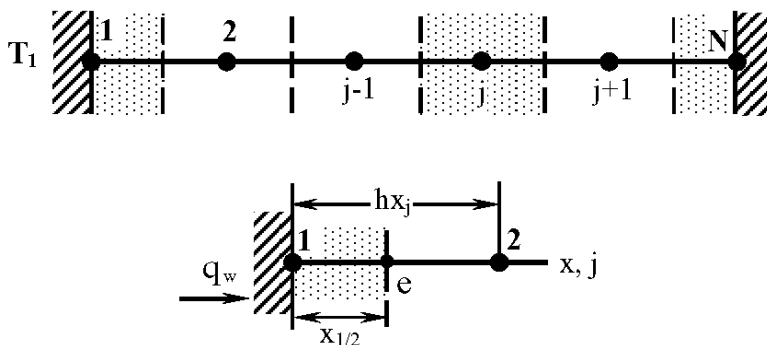


Рис. 2.2. Контрольные объемы для внутренних и граничных узлов

Остальные узловые точки ( $j$ ) являются внутренними и вокруг каждой из них размещается контрольный объем  $\tau$ . Дискретный аналог, подобный уравнению (2.5) можно записать для каждого такого контрольного объема. Рассматривая (2.5) как систему уравнений для определения температуры  $T_j$ , имеем необходимое число уравнений для всех неизвестных температур во внутренних узловых точках. Однако два из этих уравнений включают значения температур в граничных узловых точках  $j=1$  и  $j=N$ . Именно через них осуществляется учет заданных граничных условий в схеме численного решения.

Рассмотрим левую граничную узловую точку  $j=1$  последовательности  $j$ , которая справа граничит с точкой  $j=2$ , как показано на рисунке. Обычно в теории теплопроводности граничные условия для температуры при наличии твердой стенки в общем случае могут быть трех видов:

- условия первого рода (Дирихле), когда на стенке задана сама температура  $T_1 = \mu_1$ ;
- условия второго рода (Неймана), когда на стенке задан тепловой поток  $q_w$ , который может быть определен двумя способами: через коэффициент теплоотдачи и разность температур стенки и жидкости  $q_w = h(T - T_w)$  или согласно градиентному закону Фурье, когда  $q_w = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$ ;
- условия третьего рода включают наиболее общий режим теплообмена через границу и имеют вид:

$$\alpha_0(t) \frac{\partial T}{\partial n} + \beta_0(t) T = \gamma_0(t).$$

Если на границе задана температура, то есть значение  $T_l$  и  $T_N$  известно, то никаких трудностей при решении не возникает. Если же температура на границе неизвестна, а задан поток тепла, то необходимо дополнительное уравнение для определения  $T_l$ , которое можно получить путем интегрирования исходного уравнения (2.2) по половинному контрольному объему, который показан на рис 2.2. Если тепловой поток задан в виде значения величины  $q_l$ , то интегрируя уравнение (2.2) от  $x_{3/2}$  до  $x_1$ , получаем:

$$q_l - q_e + (S_0 + S_1 T_1) x_{1/2} = 0, \quad x_{1/2} = \Delta x / 2, \quad (2.12)$$

где источниковый член линеаризован и температура в нем равна средней температуре по объему, то есть  $T_l$ . Тепловой поток  $q_e$  на правой стороне половинки контрольного объема можно определить по формуле (2.10). Тогда из (2.12) получим:

$$q_l - \frac{\lambda_{1/2} (T_1 - T_2)}{x_{1/2}} + (S_0 + S_1 T_1) x_{1/2} = 0. \quad (2.13)$$

Дальнейшее преобразование этого уравнения зависит от того как задан тепловой поток  $q_l$  на границе. Если задано значение теплового потока  $q_l$ , то уравнение для  $T_l$  определяется из (2.13) и записывается в виде:

$$-T_l \left( \frac{\lambda_{1/2}}{x_{1/2}} - S_1 x_{1/2} \right) + T_2 \frac{\lambda_{1/2}}{x_{1/2}} + S_0 x_{1/2} + q_l = 0. \quad (2.14)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$B_1 = \frac{\lambda_{1/2}}{x_{1/2}}, \quad C = \frac{\lambda_{1/2}}{x_{1/2}} - S_1 x_{1/2}, \quad F_1 = S_0 x_{1/2} + q_1. \quad (2.15)$$

Тогда уравнение (2.14) примет стандартный вид:

$$C_1 T_1 = B_1 T_2 + F_1. \quad (2.16)$$

Если тепловой поток  $q_1$  определен через коэффициент теплоотдачи  $h$  и температуру окружающей среды  $T_\infty$ , то есть:

$$q_1 = h(T_\infty - T_1), \quad (2.17)$$

то уравнение для  $T_1$  сохранит прежний вид (2.16), а коэффициенты дискретизации в этом случае определяются по формулам:

$$B_1 = \frac{\lambda_{1/2}}{x_{1/2}}, \quad C = \frac{\lambda_{1/2}}{x_{1/2}} - S_1 x_{1/2} + h, \quad F_1 = S_0 x_{1/2} + h T_\infty. \quad (2.18)$$

Таким же образом можно получить уравнение для температуры  $T_N$  на правом конце последовательности  $j$ , если она сразу не задана.

### 2.3. Решение систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки

Полученный выше дискретный аналог (2.5) для одномерной задачи теплопроводности связывает три соседних значения рассматриваемой сеточной функции температуры  $T_j$ ,  $T_{j+1}$ ,  $T_{j-1}$ . Такие уравнения относятся к классу трехточечных разностных уравнений второго порядка. Они имеют трехдиагональную структуру матрицы коэффициентов. Решение таких систем линейных алгебраических уравнений можно получить с помощью стандартного метода исключения Гаусса, сводящегося в данном случае к методу прогонки. В зарубежной литературе этот метод часто называют алгоритмом Томаса [7] или TDMA (Thri-diagonal-Matrix-Algorithm).

Рассматриваемая система уравнений:

$$C_j T_j^{n+1} = A_j T_{j-1}^{n+1} + B_j T_{j+1}^{n+1} + F_j, \quad (2.19)$$

записана в узлах сетки  $\{x_j, j = \overline{1, N}\}$ , которые являются внутренними узлами расчетной области. В соответствии с выбранным шаблоном граничным узлам соответствуют значения  $j=1$  и  $j=N$ . Запись уравнения (2.19) в общем случае предполагает наличие фиктивных узлов со значениями искомой переменной  $T_0$  и  $T_{N+1}$ , которые находятся за пределами расчетной области и должны быть исключены из рассмотрения с помощью

граничных условий задачи или из дополнительных уравнений. Появление фиктивных узлов с неизвестным значением температуры легко видеть, если исходное уравнение (2.19) записать для граничных узлов  $j=1$  и  $j=N$ .

$$C_1 T_1^{n+1} = A_1 T_0^{n+1} + B_1 T_2^{n+1} + F_1, \quad (2.20)$$

$$C_N T_N^{n+1} = A_N T_{N-1}^{n+1} + B_N T_{N+1}^{n+1} + F_N. \quad (2.21)$$

Для всех других внутренних узловых точек ( $j$ ) имеются необходимые уравнения для определения температуры  $T_j$ .

Идея метода прогонки заключается в сведении решения разностного уравнения второго порядка вида (2.19) к трем разностным уравнениям первого порядка. Процедура решения состоит из двух основных этапов. На первом этапе преобразуется матрица коэффициентов к верхнему треугольному виду. С этой целью постулируется существование двух векторов  $\mathfrak{R}_j$  и  $Q_j$  таких, что для любого  $T_j$  выполняется условие:

$$T_j = \mathfrak{R}_j T_{j+1} + Q_j. \quad (2.22)$$

То есть трехточечное уравнение (2.19) второго порядка преобразуется в двухточечное уравнение первого порядка. Если в рекуррентном соотношении (2.22) индекс  $j$  понизить на единицу, то соответственно получим:

$$T_{j-1} = \mathfrak{R}_{j-1} T_j + Q_{j-1}. \quad (2.23)$$

Существование и целесообразность введения векторов  $\mathfrak{R}_j$  и  $Q_j$  становятся очевидными после того, как подставив выражение  $T_{j-1}$  из (2.23) в основное уравнение (2.19), приходим к выражению

$$(A_j \mathfrak{R}_{j-1} - C_j) T_j + B_j T_{j+1} = -(F_j + A_j Q_{j-1}). \quad (2.24)$$

Сравнивая это тождество с равенством (2.22), находим, что при всех  $j = \overline{1, N}$

$$\mathfrak{R}_j = \frac{B_j}{C_j - A_j \mathfrak{R}_{j-1}}; \quad Q_j = \frac{F_j + A_j Q_{j-1}}{C_j - A_j \mathfrak{R}_{j-1}}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (2.25)$$

Вектора  $\mathfrak{R}_j$  и  $Q_j$  называют коэффициентами прогонки. Их определение по рекуррентным формулам (2.25) через коэффициенты исходного уравнения (2.19) принято называть прямой прогонкой, а расчет искомых функций  $T_j$  по формулам (2.22) – обратной прогонкой. Обратим внимание на то, что рекуррентные соотношения (2.25) определяют значения коэффициентов прогонки  $\mathfrak{R}_j$  и  $Q_j$  через предыдущие значения  $\mathfrak{R}_{j-1}$  и  $Q_{j-1}$ .

Уравнения (2.25) для  $\mathfrak{R}_j$  и  $Q_j$  в общем случае нелинейные, они связывают значения этих функций в двух соседних узлах  $(j - 1)$  и  $j$ . Для их решения необходимо фактически решать задачи Коши. Это решение осуществляется с помощью прямой прогонки слева направо от  $j$  к  $(j + 1)$ . Если коэффициенты прогонки определены и известно значение  $T_N$  в конце последовательности  $j$ , то обратной прогонкой по общим формулам (2.22), двигаясь справа налево от  $(j + 1)$  к  $j$  решается задача Коши для  $T_j$  и определяются последовательно искомые значения  $T_j$  от  $T_{N-1}$  до  $T_2$ . То есть осуществляется второй этап метода решения с помощью обратной прогонки.

Поскольку для каждой функции  $\mathfrak{R}_j$ ,  $Q_j$  и  $T_j$  необходимо решать задачу Коши, то предварительно необходимо найти их начальные значения. Обычно это осуществляется с помощью граничных условий для искомой переменной в конкретно сформулированной задаче. В общем случае необходимые граничные условия на левом и правом концах последовательности  $j$  можно записать в следующем виде:

$$T_1 = \alpha_1 T_2 + \mu_1; \quad T_N = \alpha_2 T_{N-1} + \mu_2 \quad (2.26)$$

где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  – заданные величины. Очевидно, случай  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  соответствует граничным условиям первого рода (Дирихле), а случай  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  соответствует граничным условиям второго рода (Неймана). Возможны конечно и смешанные условия.

В качестве примера обратимся к рассмотрению случая граничных условий первого рода (Дирихле). Рассмотрим сначала левую границу расчетной области. Пусть температура  $T_j$  в узле  $j=1$  задана и равна:

$$T_1 = \mu_1. \quad (2.27)$$

Так как в начале рекуррентного процесса уравнение (2.27) по форме совпадает с общим уравнением (2.22) при  $j=1$ , то путем их сравнения определяются начальные значения коэффициентов прогонки в виде:

$$\mathfrak{R}_j = 0; \quad Q_1 = \mu_1. \quad (2.28)$$

Зная начальное значение  $\mathfrak{R}_1$ ,  $Q_1$  по общим формулам (2.25) определяются остальные их значения  $\mathfrak{R}_j$ ,  $Q_j$  при  $j = \overline{2, N-1}$ .

На другом конце последовательности  $j$  пусть температура  $T_j$  в граничном узле  $j=N$  тоже задана и равна:

$$T_N = \mu_2. \quad (2.29)$$

Это дает основание осуществить обратную прогонку с помощью общей формулы (2.22) для  $j = \overline{N-1, 2}$  и определить  $T_{N-1}$  через  $T_N$ ,  $T_{N-2}$  через  $T_{N-1}$ , ...,  $T_2$  через  $T_3$ .



В случае граничных условий второго рода (Неймана) задача решается аналогично.

Вернемся к рассмотренному выше случаю, когда температура, например, на левой границе  $T_l$  не определена, но зато задан тепловой поток на границе. В этом случае для температуры  $T_l$  было получено уравнение (2.16), которое перепишем в виде:

$$T_l = \frac{B_1}{C_1} T_2 + \frac{F_1}{C_1}. \quad (2.30)$$

Сравнивая это выражение с общим уравнением (2.22) при  $j=l$ , для начальных значений коэффициентов прогонки в этом случае находим:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{B_1}{C_1}; \quad Q_1 = \frac{F_1}{C_1}. \quad (2.31)$$

Зная начальные значения  $\mathfrak{R}_1$ ,  $Q_1$  по общим рекуррентным формулам (2.25) определяются остальные значения коэффициентов  $\mathfrak{R}_j$ ,  $Q_j$  при  $j = \overline{2, N-1}$ . Если температура на другом конце последовательности  $j$  задана в виде:

$$T_N = \mu_2, \quad (2.32)$$

то можно приступить к обратной прогонке.

## 2.4. Нестационарная одномерная теплопроводность

Если вернуться к общему дифференциальному уравнению переноса тепла (2.1), то можно констатировать, что в одномерном случае мы умеем аппроксимировать диффузионный и источниковый член уравнения. Обратимся теперь к нестационарному слагаемому исходного уравнения и для простоты опустим пока источниковый член. Тогда нестационарное одномерное уравнение переноса тепла записывается в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad \Gamma^\Phi = \lambda, \quad S = 0. \quad (2.33)$$

Так как время  $t$  является однонаправленной координатой, то решение нестационарной задачи получаем путем продвижения во времени от заданного начального распределения температуры. Таким образом, при заданном значении  $T^n$ , на характерном временном слое  $n$  надо определить значения температуры  $T^{n+1}$  для времени  $t+\Delta t$ . Старые значения  $T$  в узловых точках обозначим как  $T_j^n, T_{j+1}^n, T_{j-1}^n$ , а новые (неизвестные) значения для времени  $t+\Delta t$  через  $T_j^{n+1}, T_{j+1}^{n+1}, T_{j-1}^{n+1}$ .

Дискретный аналог уравнения (2.33) получим путем его интегрирования по контрольному объему, показанному на рис. 2.1 и по времени в интервале от  $t$  до  $t+\Delta t$ . Тогда можно записать:

$$\int_{j-1/2}^{j+1/2} \left( \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt \right) dx = \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{j-1/2}^{j+1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right) dt, \quad (2.34)$$

где пределы интегрирования выбраны в соответствии с физическим смыслом соответствующих членов уравнения. Для вычисления левого интеграла предположим, что значение  $T$  в узле  $j$  распространено на весь контрольный объем. Тогда используя теорему о среднем, в соответствии с которой приближенно

$$\int_{y_1}^{y_1+\Delta y} f(y) dy = f(\tilde{y}) \Delta y,$$

где  $\tilde{y}$  — некоторое значение  $y$  из интервала  $y_1 \leq \tilde{y} \leq y_1 + \Delta y$ , для левого интеграла имеем:

$$\int_{j-1/2}^{j+1/2} \left( \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt \right) dx = \int_{j-1/2}^{j+1/2} [T(t+\Delta t, x) - T(t, x)] dx = \Delta x (T_j^{n+1} - T_j^n), \quad (2.35)$$

где  $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ .

Для вычисления правого интеграла в выражении (2.34) проинтегрируем его сначала по  $x$  и следуя рассмотренному выше способу аппроксимации члена  $\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$  в виде (2.4), из (2.34) и (2.35) получаем:

$$\Delta x (T_j^{n+1} - T_j^n) = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\lambda_{j+1/2} (T_{j+1} - T_j)}{hx_{j+1}} - \frac{\lambda_{j-1/2} (T_j - T_{j-1})}{hx_j} \right] dt \quad (2.36)$$

На данном этапе необходимо ввести предположение относительно изменения по времени от  $t$  до  $t+\Delta t$  температур  $T_j$ ,  $T_{j+1}$ ,  $T_{j-1}$ . Возможны различные предположения, и одно из них имеет следующий вид:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_j dt = [\beta T_j^{n+1} + (1 - \beta) T_j^n] \Delta t, \quad (2.37)$$

где  $\beta$  — весовой коэффициент, изменяющийся от 0 до 1. Используя аналогичные соотношения для интегралов от  $T_{j+1}$  и  $T_{j-1}$  из уравнения (2.36) находим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t}(T_j^{n+1} - T_j^n) = & \beta \left[ \frac{\lambda_{j+1/2}(T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1})}{hx_{j+1}} - \frac{\lambda_{j-1/2}(T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1})}{hx_j} \right] + \\ & + (1 - \beta) \left[ \frac{\lambda_{j+1/2}(T_{j+1}^n - T_j^n)}{hx_{j+1}} - \frac{\lambda_{j-1/2}(T_j^n - T_{j-1}^n)}{hx_j} \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Преобразуем это выражение к виду:

$$\begin{aligned} C_j T_j^{n+1} = & B_j [\beta T_{j+1}^{n+1} + (1 - \beta) T_{j+1}^n] + A_j [\beta T_{j-1}^{n+1} + (1 - \beta) T_{j-1}^n] + \\ & + [C_j - (1 - \beta) B_j - (1 - \beta) A_j] T_j^n, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\text{где } B_j = \frac{\lambda_{j+1/2}}{hx_{j+1}}, \quad A_j = \frac{\lambda_{j-1/2}}{hx_j}, \quad C_j^0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad C_j = \beta B_j + \beta A_j + C_j^0. \quad (2.40)$$

Полученный дискретный аналог при определенных конкретных значениях весового коэффициента  $\beta$  приводится к хорошо известным схемам для параболических дифференциальных уравнений. В частности для  $\beta = 0$  получаем явную схему, для  $\beta = 0.5$  – схему Кранка-Николсона и для  $\beta = 1$  – полностью неявную схему. Можно показать, что неявная схема наиболее предпочтительна. С этой целью рассмотрим ситуацию более подробно.

Различные значения  $\beta$  можно интерпретировать как характеристику изменения  $T_j$  от  $t$ , показанную на рис. 2.3.

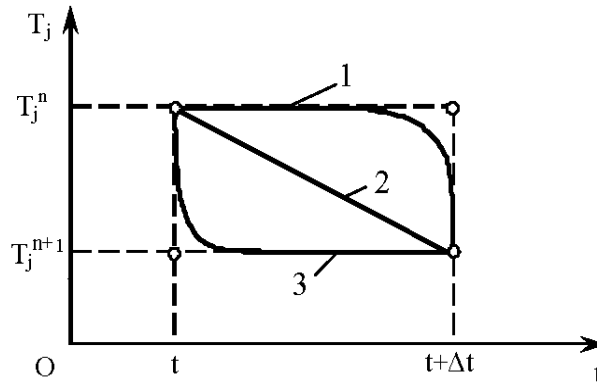


Рис. 2.3. Изменение температуры на интервале времени  $\Delta t$  для явной схемы (1), схемы Кранка-Николсона (2) и неявной схемы (3).

Явная схема по существу предполагает, что старое значение  $T_j^n$  существует в пределах всего временного шага  $\Delta t$ , за исключением точки  $t + \Delta t$ . Неявная схема предполагает, что в момент времени  $t$  температура  $T_j$  резко изменяется от  $T_j^n$  до  $T_j^{n+1}$ , а затем остается равной  $T_j^{n+1}$  на всем временном

шаге и температура в пределах временного шага характеризуется новым значением  $T_j^{n+1}$ . Схема Кранка-Николсона предполагает линейное изменение  $T_j$  от  $t$ . На первый взгляд кажется, что линейное изменение должно быть лучше, чем две другие альтернативы. Однако более предпочтительной оказывается неявная схема и вот почему.

Для явной схемы ( $\beta = 0$ ) уравнение (2.39) принимает следующий вид:

$$C_j T_j^{n+1} = B_j T_{j+1}^n + A_j T_{j-1}^n + (C_j^0 - B_j - A_j) T_j^n. \quad (2.41)$$

Это означает, что  $T_j^{n+1}$  не зависит от других соседних неизвестных  $T_{j+1}^{n+1}$  или  $T_{j-1}^{n+1}$ , а является явно определенной по известным на предыдущем слое температурам  $T_j^n, T_{j+1}^n, T_{j-1}^n$ . Поэтому схема и называется явной. Если же  $\beta \neq 0$ , то любая схема будет неявной, так как  $T_j^{n+1}$  будет зависеть от соседних значений температуры  $T_{j+1}^{n+1}$  и  $T_{j-1}^{n+1}$  и в этом случае необходимо решать систему нескольких уравнений. Явная схема конечно удобней, однако это удобство связано с рядом ограничений. Анализируя уравнения (2.41) и вспоминая правило 2 о положительности коэффициентов приходим к условию:

$$\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{2\lambda}. \quad (2.42)$$

Если это условие нарушается, то могут возникнуть физически неправдоподобные результаты. Уравнение (2.42) является хорошо известным критерием Куранта устойчивости явной схемы.

Обычно схема Кранка-Николсона считается безусловно устойчивой. Однако в рамках рассматриваемой модели можно показать, что она хороша только для малых временных интервалов [157].

Если потребовать, чтобы коэффициент при  $T_j^n$  в уравнении (2.39) не был отрицательным, то только значение  $\beta = 1$  обеспечит это условие. Таким образом, полностью неявная схема ( $\beta = 1$ ) удовлетворяет требованиям простоты и физически обоснованного поведения искомой переменной.

Запишем уравнение (2.39) в полностью неявном виде, то есть при  $\beta = 1$ . Предварительно введем линеаризованный источниковый член, который примем уменьшающимся во времени. Тогда для дискретного аналога уравнения (2.33) получаем:

$$C_j T_j^{n+1} = B_j T_{j+1}^{n+1} + A_j T_{j-1}^{n+1} + F_j, \quad (2.43)$$

где

$$B_j = \frac{\lambda_{j+1/2}}{hx_{j+1}}, \quad A_j = \frac{\lambda_{j-1/2}}{hx_j}, \quad C_j^0 = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

$$C_j = B_j + A_j + C_j^0 - S_1 \Delta x, \quad F_j = S_0 \Delta x. \quad (2.44)$$

Легко видеть, что при  $\Delta t \rightarrow \infty$  это уравнение приводится к стационарному дискретному аналогу (2.8).

Основным принципом полностью неявной схемы является то, что в пределах всего шага по времени температура принимается равной новому значению  $T_j^{n+1}$ . Таким образом, если коэффициент теплопроводности не постоянен (зависит от времени или координат), он должен пересчитываться через  $T_j^{n+1}$  в итерационном процессе точно так же как и при решении стационарной задачи. Другие моменты процедуры решения, связанные с аппроксимацией граничных условий, линеаризацией источникового члена, решением системы алгебраических уравнений и т.д. в принципе остаются такими же, как и в стационарной задаче, но применение неявных схем связано с необходимостью при расчете очередного временного слоя, решать систему уравнений, связывающих значение искомой функции ( $T$ ) в узлах шаблона, принадлежащих этому слою.

Детальное рассмотрение одномерной задачи теплопроводности помогло освоить нам набор некоторых приемов, позволяющих перейти к рассмотрению двумерных задач.

## 2.5. Двумерная нестационарная теплопроводность

Рассмотрим уравнение теплопроводности для двумерной задачи, которое согласно (2.1) записывается в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S, \quad (2.45)$$

Для того чтобы приступить к построению дискретного аналога этого уравнения будем использовать метод контрольного объема. Введем стандартный фрагмент расчетной сетки для этой задачи, который представлен на рис. 2.4. На нем же приведена схема расположения узловых точек.

Для узловой точки  $(j, i)$  соседние точки  $(j+1, i)$  и  $(j-1, i)$  расположены по направлению оси  $x$ , а точки  $(j, i+1)$  и  $(j, i-1)$  по направлению оси  $y$ . Контрольный объем, окружающий точку  $(j, i)$ , заштрихован. Глубина контрольного объема в направлении оси  $z$  равна единице. Обозначения введенные на рис. 2.1 для расстояний  $\Delta x$ ,  $x_{j+1/2}$  и т.д. распространяются

здесь на два измерения. Вопрос расположения граней контрольного объема по отношению к узловым точкам пока оставим открытым. Их можно расположить точно посередине между соседними точками, но можно применить и другие способы.

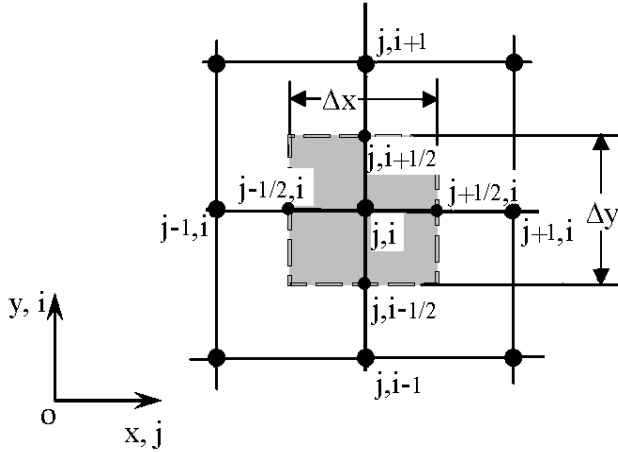


Рис. 2.4. Контрольный объем для двумерной задачи

Выше было показано, как рассчитать тепловой поток  $q_e$  на грани контрольного объема между точками  $j$  и  $j+1$ . Предположим, что полученное таким образом значение  $q_e$  распространено на всю поверхность  $\Delta y \cdot 1$ . Интенсивность переноса теплоты через другие поверхности контрольного объема можно определить подобным образом.

Дискретный аналог уравнения (2.45) получим путем его интегрирования по контрольному объему, показанному на рис. 2.4 и по временному интервалу от  $t$  до  $t+\Delta t$ . Будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy &= \int_t^{t+\Delta t} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx dt + \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} (S_0 + S_1 T_{j,i}) dx dy dt, \end{aligned} \quad (2.46)$$

где пределы интегрирования выбраны в соответствии с физическим смыслом членов уравнения. Как и раньше, для вычисления первого интеграла предположим, что значение температуры  $T$  в узловой точке  $(j, i)$  распространяется на весь контрольный объем. Тогда в соответствии с теоремой о среднем имеем:

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy = \Delta x \Delta y (T_{j,i}^{n+1} - T_{j,i}^n). \quad (2.47)$$

Следуя, уже рассмотренному выше, способу разностной аппроксимации слагаемых  $\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$  и  $\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$ , из (2.46) с учетом (2.47) получаем:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y (T_{j,i}^{n+1} - T_{j,i}^n) = & \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\lambda_{j+1/2,i} (T_{j+1,i} - T_{j,i})}{hx_{j+1}} - \frac{\lambda_{j-1/2,i} (T_{j,i} - T_{j-1,i})}{hx_j} \right] \Delta y \Delta t + \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\lambda_{j,i+1/2} (T_{j,i+1} - T_{j,i})}{hy_{i+1}} - \frac{\lambda_{j,i-1/2} (T_{j,i} - T_{j,i-1})}{hy_i} \right] \Delta x \Delta t + (S_0 + S_1 T_{j,i}^{n+1}) \Delta x \Delta y \Delta t. \end{aligned} \quad (2.48)$$

На этом этапе, как и ранее, будем предполагать, что характер изменения температуры по времени  $t$  таков, что:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_{j,i} dt = T_{j,i}^{n+1} \Delta t. \quad (2.49)$$

Тогда, используя (2.49), уравнение (2.48) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} (T_{j,i}^{n+1} - T_{j,i}^n) = & \left[ \frac{\lambda_{j+1/2,i} (T_{j+1,i}^{n+1} - T_{j,i}^{n+1})}{hx_{j+1}} - \frac{\lambda_{j-1/2,i} (T_{j,i}^{n+1} - T_{j-1,i}^{n+1})}{hx_j} \right] \Delta y + \\ & + \left[ \frac{\lambda_{j,i+1/2} (T_{j,i+1}^{n+1} - T_{j,i}^{n+1})}{hy_{i+1}} - \frac{\lambda_{j,i-1/2} (T_{j,i}^{n+1} - T_{j,i-1}^{n+1})}{hy_i} \right] \Delta x + (S_0 + S_1 T_{j,i}^{n+1}) \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Преобразуем теперь разностное уравнение (2.50) к стандартному дискретному виду. После простых преобразований получим:

$$d_{j,i} T_{j,i}^{n+1} + c_1 T_{j+1,i}^{n+1} + c_0 T_{j-1,i}^{n+1} + b_1 T_{j,i+1}^{n+1} + b_0 T_{j,i-1}^{n+1} = f^T, \quad (2.51)$$

где коэффициенты дискретизации определены формулами:

$$c_1 = -\lambda_{j+1/2,i} \frac{\Delta y}{hx_{j+1}}, \quad c_0 = -\lambda_{j-1/2,i} \frac{\Delta y}{hx_j}, \quad b_1 = -\lambda_{j,i+1/2} \frac{\Delta x}{hy_{i+1}}, \quad b_0 = -\lambda_{j,i-1/2} \frac{\Delta x}{hy_i}, \quad (2.52)$$

$$d_{j,i} = -c_1 - c_0 - b_1 - b_0 + a_p^0 - S_1 \Delta x \Delta y, \quad (2.53)$$

$$a_p^0 = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}, \quad f^T = S_0 \Delta x \Delta y + a_p^0 T_{j,i}^n. \quad (2.54)$$

Коэффициенты дискретного аналога в методе контрольного объема выражают определенный физический смысл. Так коэффициенты  $b_1$ ,  $b_0$ ,  $c_1$ ,  $c_0$  представляют собой проводимости между точкой  $(j, i)$  и соответствующими ей соседними точками.

Слагаемое  $a_p^0 T_{j,i}^n$  внутренняя энергия, отнесенная к интервалу  $\Delta t$ , содержащаяся в контрольном объеме в момент времени  $t$ . Постоянный член  $f^T$  состоит из этой внутренней энергии и мощности тепловыделения в контрольном объеме от источника  $S_0$ . Коэффициент  $d_{ij}$  в центральном узле при записи дискретного аналога в виде (2.51) представляет собой сумму всех соседних коэффициентов с обратным знаком, включая  $a_p^0$ , и содержит вклад от линеаризованного источникового члена  $S_I$ .

## 2.6. Установившаяся одномерная конвекция и диффузия тепла

Выше, при рассмотрении задачи теплопроводности в общем дифференциальном уравнении переноса тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(\nu_k T)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + S, \quad (2.55)$$

был опущен конвективный член, который является характерным в задачах гидродинамики и теплообмена.

Хотя при учете процессов переноса тепла или какой-либо другой гидродинамической субстанции  $\Phi$ , к рассмотренным нестационарному, диффузионному и источниковому слагаемым добавляется только один новый член – конвективный, его аппроксимация оказывается достаточно сложной. Кроме того, конвективный и диффузионный механизмы переноса связаны непосредственно. Поэтому для дискретизации этих слагаемых, в уравнении их целесообразно рассматривать совместно.

Рассмотрим одномерную модельную стационарную задачу в которой присутствуют только конвекция и диффузия. Согласно (2.55) исходное уравнение одномерной задачи для этого случая записывается в виде:

$$\frac{d}{dx}(uT) = \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right), \quad (2.56)$$

где  $u$  — скорость среды в направлении оси  $x$ , которая считается известной из решения уравнений движения, то есть  $u = u^*$ . Для получения дискретного аналога уравнения (2.56) используем трехточечный шаблон, представленный на рис. 2.5.

Хотя действительное расположение граней контрольного объема  $j-1/2$  и  $j+1/2$  не должно влиять на окончательную форму записи, для простоты предположим, что грань  $j+1/2$  расположена посередине между узловыми точками  $j$  и  $j+1$ , а грань  $j-1/2$  — посередине между  $j-1$  и  $j$ .



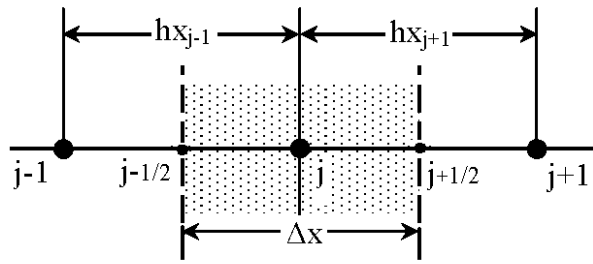


Рис. 2.5. Типичный шаблон узловых точек с контрольным объемом для одномерной задачи

Интегрируя уравнение (2.56) по контрольному объему показанному на рис. 2.5, получаем:

$$(uT)_{j+1/2} - (uT)_{j-1/2} = (\lambda \frac{\partial T}{\partial x})_{j+1/2} - (\lambda \frac{\partial T}{\partial x})_{j-1/2} \quad (2.57)$$

Способ аппроксимации диффузионного члена  $(\lambda \frac{\partial T}{\partial x})$  в предположении кусочно-линейного профиля температуры  $T$  между двумя узлами был уже рассмотрен выше. Для конвективного члена сначала кажется естественным такой же выбор профиля, то есть:

$$T_{j+1/2} = \frac{1}{2}(T_{j+1} + T_j), \quad T_{j-1/2} = \frac{1}{2}(T_j + T_{j-1}). \quad (2.58)$$

Тогда уравнение (2.57) можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2}u_{j+1/2}(T_{j+1} + T_j) - \frac{1}{2}u_{j-1/2}(T_j + T_{j-1}) = \frac{\lambda_{j+1/2}(T_{j+1} + T_j)}{hx_{j+1}} - \frac{\lambda_{j-1/2}(T_j + T_{j-1})}{hx_j}, \quad (2.59)$$

где значения  $\lambda_{j+1/2}$  и  $\lambda_{j-1/2}$  на гранях контрольного объема определяются согласно соотношению вида (2.11). После простых преобразований дискретный аналог уравнения (2.59) можно записать в следующей стандартной форме:

$$C_j T_j = B_j T_{j+1} + A_j T_{j-1}, \quad (2.60)$$

где соответствующие коэффициенты равны:

$$\begin{aligned} B_j &= \frac{\lambda_{j+1/2}}{hx_{j+1}} - \frac{1}{2}u_{j+1/2}, \\ A_j &= \frac{\lambda_{j-1/2}}{hx_j} + \frac{1}{2}u_{j-1/2}, \\ C_j &= B_j + A_j + u_{j+1/2} - u_{j-1/2} = B_j + A_j + (u_{j+1} - u_{j-1})/2. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Слабым звеном этого анализа является предположение о том, что значение температуры на грани контрольного объема  $T_{j+1/2}$  определяется как среднее между  $T_{j+1}$  и  $T_j$ . Внимательный анализ полученного дискретного аналога показывает его неприемлемость, так как, например, коэффициенты  $B_j$  и  $A_j$  могут принимать отрицательные значения, что нарушает определенный критерий [158]. Поэтому необходимо найти лучший подход.

Принципиальному разрешению этой проблемы способствовали исследования в области газовой динамики. Р. Курант с соавторами [260] решали гиперболические уравнения, описывающие сверхзвуковые течения. Они показали, что если заменить коэффициенты, содержащие первые производные, конечно-разностными аппроксимациями с учетом направления течения, то устойчивость решения систем разностных уравнений итерационными методами возрастает. Этот подход был назван в литературе схемами ориентированными «против потока».

При этой аппроксимации запись диффузионного слагаемого в уравнении остается прежней, а в конвективных слагаемых значение  $T$  на грани контрольного объема равно значению в соседней узловой точке с подветренной стороны грани, то есть:

$$T_{j+1/2} = T_j, \quad \text{если } u_{j+1/2} > 0$$

и

$$T_{j+1/2} = T_{j+1}, \quad \text{если } u_{j+1/2} \leq 0. \quad (62)$$

Следовательно конвективные члены уравнения (2.57) с использованием аппроксимации «против потока» можно записать в виде:

$$u_{j+1/2} T_{j+1/2} = u_{j+1/2} [(1 - \beta) T_{j+1} + \beta T_j], \quad (2.63)$$

$$u_{j-1/2} T_{j-1/2} = u_{j-1/2} [(1 - \beta) T_j + \beta T_{j-1}], \quad (2.64)$$

где в (2.63) параметр  $\beta = 1$  при  $u_{j+1/2} > 0$  и  $\beta = 0$  при  $u_{j+1/2} \leq 0$ .

В выражении (2.64) ситуация аналогичная. Если теперь выражения (2.63) и (2.64) подставить в (2.57), то его можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & u_{j+1/2} [(1 - \beta) T_{j+1} + \beta T_j] - u_{j-1/2} [(1 - \beta) T_j + \beta T_{j-1}] = \\ & = \frac{\lambda_{j+1/2}}{h x_{j+1}} (T_{j+1} - T_j) - \frac{\lambda_{j-1/2}}{h x_j} (T_j - T_{j-1}). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Тогда после группировки членов уравнения (2.65), дискретный аналог уравнения (2.57) с использованием аппроксимации конвективных членов по схеме «против потока» можно записать в следующей стандартной форме:

$$C_j T_j = B_j T_{j+1} + A_j T_{j-1}, \quad (2.66)$$

где коэффициенты дискретизации определены формулами:

$$\begin{aligned}
B_j &= \frac{\lambda_{j+1/2}}{hx_{j+1}} - u_{j+1/2}(1 - \beta), \\
A_j &= \frac{\lambda_{j-1/2}}{hx_j} + u_{j-1/2}\beta, \\
C_j &= B_j + A_j + u_{j+1/2} - u_{j-1/2}.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Или используя соотношения вида:

$$u_{j+1/2} = (u_{j+1} + u_j) / 2, \quad u_{j-1/2} = (u_{j-1} + u_j) / 2, \tag{2.68}$$

для коэффициентов  $B_j$ ,  $A_j$ ,  $C_j$  окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
B_j &= \frac{\lambda_{j+1/2}}{hx_{j+1}} - \frac{1}{2}(u_{j+1} + u_j)(1 - \beta), \\
A_j &= \frac{\lambda_{j-1/2}}{hx_j} + \frac{1}{2}(u_{j-1} + u_j)\beta, \\
C_j &= B_j + A_j + \frac{1}{2}(u_{j+1} + u_{j-1}).
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Таким образом, для случая установившегося одномерного переноса тепла путем конвекции и диффузии получен дискретный аналог уравнения (2.56) в виде (2.66), в котором соответствующие коэффициенты определяются по формулам (2.69).

## 2.7. Дискретный аналог для двумерной нестационарной задачи переноса тепла

На данном этапе предыдущий анализ позволил получить всю предварительную информацию, необходимую для построения дискретного аналога полного двухмерного нестационарного уравнения переноса тепла, которое согласно (2.55) запишем в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) + S. \tag{2.70}$$

Компоненты скорости  $u$ ,  $v$ , удовлетворяющие уравнениям движения и уравнению неразрывности, в этом уравнении считаем известными, то есть  $u = u^*$  и  $v = v^*$  во все моменты времени. Для получения дискретного аналога уравнения (2.70) рассмотрим шаблон двумерной задачи и контрольный объем представленный на рис. 2.4. Рассуждая как и выше проинтегрируем уравнение (2.70) по контрольному объему и по времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ . Будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \left( \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt \right) dx dy + \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{\partial(uT)}{\partial x} dx dy \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \frac{\partial(vT)}{\partial y} dy dx \right) dt = \\
& = \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx \right) dt + \\
& \quad + \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} (S_0 + S_1 T) dx dy \right) dt.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Здесь пределы интегрирования выбраны в соответствии с физическим смыслом соответствующих слагаемых уравнения, а источниковый член, как и выше принят линейно зависящим от температуры  $T$ , то есть  $S = S_0 + S_1 T$ .

Предполагая, как и раньше, что значение  $T$  в узловой точке  $(j, i)$  распространяется на весь контрольный объем, после интегрирования (2.71) для случая неявной схемы будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \Delta x \Delta y (T_{j,i}^{n+1} - T_{j,i}^n) + [(uT)_{j+1/2,i}^{n+1} - (uT)_{j-1/2,i}^{n+1}] \Delta y \Delta t + [(vT)_{j,i+1/2}^{n+1} - (vT)_{j,i-1/2}^{n+1}] \Delta x \Delta t = \\
& = \left[ \frac{\lambda_{j+1/2,i} (T_{j+1,i}^{n+1} - T_{j,i}^{n+1})}{hx_{j+1}} - \frac{\lambda_{j-1/2,i} (T_{j,i}^{n+1} - T_{j-1,i}^{n+1})}{hx_j} \right] \Delta y \Delta t + \\
& \quad + \left[ \frac{\lambda_{j,i+1/2} (T_{j,i+1}^{n+1} - T_{j,i}^{n+1})}{hy_{i+1}} - \frac{\lambda_{j,i-1/2} (T_{j,i}^{n+1} - T_{j,i-1}^{n+1})}{hy_i} \right] \Delta x \Delta t + (S_0 + S_1 T_{j,i}^{n+1}) \Delta x \Delta y \Delta t.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Для аппроксимации конвективных слагаемых в уравнениях (2.72) используем схему «против потока». Тогда для них можно записать:

$$\begin{aligned}
(uT)_{j+1/2,i}^{n+1} &= u_{j+1/2,i}^{n+1} [(1 - \beta(u_{j+1/2,i}^{n+1})) T_{j+1,i}^{n+1} + \beta(u_{j+1/2,i}^{n+1}) T_{j,i}^{n+1}], \\
(uT)_{j-1/2,i}^{n+1} &= u_{j-1/2,i}^{n+1} [(1 - \beta(u_{j-1/2,i}^{n+1})) T_{j,i}^{n+1} + \beta(u_{j-1/2,i}^{n+1}) T_{j-1,i}^{n+1}], \\
(vT)_{j,i+1/2}^{n+1} &= v_{j,i+1/2}^{n+1} [(1 - \beta(v_{j,i+1/2}^{n+1})) T_{j,i+1}^{n+1} + \beta(v_{j,i+1/2}^{n+1}) T_{j,i}^{n+1}], \\
(vT)_{j,i-1/2}^{n+1} &= v_{j,i-1/2}^{n+1} [(1 - \beta(v_{j,i-1/2}^{n+1})) T_{j,i}^{n+1} + \beta(v_{j,i-1/2}^{n+1}) T_{j,i-1}^{n+1}].
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Разделив уравнение (2.72) на  $\Delta t$  и подставив соотношения (2.73) в (2.72) преобразуем его к следующей стандартной форме:

$$d_{j,i} T_{j,i}^{n+1} + b_1 T_{j,i+1}^{n+1} + b_0 T_{j,i-1}^{n+1} + c_1 T_{j+1,i}^{n+1} + c_0 T_{j-1,i}^{n+1} = f^T, \tag{2.74}$$

где соответствующие коэффициенты определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\lambda_{j,i+1/2} \frac{\Delta x}{hy_{i+1}} + \Delta x(1-\beta)v_{j,i+1/2}^{n+1}, \\
b_0 &= -\lambda_{j,i-1/2} \frac{\Delta x}{hy_i} - \Delta x\beta v_{j,i-1/2}^{n+1}, \\
c_1 &= -\lambda_{j+1/2,i} \frac{\Delta y}{hx_{j+1}} + \Delta y(1-\beta)u_{j+1/2,i}^{n+1}, \\
c_0 &= -\lambda_{j-1/2,i} \frac{\Delta y}{hx_j} - \Delta y\beta u_{j-1/2,i}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$d_{j,i} = -b_1 - b_0 - c_1 - c_0 + a_p^0 - S_1 \Delta x \Delta y + (u_{j+1/2,i}^{n+1} - u_{j-1/2,i}^{n+1}) \Delta y + (v_{j,i+1/2}^{n+1} - v_{j,i-1/2}^{n+1}) \Delta x;$$

$$f^T = S_0 \Delta x \Delta y + a_p^0 T_{j,i}^n; \quad a_p^0 = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}.$$

Уравнение (2.74) является главным результатом этой главы. Оно дает алгебраическое соотношение между искомым значением сеточной функции температуры  $T_{i,j}$  в данном узле и ее значениями в соседних узлах.

Заметим, что дробное значение индекса у величин, входящих в систему (2.75) означает, что соответствующая величина находится в промежутке между узлами сетки, то есть на грани контрольного объема. Проще всего эти величины определить путем линейной интерполяции. Например:

$$\begin{aligned}
v_{j,i+1/2}^{n+1} &= (v_{j,i+1}^{n+1} + v_{j,i}^{n+1})/2, & v_{j,i-1/2}^{n+1} &= (v_{j,i-1}^{n+1} + v_{j,i}^{n+1})/2, \\
u_{j+1/2,i}^{n+1} &= (u_{j+1,j}^{n+1} + u_{j,i}^{n+1})/2, & u_{j-1/2,i}^{n+1} &= (u_{j-1,i}^{n+1} + u_{j,i}^{n+1})/2.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Рассмотрев технику дискретизации методом контрольного объема на примере дифференциального уравнения переноса тепла, перейдем к дискретизации интегральной формы законов сохранения массы и изменения количества движения.

## ГЛАВА 3

# ПРЯМОЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОХРАНЕНИЯ МАССЫ И ИЗМЕНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

### 3.1. Трудности расчета поля давления и разнесенные сетки

Выше была рассмотрена процедура дискретизации дифференциального уравнения переноса тепла методом контрольного объема, которое является частным случаем более общего дифференциального уравнения переноса гидродинамической субстанции  $\Phi$ . К сожалению, прямой перенос изложенного подхода для дискретизации дифференциальных уравнений количества движения в форме уравнений Навье-Стокса или Рейнольдса вызывает определенные сложности из-за их векторной формы и трудностей согласования полей скорости и давления. Вследствие того, что в исходную систему уравнений движения давление не входит как основная зависимая переменная и для нее нет отдельного уравнения, то способ расчета поля давления не очевиден. В этом и состоит действительная трудность решения уравнений Навье-Стокса в естественных физических переменных скорость-давление для несжимаемой жидкости. В то же время, совершенно очевидно, что поля скорости и давления должны быть согласованными, так как они должны удовлетворять системе уравнений движения и неразрывности одновременно.

Если для построения дискретного аналога дифференциальных уравнений изменения количества движения воспользоваться «методом контрольного объема», приняв например, шаблон узловых точек  $j$  по оси  $x$  для одномерного случая, как показано на рис. 2.5, то в результате конечно-разностной аппроксимации отдельных слагаемых, в дискретный аналог уравнений движения войдет разность давлений  $(p_{j+1/2} - p_{j-1/2})$ , которая представляет собой силу давления, приложенную к контрольному объему с единичной площадью поперечного сечения. Чтобы выразить эту разность через значения давления не в половинных, а в целых узлах расчетной сетки,

можно, как обычно, предположить, что давление между узловыми точками изменяется по линейному закону. Тогда, если грани контрольного объема  $j-1/2$  и  $j+1/2$  выбраны посередине между соответствующими узловыми точками, то можно записать

$$p_{j+1/2} - p_{j-1/2} = \frac{p_j + p_{j+1}}{2} - \frac{p_j + p_{j-1}}{2} = \frac{p_{j+1} - p_{j-1}}{2}. \quad (3.1)$$

Отсюда видно, что дискретный аналог уравнения количества движения будет содержать разность давлений в узлах  $(j+1)$  и  $(j-1)$ , которые не являются соседними. Это приводит к серьезным недостаткам такой разностной схемы, которая в двумерном и трехмерном случаях еще более усложняется. Поэтому рассмотренный выше стандартный способ дискретизации для уравнения переноса тепла в случае дифференциальных уравнений количества движения, строго говоря, неприменим.

Один из традиционных путей преодоления этой трудности связан с исключением давления из исходной системы уравнений путем перехода к преобразованному переменным функция тока-вихрь. Положительные и отрицательные стороны этого подхода широко известны и неоднократно обсуждались в литературе [178].

Второй путь преодоления этой трудности связан с использованием разнесенных (маркерных) сеток для системы уравнений движения Навье-Стокса, записанных в естественных физических переменных скорость-давление. Этот подход на основе метода «маркеров и ячеек» (МАС) был предложен Ф. Харлоу и Дж. Велчем [278]. Его особенность состоит в том, что при дискретизации уравнений не обязательно все зависимые переменные  $(u, v, p)$  вычислять в одних и тех же узлах расчетной сетки. Можно по желанию для каждой переменной использовать свою сетку. Тогда оказывается, что расчет составляющих скорости в узлах не основной, а на вспомогательных сетках позволяет преодолеть выше отмеченную трудность определения давления и облегчает решение задачи в целом. Естественно, что в этом случае возникают свои сложности из-за сдвига координат, но они не принципиальные.

Рассмотрим три варианта выбора сетки для численного решения задачи. В первом варианте скорость и давление определяются традиционно в одном узле основной сетки, как показано на рис. 3.1.(а).

Преимуществом такой сетки является ее простота и то обстоятельство, что скорость определяется в основных узлах сетки и, в частности, на границе  $\Gamma$ , где эта величина обычно и задается. В то же время данная сетка имеет тот недостаток, что давление также должно определяться на этой границе, но значение давления на границе, вообще говоря, не задано. Поэтому необходимо найти специальный метод его расчета на этой границе, что обычно является целью решения всей задачи.

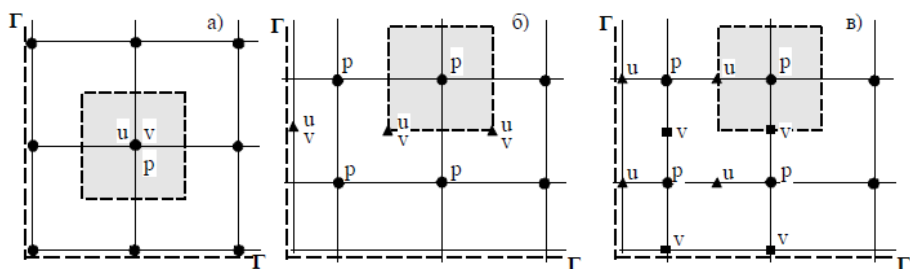


Рис. 3.1. Варианты расположения узлов для разнесенной сетки

Во втором варианте (рис. 3.1.(б)) давление определяется в узлах основной сетки ( $\bullet$ ), а скорость в центрах ячеек ( $\blacktriangle$ ), при этом граница  $\Gamma$  не проходит через узлы основной сетки. Поэтому давление уже не попадает на границу  $\Gamma$  и его не надо определять на этой границе, а во внутренних узлах расчетной сетки давление должно определяться по соответствующим уравнениям, полученным при конечно-разностной аппроксимации уравнений движений.

Наконец, в третьем варианте, представленном на рис. 3.1 (в) приведена разностная сетка, которая использовалась в методе MAC и отличается от предыдущей расположением точек, в которых определяются горизонтальная  $U(\blacktriangle)$  и вертикальная  $V(\blacksquare)$  скорости. Точки или узлы отмеченные значками  $\blacktriangle$  и  $\blacksquare$  расположены на серединах горизонтальной и вертикальной сторонах ячейки соответственно. Некоторый недостаток этой сетки состоит в том, что на каждой из сторон границы определяется только одна составляющая скорости, так что вблизи границы необходимо применять нецентрированные разности. Но это неудобство окупается преимуществами такой сетки в отношении расчета давления.

Разнесенная или шахматная (маркерная) сетка для расчета поля течения впервые была использована Ф. Харлоу [278] и лежит в основе алгоритмов MAC [20, 212], SMAC [28, 32], SIMPLE [158, 159] и других их модификациях. Их особенностью, как в первоначальном варианте, так и последующих модификациях (SMAC и др.) является то, что давление определяется прямым решением уравнения типа Пуассона, полученного путем подстановки выражений для компонентов скорости из уравнений движения в уравнение неразрывности.

При использовании разнесенной сетки и метода контрольного объема составляющие скорости рассчитываются для точек, лежащих на гранях основного контрольного объема. При этом точка в которой определяется компонента скорости  $U$ , смещена по отношению к узловой точке основной сетки только в направлении оси  $X$ . Другими словами, эти точки лежат на отрезках, соединяющих две соседние (вдоль оси  $X$ ) основные узловые



точки, как показано на рис. 3.2. Находится ли точка, где определяется скорость  $U$ , точно посередине между основными узловыми точками, зависит от того, как выделены контрольные объемы на вспомогательной сетке. В общем случае она может находиться и не на середине между узлами основной сетки. Таким образом, при таком подходе успех решения системы уравнений движения несжимаемой жидкости во многом связан с выбором расчетного шаблона и расположением зависимых переменных. Применение разнесенной шахматной сетки и использование декартовой системы координат дает преимущество при определении давления, но ограничивает геометрическую конфигурацию расчетной области. Однако простота и наглядность такого подхода значительно повышает эффективность расчетов, так как процедура определения компонентов скорости в узлах вспомогательной сетки, проходящей через середины ребер контрольного объема с помощью интерполяции, для декартовых координат достаточно очевидна. Поэтому такой подход позволяет построить эффективную разностную схему с высокой скоростью сходимости итерационного процесса.

Использование такой сетки дает возможность совершить согласованный переход от разностного уравнения неразрывности к разностному эллиптическому уравнению Пуассона для давления, а неудобство такой сетки состоит в том, что при разностной аппроксимации исходных дифференциальных уравнений приходится для разных переменных строить свои разностные операторы на разных сетках. При применении метода контрольного объема, для каждой переменной нужно брать свои контрольные объемы. Вследствие этого при использовании разнесенных сеток, дискретные аналоги уравнений количества движения будут несколько отличаться от дискретных аналогов, полученных при использовании неразнесенных сеток.

Контрольный объем для  $U$  компоненты скорости в случае двумерного уравнения количества движения и разнесенной сетки показан на рис. 3.2(a). Если иметь ввиду точки для нахождения только составляющей скорости  $U$ , то в этом контрольном объеме нет ничего необычного. Однако он смещен по отношению к традиционному контрольному объему, расположенному вокруг основной узловой точки  $(j, i)$ . Смещение объема произошло только в направлении оси  $X$  таким образом, что перпендикулярные этому направлению грани проходят через основные узловые точки  $(j, i)$  и  $(j + 1, i)$ .

Аналогично обстоит дело и при рассмотрении  $V$  компоненты скорости в направлении оси  $Y$ . Как показано на рис. 3.2(b) смещение контрольного объема для  $V$  произошло только в направлении оси  $Y$  таким образом, что перпендикулярные этому направлению грани проходят через основные узловые точки  $(j, i)$  и  $(j, i + 1)$ . Таким образом, вспомогательная расчетная

сетка представляет собой перекрывающуюся систему контрольных объемов, используемых при интегрировании уравнений движения.

Введение разнесенных сеток дает ряд важных преимуществ при определении массового расхода через грани контрольного объема без интерполяций соответствующих составляющих скорости. Дискретный аналог уравнения неразрывности приводит к тому, что только физические поля скорости могут ему удовлетворять. Кроме того, разность давлений между двумя соседними узловыми точками определяет составляющую скорости в точке, расположенной между этими узловыми точками. Поэтому такие поля давления должны восприниматься как равномерные.

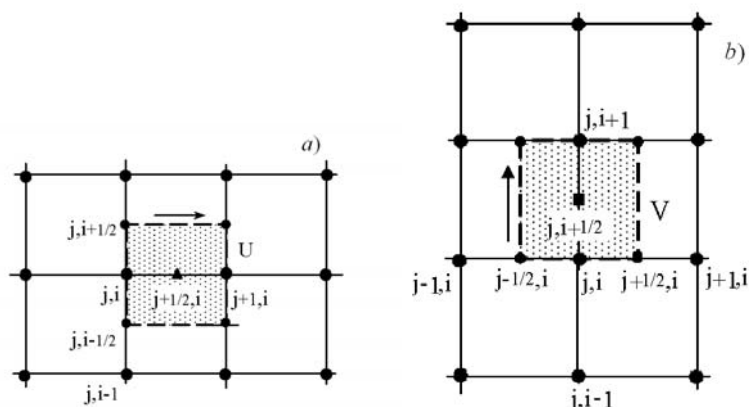


Рис. 3.2. Контрольные объемы для  $U(a)$  и  $V(b)$  компонентов скорости

### 3.2. Новый подход к построению системы конечно-разностных уравнений гидродинамики

В настоящее время предложено огромное количество разностных схем и методов численного решения системы уравнений Навье-Стокса для случаев сжимаемой и несжимаемой жидкости. В такой ситуации при разработке нового метода или модификации известных методов необходимо дать определенное обоснование новому подходу. С этой целью напомним, что компьютерная гидродинамика развивается по двум основным направлениям. Первое из них связано с разработкой элементной базы компьютеров и повышением их вычислительной мощности. Второе направление связано с разработкой математических моделей и алгоритмов расчета различных по сложности прикладных задач.

По первому направлению уже в 80-е годы XX века многие исследователи получили доступ к современным персональным компьютерам. Их элементная база и программное обеспечение постоянно обновляется. Это привело к определенному прогрессу в этом направлении,

включая, например, появление многооконных операционных систем типа WINDOWS и универсальных пакетов графической обработки результатов расчета типа TECPLOT, SURFARS, ORIGIN.

Что касается второго направления, связанного с моделированием процессов переноса, и построением эффективных разностных схем, то здесь тоже достигнуты определенные успехи и разработаны универсальные пакеты прикладных программ с высокоразвитой вычислительной технологией. Характерный пример представляет пакет PHOENICS, разработанный под руководством Д. Сполдинга [366]. Идейное содержание этого пакета базируется на процедуре SIMPLE, разработанной Д. Сполдингом совместно с С. Патанкаром [158, 159]. Он представляет собой универсальную систему программного обеспечения математического моделирования процессов гидроаэродинамики, газовой динамики и тепломассообмена, горения и химических реакций в технических системах и окружающей среде. Название PHOENICS происходит от аббревиатуры английских слов Parabolic Hyperbolic or Elliptic Numerical Integration Code Series (программные версии численного интегрирования параболических, гиперболических и эллиптических уравнений). Пакет обеспечивает пользователю очень широкие возможности и построен на модульном принципе. Известны и другие коммерческие пакеты.

Однако, если судить строго, то нужно отметить, что вычислительные схемы и алгоритмы, которые составляют основу пакетов прикладных программ, разработаны достаточно давно и нуждаются в их дальнейшем совершенствовании. Действительно, большинство из этих алгоритмов связаны с работами известных ученых А.А. Самарского [181], Н.Н. Яненко [228], Г.И. Марчука [140], О.М. Белоцерковского [24], Ф.Х. Харлоу [212, 279], Д. Сполдинга [159], С. Патанкара [158], Б. Лоундера [134], В.М. Пасконова, В.И. Полежаева, Л.А. Чудова [157] и ряда других. Особое место занимают вопросы моделирования турбулентных течений. Здесь, наряду с  $(k - \varepsilon)$  моделью Лоундера в последние годы также получены определенные успехи, включая модель Ментера [322 - 325], модели П. Спаларта, С. Аллмараса [365] и другие. Однако следует отметить большую сложность реализации этих алгоритмов, которые к тому же содержат большое количество неуниверсальных констант и стали носить коммерческий характер, что естественно затрудняет их широкое внедрение в практику серийных расчетов в условиях проектных институтов и конструкторских бюро. Поэтому исследования в этом направлении должны быть направлены на разработку более простых, но достаточно надежных численных методов решения полных уравнений гидромеханики и теплообмена с тем, чтобы они стали доступны не только отдельным профессионалам, но и более широкому кругу специалистов и инженеров.

Теперь вспомним, что система дифференциальных уравнений движения жидкости, именуемых уравнениями Навье-Стокса выводится из интегральных законов сохранения массы, изменения количества движения и сохранения энергии. При этом, для их вывода используется предельный переход от конечных объемов к бесконечно малым, для которых эти законы, строго говоря, выполняются уже приближенно. В этом легко убедиться, если рассматривать, например, бикомпонентную или двухфазную среду. Кроме того, при численном решении уравнений Навье-Стокса методом конечных разностей вместо непрерывной среды вводится ее дискретная модель. Эта модель должна отражать основные свойства среды, то есть должны выполняться разностные аналоги соответствующих законов сохранения. А это значит, что разностные схемы должны быть консервативными. Важность этого обстоятельства отмечали еще С.К. Годунов [87], А.А. Самарский [181], О.М. Белоцерковский [30], Ф.Х. Харлоу [212] и другие.

Одновременно с этим, ими был отмечен один принципиальный момент. Уравнение энергии, например, в системе уравнений газовой динамики в дифференциальной форме может быть записано в двух эквивалентных формах – дивергентной, т.е. консервативной и недивергентной. При этом с помощью других уравнений они тождественно преобразуются из одной формы в другую. Это означает справедливость как закона сохранения полной энергии, так и баланс внутренней энергии в выделенном контрольном объеме.

Для системы разностных уравнений положение может быть иным. Недивергентная форма разностного дифференциального уравнения энергии вообще говоря, не может быть преобразована к дивергентному разностному виду с помощью остальных разностных уравнений газодинамики, так как в ходе преобразований появляются остаточные члены, приводящие к нарушению закона сохранения полной энергии.

Построение разностной схемы для дивергентной формы дифференциального уравнения энергии приводит к аналогичным недостаткам, когда при выполненном законе сохранения полной энергии оказываются нарушенными балансы для отдельных видов энергии – внутренней и кинетической. Величина этих энергетических дисбалансов зависит от характера самого решения. На гладких решениях этот дисбаланс невелик и уменьшается с измельчением временного шага. На сильно изменяющихся решениях величина дисбаланса может быть велика и сравнима с полной энергией. Это может привести к существенному отклонению адекватности физиической и математической модели изучаемого процесса или явления.

Учитывая сказанное, Ф.Х. Харлоу [278] еще в 1965 году предложил оригинальный метод «частиц в ячейках» для решения уравнений Навье-Стокса. Этот метод сочетает в себе черты Эйлера и Лагранжева подходов

для описания движения и реализуется на разнесенных сетках. Согласно этому подходу область решения разбивается неподвижной (эйлеровой) сеткой на ячейки, однако сплошная среда трактуется дискретной моделью, под которой понимается совокупность отдельных «частиц» фиксированной массы, то есть лагранжева сетка «частиц», которые перемещаются через Эйлерову сетку ячеек. Движение этих частиц физически связано с их переносом в функции от времени, в то время как Эйлерова сетка используется для определения полей скорости, давления, плотности и температуры, как функций пространственных координат.

Хотя метод «частиц в ячейках» позволяет исследовать сложные явления в динамике многокомпонентных сред и ряде других случаев, однако он обладает и рядом недостатков. Главный из них связан с сутью метода, предполагающего дискретную структуру самой ячейки (конечное число частиц в ячейке), что быстро приводит к потере вычислительной устойчивости. Важность этого обстоятельства была отмечена в работе О.М. Белоцерковского [30]. Поэтому для случая однородной среды эту модель оказалось целесообразно модифицировать исходя из концепции не дискретности, а непрерывности, то есть рассматривать в ячейке вместо «частиц» непрерывные потоки массы, импульса и энергии через грани эйлеровых ячеек. Плотность потоков в этом случае может быть определена уже из основных интегральных законов сохранения, записанных для данной ячейки («крупной частицы») [30].

Исходя из сказанного, в качестве принципа построения конечно-разностных уравнений гидродинамики и теплообмена представляется перспективным использование основных интегральных законов сохранения механики (массы, импульса и энергии), а не дифференциальных уравнений Навье-Стокса и переноса тепла, являющихся их следствием.

Предлагая такой нетрадиционный путь построения системы разностных уравнений гидродинамики и теплообмена, следует отдавать отчет в том, что он имеет как преимущества, так и недостатки. Преимуществом является то, что полученная таким способом разностная схема будет более точно описывать физические законы сохранения, управляющие движением сплошной среды и, следовательно, будет более адекватной моделью движения вязкой жидкости. Кроме того, в этом случае исчезает необходимость доказательства сходимости ее решения к дифференциальной задаче при измельчении расчетной сетки.

Недостаток указанного подхода состоит в том, что такое построение разностной системы уравнений возможно лишь при дополнительных допущениях об изменении характеристик потоков при переходе от одной узловой точки (ячейки) к другой. Поэтому в зависимости от этих допущений, получаемая система уравнений будет также приближенной.

Целесообразность предлагаемого нового подхода к построению системы конечно-разностных аналогов уравнений движения жидкости на основе дискретизации самих интегральных законов сохранения механики, будет убедительно показана далее. А пока лишь обратим внимание на одно важное обстоятельство, которое состоит в том, что использование интегральной формы законов сохранения механики, а не дифференциальной, приводит к понижению на единицу порядка системы исходных уравнений гидродинамики. Таким образом, предлагаемый способ, построения консервативных разностных схем системы уравнений гидродинамики и теплообмена, основывается на принципе дискретизации основных интегральных соотношений, выражающих законы сохранения для элементарной ячейки разностной сетки. При этом на сетке вводится определенная аппроксимация поведения зависимых переменных, изменяя которую можно получить различные варианты разностных схем.

### **3.3. Разнесенная разностная сетка и расположение сеточных функций**

Численное решение уравнений гидродинамики и теплообмена, независимо от того в дифференциальной или интегральной форме они записаны, удобно проводить на разностных сетках. При использовании метода конечных разностей наиболее важным звеном является выбор сеточного шаблона, способа дискретизации исходных уравнений и их преобразование в систему алгебраических уравнений, связывающих значение искомой переменной в каждом узле расчетной сетки с соседними узлами. В практике расчетов гидродинамических задач имеется несколько способов построения конечно-разностных схем для двух форм записи исходных дифференциальных уравнений движения: в естественных физических переменных – скорость, давление, или в преобразованных переменных – функция тока, вихрь.

Традиционный путь дискретизации исходных дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей состоит в аппроксимации дифференциальных операторов разностными, путем разложения искомых переменных в ряды Тейлора, использовании интегрального метода, интерполяции функций полиномами и т.д.

Разностные аналоги исходных уравнений строятся на расчетном шаблоне, содержащем рассматриваемый внутренний узел  $(j, i)$  и ряд окружающих его соседних узлов. Достаточно простым и часто используемым в двумерных задачах является пятиточечный шаблон типа «крест» [181], который будет ниже использоваться.

При рассмотрении дифференциальной формулировки задачи, дискретные аналоги моделируют дифференциальные уравнения прибли-

женно и порядок ошибки при аппроксимации производных зависит, в первую очередь, от шага расчетной сетки. При таком подходе алгоритмы численного решения уравнений динамики жидкости строго обоснованы лишь в асимптотическом плане, то есть они используют допущение о достаточно малых значениях шагов дискретизации по пространству и времени. При бесконечном измельчении сеток (теоретически) все схемы становятся практически эквивалентными. Однако если размеры этих шагов конечны, что практически и реализуется, то различные схемы принимают индивидуальность и появляется возможность построения неустойчивой или устойчивой разностной схемы.

При использовании конечно-объемной формулировки задачи для каждой ячейки расчетной области, дискретные аналоги интегральных законов сохранения или исходных дифференциальных уравнений выводятся путем их интегрирования по конечному контрольному объему, окружающему рассматриваемый узел сетки, с последующей аппроксимацией конвективных и диффузионных потоков на рассматриваемом шаблоне. В большинстве известных алгоритмов диффузионные потоки аппроксимируют с помощью центральных разностей, а при аппроксимации конвективного переноса через грани контрольного объема поступают по-разному. Последнее служит причиной существования множества разностных аналогов о которых речь будет идти в дальнейшем. Свойство монотонности и консервативности разностных схем является одним из наиболее важных, так как от них зависит устойчивость и сходимость численного решения.

Известно, что применение метода контрольного объема для дискретизации системы нелинейных уравнений гидромеханики гарантирует получение консервативных разностных схем и дает ряд преимуществ, которые в дальнейшем будут продемонстрированы. Учитывая это важное обстоятельство, конечно-разностную схему уравнений гидродинамики следует конструировать на основе дискретизации общих интегральных законов сохранения, а не дифференциальных уравнений Навье-Стокса. Не теряя общности, для простоты ограничимся рассмотрением двумерной задачи. Введем декартову прямоугольную систему координат  $(X, Y)$  и сеточную область  $D_h$  в замкнутой прямоугольной области с границей  $\Gamma$ . При использовании конечно-разностного метода расчетную область покрывают одной или несколькими сетками. Построение сеток представляет собой самостоятельную задачу, которая входит составной частью в вычислительный алгоритм. Важной характеристикой сетки является не только ее шаг по времени и пространственным координатам, но и ее структура.

Из-за сложностей согласования полей скорости и давления конечно-разностные аппроксимации удобно реализовать на сетке с разнесенной

структурой расположения сеточных узлов для зависимых переменных. Это означает, что компоненты скоростей и давления определяются в разных узлах. Такой подход аналогичен методу МАС [212] и дает определенные преимущества при расчете поля давления, но не скоростей. Дискретизацию исходных уравнений будем проводить на неравномерной прямоугольной сетке с шахматным расположением узлов.

Для дискретизации исходных уравнений в пространстве  $(X, Y, \tau)$  вводится основная прямоугольная сетка  $S_0(X_j, Y_i, \tau^n)$ , состоящая из точек

$$X_j = X_0 + j \cdot \Delta x, \quad Y_i = Y_0 + i \cdot \Delta y, \quad \tau^n = n \cdot \Delta \tau$$

и две вспомогательные полуцелые сетки  $S_1$  и  $S_2$

$$S_1(X_{j+1/2}, Y_i, \tau^n), \quad X_{j+1/2} = X_0 + (j+1/2) \cdot \Delta x, \quad Y_i = i \cdot \Delta y$$

$$S_2(X_j, Y_{i+1/2}, \tau^n), \quad X_j = j \cdot \Delta x, \quad Y_{i+1/2} = Y_0 + (j+1/2) \cdot \Delta y.$$

В соответствии с выбранным сеточным шаблоном, вводятся следующие компактные обозначения

$$P(X_j, Y_i, \tau^n) = P_{j,i}^n$$

$$U((j+1/2) \cdot \Delta x, i \cdot \Delta y, n \cdot \Delta \tau) = U_{j+1/2,i}^n,$$

$$V(j \cdot \Delta x, (i+1/2) \cdot \Delta y, n \cdot \Delta \tau) = V_{j,i+1/2}^n.$$

Схема расположения ячеек и узлов приведена на рисунке 3.3. В узлах основной сетки расположены сеточные функции давления  $P_{j,i}$ . Сеточные функции компонентов скорости находятся на серединах граней контрольных объемов, то есть в узлах вспомогательных полуцелых сеток  $S_1(j+1/2, i)$  и  $S_2(j, i+1/2)$  соответственно. Шаги сеток могут быть как равномерными, так и переменными в обоих направлениях. Совокупность узлов сетки образуют шаблон, пространственный фрагмент которого представлен на рис. 3.3. Шаги сетки по пространству и времени определяются по формулам  $\Delta x = L/N$ ,  $\Delta y = H/M$ ,  $\Delta \tau = T/N_t$ , где  $N, M, N_t$  - число точек,  $L, H$  - горизонтальный и вертикальный размеры расчетной области,  $T$  - расчетное время.

Рассмотрим размещение зависимых переменных на введенных сетках. Тип сетки определяется тем, в каком месте находится каждая из гидродинамических переменных (скорость, давление, температура, плотность). Это могут быть узлы сетки, центры ячеек и грани ячеек. Если использовать естественные физические переменные скорость-давление, то при дискретизации по пространству целесообразно использовать



разнесенную шахматную сетку. Преимущества и недостатки такого выбора будут обсуждаться ниже. Узлы основной сетки  $S_0$  показаны на рис. 3.3 и обозначены кружочками ( $\bullet$ ). В каждом внутреннем узле  $(j,i)$  может быть построен пятиточечный шаблон «крест» [181].

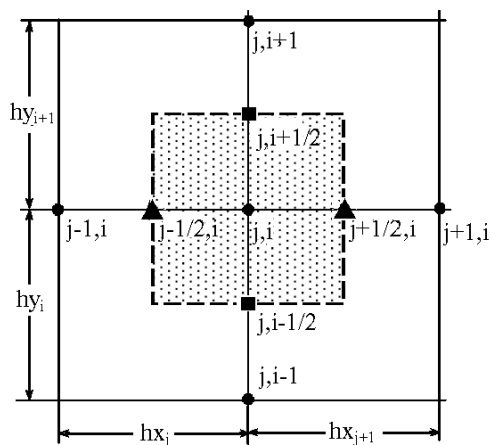


Рис. 3.3. Разнесенная разностная сетка с выделенной ячейкой в виде контрольного объема

Интересующий нас внутренний узел  $(j,i)$  области  $S_0$  находится внутри контрольного объема, координаты граней которого равны

$$(j+1/2, i), (j-1/2, i), (j, i+1/2), (j, i-1/2)$$

и показаны на рис. 3.3 пунктирной линией. Шаги сетки  $\Delta x_j$  и  $\Delta y_i$  для общности выберем переменными, то есть

$$\Delta x = 0,5(hx_j + hx_{j+1}), \quad \Delta y = 0,5(hy_i + hy_{i+1}).$$

Их обозначения показаны на рисунке 3.3. Согласно методу сеток исходные уравнения, начальные и граничные условия заменяются их конечно-разностными аппроксимациями.

Характерной особенностью рассматриваемой разнесенной сетки является то, что ее основные узлы предназначены для таких сеточных функций как давление  $P$ , температура  $T$ , плотность  $\rho$ . Пусть, например, давление  $P$  определяется в центре ячеек  $j,i$ . Тогда для сеточных функций двух компонент скорости  $U$  и  $V$  назначаются дополнительные узлы, которые располагаются на серединах интервалов между основными узлами. То есть, если около узла для функции давления или температуры  $\{j,i\}$  построить соответствующий прямоугольный контрольный объем, то узел

для функции  $U$ , то есть проекции скорости на ось  $OX$ , находится между основными узлами  $\{j, i\}$  и  $\{j+1, i\}$ , а узел для  $V$  (проекции скорости на ось  $OY$ ) – между узлами  $\{j, i\}$  и  $\{j, i+1\}$  (см. рис. 3.3). В рассматриваемой двухмерной сетке номер узла состоит из его номера в направлении осей  $OX$  (величина  $j$ ) и  $OY$  (величина  $i$ ). Такая конфигурация разнесенной сетки удобна для проведения дискретизации по методу контрольного объема. Она дает возможность согласовать значения скоростей  $U$  и  $V$  с давлением  $P$ . Специфическая структура узлов разнесенной сетки вблизи вертикальной границы (а) и угловой границы  $\Gamma$  (б) расчетной сетки показаны на рис. 3.4.

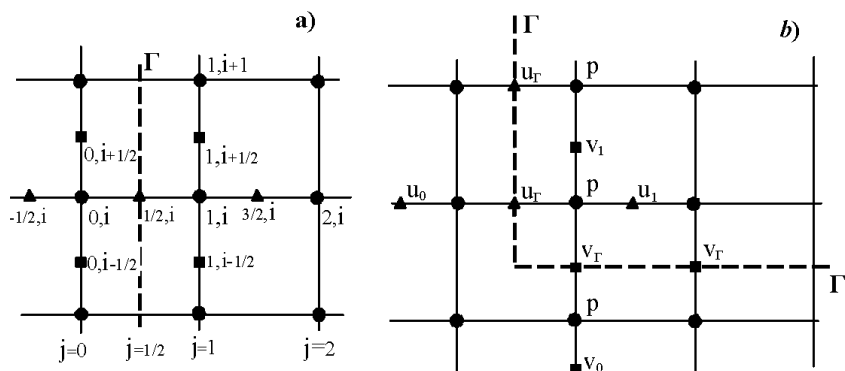


Рис. 3.4. Расположение элементов разнесенной сетки вблизи вертикальной границы (а) и угловой границы  $\Gamma$  (б)

Таким образом, структура сетки здесь аналогична структуре в методе МАС [212], когда сеточные индексы, связанные с определенными зависимыми переменными сдвинуты. Составляющая скорости  $U$  определяется в правой и левой средин сторон контрольного объема  $U_{j+1/2, i}$  и  $U_{j-1/2, i}$ . Составляющая скорости  $V$ , определяется в середине верхней и нижней сторон контрольного объема, как  $V_{j, i+1/2}$  и  $V_{j, i-1/2}$  (см. рис. 3.5). Значение сеточной функции давления  $P_{j, i}$ , определяется в центре контрольного объема  $(j, i)$ . При таком размещении зависимых переменных область  $D_h$  оказывается разбитой на непересекающиеся ячейки, каждая из которых характеризуется присущей ей массой, импульсом, энергией и, например, концентрацией химического компонента или пассивной примеси. Грани приграничных ячеек обычно выбирают так, что они совпадают с физической границей области  $D_h$ , поэтому потоки через них определяются физическими граничными условиями. В силу такого размещения переменных разностная схема, консервативная для каждой ячейки  $D_{j, i}$ ,

будет консервативной и для области  $D_h$  в целом. В этом случае поток через граничную грань ячейки, прилегающей к стенке, равен нулю или задан.

Использование разнесенных сеток дает возможность наглядно интерпретировать каждую ячейку как элемент объема среды, который характеризуется рассчитываемыми в его центре давлением  $P_{j,i}$  и, например, температурой  $\theta_{j,i}$ , а знание нормальной составляющей вектора скорости на границе контрольного объема позволяет непосредственно вычислять поток количества движения (импульс) через эту границу. Кроме того, поскольку давление рассчитывается в центре ячейки и предполагается, что рассматриваются только согласованные сетки, то есть стороны смежных ячеек совпадают, то при расчетах нет необходимости знать граничные условия для давления на границе ячейки, так как они могут быть определены путем использования комбинации уравнений движения и граничных условий для компонентов скорости, которые обычно заданы [208].

### **3.4. Дискретизация основных интегральных законов сохранения массы и изменения количества движения методом контрольного объема**

В обширной литературе по компьютерной гидродинамике можно найти огромное количество примеров, иллюстрирующих возможности и трудности расчета различных течений с помощью метода конечных разностей. Оказывается, что с помощью метода контрольного объема можно получить конечно-разностные аналоги, не только дифференциальных уравнений Навье-Стокса, а и фундаментальных интегральных законов сохранения массы, количества движения и энергии. Этот путь также как и традиционный, сводит проблему расчета параметров гидродинамических течений и теплообмена к решению соответствующих систем разностных алгебраических уравнений, которые совместно с начально-краевыми условиями позволяют решить поставленную задачу. Такой подход к решению задач гидродинамики и тепломассопереноса трудно назвать новым, так как подобные идеи и принципы рассматривались, например, Ф.Х. Харлоу в методе частиц и «ячеек» [212], а в рамках уравнений Эйлера, были использованы О.М. Белоцерковским, Л.И. Севериновым и А.В. Бабаковым применительно к задачам газовой динамики в виде «метода потоков» [10, 26]. Позднее этот подход в виде метода «конечных объемов» использовался и другими исследователями [19, 20, 68, 160].

Обсудим общие принципы и технику дискретизации фундаментальных законов сохранения массы, количества движения и энергии «методом

контрольного объема», для несжимаемой вязкой жидкости, который основывается на сохранении баланса потоков для каждой ячейки расчетной области. Фрагмент используемого сеточного шаблона разнесенной сетки для двумерной задачи с выделенным контрольным объемом представлен на рис. 3.5. Здесь и в дальнейшем значения скалярных переменных задачи таких как давление и дивергенцию скорости будем определять в центре ячейки, то есть в узлах основной сетки  $S_0(\bullet)$ , а компоненты скорости  $U(\blacktriangle)$ ,  $V(\blacksquare)$  на серединах границ ячейки, то есть в узлах дополнительных полуцелых сеток  $S_1$  и  $S_2$  соответственно.

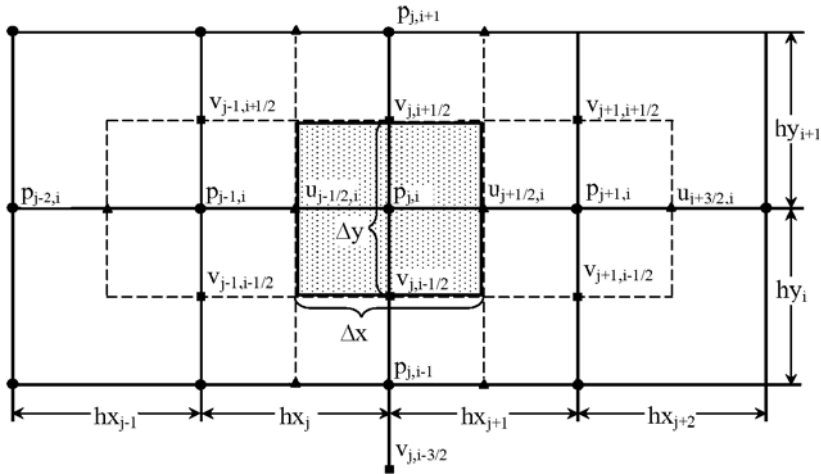


Рис. 3.5. Сеточный шаблон основной и дополнительных сеток для двумерной задачи

Приняв такую структуру расчетной сетки перейдем к построению разностной аппроксимации основных интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии, которые записаны для произвольного объема жидкости  $\tau$ , а следовательно применимы и для выделенной нами некоторой внутренней ячейки  $D_{j,i}$ . Будем характеризовать эту ячейку массой  $m$ , главным вектором количества движения  $\vec{K}$ , полной энергией  $E = (e + v^2/2)$ , а также массовой концентрацией химического компонента или пассивной примеси  $c$ . Тогда общие законы сохранения классической механики (1.4) – (1.6), применительно к рассматриваемому случаю, записываются в следующей интегральной форме [42, 132].

Закон сохранения массы  $m$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = 0; \quad (3.3)$$

закон изменения количества движения  $\vec{K}$  (импульса)

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \vec{V} d\tau = \iiint_{\tau} \text{div} \Pi d\tau + \iiint_{\tau} \rho \vec{F} d\tau; \quad \vec{F} = \vec{k}g; \quad (3.4)$$

закон сохранения энергии  $E$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) d\tau = \iiint_{\tau} \text{div}(\Pi \vec{v}) d\tau + \iiint_{\tau} \rho \vec{F} \vec{v} d\tau - \iiint_{\tau} \text{div} \vec{q}_n d\tau + \iiint_{\tau} Q d\tau, \quad (3.5)$$

закон сохранения концентрации химического компонента  $c$

$$\frac{dc}{d\tau} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} c d\tau = - \iiint_{\tau} \text{div} \vec{q}_c d\tau + \iiint_{\tau} Q_c d\tau. \quad (3.6)$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $\Pi$  – тензор напряжений,  $\vec{k}$  – единичный орт,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $e$  – внутренняя энергия,  $\vec{q}_n$  – поток тепловой энергии,  $\vec{q}_c$  – поток химического вещества,  $Q$  и  $Q_c$  – соответствующие источниковые члены,  $\tau$  – объем рассматриваемой элементарной ячейки. Напомним, что оператор  $\text{div}$  в декартовой системе координат имеет вид

$$\text{div} \Phi = \partial \Phi_k / \partial x_k,$$

где по повторяющемуся индексу производится суммирование. Далее будем предполагать, что жидкость несжимаема, внутренняя энергия  $e = c_p T$ , а потоки тепла  $\vec{q}_n$  и вещества  $\vec{q}_c$  определяются согласно градиентным законам Фурье

$$\vec{q}_n = -\lambda \text{grad } T$$

и Фика

$$\vec{q}_c = -D \text{grad } c$$

соответственно.

Для построения разностных аналогов соответствующих интегральных законов сохранения массы и импульса рассмотрим предварительно выражение субстанциональной производной от объемного интеграла  $\tau$  для произвольной гидродинамической субстанции  $\Phi$  (масса, импульс, энергия) в виде (1.12)

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi d\tau = \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div}(\Phi \vec{v}) \right] d\tau, \quad (3.7)$$

которое представляет собой ее разложение на локальную и конвективную части [42].

Это модельное уравнение переноса гидродинамической субстанции  $\Phi$  является общим для левых частей всех рассматриваемых законов сохранения (3.3) – (3.6). Поэтому при построении их дискретных аналогов методом контрольного объема рассмотрим сначала дискретизацию этого выражения для внутренней ячейки  $D_{j,i}$  эйлеровой прямоугольной расчетной сетки, центр которой расположен в узле  $(j,i)$  и имеет стороны  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Запишем уравнение (3.7) для интересующей нас внутренней ячейки  $D_{j,i}$ . Ввиду того, что мы ограничили себя рассмотрением двумерной задачи, то будем вычислять не тройной, а двойной интеграл (3.7), то есть общее выражение (3.7) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{d}{dt} \iint_S \Phi d\sigma = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(\Phi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi v)}{\partial y} \right] dx dy, \quad (3.8)$$

где  $u$ ,  $v$  - соответствующие компоненты скорости конвективного потока, а пределы интегрирования в соответствии с принятой схемой потоков соответствуют координатам граней контрольного объема с центром в точке  $(j,i)$ . Напомним, что разностные уравнения обычно записываются для внутренних узлов сетки, а сеточные значения искомых переменных в граничных ячейках определяются с помощью граничных условий.

Продолжим теперь формальное интегрирование уравнения (3.8). Предположим, что субстанция  $\Phi$  внутри ячейки равна ее значению в центре ячейки и распространена на весь контрольный объем. Тогда, после интегрирования (3.8) по контрольному объему с центром  $(j,i)$ , получим

$$\frac{d}{dt} \iint_S \Phi d\sigma = \Delta x \Delta y \frac{\partial \Phi_{j,i}}{\partial \tau} + \Delta y [(\Phi u)_{j+1/2,i} - (\Phi u)_{j-1/2,i}] + \Delta x [(\Phi v)_{j,i+1/2} - (\Phi v)_{j,i-1/2}], \quad (3.9)$$

где введены обозначения

$$\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, \quad \Delta y = y_{i+1/2} - y_{i-1/2}. \quad (3.10)$$

Кроме того, для дальнейшего окажется полезным помнить, что для переменных шагов

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0,5(hx_j + hx_{j+1}) = 0,5hx_1; \\ \Delta y &= 0,5(hy_i + hy_{i+1}) = 0,5hy_1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Представим теперь производную по времени от субстанции  $\Phi_{j,i}$  в (3.9) с помощью односторонних разностей по схеме первого порядка точности. Тогда общая неявная разностная форма закона переноса субстанции  $\Phi_{j,i}$  путем конвекции примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_S \Phi d\sigma = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} (\Phi_{j,i}^{n+1} - \Phi_{j,i}^n) + \\ + \Delta y [(\Phi u)_{j+1/2,i} - (\Phi u)_{j-1/2,i}]^{n+1} + \Delta x [(\Phi v)_{j,i+1/2} - (\Phi v)_{j,i-1/2}]^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $(\Phi u)_{j+1/2,i}$  и  $(\Phi u)_{j-1/2,i}$  - конвективные потоки субстанции  $\Phi$  через вертикальные грани ячеек, а  $(\Phi v)_{j,i+1/2}$  и  $(\Phi v)_{j,i-1/2}$  - потоки субстанции  $\Phi$  через горизонтальные грани ячеек, а верхний индекс показывает на принадлежность к временному слою. Заметим, что выписанная аппроксимация конвективных слагаемых, является характерной для левых частей всех законов сохранения (3.3) – (3.6), которые в общем случае содержат не только конвективные, но и диффузионные и источниковые группы членов. Мы обращаем на это внимание в связи с тем, что в дальнейшем нам придется столкнуться с выбором допущений о распределении зависимых переменных между узлами сетки, а эти допущения будут связаны с физической природой механизмов переноса. Поэтому каждую отмеченную группу в дальнейшем необходимо рассматривать отдельно. Для двумерной задачи формулы (3.12) применимы во внутренних узлах рассматриваемой области.

Используя приведенную выше разностную схему общего закона конвективного переноса субстанции  $\Phi$  можно приступить к построению дискретного аналога уравнений, выражающих интегральные законы сохранения массы, импульса, энергии и вещества. Легче всего начать с закона сохранения массы (3.3), так как это уравнение содержит только один уже рассмотренный оператор конвективного переноса. Поэтому построение его конечно-разностного аналога можно выполнить сразу. С этой целью применим формулу (3.12) к закону сохранения массы (3.3). Полагая для этого в (3.12)  $\Phi = \rho$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_S \rho d\tau = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} (\rho_{j,i}^{n+1} - \rho_{j,i}^n) + \Delta y [(\rho u)_{j+1/2,i} - (\rho u)_{j-1/2,i}]^{n+1} + \\ + \Delta x [(\rho v)_{j,i+1/2} - (\rho v)_{j,i-1/2}]^{n+1} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} (\rho_{j,i}^{n+1} - \rho_{j,i}^n) + \\ + \Delta y [\rho_{j+1/2,i} u_{j+1/2,i} - \rho_{j-1/2,i} u_{j-1/2,i}]^{n+1} + \Delta x [\rho_{j,i+1/2} v_{j,i+1/2} - \rho_{j,i-1/2} v_{j,i-1/2}]^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Вспоминая теперь, что в конвективных слагаемых уравнений движения в приближении Буссинеска для несжимаемой стратифицированной жидкости  $\rho = \rho_0 = const$ , поэтому из (3.13) получаем

$$\Delta y (u_{j+1/2,i} - u_{j-1/2,i})^{n+1} + \Delta x (v_{j,i+1/2} - v_{j,i-1/2})^{n+1} = 0. \quad (3.14)$$

Физически это означает, что суммарный поток массы в любом контрольном объеме равен нулю.

Выражение (3.14) представляет собой разностный аналог уравнения неразрывности и может быть также записано в более привычном виде:

$$\frac{(u_{j+1/2,i} - u_{j-1/2,i})^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(v_{j,i+1/2} - v_{j,i-1/2})^{n+1}}{\Delta y} = 0. \quad (3.15)$$

В системе законов сохранения (3.3) – (3.6) особое место занимает уравнение изменения импульса или количества движения, описывающее баланс поверхностных и объемных сил. Для построения его конечно-разностного аналога необходимо перейти от векторной формы уравнения к системе скалярных уравнений в проекциях на оси координат  $x, y$ .

Рассмотрим сначала левую часть уравнения изменения количества движения (3.4). С этой целью в общей формуле (3.12) для разностного аналога конвективных слагаемых для случая уравнения движения в  $x$  - направлении положим  $\Phi = u$  и положим  $\Phi = v$  - для случая уравнения движения в  $y$  - направлении. Записывая  $x$ -компоненту импульса для контрольного объема с центром в узле  $(j+1/2, i)$ , а  $y$ -компоненту импульса для объема с центром в узле  $(j, i+1/2)$ , получим соответствующие дискретные аналоги этих уравнений в следующем виде:

для  $x$  - направления

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_S u d\sigma = \int_j^{j+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] dx dy = \frac{\Delta y \cdot h x_{j+1}}{\Delta t} (u_{j+1/2,i}^{n+1} - u_{j+1/2,i}^n) + \\ + \Delta y [(uu)_{j+1,i} - (uu)_{j,i}]^{n+1} + h x_{j+1} [(uv)_{j+1/2,i+1/2} - (uv)_{j+1/2,i-1/2}]^{n+1}; \end{aligned} \quad (3.16)$$

для  $y$  - направления

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_S v d\sigma = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_i^{i+1} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] dx dy = \frac{\Delta y \cdot h y_{j+1}}{\Delta t} (v_{j,i+1/2}^{n+1} - v_{j,i+1/2}^n) + \\ + h y_{i+1} [(uv)_{j+1/2,i+1/2} - (uv)_{j-1/2,i+1/2}]^{n+1} + \Delta x [(vv)_{j,i+1} - (vv)_{j,i}]^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Обозначим теперь компоненты скорости известные на предыдущем временном слое  $u^n, v^n$  значком (\*), то есть через  $u^*, v^*$ , а искомые значения скоростей на  $(n+1)$  слое, для краткости записи, будут без временного индекса. Кроме того, для нелинейных конвективных слагаемых выполним итерационную линеаризацию по следующему принципу

$$(uu)^{n+1} = u^n \cdot u^{n+1}, \quad (uv)^{n+1} = u^{n+1} \cdot v^n, \quad (vv)^{n+1} = v^n \cdot v^{n+1}, \quad (vu)^{n+1} = v^{n+1} \cdot u^n.$$



Тогда применяя такого вида соотношения для всех квадратичных слагаемых, запишем рассматриваемую систему уравнений (3.16), (3.17) в следующем линеаризованном виде:

для  $x$  - направления

$$\frac{d}{dt} \iint_S u d\sigma = \frac{\Delta y \cdot h x_{j+1}}{\Delta t} (u_{j+1/2,i} - u_{j+1/2,i}^*) + \\ + \Delta y [(u^* u)_{j+1,i} - (u^* u)_{j,i}] + h x_{j+1} [(v^* u)_{j+1/2,i+1/2} - (v^* u)_{j+1/2,i-1/2}]; \quad (3.18)$$

для  $y$  - направления

$$\frac{d}{dt} \iint_S v d\sigma = \frac{\Delta x \cdot h y_{i+1}}{\Delta t} (v_{j,i+1/2} - v_{j,i+1/2}^*) + \\ + h y_{i+1} [(v u^*)_{j+1/2,i+1/2} - (v u^*)_{j-1/2,i+1/2}] + \Delta x [(v^* v)_{j,i+1} - (v^* v)_{j,i}], \quad (3.19)$$

где знак звездочка (\*) означает значение переменной на  $n$ -ом временном слое, а без (\*) на  $(n+1)$  слое.

Рассмотрим теперь правую часть уравнения изменения количества движения (3.4) и для простоты пока опустим последний член уравнения, учитывающий действие объемных архимедовых сил. Стоящий под знаком объемного интеграла тензор напряжений  $\Pi$  для несжимаемой жидкости определим классическим соотношением Ньютона [132, 187], связывающим напряжения в жидкости с тензором скоростей деформаций следующей линейной зависимостью

$$\Pi = \Pi_{ik} = -p \delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad (3.20)$$

где  $p$  - давление,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости,  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера.

Далее рассмотрим правые части уравнения движения для  $x$  - направления и распишем интересующий нас двойной интеграл для ячейки  $D_{j+1/2,i}$ . В случае  $x$  - направления будем иметь:

$$\iint_S \text{div} \Pi_x d\sigma = \int_j^{j+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left( \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial y} \right) dx dy = \\ = \Delta y [(\Pi_{xx})_{j+1,i} - (\Pi_{xx})_{j,i}] + h x_{j+1} [(\Pi_{xy})_{j+1/2,i+1/2} - (\Pi_{xy})_{j+1/2,i-1/2}] \quad (3.21)$$

Согласно (3.20) для несжимаемой жидкости в двумерном случае, напряжения действующие на соответствующую грань контрольного объема равны

$$\Pi_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \Pi_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в (3.21) и выполняя простые преобразования, имеем:

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} \operatorname{div} \Pi_x d\sigma = & \Delta y \left\{ \left[ -p + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_{j+1,i} - \left[ -p + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_{j,i} \right\} + \\
& + hx_{j+1} \cdot \mu \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{j+1/2,i+1/2} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{j+1/2,i-1/2} \right\} = \\
= & -\Delta y (p_{j+1,i} - p_{j,i}) + 2\Delta y \cdot \mu \left[ \frac{(u_{j+3/2,i} - u_{j+1/2,i})}{0.5(hx_{j+1} + hx_{j+2})} - \frac{(u_{j+1/2,i} - u_{j-1/2,i})}{0.5(hx_j + hx_{j+1})} \right] + \\
& + \mu hx_{j+1} \left[ \frac{(u_{j+1/2,i+1} - u_{j+1/2,i})}{hy_{i+1}} + \frac{(v_{j+1,i+1/2} - v_{j,i+1/2})}{hx_{j+1}} - \frac{(u_{j+1/2,i} - u_{j+1/2,i-1})}{hy_i} - \frac{(v_{j+1,i-1/2} - v_{j,i-1/2})}{hx_{j+1}} \right].
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Выпишем теперь стоящий в правой части уравнения (3.4) интеграл в случае  $y$ -направления. Рассматривая ячейку  $D_{j,i+1/2}$  для соответствующего слагаемого получим:

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} \operatorname{div} \Pi_y d\sigma = & \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_i^{i+1} \left( \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} \right) dx dy = \\
= & hy_{i+1} \left[ (\Pi_{yx})_{j+1/2,i+1/2} - (\Pi_{yx})_{j-1/2,i+1/2} \right] + \Delta x \left[ (\Pi_{yy})_{j,i+1} - (\Pi_{yy})_{j,i} \right]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Согласно (3.20) для компонентов вектора напряжений в рассматриваемом случае имеем

$$\Pi_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \Pi_{yy} = -p + 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right). \tag{3.25}$$

После подстановки (3.25) в (3.24) находим

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} \operatorname{div} \Pi_y d\sigma = & hy_{i+1} \cdot \mu \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{j+1/2,i+1/2} - \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{j-1/2,i+1/2} \right] + \\
& + \Delta x \left\{ \left[ -p + 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]_{j,i+1} - \left[ -p + 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]_{j,i} \right\} = -\Delta x (p_{j,i+1} - p_{j,i}) + \\
& + \mu \cdot hy_{i+1} \left[ \frac{(v_{j+1,i+1/2} - v_{j,i+1/2})}{hx_{j+1}} - \frac{(v_{j,i+1/2} - v_{j-1,i+1/2})}{hx_j} + \frac{(u_{j+1/2,i+1} - u_{j+1/2,i})}{hy_{i+1}} - \frac{(u_{j-1/2,i+1} - u_{j-1/2,i})}{hy_{i+1}} \right] + \\
& + 2\Delta x \cdot \mu \left[ \frac{(v_{j,i+3/2} - v_{j,i+1/2})}{0.5(hy_{i+1} + hy_{i+2})} - \frac{(v_{j,i+1/2} - v_{j,i-1/2})}{0.5(hy_i + hy_{i+1})} \right].
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Выполнив эти предварительные преобразования можно теперь записать интегральные уравнения изменения количества движения (3.4) в окончательном конечно-разностном виде для  $x$  и  $y$  направлений. Действительно, приравнявая выражения (3.18) и (3.23), для уравнения изменения количества движения (3.4) в  $x$ -направлении имеем следующий конечно-разностный аналог:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta y \cdot h x_{j+1}}{\Delta t} (u_{j+1/2,i} - u_{j+1/2,i}^*) + \Delta y (u_{j+1,i} \cdot u_{j+1,i}^* - u_{j,i}^* \cdot u_{j,i}) + \\ & + h x_{j+1} (v_{j+1/2,i+1/2}^* \cdot u_{j+1/2,i+1/2} - v_{j+1/2,i-1/2}^* \cdot u_{j+1/2,i-1/2}) = \\ & = -\Delta y (p_{j+1,i} - p_{j,i}) + 2 \cdot \Delta y \cdot \mu \left( \frac{u_{j+3/2,i} - u_{j+1/2,i}}{0.5 \cdot h x_2} - \frac{u_{j+1/2,i} - u_{j-1/2,i}}{0.5 \cdot h x_1} \right) + \\ & + h x_{j+1} \cdot \mu \left( \frac{u_{j+1/2,i+1} - u_{j+1/2,i}}{h y_{i+1}} - \frac{u_{j+1/2,i} - u_{j+1/2,i-1}}{h y_i} \right) + \mu (v_{j+1,i+1/2}^* - v_{j,i-1/2}^* - v_{j+1,i-1/2}^* + v_{j,i-1/2}^*). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Аналогично, приравнявая выражения (3.19) и (3.26) для уравнения изменения количества движения (3.4) в  $y$ -направлении имеем следующий конечно-разностный аналог:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x \cdot h y_{i+1}}{\Delta t} (v_{j,i+1/2} - v_{j,i+1/2}^*) + h y_{i+1} (u_{j+1/2,i+1/2}^* \cdot v_{j+1/2,i+1/2} - u_{j-1/2,i+1/2}^* \cdot v_{j-1/2,i+1/2}) + \\ & + \Delta x (v_{j,i+1}^* \cdot v_{j,i+1} - v_{j,i}^* \cdot v_{j,i}) = -\Delta x (p_{j,i+1} - p_{j,i}) + 2 \Delta x \cdot \mu \left( \frac{v_{j,i+3/2} - v_{j,i+1/2}}{0.5 \cdot h y_2} - \frac{v_{j,i+1/2} - v_{j,i-1/2}}{0.5 \cdot h y_1} \right) + \\ & + h y_{i+1} \cdot \mu \left( \frac{v_{j+1,i+1/2} - v_{j,i+1/2}}{h x_{j+1}} - \frac{v_{j,i+1/2} - v_{j-1,i+1/2}}{h x_j} \right) + \mu (u_{j+1/2,i+1}^* - u_{j+1/2,i}^* - u_{j-1/2,i+1}^* + u_{j-1/2,i}^*) + \\ & + \Delta x \cdot h y_{i+1} Ri(\theta_{j,i}^* + \frac{b}{H} Y(i)). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Здесь для удобства введены следующие обозначения

$$h x_2 = 0.5(h x_{j+1} + h x_{j+2}), \quad h y_2 = 0.5(h y_{i+1} + h y_{i+2}).$$

и учтено слагаемое, описывающее наличие архимедовой силы плавучести

Таким образом, исходя из интегральной формы закона изменения количества движения, путем выполнения операции интегрирования по контрольному объему, получены конечно-разностные аналоги уравнений движения жидкости в проекциях на  $x$  и  $y$  направления. Здесь последнее слагаемое в правой части уравнения (3.28) учитывает эффекты стратификации и объемных массовых сил.

Внимательное рассмотрение уравнений (3.27) и (3.28) показывает, что по своей структуре они эквивалентны разностным аналогам соответствующих дифференциальных уравнений Навье-Стокса. В этом легко убедиться

если уравнения (3.27) и (3.28) разделить на объем  $\Delta x \cdot \Delta y$ . В принципе этого и следовало ожидать при идентичной аппроксимации соответствующих производных. Однако, при использовании метода контрольного объема для построения разностных аналогов уравнений гидромеханики, удается сохранить баланс потоков для элементарной ячейки и избежать сложности, связанной с неоднозначностью дискретизации соответствующих производных искоемых переменных (разности вперед, назад, центральные разности и т.п.). Таким образом, используемый метод контрольного объема является консервативным и обеспечивает точное выполнение баланса массы, количества движения и энергии потока, как на каждом контрольном объеме, так и на любой группе объемов.

На этом этапе целесообразно перейти к безразмерной форме полученных разностных уравнений движения подобно тому, как это было сделано в первой главе. Вводя характерные масштабные параметры длины  $L$ , скорости  $u_0$ , давления  $p_0 = \rho_0 u_0^2$  и времени  $t_0 = L/u_0$ , перепишем полученные разностные уравнения движения в безразмерных величинах  $U, V, P, X, Y, \tau$  в виде:

для  $x$  - направления

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta y \cdot h x_{j+1}}{\Delta t} (U_{j+1/2,i} - U_{j+1/2,i}^*) + \Delta y (U_{j+1,i}^* U_{j+1,i} - U_{j,i}^* U_{j,i}) + \\ & + h x_{j+1} (V_{j+1/2,i+1/2}^* \cdot U_{j+1/2,i+1/2} - V_{j+1/2,i-1/2}^* \cdot U_{j+1/2,i-1/2}) = \\ & = -\Delta y (P_{j+1,i} - P_{j,i}) + \frac{4\Delta y}{\text{Re } h x_2} (U_{j+3/2,i} - U_{j+1/2,i}) - \frac{4\Delta y}{\text{Re } h x_1} (U_{j+1/2,i} - U_{j-1/2,i}) + \quad (3.29) \\ & + \frac{1}{\text{Re } h y_{i+1}} \frac{h x_{j+1}}{h y_{i+1}} (U_{j+1/2,i+1} - U_{j+1/2,i}) - \frac{1}{\text{Re } h y_i} \frac{h x_{j+1}}{h y_i} (U_{j+1/2,i} - U_{j+1/2,i-1}) + \\ & + \frac{1}{\text{Re}} (V_{j+1,i+1/2}^* - V_{j,i+1/2}^* - V_{j+1,i-1/2}^* + V_{j,i-1/2}^*). \end{aligned}$$

для  $y$  - направления

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x \cdot h y_{i+1}}{\Delta t} (V_{j,i+1/2} - V_{j,i+1/2}^*) + h y_{i+1} (U_{j+1/2,i+1/2}^* \cdot V_{j+1/2,i+1/2} - U_{j-1/2,i+1/2}^* \cdot V_{j-1/2,i+1/2}) + \\ & + \Delta x (V_{j,i+1}^* \cdot V_{j,i+1} - V_{j,i}^* \cdot V_{j,i}) = -\Delta x (P_{j,i+1} - P_{j,i}) + \\ & + \frac{1}{\text{Re } h x_{j+1}} \frac{h y_{i+1}}{h x_{j+1}} (V_{j+1,i+1/2} - V_{j,i+1/2}) - \frac{1}{\text{Re } h x_j} \frac{h y_{i+1}}{h x_j} (V_{j,i+1/2} - V_{j-1,i+1/2}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{\text{Re}} \frac{\Delta x}{hy^2} (V_{j,i+3/2} - V_{j,i+1/2}) - \frac{4}{\text{Re}} \frac{\Delta x}{hy^2} (V_{j,i+1/2} - V_{j,i-1/2}) + \\
& + \frac{1}{\text{Re}} (U_{j+1/2,i+1}^* - U_{j+1/2,i}^* - U_{j-1/2,i+1}^* + U_{j-1/2,i}^*) + \Delta x \cdot hy_{i+1} \cdot Ri(\theta_{j,i}^* + \frac{b}{H} Y(i)).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Уравнение неразрывности (3.15) в безразмерных переменных принимает вид:

$$\frac{U_{j+1/2,i} - U_{j-1/2,i}}{\Delta x} + \frac{V_{j,i+1/2} - V_{j,i-1/2}}{\Delta y} = 0. \tag{3.31}$$

Здесь  $P_{j,i}$ ,  $U_{j+1/2,i}$ ,  $V_{j,i+1/2}$ , - искомые безразмерные значения сеточных функций давления и компонентов скорости, которые определяются в узлах основной  $S_0$ , и в узлах дополнительных полуцелых сеток  $S_1$  и  $S_2$  соответственно;  $\text{Re} = \rho_0 u_0 L / \mu$  - число Рейнольдса. Заметим, что в целях простоты для безразмерных значений независимых переменных  $X, Y, \tau$  в формулах (3.29) - (3.31) сохранены обозначения малыми буквами -  $x, y, t$  соответственно.

Величины, которые помечены (\*), относятся к предыдущему шагу по времени (или к предыдущей итерации) и являются известными. Все остальные величины относятся к текущему временному слою и являются неизвестными, которые подлежат определению.

Полученные дискретные аналоги уравнений движения содержат слагаемые с целыми индексами у компонентов скоростей, что соответствует их значениям в узлах основной сетки  $S_0(j, i)$ . Для их определения в узлах полуцелых сеток могут быть использованы различные схемы аппроксимации и в зависимости от их выбора будут получены те или другие конечно-разностные выражения. Поэтому наша следующая задача заключается в том, чтобы выразить значения переменных с целым индексом вида  $U_{j,i}$ ,  $U_{j+1,i}$  и т.д. через значения переменных в узлах вспомогательных полуцелых сеток  $S_1(j+1/2, i)$  и  $S_2(j, i+1/2)$ . Можно конечно принять простейшую схему среднего арифметического, когда, например, для конвективных слагаемых можно записать

$$U_{j,i}^* \cdot U_{j,i} = U_{j,i}^* (U_{j+1/2,i} + U_{j-1/2,i}) / 2; \quad U_{j+1,i}^* \cdot U_{j+1,i} = U_{j+1,i}^* (U_{j+3/2,i} + U_{j+1/2,i}) / 2, \tag{3.32}$$

однако, специалистам известно, что такие схемы, хотя и имеют 2-ой порядок точности аппроксимации, но они неустойчивы. Вследствие этого здесь для разностной аппроксимации конвективных слагаемых используется несимметричная схема первого порядка точности, ориентированная против

потока, которая позволяет получить устойчивую схему. Для ее введения напомним, что запись скорости, например, в виде  $U_{j+1/2,i}$  означает, что сеточная функция находится на середине грани контрольного объема (ячейки), соответствуя узлу  $(j+1/2,i)$  и т.д., а запись  $U_{j,i}$  соответствует скорости в узле  $(j,i)$  основной целой сетки. Обратим теперь внимание на направление течения, например, слева направо от  $(j,i)$  к  $(j+1/2,i)$ . Тогда очевидно, что при использовании противопоточной схемы, если  $U_{j,i} > 0$  и течение направлено от  $(j,i)$  к  $(j+1/2,i)$ , то при аппроксимации  $U_{j,i}$  «против потока» ее следует положить равной  $U_{j-1/2,i}$ . Если же  $U_{j,i} \leq 0$ , то есть течение направлено от  $(j,i)$  к  $(j-1/2,i)$ , то при аппроксимации «против потока» величина  $U_{j,i}$  должна быть принята равной  $U_{j+1/2,i}$ . С учетом сказанного, разностная аппроксимация интересующих нас конвективных слагаемых по схеме «против потока» записывается в виде:

$$\begin{aligned} U_{j,i}^* \cdot U_{j,i} &= U_{j,i}^* [(1 - \beta(U_{j,i}^*)) U_{j+1/2,i} + \beta(U_{j,i}^*) U_{j-1/2,i}]; \\ U_{j+1,i}^* \cdot U_{j+1,i} &= U_{j+1,i}^* [(1 - \beta(U_{j+1,i}^*)) U_{j+3/2,i} + \beta(U_{j+1,i}^*) U_{j+1/2,i}]; \\ V_{j,i}^* \cdot V_{j,i} &= V_{j,i}^* [(1 - \beta(V_{j,i}^*)) V_{j,i+1/2} + \beta(V_{j,i}^*) V_{j,i-1/2}]; \\ V_{j,i+1}^* \cdot V_{j,i+1} &= V_{j,i+1}^* [(1 - \beta(V_{j,i+1}^*)) V_{j,i+3/2} + \beta(V_{j,i+1}^*) V_{j,i+1/2}], \end{aligned} \quad (3.33)$$

где параметр  $\beta$  в зависимости от знака скорости в соответствующем узле равен либо единице, либо нулю. Например, в первом выражении (3.33) при  $U_{j,i}^* > 0$ , параметр  $\beta = 1$ , а при  $U_{j,i}^* \leq 0$ , параметр  $\beta = 0$ . Таким образом, коэффициенты разностной схемы соответствующих конвективных слагаемых, определяются по схеме «против потока» с односторонними разностями, которая позволяет получить диагональное преобладание матрицы коэффициентов и повысить устойчивость схемы.

Присутствие в выражениях (3.33) параметра  $\beta$  гарантирует, что один из членов в квадратных скобках будет равен нулю. Оставшийся член будет определять расход через сторону контрольного объема со стороны узла, расположенного вверх по течению от этой стороны. Именно таким способом вводится в нашу конечно-разностную схему аппроксимация ориентированная «против потока».

Кроме того, полученные выражения для разностных уравнений движения содержат слагаемые, когда их значение не соответствует положению узлов сетки согласно выбранного шаблона. В этих случаях можно воспользоваться, например, следующими представлениями:

$$\begin{aligned}
U_{j+1/2,i+1/2}^* &= 0,5(U_{j+1/2,i+1}^* + U_{j+1/2,i}^*); \\
U_{j+1/2,i}^* \cdot V_{j+1/2,i+1/2} &= U_{j+1/2,i}^* [(1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) V_{j+1,i+1/2} + \beta(U_{j+1/2,i}^*) V_{j,i+1/2}]; \\
V_{j+1/2,i+1/2}^* &= 0,5(V_{j,i+1/2}^* + V_{j+1,i+1/2}^*); \\
V_{j,i+1/2}^* \cdot U_{j+1/2,i+1/2} &= V_{j,i+1/2}^* [(1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) U_{j+1/2,i+1} + \beta(V_{j,i+1/2}^*) U_{j+1/2,i}].
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Подставляя теперь аппроксимации (3.33) и (3.34) в систему разностных уравнений количества движения (3.29) и (3.30) после простых преобразований и группировки соответствующих слагаемых, присоединив к ним уравнение неразрывности (3.31), получим следующую стандартную форму дискретных аналогов уравнений движения в  $x$  и  $y$  направлениях соответственно:

$$d_{j+1/2,i}^U U_{j+1/2,i}^{n+1} + c_1^U U_{j+3/2,i}^{n+1} + c_0^U U_{j-1/2,i}^{n+1} + b_1^U U_{j+1/2,i+1}^{n+1} + b_0^U U_{j+1/2,i-1}^{n+1} = -\Delta y (P_{j+1,i}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + f^U, \tag{3.35}$$

$$d_{j,i+1/2}^V V_{j,i+1/2}^{n+1} + c_1^V V_{j,i+3/2}^{n+1} + c_0^V V_{j,i-1/2}^{n+1} + b_1^V V_{j+1,i+1/2}^{n+1} + b_0^V V_{j-1,i+1/2}^{n+1} = -\Delta x (P_{j,i+1}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + f^V, \tag{3.36}$$

$$\frac{U_{j+1/2,i}^{n+1} - U_{j-1/2,i}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{V_{j,i+1/2}^{n+1} - V_{j,i-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \tag{3.37}$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}$ ,  $d_{j,i+1/2}$ ,  $c_1$ ,  $c_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$  и свободные члены  $f$  с верхними индексами  $U, V$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются следующими алгебраическими формулами:

$$\begin{aligned}
d_{j+1/2,i}^U &= 0,5 \frac{hx_{j+1} \cdot hy_1}{\Delta t} + 0,5 hy_1 [\beta(U_{j+1,i}^*) U_{j+1,i}^* - (1 - \beta(U_{j,i}^*)) U_{j,i}^*] + \\
&+ 0,5 hx_{j+1} [\beta(V_{j,i+1/2}^*) V_{j,i+1/2}^* + \beta(V_{j+1,i+1/2}^*) V_{j+1,i+1/2}^* - (1 - \beta(V_{j,i-1/2}^*)) V_{j,i-1/2}^* - (1 - \beta(V_{j+1,i-1/2}^*)) V_{j+1,i-1/2}^*] + \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} \left[ 2 \frac{hy_1}{hx_2} + 2 \frac{hy_1}{hx_1} + \frac{hx_{j+1}}{hy_{j+1}} + \frac{hx_{j+1}}{hy_i} \right]; \\
c_1^U(j+1/2, i) &= 0,5 \cdot hy_1 [1 - \beta(U_{j+1,i}^*)] U_{j+1,i}^* - \frac{2}{\text{Re}} \frac{hy_1}{hx_2}; \\
c_0^U(j+1/2, i) &= -0,5 \cdot hy_1 \beta(U_{j,i}^*) U_{j,i}^* - \frac{2}{\text{Re}} \frac{hy_1}{hx_1}; \\
b_1^U(j+1/2, i) &= 0,5 \cdot hx_{j+1} [(1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) V_{j,i+1/2}^* + (1 - \beta(V_{j+1,i+1/2}^*)) V_{j+1,i+1/2}^*] - \frac{1}{\text{Re}} \frac{hx_{j+1}}{hy_{i+1}}; \\
b_0^U(j+1/2, i) &= -0,5 \cdot hx_{j+1} [\beta(V_{j,i-1/2}^*) V_{j,i-1/2}^* + \beta(V_{j+1,i-1/2}^*) V_{j+1,i-1/2}^*] - \frac{1}{\text{Re}} \frac{hx_{j+1}}{hy_i};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{j,i+1/2}^V &= 0.5 \frac{hx_1 \cdot hy_{i+1}}{\Delta t} + 0.5 \cdot hx_1 [\beta(V_{j,i+1}^*) V_{j,i+1}^* - (1 - \beta(V_{j,i}^*)) V_{j,i}^*] + \\
&+ 0.5 hy_{i+1} [\beta(U_{j+1/2,i}^*) U_{j+1/2,i}^* + \beta(U_{j+1/2,i+1}^*) U_{j+1/2,i+1}^* - (1 - \beta(U_{j-1/2,i}^*)) U_{j-1/2,i}^* - \\
&- (1 - \beta(U_{j-1/2,i+1}^*)) U_{j-1/2,i+1}^*] + \frac{1}{\text{Re}} \left[ 2 \frac{hx_1}{hy_2} + 2 \frac{hx_1}{hy_1} + \frac{hy_{i+1}}{hx_{j+1}} + \frac{hy_{i+1}}{hx_j} \right]; \\
c_1^V(j, i + 1/2) &= 0.5 \cdot hx_1 [1 - \beta(V_{j,i+1}^*)] V_{j,i+1}^* - \frac{2}{\text{Re}} \frac{hx_1}{hy_2}; \\
c_0^V(j, i + 1/2) &= -0.5 \cdot hx_1 \beta(V_{j,i}^*) V_{j,i}^* - \frac{2}{\text{Re}} \frac{hx_1}{hy_1}; \\
b_1^V(j, i + 1/2) &= 0.5 \cdot hy_{i+1} [(1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) U_{j+1/2,i}^* + (1 - \beta(U_{j+1/2,i+1}^*)) U_{j+1/2,i+1}^*] - \frac{1}{\text{Re}} \frac{hy_{i+1}}{hx_{j+1}}; \\
b_0^V(j, i + 1/2) &= -0.5 \cdot hy_{i+1} [\beta(U_{j-1/2,i}^*) U_{j-1/2,i}^* + \beta(U_{j-1/2,i+1}^*) U_{j-1/2,i+1}^*] - \frac{1}{\text{Re}} \frac{hy_{i+1}}{hx_j}; \\
f^U(j + 1/2, i) &= 0.5 \frac{hx_{j+1} \cdot hy_1}{\Delta t} U_{j+1/2,i}^* + \frac{1}{\text{Re}} (V_{j+1,i+1/2}^* - V_{j,i+1/2}^* - V_{j+1,i-1/2}^* + V_{j,i-1/2}^*); \\
f^V(j, i + 1/2) &= 0.5 \frac{hx_1 \cdot hy_{i+1}}{\Delta t} V_{j,i+1/2}^* + \frac{1}{\text{Re}} (U_{j+1/2,i+1}^* - U_{j+1/2,i}^* - U_{j-1/2,i+1}^* + U_{j-1/2,i}^*) + \\
&+ 0.5 \cdot hx_1 \cdot hy_{i+1} \cdot Ri_0 \left( \theta_{j,i}^* + \frac{b}{H} Y(i) \right);
\end{aligned}
\tag{3.38}$$

Здесь последнее слагаемое в выражении для  $f^V(j, i + 1/2)$  для общности записано с учетом влияния объемных сил плавучести и температурной стратификации среды. Значение параметра  $\beta$  как и ранее равно либо 0 либо 1, в зависимости от знака скорости в рассматриваемом узле.

В приведенных выражениях (3.38) аппроксимация значений компонентов скоростей с целым индексом через значения с половинным индексом осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned}
U_{j,i}^* &= 0,5(U_{j+1/2,i}^* + U_{j-1/2,i}^*); & U_{j+1,i}^* &= 0,5(U_{j+3/2,i}^* + U_{j+1/2,i}^*); \\
V_{j,i}^* &= 0,5(V_{j,i+1/2}^* + V_{j,i-1/2}^*); & V_{j,i+1}^* &= 0,5(V_{j,i+3/2}^* + V_{j,i+1/2}^*).
\end{aligned}$$

Теперь отметим, что хотя уравнения (3.35) и (3.36) являются основными, но они записаны пока в предварительной форме, так как включают в себя неизвестные слагаемые с давлением.

Таким образом, на основе интегральных законов сохранения массы и импульса построены их дискретные аналоги в виде систем алгебраических



уравнений (3.35), (3.36), (3.37) и следовательно они являются основной системой уравнений, которую предстоит решать.

### 3.5. Преобразование системы разностных уравнений движения с помощью алгоритма SIMPLE и уравнение для давления

Решение системы разностных уравнений возможно с помощью итерационных методов. Наиболее подходящим методом для решения системы уравнений рассматриваемого класса (3.35), (3.36) является итерационная процедура SIMPLE [158]. Приняв ее за основу, приступим к решению интересующей нас системы уравнений (3.35), (3.36). С этой целью оставим в левых частях уравнений (3.35) и (3.36) только неизвестные сеточные функции скорости  $U_{j+1/2,i}^{n+1}$  и  $V_{j,i+1/2}^{n+1}$ , которые относятся к опорным узлам с номерами  $(j+1/2,i)$  и  $(j,i+1/2)$ . Они будут определяться на текущем временном слое  $(n+1)$ . Другие сеточные значения скорости в соседних узлах считаются известными с предыдущей итерации. Соответствующие слагаемые, которые их содержат, объединяются со свободными членами  $f^U$  и  $f^V$ . В результате рассматриваемая система (3.35) и (3.36) преобразуется к виду:

$$d_{j+1/2,i}^U U_{j+1/2,i}^{n+1} = -\Delta y (P_{j+1,i}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U; \quad (3.39)$$

$$d_{j,i+1/2}^V V_{j,i+1/2}^{n+1} = -\Delta x (P_{j,i+1}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V, \quad (3.40)$$

где выражения  $G_{j+1/2,i}^U$  и  $G_{j,i+1/2}^V$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} G_{j+1/2,i}^U &= f_{j+1/2,i}^U - c_1^U(j+1/2,i) U_{j+3/2,i}^* - c_0^U(j+1/2,i) U_{j-1/2,i}^* - \\ &- b_1^U(j+1/2,i) U_{j+1/2,i+1}^* - b_0^U(j+1/2,i) U_{j+1/2,i-1}^*; \\ G_{j,i+1/2}^V &= f_{j,i+1/2}^V - c_1^V(j,i+1/2) V_{j,i+3/2}^* - c_0^V(j,i+1/2) V_{j,i-1/2}^* - \\ &- b_1^V(j,i+1/2) V_{j+1,i+1/2}^* - b_0^V(j,i+1/2) V_{j-1,i+1/2}^*. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Полученная система конечно-разностных уравнений (3.39) и (3.40) хотя и является окончательной, но она пока содержит неизвестные слагаемые с давлением. Необходимое уравнение для вычисления давления можно получить используя уравнение неразрывности (3.37). Учитывая его структуру в выражениях для скоростей (3.39) и (3.40) понизим индексы  $j,i$  на единицу соответственно. Тогда получим необходимые выражения для соответствующих компонентов скорости в виде

$$U_{j-1/2,i}^{n+1} = [-\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j-1,i}^{n+1}) + G_{j-1/2,i}^U] / d_{j-1/2,i}^U, \quad (3.42)$$

$$V_{j,i-1/2}^{n+1} = [-\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i-1}^{n+1}) + G_{j,i-1/2}^V] / d_{j,i-1/2}^V. \quad (3.43)$$

Аналогично из формул (3.41) находятся значения величин  $G_{j-1/2,i}^U$  и  $G_{j,i-1/2}^V$ . Подставляя теперь соответствующие выражения для компонентов скоростей из уравнений (3.39), (3.40) и уравнений (3.42), (3.43) в уравнение неразрывности (3.37) получим выражение, в котором неизвестными величинами являются лишь сеточные функции давления в узле с номером  $(j,i)$  и окружающих его узлах. Выполнив простые алгебраические преобразования получим следующий конечно-разностный аналог для определения сеточных функций давления  $P_{j,i}$  в виде замаскированного уравнения Пуассона

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P, \quad (3.44)$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j,i}^P, c_1^P, c_0^P, b_1^P, b_0^P$  и свободный член  $f^P$  определены соотношениями:

$$\begin{aligned} c_1^P &= -\frac{hy_1}{hx_1} \frac{1}{d_{j+1/2,i}^U}; & c_0^P &= \frac{hy_1}{hx_1} \frac{1}{d_{j-1/2,i}^U}; \\ b_1^P &= -\frac{hx_1}{hy_1} \frac{1}{d_{j,i+1/2}^V}; & b_0^P &= \frac{hx_1}{hy_1} \frac{1}{d_{j,i-1/2}^V}; \\ d_{j,i}^P &= -c_1^P - c_0^P - b_1^P - b_0^P; \\ f^P &= 2 \left[ -\frac{G_{j+1/2,i}^U}{d_{j+1/2,i}^U \cdot hx_1} + \frac{G_{j-1/2,i}^U}{d_{j-1/2,i}^U \cdot hx_1} - \frac{G_{j,i+1/2}^V}{d_{j,i+1/2}^V \cdot hy_1} + \frac{G_{j,i-1/2}^V}{d_{j,i-1/2}^V \cdot hy_1} \right]; \\ hx_1 &= (hx_j + hx_{j+1}), & hy_1 &= (hy_j + hy_{j+1}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Напомним, что входящие в эти соотношения значения величин  $d^U, d^V, G^U, G^V$  с различными нижними индексами были определены ранее при рассмотрении дискретных аналогов уравнений количества движения. Особенность данного подхода состоит в том, что в полученной системе уравнений давление определяется стационарным уравнением Пуассона (3.44) и в то же время вычисляется таким образом, чтобы выполнялось уравнение неразрывности на рассматриваемом временном слое  $(n+1)$ .

Заметим, что в уравнении (3.44) сеточная функция давления рассматривается в один и тот же момент времени. Так как мы имеем дело с несжимаемой жидкостью, то если в одном объеме жидкости возникает возмущение, то оно мгновенно воздействует на остальные объемы жидкости. Поэтому поле давления известное в предыдущий момент времени можно использовать в качестве исходного приближения для его

определения в следующий момент времени. Кроме того, из уравнения (3.44) следует, что значение давления будет определяться с точностью до постоянной на каждом временном слое до того, как будут рассчитываться компоненты скорости.

Таким образом, мы рассмотрели проблему построения конечно-разностных аналогов уравнений изменения количества движения нетрадиционным способом, основываясь на общих интегральных законах сохранения массы и импульса. В результате чего получили систему алгебраических уравнений (3.44), (3.39) и (3.40) для определения давления и компонентов скорости на  $(n + 1)$  слое. Выпишем полученные выражения для компонентов скорости (3.39) и (3.40) в следующей явной форме:

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = [\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U] / d_{j+1/2,i}^U, \quad (3.46)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V. \quad (3.47)$$

Полученная система уравнений (3.44), (3.46) и (3.47) является фундаментальным результатом, представляющим универсальный дискретный аналог общих уравнений движения жидкости. Она построена с помощью метода контрольного объема на основе рассмотрения общих интегральных законов сохранения массы и изменения количества движения.

Совершенно очевидно, что решение рассматриваемой системы алгебраических уравнений значительно проще, чем интегральных или дифференциальных уравнений. Хотя общее число уравнений подлежащих решению значительно возросло, но на современном этапе развития вычислительной техники это уже не принципиально, так как для решения таких систем алгебраических уравнений разработаны эффективные итерационные методы.

### 3.6. Процедура численного решения полной системы уравнений гидродинамики

В данном методе расчеты проводятся для двух основных физических переменных – скорость, давление. Итерационный вычислительный процесс состоит из шагов по времени.

Важной особенностью полученного стационарного разностного уравнения для давления (3.44) является то, что благодаря использованию разнесенных сеток, граничные условия для его решения могут быть определены из уравнений движения (3.46) и (3.47) в комбинации с граничными условиями для компонентов скоростей [208]. В настоящем методе, компоненты скорости и давления расщеплены так, что на любом этапе расчета решаются уравнения относительно одной зависимой

переменной. Это упрощает применение стандартных методов решения систем линейных алгебраических уравнений полученного вида.

В нашем случае эффективным способом решения рассматриваемого двумерного разностного уравнения второго порядка для давления является его редукция к двум одномерным системам уравнений второго порядка с трехдиагональными матрицами, которые решаются методом «прогонки» [181]. В зарубежной литературе его часто называют алгоритмом Томаса [7].

Уравнение для давления решается на каждом временном слое. В начале каждого временного цикла предполагаются известными поля скорости и давления. Вычислительная процедура расчета каждого шага по времени разбивается на три этапа и выполняется в следующей последовательности. На первом этапе при заданных на предыдущем временном слое значениях  $U_{j+1/2,i}^n$  и  $V_{j,i+1/2}^n$  по соответствующим алгебраическим формулам рассчитываются коэффициенты дискретизации для давления  $d_{j,i}^P$ ,  $c_1^P$ ,  $c_0^P$ ,  $b_1^P$ ,  $b_0^P$  и скоростей, а также выражения для  $f^P(j,i)$ ,  $f^U(j,i)$ ,  $f^V(j,i)$ . На втором этапе, зная коэффициенты уравнения Пуассона с индексом « $p$ », путем его решения находится поле давления  $P_{j,i}^{n+1}$ . Далее, на третьем этапе, зная коэффициенты дискретизации с индексом  $U$ ,  $V$  и поле давления  $P_{j,i}^{n+1}$  по уравнениям (3.46), (3.47) рассчитываются поля скорости  $U_{j+1/2,i}^{n+1}$ ,  $V_{j,i+1/2}^{n+1}$  на  $(n+1)$  временном слое. На этом первый временной цикл заканчивается и далее он повторяется. Задача решается на установление. Критерием окончания решения служит заданный временной интервал или условие, когда максимальная разность между значениями искомых переменных на предыдущем и следующем временном шаге не превышает заданную величину ошибки  $\varepsilon$ .

Рассмотренный способ дискретизации основных интегральных законов сохранения массы и импульса достаточно прост, гарантирует консервативность разностной схемы и позволяет реализовать алгоритм расчетов на ПК средней мощности. Кроме того, коэффициенты полученного разностного аналога уравнения для давления удовлетворяют требованиям ограниченности и неотрицательности, что обеспечивает диагональное преобладание их матриц и простоту получения сходящегося решения методом «прогонки».

Используемая конечно-разностная схема аппроксимирует рассматриваемые уравнения с первым порядком точности по времени и со вторым порядком точности по пространственным переменным  $O(\Delta\tau, h^2)$  и можно показать, что она устойчива [24]. На каждом шаге по времени контролируется сходимость расчетов, как основных уравнений, так и граничных условий. Алгоритм решения на установление позволяет получить

как стационарное решение, так и исследовать эволюцию течений во времени.

Важным моментом расчетов является переход в граничных условиях для  $U$  и  $V$  к конечным разностям и контроль за выполнением уравнения неразрывности. Описанный алгоритм решения системы двумерных нестационарных уравнений движения реализован в виде компьютерной программы, которая позволяет решать эволюционную задачу гидродинамики ламинарных течений.

### 3.7. Дискретизация интегрального закона сохранения энергии методом контрольного объема

Развиваемый метод контрольного объема для построения дискретных аналогов основных законов сохранения можно с успехом применить не только для течений несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами, но и для стратифицированной по плотности жидкости, обусловленной неоднородностью температуры и концентрации химического компонента. Однако, для расчета параметров таких течений система уравнений движения должна быть дополнена уравнениями переноса тепла и концентрации примеси. При этом в общем случае гидродинамическая и тепловая или диффузионная задачи оказываются связанными и их нужно решать совместно. Поэтому наша следующая цель состоит в построении дискретного аналога уравнения переноса тепла методом контрольного объема для несжимаемой жидкости. С этой целью, как и при дискретизации интегрального закона изменения количества движения, рассмотрим интегральный закон сохранения энергии. Учитывая, что мы ограничились рассмотрением случая несжимаемой жидкости, то можно рассмотреть случай не полной энергии, а только внутренней энергии " $e$ " в форме уравнения (3.5). Если дополнительно пренебречь для простоты диссипативными членами и действием объемных сил  $\vec{F}$ , то исходное интегральное уравнение сохранения энергии (3.5) в рассматриваемом случае записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho e d\tau = - \iiint_{\tau} \operatorname{div} \vec{q}_n d\tau + \iiint_{\tau} Q d\tau, \quad (3.48)$$

где внутренняя энергия для несжимаемой жидкости  $e = c_p T$ ,  $\vec{q}_n = -\lambda \operatorname{grad} T$  - поток тепла теплопроводностью,  $Q$  - источниковый член. Далее, при построении конечно-разностного аналога уравнения (3.48) ограничимся случаем двумерной задачи. С этой целью обратимся к сеточному шаблону представленному на рис. 3.5 и вычислим интересующие нас не тройные, а

двойные интегралы применительно к выделенной ячейке  $D_{j,i}$ . Рассмотрим сначала левую часть уравнения (3.48) и применим к ней полученную выше формулу (3.8), выражающую разложение субстанциональной производной по времени на локальное и конвективное слагаемые. Полагая  $e = c_p T$  и принимая допущение, что температура  $T$  внутри выделенного объема – ячейки равна ее значению в центре ячейки  $(j, i)$  и распространяется на весь объем, для левого интеграла в уравнении (3.48) получим:

$$\begin{aligned}
 \rho c_p \frac{d}{dt} \iint_{\sigma} T d\sigma &= \rho c_p \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} \right] dx dy = \\
 &= \rho c_p \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} (T_{j,i}^{n+1} - T_{j,i}^n) + \rho c_p \cdot \Delta y \left[ (uT)_{j+1/2,i} - (uT)_{j-1/2,i} \right]^{n+1} + \\
 &\quad + \rho c_p \cdot \Delta x \left[ (vT)_{j,i+1/2} - (vT)_{j,i-1/2} \right]^{n+1} = \\
 &= \rho c_p \left\{ \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} (T_{j,i}^{n+1} - T_{j,i}^n) + \Delta y (u_{j+1/2,i} \cdot T_{j+1/2,i} - u_{j-1/2,i} T_{j-1/2,i})^{n+1} + \right. \\
 &\quad \left. + \Delta x (v_{j,i+1/2} \cdot T_{j,i+1/2} - v_{j,i-1/2} \cdot T_{j,i-1/2})^{n+1} \right\}. \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим первый интеграл, стоящий в правой части уравнения энергии (3.48). Он описывает диффузионные процессы переноса тепла. Вычислим его применительно к ячейке  $D_{j,i}$ . В соответствии с формулой для оператора  $div$  в двумерном случае будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\sigma} div \bar{q}_n d\sigma &= \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left( \frac{\partial q_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{ny}}{\partial y} \right) dx dy = \\
 &= \Delta y \left[ (q_{nx})_{j+1/2,i} - (q_{nx})_{j-1/2,i} \right] + \Delta x \left[ (q_{ny})_{j,i+1/2} - (q_{ny})_{j,i-1/2} \right]. \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

Далее используем классический градиентный закон Фурье для потоков тепла обусловленных теплопроводностью в виде:

$$q_{nx} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_{ny} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}. \tag{3.51}$$

Тогда подставляя (3.51) в (3.50) и используя конечно-разностное представление производных от  $T$ , получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \text{div} \bar{q}_n d\sigma = & -\lambda \left\{ \Delta y \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{j+1/2,i} - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{j-1/2,i} \right] + \Delta x \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{j,i+1/2} - \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{j,i-1/2} \right] \right\} = \\ = & -\lambda \Delta y \left[ \frac{(T_{j+1,i} - T_{j,i})}{hx_{j+1}} - \frac{(T_{j,i} - T_{j-1,i})}{hx_j} \right] - \lambda \Delta x \left[ \frac{(T_{j,i+1} - T_{j,i})}{hy_{i+1}} - \frac{(T_{j,i} - T_{j,i-1})}{hy_i} \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

После этих предварительных преобразований, путем приравнивания выражений (3.49) и (3.52) с учетом источникового члена  $Q$ , для неявной схемы получаем следующий конечно-разностный аналог полного уравнения сохранения внутренней энергии в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} (T_{j,i}^{n+1} - T_{j,i}^n) + \Delta y (u_{j+1/2,i} T_{j+1/2,i} - u_{j-1/2,i} T_{j-1/2,i})^{n+1} + \Delta x (v_{j,i+1/2} T_{j,i+1/2} - v_{j,i-1/2} T_{j,i-1/2})^{n+1} = \\ = \frac{\lambda}{\rho c_p} \Delta y \left[ \frac{(T_{j+1,i} - T_{j,i})}{hx_{j+1}} - \frac{(T_{j,i} - T_{j-1,i})}{hx_j} \right]^{n+1} + \frac{\lambda}{\rho c_p} \Delta x \left[ \frac{(T_{j,i+1} - T_{j,i})}{hy_{i+1}} - \frac{(T_{j,i} - T_{j,i-1})}{hy_i} \right]^{n+1} + \frac{\bar{Q} \Delta x \Delta y}{\rho c_p}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

где  $\bar{Q}$  - среднее по ячейке значение величины  $Q$ .

На этом этапе целесообразно перейти к безразмерным величинам. Введем масштабы длины  $L$ , скорости  $u_0$ , времени  $L/u_0$ , температуры  $\Delta T = T_0 - T_1$  и перейдем к безразмерным величинам обычным способом. Кроме того, обозначим в этом уравнении значения температуры на предыдущем  $n$ -ом слое значком звездочка (\*), а искомые величины на  $(n+1)$  слое для температуры оставим совсем без значка. При этом следует помнить, что скорости на рассматриваемом  $(n+1)$  слое предварительно будут определены из уравнений количества движения. Тогда из (3.53) в безразмерных величинах будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} (\theta_{j,i} - \theta_{j,i}^*) + \Delta Y (U_{j+1/2,i}^* \theta_{j+1/2,i} - U_{j-1/2,i}^* \theta_{j-1/2,i}) + \Delta X (V_{j,i+1/2}^* \theta_{j,i+1/2} - V_{j,i-1/2}^* \theta_{j,i-1/2}) = \\ = \frac{1}{Pe_T} \left\{ \Delta Y \left[ \frac{(\theta_{j+1,i} - \theta_{j,i})}{hx_{j+1}} - \frac{(\theta_{j,i} - \theta_{j-1,i})}{hx_j} \right] + \Delta X \left[ \frac{(\theta_{j,i+1} - \theta_{j,i})}{hy_{i+1}} - \frac{(\theta_{j,i} - \theta_{j,i-1})}{hy_i} \right] \right\} + \frac{\bar{Q}}{\rho c_p} \Delta X \Delta Y \end{aligned} \quad (3.54)$$

где  $\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$ ,  $U = u/u_0$ ,  $V = v/u_0$ ,  $X = x/L$ ,  $Y = y/L$ ,  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ ,  $Pe_T = \frac{u_0 L}{a} = \text{Re Pr}$

тепловое число Пекле,  $\text{Re} = u_0 \cdot L / \nu$  - число Рейнольдса,  $\text{Pr} = \nu / a$  - число Прандтля, причем для воздуха  $\text{Pr} \approx 0,71$ , для нефти  $\text{Pr} \gg 1$ , для жидких металлов  $\text{Pr} \ll 1$ . В последних двух случаях числа Пекле и Рейнольдса могут сильно отличаться по величине, что очень важно при численной реализации задачи. Подчеркнем, что уравнение переноса тепла линейно

относительно температуры  $\theta$ , которая определяется в тех же узлах основной сетки  $S_0(j, i)$  что и давление.

В полученном уравнении (3.54) конвективные слагаемые содержат температуру с дробным индексом, то есть она определена на гранях контрольного объема. Для их аппроксимации используем, упоминавшуюся выше схему «против потока» (3.33), а именно:

$$\begin{aligned} U_{j+1/2,i}^* \theta_{j+1/2,i} &= U_{j+1/2,i}^* \left[ (1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) \theta_{j+1,i} + \beta(U_{j+1/2,i}^*) \theta_{j,i} \right]; \\ U_{j-1/2,i}^* \theta_{j-1/2,i} &= U_{j-1/2,i}^* \left[ (1 - \beta(U_{j-1/2,i}^*)) \theta_{j,i} + \beta(U_{j-1/2,i}^*) \theta_{j-1,i} \right]; \\ V_{j,i+1/2}^* \theta_{j,i+1/2} &= V_{j,i+1/2}^* \left[ (1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) \theta_{j,i+1} + \beta(V_{j,i+1/2}^*) \theta_{j,i} \right]; \\ V_{j,i-1/2}^* \theta_{j,i-1/2} &= V_{j,i-1/2}^* \left[ (1 - \beta(V_{j,i-1/2}^*)) \theta_{j,i} + \beta(V_{j,i-1/2}^*) \theta_{j,i-1} \right], \end{aligned} \quad (3.55)$$

где параметр  $\beta$  равен либо нулю, либо единице, в зависимости от знака соответствующей скорости.

Подставляя теперь формулы (3.55) в уравнение (3.54) и группируя подобные члены, после простых преобразований получаем дискретный аналог уравнения энергии (переноса тепла) в форме разностного уравнения типа Пуассона

$$d_{j,i}^T \theta_{j,i}^{n+1} + c_1^T \theta_{j+1,i}^{n+1} + c_0^T \theta_{j-1,i}^{n+1} + b_1^T \theta_{j,i+1}^{n+1} + b_0^T \theta_{j,i-1}^{n+1} = f^T, \quad (3.56)$$

где свободный член  $f^T$  и коэффициенты дискретизации  $d_{j,i}^T$ ,  $c_1^T$ ,  $c_0^T$ ,  $b_1^T$ ,  $b_0^T$  являются известными величинами, так как определяются по результатам предыдущей итерации согласно следующих формул:

$$\begin{aligned} d_{j,i}^T &= 0,25 \cdot hx_1 \cdot hy_1 / \Delta \tau + 0,5 \cdot hy_1 \cdot \left[ U_{j+1/2,i}^* \beta(U_{j+1/2,i}^*) - U_{j-1/2,i}^* (1 - \beta(U_{j-1/2,i}^*)) \right] + \\ &+ 0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i+1/2}^* \beta(V_{j,i+1/2}^*) - V_{j,i-1/2}^* (1 - \beta(V_{j,i-1/2}^*)) \right] + \\ &+ \frac{0,5}{Pe_T} (hy_1 / hx_{j+1} + hy_1 / hx_j + hx_1 / hy_{i+1} + hx_1 / hy_i); \\ c_1^T &= 0,5 \cdot hy_1 \cdot \left[ U_{j+1/2,i}^* (1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) - \frac{1}{Pe_T \cdot hx_{j+1}} \right]; \\ c_0^T &= -0,5 \cdot hy_1 \cdot \left[ U_{j-1/2,i}^* \cdot \beta(U_{j-1/2,i}^*) + \frac{1}{Pe_T \cdot hx_j} \right]; \end{aligned} \quad (3.57)$$



$$\begin{aligned}
b_1^T &= 0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i+1/2}^* (1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) - \frac{1}{Pe_T \cdot hy_{i+1}} \right]; \\
b_0^T &= -0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i-1/2}^* \cdot \beta(V_{j,i-1/2}^*) + \frac{1}{Pe_T \cdot hy_i} \right]; \\
f^T &= 0,25 \cdot hx_1 \cdot hy_1 \cdot \theta_{j,i}^* / \Delta \tau - 0,125 \cdot hx_1 \cdot hy_1 (V_{j,i+1/2}^* + V_{j,i-1/2}^*) \frac{b}{H}. \\
b_1^T &= 0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i+1/2}^* (1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) - \frac{1}{Pe_T \cdot hy_{i+1}} \right]; \\
b_0^T &= -0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i-1/2}^* \cdot \beta(V_{j,i-1/2}^*) + \frac{1}{Pe_T \cdot hy_i} \right]; \\
f^T &= 0,25 \cdot hx_1 \cdot hy_1 \cdot \theta_{j,i}^* / \Delta \tau - 0,125 \cdot hx_1 \cdot hy_1 (V_{j,i+1/2}^* + V_{j,i-1/2}^*) \frac{b}{H}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Система разностных алгебраических уравнений (3.56) записана для внутренних узлов расчетной сетки  $(j, i)$ , которые принадлежат пространству рассматриваемого течения. Эта система уравнений расщепляется по координатам и решается методом прогонки при заданных граничных условиях. Особенностью расположения узлов  $(j, i)$  при использовании разнесенной сетки является то, что температура  $\theta$  рассчитывается в центре ячейки  $(j, i)$ , а физическая граница расчетной области находится на грани ячейки, то есть в полушаге от центра ячейки в соответствующем координатном направлении. Поэтому граничное условие, например, на вертикальной стенке, перпендикулярной к оси  $OX$  записываются в виде:

- условия первого рода (Дерихле)

$$(\theta_{N,i} + \theta_{N+1,i}) / 2 = \theta_w; \tag{3.59}$$

- условия второго рода (Неймана)

$$(\theta_{N+1,i} - \theta_{N,i}) / \Delta X = Nu; \tag{3.60}$$

где через  $N$  обозначены номера ближайших к границе внутренних узлов расчетной области, а  $(N + 1)$  - номера следующих узлов, которые уже принадлежат области стенки, то есть находятся за пределами расчетной области. Здесь  $\theta_w$  - температура стенки (границы),  $Nu$  - число Нуссельта, характеризующее интенсивность теплоотдачи между потоком и стенкой. Значения сеточных функций температуры, которые не принадлежат пространству рассматриваемого течения исключают из рассмотрения путем использования граничных условий и метода фиктивных ячеек.

### 3.8. Дискретизация интегрального закона сохранения концентрации химического компонента или примеси методом контрольного объема

Для несжимаемой стратифицированной по плотности жидкости в поле силы тяжести характерным является наличие в уравнениях движения объемных массовых сил. Переменность плотности жидкости может быть обусловлена наличием концентрации какого-либо химического компонента. Поэтому для расчета параметров таких течений система уравнений движения должна быть дополнена уравнением переноса концентрации (диффузии) примеси. При этом в общем случае гидродинамическая и диффузионная задачи оказываются связанными и их нужно решать совместно. Аналогично обстоит дело при наличии в жидкости химически реагирующих веществ, как например, в случае горения.

Разностная аппроксимация интегрального закона сохранения примеси может быть выполнена на разнесенной сетке аналогично закону переноса тепла, при этом концентрацию «с» следует определять в целых узлах основной сетки  $S_0(j,i)$  как и температуру  $\theta$ .

Для построения конечно-разностного аналога уравнения переноса примеси будем использовать метод контрольного объема и поэтому обратимся к рассмотрению интегральной формы закона сохранения примеси в виде (3.6)

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} c d\tau = - \iiint_{\tau} \operatorname{div} \vec{q}_c + \iiint_{\tau} S_1 d\tau, \quad (3.61)$$

где  $c$  - массовая концентрация примеси,  $\vec{q}_c$  - поток примеси через боковую поверхность контрольного объема  $\tau$ ,  $S_1$  - источниковое слагаемое. Как и ранее будем рассматривать двумерную задачу и потому интегралы в исходном уравнении (3.61) будут не тройные, а двукратные. Для построения разностного аналога интегрального закона сохранения примеси обратимся к сеточному шаблону с разнесенными сетками  $S_0, S_1, S_2$  и применим уравнение (3.61) к ячейке разностной сетки  $D_{j,i}$ . Для вычисления интересующих нас интегралов, рассмотрим сначала левую часть уравнения (3.61) и используем полученную выше формулу (3.8), выражающую разложение производной по времени гидродинамической субстанции  $\Phi$  на локальное и конвективное слагаемые. Полагая,  $\Phi = c$ , и предполагая, что концентрация  $c$  внутри объема ячейки постоянна и равна ее значению в центре объема  $(j,i)$  для левого интеграла получим:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iint_{\sigma} c d\sigma &= \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} \right] dx dy = \\
&= \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} (c_{j,i}^{n+1} - c_{j,i}^n) + \Delta y [(uc)_{j+1/2,i} - (uc)_{j-1/2,i}]^{n+1} + \\
&\Delta x [(vc)_{j,i+1/2} - (vc)_{j,i-1/2}]^{n+1} = \\
&= \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} (c_{j,i}^{n+1} - c_{j,i}^n) + \Delta y (u_{j+1/2,i} \cdot c_{j+1/2,i} - u_{j-1/2,i} \cdot c_{j-1/2,i})^{n+1} + \\
&+ \Delta x (v_{j,i+1/2} \cdot c_{j,i+1/2} - v_{j,i-1/2} \cdot c_{j,i-1/2})^{n+1},
\end{aligned} \tag{3.62}$$

где  $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ ,  $\Delta y = y_{i+1/2} - y_{i-1/2}$ .

Теперь рассмотрим первый интеграл, стоящий в правой части уравнения (3.61). Он описывает диффузионный механизм переноса примеси, определяемый градиентным законом Фика. Вычислим его применительно к контрольному объему ячейки  $D_{j,i}$ . В соответствии с формулой для оператора  $div$  и операции интегрирования будем иметь:

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} div \vec{q}_c d\sigma &= \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left( \frac{\partial q_{cx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{cy}}{\partial y} \right) dx dy = \\
&= \Delta y [(q_{cx})_{j+1/2,i} - (q_{cx})_{j-1/2,i}] + \Delta x [(q_{cy})_{j,i+1/2} - (q_{cy})_{j,i-1/2}].
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Далее используем закон Фика для потоков примеси в классическом градиентном виде

$$q_{cx} = -D \frac{\partial c}{\partial x}, \quad q_{cy} = -D \frac{\partial c}{\partial y}. \tag{3.64}$$

где  $D$  - коэффициент диффузии.

Подставляя (3.64) в (3.63) и заменяя производные их конечными разностями для первого слагаемого справа в уравнении (3.61), находим

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} div \vec{q}_c d\sigma &= -D \left\{ \Delta y \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)_{j+1/2,i} - \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)_{j-1/2,i} \right] + \Delta x \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)_{j,i+1/2} - \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)_{j,i-1/2} \right] \right\} = \\
&= -D \cdot \Delta y \left[ \frac{(c_{j+1,i} - c_{j,i})}{hx_{j+1}} - \frac{(c_{j,i} - c_{j-1,i})}{hx_j} \right] - D \cdot \Delta x \left[ \frac{(c_{j,i+1} - c_{j,i})}{hy_{i+1}} - \frac{(c_{j,i} - c_{j,i-1})}{hy_i} \right].
\end{aligned} \tag{3.65}$$

После того, как предварительно вычислены интересующие нас интегралы, путем приравнивания выражений (3.62) и (3.65) с добавлением интеграла от источникового члена  $S_1$  из (3.61) получаем конечно-

разностный аналог уравнения сохранения концентрации примеси или диффузии в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} (c_{j,i}^{n+1} - c_{j,i}^n) + \Delta y (u_{j+1/2,i} c_{j+1/2,i} - u_{j-1/2,i} c_{j-1/2,i})^{n+1} + \Delta x (v_{j,i+1/2} c_{j,i+1/2} - v_{j,i-1/2} c_{j,i-1/2})^{n+1} = \\ & = D \cdot \Delta y \left[ \frac{(c_{j+1,i} - c_{j,i})}{hx_{j+1}} - \frac{(c_{j,i} - c_{j-1,i})}{hx_j} \right]^{n+1} + D \cdot \Delta x \left[ \frac{(c_{j,i+1} - c_{j,i})}{hy_{i+1}} - \frac{(c_{j,i} - c_{j,i-1})}{hy_i} \right]^{n+1} + \bar{S}_1 \Delta x \cdot \Delta y, \end{aligned} \quad (3.66)$$

где  $hx_j$ ,  $hy_i$  - шаги сетки,  $\bar{S}_1$  - среднее по ячейке значение величины  $S_1$

$$\Delta x = 0,5(hx_j + hx_{j+1}), \quad \Delta y = 0,5(hy_i + hy_{i+1})$$

На этом этапе полученные конечно-разностные уравнения (3.66) приведем к безразмерному виду. С этой целью, как обычно, введем масштабы длины  $L$ , скорости  $u_0$ , времени  $t_0 = L/u_0$ , концентрации  $c_0$  и выполним соответствующие преобразования. Кроме того, учтем, что диффузионная задача может быть решена лишь при условии, что известна кинематика течения в виде поля скоростей. Поэтому в рассматриваемом разностном уравнении будем считать, что компоненты скорости уже определены на рассматриваемом временном слое из решения уравнений количества движения. Обозначим далее значком (\*) известное значение концентрации на предыдущем  $n$ -ом временном слое, а искомые величины  $C = c/c_0$  на  $(n+1)$  слое для простоты будут без значка. Тогда из (3.66) в безразмерных величинах будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} (C_{j,i} - C_{j,i}^*) + \Delta Y (U_{j+1/2,i}^* C_{j+1/2,i} - U_{j-1/2,i}^* C_{j-1/2,i}) + \Delta X (V_{j,i+1/2}^* C_{j,i+1/2} - V_{j,i-1/2}^* C_{j,i-1/2}) = \\ & = \frac{1}{Pe_d} \left\{ \Delta Y \left[ \frac{(C_{j+1,i} - C_{j,i})}{hx_{j+1}} - \frac{(C_{j,i} - C_{j-1,i})}{hx_j} \right] + \Delta X \left[ \frac{(C_{j,i+1} - C_{j,i})}{hy_{i+1}} - \frac{(C_{j,i} - C_{j,i-1})}{hy_i} \right] \right\} + \bar{S}_1 \Delta X \Delta Y, \end{aligned} \quad (3.67)$$

где  $C = c/c_0$ ,  $U = u/u_0$ ,  $V = v/u_0$ ,  $X = x/L$ ,  $Y = y/L$ ,  $Pe_d = Re \cdot Sc$  -

диффузионное число Пекле,  $Sc = \nu/D$  - число Шмидта,  $Re = \frac{u_0 L}{\nu}$  - число

Рейнольдса. Напомним, что при нашем подходе концентрация  $C$  определяется, как и давление с температурой, в узлах основной сетки  $S_0(j, i)$ . Однако, конвективные члены, полученного уравнения (3.67) содержат также слагаемые, в которых переменная концентрация содержит полуцелые индексы, то есть они определены в узлах вспомогательных сеток на гранях контрольного объема. Для их аппроксимации используем, как и раньше, противоточную схему (3.55), а именно:

$$\begin{aligned}
U_{j+1/2,i}^* C_{j+1/2,i} &= U_{j+1/2,i}^* \left[ (1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) C_{j+1,i} + \beta(U_{j+1/2,i}^*) C_{j,i} \right]; \\
U_{j-1/2,i}^* C_{j-1/2,i} &= U_{j-1/2,i}^* \left[ (1 - \beta(U_{j-1/2,i}^*)) C_{j,i} + \beta(U_{j-1/2,i}^*) C_{j-1,i} \right]; \\
V_{j,i+1/2}^* C_{j,i+1/2} &= V_{j,i+1/2}^* \left[ (1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) C_{j,i+1} + \beta(V_{j,i+1/2}^*) C_{j,i} \right]; \\
V_{j,i-1/2}^* C_{j,i-1/2} &= V_{j,i-1/2}^* \left[ (1 - \beta(V_{j,i-1/2}^*)) C_{j,i} + \beta(V_{j,i-1/2}^*) C_{j,i-1} \right],
\end{aligned} \tag{3.68}$$

где параметр  $\beta = 1$  если значение скорости при нем  $> 0$  и  $\beta = 0$  если соответствующая скорость  $\leq 0$ . Подставляя теперь формулы (3.68) в уравнение (3.67) и группируя подобные слагаемые, после простых преобразований получим следующее конечно-разностное уравнение переноса концентрации примеси или химического компонента  $C$

$$d_{j,i}^c C_{j,i}^{n+1} + c_1^c C_{j+1,i}^{n+1} + c_0^c C_{j-1,i}^{n+1} + b_1^c C_{j,i+1}^{n+1} + b_0^c C_{j,i-1}^{n+1} = f^c, \tag{3.69}$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j,i}^c$ ,  $c_1^c$ ,  $c_0^c$ ,  $b_1^c$ ,  $b_0^c$  и свободный член уравнения  $f^c$  являются известными величинами по результатам предыдущей итерации и определяются формулами:

$$\begin{aligned}
d_{j,i}^c &= 0,25 \cdot h x_1 \cdot h y_1 / \Delta \tau + 0,5 \cdot h y_1 \cdot \left[ U_{j+1/2,i}^* \beta(U_{j+1/2,i}^*) - U_{j-1/2,i}^* (1 - \beta(U_{j-1/2,i}^*)) \right] + \\
&+ 0,5 \cdot h x_1 \cdot \left[ V_{j,i+1/2}^* \beta(V_{j,i+1/2}^*) - V_{j,i-1/2}^* (1 - \beta(V_{j,i-1/2}^*)) \right] + \\
&+ \frac{0,5}{Pe_d} (h y_1 / h x_{j+1} + h y_1 / h x_j + h x_1 / h y_{i+1} + h x_1 / h y_i);
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
c_1^c &= 0,5 \cdot h y_1 \cdot \left[ U_{j+1/2,i}^* (1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) - \frac{1}{Pe_d \cdot h x_{j+1}} \right]; \\
c_0^c &= -0,5 \cdot h y_1 \cdot \left[ U_{j-1/2,i}^* \cdot \beta(U_{j-1/2,i}^*) + \frac{1}{Pe_d \cdot h x_j} \right]; \\
b_1^c &= 0,5 \cdot h x_1 \cdot \left[ V_{j,i+1/2}^* (1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) - \frac{1}{Pe_d \cdot h y_{i+1}} \right]; \\
b_0^c &= -0,5 \cdot h x_1 \cdot \left[ V_{j,i-1/2}^* \beta(V_{j,i-1/2}^*) + \frac{1}{Pe_d \cdot h y_i} \right]; \\
f^c &= 0,25 \cdot h x_1 \cdot h y_1 \cdot C_{j,i}^* / \Delta \tau.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что коэффициенты (3.70) идентичны коэффициентам (3.57) для уравнения переноса тепла с той лишь разницей, что тепловое число Пекле  $Pe_T$  теперь заменено значением диффузионного числа Пекле  $Pe_d$ .

Система разностных алгебраических уравнений (3.69) представляет собой замаскированное уравнение Пуассона. Она записана для внутренних узлов расчетной сетки и может быть решена одним из итерационных методов при заданных начально-краевых условиях и значениях коэффициентов, определяемых по формулам (3.70).

Таким образом, построенный универсальный дискретный аналог уравнений движения несжимаемой жидкости в совокупности с дискретными аналогами уравнений переноса тепла и вещества может быть применен не только для решения задач о вынужденном течении однородной несжимаемой жидкости, но и в случаях свободной и смешанной конвекции стратифицированной по плотности жидкости. Следует отметить, что в отличие от случая вынужденного течения однородной жидкости в этой системе безразмерных разностных уравнений кроме числа Рейнольдса содержатся и другие безразмерные параметры, определенные через заданные физические величины. Это тепловое и диффузионное числа Пекле, а также числа Прандтля и Шмидта. В соответствии с этим, рассматриваемая полная система уравнений переноса содержит описание более широкого круга процессов.

При отсутствии вынужденного движения жидкости ( $u_0 = 0$ ) имеем случай свободноконвективного переноса теплоты и концентрации примеси за счет молекулярных механизмов. В этом случае определяющим безразмерным параметром в тепловой задаче служит число Грасгоффа и Прандтля. В случае смешанной конвекции ( $u_0 \neq 0$ ) основным параметром задачи является число Ричардсона ( $Ri = Gr / Re^2$ ). При  $Ri = 0$  имеем асимптотический режим движения однородной жидкости в виде свободной конвекции. Заметим, что число Рэлея равно  $Ra = Gr \cdot Pr$ . Очевидно, что при  $Pr = 1$  число  $Ra = Gr$ .

В заключение отметим, что использование универсального дискретного аналога уравнений движения жидкости при наличии в задаче вынужденной, свободной и смешанной конвекции требует выбора способа ведения итерационного процесса всей системы уравнений в целом. При нашем подходе используется следующая схема проведения расчетов.

1. На первом этапе предполагается, что в момент времени  $\tau_n$  значения скоростей  $U^n, V^n$ , давления  $P^n$ , температуры  $\theta^n$  и концентрации  $C^n$  известны. На этой основе сначала рассчитываются все коэффициенты дискретизации по соответствующим алгебраическим формулам.

2. На втором этапе, зная коэффициенты дискретизации с верхними индексами  $U, V, P$  и свободный член  $f^P$ , решается разностное уравнение типа Пуассона для давления и определяются значения  $P^{n+1}$  на  $(n+1)$  временном слое.

3. На третьем этапе зная давление  $P^{n+1}$  и коэффициенты дискретизации для уравнений движения с верхними индексами  $U, V$  по соответствующим уравнениям определяются компоненты скорости  $U^{n+1}$  и  $V^{n+1}$  на  $(n+1)$  временном слое.

4. На четвертом этапе зная компоненты скорости и коэффициенты дискретизации уравнения переноса тепла и концентрации химического компонента с индексом «Т» и «С» решаются соответствующие уравнения типа Пуассона и определяются значения температуры  $T^{n+1}$  и концентрации  $C^{n+1}$  на  $(n+1)$  временном слое.

### 3.9. Краткое обсуждение граничных условий

Решение системы уравнений гидродинамики, переноса тепла и концентрации химического компонента применительно к конкретным задачам, независимо от метода их решения, требует задания граничных условий, а в случае рассмотрения нестационарных уравнений, необходимо задавать также начальные условия. Проблема постановки граничных условий является одной из главных при построении численного алгоритма решения задачи и зависит от принадлежности исходных уравнений к классу гиперболических, параболических или эллиптических уравнений.

Пусть динамическая задача решается на промежутке времени  $t \in [0, T_n]$  в области  $D_h$  при всех  $\vec{x} \in D_h$ . В начальный момент времени задается начальное распределение скорости  $v_i(0, x_i)$ , давления  $p(0, x_i)$  и других зависимых переменных, если они имеются в задаче. Граничные условия для компонентов скорости задаются на границе  $\Gamma$  расчетной области  $D_h$ , которая состоит из нескольких непересекающихся участков  $\Gamma_i$ , каждый из которых является характерным.

Задачи гидродинамики и тепломассообмена разделяют на класс внешних и внутренних задач. К первому классу обычно относятся задачи обтекания различных тел безграничным потоком, а ко второму классу относятся течения в трубах, каналах и других ограниченных областях. Чтобы дифференциальные или разностные уравнения однозначно определяли рассматриваемое поле скоростей, давления и температур их необходимо дополнить соответствующими начально-краевыми условиями на всех границах рассматриваемой области. Обычно граничные условия могут принадлежать к одному из трех типов: первого рода (Дирихле), второго рода (Неймана) и третьего более общего вида.

Особенности реализации тех или иных граничных условий целесообразно рассматривать в виде четырех типичных случаев:

- на входной границе расчетной области;

- на твердой стенке;
- на внешней свободной границе расчетной области;
- на выходной границе расчетной области.

Ограничимся пока рассмотрением случая, когда переменной величиной является скорость.

**На входе** в расчетную область, то есть на участке границы  $\Gamma_1$ , часто задаются условия невозмущенного потока. Обычно это условие типа Дирихле в виде заданной величины значения искомой переменной.

Для течений ограниченных какой-либо **твердой стенкой** на участке  $\Gamma_2$  обычно для скорости принимаются очевидные условия прилипания и непротекания жидкости

$$\vec{v}_\Gamma = (u_\Gamma, v_\Gamma) = 0$$

для всех моментов времени. Случай упругой и деформируемой поверхности имеет свою специфику и заслуживает отдельного рассмотрения [375].

Выбор и удовлетворение граничных условий на свободных границах связан с определенными трудностями, так как расчетная область всегда является ограниченной, а физическая область может быть безграничной. Обычно на **внешней свободной границе** на участке  $\Gamma_3$  принимаются условия невозмущенного потока или условия скольжения, представляющие собой условие Дирихле для нормальной составляющей скорости и условие Неймана для тангенциальной составляющей скорости.

Особый интерес представляет случай наличия свободной поверхности или поверхности раздела двух сред  $S_p$ . В этом случае на ней формулируются условия сопряжения:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2; \quad \vec{P}_{v_1} = \vec{P}_{v_2} \quad \text{при } \vec{r} \in S_p,$$

позволяющие найти непрерывные решения для скоростей и давления в области границы раздела. Первое условие для скоростей обычно называют кинематическими условиями, а второе условие равенства напряжений со стороны первой и второй сред обычно называют динамическим условием.

Если в задаче имеет место свободная поверхность, то ее описывают в общем случае уравнением вида  $\eta(x, y, z, t) = 0$ . При этом кинематическое условие на ней для трехмерной задачи записывается с помощью выражения

$$v_z|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Здесь предполагается, что любая элементарная частица жидкости, находящаяся на этой поверхности, остается на ней во все моменты времени.

Динамическое условие на свободной поверхности обычно сводится к неизменности на ней давления



$$P_{v_1} = P_a \cdot \vec{n}$$

где, например,  $P_a$  - атмосферное давление.

На **выходной границе** расчетной области на участке  $\Gamma_4$  обычно ставятся так называемые «мягкие условия» Неймана. Однако, в литературе имеется информация о различных способах решения этой проблемы при решении конкретных задач. В частности, при изучении задач обтекания цилиндров с круговым и квадратным поперечным сечением Yoshida исследовал различные подходы к моделированию граничных условий. На выходной границе области рассматривались конвективные условия в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0.$$

Он показал, что мягкие условия Неймана сильнее влияют на поле скоростей и давления, однако интегральные характеристики мало зависели от вида используемых граничных условий на выходе. Позднее этот подход использовали и другие исследователи [123].

Если компоненты скорости определены на всех границах расчетной области, то необходимо обеспечить выполнение глобального условия

$$\iint_{\sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = 0.$$

Описанный общий подход к постановке граничных условий предполагает корректность поставленной задачи, имеющей регулярное решение. При решении же систем алгебраических конечно-разностных уравнений для получения регулярного численного решения могут потребоваться дополнительные граничные и другие условия. Так как аппроксимация заданных граничных условий конечными разностями влияет на точность решения, устойчивость расчетной схемы и скорость сходимости процесса решения, то ей следует уделять особое внимание.

Специфика численных методов состоит в том, что имеется несколько способов реализации граничных условий. Легче всего реализовать применение внешних фиктивных граничных (ячеек) узлов. Задавая подходящие значения искомых переменных в этих узлах, можно добиться того, чтобы элементы жидкости внутри расчетной области удовлетворяли внешним граничным условиям таким образом, как если бы внешней границы области вообще не существовало. Обычно для этого достаточно всего один или два слоя фиктивных ячеек (узлов). Когда значения переменных, задаваемых в фиктивных узлах, хранятся в памяти ЭВМ в тех же массивах, как и переменные во внутренних узлах, то расчеты могут производиться на всей сетке по одной и той же системе конечно-разностных уравнений.

Другой простой способ учета граничных условий состоит в том, чтобы исключить их вообще, в силу подходящих условий задачи. Обычно это удается сделать в тех задачах, когда на границах существуют условия симметрии.

Удобство построения разностных граничных условий должно учитываться еще на стадии определения сеточной области  $D_h$  и ее границы  $\Gamma$ . Самый лучший вариант, когда граничные узлы лежат на сеточной границе заданной области. Но этого не всегда удается добиться. Поэтому в таких случаях часто используется прием сноса граничного условия в узлы ближайшие к границе.

При использовании разнесенной сетки, она строится таким образом, чтобы твердая граница проходила через узлы дополнительных сеток, в которых определяется скорость, а не давление или температура. Это позволяет избавиться от необходимости знать давление на твердой границе и создает удобство выполнения граничных условий на твердой стенке для компонентов скорости. Рассмотрим подробнее этот случай.

Пусть  $\Gamma$  является границей расчетной области, на которой задано условие прилипания и непротекания. Вертикальная граница проходит через точки, в которых определена горизонтальная составляющая скорости  $u(\blacktriangle)$ , а горизонтальная часть границы проходит через точки, где определена вертикальная составляющая скорости  $v(\blacksquare)$ . Поэтому давление  $p(\bullet)$  не определено на границе и этот факт имеет существенное значение, так как позволяет рассчитывать давление с помощью уравнений изменения количества движения и граничных условий для компонентов скорости. Поэтому разнесенная сетка хорошо приспособлена для расчета давления, однако она не совсем удобна для расчета скоростей, так как в аппроксимационные выражения входят величины скорости с целым индексом, значения которых иногда лежат за пределами расчетной области.

Условия прилипания и непротекания на границе  $\Gamma$  имеют вид:

$$u_{j+1/2,i}|_{\Gamma} = 0, \quad v_{j,i+1/2}|_{\Gamma} = 0. \quad (3.71)$$

Если  $\Gamma$ - горизонтальная твердая граница, то на ней  $i = 0$  и в силу условия прилипания для продольной скорости  $u$  имеем  $u_{j+1/2,0} = 0$ . Тогда с помощью линейной интерполяции находим  $u_{j+1/2,i} = 0,5(u_{j+1/2,0} + u_{j+1/2,1}) = 0$ . Откуда имеем  $u_{j+1/2,0} = -u_{j+1/2,1}$ . В случае когда на горизонтальной границе  $i = N$  получаем условие  $u_{j+1/2,i} = 0,5(u_{j+1/2,N} + u_{j+1/2,N+1}) = 0$ . Откуда находим  $u_{j+1/2,N+1} = -u_{j+1/2,N}$ . Аналогично обстоит дело при рассмотрении поперечной скорости  $v$ .

При использовании разнесенной сетки все расчетные точки располагаются внутри рассматриваемой области жидкости, а грани контрольных

объемов совпадают с ее границами. Этот подход дает возможность не решать уравнения движения в граничных точках, так как скорости там либо известны, либо равны нулю в силу условий прилипания и непротекания и это дает возможность определить давление в этих граничных узлах расчетной сетки.

Примеры расположения узлов сетки вблизи вертикальной границы  $\Gamma$  и более сложной угловой границы для разнесенной сетки представлены выше на рис. 3.4.

Некоторый недостаток описанной выше разнесенной сетки состоит в том, что на каждой из сторон границы определяется только одна составляющая скорости, так что вблизи границы необходимо применять не центрированные разности. Но это неудобство вполне окупается преимуществами такой сетки при расчете давления.

Граничные условия для температуры при наличии твердых стенок могут быть в общем случае трех видов: первого рода, второго и третьего рода. Например, в первом случае, температура участка стенки может быть задана (условие 1-го рода – Дирихле) и равна  $T_1$ , а температура жидкости равна  $T_0$ .

Тогда удобно ввести безразмерную температуру  $\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$ , которая на участке подогретой стенки будет равна единице и равна нулю на не подогретом участке стенки. Возможен случай, когда температура стенки меняется по заданному закону, например,  $\theta(x, y) = f(x)$ .

При граничных условиях второго рода (условия Неймана) для температуры на стенке задается ее градиент  $\partial T / \partial n$ . В безразмерных переменных  $\theta, \bar{n}$  этот градиент равен числу Нуссельта  $Nu$

$$\partial \theta / \partial \bar{n} = Nu,$$

которое определяет интенсивность теплоотдачи. В случае адиабатической стенки  $Nu=0$ . Если же число  $Nu$  не задано, то обычно оно само является искомой величиной при решении задачи.

Если в уравнениях переноса тепла или другой субстанции на выходной границе необходимо учитывать слагаемое типа источника или, например, диссипативную функцию, то их можно определять при помощи экстраполяции и при помощи односторонних разностей, так как они обычно не зависят от времени.

Наиболее общие режимы теплообмена через границу описываются с помощью граничных условий третьего рода

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \beta_0(t) \theta &= \gamma_0(t), \\ \alpha_1(t) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \beta_1(t) \theta &= \gamma_1(t). \end{aligned} \tag{3.72}$$

Граничные условия для всей системы уравнений движения стратифицированной жидкости включают граничные условия для поля скоростей и граничные условия для температуры и концентрации. Кроме того, в начальный момент времени должны быть заданы значения всех искомых функций  $u^0, v^0, p^0, t^0, c^0$ .

Возможность решения рассматриваемых систем разностных алгебраических уравнений с помощью метода прогонки определяет эффективность метода решения задачи в целом.

### 3.10. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Применение метода конечных разностей для численного решения уравнений математической физики, включая уравнения гидродинамики и переноса тепла, приводит к решению систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений. Для их решения существуют прямые и итерационные методы [209]. Детальное рассмотрение численных методов решения систем алгебраических уравнений, обращения матриц и вычисления определителей можно найти в работах [7, 65, 138, 172, 181].

Обычно выбор метода решения связан с типом разностного уравнения и структурой матрицы его коэффициентов, которая в значительной степени определяет эффективность численного алгоритма решения задачи в целом. Поэтому выбор того или иного метода определяется сложностью задачи и ресурсами имеющегося ПК. Итерационные методы позволяют построить решение как линейных систем алгебраических уравнений вида

$$\vec{A}\vec{P} = \vec{f}, \quad (3.73)$$

так и нелинейных систем более общего вида

$$\vec{A}(\vec{P})\vec{P} = \vec{f}. \quad (3.74)$$

Здесь  $\vec{A}$  - матрица алгебраических коэффициентов,  $\vec{P}$  - вектор искомой переменной,  $\vec{f}$  - источниковый вектор. В случае блочной, матричной формулировки для систем нелинейных алгебраических уравнений можно построить итерационный процесс ее сведения к линейной системе методом Ньютона [208]. Если матрица  $\vec{A}$  не зависит от искомой переменной  $\vec{P}$ , то требуется только один этап внешней итерации, то есть уравнение (3.74) принимает вид уравнения (3.73), который и будет нас интересовать в дальнейшем.

Формально уравнение (3.73) имеет решение

$$\vec{P} = \vec{A}^{-1} \cdot \vec{f}, \quad (3.75)$$

где матрица  $\bar{A}^{-1}$  является обратной по отношению к матрице  $\bar{A}$ . Практический интерес представляют матрицы большой размерности. Двумерная задача на сетке из 50 x 200 ячеек приводит к матрицам размерностью  $10^4$ . В этом случае не удастся использовать известные простые приемы решения. Однако, хотя размерность матриц, получаемых в конечно-разностных алгоритмах и велика, в конкретных задачах они могут оказаться сильно разреженными, а для таких матриц имеются эффективные итерационные методы, но многое определяют скорость сходимости решения и вычислительная устойчивость.

Точное решение уравнения (3.73) путем нахождения матрицы  $\bar{A}^{-1}$  без использования каких-либо специальных свойств матрицы  $\bar{A}$  требует  $N^3$  операций, то есть больших объемов вычислений. Большинство подходящих для этого методов, основаны на методе исключения Гаусса. Основная идея этого метода хорошо видна при тензорной записи рассматриваемого уравнения (3.73)

$$\sum_j \alpha_{ji} P_j = f_i, \quad i = \overline{1, N}$$

С помощью первого уравнения можно выразить  $\bar{P}_1$  через остальные  $N-1$  неизвестные. Затем, используя это выражение последовательно исключаем  $P_1$  из остальных  $N-1$  уравнений, умножая каждое из них на  $\alpha_{11}/\alpha_{i1}$  и вычитая их из первого уравнения. Последовательное выполнение этого приема приводит к частично сокращенной системе линейных уравнений.

Аналогичным образом исключаются и все другие неизвестные из последовательно уменьшающихся в размерах систем уравнений. В конечном результате получается система уравнений с верхней треугольной матрицей, то есть матрицей, содержащей отличные от нуля элементы только на диагонали и выше нее. Такая процедура исключения требует операций в несколько раз больше чем  $N^3$ . Поэтому для практических расчетов она непригодна и необходимо строить иные алгоритмы, основанные на специфических свойствах разреженных матриц.

В общем случае различают полные или плотные матрицы, когда матрица  $A$  содержит несколько или совсем не содержит нулевых элементов. Матрицу  $A$  называют разреженной, если она содержит много нулевых элементов. И, наконец, матрицу  $A$  называют ленточной, если она содержит много нулевых элементов, причем ненулевые элементы группируются вблизи главной диагонали.

Компьютерные программы, основанные на предположении о том, что матрица  $A$  является плотной, являются более универсальными, но и более сложными в алгоритмической реализации.

Для решения  $N$  – мерной линейной алгебраической системы уравнений (3.73), в принципе можно использовать любые известные методы. Если максимальная размерность  $N$  систем (3.73) невелика, то в выборе способа их решения нет проблем и можно использовать стандартные методы, как например, метод Гаусса. Однако при решении сложных прикладных задач гидромеханики и теплообмена приходится пользоваться сетками, имеющими десятки и сотни тысяч узлов и следовательно имеется огромное число неизвестных в исходных разностных системах уравнений вида (3.73). В подобных случаях не обойтись без выбора более эффективных методов по требуемым вычислительным затратам, чем обычный метод Гаусса, в котором число арифметических операций составляет величину  $N^3$ .

Основной особенностью рассматриваемого нами эллиптического разностного уравнения (3.73) является разреженность матрицы, то есть многие ее элементы равны нулю, однако расположение нулевых элементов зависит от вида расчетной области  $D_h$  и заданных граничных условий.

При решении систем сеточных алгебраических уравнений с большими разреженными матрицами обычно предпочтение отдают итерационным методам. Среди итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений принято выделять метод Гаусса, метод Якоби, в котором при каждом цикле итераций используются только значения переменных из предыдущей итерации. Известен также метод Гаусса-Зейделя, в котором новые значения используются сразу же по мере их получения. Этот метод обеспечивает более быструю сходимость, чем метод Якоби и требует меньшего ресурса ЭВМ. Существуют также методы последовательной релаксации, метод сопряженных градиентов, метод неполной матричной факторизации, метод переменных направлений и различные версии редукции многомерной задачи к последовательности одномерных задач.

В практических расчетах обычно выбирают наиболее эффективный способ решения, обеспечивающий быструю сходимость и простоту организации счета. Очень часто эта цель достигается путем преобразования исходной системы уравнений к виду, когда наибольшие значения коэффициентов располагаются на главной диагонали матрицы. В этом случае точность решения методом Гаусса повышается.

Предпочтительным средством решения интересующей нас системы уравнений является метод исключения по Гауссу, однако эффективность его использования зависит от структуры матрицы  $A$ . Методы конечных разностей, использующие трехточечные схемы или пятиточечную схему «крест» с линейной интерполяцией, обычно приводят к матрицам  $A$  с разреженной, а иногда и с ленточной трехдиагональной структурой. В случаях трехдиагональных матриц для решения рассматриваемой системы уравнений эффективным является метод прогонки [178, 181, 182] или алгоритм Томаса [7, 208].

Выше был построен универсальный дискретный аналог уравнений ламинарного движения несжимаемой жидкости, который включает уравнения типа Пуассона для сеточных функций давления  $P_{j,i}$  и две системы простых алгебраических уравнений для компонентов скорости, которые удовлетворяют уравнениям движения и явно определяются через значения давления. В символической форме уравнение для давления имеет вид

$$\vec{A} \cdot \vec{P} = \vec{f}, \quad (3.76)$$

где вектор  $\vec{P}$  состоит из узловых точек искомой переменной. Матрица  $\vec{A}$  содержит алгебраические коэффициенты, связанные с процессом дискретизации. Вектор  $\vec{f}$  состоит из коэффициентов, связанных с источниковыми членами исходных уравнений.

Выпишем интересующий нас разностный аналог системы уравнений для сеточных функций давления  $P_{j,i}$  в разностном виде

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P, \quad (3.77)$$

где алгебраические коэффициенты дискретизации  $d_{j,i}^P, c_1^P, c_0^P, b_1^P, b_0^P$  являются известными величинами. Матрица этого уравнения имеет пятидиагональную структуру. Четыре ряда недиагональных коэффициентов расположенных непосредственно у диагонали и поэтому она является разреженной. Такая структура матрицы позволяет оптимизировать численную процедуру решения уравнения (3.77).

В предыдущих главах было показано, что при дискретизации основных законов сохранения методом контрольного объема с пятиточечным шаблоном типа «крест», краевые задачи не только для давления  $P(j,i)$ , но и для температуры  $\theta(j,i)$  или концентрации химического компонента  $C(j,i)$ , также сводятся к решению систем алгебраических уравнений вида (3.77), где  $P_{j,i}$  - искомая переменная. Поэтому решению системы уравнений такого вида ниже будет уделено особое внимание. Тем более, что в дальнейшем в разделе турбулентных течений мы сталкиваемся с этой же проблемой.

Рассмотрим разностную задачу (3.77) в прямоугольнике со сторонами  $l$  и  $h$ . Пусть  $D_h = (0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h)$  - прямоугольник,  $\Gamma$  - его граница. Пусть в этой прямоугольной области решается задача Дирихле или Неймана для уравнения (3.77), где  $P_{j,i}$  - искомая переменная (давление, температура, концентрация и т.п.),  $d_{j,i}^P, c_1^P, c_0^P, b_1^P, b_0^P$  - известные алгебраические коэффициенты дискретизации,  $f^P$  - свободный член, известный по результатам предыдущей итерации,  $j, i$  - целочисленные значения  $j = \overline{1, N}, i = \overline{1, M}$ . Эти уравнения должны быть дополнены уравнениями в

приграничных узлах или вспомогательными уравнениями, содержащими искомую переменную в этих узлах. Только в этом случае будет обеспечено соответствие числа уравнений и неизвестных.

Пусть в задаче задана конечная односвязная область  $D_h$  с границей  $\Gamma$ . Поместим эту область в прямоугольник  $D_h$  и на этот прямоугольник наложим сетку  $S_0(j, i)$ . Узлы сетки  $(x_j, y_i)$  будут образованы пересечением прямых  $x=x_j$  и  $y=y_i$

$$\begin{aligned} x_j &= x_0 + j\Delta x, \quad \Delta x = \frac{x_0 - x_N}{N}, \quad j = \overline{1, N}; \\ y_i &= y_0 + i\Delta y, \quad \Delta y = \frac{y_0 - y_M}{M}, \quad i = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta y$  – шаги сетки по осям  $OX$  и  $OY$  соответственно. Будем называть узлы  $(x_j, y_i)$  внутренними когда,  $j \in \overline{1, N}$ ,  $i \in \overline{1, M}$ , и приграничными, когда  $j=0$  или  $j=N+1$ , или когда  $i=0$ , или  $i=M+1$ , а  $j \in \overline{1, N}$ . Множество внутренних узлов сетки обозначим  $D_h$ , граничных узлов сетки  $\Gamma_h$ , а всех внутренних и граничных – через  $\overline{D_h}$ .

При рассмотрении уравнения (3.77) в расчетном узле  $(x_j, y_i) \in D_h$  используется компактное обозначение  $P_{j,i} = P(x_j, y_i)$ . Формально в этом разностном уравнении неизвестных столько, сколько всего узлов содержится в множестве  $\overline{D_h}$ , то есть  $(N+1) \cdot (M+1) - 4$ . Однако, часть из них, а именно  $2M+2N-4$ , сразу определяется из соответствующих граничных условий, например,

$$P_{0,i} = \chi_1 P_{1,i} + \mu_1; \quad P_{N,i} = \chi_2 P_{N-1,i} + \mu_2, \quad (3.79)$$

$$P_{j,0} = \chi_3 P_{j,1} + \mu_3; \quad P_{i,M} = \chi_4 P_{i,M-1} + \mu_4. \quad (3.80)$$

Следовательно, дополнив систему уравнений (3.77) совокупностью сеточных граничных условий (3.79), (3.80) получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с квадратной матрицей коэффициентов относительного каркаса приближенного решения данной задачи Дирихле или Неймана во внутренних узлах сетки.

Возвращаясь к обсуждению решения систем линейных алгебраических уравнений (3.77), отметим, что в практических задачах эти системы имеют высокий порядок. Это заставляет при их решении использовать итерационные методы. Один из эффективных итерационных методов основывается на принципе установления, когда решение стационарной задачи находится как предел решения нестационарной задачи при неограниченном возрастании времени. В этом случае время  $t$  играет роль



итерационного параметра. Преимущество нестационарной формулировки задачи еще состоит в том, что она позволяет преодолеть трудность определения поля давления путем решения двумерного уравнения типа Пуассона с помощью его редукции к решению двух одномерных уравнений. При этом в каждом из них неявная схема относится, только к членам уравнений, связанным с определенным координатным направлением. Следовательно, при таком подходе в системе алгебраических уравнений будут присутствовать только три неявных члена, которые могут быть сгруппированы в окрестности главной диагонали. В результате для построения решения рассматриваемого двумерного разностного уравнения может быть использован чрезвычайно эффективный алгоритм прогонки.

Покажем, как с помощью описанного приема можно редуцировать двумерную задачу для давления к последовательному решению двух одномерных систем, а решение одномерных систем к решению системы разностных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, которые эффективно решаются методом прогонки, сущность которой рассматривалась в разделе 2.3.

Учитывая сказанное, решение уравнения (3.77) будем искать в следующей последовательности. Сначала выполним простые алгебраические преобразования и редуцируем двумерную задачу к двум одномерным. С этой целью соберем слагаемые, относящиеся к временному слою  $\tau_{n+1} = (n+1) \cdot \Delta\tau$  и линии сетки  $y_i = y_0 + i\Delta y$  в левой части уравнения, а другие слагаемые перенесем в правую сторону. Тогда, принимая для давления в узлах сетки  $(i+1)$  и  $(i-1)$  его значение с предыдущей итерации, запишем уравнение (3.77) в следующем виде

$$c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} = f_j^P - b_0^P P_{j,i-1}^n + b_1^P P_{j,i+1}^n, \quad (3.81)$$

здесь верхний индекс « $n$ » указывает принадлежность к соответствующему временному слою. Теперь перепишем этот дискретный аналог в стандартной форме с помощью введения новых коэффициентов  $A_j, B_j, C_j, F_j$  в виде

$$C_j P_{j,i}^{n+1} = A_j P_{j-1,i}^{n+1} + B_j P_{j+1,i}^{n+1} + F_j, \quad (3.82)$$

где введенные коэффициенты определяются через прежние соответствующими выражениями

$$\begin{aligned} C_j &= d_{j,i}^P, \quad A_j = -c_0^P, \quad B_j = -c_1^P, \\ F_j^P &= f_j^P - b_1^P P_{j,i+1}^n - b_0^P P_{j,i-1}^n. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Совершенно аналогично, собрав слагаемые относящихся к временному слою  $\tau_{n+1} = (n+1) \cdot \Delta\tau$  и линии сетки  $x_j = x_0 + j\Delta x$  запишем уравнение (3.77) в форме

$$C_i P_{j,i}^{n+1} = A_i P_{j,i-1}^{n+1} + B_i P_{j,i+1}^{n+1} + F_i, \quad (3.84)$$

где коэффициенты уравнения (3.84) также известны и определяются по формулам

$$\begin{aligned} C_i &= d_{j,i}^P, \quad A_i = -b_0^P, \quad B_i = -b_1^P, \\ F_i^P &= f_i^P - c_1^P P_{j+1,i}^n - c_0^P P_{j-1,i}^n. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Таким образом, при численном решении двумерного уравнения (3.77) оно редуцируется к решению двух одномерных систем линейных алгебраических уравнений второго порядка для  $j$ -го и  $i$ -го координатных направлений соответственно. Легко видеть, что эти две системы имеют трехдиагональные матрицы и поэтому для их решения можно использовать метод исключения Гаусса-Зейделя, который в рассматриваемом случае сводится к алгоритму прогонки [178].

При численном решении задачи методом прогонки особое внимание следует уделять аппроксимации граничных условий, так как это влияет на точность метода и на скорость сходимости итерационного процесса. Для обеспечения сходимости итерационного процесса необходимо, чтобы коэффициенты дискретного уравнения удовлетворяли определенным критериям. Однако, в различных задачах могут встретиться особенности, которые могут привести к потере устойчивости. Одна из причин появления неустойчивости может быть связана с источником членом. Другая характерная особенность связана с видом граничных условий и влиянием неравномерности сетки.

Точность любого конечно-разностного метода определяется ошибкой аппроксимации, то есть разностью между решениями исходных интегральных или дифференциальных и конечно-разностных уравнений, которая обусловлена приближенной процедурой замены производных разностными соотношениями.

В силу дискретного характера, итерационным методам решения свойственны ошибки округления. Чтобы проверить чувствительность используемого метода к этому виду погрешности, можно решить одну и ту же задачу с различной точностью  $\varepsilon$  считать приемлемой, зависит от требуемой точности искомых расчетных значений переменной и числа итераций, которые определяют время расчета. Экономичность расчета зависит также от числа узловых точек  $N$ . При их увеличении растет время, необходимое для выполнения каждого цикла итераций. Кроме того, увеличивается число итераций, требуемых для достижения сходимости. Поэтому вполне понятно стремление к уменьшению числа узлов расчетной сетки, например, с помощью введения неравномерных сеток.

Выбор начальных значений искомых переменных также может влиять на число итераций для получения сходящихся решений. Скорость сходимости зависит также от характера граничных условий. В частности, замечено, что условия Неймана (2-го рода) значительно уменьшают скорость сходимости по сравнению с условиями Дирихле (1-го рода). Так как уравнения (3.82) и (3.84) представляют собой систему алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, то они могут быть решены эффективно методом прогонки. Для этого необходимо определить начальные значения коэффициентов прогонки с помощью граничных условий задачи. Поскольку в физической постановке задачи явные граничные условия для давления обычно отсутствуют, то необходимо построить алгоритм решения задачи с учетом этой особенности. Суть такого алгоритма состоит в применении разнесенной сетки и использовании уравнений движения в комбинации с граничными условиями для компонентов скорости. Тогда, определение значения давления в приграничных ячейках может быть выполнено с помощью разностных уравнений движения [208].

Выбрав разнесенную сетку и проведя физические границы расчетной области через узлы не основной сетки  $S_0(j, i)$ , а через узлы двух вспомогательных полуцелых сеток  $S_1(j + 1/2, i)$  и  $S_2(j, i + 1/2)$ , в узлах которых расположены компоненты скорости  $U$  и  $V$  соответственно, мы получим возможность удовлетворять граничным условиям прилипания и непротекания жидкости на твердых стенках. В то же время, мы избавляемся от необходимости задавать давление на физической границе расчетной области, так как оно находится во внутренних узлах основной сетки  $S_0(j, i)$ . Преимущество такого подхода рассмотрим подробнее на примерах решения конкретных задач.

### 3.11. Гидродинамическое сопротивление тел обтекаемых потоком вязкой жидкости

#### 3.11.1. Вводная часть

Одной из важнейших задач гидродинамики является определение силового воздействия жидкости на обтекаемую поверхность или тело. Классическая теория гидроаэродинамического сопротивления основана на использовании закона изменения количества движения, который состоит в том, что производная по времени от главного вектора количества движения  $\vec{K} = \rho \vec{v}$  системы материальных точек равна сумме главных векторов внешних массовых  $\vec{F}$  и поверхностных сил  $\vec{P}$ , то есть

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F} + \vec{P}. \quad (3.86)$$

Первые приближенные формулы по определению главного вектора и момента сил давления двумерного потока на обтекаемый замкнутый контур были получены в начале XX столетия в рамках теории безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости. Фундаментальные идеи этих исследований связаны с именами Н.Е. Жуковского (1847-1921) и С.А. Чаплыгина (1869-1942). В дальнейшем они развивались их учениками, и другими исследователями. В настоящее время эти подходы и методы расчета изложены в ряде монографий и учебников [118, 120, 133, 226]. Там показано, что сопротивление тел обтекаемых реальной вязкой жидкостью состоит не только из нормальных сил давления  $R_p$ , но и сил трения  $R_f$ , представляющих собой интеграл касательных напряжений по поверхности обтекаемого тела. Сумму обоих сопротивлений  $R = R_p + R_f$  принято называть профильным сопротивлением [226].

### 3.11.2. Объемные и поверхностные силы в сплошной среде

Рассмотрим подробнее две категории сил, то есть объемные массовые  $\vec{F}$  и поверхностные силы  $\vec{P}$ , которые входят в правую часть уравнения (3.86), выражающего закон изменения количества движения. С этой целью внутри вязкой жидкости мысленно выделим некоторый объем  $\tau$ , ограниченный поверхностью  $\sigma$  (рис. 3.6) и отбросим всю жидкость вне этого объема. При таком подходе внутренние силы, действующие в жидкости между выделенной и отброшенной частями жидкости будут рассматриваться как внешние поверхностные силы распределенные по поверхности  $\sigma$  выделенного контрольного объема  $\tau$ . Кроме поверхностных сил, в любой точке объема  $\tau$ , могут действовать объемные массовые силы.

Специфика механики жидкости и газа, в отличие от общей механики, состоит в том, что в ней приходится иметь дело не с самими силами, а с плотностью их распределения в пространстве. В общем случае к массовым силам относятся силы тяжести, силы инерции Кариолиса или электромагнитные силы. Пусть внутри выделенного объема  $\tau$  в любой его точке  $M$  действуют внешние массовые силы  $\Delta\vec{f}$ , зависящие от радиус-вектора  $\vec{r}$ .

Обозначим через  $\Delta\vec{f}$  массовую силу, приложенную к элементарной жидкой частице с объемом  $\Delta\tau$  (см. рис.3.6), массой  $\rho\Delta\tau$  и введем понятие

вектора напряжения массовой силы  $\vec{F}$ , как предел отношения элементарной силы  $\Delta\vec{f}$  к массе частицы  $m = \rho \cdot \Delta\tau$ . Тогда можно записать, что

$$\vec{F} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{f}}{\rho \cdot \Delta\tau}, \quad (3.87)$$

где  $\rho$  - среднее значение плотности в объеме  $\Delta\tau$ , а объем  $\Delta\tau$  стремится к нулю, сохраняя внутри себя рассматриваемую точку  $M$ . В частном случае действия гравитационных сил  $\vec{F} = -\vec{k}g$ , где  $g$  - ускорение силы тяжести,  $\vec{k}$  - орт вертикальной оси.

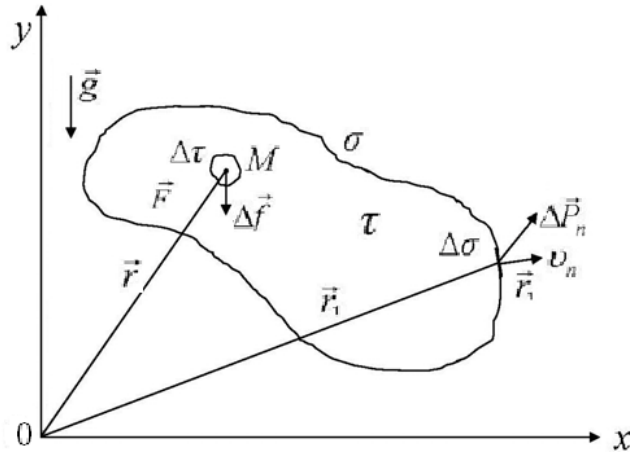


Рис. 3.6. Принципиальная схема сил действующих на выделенный контрольный объем в сплошной среде

Теперь рассмотрим поверхностные силы, приложенные к поверхности  $\sigma$ . Обозначим элементарную поверхностную силу приложенную к площадке  $\Delta\sigma$  с внешней нормалью  $\vec{n}$  через  $\Delta\vec{P}_n$  (рис. 3.6). Тогда вектор напряжений поверхностных сил в данной точке поверхности  $\sigma$  будет равен пределу отношения элементарной поверхностной силы к элементарной площадке  $\Delta\sigma$ , то есть

$$\vec{P}_n = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{P}_n}{\Delta\sigma}. \quad (3.88)$$

Из соотношения (3.88) видно, что элементарный вектор поверхностных сил  $d\vec{P}$ , действующих на выделенную площадку  $d\sigma$  поверхности  $\sigma$  определяется выражением

$$d\vec{P} = \vec{P}_n d\sigma,$$

а элементарный момент относительно начала координат тогда определится по формуле

$$d\vec{M} = \vec{r}_1 \times d\vec{P} = \vec{r}_1 \times \vec{P}_n d\sigma.$$

Интегрируя выражения  $d\vec{P}$  и  $d\vec{M}$  по поверхности  $\sigma$ , получим формулы для результирующих сил  $\vec{R}$  и момента  $\vec{M}$

$$\vec{R} = \int_{\sigma} \vec{P}_n d\sigma, \quad \vec{M} = \int_{\sigma} (\vec{r}_1 \times \vec{P}_n) d\sigma, \quad (3.89)$$

Эти общие формулы могут быть использованы при решении конкретных задач, если удастся рассчитать вектор напряжений  $\vec{P}_n$ .

В общем случае вектор  $\vec{P}_n$  направлен под некоторым углом к внешней нормали  $\vec{n}$ . Поэтому величина  $\vec{P}_n$  не является обычным вектором, так как ее значение в данной точке еще зависит от ориентации в пространстве площадки  $\Delta\sigma$  с нормалью  $\vec{n}$ . Поэтому в общем случае вектор напряжения  $\vec{P}_n$  может принимать бесчисленное множество значений в зависимости от ориентации площадки. Вследствие этого важным обстоятельством является установление связи между вектором напряжений  $\vec{P}_n$ , действующим на произвольно ориентированную площадку и три другие взаимно перпендикулярные площадки, проходящие через данную точку, и параллельные осям выбранной прямоугольной системы координат  $x, y, z$ .

Если выделить в движущейся жидкости элементарную частицу в форме тетраэдра с гранями  $d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z$  [132], то на них будут действовать вектора напряжений поверхностных сил  $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$ . С помощью уравнения движения центра инерции системы частиц с общей массой  $\rho \cdot d\tau$  можно показать, что напряжение действующее на площадку  $d\tau_n$ , с нормалью  $\vec{n}$ , связано с векторами напряжений, действующих на элементах граней трех взаимно перпендикулярных площадок, соотношением [132]

$$\vec{P}_n d\sigma_n = \vec{P}_x d\sigma_x + \vec{P}_y d\sigma_y + \vec{P}_z d\sigma_z, \quad (3.90)$$

где

$$d\sigma_x = d\sigma_n \cdot \cos(\hat{n, x}) = n_x d\sigma_n,$$

$$d\sigma_y = d\sigma_n \cdot \cos(\hat{n, y}) = n_y d\sigma_n,$$

$$d\sigma_z = d\sigma_n \cdot \cos(\hat{n, z}) = n_z d\sigma_n.$$

После подстановки этих равенств в выражение (3.90) и сокращения на  $d\sigma_n$ , получим

$$\vec{P}_n = n_x \vec{P}_x + n_y \vec{P}_y + n_z \vec{P}_z, \quad (3.91)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  - косинусы соответствующих углов. Тогда вектора проекций напряжений  $\vec{P}_{nx}, \vec{P}_{ny}, \vec{P}_{nz}$  можно записать в проекциях на оси прямоугольной системы координат  $x, y, z$  в следующем виде

$$\begin{aligned} P_{nx} &= n_x P_{xx} + n_y P_{yx} + n_z P_{zx}, \\ P_{ny} &= n_x P_{xy} + n_y P_{yy} + n_z P_{zy}, \\ P_{nz} &= n_x P_{xz} + n_y P_{yz} + n_z P_{zz}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Система уравнений (3.92) показывает, что проекция напряжений, на оси координат, приложенные к любой наклонной площадке, зависят от проекций напряжений, действующих на три взаимно перпендикулярные площадки, лежащие в координатных плоскостях  $x, y, z$ . Следовательно, напряжение в любой точке потока может быть представлено в следующей матричной форме, через совокупность девяти величин

$$\vec{P}_n = \begin{vmatrix} P_{xx} & P_{yx} & P_{zx} \\ P_{xy} & P_{yy} & P_{zy} \\ P_{xz} & P_{yz} & P_{zz} \end{vmatrix} \vec{n} = \vec{n} \cdot \Pi. \quad (3.93)$$

Матрица  $\Pi$  в выражении (3.93) называется тензором вязких напряжений. Первый индекс при напряжении, например для  $P_{xy}$ , в соотношениях (3.93) обозначает ось, перпендикулярно которой ориентирована площадка, а второй индекс обозначает ось на которую проектируется данное напряжение. Скалярные величины  $P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}$  - представляют собой нормальные напряжения, а  $P_{xy}, P_{xz}, P_{yz}$  - касательные напряжения, действующие на соответствующих площадках. В курсах по гидромеханике показано [132], что касательные напряжения удовлетворяют условию взаимности

$$P_{yx} = P_{xy}; \quad P_{zx} = P_{xz}; \quad P_{zy} = P_{yz}. \quad (3.94)$$

Тензор напряжений для ньютоновской несжимаемой жидкости, к которым относятся вода и воздух, согласно закону Ньютона линейно зависит от тензора скоростей деформаций и для несжимаемой жидкости записывается в следующей тензорной форме

$$P_{ik} = -P\delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad i, k = \overline{1,3}. \quad (3.95)$$

где  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости жидкости,  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера.

В случае вязкой жидкости вектор напряжений  $\vec{P}_n$  полезно выразить через нормальные давления  $P$  и касательные напряжения  $\vec{\tau}_n$  в следующей векторной форме

$$\vec{P}_n = -\bar{p} \cdot \vec{n} + \vec{\tau}_n; \quad \bar{p} = \left( \frac{1}{3} \right) \cdot tr \Pi, \quad (3.96)$$

где  $\bar{p}$  - шаровая часть тензора напряжений  $\Pi$ . Это соотношение часто используется в прикладных расчетах.

### 3.11.3. Основные принципы определения гидродинамического сопротивления

Проблема расчета сопротивления, даже равномерно движущегося тела произвольной формы в вязкой жидкости сопряжена с огромными трудностями и до сих пор не решена полностью. Теоретический расчет профильного сопротивления возможен если известен тензор напряжений, зависящий от поля скоростей и давления в зоне обтекаемого тела. Определенные результаты в этом направлении удалось получить аналитически для задачи обтекания сферы на основе решения системы уравнений движения Навье-Стокса. Однако, это удалось сделать лишь при использовании ряда допущений, связанных с приближением Стокса, когда в уравнениях движения конвективными слагаемыми пренебрегаются по сравнению с вязкими и, следовательно, результаты таких расчетов верны лишь при малых числах Рейнольдса ( $Re \leq 1$ ) [132, 188].

На современном этапе развития компьютерной гидро-аэродинамики появились новые возможности расчета сил сопротивления, действующих на тело обтекаемое вязкой жидкостью. Однако, эффективность использования численных методов для этой цели тесно связано с наличием метода интегрирования исходной системы нелинейных уравнений движения Навье-Стокса. В общей постановке численное решение задачи обтекания вязкой жидкостью тела даже с простой геометрией, математически очень сложно. Но в настоящее время при умеренных числах Рейнольдса и в ряде других случаев существуют эффективные методы численного решения уравнений Навье-Стокса [40, 57], позволяющие рассчитывать поля скоростей и давления в любой точке потока, обтекающего рассматриваемое тело. Учитывая это принципиальное обстоятельство, обратимся к вопросу



определения динамического воздействия потока вязкой жидкости на находящееся в нем тело с позиций использования компьютерной гидродинамики, когда поля скорости и давления предполагаются известными в каждом узле расчетной области.

При обсуждении этой проблемы обычно можно выделить два случая, связанные с выбором системы отсчета. В первом случае тело может быть неподвижным и на него натекает поток жидкости. Тогда позади обтекаемого тела возникают вихревые образования, интенсивность которых с удалением от тела ослабевает, а область вихревого следа расширяется. Этому следному течению соответствует поток импульса, величина которого связана непосредственно с гидродинамическим сопротивлением.

Во втором случае схема течения обратная, то есть жидкость находится в состоянии покоя, а в ней движется тело. Оказывается, что с точки зрения сопротивления, в случае установившегося движения, оба эти случая эквивалентны [133]. Тогда, следуя этому принципу обратимости движения можно рассматривать любую из этих схем, но только применительно к установившемуся течению. Поэтому при определении сил сопротивления обтекаемого произвольного тела с границей поверхности  $\sigma_0$  следует выделять два случая, когда тело движется стационарно или нестационарно. Ясно, что во втором нестационарном случае задача значительно сложнее, но она тоже решается в рамках обсуждаемого подхода.

Пока рассмотрим общий случай и для определения гидродинамической силы воздействия жидкости на обтекаемое тело используем общий закон об изменении количества движения. С этой целью рассмотрим обтекание произвольного контура  $\sigma_0$  установившимся или нестационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости, направление которого совпадает с осью  $x$ , выбранной декартовой системы координат.

Вокруг закрепленного жестко или колеблющегося контура  $\sigma_0$  проведем контрольную поверхность  $\sigma$ , которая в общем случае может быть параллелепипедом, границы которого достаточно удалены от тела, или это может быть сфера, а в двумерной задаче окружность, с достаточно большим радиусом по сравнению, например, с радиусом обтекаемого кругового контура. Для установления формулы, определяющей вектор суммарной силы  $\vec{R}$  воздействия жидкости на тело, используем фундаментальное уравнение механики сплошных сред, выражающее закон изменения вектора количества движения  $\vec{K}$  в следующей интегральной форме [42, 132, 188]

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \vec{V} d\tau = \iint_{\sigma} \vec{P}_n d\sigma + \iiint_{\tau} \rho \vec{F} d\tau \quad (3.97)$$

В этом уравнении  $\rho$  - плотность жидкости;  $\vec{V}$  - вектор ее скорости;  $\vec{F}$  - вектор объемных и массовых сил;  $\vec{P}_n$  - плотность поверхностных сил на площадке  $d\sigma$  с направлением нормали  $\vec{n}$ . В данном подходе для простоты предполагается, что массовые объемные силы отсутствуют, интегрирование распространяется на объем  $\tau$ , ограниченный поверхностью  $\sigma$ . Скорость жидкости в направлении нормали к поверхности  $d\sigma$  равна  $v_n$ . При этом за положительное направление нормали  $\vec{n}$  выбирается направление наружу объема  $\tau$ .

Далее можно показать [42, 132, 188], что при эйлеровом описании движения жидкости субстанциональная производная по времени от вектора количества движения может быть представлена суммой локального и конвективного слагаемых в виде

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \vec{V} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho \vec{V} d\tau - \iint_{\sigma} \rho \vec{V} v_n d\sigma, \quad (3.98)$$

Используя уравнения (3.97), (3.98) и приравнявая правые части этих уравнений при отсутствии массовых сил, получаем следующее выражение

$$\iint_{\sigma} \vec{P}_n d\sigma = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho \vec{V} d\tau + \iint_{\sigma} \rho \vec{V} v_n d\sigma. \quad (3.99)$$

Из этого уравнения следует, что результирующее действие вектора напряжений поверхностных сил, действующих на обтекаемое тело равно сумме локального изменения количества движения этой жидкости в объеме  $\tau$  и потока жидкости за единицу времени через границу поверхности  $\sigma$  во внешнюю область.

Контрольная замкнутая поверхность  $\sigma$  в общем случае может быть многосвязной и состоять из нескольких замкнутых поверхностей, например,  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \dots$ . В принципе, внутри объема  $\tau$  движение жидкости и физические процессы могут иметь любой сложный характер. Например, там могут происходить химические реакции, горение, различные фазовые превращения. Однако, в этих случаях для их учета в исходные уравнения изменения количества движения необходимо вводить соответствующие дополнительные слагаемые. Здесь пока эти слагаемые не используются без потери общности для рассматриваемой задачи.

Таким образом, уравнение (3.99) представляет собой общее выражение закона количества движения при неустановившемся течении жидкости. Поскольку при выводе уравнения (3.99) не делалось никаких допущений о свойствах жидкости, то оно одинаково справедливо как для вязкой так и для идеальной жидкости.

На этом этапе обратим внимание на первое слагаемое в правой части уравнения (3.99), в котором интегрирование выполняется по жидкому объему  $\tau$ . Нетрудно видеть, что для вычисления изменения вектора количества движения по времени необходимо знать поле скоростей в функции от времени во всем объеме  $\tau$ , а для этого необходимо решить полную нестационарную задачу обтекания тела. В силу трудностей получения такого решения в общем случае, остановимся пока на рассмотрении только установившегося движения жидкости. Тогда первое слагаемое в правой части уравнения (3.99) обращается в нуль и основное уравнение (3.99) в этом случае принимает более простой вид

$$\iint_{\sigma} \vec{P}_n d\sigma = \iint_{\sigma} \rho \vec{V} v_n d\sigma, \quad (3.100)$$

который допускает выполнение дальнейших преобразований.

Обратим внимание на то, что в нашем случае обтекания тела выбранная контрольная поверхность  $\sigma$  состоит фактически из двух поверхностей – внешней поверхности  $\sigma_1$ , ограничивающей объем  $\tau$ , и внутренней поверхности  $\sigma_0$ , ограничивающей обтекаемое тело. Поэтому уравнение (3.100), выражающее закон изменения количества движения в объеме  $\tau$  ограниченном поверхностью  $\sigma$  можно переписать в следующем виде

$$\iint_{\sigma_1 + \sigma_0} \vec{P}_n d\sigma = \iint_{\sigma_1 + \sigma_0} \rho \vec{V} v_n d\sigma, \quad (3.101)$$

или

$$\iint_{\sigma_1} \vec{P}_n d\sigma + \iint_{\sigma_0} \vec{P}_n d\sigma = \iint_{\sigma_1} \rho \vec{V} v_n d\sigma + \iint_{\sigma_0} \rho \vec{V} v_n d\sigma. \quad (3.102)$$

Рассмотрим последний интеграл в правой части уравнения (3.102) по поверхности  $\sigma_0$ . Совершенно очевидно, что при обтекании твердого тела ограниченного поверхностью  $\sigma_0$  на ней выполняется условие непротекания в виде  $v_n = 0$  и поэтому рассматриваемый интеграл обращается в нуль. Теперь рассмотрим второй интеграл по поверхности  $\sigma_0$  в левой части уравнения (3.102). Нетрудно видеть, что этот интеграл определяет искомый главный вектор действия поверхностных сил жидкости  $\vec{R}$  на обтекаемое тело, ограниченное поверхностью  $\sigma_0$ . Тогда, согласно принципу действия и противодействия вектор гидродинамической силы сопротивления  $\vec{F}$  будет равен главному вектору  $\vec{R}$  с обратным знаком. Следовательно для вектора силы сопротивления  $\vec{F}$  имеем следующую общую формулу

$$\vec{F} = - \iint_{\sigma_0} \vec{P}_n d\sigma. \quad (3.103)$$

С другой стороны, используя это выражение, из формулы (3.102) для того же вектора сил сопротивления  $\vec{F}$ , можно записать

$$\vec{F} = \iint_{\sigma_1} \vec{P}_n d\sigma - \iint_{\sigma_1} \rho \vec{V} v_n d\sigma. \quad (3.104)$$

Таким образом, в случае установившегося обтекания имеются два варианта определения вектора силы сопротивления  $\vec{F}$ . Первый вариант определяет вектор силы  $\vec{F}$  по формуле (3.103) через интеграл от вектора  $\vec{P}_n$  по границе поверхности обтекаемого тела  $\sigma_0$ , а второй вариант позволяет определить силу  $\vec{F}$  по формуле (3.104) через интегралы по внешней границе контрольной поверхности  $\sigma_1$ , которая может быть выбрана произвольно с учетом особенностей рассматриваемой задачи.

Для практического использования общих формул (3.103) и (3.104) требуется располагать значениями напряжений  $\vec{P}_n$  и скоростей  $\vec{V}$  в каждом элементарном объеме рассматриваемой области течения.

При численном решении задачи обтекания рассматриваемого тела, необходимые для определения вектора гидродинамической силы сопротивления  $\vec{F}$  параметры течения, в виде массивов полей скоростей и давления, становятся известными в каждом узле расчетной сетки. Поэтому, после численного решения задачи обтекания рассматриваемого тела, расчет требуемых интегралов принципиальных трудностей не составляет. Однако следует обратить внимание на то, что в первом варианте граница интегрирования  $\sigma_0$  полностью определена геометрией обтекаемого тела, а во втором варианте контур интегрирования связан с выбором контрольной поверхности  $\sigma_1$ , который в общем случае определяется неоднозначно, особенно в области вихревого следа за телом. Поэтому на данном этапе продолжим наше рассмотрение применительно к первому варианту, когда вектор гидродинамического сопротивления  $\vec{F}$  определяется по формуле (3.103), когда интеграл вычисляется по известной поверхности  $\sigma_0$ , а второй вариант будет рассмотрен далее.

#### **3.11.4. Расчет коэффициентов гидродинамического сопротивления и подъемной силы**

В практических расчетах интерес представляет не вектор силы гидродинамического

сопротивления  $\vec{F}$ , а его составляющие по осям координат  $F_x, F_y, F_z$  в поточной системе координат, когда ось  $x$ -ов совпадает с вектором скорости невозмущенного потока  $\vec{V}_\infty$ . В этом случае для вектора силы сопротивления имеем

$$\vec{F} = \vec{i}_x F_x + \vec{j}_y F_y + \vec{k}_z F_z. \quad (3.105)$$

Далее, для простоты, ограничимся рассмотрением двумерной задачи и соответственно перейдем от интегралов по поверхности  $\sigma_0$  к контурному интегралу по области  $S_0$  где  $d\sigma = dS \cdot 1$ . Запишем общую формулу (3.103) в проекциях на оси выбранной декартовой системы координат  $x, y$ . Нетрудно видеть, что согласно (3.103) проекция силы гидродинамического сопротивления для  $x$ - направления запишется в виде

$$F_x = - \int_{S_0} P_{nx} dS, \quad (3.106)$$

а для проекции в  $y$ -направлении, аналогично имеем

$$F_y = - \int_{S_0} P_{ny} dS, \quad (3.107)$$

где  $P_{nx}$  и  $P_{ny}$  - соответствующие компоненты напряжений.

Рассмотрим теперь на конкретном примере как можно вычислить компоненты гидродинамических сил  $F_x, F_y$  с помощью формул (3.106) и (3.107). В качестве примера рассмотрим задачу об установившемся двумерном обтекании контура  $S_0$ , имеющего в общем случае форму прямоугольника  $ABCD$  со сторонами:  $AB = S_1, BC = S_2, CD = S_3, DA = S_4$ , как показано на рис. 3.7. Пусть вдали от тела набегающий поток жидкости имеет однородную скорость  $V_\infty$ , постоянное давление  $P_\infty$  и плотность  $\rho_\infty$ . Согласно такой постановке задачи весь контур  $S_0$  состоит из суммы четырех участков

$$S_0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad (3.108)$$

поэтому и контурные интегралы от напряжений в выражениях (3.106) и (3.107) будут представлять собой соответствующие суммы интегралов по этим четырем участкам. При их вычислениях важно учитывать ориентацию внешней нормали по отношению к области занятой жидкостью.

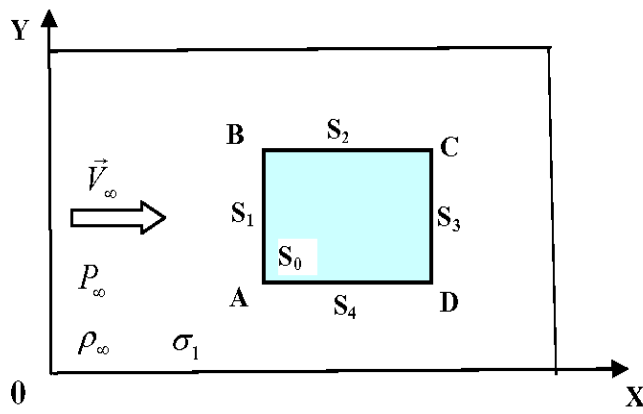


Рис. 3.7. Схема обтекания прямоугольного контура

Рассмотрим подробнее интегралы, стоящие в правой части выражений (3.106), (3.107). С этой целью вспомним что в двумерной задаче интересующие нас выражения для напряжений  $P_{nx}$  и  $P_{ny}$  записываются в виде

$$P_{nx} = n_x P_{xx} + n_y P_{yx}, \quad (3.109)$$

$$P_{ny} = n_x P_{xy} + n_y P_{yy}, \quad (3.110)$$

где  $n_x, n_y$  - косинусы углов между нормалью к соответствующей границе  $S_k$  ( $k = \overline{1,4}$ ) обтекаемого прямоугольника и направлением осей  $x, y$ . Подставляя выражения (3.109), (3.110) в интересующие нас интегралы (3.106), (3.107) и расписывая их в виде суммы четырех интегралов с учетом направления нормалей  $\vec{n}$ , для компонентов гидродинамических сил получим

$$F_x = - \left[ \int_{S_1} P_{xx} dy - \int_{S_2} P_{yx} dx - \int_{S_3} P_{xx} dy + \int_{S_4} P_{yx} dx \right]; \quad (3.111)$$

$$F_y = - \left[ \int_{S_1} P_{xy} dy - \int_{S_2} P_{yy} dx - \int_{S_3} P_{xy} dy + \int_{S_4} P_{yy} dx \right]. \quad (3.112)$$

Для вычисления интегралов от поверхностных напряжений воспользуемся классическими формулами Ньютона для напряжений в виде (3.95), которые для рассматриваемой двумерной задачи записываются в виде

$$P_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad P_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (3.113)$$

$$P_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad P_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (3.114)$$

Подставляя выражения (3.113), (3.114) в формулы (3.111), (3.112), после простых преобразований для гидродинамических сил  $F_x, F_y$  находим

$$F_x = - \left[ \int_{S_1} P_1 dy - \int_{S_3} P_3 dy - \mu \int_{S_2} \frac{\partial u_2}{\partial y} dx + \mu \int_{S_4} \frac{\partial u_4}{\partial y} dx \right]; \quad (3.115)$$

$$F_y = - \left[ \int_{S_2} P_2 dx - \int_{S_4} P_4 dx + \mu \int_{S_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} dy - \mu \int_{S_3} \frac{\partial v_3}{\partial x} dy \right]. \quad (3.116)$$

Здесь цифры у давления и компонентов скоростей обозначают номера границы прямоугольного контура  $S_0$ , на которых они вычисляются. Кроме того, согласно постановке задачи, на этих границах используются следующие нулевые значения для производных от скорости

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{S_1} &= 0; & \left. \frac{\partial u_3}{\partial x} \right|_{S_3} &= 0; & \left. \frac{\partial v_2}{\partial x} \right|_{S_2} &= 0; & \left. \frac{\partial v_4}{\partial x} \right|_{S_4} &= 0; \\ \left. \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{S_1} &= 0; & \left. \frac{\partial u_3}{\partial y} \right|_{S_3} &= 0; & \left. \frac{\partial v_2}{\partial y} \right|_{S_2} &= 0; & \left. \frac{\partial v_4}{\partial y} \right|_{S_4} &= 0. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда обтекаемый контур имеет не прямоугольную, а квадратную форму с длиной ребра " $l$ ". Тогда число Рейнольдса в задаче определится как

$$Re = V_\infty \cdot l / \nu, \quad \nu = \mu / \rho.$$

Кроме того, учитывая, что давление рассчитывается с точностью до постоянной, без потери общности, перейдем от давлений  $p_1, p_2, p_3, p_4$  к их избыточным значениям  $p_k = p_k - p_\infty$ , ( $k = \overline{1,4}$ ).

На данном этапе целесообразно перейти к безразмерным величинам. Принимая в качестве масштаба длины размер ребра квадрата  $l$ , за масштаб скорости значение  $V_\infty$ , а за масштаб давления скоростной напор  $p_0 = \rho V_\infty^2 / 2$ , для соответствующих безразмерных величин будем иметь  $X = x/l; Y = y/l; U = u/V_\infty; V = v/V_\infty$ , а коэффициенты давления как обычно определим по формуле

$$C_{Pk} = \frac{2(p_k - p_\infty)}{\rho V_\infty^2}, \quad (k = \overline{1,4}). \quad (3.118)$$

Кроме того, введем в рассмотрение гидродинамические коэффициенты сил сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$  в виде отношения значений гидродинамических сил  $F_x$  и  $F_y$  к скоростному напору и характерной площади обтекаемого тела  $\Omega$  ( $\Omega = l \cdot 1$ ). Будем иметь

$$C_x = \frac{2 \cdot F_x}{\rho V_\infty^2 \cdot \Omega}, \quad C_y = \frac{2 \cdot F_y}{\rho V_\infty^2 \cdot \Omega}. \quad (3.119)$$

Тогда после соответствующих преобразований из выражений (3.115), (3.116) получаем следующие окончательные формулы для расчета коэффициентов гидродинамического сопротивления в следующем виде:

$$C_x = \int_{S_1} C_{p1} dy - \int_{S_3} C_{p3} dy + \frac{1}{\text{Re}} \int_{S_2} \frac{\partial U_2}{\partial y} dx - \frac{1}{\text{Re}} \int_{S_4} \frac{\partial U_4}{\partial y} dx; \quad (3.120)$$

$$C_y = \int_{S_4} C_{p4} dx - \int_{S_2} C_{p2} dx - \frac{1}{\text{Re}} \int_{S_1} \frac{\partial V_1}{\partial x} dy + \frac{1}{\text{Re}} \int_{S_3} \frac{\partial V_3}{\partial x} dy. \quad (3.121)$$

Заметим, что в обоих выражениях первые два слагаемые в правой части соответствуют сопротивлению давления, а два вторых слагаемых определяют вклад сил сопротивления трения по соответствующим поверхностям квадратного контура. Для численного интегрирования правых частей выражений (3.120) и (3.121) используется следующая процедура. Так как при численном решении задачи обтекания поле течения разбито на элементарные ячейки  $(j, i)$  с размером ребра  $\Delta x$  и  $\Delta y$  и каждому центру ячейки соответствуют свои скорости и свое расчетное давление  $P_{j,i}$ , а следовательно и свои коэффициенты давления  $C_{pk}(j, i)$ , которые становятся известными в результате численного решения задачи. Поэтому такие интегралы численно легко определяются сразу после привязки координат углов квадрата к расчетной сетке. При этом конечно-разностные аппроксимации для соответствующих производных от скоростей при использовании шаблона с разнесенной сеткой определяются по формулам

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{j+1/2, i} = \frac{0,5(U_{j+1/2, i+1} - U_{j+1/2, i})}{\Delta y}; \quad (3.122)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{j, i+1/2} = \frac{0,5(V_{j+1, i+1/2} - V_{j, i+1/2})}{\Delta x}. \quad (3.123)$$

Таким образом, расчет гидродинамического коэффициента сопротивления  $C_x$  и коэффициента подъемной или боковой силы  $C_y$



обтекаемого тела вязкой жидкостью можно выполнить по формулам (3.120) и (3.121), если известны локальные значения скоростей и давления в каждом узле расчетной области.

Границы применимости полученных формул (3.120) и (3.121) следует определять путем сравнения расчетов с экспериментом для каждой конкретной задачи. Совершенно очевидно, что при ламинарном безотрывном стационарном обтекании они должны выполняться. С ростом числа Рейнольдса, режим обтекания может принципиально измениться и поэтому формулы могут работать лишь до чисел  $Re \leq Re^*$ , где  $Re^*$  - критическое значение числа Рейнольдса для тела заданной формы.

Описанная методика определения коэффициентов гидродинамического сопротивления  $C_x$  и коэффициента подъемной силы  $C_y$  использована далее при численном решении задачи отрывного обтекания квадратного цилиндра безграничным ламинарным потоком вязкой жидкости. Она реализована в форме отдельного модуля общей программы численного решения задачи [49].

### 3.11.5. Второй вариант расчетных формул для гидродинамических сил

Выше был рассмотрен первый вариант расчета гидродинамических сил сопротивления для тела, обтекаемого вязкой жидкостью согласно формуле (3.103). Этот вариант хорош, когда обтекаемое тело имеет простую геометрию и расчет соответствующих интегралов по участкам этих границ не вызывает трудностей. Если геометрия обтекаемого тела сложна и криволинейна, то для этих случаев более подходящим оказывается второй вариант расчета вектора сил сопротивления  $\vec{F}$  в виде формулы (3.104), так как в этом случае интегралы нужно определять не по контуру обтекаемого тела  $\sigma_0 = S_0$ , а на границах контрольного контура  $\sigma$ , охватывающего расчетную область внутри которой находится обтекаемый контур  $\sigma_0$ . Покажем как рассчитываются компоненты сил гидродинамического сопротивления  $F_x$ ,  $F_y$  в этом случае для двумерной задачи.

Запишем общее выражение (3.104) в проекциях на оси  $x, y$ . Нетрудно видеть, что для  $x$  - направления оно примет вид

$$F_x = \int_{\sigma} P_{nx} d\sigma - \int_{\sigma} \rho u \cdot v_n d\sigma, \quad (3.124)$$

а для  $y$  - направления аналогично имеем

$$F_y = \int_{\sigma} P_{ny} d\sigma - \int_{\sigma} \rho v \cdot v_n d\sigma, \quad (3.125)$$

где  $\sigma$  - внешний контур расчетной области,  $u, v$  - проекции вектора скорости на оси  $x, y$ , а  $v_n$  - проекция вектора скорости на внешнюю нормаль  $n$  к контуру  $\sigma$  внутри которой находится обтекаемое тело. Пусть тело, ограниченное поверхностью  $S_0$  обтекается установившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости и вдали от тела на бесконечности заданы давление  $P_\infty = P_1$ , плотность  $\rho_\infty = \rho$  и скорость потока жидкости  $\vec{V}_\infty = \vec{V}_1$ . Чтобы показать, как можно вычислить составляющие силы гидродинамического сопротивления  $F_x$  и  $F_y$  с помощью уравнения (3.124) и (3.125) выберем контрольный контур  $\sigma$  в виде прямоугольника  $ABCD$  со сторонами  $AB = \sigma_1$ ,  $BC = \sigma_2$ ,  $CD = \sigma_3$ ,  $DA = \sigma_4$ , охватывающего контур обтекаемого криволинейного тела  $S_0$ , как показано на рис. 3.8. Следовательно весь контур  $S$  будет представлен в виде суммы пяти отдельных его участков  $S = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + S_0$ .

Пусть границы участков прямоугольной области  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$  выбраны удаленными от обтекаемого тела на такое расстояние, чтобы на них можно было принять условия невозмущенного потока. А правая выходная граница расчетной области  $\sigma_3$  выбирается на определенном расстоянии  $x_T$  от геометрического центра обтекаемого тела в его следе. Выбор сечения  $x = x_T$  требует особого рассмотрения в зависимости от числа  $Re$  и класса задач [36].

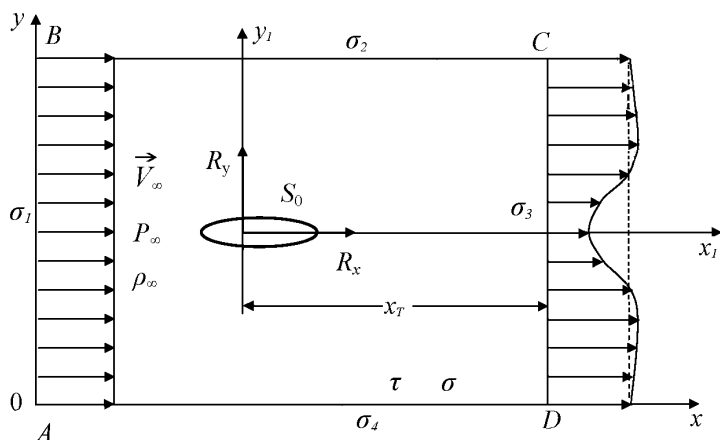


Рис. 3.8. Схема обтекания криволинейного контура  $S_0$

Теперь рассмотрим подробнее интегралы по контуру  $\sigma$ , входящие в уравнения (3.124) и (3.125), определяющие проекции главного вектора гидродинамических сил  $F_x$ ,  $F_y$ . С учетом вышесказанного, контур  $\sigma$

состоит из четырех участков и поэтому интеграл по  $\sigma$  состоит из суммы соответствующих четырех интегралов.

Рассмотрим сначала второй интеграл справа в выражении (3.124) и распишем его с учетом направления внешних к участкам поверхности  $\sigma$  нормалей  $\vec{n}$ ,

$$\int_{\sigma} \rho u v_n dS = - \int_{\sigma_1} \rho u u dy + \int_{\sigma_2} \rho u v dx - \int_{\sigma_4} \rho u v dx + \int_{\sigma_3} \rho u u dy. \quad (3.126)$$

Нетрудно видеть, что в интегралы по верхней  $\sigma_2$  и нижней  $\sigma_4$  границах области интегрирования входят скорости  $v$ . Согласно постановке задачи, поперечные скорости  $v$  на этих границах равны нулю и потому равны нулю и сами интегралы. Следовательно, интересующий нас интеграл (3.126) будет равен

$$\int_{\sigma} \rho u v_n dS = \int_{\sigma_1} \rho u_1^2 dy + \int_{\sigma_3} \rho u_3^2 dy, \quad (3.127)$$

где через  $u_1$  и  $u_3$  обозначена продольная локальная скорость в соответствующем сечении, а через  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  обозначены передняя входная и задняя выходная границы контрольного прямоугольного контура  $\sigma$ , перпендикулярные к оси  $x$ .

Теперь рассмотрим последний интеграл справа в выражении (3.125). Рассуждая аналогично, распишем его в виде суммы соответствующих интегралов с учетом направления внешних нормалей к каждому участку контура  $\sigma$ . Тогда будем иметь:

$$\int_{\sigma} \rho v v_n dS = - \int_{\sigma_1} \rho v u dy + \int_{\sigma_2} \rho v v dx - \int_{\sigma_4} \rho v v dx + \int_{\sigma_3} \rho v u dy. \quad (3.128)$$

Легко видеть, что во всех четырех интегралах подинтегральные функции содержат поперечную скорость  $v$ , которая согласно постановке задачи на трех первых границах равна нулю, а в сечении  $\sigma_3$  в общем случае  $v \neq 0$ . Поэтому и интересующий нас интеграл (3.128) будет равен

$$\int_{\sigma} \rho v \cdot v_n dS = \int_{\sigma_3} \rho u_3 v_3 dy. \quad (3.129)$$

Здесь, как и выше, нижние индексы у скоростей обозначают номер сечения в котором берутся скорости.

Теперь рассмотрим первые интегралы, стоящие в правых частях формул (3.124) и (3.125). С этой целью предварительно вспомним формулы (3.92), согласно которой в двумерной задаче напряжения  $P_{xx}$  и  $P_{yy}$  определены формулами (3.109) и (3.110). Подставляя эти выражения в интересующие нас

интегралы и расписывая их в виде суммы четырех интегралов с учетом направления внешних нормалей  $\vec{n}$ , будем иметь

$$\int_{\sigma} P_{nx} dS = - \int_{\sigma_1} P_{xx} dy + \int_{\sigma_2} P_{yx} dx - \int_{\sigma_4} P_{yx} dx + \int_{\sigma_3} P_{xx} dy; \quad (3.130)$$

$$\int_{\sigma} P_{ny} dS = \int_{\sigma_1} P_{xy} dy - \int_{\sigma_2} P_{yy} dx + \int_{\sigma_4} P_{yy} dx - \int_{\sigma_3} P_{xy} dy. \quad (3.131)$$

Для вычисления интегралов от поверхностных напряжений обратимся к классическим формулам Ньютона в виде (3.95). Однако, прежде чем ими воспользоваться для наших целей, обратим внимание на то, что согласно постановке задачи интегралы по  $\sigma_2$  и  $\sigma_4$  от касательных напряжений  $P_{yx}$  в выражении (3.130) равны нулю. Следовательно для первого интеграла имеем

$$\int_{\sigma} P_{nx} dS = \int_{\sigma_1} P_{xx} dy + \int_{\sigma_3} P_{xx} dy. \quad (3.132)$$

Аналогично в выражении (3.131) интегралы по  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  от касательных напряжений  $P_{xy}$  равны нулю и поэтому

$$\int_{\sigma} P_{ny} dS = - \int_{\sigma_2} P_{yy} dx + \int_{\sigma_4} P_{yy} dx. \quad (3.133)$$

Подставляя теперь соответствующие формулы из (3.113), (3.114) в (3.132), (3.133), а их и уравнения (3.127), (3.129) в свою очередь в исходные выражения (3.124), (3.125), после простых преобразований для гидродинамических сил  $F_x$ ,  $F_y$  находим

$$F_x = - \int_{\sigma_1} (-P_1 - \rho u_1^2) dy + \int_{\sigma_3} (-P_3 + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x} - \rho u_3^2) dy; \quad (3.134)$$

$$F_y = - \int_{\sigma_2} (-P_2 + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial y}) dx + \int_{\sigma_4} (-P_4 + 2\mu \frac{\partial v_4}{\partial y}) dx - \int_{\sigma_3} (\rho u_3 v_3) dy. \quad (3.135)$$

Если теперь, как и ранее перейти к безразмерным величинам и ввести понятие коэффициентов гидродинамического сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$ , то после очевидных преобразований из (3.134) и (3.135) получим

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho u_1^2 \Omega} = 2 \int_{S_1} (C_{p1} + 1) dy - 2 \int_{S_3} \left[ C_{p3} - U_3^2 - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial U_3}{\partial x} \right] dy; \quad (3.136)$$

$$C_y = \frac{2F_y}{\rho u_1^2 \Omega} = 2 \int_{S_2} (C_{p2} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial V_2}{\partial y}) dx - 2 \int_{S_4} \left[ C_{p4} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial V_4}{\partial y} \right] dx - 2 \int_{S_3} (U_3 \cdot V_3) dy. \quad (3.137)$$

где  $C_{Pi} = \frac{2(P_i - P_\infty)}{\rho u_1^2}$ ;  $U_3 = \frac{u_3}{u_1}$ ;  $V_2 = \frac{v_2}{u_1}$ ;  $V_3 = \frac{v_3}{u_1}$ ;  $V_4 = \frac{v_4}{u_1}$  ;

$\Omega$  – характерная площадь.

Таким образом, решив численно задачу обтекания какого-либо тела или контура, то есть определив поля скорости и давления в узлах расчетной сетки, по формулам (3.136) и (3.137) определяются гидродинамические коэффициенты сил сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$ . Пример использования описанной методики определения коэффициентов гидродинамических сил сопротивления и подъемной силы рассмотрен далее в разделе 4.9.

## ГЛАВА 4

# ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ DNM-LF

### 4.1. Введение

Так как рассматриваемый метод основан на прямом численном решении интегральных уравнений сохранения массы и изменения количества движения вязкой несжимаемой жидкости, то он назван методом DNM-LF (Direct Numerical Method of Laminar Flow).

Настоящая глава посвящена иллюстрации применения этого метода для решения конкретных задач гидромеханики и теплообмена в случае ламинарных режимов течения. Дискретизация исходных интегральных соотношений для массы, количества движения и энергии реализуется на разнесенных сетках с использованием «метода контрольного объема» в переменных скорость-давление. Развиваемый метод применим не только к анализу однородных жидкостей, но он обобщен и на случай стратифицированной по плотности жидкости в рамках приближения Буссинеска. Полученная в итоге замкнутая система разностных алгебраических уравнений для давления, температуры и компонентов скорости решается итерационным методом на установление. Характерная особенность метода решения уравнений движения связана с выводом уравнения типа Пуассона для определения давления путем подстановки выражений для компонентов скорости из уравнений движения в уравнение неразрывности. Таким образом, уравнение Пуассона для давления как бы заменяет уравнение неразрывности, и задача становится замкнутой.

С помощью рассматриваемого метода численно решается ряд двумерных задач, как тестовых, так и оригинальных, с целью проверки эффективности численной схемы, демонстрации методики расчетов и алгоритма решения системы исходных уравнений движения жидкости. Подробно рассмотрены задачи по расчету течения на начальном участке плоского прямолинейного канала, течение в каналах с внезапным односторонним сужением или расширением их поперечного сечения, течения в каналах с геометрической неоднородностью в виде прямоугольных уступов или каверн, расположенных на стенке канала,

задачи о вынужденной и термогравитационной конвекции в замкнутых квадратных или прямоугольных областях, а также задачи внешнего обтекания цилиндров с квадратным или прямоугольным поперечным сечением. Заметим, что хотя в качестве примеров решаются двумерные задачи, но данный метод не имеет ограничения на размерность задачи, так как в нем используются естественные физические переменные скорость-давление.

При подборе задач мы старались показать универсальность, достоверность и возможности метода, связанные с его сходимостью, точностью и экономичностью. Именно поэтому в первую очередь рассматриваются задачи, для которых уже известны результаты численных решений, полученных иными методами другими авторами. При этом основное внимание уделено не разностным схемам и их разновидностям, а законам сохранения, которые в нашем случае автоматически приводят к консервативным разностным схемам.

Большинство рассматриваемых задач относится к классу отрывных нестационарных течений, содержащих рециркуляционные и вихревые области течения. А такие течения принадлежат к сложному виду движения реальных жидкостей. Полученные ранее решения некоторых из этих задач другими авторами часто выполнены в переменных функция тока – вихрь и имеют сильные ограничения на основные параметры течения. Наш подход позволяет расширить диапазон этих определяющих параметров.

При рассмотрении примеров расчета различных течений принята определенная форма их представления. Прежде всего, по возможности, используются общепринятые обозначения, согласованные с теми, которые встречались ранее. Каждая задача состоит из четырех основных разделов:

- – вводная часть;
- – постановка задачи;
- – особенности численного решения;
- – результаты расчетов и их обсуждение.

Раздел, относящийся к особенностям численного решения, подробно рассматривается лишь применительно к одной динамической и одной тепловой задачам, а в остальных задачах, в силу его универсальности, он уже не повторяется. Основные результаты численных расчетов полей скорости, давления и температуры обсуждаются в зависимости от значений основных безразмерных параметров задачи – чисел Рейнольдса, Грасгофа, Прандтля, Рэлея и геометрических параметров задачи. При этом для получения решения стационарной задачи, описывающей равновесное состояние, рассматривается решение нестационарных уравнений на установление развивающегося во времени процесса, расчет которого часто оказывается проще, чем прямой расчет равновесного состояния. А так как по предположению источники члены и граничные условия обычно не

зависят от времени, то естественно искомые переменные  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $T$ , зависящие от  $(x, y, t)$  со временем будут меняться все медленнее и в пределе при  $t \rightarrow \infty$  распределение скоростей  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$  давления  $p(x, y, t)$  и температуры  $T(x, y, t)$  выходят на равновесное распределение  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $p(x, y)$ ,  $T(x, y)$ . Поэтому будем решать нестационарную задачу до того момента времени  $t$ , пока ее решение перестанет меняться в пределах заданной точности  $\varepsilon$ . Естественно, что это относится к решению стационарных задач. При рассмотрении отрывных нестационарных течений это условие не выполняется, и решение не выходит на установившийся режим. В этом случае критерием окончания решения служит заданное время счета и изучается эволюция параметров течения во времени.

С помощью предлагаемого метода выполнено исследование основных характеристик течений различного класса при умеренных числах Рейнольдса. Одновременно с развитием и тестированием данного метода, для обработки результатов расчета и построения графической информации, широко используются современная компьютерная техника в форме таких стандартных пакетов как SURFER, ORIGIN, TECPLOT.

## 4.2. Краткое изложение прямого численного метода DNM-LF для решения системы уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости

В данном разделе в краткой форме рассматривается версия метода DNM-LF применительно к расчету ламинарных течений несжимаемой жидкости. Особенность данного метода состоит в том, что для описания движения жидкости используется система не дифференциальных уравнений Навье-Стокса, а система основных интегральных законов сохранения массы и импульса, записанных в конечно-объемной форме для произвольного объема  $\tau$ , выделенного в жидкости и ограниченного поверхностью  $\sigma$ . Эти интегральные соотношения в общепринятых обозначениях записываются в виде [42, 132]

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \vec{v} d\tau = \iiint_{\tau} \text{div} \Pi d\tau + \iiint_{\tau} \vec{F} d\tau. \quad (4.2)$$

Здесь  $\vec{v}$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\Pi$  – тензор вязких напряжений,  $p$  – давление,  $\vec{F}$  – вектор массовых сил. Так как эти уравнения справедливы для любого контрольного объема  $\tau$ , то их можно применить и



для произвольной ячейки расчетной области, а это открывает возможность построения дискретного аналога системы интегральных законов сохранения.

При решении системы интегральных уравнений (4.1), (4.2) применяется формула Ньютона для тензора напряжений и метод конечных разностей, а для построения их дискретных аналогов используется метод «контрольного объема» и разнесенные сетки. Такой подход оказывается ключевым при совершенствовании расчетных алгоритмов в вопросе согласования полей скорости и давления [212]. Для реализации разнесенных сеток вводится в рассмотрение три пространственные сетки. Основная неравномерная сетка  $S_0(x_j, y_i)$  и две вспомогательные полуцелые сетки  $S_1$  и  $S_2$ . Кроме того вводится временная сетка  $S_t(t_n)$ . Использование разнесенной сетки позволяет согласовать значения скорости и давления в соседних узлах, что в свою очередь позволяет избежать появления осцилляций в решении уравнений движения. Структура введенной сетки специфическая и показана на рис. 3.5. В соответствии с выбранным сеточным шаблоном вводятся следующие компактные обозначения

$$\begin{aligned} p(x_j, y_i, \tau^n) &= p_{j,i}^n, \\ u((j+1/2) \cdot \Delta x, i \cdot \Delta y, n \cdot \Delta \tau) &= u_{j+1/2,i}^n, \\ v(j \cdot \Delta x, (i+1/2) \cdot \Delta y, n \cdot \Delta \tau) &= v_{j,i+1/2}^n. \end{aligned}$$

Таким образом, структура сетки здесь аналогична структуре в методе МАС [24, 212], когда сеточные индексы, связанные с определенными зависимыми переменными, смещены.

Для построения разностных аналогов законов сохранения массы (4.1) и изменения количества движения (4.2) в случае несжимаемой жидкости используются явная схема первого порядка точности для производных по времени и неявная схема второго порядка точности для производных по пространству. При этом диффузионные слагаемые аппроксимируются по схеме с центральными разностями, а для конвективных слагаемых используются схемы с односторонними разностями «против потока». Особенностью дискретизации является то, что конечно-разностная аппроксимация центрируется в соответствии с выбранным шаблоном. При этом сеточные индексы для зависимых переменных оказываются сдвинутыми.

Далее, в целях удобства, вводятся характерные масштабы длины  $L$ , скорости  $u_0$ , давления  $p_0$ , времени  $t_0$  и как обычно переходим к следующим безразмерным переменным

$$X = x/L, \quad Y = y/L, \quad U = u/u_0, \quad V = v/u_0, \quad P = p/p_0, \quad \tau = t \cdot u_0/L.$$

Подстановка конечно-разностных формул в исходную систему уравнений движения позволяет записать их дискретные аналоги для  $X$  и  $Y$  направлений.

Эти уравнения, после соответствующей итерационной линеаризации и группировки слагаемых, дополненные уравнением для определения давления, полученного из уравнения неразрывности, в принятых безразмерных величинах, имеют следующий конечно-разностный вид:

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P, \quad (4.3)$$

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = [\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U] / d_{j+1/2,i}^U, \quad (4.4)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V, \quad (4.5)$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j,i}$ ,  $d_{j+1/2,i}$ ,  $d_{j,i+1/2}$ ,  $c_1$ ,  $c_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$  с различными верхними индексами, выражения  $G$  с верхними индексами  $U$ ,  $V$  и свободный член  $f^P$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются по определенным алгебраическим формулам (3.38).

Система уравнений (4.3) - (4.5) связывает давление со скоростями на  $(n+1)$  слое по времени и представляет собой универсальный дискретный аналог системы общих уравнений движения несжимаемой жидкости и может быть решена итерационным методом на установление.

Можно показать, что используемая конечно-разностная схема устойчива [24]. На каждом шаге по времени контролируется сходимость расчетов как основных уравнений, так и граничных условий. Алгоритм решения на установление позволяет получить как стационарное решение, так и исследовать динамику течений во времени.

Важным моментом расчетов является переход в граничных условиях для  $U$  и  $V$  к конечным разностям и контроль за выполнением уравнения неразрывности. Описанный алгоритм решения системы двумерных нестационарных уравнений движения реализован в виде пакета компьютерных программ, который позволяет решать эволюционную задачу гидродинамики ламинарных течений, при заданных начально-краевых условиях рассматриваемой задачи.

## 4.3. Течение на начальном участке плоского канала

### 4.3.1. Постановка задачи

В качестве примера применения рассматриваемого численного метода DNM-LF для решения полной системы двумерных нестационарных интегральных уравнений ламинарного движения несжимаемой жидкости обратимся к решению задачи о развитии профиля скорости на начальном участке в плоском канале шириной  $h$  [57].

Интерес к этой задаче обусловлен тем, что она имеет простейшую геометрию и в то же время содержит всю сложность и особенности решения полных уравнений гидродинамики [157, 226] включая вопросы устойчивости [357]. Кроме того, на установившемся участке канала, рассматриваемая задача имеет точное аналитическое решение в виде известного параболического профиля Пуазейля, что позволяет надежно оценить качество численной схемы и точность метода.

В целом следует отметить, что моделированию ламинарных течений в плоском канале посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ. Хороший обзор ранних работ этого плана приведен в [174], где много внимания уделяется вопросам неустойчивости течения Пуазейля..

Рассмотрим ламинарное течение несжимаемой вязкой жидкости в плоском прямолинейном канале. Принципиальная схема вынужденного течения в канале и конфигурация расчетной области  $ABCD$ , на которой заданы граничные условия для компонентов скорости, представлены на рис. 4.1. Начало введенной декартовой системы координат находится в левом нижнем углу прямоугольной области  $ABCD$ .

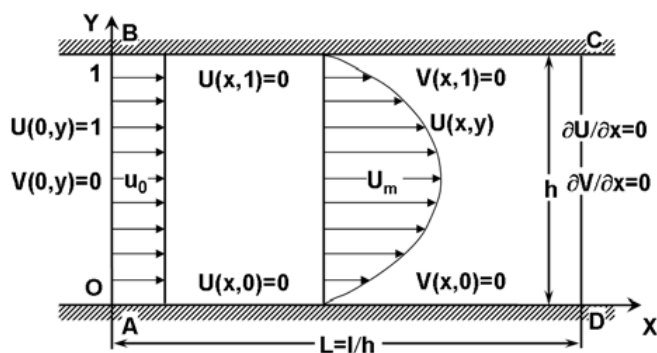


Рис. 4.1. Принципиальная схема течения в плоском прямолинейном канале

Для решения рассматриваемой задачи будем использовать прямой метод DNM-LF численного решения системы интегральных законов сохранения массы и изменения количества движения, записанных в интегральной форме в виде (4.1), (4.2) для произвольного объема  $\tau$ , выделенного в жидкости и ограниченного поверхностью  $\sigma$ . Этот метод подробно рассмотрен выше. В соответствии с ним система исходных нестационарных интегральных уравнений решается методом конечных разностей на установление. Конечно-разностная форма интегральных уравнений движения получена в виде системы уравнений (4.3) - (4.5). Для их решения разработана соответствующая компьютерная

программа. Чтобы ею воспользоваться необходимо ввести характерные масштабы рассматриваемой задачи и перейти к безразмерным величинам.

В рассматриваемом случае течения жидкости в прямолинейном канале в качестве масштаба длины принимается ширина канала  $h$ , за масштаб скорости принята среднерасходная скорость в канале  $u_0 = Q/h$ , за масштаб времени принята величина  $h/u_0$ , а за масштаб давления принят скоростной напор  $\rho_0 u_0^2$ . В безразмерных величинах  $U = u/u_0$ ,  $V = v/u_0$ ,  $X = x/h$ ,  $Y = y/h$ ,  $\tau = tu_0/h$ ,  $P = p/\rho_0 u_0^2$  система нестационарных двумерных уравнений движения с постоянными плотностью  $\rho_0$  и кинематической вязкостью  $\nu$  преобразуются к системе приведенных выше трех универсальных разностных алгебраических уравнений (4.3) – (4.5) для давления и двух компонентов скорости, которые и подлежат численному решению.

Характерной особенностью напорного течения в каналах является то, что движение жидкости происходит под действием продольного перепада давления, который на установившемся участке течения постоянен  $\partial P/\partial X = const$ . Однако, заданной величиной в рассматриваемом классе течений примем не перепад давления, а расход жидкости  $Q = u_0 \cdot h$  через поперечное сечение канала. Следовательно, при такой постановке задачи число Рейнольдса будет задано, а давление должно определяться в процессе решения.

Для завершения постановки задачи должны быть заданы начальные и граничные условия на всех границах расчетной области. На входе в расчетную область используется условие невозмущенного потока в виде  $U|_{AB} = 1$ ,  $V|_{AB} = 0$ .

На верхней стенке канала  $BC$  и на нижней  $AD$  выполняются очевидные условия прилипания  $U|_{\Gamma} = 0$  и непротекания  $V|_{\Gamma} = 0$ , где  $\Gamma$  – твердая граница. При постановке граничного условия в сечении  $CD$ , мы сталкиваемся с проблемой моделирования граничного условия на бесконечности. В данном случае используются простейшие граничные условия в виде традиционных условий свободного вытекания Неймана.

При постановке начальных условий будем предполагать, что вертикальная скорость  $V$  и давление  $P$  во всей области равны нулю, а горизонтальная скорость  $U$  имеет равномерный однородный профиль  $U(0, X, Y) = 1$ .

Граничные условия для давления в постановке задачи отсутствуют. Но при нашем подходе необходимые значения давления в граничных узлах определяются с помощью уравнений движения в универсальной дискретной форме в комбинации с граничными условиями для

скоростей. По существу они представляют собой условия Неймана  $\partial P / \partial n|_G = \mu_T$ , где  $n$ -нормаль к границе области  $G$ , а  $\mu_T$  - известная величина.

Таким образом, начальные и граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

Начальные условия:  $U = 1$ ;  $V = 0$ ;  $P = 0$ ,

Граничные условия:  $U|_{AB} = 1$ ;  $U|_{BC} = 0$ ;  $U|_{AD} = 0$ ;  $\partial U / \partial X|_{CD} = 0$ ;  
 $V|_{AB} = 0$ ;  $V|_{BC} = 0$ ;  $V|_{AD} = 0$ ;  $\partial V / \partial X|_{CD} = 0$ ;

Сформулированная задача о течении вязкой жидкости на начальном участке плоского прямолинейного канала решалась с помощью разработанной компьютерной программы PC-LF.

Размер шагов по  $X$  и  $Y$  был принят постоянным ( $\Delta X = 0,04$ ,  $\Delta Y = 0,02$ ). Основные расчеты были выполнены на сетке размером  $2500 \times 50$ . Размер шага по времени определялся согласно критерию Куранта - Фридриха - Леви (КФЛ) -  $\Delta t \cdot Re \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \leq 0,25$ .

#### 4.3.2. Результаты расчетов и их обсуждение

Некоторые характерные результаты расчетов распределения полей продольной и поперечной скоростей, длины начального участка и поля давления представлены ниже на соответствующих рисунках. Как и следовало ожидать, расчеты показали, что в ближней от входа в канал области профиль скорости зависит от координаты  $X$ . Этот участок канала принято называть участком гидродинамической стабилизации. Критерием его протяженности может служить условие [157]

$$(1 - U_m / U_{mp}) \leq \varepsilon, \quad (4.6)$$

где  $\varepsilon$  – заданная малая величина,  $U_m$  - локальная осевая скорость в канале,  $U_{mp} = 6(1 - Y)Y|_{Y=0,5} = 1,5$  – осевая скорость на установившемся участке течения, соответствующая профилю Пуазейля.

На рис. 4.2 в качестве примера представлены результаты расчетов профилей горизонтальной (слева) и вертикальной скорости (справа) в различных сечениях канала на участке гидродинамической стабилизации при числе  $Re=100$ . Приведенные на рисунке расчетные профили соответствуют различным расстояниям поперечных сечений от входа в канал. Координату  $X$  для каждого профиля можно получить умножив его номер на соответствующий шаг  $h = L/N$ , где  $L$ - длина расчетной области, а  $N$  – число расчетных точек. Анализ этих результатов показывает, что непосредственно вблизи от входа в канал профиль продольной скорости

имеет два экстремума и в поле течения существует ядро с постоянным значением горизонтальной скорости. С удалением от входного сечения вблизи стенок развиваются пограничные слои и профиль горизонтальной скорости  $U$  постепенно эволюционирует в параболу, которая реализуется в конце участка стабилизации в результате соединения пограничных слоев. В данном методе в отличие от приближения пограничного слоя рассчитывается и вертикальная скорость течения  $V$ , которая как видно из рисунка 4.2 справа имеет место вблизи входа в канал, а затем быстро стремиться к нулю.

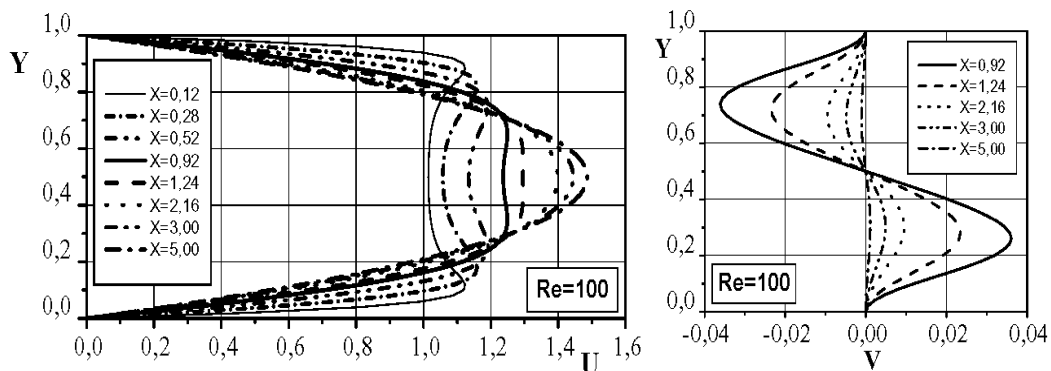


Рис. 4.2. Расчетное распределение горизонтальной ( $U$ ) и вертикальной скоростей ( $V$ ) на начальном участке плоского канала в различных поперечных сечениях ( $Re=100$ )

Расчетные профили для горизонтальных и вертикальных скоростей сравнивались с аналогичными расчетами полученными другим методом [157], когда исходные уравнения записываются в переменных функция тока-вихрь. Для приведенных там данных расчета ( $Re = 1000$ ) наблюдается хорошее соответствие с нашими результатами. Отметим, что наш метод позволяет охватить более широкий диапазон изменения чисел Рейнольдса. Кроме того, здесь получены профили продольной скорости в самом начале участка стабилизации при  $X \leq 0,9$ , которые ранее нам не встречались

Выполненные численные расчеты безразмерной осевой скорости  $U_m$  в центральной плоскости канала в зависимости от расстояния  $X$  при различных числах Рейнольдса приведены на рис. 4.3. Они наглядно иллюстрируют асимптотический характер приближения расчетных профилей к параболе Пуазейля.

Расчеты показывают, что длина начального участка  $X_n$  при различных числах Рейнольдса, которая определялась из условия (4.6) при  $\varepsilon \leq 1\%$ , хорошо аппроксимируется линейной функцией  $X_n(Re) = 0,06 \cdot Re$ .

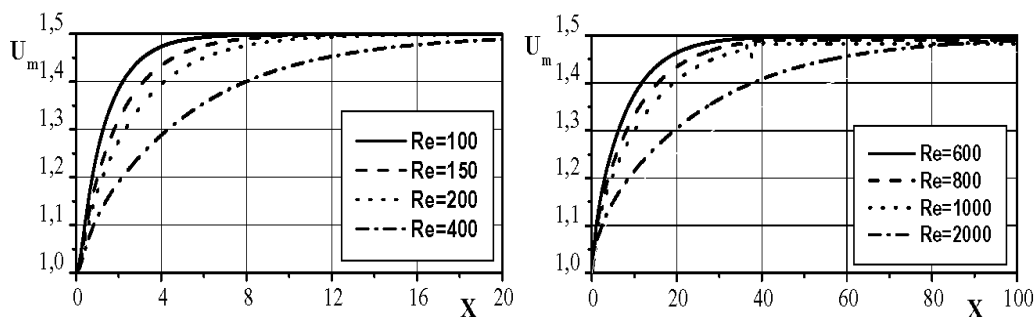


Рис. 4.3. Расчетные зависимости безразмерной осевой скорости  $U_m$  от расстояния  $X$  на участке стабилизации течения при различных числах Рейнольдса

Полученное расчетное значение длины начального участка  $X_n$  при  $Re = 1000$  равно 60. Значение  $X_n$  по данным приведенным у Г. Шлихтинга [226], полученным с использованием зависимостей теории пограничного слоя для числа  $Re = 2000$  равно 80.

Поскольку исходные уравнения движения записаны и решаются в переменных скорость-давление, то это позволяет в процессе решения сразу рассчитывать и поле давления в канале, а следовательно и коэффициент сопротивления  $\lambda$ . В качестве примера на рис. 4.4 представлено расчетное распределение коэффициента давления  $C_p = 2(\Delta p)/(\rho u_0^2)$  вдоль центральной плоскости канала в зависимости от расстояния  $X$  при различных числах Рейнольдса.

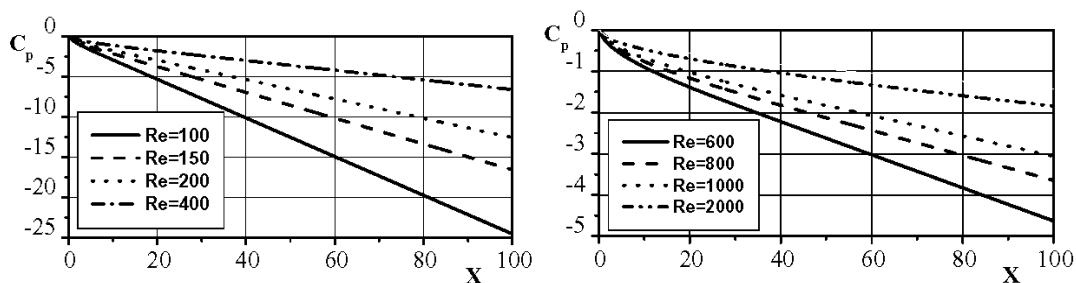


Рис. 4.4. Расчетное распределение коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси  $X$  при различных значениях числа Рейнольдса

Расчеты показывают, что давление линейно убывает вдоль канала. При этом давление в поперечном направлении  $Y$ , как и следовало ожидать, в каждом сечении  $X$  постоянно, за исключением непосредственной близости от входа в канал, где наблюдается перестройка как давления, так и скорости. Расчетные значения коэффициента сопротивления, при  $Re=100$  приведенные на рис. 4.4 слева хорошо согласуются с формулой (1.113) полученной выше аналитически

$$\lambda=24/Re.$$

В последнее время значительно возрос интерес к прямому математическому моделированию устойчивости течений, так как прогресс в области компьютерной гидродинамики дал возможность исследовать динамику возмущений на основе прямого решения нестационарных уравнений движения в форме Навье-Стокса при различных числах Рейнольдса. В связи с этим нами были выполнены методические расчеты характеристик параметров потока в зависимости от времени в плоском прямолинейном канале для широкого диапазона чисел Рейнольдса. В результате наряду с традиционными характеристиками течения была изучена динамика компонентов скорости и давления как функции от времени в выбранных реперных точках. В качестве примера на рисунке 4.5 представлены результаты расчетов эволюции поперечной  $V$  (слева) и продольной скорости  $U$  (справа) в зависимости от времени в реперной точке с координатами  $X = 100$ ,  $Y=0,2$ . при различных умеренных числах Рейнольдса.

Эти результаты наглядно показывают возможность прямого численного способа исследования устойчивости течения в зависимости от числа Рейнольдса. Полученные данные, как и ожидалось, говорят о том, что при числах  $Re$  меньших его критического значения  $Re^*$ , течение остается устойчивым, а колебания значений параметров скорости  $V$  и  $U$  со временем выходят на установившийся режим, как показано на рис. 4.5.

Однако из экспериментов хорошо известно, что рост числа Рейнольдса приводит к потере устойчивости течения и его переходу в турбулентный режим. Эту тенденцию иллюстрирует нижний фрагмент на рисунке 4.5 для  $Re=1000$ . В связи с этим использовать нестационарные уравнения Навье-Стокса для моделирования и расчета течения в плоском канале при числах Рейнольдса превышающих его критическое значение нельзя, так как потеря устойчивости течения, появление значительных пульсаций скорости и возникновение вихревых структур приводят к изменению напряженного состояния в движущейся жидкости и гипотеза о линейной связи тензора напряжений с тензором скоростей деформаций перестает работать.

В заключение отметим, что с помощью прямого численного метода DNM - LF решена задача о течении жидкости на начальном участке стабилизации течения в плоском прямолинейном канале. Расчеты показали, что с ростом числа Рейнольдса длина участка стабилизации увеличивается, а профиль продольной скорости эволюционирует в параболу Пуазейля.

Достоверность и точность расчетов оценивалась путем контроля выполнения уравнения неразрывности и анализа критерия (4.6).



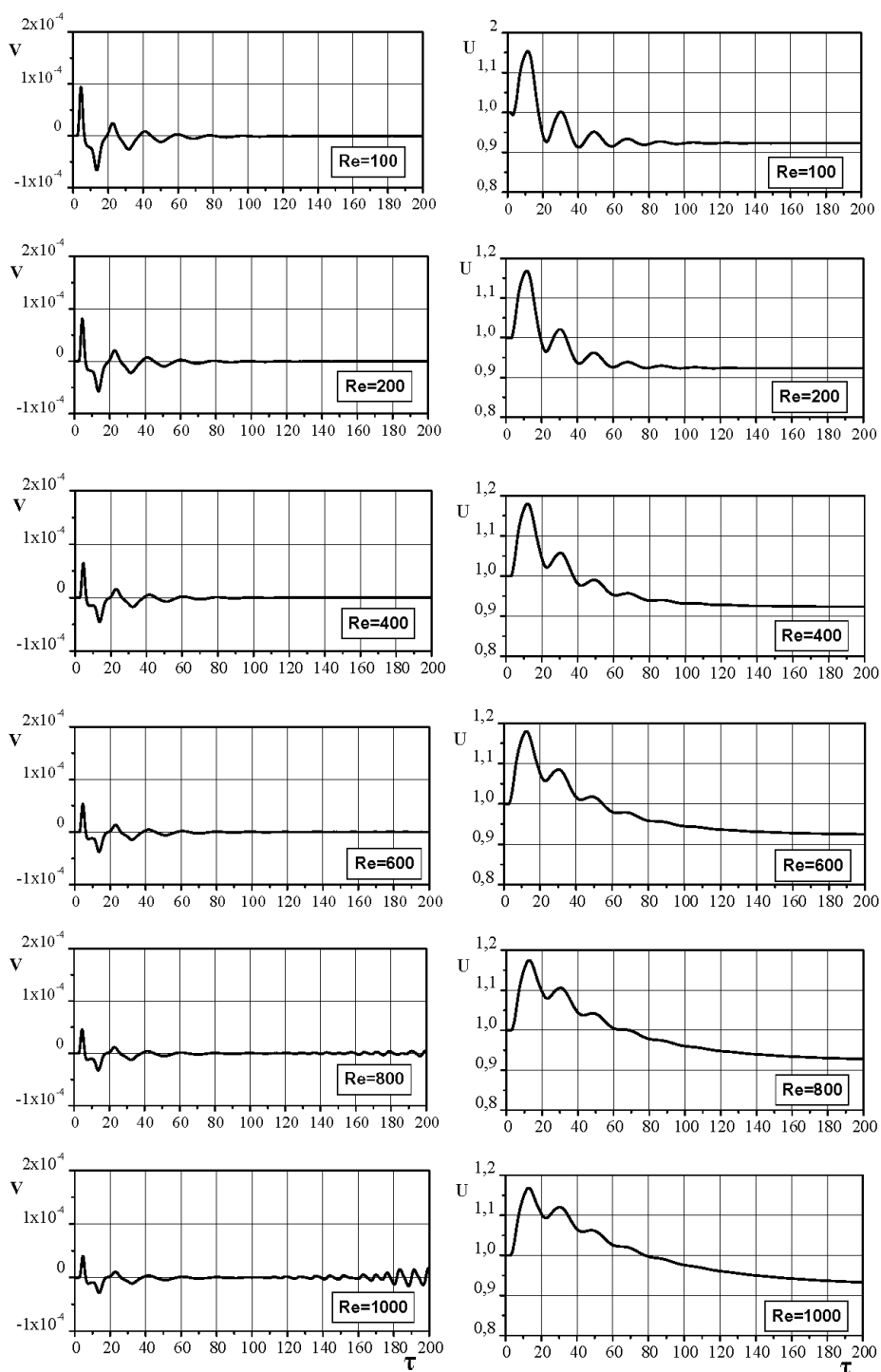


Рис. 4.5. Зависимость поперечной ( $V$ ) и продольной ( $U$ ) компонент скорости от времени в реперной точке 2 при различных числах Рейнольдса

Кроме того показано, что используемая численная схема позволяет получить динамику параметров течения в зависимости от времени. При этом течение теряет свою устойчивость при числах  $Re > Re_{кр.} = 2000$ , но в турбулентный режим не переходит. Это свидетельствует о том, что в рамках двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса, использующих линейную зависимость тензора напряжений в жидкости от тензора скоростей деформации, нельзя получить адекватное описание переходных и турбулентных режимов течения.

## **4.4. Вынужденная конвекция жидкости в замкнутой квадратной и прямоугольной полости под воздействием верхней движущейся крышки**

### **4.4.1. Введение**

В качестве второго примера тестирования метода DNM-LF обратимся к модельной задаче течения в квадратной и прямоугольной полости под воздействием движущейся верхней крышки. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что это течение обладает набором структурных особенностей возвратных и рециркуляционных вихревых течений. Кроме того, локализация течения в прямоугольной расчетной области практически снимает вопрос о постановке граничных условий для скорости в силу очевидных условий прилипания и непротекания жидкости на границах расчетной области. Поэтому эту задачу решали многие авторы как в переменных функция тока – вихрь ( $\Psi - \Omega$ ), так и в переменных скорость-давление [44, 52].

Первоначально для решения этой задачи применялись явные схемы решения уравнений Навье-Стокса в переменных функция тока – вихрь ( $\Psi - \Omega$ ), а аппроксимация производных осуществлялась с помощью центральных разностей. При этом аппроксимация граничных условий на твердой стенке для завихренности удовлетворяла условию Тома [178], то есть имела первый порядок точности. Установившиеся решения задачи были получены лишь при низких числах Рейнольдса ( $Re < 100$ ) поскольку с ростом числа  $Re$  развивалась вычислительная неустойчивость, свойственная центрально-разностным схемам.

Kawaguti M. [290], используя простейший компьютер (1961), получил численное решение этой задачи в переменных ( $\Psi - \Omega$ ) для числа Рейнольдса равного  $Re = 64$ . Для числа  $Re = 128$  его решение уже разваливалось. Burggraf O.R. [249] подробно исследовал эту задачу также в переменных ( $\Psi - \Omega$ ) и получил результаты при числах  $Re \leq 400$ .

В дальнейшем улучшить сходимость расчетной процедуры удалось благодаря использованию аппроксимации конвективных слагаемых односторонними разностями “против потока” [178]. Однако, из-за появления при этом значительной величины численной вязкости, удовлетворительные результаты получились лишь до чисел  $Re < 300$ . Другие исследователи Bozeman J.D.[239], Атиас, Вольфштейн, Израэль [8], S. Abdalah [229, 230], Davis D.V., Mallison G.D. [265], Белов И.А., Исаев С.А. [19], Приходько А.А. [165] также использовали эту задачу в качестве модельной для проверки новых численных схем. Это вполне понятно, так как по этой задаче имеются результаты подробных численных расчетов [249] и качественные экспериментальные данные Mills R.D. [327], Pan F., Acrivos A. [335]. Позднее, более успешным оказалось использование нестационарных уравнений Навье-Стокса и их решение на установление методом «переменных направлений» [157, 221, 338, 263]. Такой подход позволил получить установившиеся решения задачи уже до чисел  $Re \leq 1000$ .

В работе [95] эта задача решалась в переменных скорость – давление  $(V - P)$ . Авторы отмечают сложность расчета давления. Для его определения они использовали уравнение Пуассона в форме, которая получается применением оператора дивергенции к уравнениям количества движения.

В качестве граничных условий для давления использовались однородные условия Неймана  $\partial P / \partial n = 0$ . Возникающие при этом сложности существования сходящегося решения обсуждались в работах [95, 229, 230, 270], где была показана необходимость удовлетворить в этом случае некоторому интегральному условию.

В целом, анализ рассмотренных и других решений показывает, что в угловых зонах полости имеются вихревые особенности, имеющие тонкую структуру, расчет которой связан с определенными вычислительными трудностями. Качество моделирования и расчета этих вихревых структур зависит от особенностей используемой разностной схемы и числа Рейнольдса. Дальнейший прогресс в этом направлении в основном шел по пути использования неравномерных сеток с увеличением и сгущением узлов в зонах с большим градиентом искомых переменных.

Рассмотренные работы не исчерпывают полный перечень численных исследований этой задачи. К ним можно добавить более поздние работы [104, 163]. Таким образом численное решение задачи о вынужденной конвекции в квадратной полости с движущейся верхней крышкой на протяжении многих лет служит объектом верификации новых и модифицированных разностных схем. Поэтому обратимся к решению этой задачи используя численный метод DNM-LF.

#### 4.4.2. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную задачу о движении вязкой жидкости в замкнутой квадратной или прямоугольной полости с движущейся верхней крышкой. Такое течение относится к классу вынужденных конвективных движений жидкости. В общем случае горизонтальный размер расчетной области  $ABCD$  обозначим через  $l$ , а вертикальный через  $h$ . Принципиальная схема рассматриваемого течения и принятые обозначения представлены на рис. 4.6. Начало декартовой прямоугольной системы координат  $O$  расположено в левом нижнем углу. При  $l = h$  имеем квадратную область ( $L = l/h = 1$ ).

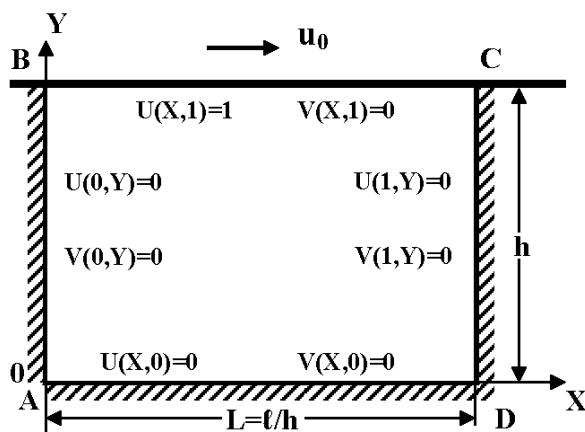


Рис. 4.6. Область интегрирования и граничные условия

Специфика задачи состоит в том, что три граничные стенки  $AB$ ,  $AD$ ,  $DC$  расчетной области  $ABCD$  неподвижны, а четвертая верхняя стенка  $BC$  движется с постоянной скоростью  $u_0$  слева направо, как показано на рисунке 4.6. Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  жидкость всюду покоится, а при  $t > 0$  верхняя крышка  $BC$  приходит в движение со скоростью  $u_0$ . Согласно методу DNM-LF движение жидкости будем описывать нестационарными двумерными интегральными уравнениями (4.1) и (4.2), выражающими законы сохранения массы и изменения количества движения. Для удобства решения целесообразно перейти к безразмерным величинам.

В рассматриваемом случае вынужденной конвекции жидкости в квадратной или прямоугольной области выберем вертикальный размер полости  $h$  за масштаб длины, скорость движения верхней крышки  $u_0$  примем за масштаб скорости, за масштаб времени примем величину  $t_0 = h/u_0$ , а за масштаб давления примем скоростной напор  $\rho_0 u_0^2$ . Тогда в безразмерных величинах

$$U = u / u_0, \quad V = v / u_0, \quad X = x / h, \quad Y = y / h, \quad \tau = t u_0 / h, \quad P = p / \rho_0 u_0^2$$

дискретный аналог исходной системы уравнений движения жидкости (4.1) и (4.2), построенный на разнесенных сетках методом контрольного объема, как было показано, имеет вид:

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P, \quad (4.7)$$

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = [\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U] / d_{j+1/2,i}^U, \quad (4.8)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V, \quad (4.9)$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}^U$ ,  $d_{j,i+1/2}^V$ ,  $c_1$ ,  $c_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$ , выражения  $G$  с верхними индексами  $U$ ,  $V$  и свободный член  $f^P$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются по определенным алгебраическим формулам (3.38).

Приведенная система конечно-разностных уравнений связывает между собой искомые компоненты скорости и давления на  $(n+1)$  временном слое. Для ее решения разработана универсальная компьютерная программа KB-LF. Основным параметром задачи является число Рейнольдса  $Re = u_0 h / \nu$  и длина полости  $L = l/h$ .

Для завершения постановки задачи должны быть заданы начальные и граничные условия. Начальные условия задачи уже обсуждались выше, а граничные условия состоят в том, что на твердых поверхностях должны выполняться очевидные условия прилипания и непротекания жидкости. Следовательно на границах области имеем:

$$\begin{aligned} U|_{AB} = 0; \quad U|_{BC} = 1; \quad U|_{CD} = 0; \quad U|_{AD} = 0; \\ V|_{AB} = 0; \quad V|_{BC} = 0; \quad V|_{CD} = 0; \quad V|_{AD} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Граничные условия для давления определяются как и раньше из уравнений движения.

В процессе решения системы уравнений (4.7) - (4.9) при граничных условиях (4.10) необходимо рассчитать картину полей скорости и давления в зависимости от числа Рейнольдса при заданном  $L$ .

#### 4.4.3. Результаты расчетов и их обсуждение для квадратной полости

Некоторые результаты численного расчета структуры вынужденного течения однородной жидкости в квадратной полости с  $L = 1$  и движущейся верхней крышкой представлены ниже на соответствующих рисунках. Основные численные расчеты были выполнены на равномерной сетке  $50 \times 50$ , с шагом  $\Delta X = \Delta Y = 0,02$ .

В качестве примера на рис. 4.7 приведены результаты расчетов векторного поля скоростей течения жидкости в квадратной полости при четырех различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 1000, 2000$ ). Эти рисунки наглядно демонстрируют влияние числа Рейнольдса на кинематическую структуру течения в квадратной полости с движущейся верхней крышкой.

Из рисунков видно, что в полости образуется большая вихревая область при всех четырех значениях числа Рейнольдса. Зона с наибольшей интенсивностью течения расположена в верхней части расчетной области,

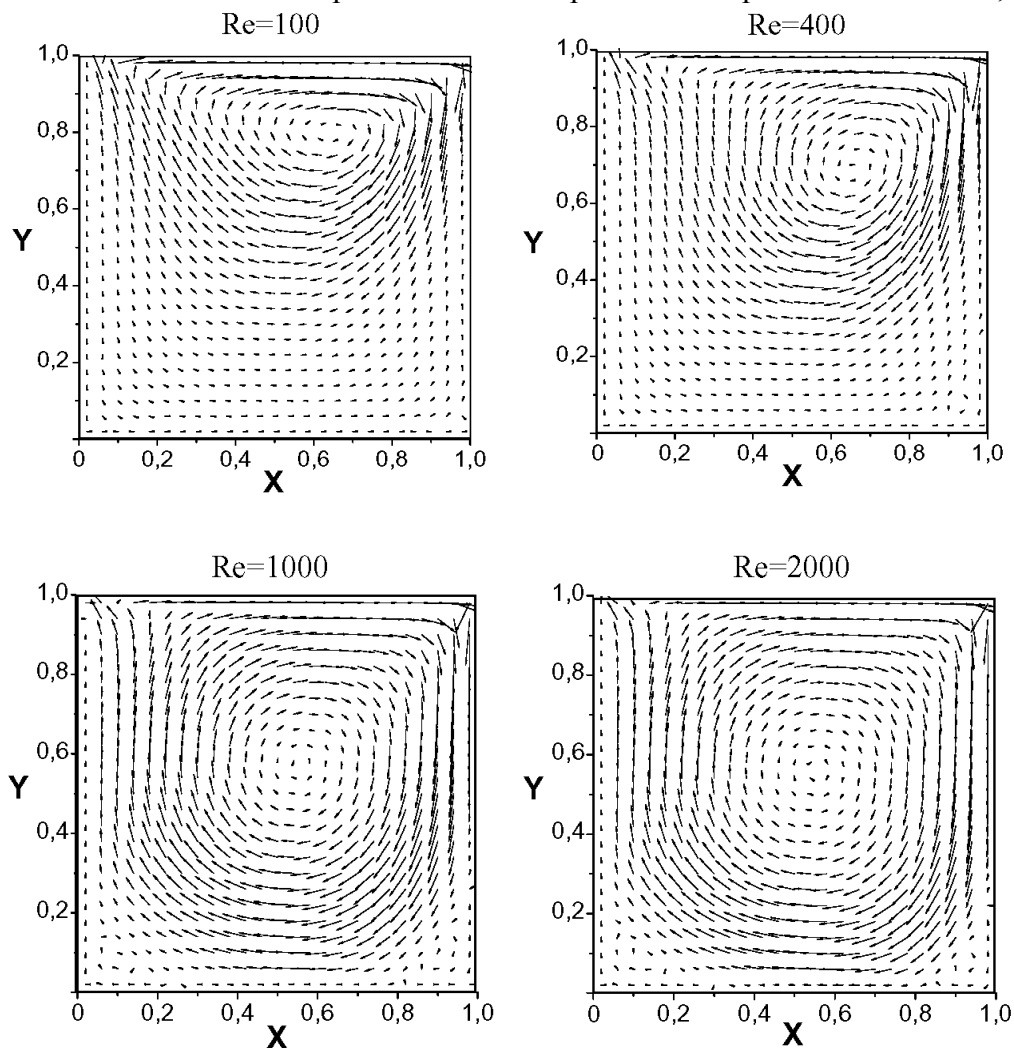


Рис. 4.7. Расчетное векторное поле скоростей в квадратной полости при четырех различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 1000, 2000$ )

прилегающей к движущейся границе  $BC$ . Здесь жидкость увлекается крышкой вследствие вязкого прилипания. Далее расчеты показывают, что в силу условия неразрывности, внутри самой полости образуется течение направленное вниз у правой стенки  $CD$  и восходящее вверх – у левой стенки  $AB$ . Из-за движения верхней крышки слева-направо, общая картина вихревого поля скоростей несимметрична. На приведенных рисунках видно, что центр вихря (точка стагнации) смещается вправо и находится выше геометрического центра полости. С увеличением числа Рейнольдса происходит смещение центра вихря вниз до чисел  $Re=1000$ , а при  $Re=2000$  визуальна картина течения почти такая же как и при  $Re=1000$ .

На рис. 4.8 при тех же четырех числах Рейнольдса представлены расчетные изолинии равных скоростей, которые подобно функциям тока иллюстрируют интенсивность структуры течения в полости. Полученная расчетом детальная кинематическая структура течения согласуется с ранее полученными результатами в работах [90, 327]. Интересно отметить, что согласно многим численным решениям в нижних углах полости даже при числах  $Re=1$  появляются вторичные вихревые течения. В связи с этим отметим, что в наших численных исследованиях эти вторичные вихри обнаруживаются лишь при числе  $Re=2000$ . при этом скорости движения в этих зонах очень малы.

Поскольку исходные уравнения движения записаны и решаются в переменных скорость-давление, то это позволяет в процессе решения сразу рассчитывать поле давления в полости.

Однако для этого, при решении уравнений для законов сохранения массы и изменения количества движения, необходимо преодолеть определенные математические трудности для получения специального уравнения Пуассона по определению давления. В литературе для этих целей известны разные подходы. Например, использование уравнения для поправок [158], использование различных штрафных функций [196], дополнение в уравнении неразрывности нестационарного члена [256] и другие [165]. В последние годы для несжимаемой жидкости хорошую работоспособность показал алгоритм SIMPLE, который и используется нами.

На рис. 4.9 приведены расчетные изобары поля давления. Картина приведенных изолиний давления представляет особый интерес, так как она получена в результате решения точных двумерных уравнений Навье-Стокса и может служить основой для верификации приближенных решений.

Для оценки достоверности получаемых результатов был проведен сравнительный анализ рассчитанных полей давления с аналогичными данными приведенными в работе [89]. В целом наблюдается их хорошее согласие, однако наши изобары имеют более детальную структуру и рассчитаны до чисел  $Re=2000$ .

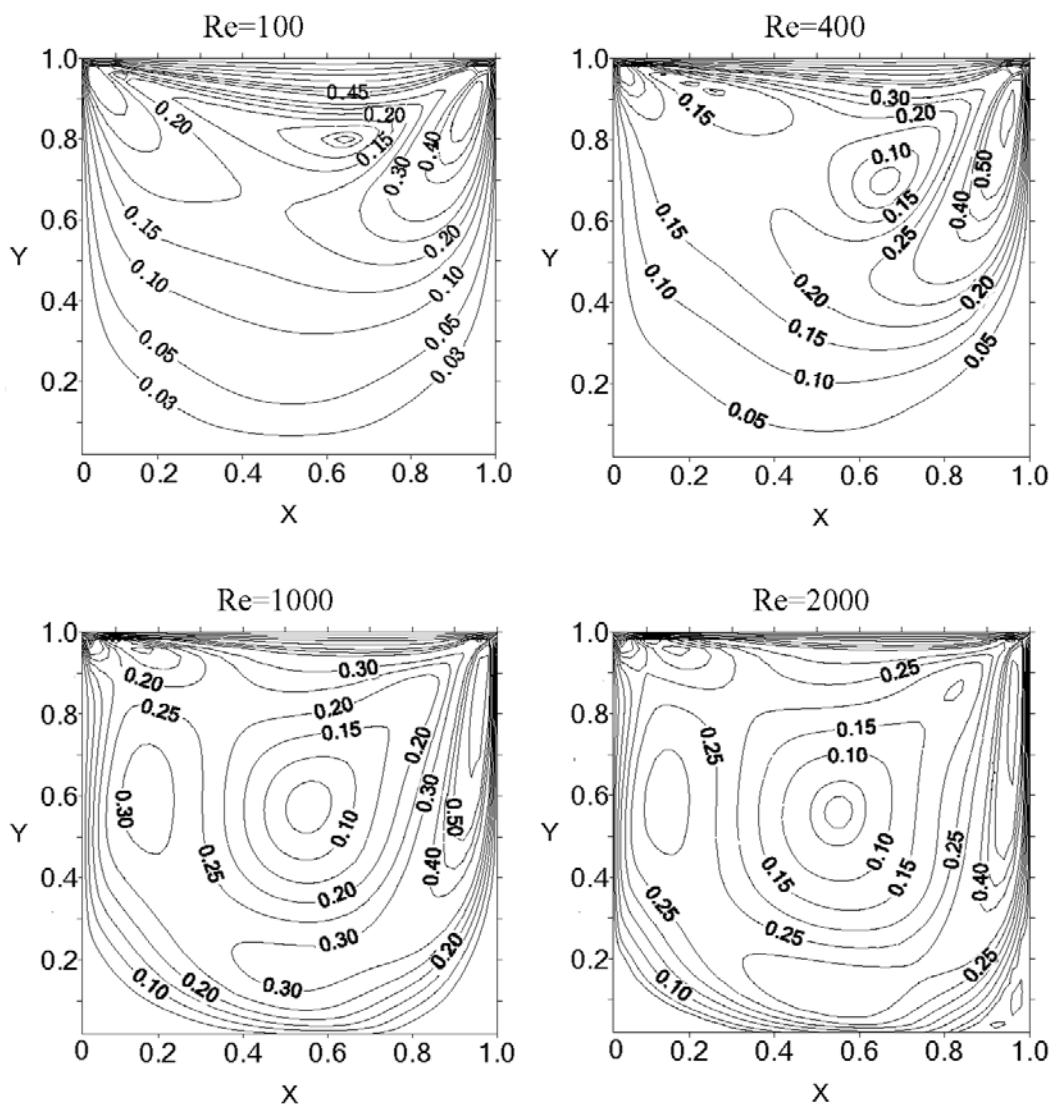


Рис. 4.8. Расчетные изолинии равных скоростей в квадратной полости при четырех различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 1000, 2000$ )

На рис. 4.10. разными линиями представлены расчетные профили горизонтальной компоненты скорости  $U$  в сечении  $X=0,5$  и вертикальной компоненты скорости  $V$  в сечении  $Y=0,5$ , проходящих через геометрический центр квадратной полости (слева) и через центры соответствующих вихрей (справа) при трех различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 1000$ ). Проведенное сравнение этих расчетных кривых с данными работ [95, 327] показывает их хорошее соответствие.



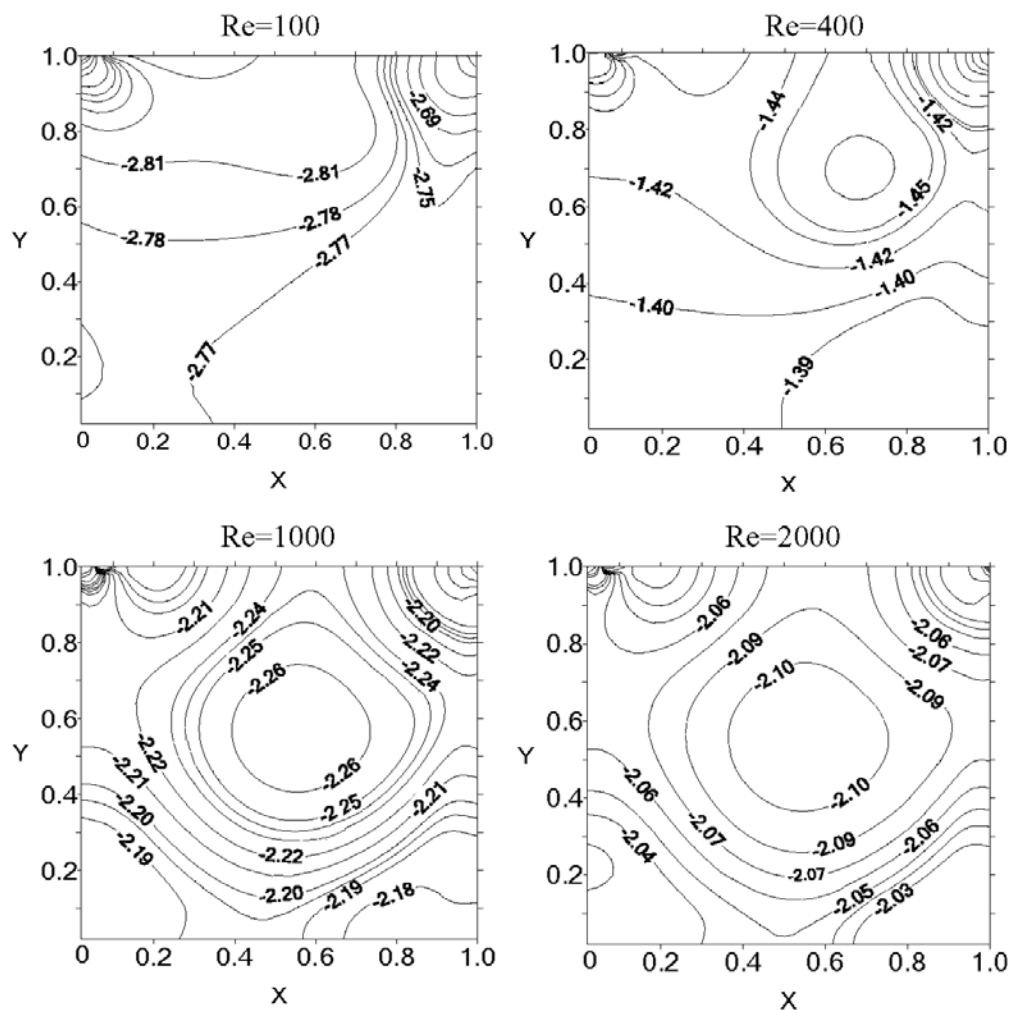


Рис. 4.9. Расчетные изолинии равных давлений (изобары) в квадратной полости при четырех различных числах Рейнольдса ( $Re=100$ , 400, 1000, 2000)

В частности, из рис. 4.8 можно легко определить координаты  $X_c$  и  $Y_c$  центров основных вихрей для различных чисел Рейнольдса. Аналогичные данные были получены в результате анализа расчетов приведенных в работе [95]. Для сравнения они выписаны ниже в виде таблицы, в которой в первом и третьем столбцах приведены наши данные, а во втором и четвертом – данные работы [95].

Сопоставление значений этих координат показывает их хорошее совпадение при числах  $Re=100$  и  $Re=1000$ , а при  $Re=400$  наблюдается значительное отклонение.

Re	$X_c$	$X_c$ [89]	$Y_c$	$Y_c$ [89]
100	0,66	0,6	0,8	0,75
400	0,64	0,59	0,7	0,81
1000	0,54	0,56	0,58	0,52

Обратим внимание, что центры координат вихрей с ростом числа Рейнольдса в нашем случае меняются монотонно в отличие от работы [95].

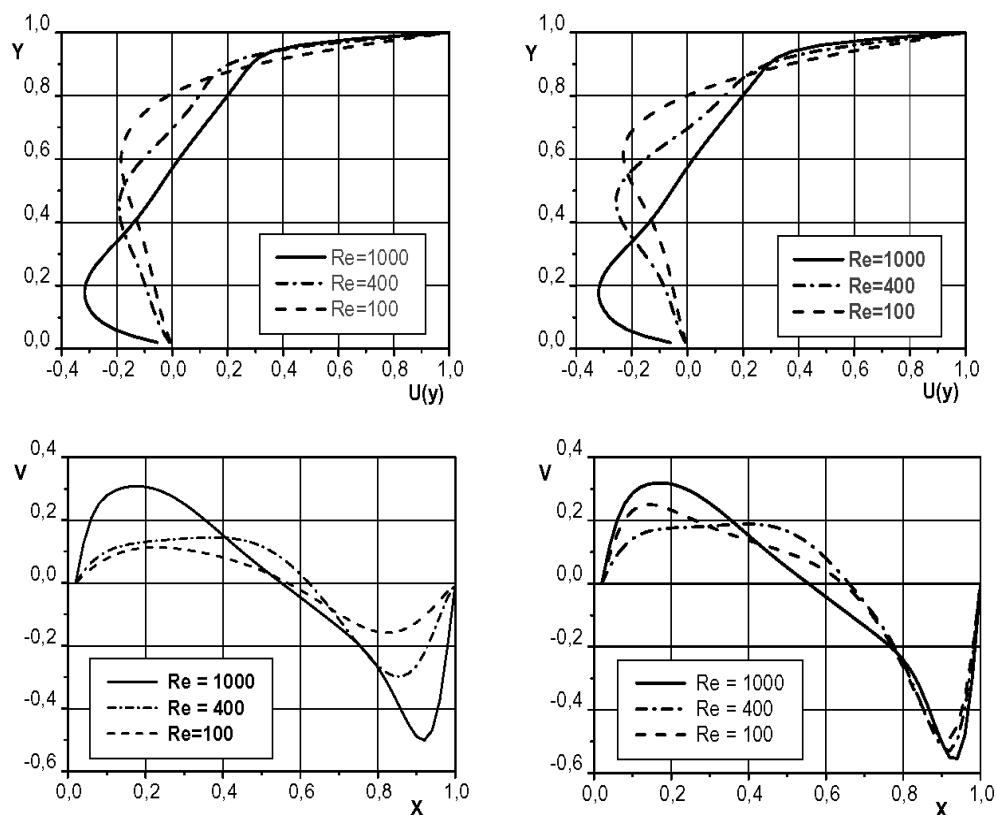


Рис. 4.10. Расчетные профили горизонтальной  $U$  и вертикальной  $V$  скоростей, проходящих через геометрический центр квадратной полости (слева) и через центры вихрей (справа) при трех различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 1000$ )

В целом приведенные результаты расчета, их анализ и сопоставление с результатами других работ свидетельствуют об эффективности используемого метода для решения сложных задач с циркуляционными областями течения.

#### 4.4.4. Результаты расчетов и их обсуждение для прямоугольной полости

Когда стороны рассматриваемой расчетной области  $l$  и  $h$  не равны друг другу, то полость будет прямоугольной. Рассмотрим некоторые результаты расчетов структуры вынужденного течения жидкости в замкнутой прямоугольной полости с движущейся верхней крышкой. Как и следовало ожидать искомые поля скорости и давления оказались функциями числа Рейнольдса и геометрических размеров полости. Основные численные расчеты были выполнены при соотношении сторон прямоугольника  $L = l/h = 2$  и  $L = 4$  на равномерных сетках  $50 \times 100$  и  $50 \times 200$ , соответственно.

В качестве примера ниже на рис. 4.11 приведены результаты расчетов векторного поля скоростей (слева) и их изолиний (справа) с соотношением сторон полости  $L = 2$ , а на рис. 4.12 для случая  $L = 4$  при различных числах Рейнольдса ( $Re = 100, 400, 1000$ ). Эти рисунки наглядно демонстрируют качественную и количественную картину влияния числа Рейнольдса на кинематическую структуру течения в прямоугольной полости при заданном соотношении ее сторон.

Общая картина течения в рассматриваемых прямоугольных полостях в виде векторного поля скоростей (слева), представленная на рис. 4.11 и рис. 4.12, дополняется приведенными на тех же рисунках (справа) расчетными линиями равных скоростей. Здесь особенно отчетливо видна сложная структура возникающих циркуляционных течений в зависимости от числа Рейнольдса при заданной геометрии полости ( $L = 2$  и  $L = 4$ ).

Анализ указанных рисунков показывает, что зона с наибольшей интенсивностью течения расположена в верхней части расчетной области прилегающей к границе  $BC$ , где жидкость вовлекается в движение благодаря действию сил трения между верхней движущейся крышкой и жидкостью. Плотность расположения линий равных скоростей характеризует интенсивность течения в полости. Из-за движения верхней крышки слева - направо, общая картина вихревого поля скоростей несимметрична и центры вихрей смещены вправо. Верхние слои жидкости прилегающие к движущейся крышке при своем движении наталкиваются на заднюю стенку  $CD$  и резко меняют свое направление, отклоняясь вниз и образуя как бы струйное течение.

Далее этот поток наталкивается на нижнюю стенку  $AD$  и снова изменяет свое направление, которое противоположно направлению движения крышки полости. Затем этот поток наталкивается на левую стенку  $AB$  и вдоль нее поднимается вверх, где он снова увлекается жидкостью контактирующей с верхней движущейся стенкой  $BC$ . Таким образом в прямоугольной полости при числах  $Re \leq 400$ , как и в квадратной полости,

образуется область устойчивого циркуляционного движения направленного по часовой стрелке.

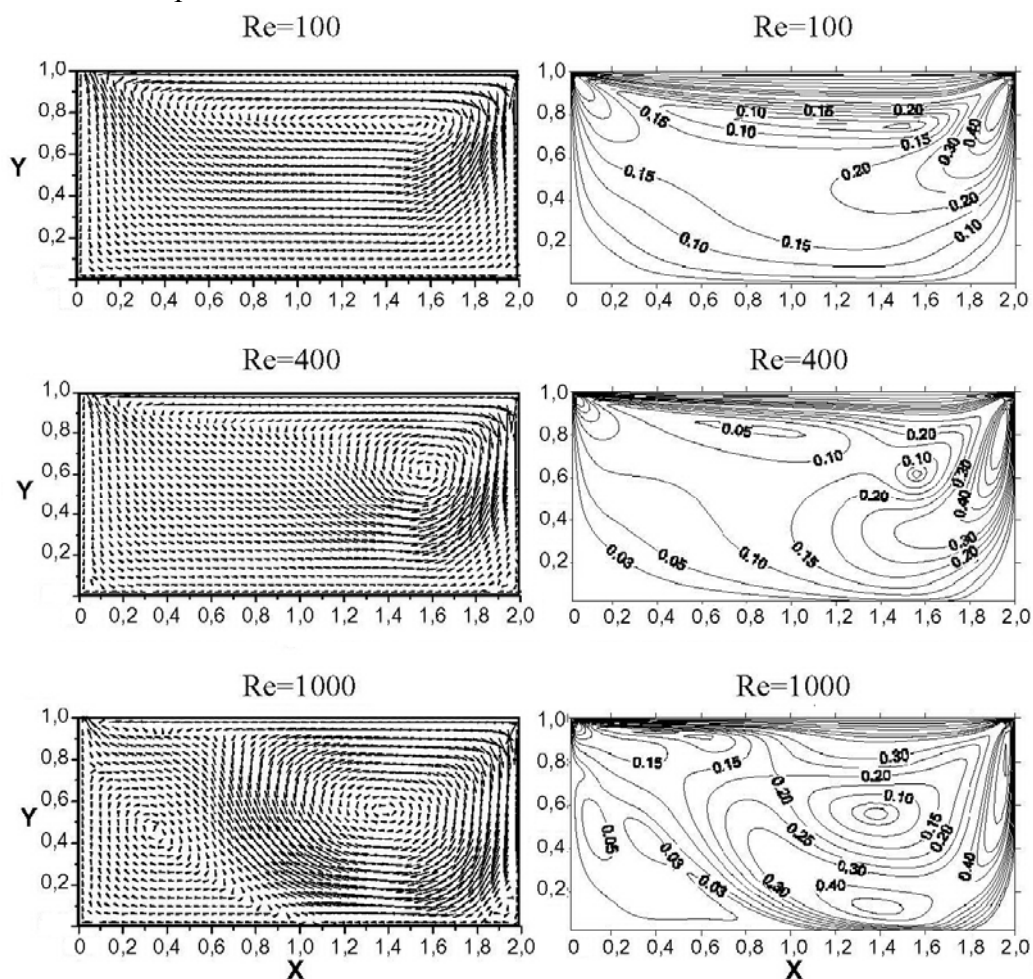


Рис. 4.11. Расчетное векторное поле скоростей (слева) и их изолиний (справа) в прямоугольной полости ( $L=2$ ) при трех различных числах Рейнольдса

Однако в отличие от квадратной полости, где образуется большой вихрь занимающий почти всю полость, в прямоугольных полостях образующиеся вихри располагаются в правой части полости и занимают примерно третью ее часть. С ростом числа Рейнольдса эта вихревая область увеличивается, а при числе  $Re \geq 1000$  картина течения качественно изменяется. Внизу полости левее основного вихря возникает вторая область вихревого течения со скоростями движения жидкости меньшими чем в основном вихре с направлением вращения противоположным вращению основного вихря. Анализ рис. 4.12 показывает, что при числах  $Re \geq 1000$  наблюдается дробление течения. В этом случае в левой части полости образуются мелкие

вихри, при этом в основной левой части полости движение безвихревое и его интенсивность незначительная.

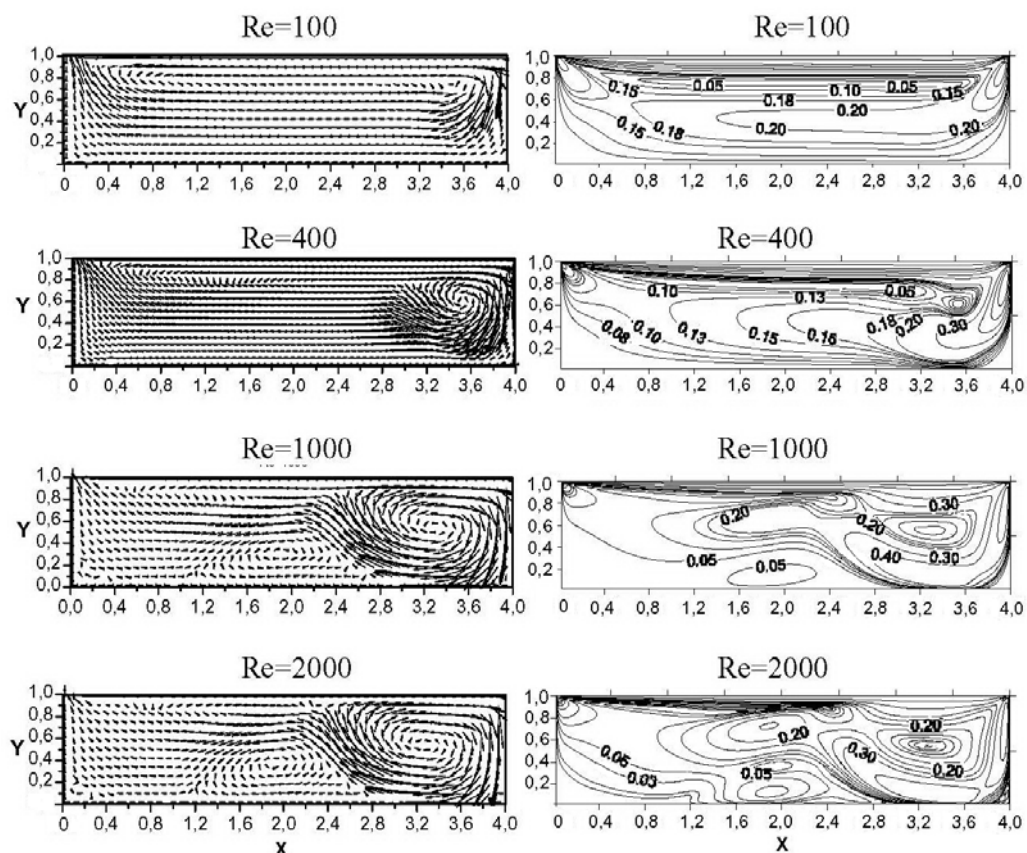


Рис. 4.12. Расчетное векторное поле скоростей (слева) и их изолиний (справа) в прямоугольной полости ( $L=4$ ) при четырех различных числах Рейнольдса

Поскольку исходные уравнения движения записаны и решаются в переменных скорость-давление, то это позволяет в процессе решения сразу рассчитывать и поле давления в прямоугольной полости. В качестве примера на рис. 4.13 представлены результаты расчетов поля давления в виде изобар для различных чисел Рейнольдса при двух вариантах геометрии полости  $L=2$  и  $L=4$ . Расчеты позволяют отметить, что в целом изобары хорошо коррелируют с расчетными изолиниями равных скоростей приведенными на рис. 4.11 и рис. 4.12. Особенно неплохое соответствие, независимо от величины параметра  $L$ , наблюдается при числах Рейнольдса  $Re \geq 400$ . В этом случае зоны наименьших значений давления совпадают с вихревыми зонами скоростного поля циркуляционных течений. Однако для чисел  $Re=100$  для обеих прямоугольных полостей ( $L=2$  и  $L=4$ ) такого согласования линий изобар и изолиний равных скоростей не наблюдается.

Изобары в этом случае имеют несколько иное распределение, которое носит характер не круговых, а вертикальных линий. Таким образом при малых числах Рейнольдса в срединной части полости отмечается постоянство вертикального градиента давления. В то же время в левом и правом верхних углах полости имеют место изолинии как давлений, так и скоростей в форме деформированных эллипсов.

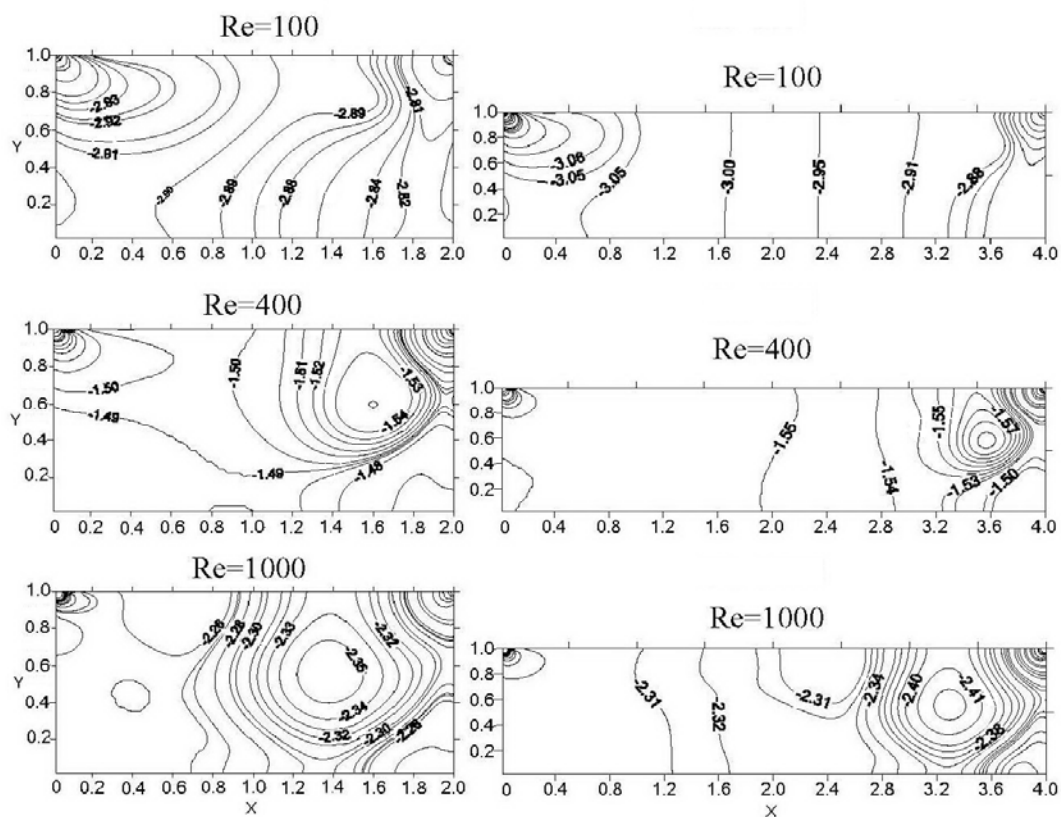


Рис. 4.13. Расчетные изолинии равных давлений (изобары) в прямоугольной полости для  $L=2$  (слева) и  $L=4$  (справа) при трех различных числах Рейнольдса

В целом расчетная картина полей скорости и давления в прямоугольных полостях качественно и количественно согласуется с известными представлениями [19]. В силу того, что в работе [19] задача решается в переменных функция тока – вихрь, а у нас в переменных скорость – давление прямое сравнение результатов расчетов затруднительно. Однако в [19] на рис. 3 приведены расчетные профили горизонтальной скорости в среднем вертикальном сечении полости, которые хорошо согласуются с данными наших расчетных профилей.

Таким образом, видно, что используемая численная схема и применение разнесенных сеток обеспечивает высокое качество моделирования

конвективных вихревых течений в замкнутых полостях с различной геометрией при малых и умеренных числах Рейнольдса.

Показано, что внутри квадратной и прямоугольной полостей формируется устойчивое циркуляционное течение, параметры которого зависят от числа Рейнольдса и геометрических размеров полости. При увеличении числа Рейнольдса до чисел  $Re = 2000$  картина течения в зависимости от соотношения сторон прямоугольной полости перестраивается от одновихревой к двухвихревой структуре. Координаты центров вихрей, давление и локальные значения скорости на изолиниях являются важными характеристиками рассматриваемых течений.

## **4.5. Течение в плоском внезапно сужающемся канале**

### **4.5.1. Введение**

Течение вязкой жидкости в канале с внезапным сужением его поперечного сечения в виде уступа встречается во многих технических устройствах и аппаратах. Наличие такой геометрической неоднородности на стенке канала существенно влияет на кинематическую структуру потока, процессы теплообмена и уровень акустических шумов гидродинамического происхождения. Поэтому разработка методов расчета таких течений представляет большой практический интерес. Особенность и сложность расчета таких течений связана с образованием перед уступом специфической области подпора, которую часто называют застойной зоной. Поэтому структура таких течений и протяженность зоны подпора изучались теоретически и экспериментально, как для ламинарных так и для турбулентных режимов течения [218].

При теоретическом исследовании таких течений важную роль играет учет переменной давления в области участка сужения канала. Поэтому для их изучения нужно использовать полные уравнения гидродинамики [47, 147].

Цель данной работы состоит в применении метода DNM-LF в переменных скорость-давление к решению задачи о движении несжимаемой жидкости в плоском канале с односторонним внезапным сужением его поперечного сечения. Хотя расчет чисто ламинарного течения может иметь ограниченную область прямого практического использования, однако он позволяет совершенствовать численные схемы расчета, которые затем обобщаются на расчеты турбулентных режимов течения.

### **4.5.2. Постановка задачи и исходные уравнения**

Рассмотрим задачу о двумерном течении несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным сужением его поперечного сечения в виде уступа. Физическая схема рассматриваемого течения, конфигурация

расчетной области  $ABCD_1FEA$  и система декартовых координат показаны на рис. 4.14. Течение жидкости происходит слева направо. Левая  $AB$  и правая  $CD_1$ , границы расчетной области считаются достаточно удаленными от сечения с внезапным сужением  $C_1FE$  чтобы на них можно было принять условия соответствующие невозмущенному потоку.

Внутри плоскопараллельного канала течет жидкость с постоянными свойствами. Течение является ламинарным. Ширина канала в левом входном сечении  $AB$  имеет размер  $h$ , а в правом выходном сечении  $CD_1$  размер  $h_1$ . Высота уступа  $FE$  равна  $b=h-h_1$ . Предполагается, что во входном сечении канала  $AB$  выполняется условие полностью развитого течения и горизонтальная скорость  $U$  имеет параболический профиль Пуазейля в виде

$$U(Y)|_{AB} = 6(1-Y)Y, \quad (4.11)$$

а вертикальная скорость  $V$  в этом сечении равна нулю. Длина расчетной области  $L=X_1+X_2$ , где  $X_1$ - длина области перед уступом, а  $X_2$  - длина области над уступом.

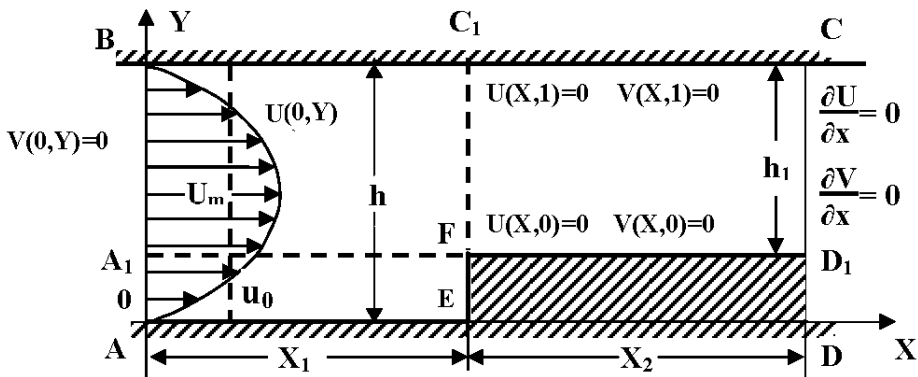


Рис. 4.14. Физическая схема рассматриваемого течения в плоском канале с внезапным односторонним сужением

Характерной особенностью течения в каналах является то, что движение жидкости происходит под действием продольного перепада давления. Однако заданной величиной в рассматриваемой задаче следует принять не перепад давления, а расход жидкости  $Q=u_0 \cdot h$  через поперечное сечение канала  $AB$ . При такой постановке задачи число Рейнольдса  $Re=u_0 \cdot h/\nu$  задается, а давление определяется в процессе решения задачи.

Согласно методу DNM-LF для описания движения жидкости используются интегральные уравнения (4.1) и (4.2), выражающие законы сохранения массы и изменения количества движения. Как обычно перейдем к безразмерным переменным. С этой целью в данной задаче за масштаб длины принимается ширина канала  $h$ , за масштаб скорости принята среднерасходная скорость в канале  $u_0=Q/h$ , за масштаб времени принята величина  $t_0=h/u_0$ , а за масштаб давления принят скоростной напор



$p_0 = \rho u_0^2$ . В безразмерных переменных  $U = u / u_0$ ,  $V = v / u_0$ ,  $X = x / h$ ,  $Y = y / h$ ,  $\tau = t u_0 / h$ ,  $P = p / \rho_0 u_0^2$  дискретный аналог системы исходных уравнений, построенный на разнесенных сетках методом контрольного объема, подробно рассмотрен выше и имеет вид:

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P,$$

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = [\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U] / d_{j+1/2,i}^U,$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V,$$
(4.12)

где коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}$ ,  $d_{j,i+1/2}$ ,  $c_1$ ,  $c_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$ , выражения  $G$  с верхними индексами  $U$ ,  $V$  и свободный член  $f^P$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются по определенным алгебраическим формулам (3.38). Система уравнений (4.12) связывает значения давления и компонентов скоростей на  $(n+1)$  временном слое.

Для завершения постановки задачи необходимо задать начальные и краевые условия на всех границах расчетной области  $ABCD_1FEA$ . Предполагается, что в начальный момент времени в расчетной области  $ABC_1E$  горизонтальная скорость  $U$  имеет параболический профиль Пуазейля в форме (4.11), а вертикальная скорость  $V$  и давление  $P$  равны нулю. В области над уступом  $FC_1CD_1$  горизонтальная скорость имеет также параболический профиль, который зависит от параметра  $B = b/h$  и в соответствии с условием сохранения расхода описывается следующим выражением

$$U = 6[Y(1+B) - Y^2 - B] / (1 - B^3)$$

Вертикальная скорость  $V$  и давление  $P$  в этой области в начальный момент времени принимаются равными нулю. Граничные условия для скорости на входе уже рассматривались выше. На всех неподвижных твердых стенках выполняются очевидные граничные условия прилипания  $U|_\Gamma = 0$  и непротекания  $V|_\Gamma = 0$ , где  $\Gamma$ - твердая граница. В выходном сечении канала  $CD_1$  для горизонтальной и вертикальной скоростей выполняются стандартные “мягкие” условия Неймана.

Таким образом, решение системы уравнений (4.12) будем искать в области  $0 \leq X \leq L$ ,  $0 \leq Y \leq 1$  с начальными и граничными условиями в виде:

$$\text{начальные условия: } U(X, Y, 0) = 6(1 - Y)Y, \quad (0 \leq X < X_1);$$

$$U(X, Y, 0) = 6(Y(1+B) - Y^2 - B) / (1 - B^3) \quad (X_1 \leq X < X_2);$$

$$V(X,Y,0)=0, \quad P(X,Y,0)=0 \quad (0 \leq X < (X_1 + X_2));$$

граничные условия:

$$U|_{AB} = (1-Y)Y; \quad U|_{BC} = 0; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial X} \right|_{CD_1} = 0; \quad U|_{D_1F} = 0; \quad U|_{FE} = 0; \quad U|_{EA} = 0;$$

$$V|_{AB} = 0; \quad V|_{BC} = 0; \quad \left. \frac{\partial V}{\partial X} \right|_{CD_1} = 0; \quad V|_{D_1F} = 0; \quad V|_{FE} = 0; \quad V|_{EA} = 0;$$

Основными параметрами задачи являются число Рейнольдса и геометрическая высота уступа  $B=b/h$ . Следует подчеркнуть, что для определения давления из уравнения неразрывности выводится уравнение типа Пуассона. При этом необходимые для его решения значения давления в граничных узлах определяются с помощью уравнений движения в комбинации с граничными условиями для компонентов скорости [208]. В процессе решения задачи требуется определить поля скорости и давления в расчетной области и оценить влияние числа Рейнольдса и геометрического размера уступа  $B$  на структуру течения в канале и протяженность зоны подпора, которая образуется перед уступом. Стационарное течение в канале характеризуется тем, что искомые переменные  $U$ ,  $V$ ,  $P$  не зависят от времени. Для решения системы конечно-разностных алгебраических уравнений при указанных начально-краевых условиях использовалась разработанная компьютерная программа ULF.

### 4.5.3. Результаты расчетов и их обсуждение

Некоторые результаты расчетов кинематической структуры течения в плоском канале с внезапным сужением представлены ниже на соответствующих рисунках. Основные численные расчеты были проведены для высоты уступа  $B=0,4$  при четырех различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 800, 1000$ ) на равномерных сетках с шагами по  $X$  и  $Y$  равными 0,02.

На рис. 4.15 (вверху) приведены результаты расчетов в виде векторного поля скоростей в расчетной области канала при трех числах Рейнольдса. Приведенные рисунки наглядно показывают изменение картин векторного поля скоростей в зависимости от числа Рейнольдса при заданном параметре сужения канала. Из приведенных рисунков видно, что при  $Re=100$  в области нижней стенки канала перед уступом вихреобразование только зарождается. С ростом числа Рейнольдса кинематическая структура потока в этой области изменяется и при  $Re=400$  появляются четкие признаки зарождения вихря в угловой области с направлением вращения по часовой стрелки. При числе  $Re=1000$  в угловой области четко наблюдаются малые вихри с тем же направлением вращения жидкости. Кроме того, из рисунков

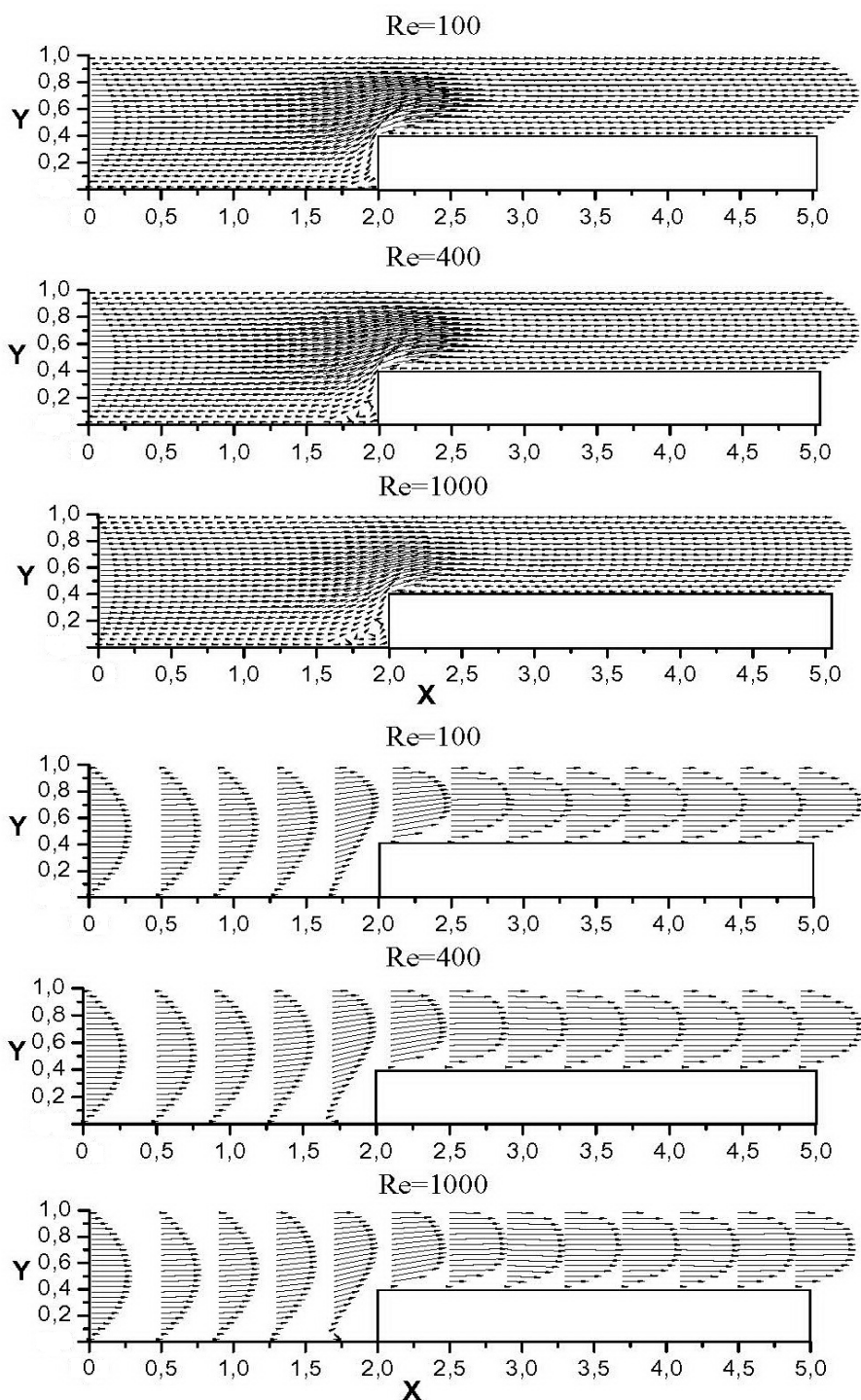


Рис. 4.15. Расчетное векторное поле скоростей (вверху) и их профилей (внизу) в плоском внезапно сужающемся канале ( $B=0,4$ ) при трех различных числах Рейнольдса

видно, что в ближней области над верхней угловой точкой уступа проявляются эффекты зарождения отрыва потока.

С целью полноты представления картины скоростного поля в канале с внезапным сужением на рис. 4.15 (внизу) приведены расчетные профили горизонтальной скорости  $U(Y)$  в различных сечениях канала по оси  $X$  при трех числах Рейнольдса. Расчеты показывают, что при рассмотренных умеренных числах Рейнольдса течение остается установившимся в предположении, что входной профиль скорости является параболическим.

Кроме векторного поля скоростей и их профилей, приведенных на рис. 4.15, на рис. 4.16 (три верхних фрагмента) показаны изолинии равных скоростей при  $B=0,4$  для трех различных чисел Рейнольдса. Линии равных скоростей, подобно функции тока, наглядно показывает особенности движения жидкости в канале с внезапным односторонним сужением. Нетрудно видеть, что при числах  $Re < 400$  вязкие эффекты являются преобладающими и скоростная структура течения во всей расчетной области безвихревая и определяется параболическим профилем продольной скорости.

Начиная с чисел  $Re \geq 400$  непосредственно перед уступом в угловой области проявляются эффекты зарождения вихревых образований. Их наличие и формирует «застойную зону» перед уступом. На рис. 4.16 легко видеть, что линия отделяющая зону подпора от основного потока носит вогнутый характер, а значение координаты «замыкания» этой линии на вертикальную стенку уступа зависит от числа Рейнольдса. Численные расчеты показали, что с ростом числа Рейнольдса горизонтальный размер этой зоны увеличивается, но он небольшой и при  $Re=1000$  составляет 1,025 от высоты уступа.

В целом полученные результаты расчетов полей скорости в области внезапного сужения поперечного сечения плоского канала хорошо согласуется с известными представлениями картины течения наблюдаемой в физических и численных экспериментах [218]. Однако, наряду с этим на верхней стенке уступа  $FD_1$  вблизи угла наблюдается ускорение потока, которое стимулирует процесс зарождения отрыва потока, но при числах  $Re \leq 1000$ , он еще не происходит.

Результаты расчетов относящиеся к распределению поля давления представлены на трех нижних фрагментах рис. 4.16 в виде изолиний коэффициентов давления  $C_p$

$$C_p = \frac{p - p_1}{\rho u_0^2 / 2}$$

Здесь  $p_1$  - характерное давление в середине входного сечения канала.

Из рисунка видно, что для  $Re < 400$  при ламинарном режиме обтекания уступа обращенного навстречу потоку, вниз по потоку на достаточном удалении от сечения с сужением, имеются области с постоянным давлением по вертикали.

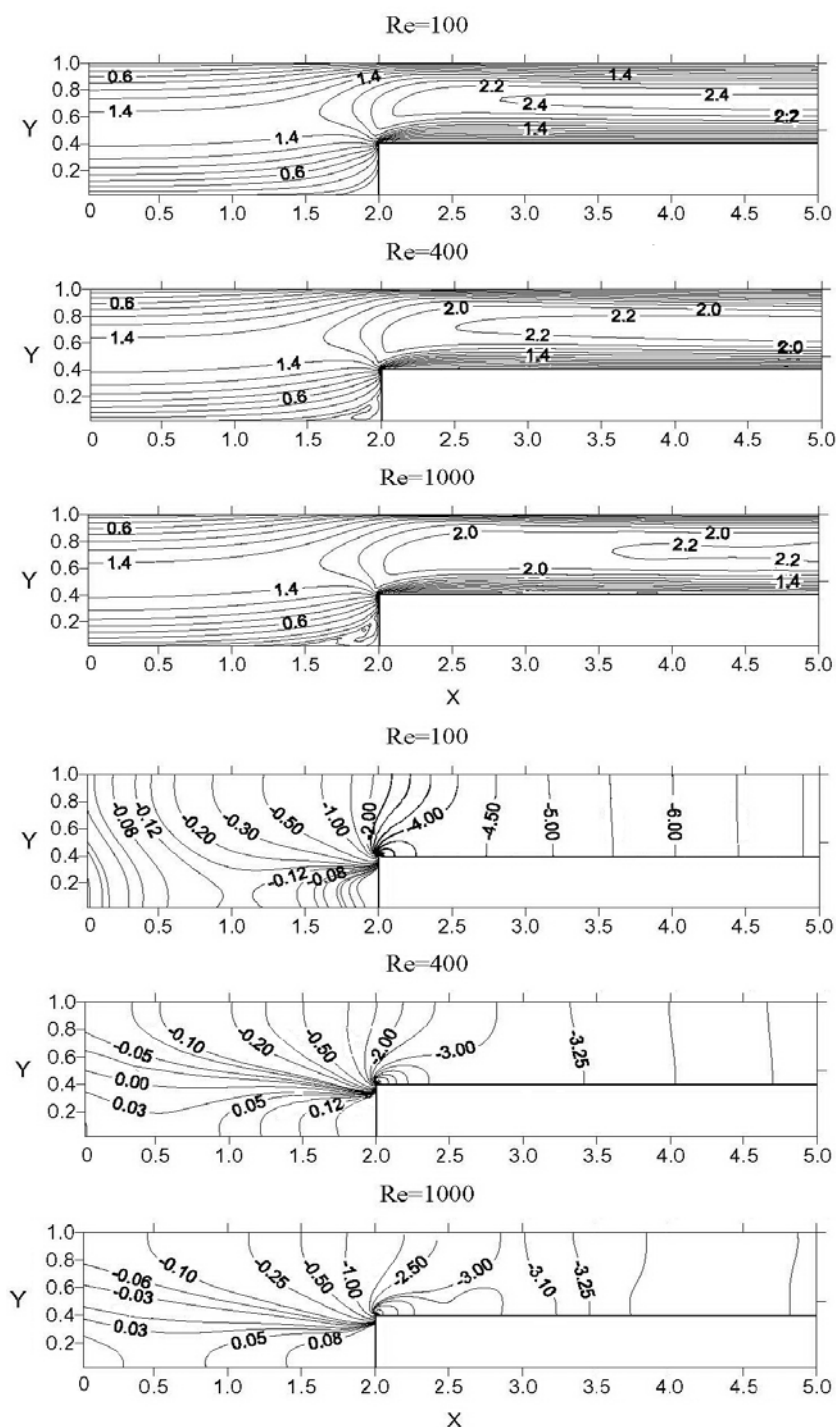


Рис. 4.16. Расчетные изолинии равных скоростей (вверху) и поле давления в виде изолиний коэффициентов  $C_p$  (внизу) в плоском внезапно сужающемся канале ( $B=0,4$ ) при трех различных числах Рейнольдса

На участке вблизи внешнего угла уступа существует область, где изолинии давления носят сложный веерный характер, а угол уступа является как бы источником возмущения поля давления. Эта картина имеет место при различных числах Рейнольдса. Таким образом из расчетов следует, что при умеренных числах Рейнольдса ( $Re \leq 1000$ ) установление течения в зоне подпора перед уступом происходит монотонно. Набегающий на вертикальную стенку поток создает на ней повышенное давление, которое затем распространяется навстречу потоку и формирует его структуру в зоне подпора.

На рис. 4.17 приведена расчетная зависимость длины зоны подпора  $X_p = x_p/h$  и  $L_p = X_p/B$  в зависимости от числа Рейнольдса при  $B=0,4$  с различной нормировкой. В качестве критерия определения координаты  $X_p$  принималось то значение координаты  $X$  при котором ближайшее к нижней стенке  $AE$  значение  $U(Y)$  меняло свой знак.

Обратимся теперь к рассмотрению результатов расчета локальных значений давления на трех характерных границах расчетной области. Сюда относится участок верхней стенки канала  $BC$ , давление вдоль оси  $X$  на высоте уступа ( $Y=0,4$ ), то есть в сечении  $A_1FD_1$  и давление вдоль вертикальной стенки уступа, то есть в сечении  $C_1FE(X=2)$ .

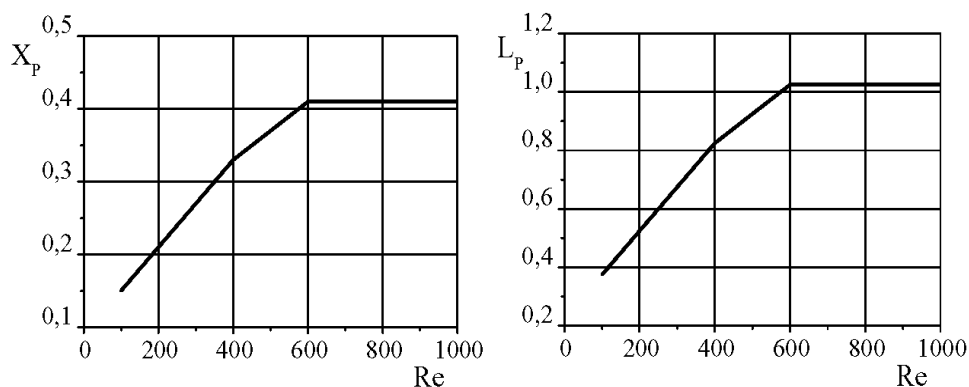


Рис. 4.17. Расчетная зависимость длины зоны подпора  $X_p = x_p/h$  и  $L_p = X_p/B$  в плоском канале с внезапным сужением в зависимости от числа Рейнольдса при  $B=0,4$

Характер изменения давления вдоль вертикальной стенки уступа  $EF$  ( $0 \leq Y \leq 0,4$ ) при различных числах  $Re$  и  $B=0,4$  приведен на рис. 4.18. Как и следовало ожидать на этом участке давление вблизи нижней стенки канала сначала постоянно, а затем по мере приближения значений  $Y$  к координате  $Y = 0,4$ , давление резко уменьшается. В целом давление в зоне подпора несколько выше, чем в основном потоке канала на этой вертикали.

На участке течения в канале в вертикальном сечении  $C_1F$  давление вблизи верхней стенки канала тоже сначала постоянно, а затем по мере приближения к уступу ( $Y=0,4$ ) оно плавно уменьшается и сравнивается с локальным давлением в зоне подпора в этой точке.

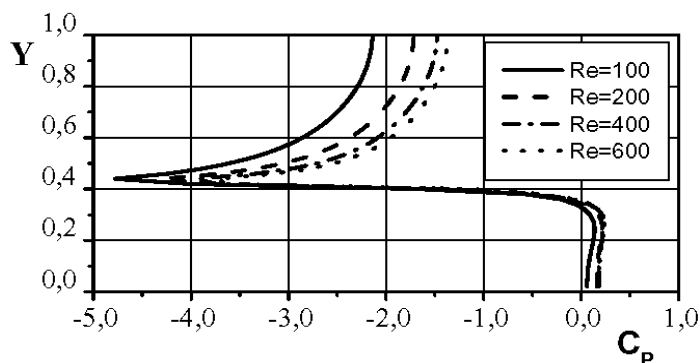


Рис. 4.18. Распределение коэффициента давления  $C_p$  по оси  $Y$  в сечении внезапного сужающегося канала  $EFC_1$  для четырех значений чисел Рейнольдса при  $B=0,4$

Нетрудно заметить, что характер распределения давления по вертикали в сечении  $X=2$ , приведенный на рис. 4.18 при различных числах Рейнольдса идентичный, но отличается величиной коэффициента давления.

На рис. 4.19 представлено расчетное распределение давления вдоль оси  $X$  на верхней стенке канала  $BC$  при  $B=0,4$  для четырех значений числа Рейнольдса.

Как видно из верхнего рисунка, вначале ( $X \leq 2$ ) давление монотонно убывает подобно давлению в прямолинейном канале без уступа, однако в области расположения уступа, в силу сохранения расхода, поток ускоряется и давление падает интенсивнее в зависимости от параметров  $B$  и  $Re$ , а затем, по мере удаления от сечения с уступом, давление снова равномерно падает.

На нижнем рис. 4.19 приведены кривые, которые соответствуют расчетному распределению коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси  $X$  на высоте уступа ( $Y=0,4$ ), то есть в сечении  $A_1FD_1$ .

Расчеты показывают, что сначала на участке  $A_1F$  давление остается постоянным при всех четырех числах Рейнольдса. Далее при приближении к угловой верхней точке уступа, в силу уменьшения поперечного сечения канала и ускорения потока, давление при всех четырех числах Рейнольдса резко падает, а затем оно по направлению потока незначительно повышается и далее плавно переходит к монотонному падению. Общий анализ расчетных кривых показывает, что изменение давления на участке  $A_1F$  практически не зависит от числа Рейнольдса, а на участке  $FD_1$  такая зависимость наблюдается.

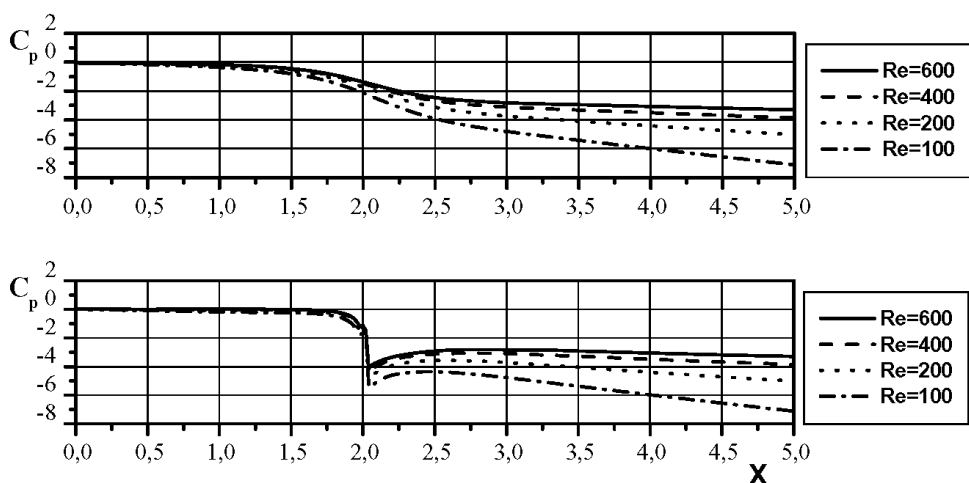


Рис. 4.19. Распределение коэффициента давления  $C_p$  по оси  $X$  на верхней стенке канала  $BC$  (вверху) и на высоте уступа ( $Y=0,4$ ) (внизу) для четырех значений чисел Рейнольдса.

Таким образом, с помощью DNM-LF метода численно исследованы особенности течения в плоском канале с внезапным сужением для высоты уступа  $B=0,4$  при малых и умеренных числах Рейнольдса. Показано, что используемый метод обеспечивает высокое качество моделирования сложных течений с вихреобразованием и является эффективным инструментом для расчетов сложных течений.

## 4.6. Течение в плоском внезапно расширяющемся канале

### 4.6.1. Введение

Фрагменты течения жидкости во внезапно расширяющихся каналах встречаются в различных технических устройствах и сооружениях. Резкое изменение геометрии стенки канала или поверхности обтекаемого тела способно вызвать отрыв потока и существенно изменить его кинематическую структуру. Течение в плоском канале с внезапным расширением относится к наиболее простому классу отрывных течений, когда точка отрыва потока является фиксированной. Теоретический расчет таких течений представляет большие трудности из-за образования сложных отрывных и возвратно-циркуляционных течений в области за уступом [48, 195].

Первые расчеты стационарных двумерных ламинарных отрывных течений несжимаемой жидкости в каналах были получены Блазиусом еще в 1910 году аналитически в виде рядов [236]. В дальнейшем эта задача использовалась многими исследователями для изучения механизмов



отрывных течений и для тестирования разностных схем решения уравнений Навье-Стокса. В силу большой практической значимости такие течения изучались теоретически и экспериментально как для ламинарных [190, 232, 282], так и для турбулентных [85, 217, 309] режимов движения несжимаемой и сжимаемой жидкости.

Во многих работах этого направления рассматриваются течения в каналах с двусторонним внезапным расширением [125, 163, 231, 254, 269, 299]. Ряд исследователей для расчетов течений с внезапным расширением использовали уравнения движения в приближении пограничного слоя [136]. В настоящее время очевидно, что при постановке задач расчета отрывных течений с вихревыми образованиями необходимо использовать не приближенные уравнения пограничного слоя, а полные уравнения гидродинамики.

Цель данной работы состоит в применении метода DNM-LF для решения внутренней задачи гидродинамики о течении жидкости в плоском канале с внезапным односторонним расширением. При этом наряду с изучением структуры течения в зоне уступа, в зависимости от числа Рейнольдса и высоты уступа, преследовалась цель апробации эффективности данного метода для расчета сложных отрывных течений, характеризующихся наличием возвратно-вихревых областей течения.

#### 4.6.2. Постановка задачи и исходные уравнения

Рассматривается двумерное ламинарное течение в плоском канале с внезапным расширением в виде уступа. Физическая картина рассматриваемого течения и конфигурация расчетной области  $A_1BCDEFA_1$  представлены на рис. 4.20. Для численного решения задачи используется метод DNM-LF.

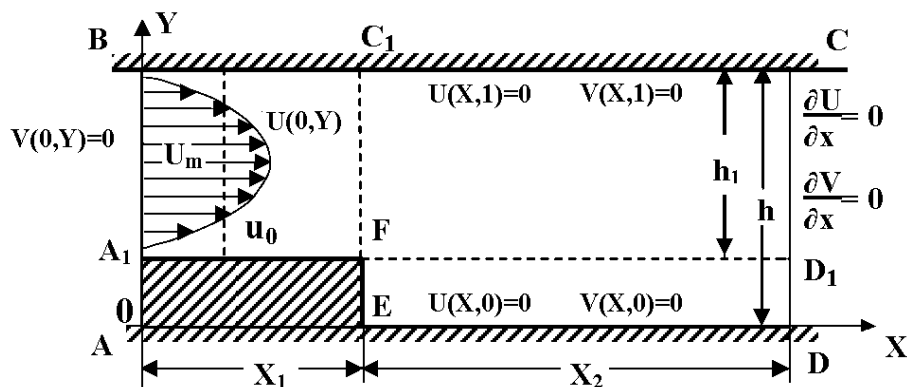


Рис. 4.20. Физическая схема течения во внезапно расширяющемся плоском канале

Начало введенной декартовой системы координат находится в левом нижнем углу в точке 0. Ширина канала в левом входном сечении  $A_1B$  имеет размер  $h_1$ , а в правом выходном сечении  $CD$  размер  $h$ . Высота уступа  $FE$  равна соответственно  $b = h - h_1$ . Левая  $A_1B$  и правая  $CD$  границы расчетной области считаются достаточно удаленными от сечения с внезапным расширением  $C_1FE$ , чтобы на них можно было принять условия соответствующие невозмущенному течению. Кроме того, предполагается, что в канале в области  $A_1BC_1F$  выполняются условия полностью развитого течения. Тогда в сечении  $A_1B$  для горизонтальной скорости реализуется параболический профиль, форма которого зависит от параметра расширения потока  $B=b/h$ . В выходном сечении  $CD$  расчетной области вдали от уступа профиль горизонтальной скорости по предположению установившийся и описывается параболой Пуазейля в виде

$$U(Y)|_{CD} = 6(1 - Y)Y. \quad (4.13)$$

Тогда, используя условие сохранения расходов в сечениях  $A_1B$  и  $CD$ , для профиля горизонтальной скорости в сечении  $A_1B$  находим

$$U(Y)|_{A_1B} = 6[Y(1 + B) - Y^2 - B]/(1 - B)^3, \quad (4.14)$$

где  $B = b/h$  - безразмерная высота уступа. Легко видеть, что при  $B=0$  выражение (4.14) совпадает с профилем Пуазейля (4.13).

Характерной особенностью течений в каналах является то, что движение жидкости происходит под действием продольного перепада давления. Однако заданной величиной в рассматриваемой задаче следует принять не перепад давления, а расход жидкости  $Q = u_0 \cdot h$  через поперечное сечение канала  $CD$ . При такой постановке задачи число Рейнольдса  $Re = u_0 \cdot h / \nu$  задается, а давление определяется в процессе решения задачи.

Согласно методу DNM-LF для описания движения жидкости используются интегральные уравнения (4.1) и (4.2), выражающие законы сохранения массы и изменения количества движения. Как обычно перейдем к безразмерным переменным. С этой целью в данной задаче за масштаб длины принимается ширина канала  $h$ , за масштаб скорости принята среднерасходная скорость в канале  $u_0 = Q/h$ , за масштаб времени принята величина  $t_0 = h / u_0$ , а за масштаб давления принят скоростной напор  $p_0 = \rho u_0^2$ . В безразмерных переменных  $U = u / u_0$ ,  $V = v / u_0$ ,  $X = x / h$ ,  $Y = y / h$ ,  $\tau = t u_0 / h$ ,  $P = p / \rho_0 u_0^2$  дискретный аналог системы исходных уравнений, построенный на разнесенных сетках методом контрольного объема, подробно рассмотрен выше и имеет вид:

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P,$$

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = [\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U] / d_{j+1/2,i}^U, \quad (4.15)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V,$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}$ ,  $d_{j,i+1/2}$ ,  $c_1$ ,  $c_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$ , выражения  $G$  с верхними индексами  $U$ ,  $V$  и свободный член  $f^P$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются по определенным алгебраическим формулам (3.38). Система уравнений (4.15) связывает значения давления и компонентов скоростей на  $(n+1)$  временном слое.

Для завершения постановки задачи необходимо задать начальные и краевые условия на всех границах расчетной области. Пусть жидкость движется слева направо. Граничное условие для горизонтальной скорости в начальном сечении  $A/B$  задается выражением (4.14), а вертикальная скорость  $V$  в сечении  $A/B$  принимается равной нулю. На всех неподвижных твердых стенках выполняются очевидные граничные условия прилипания  $U|_{\Gamma} = 0$  и непротекания  $V|_{\Gamma} = 0$ , где  $\Gamma$  - твердая граница. На выходе из расчетной области в сечении  $CD$  для горизонтальной и вертикальной скоростей принимаются стандартные условия вытекания Неймана. В начальный момент времени горизонтальная скорость в расчетной области имеет соответствующий параболический профиль, а поперечная скорость и давление равны нулю.

Таким образом решение системы уравнений (4.15) будем искать в области  $0 \leq X \leq L$ ,  $0 \leq Y \leq 1$  со следующими начальными и граничными условиями.

Начальные условия:

$$\begin{aligned} U(X,Y,0) &= 6[Y(1+B)-Y^2-B]/(1-B)^3, & (0 \leq X \leq X_1) \\ U(X,Y,0) &= 6(1-Y)Y, & (X_1 < X \leq X_2) \\ V(X,Y,0) &= 0, \quad P(X,Y,0) = 0, & (0 < X \leq (X_1 + X_2)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Граничные условия:

$$U|_{AB} = \frac{6[Y(1+B)-Y^2-B]}{(1-B)^3}; \quad U|_{BC} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X}|_{CD} = 0; \quad U|_{DE} = 0; \quad U|_{EF} = 0; \quad (4.17)$$

$$U|_{FA} = 0; \quad V|_{AB} = 0; \quad V|_{BC} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial X}|_{CD} = 0; \quad V|_{DE} = 0; \quad V|_{EF} = 0; \quad V|_{FA} = 0.$$

Основными параметрами задачи являются число Рейнольдса и геометрическая высота уступа  $B = b/h$ . В процессе решения задачи требуется определить поля скорости и давления в расчетной области и исследовать влияние числа Рейнольдса и геометрического размера уступа  $B$

на структуру течения в канале и протяженность циркуляционной области, которая образуется вниз по потоку за уступом. Стационарное течение в канале характеризуется тем, что искомые переменные  $U$ ,  $V$ ,  $P$  не зависят от времени. Для численного решения системы конечно-разностных алгебраических уравнений (4.15) при начально-краевых условиях (4.16), (4.17) использовалась разработанная компьютерная программа RLF.

#### 4.6.3. Результаты расчетов и их обсуждение

Цель работы состояла в апробации численной схемы на примере расчета ламинарного течения в плоском канале с внезапным расширением и изучении детальной структуры течения и поля давления в плоском канале, на нижней стенке которого имеется уступ с вертикальным размером  $B = b/h$ . Некоторые результаты расчетов полей скорости, давления и протяженности циркуляционной области за уступом в зависимости от числа Рейнольдса и значения параметра  $B = 0,4$  представлены ниже на соответствующих рисунках. Основные численные расчеты были проведены на равномерных сетках с шагами  $\Delta X = \Delta Y = 0,02$ .

На рис. 4.21 приведены результаты расчетов в виде векторного поля скоростей в расчетной области плоского канала с высотой уступа  $B = 0,4$  при различных значениях числа Рейнольдса для  $\tau = 100$ . Приведенные рисунки наглядно демонстрируют изменение общей картины течения в зависимости от числа  $Re$  при заданном параметре расширения потока  $B$ .

Из приведенных рисунков видно, что для указанных пяти чисел Рейнольдса, вычисленных по выходной ширине канала  $h$ , для зоны за уступом характерно образование возвратных течений, а протяженность этой зоны и структура циркуляционного течения в ней зависят от числа Рейнольдса и высоты уступа  $B$ . Нетрудно видеть, что при  $Re = 100$  и  $B = 0,4$  наблюдается хорошо выраженная зона с установившимся возвратно-циркуляционным течением в виде одного вихря вытянутого вдоль по потоку за уступом. С ростом числа Рейнольдса кинематическая структура потока качественно меняется как в зоне за уступом, так и ниже циркуляционной области. Уже при  $Re \geq 400$  циркуляционная зона за уступом дробится на две области. При этом основной вихрь занимает лишь правую часть циркуляционной зоны, а на верхней стенке канала ниже нее образуется вторичная вихревая область с направлением вращения против часовой стрелки, то есть противоположным основному направлению движения жидкости в канале.

Появление вторичной вихревой зоны связано с явлением отрыва потока за уступом. Полученная расчетом тонкая структура течения в этой вторичной вихревой области свидетельствует о высоком качестве используемой численной схемы. Нетрудно видеть, что с ростом числа Рейнольдса, то есть при  $Re \geq 800$ , горизонтальный размер вторичной

вихревой области растет, а ее структура усложняется и приводит к образованию нескольких локальных вихревых областей, которые отчетливо видны на рис 4.21. Следовательно в зависимости от числа Рейнольдса при заданной высоте уступа  $B$  может существовать как стационарный режим течения, так и нестационарный с отрывом.

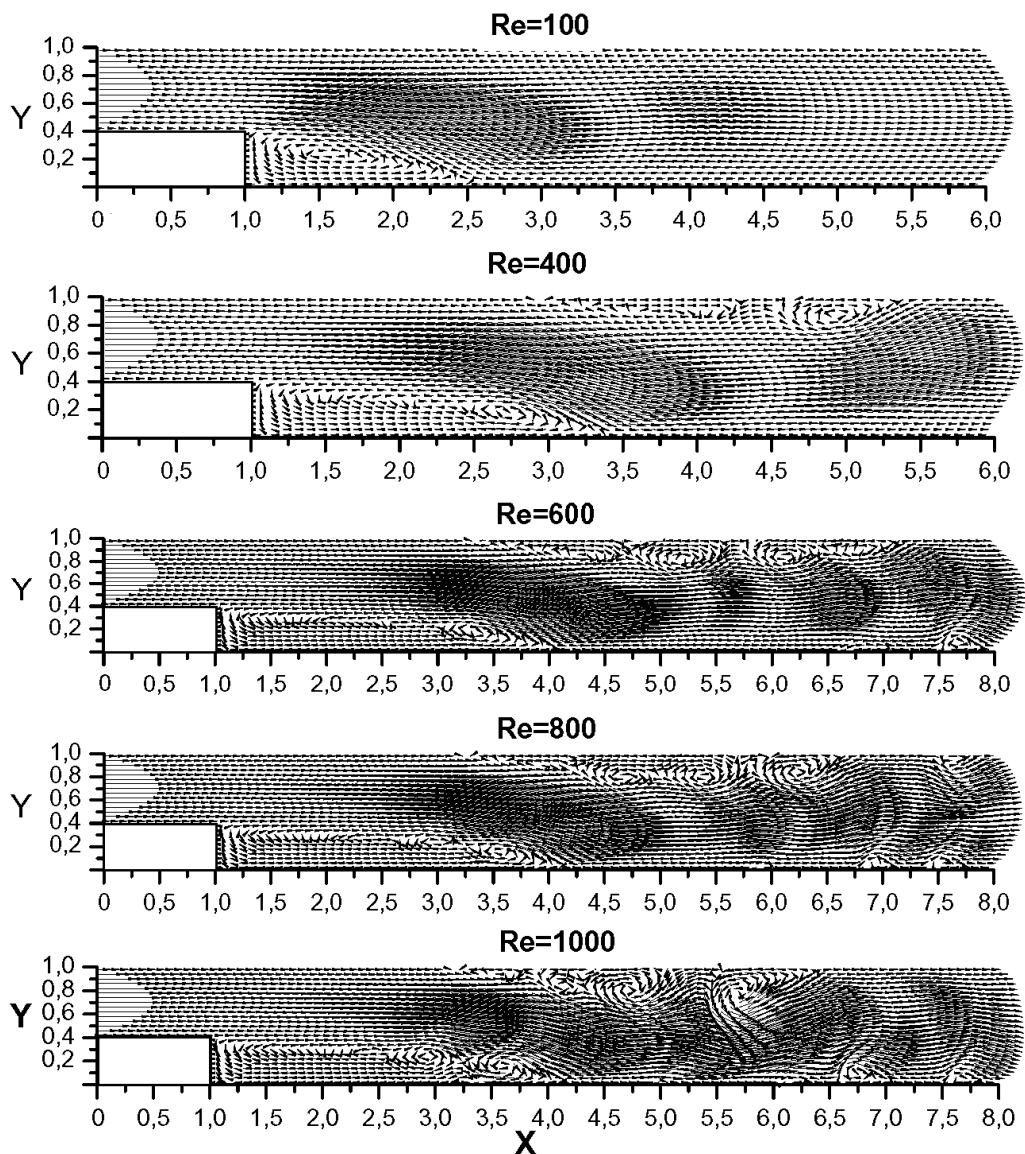


Рис. 4.21. Расчетное векторное поле скоростей в плоском внезапно расширяющемся канале ( $B=0,4$ ) при пяти различных числах Рейнольдса для  $\tau=100$

Таким образом, когда канал имеет внезапное расширение, то вследствие отрыва при числах  $Re \geq 400$  на верхней стенке канала образуется вторичная

вихревая зона. Наложение ее вертикальных скоростей на основной поток приводит к перераспределению скоростей по ширине канала в зоне уступа. Эти вертикальные составляющие скорости увеличивают перенос количества движения между отдельными слоями потока, что вызывает деформацию вертикального профиля продольной скорости.

С целью полноты представления картины скоростного поля в плоском канале с внезапным расширением на рис. 4.22 приведены расчетные профили горизонтальной скорости  $U(Y)$  в двадцати различных сечениях по оси  $X$  при пяти числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 600, 800, 1000$ ). Вместе с рис. 4.21 они более полно иллюстрируют структуру течения и искривление линии максимальных скоростей в канале при больших числах Рейнольдса, которое обусловлено возникновением системы вихрей не только в зоне за уступом, но и на верхней стенке канала.

Анализ расчетов показывает, что с ростом числа Рейнольдса в угловой точке уступа  $F$  происходит отрыв потока, который является причиной образования слоя смещения и вихревых циркуляционных зон в области за уступом. Это явление сопровождается наличием дополнительных потерь энергии основного потока из-за усиления обмена количеством движения между слоями жидкости, что и обуславливает изменение кинематической структуры течения вниз по потоку. Переформирование скоростной структуры по вертикали приводит к возникновению на определенных участках канала положительных градиентов давления, что в свою очередь служит причиной образования вторичных вихревых зон. Когда это происходит у верхней стенки канала ниже уступа, то имеет место отжим основного потока и на этом участке он ускоряется, что и наблюдается в приведенных на рис. 4.21 результатах расчетов.

Указанные особенности потоков в каналах с внезапным расширением имеют важное значение при проектировании различных устройств и аппаратов, например, с точки зрения процессов теплообмена и шумообразования.

Наряду с векторным полем скоростей на рис. 4.23 приводятся данные расчетов в виде изолиний равных скоростей для  $B = 0,4$  при пяти различных значениях чисел Рейнольдса. Здесь особенно четко прослеживается образование мультивихревой структуры течения и количественные значения скоростей в области за уступом в зависимости от параметра  $Re$  при  $B = 0,4$ .

Изолинии равных скоростей и их векторное представление позволяют отметить несколько характерных моментов в формировании кинематической структуры течения в зависимости от числа Рейнольдса.

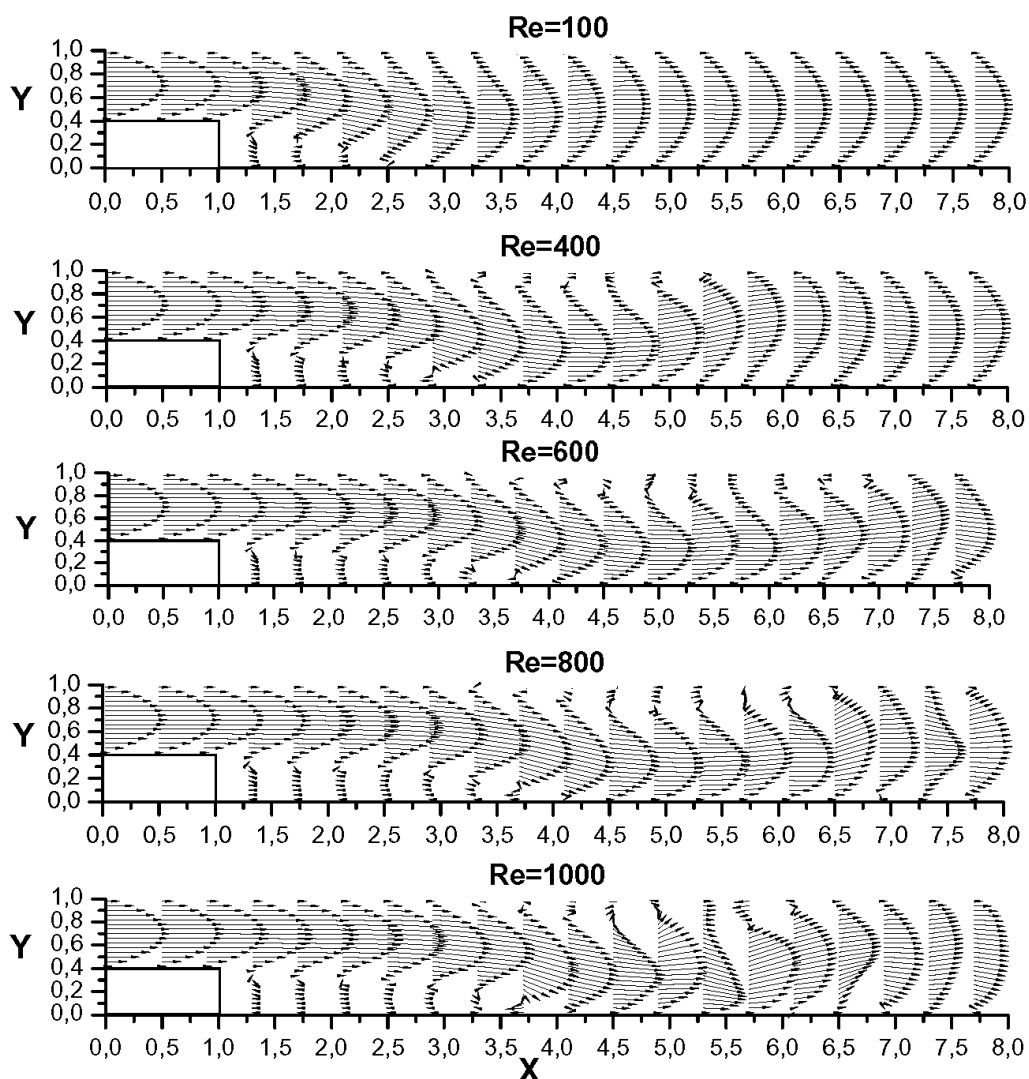


Рис. 4.22. Расчетные профили горизонтальных скоростей в различных сечениях оси  $X$  в плоском внезапно расширяющемся канале ( $B=0,4$ ) при пяти различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 600, 800, 1000$ ) для  $\tau=100$

При малых числах Рейнольдса ( $Re \leq 100$ ) вязкие эффекты являются преобладающими и скоростная структура течения во всей расчетной области является простейшей и определена фактически параболой Пуазейля, за исключением циркуляционной зоны за уступом. Рост числа Рейнольдса приводит к увеличению роли конвективного переноса. При  $Re \geq 400$  происходит отрыв потока с кромки уступа. В результате этого позади уступа циркуляционное вихревое течение интенсифицируется, а на верхней стенке канала появляется вторичная вихревая область, которая хорошо видна на рис. 4.21 и 4.23.

Анализ векторного поля и расположение линий равных скоростей, подобных линиям тока, наглядно показывает особенности и структуру циркуляционного движения жидкости. Из-за прилипания жидкости на нижней стенке канала движение в циркуляционной зоне несимметрично. С ростом числа Рейнольдса центр основного вихря смещается вправо по направлению основного потока в канале. Очевидно, что зона рециркуляции в рассмотренных случаях подпитывается жидкостью из основного потока благодаря образованию возвратного течения в зоне за уступом, как показано на рис. 4.23.

Нетрудно заметить, что обратное течение в области отрыва достигает значительной высоты над нижней стенкой канала, а с ростом числа Рейнольдса ее горизонтальный размер увеличивается, при этом вихревая область остается в правой части области отрыва, а основную левую часть области занимает обратное слоистое течение. Таким образом, вблизи нижней стенки канала имеют место как положительные, так и отрицательные значения продольной скорости.

С удалением от уступа вниз по течению вертикальный размер основной циркуляционной зоны уменьшается и при некотором значении  $X_c$  ее граница замыкается на нижнюю стенку канала. За этим сечением профиль горизонтальной скорости  $U(Y)$  в канале начинает постепенно деформироваться в параболу Пуазейля, которая реализуется на достаточно большом удалении от уступа.

На рис. 4.24 представлены расчетные зависимости длины циркуляционной зоны за уступом  $X_c = x_c / h$  и  $L_c = X_c / B$  в зависимости от числа Рейнольдса с различной их нормировкой. В качестве критерия определения координаты  $X_c$  принималось то значение  $X$  при котором ближайшее к нижней стенке канала значение  $U(Y)$  меняло свой знак.

Анализ полученной расчетной зависимости  $L_c$  от числа Рейнольдса показывает, что длина циркуляционной зоны  $L_c$  нелинейно зависит от числа  $Re$ , а с его увеличением длина  $L_c$  стремится к предельному значению  $L_c = 7,7$  для  $B = 0,4$ . При  $Re = 800$  и  $Re = 1000$  расчетные значения  $L_c$  практически уже совпадают. Это можно объяснить тем, что при числах Рейнольдса  $Re = 1000$  конвективные эффекты уже доминируют над вязкими и длина  $L_c$  перестает зависеть от числа  $Re$ . Геометрические параметры циркуляционной зоны имеют важное значение для различных прикладных задач.

В целом полученные результаты расчетов полей скорости в области внезапного расширения поперечного сечения плоского канала хорошо согласуются с известными представлениями картины течения наблюдаемой в физических и численных экспериментах [231]. Однако, наряду с этим



расчеты показали, что на верхней стенке канала, ниже циркуляционной зоны возникают вторичные вихревые области индуцируемые явлением отрыва и обратной связью полей давления. Кроме того, ниже по потоку за основной циркуляционной зоной на нижней стенке канала при числах  $Re = 800$  и  $Re = 1000$  имеются еще две дополнительные небольшие вихревые области. На рис. 4.21 они сами и их размер хорошо видны.

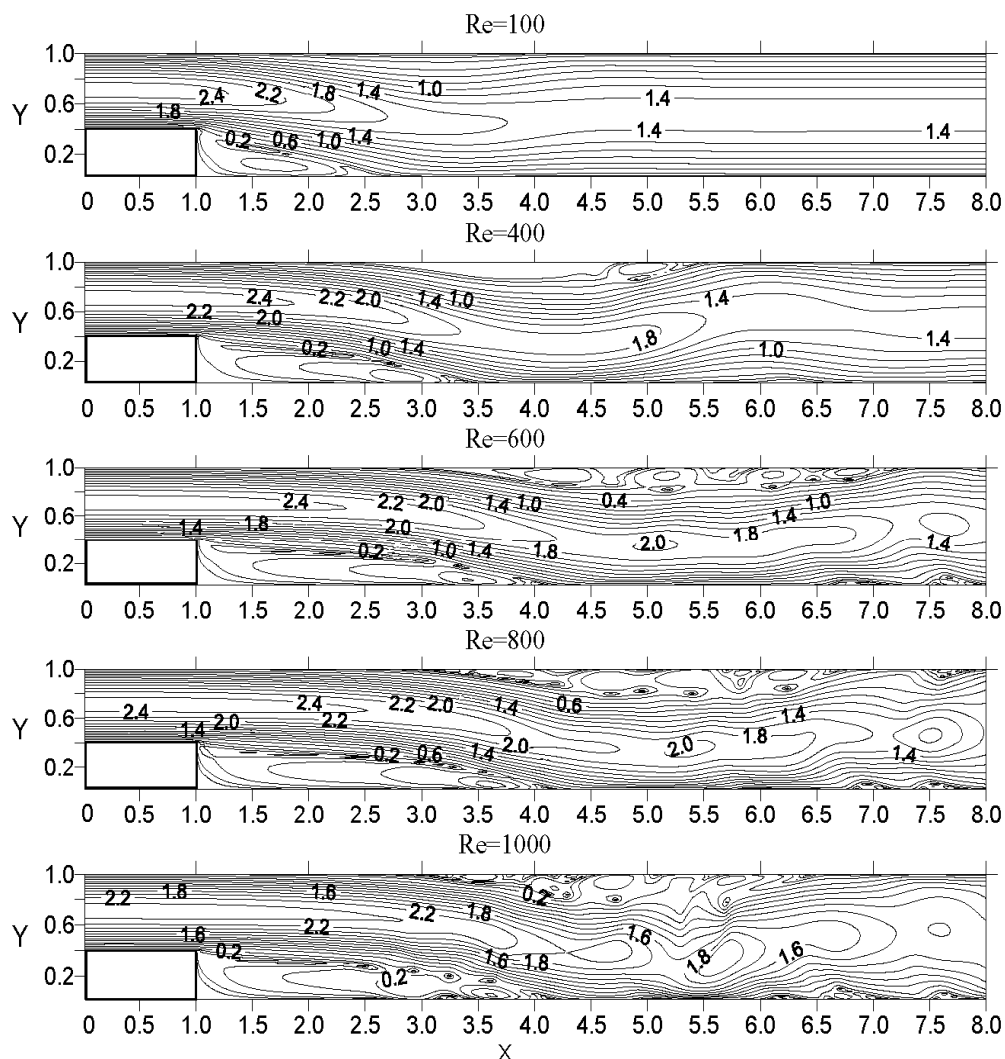


Рис. 4.23. Расчетные изолинии равных скоростей в плоском внезапно расширяющемся канале ( $B=0,4$ ) при пяти различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 600, 800, 1000$ ) для  $\tau=100$

Такие результаты ранее встречались в работе [232], где теоретически и экспериментально исследовано распределение полей скорости, длины циркуляционной зоны за уступом и координаты вторичных вихревых зон в

плоском канале с внезапным расширением. Измерения выполнялись с помощью лазерно-доплеровского анемометра в диапазоне чисел Рейнольдса  $70 \leq Re \leq 8000$ . Причем область измерения охватывала не только циркуляционную зону, но и значительную область за участком расширения. В этих экспериментах на верхних и нижних стенках канала зафиксированы вторичные вихревые области.

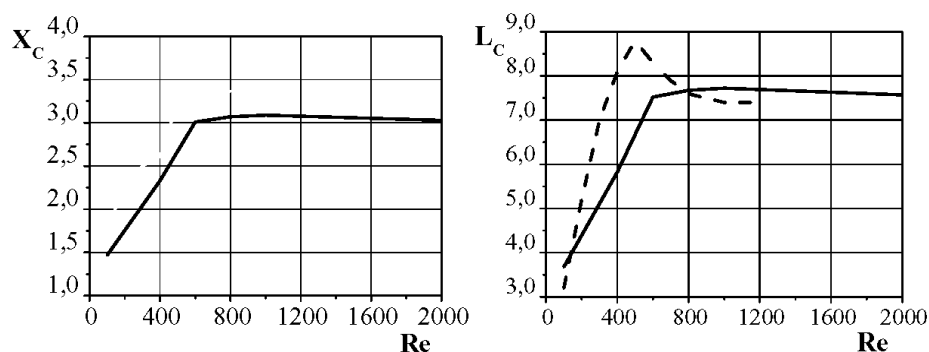


Рис. 4.24. Зависимость длины циркуляционной зоны за уступом  $X_c = x/h$  и  $L_c = X_c / B$  от числа Рейнольдса в плоском канале с внезапным расширением

( — наш расчет,  $B=0,4$ ; --- расчет [232],  $B=0,48$ )

В наших расчетах эти зоны наблюдаются при числах  $Re \geq 400$ . С ростом числа Рейнольдса горизонтальный размер верхней вторичной зоны увеличивается, а вихревая структура усложняется. Это хорошо видно на рис. 4.21 и рис. 4.23. Нам удалось сопоставить рассчитанную нами и в работе [232] длину основной циркуляционной зоны в зависимости от числа Рейнольдса. Результаты этих расчетов приведены на рис. 4.24 (справа). Сплошная кривая соответствует нашим расчетам, а прерывистая - работе [232]. Качественно эти результаты хорошо согласуются, но в нашем случае высота уступа  $B = 0,4$ , а в работе [232]  $B = 0,48$ . Этот факт может объяснить некоторое количественное отличие результатов.

Так как используемый в данной работе метод реализован в переменных скорость-давление, то в отличие от предыдущих работ, он дает возможность рассчитывать и поля давления, которые позволяют объяснить появление вторичных вихрей у верхней стенки канала.

Результаты расчетов относящиеся к распределению поля давлений представлены ниже на рисунках. В качестве первого примера на рис. 4.25 приведены результаты расчетов поля давления в виде изолиний коэффициента давления  $C_p$

$$C_p = \frac{p - p_1}{\rho u_0^2 / 2}$$

для высоты уступа  $B = 0,4$  при пяти различных числах Рейнольдса ( $Re = 100, 400, 600, 800, 1000$ ). Здесь  $p_I$  – характерное давление на геометрической оси входного сечения канала. Картина этих изолиний весьма сложна и характерна для отрывных течений, когда область циркуляционного течения за уступом мала по сравнению с протяженностью основного течения в канале. Анализ рис. 4.25 показывает, что наличие уступа и циркуляционной зоны при всех рассматриваемых числах Рейнольдса влияет на формирование поля давления. Легко видеть, что при  $Re = 100$  это влияние существенно лишь в ближней области за уступом, так как вниз по течению давление по вертикали при небольших  $X$  становится постоянным. С ростом числа Рейнольдса это влияние распространяется на значительную область за уступом. При  $Re \geq 400$  существенно изменяется картина поля давления в канале, включая образование его ячеистой структуры.

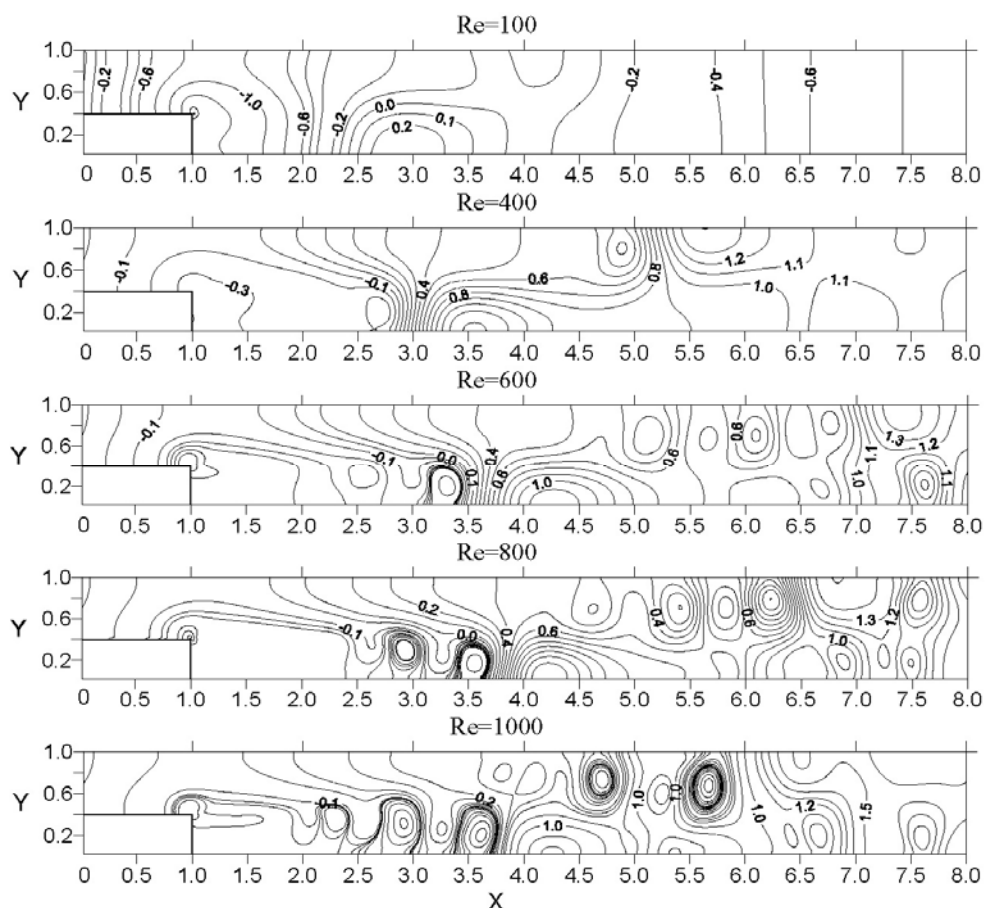


Рис. 4.25. Расчетное поле давления в виде коэффициентов  $C_p$  в плоском внезапно расширяющемся канале ( $B=0,4$ ) при пяти различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 600, 800, 1000$ ) для  $\tau=100$

Для объяснения механизма образования вихревых течений в канале с внезапным расширением обратимся к рассмотрению результатов расчета локальных значений давления в четырех характерных сечениях расчетной области. Сюда относится участок верхней стенки канала  $BC$  ( $Y = 1,0$ ), осевая линия канала ( $Y = 0,5$ ), участок на уровне высоты уступа ( $Y = 0,4$ ), участок нижней стенки канала  $ED$  ( $Y = 0$ ), и вертикальная граница уступа  $C_1FE$  ( $X = 1,0$ ).

Характер изменения давления в сечении  $C_1FE$  ( $X=1$ ) вдоль вертикальной стенки уступа при различных числах Рейнольдса для  $B=0,4$  приведен на рис. 4.26. Как и следовало ожидать на вертикальной стенке уступа, давление вблизи нижней стенки канала постоянно, а затем по мере приближения значений  $Y$  к углу уступа, то есть координате  $Y=0,4$ , значение давления падает и стремится к значению давления вблизи угловой точки уступа. В основном потоке на вертикальном участке  $C_1F$  локальное значение коэффициента давления вблизи верхней стенки канала максимально и сначала постоянно, а по мере приближения к уступу ( $Y=0,4$ ) оно плавно уменьшается и стремится к локальному давлению в угловой зоне уступа. Описанная картина распределения давления в сечении  $C_1FE$  имеет место при различных числах Рейнольдса. Поэтому характер этих кривых, представленных на рис. 4.26 идентичен, а различие состоит лишь в количественном значении безразмерного коэффициента давления  $C_p$ .

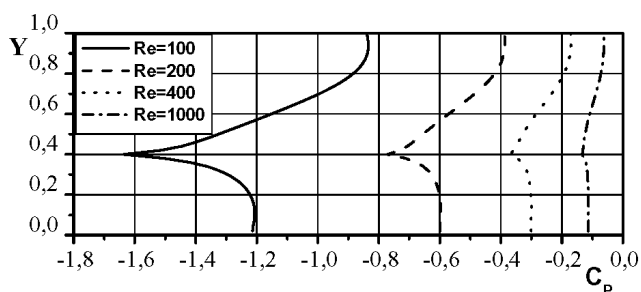


Рис. 4.26. Распределение коэффициента давления  $C_p$  по оси  $Y$  в сечении внезапного расширения канала  $EFC_1$  ( $X=1,02$ ) для четырех значений чисел Рейнольдса при  $B=0,4$ .

На комплексном рис. 4.27 представлено расчетное распределение коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси  $X$  для четырех различных уровней по высоте  $Y$ .

Расчеты показывают, что при заданном параметре расширения канала  $B$  изменение коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси  $X$  зависит от величины числа Рейнольдса. Обращает на себя внимание, что при  $Re=1000$  изменение коэффициента давления вдоль оси  $X$  носит волновой характер на всех четырех уровнях по высоте.

Данные расчетов коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси  $X$  представленные на трех верхних рисунках общего рисунка 4.27 показывают, что при  $Re \leq 400$  давление над уступом при  $0 < X \leq 1$  линейно убывает с расстоянием  $X$ , а при  $Re > 1000$  оно остается почти постоянным. Далее за уступом давление возрастает вследствие расширения потока.

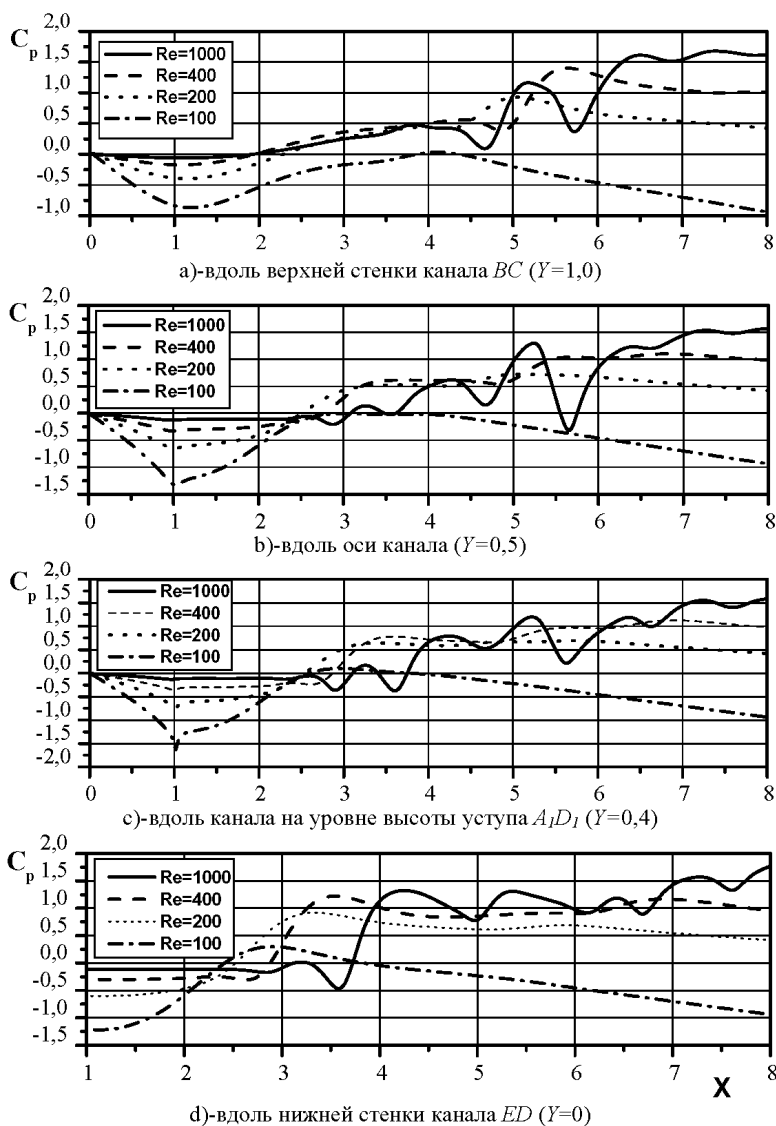


Рис. 4.27. Распределение коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси  $X$  в плоском внезапно расширяющемся канале на четырех уровнях по вертикали ( $Y=1,0; 0,5; 0,4; 0$ ) при различных значениях чисел Рейнольдса для  $B=0,4$  и  $\tau=100$

Далее за уступом давление возрастает вследствие расширения потока. Это увеличение давления происходит до тех пор пока противодействующий отрицательный градиент основного потока в канале не уравнивает возмущенное давление. Этот механизм действует при числах  $Re \leq 400$ , а при числах  $Re > 400$  вследствие явления отрыва потока характер поведения давления с расстоянием  $X$  изменяется. Уже при  $Re = 400$  наблюдается его повышение и низкочастотная осцилляция, а при  $Re = 1000$  оно на всех четырех рассматриваемых уровнях по  $Y$  возрастает и носит волновой характер. Это обусловлено наличием сложной вихревой структуры течения, которая хорошо видна на рис. 4.23 и рис. 4.25.

Для анализа стационарности характеристик течения интересно рассмотреть их зависимость от времени. Изучим поведение продольной  $U$ , поперечной скорости  $V$  и избыточного давления  $C_p$  в пяти характерных точках потока в зависимости от времени. Расположение указанных реперных точек схематически показано на рисунке 4.28.

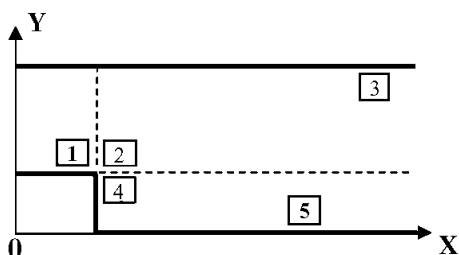


Рис. 4.28. Схема расположения пяти реперных точек

В качестве примера расчета поведения основных характеристик течения на комплексном рис. 4.29 представлены зависимости скоростей  $U$ ,  $V$  и давления  $C_p$  от времени в указанных четырех точках при числе  $Re = 1000$ . Точка под номером 4 оказалась не интересной и в ней характеристики потока близки к характеристикам точки 2.

Анализ рисунков показывает, что в первой и второй точках сдвиговый слой за кромкой уступа остается устойчивый и характеристики течения в нем  $U$ ,  $V$  и  $C_p$  выходят на стационарный режим и при  $\tau > 30$  практически не изменяются. В точках 3 и 5, находящихся в вихревых зонах наблюдается более сложная динамика течения. Расчеты показывают, что в точках 3 и 5 развивается неустойчивость в виде колебания значений соответствующих характеристик потока. Это связано с вихревой структурой течения.

Амплитуда этих колебаний носит нерегулярный характер. В пятой точке характерно появление вторых гармоник для обеих компонент скорости и коэффициента давления. Заметим, что здесь приведены лишь некоторые типичные примеры расчета, но они показывают возможность

корреляционного и спектрального анализа соответствующих динамических рядов.

Таким образом, представленные результаты показывают эффективность используемой численной схемы для расчета сложных течений с рециркуляциями и высокое качество моделирования тонкой структуры течения в плоском канале с внезапным расширением, включая вторичные вихревые образования и нестационарные отрывные режимы течения.

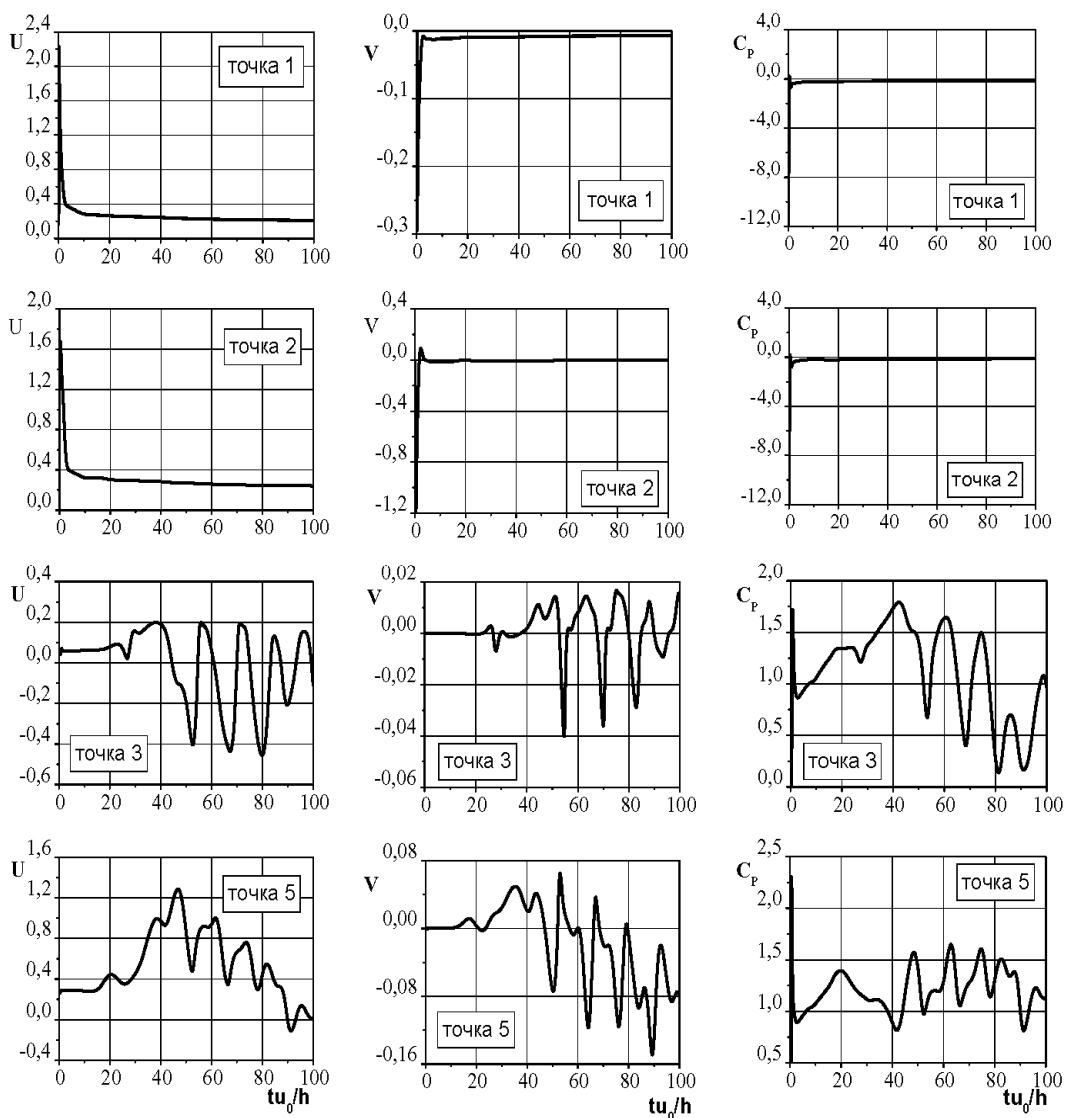


Рис. 4.29. Зависимость мгновенных значений компонентов скоростей  $U$ ,  $V$  и давления  $C_p$  в точках 1-5 от времени при числе Рейнольдса  $Re=1000$

## **4.7. Течение в плоском канале с квадратным выступом на его стенке**

### **4.7.1. Введение**

Наличие какого-либо препятствия или элемента шероховатости на обтекаемой твердой поверхности может значительно влиять на структуру потока с поперечным сдвигом. С течениями такого класса сталкиваются при рассмотрении внешних и внутренних задач гидроаэродинамики. Это могут быть устройства, помещенные на крыловой профиль или лопатку турбины, для управления процессами сопротивления и теплообмена, это могут быть чипы на компьютерных платах, или течения в трубах, каналах и кровеносных сосудах с геометрическими неоднородностями на стенках и т.п. Интерес к таким задачам обусловлен тем, что в зависимости от числа Рейнольдса и геометрических размеров препятствия в потоке могут возникать различные вихревые структуры как перед препятствием, так и в следе за ним. Возникающий при определенных числах Рейнольдса отрыв течения существенно влияет на величину гидродинамического сопротивления и процессы теплопереноса и шумообразования. Вследствие этого задачи такого класса являются предметом постоянного изучения различных исследователей [53]..

В литературе известно множество экспериментальных работ и примеров расчета рассматриваемых течений с помощью приближенных и численных методов [21, 24, 149, 217]. В большинстве ранних экспериментальных и численных исследований движения жидкости вблизи плохообтекаемых препятствий, закрепленных на жесткой неподвижной поверхности, основное внимание уделялось общим характеристикам течения, таким как профили средних скоростей и длина циркуляционной зоны за препятствием. В последние годы уровень развития математического моделирования и компьютерных технологий позволяет определить не только традиционные характеристики таких течений, но и надежно рассчитывать тонкую вихревую структуру течения, включая вторичные мультивихревые образования на твердых стенках за основной циркуляционной зоной позади препятствия.

Форма вихря, образующегося перед препятствием изучалась в работах [233, 363], где было показано, что эта вихревая зона подпора вверх по течению удлинялась с ростом числа Рейнольдса. Ряд работ посвящен изучению влияния малого закрылка на крыловом профиле и лопасти лопатки на величину подъемной силы или снижение профильного сопротивления [269, 379]. В работе [234] изучалось стационарное плоское течение за малым препятствием прямоугольной формы. Недавно в работе [317] изучали обтекание препятствия полукруглой формы на основе прямого





Согласно методу DNM-LF для описания движения жидкости используются интегральные уравнения (4.1), (4.2), выражающие законы сохранения массы и изменения количества движения. Дискретный аналог этой системы уравнений после использования формулы Ньютона для тензора напряжений  $\Pi$  строится на разнесенных сетках методом контрольного объема. При конечно-разностной аппроксимации производных применяются явная схема первого порядка точности по времени и неявная схема со вторым порядком точности по пространству. При численном решении задачи удобно перейти к безразмерным переменным. С этой целью за масштаб длины принимается ширина канала  $h$ , за масштаб скорости принята среднерасходная скорость в канале  $u_0 = Q/h$ , за масштаб времени принята величина  $t_0 = h/u_0$ , а за масштаб давления принят скоростной напор  $p_0 = \rho u_0^2$ . Тогда в безразмерных переменных  $U = u/u_0$ ,  $V = v/u_0$ ,  $X = x/h$ ,  $Y = y/h$ ,  $\tau = t u_0/h$ ,  $P = p/\rho_0 u_0^2$  конечно-разностный аналог исходной системы уравнений (4.1), (4.2), как было показано выше, записывается в виде:

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P, \quad (4.18)$$

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = [\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U] / d_{j+1/2,i}^U, \quad (4.19)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V, \quad (4.20)$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}$ ,  $d_{j,i+1/2}$ ,  $c_1$ ,  $c_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$ , выражения  $G$  с верхними индексами  $U$ ,  $V$  и свободный член  $f^P$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются по определенным алгебраическим формулам.

Система уравнений (4.18) - (4.20) связывает значения давления и компонентов скоростей на  $(n+1)$  временном слое.

Для завершения постановки задачи необходимо задать начальные и краевые условия на всех границах расчетной области  $ABCDQKFEA$ . Предполагается, что в начальный момент времени во всей расчетной области горизонтальная скорость  $U$  имеет параболический профиль Пуазейля, а вертикальная скорость  $V$  и давление  $P$  равны нулю.

На входной границе расчетной области будем использовать условия невозмущенного потока, которые в данном случае состоят в том, что вертикальная скорость  $V|_{AB}=0$ , а продольная скорость  $U$  имеет установившейся параболический профиль Пуазейля в виде

$$U(Y)|_{AB}=6(1-Y)Y. \quad (4.21)$$

На всех неподвижных твердых стенках граничными условиями для компонентов скоростей являются очевидные условия прилипания  $U|_{\Gamma}=0$  и непротекания  $V|_{\Gamma}=0$ , где  $\Gamma$ - твердая граница. При постановке граничных условий на выходе из расчетной области в сечении  $CD$ , мы сталкиваемся с проблемой моделирования граничных условий на бесконечности. В данном случае будут использованы стандартные «мягкие» условия Неймана.

Таким образом решение системы уравнений (4.18) –(4.20) будем искать в области

$0 \leq X \leq S, \quad 0 \leq Y \leq 1$  с начальными и граничными условиями в виде:

Начальные условия:  $U(X,Y,0)=6(1-Y)Y, \quad V(X,Y,0)=0, \quad P(X,Y,0)=0.$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} U|_{AB}=6(1-Y)Y; \quad U|_{BC}=0; \quad \partial U / \partial X|_{CD}=0; \quad U|_{DQ}=0; \\ U|_{QK}=0; \quad U|_{KF}=0; \quad U|_{FE}=0; \quad U|_{EA}=0; \\ V|_{AB}=0; \quad V|_{BC}=0; \quad \partial V / \partial X|_{CD}=0; \quad V|_{DQ}=0; \\ V|_{QK}=0; \quad V|_{KF}=0; \quad V|_{FE}=0; \quad V|_{EA}=0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Основными параметрами задачи являются число Рейнольдса и геометрическая высота квадратного выступа  $B = b / h$ . В процессе решения задачи требуется определить поля скорости и давления в расчетной области и исследовать влияние числа Рейнольдса и геометрического размера препятствия  $B$  на вихревую структуру течения в канале, протяженность зоны подпора перед уступом и длину циркуляционной зоны за препятствием. Стационарное течение в канале характеризуется тем, что искомые переменные  $U, V, P$  не зависят от времени. Для решения системы конечно-разностных алгебраических уравнений была разработана компьютерная программа – NLF.

### 4.7.3. Результаты расчетов и их обсуждение

В данном разделе приводятся и анализируются результаты расчетов структуры потока в плоском канале в зоне расположения выступа с квадратной формой поперечного сечения при пяти различных числах Рейнольдса  $Re=(100, 400, 600, 800, 1000)$ , построенного по ширине канала  $Re = u_0 \cdot h / \nu$ . Расчеты выполнены на равномерных сетках с шагами по пространству  $\Delta x = \Delta y = 0,02$  при высоте выступа  $B = b / h = 0,4$ .

В качестве первого примера ниже на рис. 4.31 приведены результаты расчетов векторного поля скоростей в плоском канале с выступом квадратной формы ( $B=0,4$ ) при пяти числах Рейнольдса. Эти рисунки наглядно показывают влияние числа Рейнольдса на вихревую структуру течения в зоне расположения выступа.

Анализ рисунков показывает, что при всех пяти числах Рейнольдса для зоны за препятствием характерно образование возвратных течений, а протяженность этой зоны и структура течения в ней зависят от числа Рейнольдса при заданной геометрии выступа. Нетрудно видеть, что при  $Re = 100$  и  $B=0,4$  ниже выступа наблюдается хорошо выраженная циркуляционная зона в виде одного большого вихря несколько вытянутого вдоль по течению, а выше выступа поток тормозится и обтекает выступ пока без образования вихревой зоны в углу  $E$ . С ростом числа Рейнольдса вихревая структура потока качественно меняется.

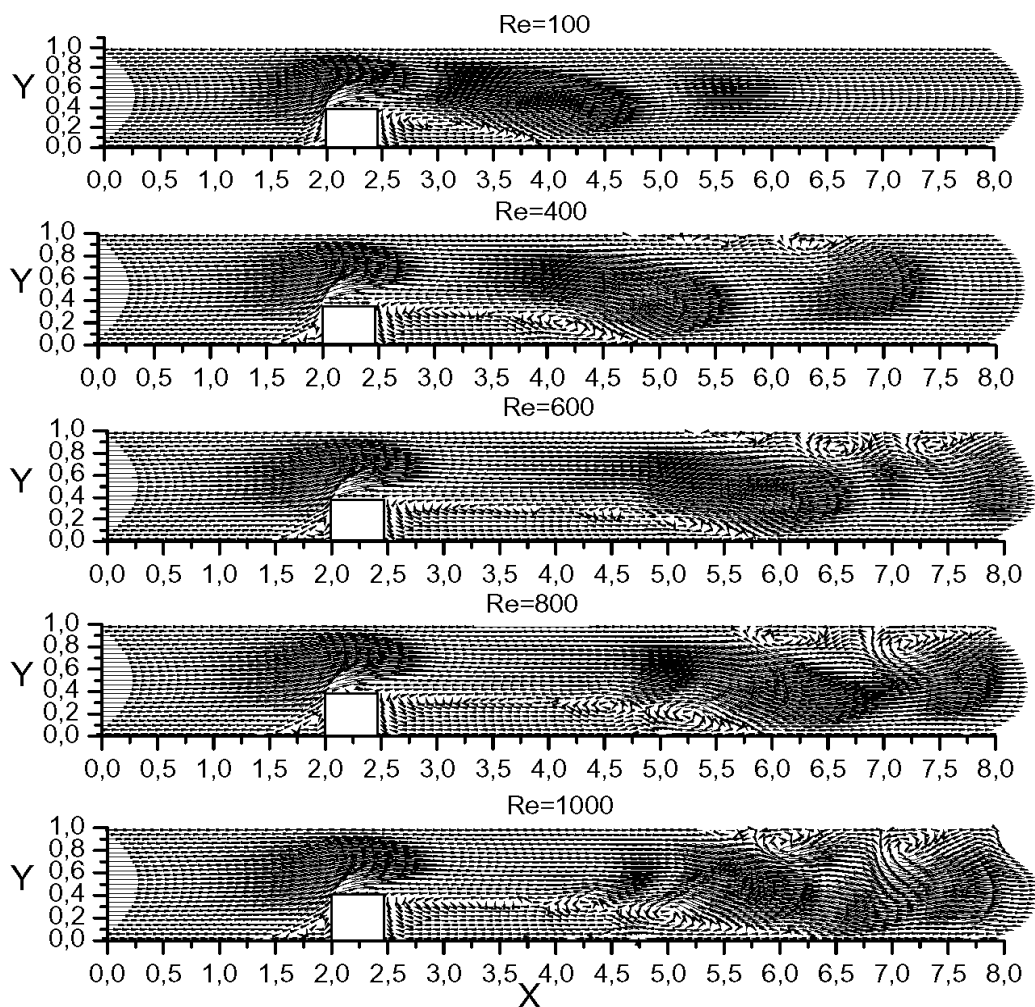


Рис. 4.31. Фрагменты векторных полей скоростей в плоском канале с выступом квадратной формы ( $B = 0,4$ ) при пяти различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 600, 800, 1000$ ) для  $\tau=100$

Уже при  $Re \geq 400$  впереди выступа образуется небольшая вихревая зона жидкости с вращением по часовой стрелке, а циркуляционная зона образующаяся за выступом, в верхней своей части дробится на два вихря с противоположным направлением вращения. Дальнейший рост числа Рейнольдса, то есть при  $Re \geq 800$  горизонтальные размеры вихревых областей, как перед выступом, так и за ним увеличиваются, а их структура усложняется вследствие образования нескольких локальных вихревых структур.

Одним из впечатляющих результатов полученных с помощью расчетов является обнаружение вторичной вихревой зоны на верхней стенке канала сразу за основной циркуляционной зоной. Так как характерным является то, что вторичная вихревая структура наблюдается лишь при числах  $Re \geq 400$ , а при  $Re = 100$  она еще не появляется, то можно утверждать, что это связано с явлением отрыва потока с правой верхней кромки препятствия. Таким образом, в зависимости от числа Рейнольдса при заданном размере выступа  $B$  может существовать как стационарный режим обтекания препятствия, так и нестационарный режим с отрывом.

С целью полноты представления картины скоростного поля в плоском канале при наличии геометрической неоднородности в виде квадратного препятствия, на рис. 4.32 приведены расчетные профили горизонтальных скоростей  $U(Y)$  в двадцати различных сечениях по оси  $X$  при пяти числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 600, 800, 1000$ ).

Вместе с рис. 4.31 они достаточно полно иллюстрируют сложную структуру течения и искривление линии максимальных скоростей, которое обусловлено наличием системы вихрей не только в зоне за препятствием, но и на верхней стенке канала.

Анализ полученных данных показывает, что при умеренных числах Рейнольдса ( $400 \leq Re \leq 1000$ ) в верхней правой угловой точке препятствия происходит отрыв потока. Это явление сопровождается возникновением дополнительных потерь энергии основного потока и усилением обмена количеством движения между слоями жидкости в поперечном направлении, что и обуславливает изменение динамики и кинематики потока за препятствием. Переформирование скоростной структуры потока по высоте канала приводит к возникновению на определенных участках канала положительных градиентов давления, что в свою очередь служит причиной образования вторичных вихревых зон. Особая сложность их геометрии хорошо наблюдается на рис. 4.32 при  $Re = 1000$ .

В дополнение к двум приведенным расчетным картинам течения, на рис. 4.33 представлены результаты расчетов в виде линий равных скоростей в канале при пяти различных числах Рейнольдса. На приведенном рисунке, подобно линиям тока, выразительно показана тонкая структура и величина скоростей в плоском канале с квадратным выступом при пяти числах Рейнольдса.

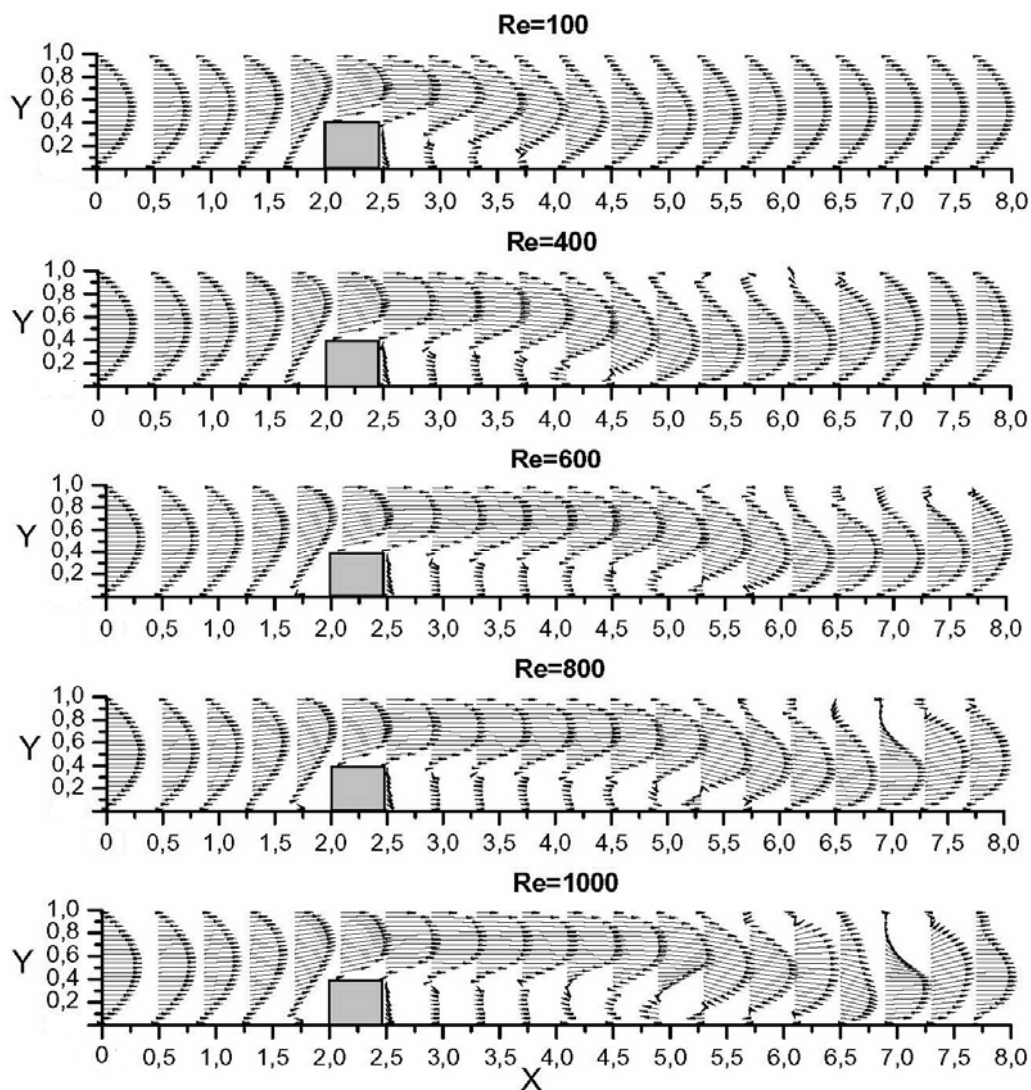


Рис. 4.32. Расчетные профили продольных скоростей в различных сечениях оси  $X$  в плоском канале с выступом квадратной формы ( $B=0,4$ ) при пяти различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 600, 800, 1000$ ) для  $\tau=100$

Полученная картина течения в зоне за препятствием во многом похожа на полученную нами ранее структуру течения во внезапно расширяющемся канале за уступом [48], но они не одинаковы.

В целом расчетные изолинии равных скоростей и их векторные поля показывают, что при малых числах Рейнольдса  $Re \leq 100$  вязкие эффекты являются преобладающими и скоростная структура течения во всей расчетной области является простейшей и определена фактически параболой Пуазейля, за исключением зоны в непосредственной близости от препятствия. Рост числа Рейнольдса приводит к увеличению роли

конвективного переноса. В результате этого позади выступа циркуляционное вихревое течение интенсифицируется и распадается на две области с различной структурой течения, характер которой виден на рисунках 4.31 и 4.33.

Заметим, что с ростом числа  $Re$  горизонтальный размер как зоны подпора, так и циркуляционной зоны увеличивается. Вертикальный же размер вихревой зоны вдоль оси  $X$  за выступом уменьшается и при некотором  $X_c(Re)$  он замыкается на нижнюю стенку. За этим сечением профиль горизонтальной скорости  $U(Y)$  в канале постепенно пере-страивается в параболу Пуазейля, которая как показали методические расчеты, реализуется вдали от препятствия на расстоянии  $X=25$ . Горизонтальный размер зоны подпора  $L_p$  и протяженности циркуляционной зоны  $L_c$  за выступом представляет большой практический интерес.

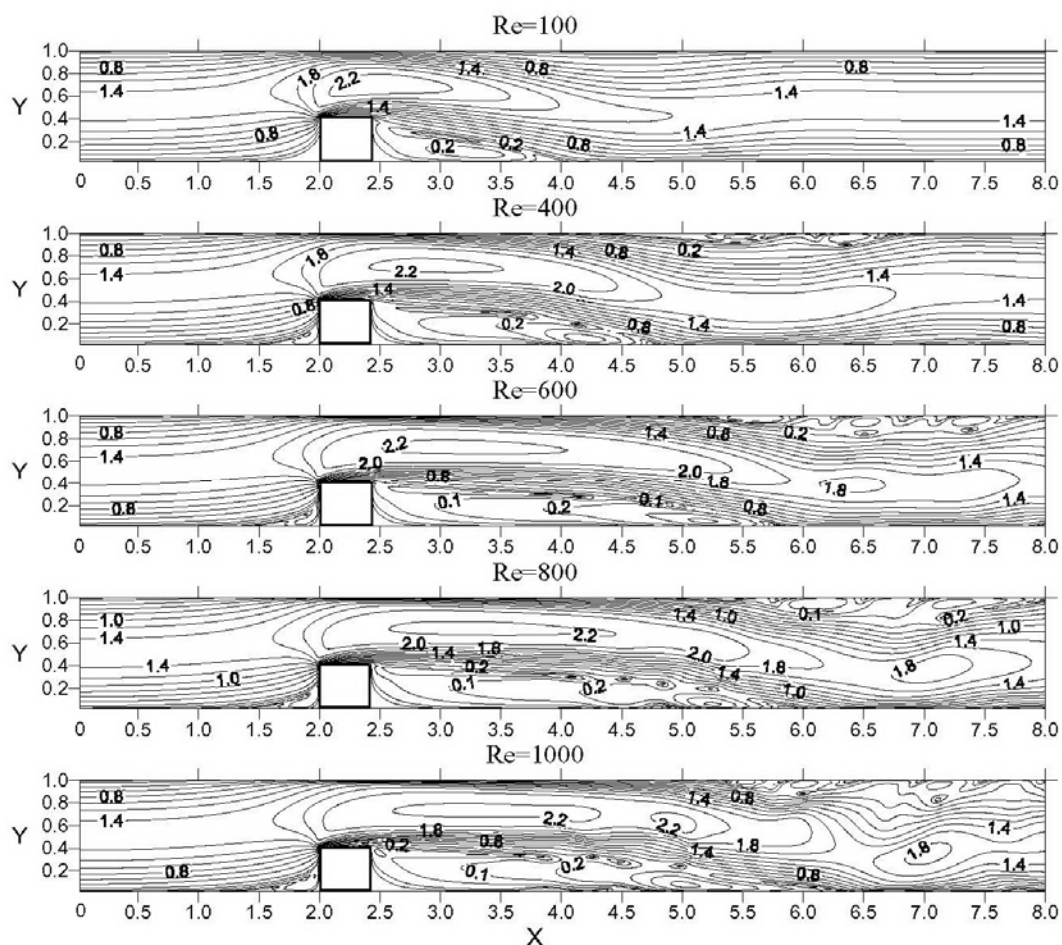


Рис. 4.33. Расчетные изолинии равных скоростей в плоском канале с выступом квадратной формы ( $B=0,4$ ) при пяти различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 600, 800, 1000$ ) для  $\tau=100$

На рис. 4.34 представлена расчетная зависимость длины зоны подпора  $X_p$  и  $L_p$  и циркуляционной зоны  $X_c$  и  $L_c$  в зависимости от числа Рейнольдса при двух вариантах их нормировки. В качестве критерия определения координаты  $X_c$  принималось то значение  $X$ , при котором ближайшее к нижней стенке канала значение  $U(Y)$  меняло свой знак. Однако следует заметить, что при числах  $Re \geq 800$  эта координата протяженности циркуляционной зоны становится менее выраженной вследствие наличия там не одной, а нескольких сложных мультивихревых областей.

Анализ полученной зависимости  $L_c = X_c / B$  от числа  $Re$  показывает, что при  $Re \leq 400$  длина циркуляционной зоны  $L_c$  линейно зависит от числа  $Re$ , а при увеличении числа Рейнольдса длина  $L_c$  растет нелинейно и при  $Re = 1000$  принимает максимальное значение  $L_c = 9,7$ . При числах  $Re \geq 1000$  конвективные эффекты уже доминируют над вязкими и длина  $L_c$  перестает зависеть от числа  $Re$ , но при этом включается второй механизм влияния, обусловленный развитой вихревой структурой в зоне за препятствием.

В литературе известны результаты исследования расчетов полей скорости в области расположения препятствия, когда оно находится в полуограниченном потоке. [234].

В нашем же случае, когда препятствие расположено на нижней стенке плоского канала, обтекание происходит в условиях ограниченного потока. Наличие дополнительного параметра в задаче в виде расстояния  $h_1$  между верхней стенкой канала и верхней границей препятствия приводит к тому, что при числах  $Re \geq 400$  на верхней стенке канала, как уже отмечалось выше,

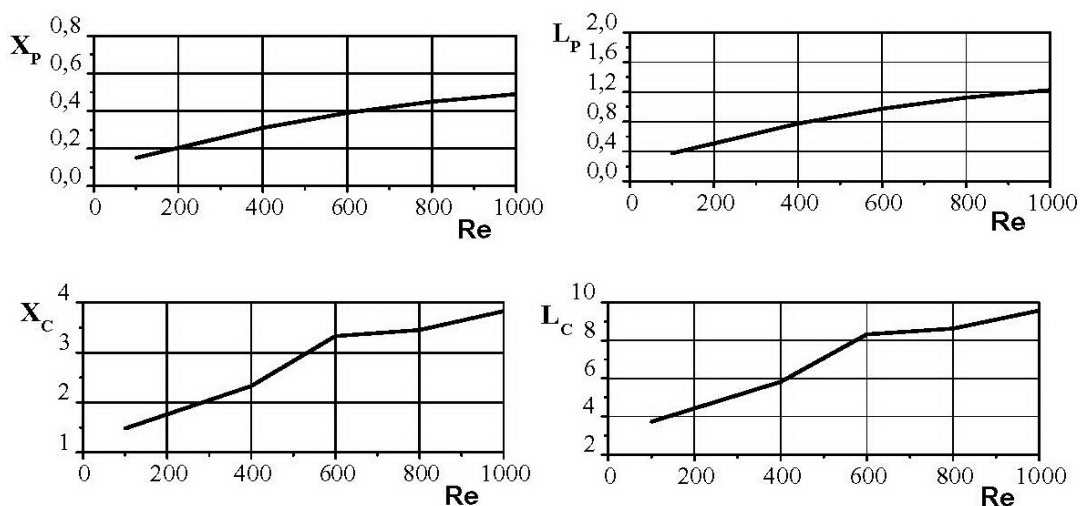


Рис. 4.34. Зависимости от числа Рейнольдса длины зон подпора перед препятствием  $X_p = x_p / h$  и  $L_p = X_p / B$  (вверху) и циркуляционных зон  $X_c = x_c / h$  и  $L_c = X_c / B$  (внизу) за препятствием квадратной формы в плоском канале при  $B = 0,4$



происходит образование вторичной вихревой зоны, обусловленной взаимодействием полей давления в области отрыва потока за препятствием и давления в основном потоке.

Так как используемый метод решения системы исходных уравнений движения жидкости реализован в переменных скорость-давление, то это дает возможность рассчитывать непосредственно и поле давления. Результаты расчетов относящиеся к распределению поля давления представлены ниже на рис. 4.35 – рис. 4.37 в виде безразмерных коэффициентов давления

$$C_p = \frac{p - p_1}{\rho u_0^2 / 2}$$

где  $p_1$  - характерное давление в невозмущенном потоке, то есть на геометрической оси во входном сечении канала. В качестве первого примера на рис. 4.35 представлены расчетные значения коэффициента давления  $C_p$  в виде изолиний (изобар) при пяти числах Рейнольдса для случая выступа квадратной формы. Картина этих изолиний очень сложна и характерна для обтекания тупых тел. Их ячеистая структура хорошо коррелирует с вихревой структурой полей скорости.

Для более детального анализа поведения давления обратимся к рассмотрению результатов расчетов локальных значений давления на некоторых характерных участках в рассматриваемой задаче. К ним относится участок верхней стенки канала  $BC(Y=1)$ , давление вдоль горизонтальной геометрической оси канала ( $Y=0,5$ ), давление вдоль оси канала на уровне высоты препятствия  $A_1D_1(Y=0,41)$ , давление вдоль нижней границы канала  $AE, FK, QD$  ( $Y=0; Y=0,41; Y=0$ ), а также на вертикальных участках  $EFB_1$  и  $QKC_1$ , проходящих через боковые границы препятствия  $EF$  и  $QK$ .

Характер изменения коэффициента давления  $C_p$  в вертикальном сечении  $EFB_1(X=2)$  вдоль передней вертикальной стенки выступа при различных числах Рейнольдса для  $B=0,4$  приведен слева на рис. 4.36. Как и следовало ожидать, на этом участке при указанных числах  $Re$  давление вблизи нижней стенки канала максимально и сначала постоянно, а затем по мере приближения значения  $Y$  к координате  $Y=0,4$ , его значение уменьшается. На участке вертикального сечения  $B_1F$ , давление вблизи верхней стенки канала тоже сначала постоянно, а затем по мере приближения к левой верхней кромке уступа ( $Y=0,4$ ) оно уменьшается и сравнивается с локальным давлением в этой зоне.

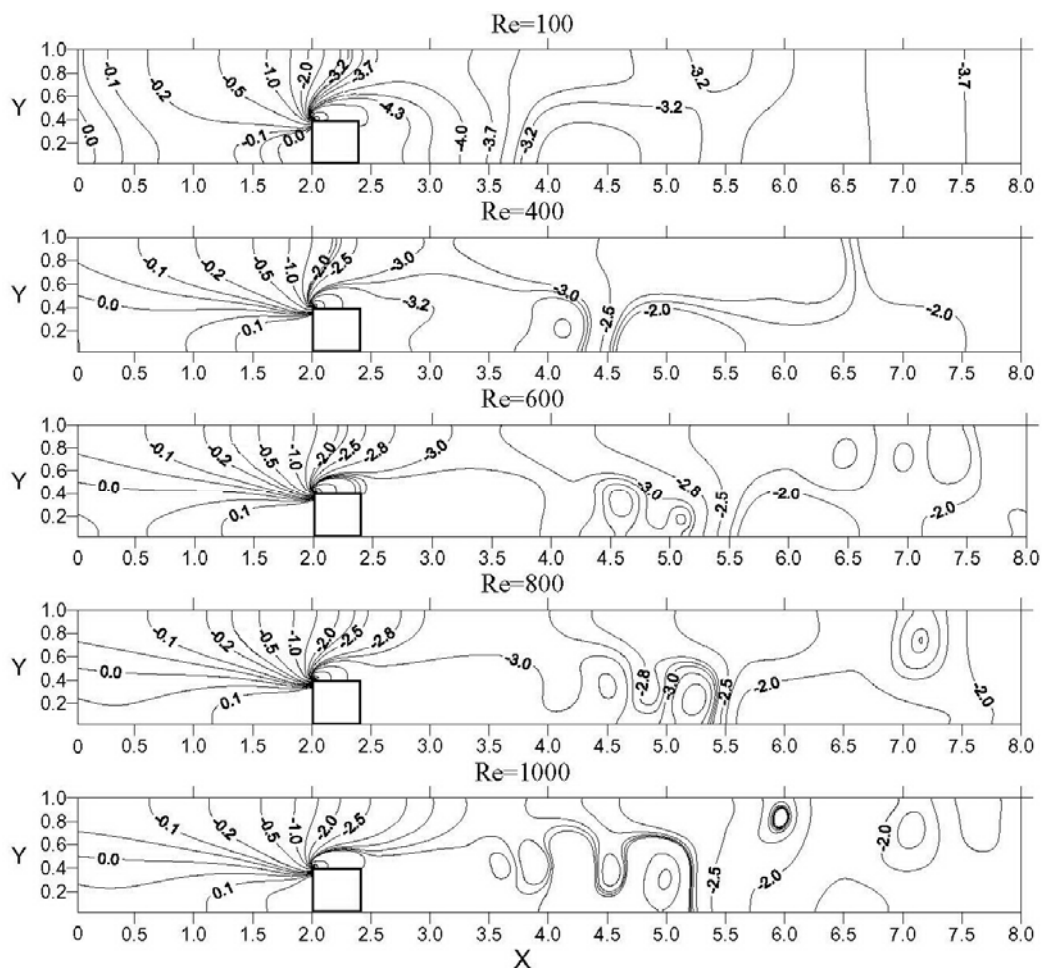


Рис. 4.35. Расчетное поле давлений в виде изолиний коэффициентов  $C_p$  в плоском канале с выступом квадратной формы ( $B=0,4$ ) при пяти различных числах Рейнольдса ( $Re=100, 400, 600, 800, 1000$ ) для  $\tau=100$

Анализ рисунка показывает, что характер распределения давления по вертикали в рассматриваемом сечении  $X=2$ , приведенный на рис. 4.36 слева, слабо зависит от числа Рейнольдса. Кроме того, набегающий на выступ поток создает перед ним повышенное давление, которое затем формирует структуру потока в зоне подпора.

Аналогичные результаты расчетов изменения коэффициентов давления  $C_p$  в вертикальном сечении  $QKC_1$  ( $X=2,4$ ) вдоль правой боковой стенки выступа при различных пяти числах Рейнольдса для  $B=0,4$  приведены справа на рис.4.36. Расчеты показывают, что давление на задней стенке выступа меньше чем в основном потоке. Вблизи нижней стенки канала на участке  $QK$  оно сначала постоянно по вертикали, а затем по мере прибли-

жения к верхней правой кромке выступа  $K$  значение давления уменьшается. На вертикальном участке  $C_1K$  в основном потоке локальное давление вблизи верхней стенки максимально и сначала постоянно, а по мере приближения к верхней границе выступа (точка  $K$ ) оно уменьшается и стремится к локальному давлению в угловой зоне выступа.

Описанная картина распределения давления в сечении  $C_1KQ$  имеет место при всех пяти числах Рейнольдса и изменяется лишь количественно, как показано на рис. 4.36. Значительный интерес представляет поведение давления на различных вертикальных уровнях канала вдоль оси  $X$  в зависимости от числа Рейнольдса. На комплексном рис. 4.37 представлены результаты таких расчетов. Нетрудно видеть, что в ближней от входа области ( $X < 2$ ) на всех четырех уровнях по вертикали ( $Y=1$ ;  $Y=0,5$ ;  $Y=0,41$ ;  $Y=0$ ) коэффициент давления  $C_p$  при всех числах Рейнольдса сначала очень незначительно убывает вдоль оси  $X$ , однако по мере приближения к выступу, в силу сохранения расхода в канале, поток над выступом ускоряется и давление интенсивно падает. Затем, по мере прохождения выступа и следующей за ним циркуляционной зоны, поток вновь расширяется и тормозится, что вызывает значительный рост давления в этой локальной области в направлении основного потока.

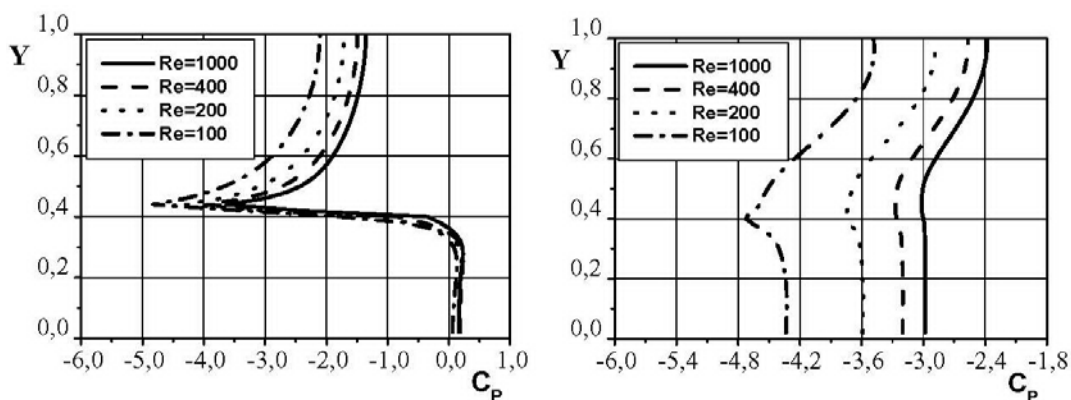


Рис. 4.36. Распределение коэффициента давления  $C_p$  по оси  $Y$  в сечении  $X=2,0$  (слева) и в сечении  $X=2,4$  (справа) в плоском канале с выступом квадратной формы ( $B=0,4$ ) при различных числах Рейнольдса

Взаимодействие этого локального давления, имеющего положительный градиент давления, с отрицательным градиентом давления основного потока приводит к возникновению обратного течения вблизи верхней стенки канала, скоростная структура в которых изучалась выше и зависит от числа Рейнольдса и геометрии препятствия.

Обратимся теперь к рассмотрению результатов расчета давления на горизонтальном участке  $A_1FKD_1$  ( $Y=0,41$ ), совпадающим с верхней

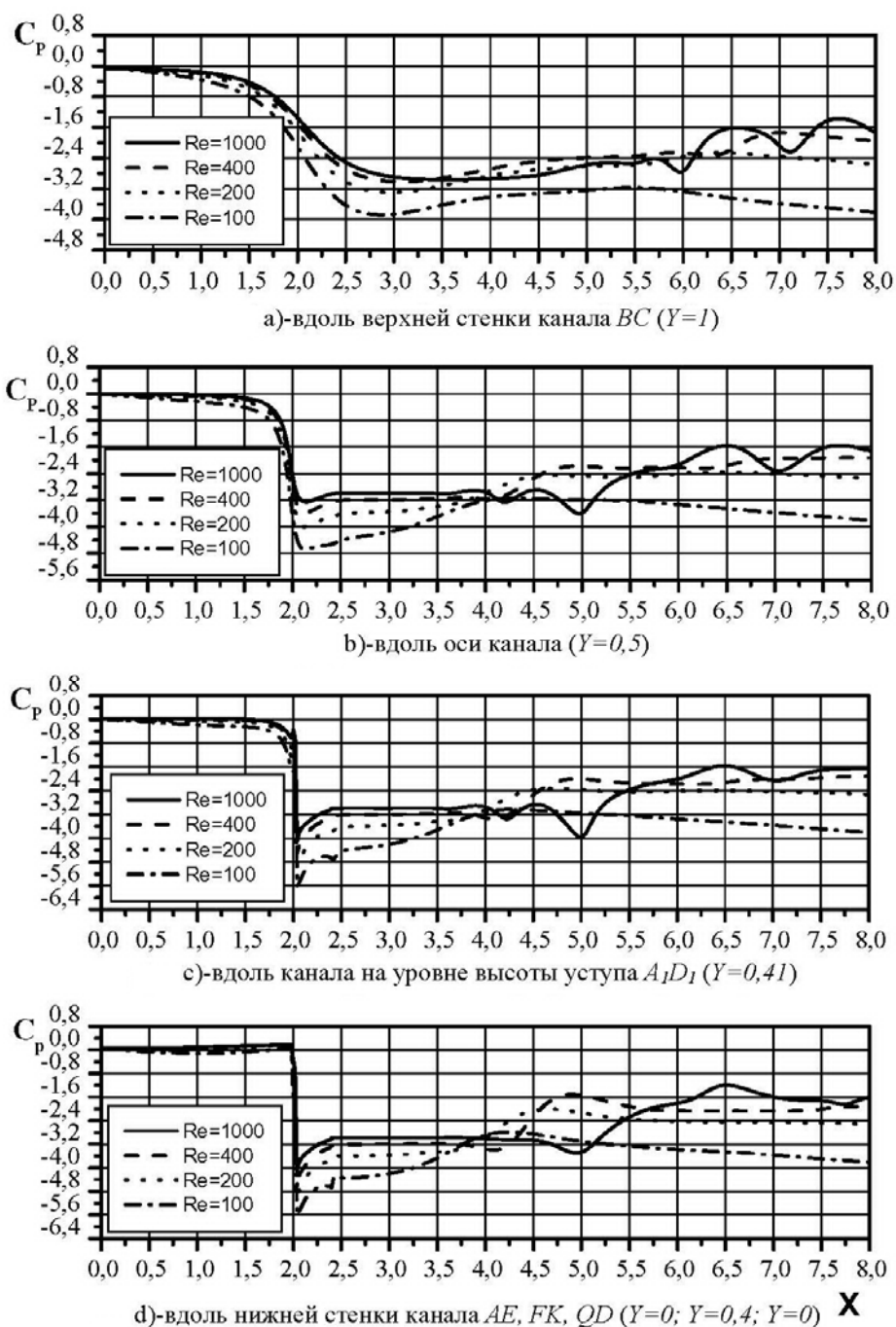


Рис. 4.37. Распределение коэффициента давления  $C_p$  в плоском канале с выступом квадратной формы ( $B=0,4$ ) при четырех числах Рейнольдса ( $Re=100, 200, 400, 1000$ ) вдоль оси  $X$  в четырех различных сечениях ( $a, b, c, d$ ) для  $\tau=100$

границей выступа. Распределение давления вдоль оси  $X$  на этой высоте ( $Y = 0,41$ ) при четырех числах Рейнольдса для квадратного выступа с длиной ребра  $b = 0,4h$  представлено также на рис. 4.37.

Расчеты показывают, что перед выступом на участке  $A_1F$  давление почти постоянно при всех четырех числах Рейнольдса. Далее после приближении к левой верхней кромке выступа, в силу уменьшения поперечного сечения канала и ускорения потока, давление при всех четырех числах Рейнольдса на участке выступа резко падает, а затем после прохождения выступа поток снова расширяется и давление возрастает, но уже не так резко как падало, так как процесс расширения потока за выступом демфируется наличием циркуляционной зоны позади него. Далее с ростом координаты  $X$  на участке  $KD_1$ , давление плавно восстанавливается до уровня невозмущенного давления в плоском канале для соответствующего числа Рейнольдса.

Поведение на нижней твердой границе канала  $AEFKQD$ , как и следовало ожидать, аналогично рассмотренным выше кривым соответствующим различным значениям уровней по  $Y$ .

Таким образом, общий анализ комплексного рис. 4.37, показывает, что распределение давления в направлении оси  $X$  в виде коэффициента  $C_p$  в различных сечениях по высоте имеет общую закономерность и зависит от числа Рейнольдса, а при числах  $Re = 1000$  давление вдоль оси  $X$  приобретает волновой характер, что обусловлено сложной вихревой структурой течения в следе за препятствием.

Для анализа процессов нестационарности характеристик течения интересно рассмотреть их зависимость от времени. Рассмотрим поведение продольной  $U$ , поперечной скорости  $V$  и коэффициента давления  $C_p$  в шести характерных точках потока. Расположение указанных реперных точек схематически показано на рисунке 4.38.

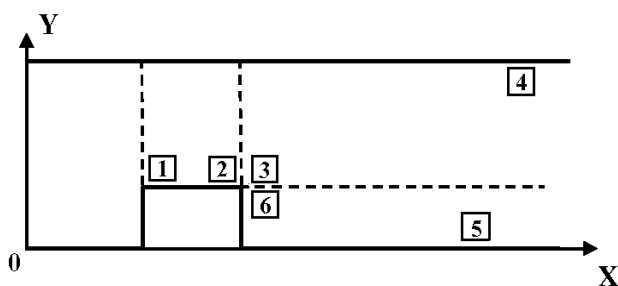


Рис. 4.38. Схема расположения шести реперных точек

В качестве примера расчета поведения основных характеристик течения на комплексном рис. 4.39 представлены зависимости поперечной скорости  $V$  от времени в указанных четырех точках при числе  $Re = 1000$

Анализ этих компьютерных осциллограмм показывает, что в первой и третьей точках сдвиговый слой остается устойчивый и характеристики течения в нем  $U$ ,  $V$  и  $C_p$  выходят на стационарный режим и при  $\tau > 20$  практически не изменяются.

В точках 4 и 5, находящихся в вихревых зонах наблюдается более сложная динамика течения. Расчеты показывают, что в точках 4 и 5 развивается неустойчивость в виде колебания значений соответствующих характеристик потока. Это связано с вихревой структурой течения. В точке 6 сразу за выступом сначала наблюдаются колебания, но затем при  $\tau > 30$  значения параметров стабилизируются. В целом в точках 4 и 5 амплитуда колебаний носит нерегулярный характер. В этих точках характерно появление вторых гармоник для обеих компонент скорости и коэффициента давления. Здесь в разделе приведены лишь некоторые типичные примеры расчета, но они показывают, что в случае необходимости возможен дальнейший корреляционный и спектральный анализ соответствующих временных рядов изменения характеристик течений.

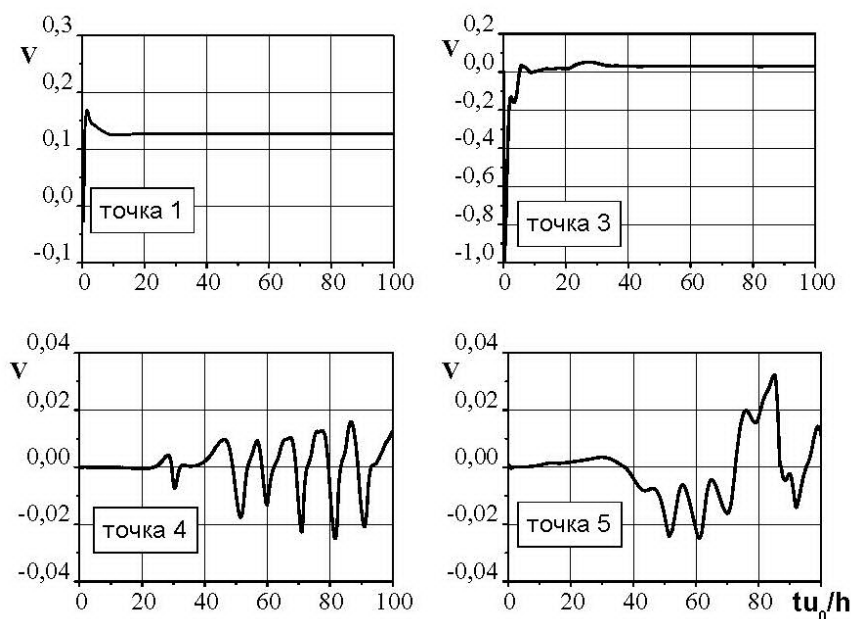


Рис. 4.39. Зависимость от времени поперечной компоненты скорости  $V$  в реперных точках 1, 3 - 5 при числе  $Re = 1000$ .

Таким образом на примере решения задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, на нижней стенке которого расположена геометрическая неоднородность в виде препятствия с квадратной формой поперечного сечения, показана эффективность используемого DNM-LF метода.

Полученная информация существенно дополняет наши знания и результаты экспериментальных исследований о тонкой вихревой структуре полей скорости и полей давления в рассматриваемом течении.

## **4.8. Течение в плоском канале с прямоугольной каверной на его стенке**

### **4.8.1. Введение**

Фрагменты течений около твердой поверхности при наличии на ней геометрической неоднородности в виде каверны встречаются во многих прикладных задачах гидроаэродинамики. При рассмотрении такого класса течений различают внешние и внутренние задачи, при этом каверна может иметь прямоугольную или другую более сложную криволинейную форму, а жидкость может быть сжимаемой и несжимаемой.

Характерным примером таких течений являются обтекание какого-либо тела, крылового профиля или другой твердой стенки, на которой расположено углубление-каверна. Их особенность состоит в том, что при натекании внешнего потока на каверну течение в области кромки каверны часто сопровождается явлением отрыва потока и эффектами нестационарности. Режим отрыва потока с кромки каверны приводит к появлению в потоке вихревых образований, которые сносятся вниз по течению и взаимодействуют с жидкостью, находящейся внутри каверны и за каверной.[55, 56].

Имеется множество примеров течений такого класса в судостроении, в авиастроении. Кроме того, они встречаются в задачах экологии при моделировании процессов переноса и накопления различных загрязнений в реках, каналах или трубах при наличии там геометрических неоднородностей и каверн, или при моделировании движения газоаэрозольных выбросов над городскими застройками, различными каньонами и другими неоднородностями рельефа местности..

Внешний по отношению к каверне поток может быть ламинарным или турбулентным. Поэтому, в зависимости от профиля продольной скорости перед каверной, в слое смешения между основным потоком и жидкостью в каверне может формироваться различная структура течения. Количественные характеристики процесса смешения и его механизм имеют важное прикладное значение. Поэтому экспериментальным и теоретическим исследованиям фрагментов таких течений занимается широкий круг специалистов [12, 59, 69, 70, 102, 204, 211] с целью более глубокого понимания физики и механизмов возникновения отрывных течений и вихревых структур в зависимости от геометрии каверны, числа Рейнольдса и профиля скорости перед каверной.

Многие работы посвящены исследованию течения в зоне каверны для случаев сжимаемого дозвукового и сверхзвукового потоков [180, 204]. Другая часть работ посвящена изучению течения несжимаемой жидкости в зоне каверны для случаев ламинарного и турбулентного режимов течения основного потока [288, 339, 359].

Наряду с экспериментальными исследованиями, задача о течении в области каверны решалась и численно [59, 71, 102, 175]. При теоретическом изучении течения в окрестности каверны обычно рассматривают течение в пограничном слое на плоской пластине. Каверна при этом расположена на некотором расстоянии вниз по потоку от ее носика. На основе такого подхода выполнено значительное количество работ. Однако решение задачи с таких позиций требует задания характеристик течения в пограничном слое пластины перед каверной, что увеличивает многопараметричность задачи. Кроме того, в силу сложности расчета поля давления, многие исследователи для описания течения используют уравнения Навье-Стокса в переменных функция тока – вихрь [71, 175], что позволяет исключить давление из системы исходных уравнений. Но такой подход наряду с положительными сторонами этого способа расчетов приводит к трудности постановки граничных условий для вихря скорости у твердых стенок и отсутствию возможности обобщения этого подхода на трехмерные задачи и турбулентные режимы течения [178]. Поэтому более предпочтительным является подход, использующий исходные уравнения в естественных физических переменных скорость-давление, так как он лишен отмеченных недостатков и позволяет учесть форму начального профиля скорости перед каверной и непосредственно рассчитывать поля давления [55, 56]. Однако и в этом случае тоже имеются свои сложности, связанные со способом определения давления и его согласования с полем скоростей. На основе этого подхода также решено определенное количество прикладных задач [190, 204]. При этом рассматривались каверны с различной геометрической формой [326].

В настоящее время для численного решения уравнений движения вязкой жидкости существуют и используются несколько десятков разновидностей разностных схем. В данном разделе для расчета тонкой вихревой структуры течения в области прямоугольной каверны, расположенной на нижней стенке плоского канала используется DNM-LF метод. При этом ставится задача изучения не только структуры потока внутри каверны, но и поля давления в зависимости от двух форм профиля продольной скорости в канале перед каверной при различных числах Рейнольдса и трех геометрических параметрах каверны.



## 4.8.2. Постановка задачи и исходные уравнения

Обратимся к решению задачи о течении несжимаемой жидкости в зоне прямоугольной каверны, расположенной на твердой стенке, но не в пограничном слое пластины или обтекаемого тела, а на нижней стенке плоского канала, как показано на рис. 4.40.

Рассмотрим подробнее отличие течений, например, на пластине и в плоском канале при наличии геометрической неоднородности в виде каверны. При течении в плоском канале важным параметром течения является глубина каверны  $b$  и ее длина  $l$  по отношению к ширине канала  $h$ . В случае плоской пластины с каверной, аналогичным параметром является отношение  $b/\delta$  и  $l/\delta$ , где  $\delta$  - толщина пограничного слоя на обтекаемой пластине перед каверной. Однако, из-за неоднозначности определения толщины  $\delta$ , в практике расчетов за характерный размер длины принимается толщина вытеснения  $\delta^*$ , однако она как и  $\delta$  является функцией продольной координаты  $x$ . Таким образом, в случае канала параметр  $b/h$  является постоянным, а в случае пластины параметр  $b/\delta^*$  является величиной, зависящей от продольной координаты  $x$ . Это обстоятельство приводит к тому, что структура течения и сопротивление пластины зависят от места расположения каверны на ней. В этом состоит одно из различий между рассматриваемыми случаями течения.

Специфика нашего подхода состоит в том, что параметры основного потока, внешнего по отношению к каверне, в этом случае задаются каноническим течением в плоском канале, которое на развитом участке канала имеет универсальный параболический профиль Пуазейля для продольной скорости в виде

$$U(Y) = 6(l-Y)Y, \quad U = u/u_0, \quad Y = y/h. \quad (4.23)$$

Это позволяет сократить число параметров исходной задачи и однозначно определить масштабы скорости и длины для рассматриваемого течения, выбрав для них среднерасходную скорость в канале и высоту канала. Физическая схема течения и принятые обозначения приведены на рис. 4.40.

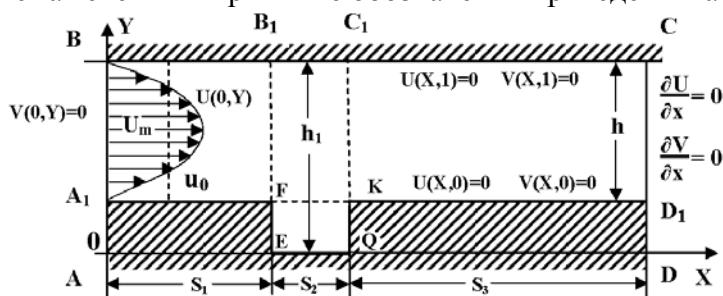


Рис. 4.40. Принципиальная схема рассматриваемого течения в плоском канале с прямоугольной каверной

Задача рассматривается в двумерной постановке. Начало введенной декартовой системы координат находится в левом нижнем углу в точке 0. Высота канала имеет размер  $h$ , а общая длина расчетной области  $S$  состоит из трех участков  $S = S_1 + S_2 + S_3$ . Глубина каверны  $b = h_1 - h$ , которая после нормировки на высоту канала  $h$  равна  $B = b/h$  и в расчетах в основном принималась  $B = 0,4$ , а длина каверны  $l$  нормированная на глубину  $b$ , то есть  $L = l/b$  изменялось в диапазоне  $L = 1, 2, 4$ . Течение в канале происходит слева направо. Расстояние  $S_1$  от входной границы  $AB$  до левой стенки  $EF$  варьировалось и определялось путем численного эксперимента, чтобы в сечении  $AB$  можно было принять условия невозмущенного потока, то есть профиль продольной скорости в виде (4.23). Горизонтальный размер каверны  $l = S_2$ . Выходная граница расчетной области  $CD$  удалена от правой вертикальной стенки каверны  $KQ$  на расстояние  $S_3$  достаточное для того, чтобы оно не оказывало влияние на результаты расчета с заданной точностью  $\varepsilon$ .

Характерной особенностью течения в канале является то, что движение жидкости происходит под действием продольного перепада давления, который при отсутствии каверны постоянен ( $\partial p / \partial x = const$ ). Однако заданной величиной в рассматриваемой задаче принимается расход жидкости  $Q = u_0 \cdot h$  через поперечное сечение канала  $CD_1$ . При такой постановке задачи число Рейнольдса  $Re = u_0 \cdot h / \nu$  задано, а давление является переменной величиной и рассчитывается в процессе решения задачи.

Для описания движения жидкости и анализа процессов смешения жидкости в каверне с основным потоком в канале, используются интегральные уравнения (4.1) и (4.2), выражающие законы сохранения массы и изменения количества движения для несжимаемой жидкости. Дискретный аналог этой системы уравнений строится на разнесенных сетках методом контрольного объема с использованием схемы первого порядка точности по времени и неявной схемы со вторым порядком точности по пространству. При численном решении задачи удобно перейти к безразмерным переменным. За масштаб длины принимается ширина канала  $h$ , за масштаб скорости принята среднерасходная скорость в канале  $u_0 = Q/h$ , за масштаб времени принята величина  $t_0 = h/u_0$ , а за масштаб давления принят скоростной напор  $p_0 = \rho \cdot u_0^2$ . В безразмерных переменных  $U = u/u_0$ ,  $V = v/u_0$ ,  $X = x/h$ ,  $Y = y/h$ ,  $\tau = t/t_0$ ,  $P = p/p_0$  конечно-разностный аналог исходной системы уравнений, как было показано выше, записывается в виде:

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P, \quad (4.24)$$

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = [\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U] / d_{j+1/2,i}^U, \quad (4.25)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V, \quad (4.26)$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}^U$ ,  $d_{j,i+1/2}^V$ ,  $c_1$ ,  $c_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$ , выражения  $G$  с верхними индексами  $U$ ,  $V$  и свободный член  $f^P$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются по определенным алгебраическим формулам. Система уравнений (4.24) – (4.26) связывает значения давления и компонентов скоростей на  $(n+1)$  временном слое.

Для завершения постановки задачи необходимо задать начальные и краевые условия на всех границах расчетной области  $A_1BCD_1KQEF A_1$ . Предполагается, что в начальный момент времени во всей расчетной области горизонтальная скорость  $U$  имеет параболический профиль, а вертикальная скорость  $V$  и давление  $P$  равны нулю. Граничными условиями для скорости на входе в расчетную область  $AB$  служат условия невозмущенного потока. При этом подробно рассмотрены два случая, когда профиль продольной скорости на входе в канал принят в виде параболы Пуазейля (4.23) и случай, когда профиль скорости на входе однородный.

На выходе из расчетной области в сечении  $CD_1$  принимаются безградиентные условия свободного вытекания в форме Неймана. На всех неподвижных твердых стенках принимаются очевидные граничные условия прилипания  $U|_{\Gamma} = 0$  и непротекания  $V|_{\Gamma} = 0$ , где  $\Gamma$  - твердая граница. Основными параметрами задачи являются число Рейнольдса, глубина каверны  $B = b/h$  и ее горизонтальная длина  $L = l/b$ , а форма профиля скорости на входе в канал принимается в виде (4.23), либо  $U|_{AB} = 1$ . Таким образом, численное решение системы уравнений (4.24) – (4.26) будем искать в области  $0 \leq X \leq S$ ,  $0 \leq Y \leq H_1$ , где  $H_1 = h_1/h$  (см. рис. 4.40) при следующих начальных:

$$U(X, Y, 0) = 6(1 - Y)Y, \quad V(X, Y, 0) = 0, \quad P(X, Y, 0) = 0. \quad (4.27)$$

и граничных условиях:

$$\begin{aligned} U|_{A_1B} &= 6(1 - Y)Y; \quad U|_{BC} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X}|_{CD_1} = 0; \quad U|_{D_1K} = 0; \\ U|_{KQ} &= 0; \quad U|_{QE} = 0; \quad U|_{EF} = 0; \quad U|_{F A_1} = 0; \\ V|_{A_1B} &= 0; \quad V|_{BC} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial X}|_{CD_1} = 0; \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$V|_{D_1K} = 0; \quad V|_{KQ} = 0; \quad V|_{QE} = 0; \quad V|_{EF} = 0, \quad V|_{FA_1} = 0.$$

Во втором варианте задачи  $U|_{A_1B} = 1$ , а остальные условия те же.

Следует подчеркнуть, что давление  $P$  в рассматриваемой системе уравнений не является основной переменной ни в одном из этих уравнений. При нашем подходе необходимое уравнение для давления выводится из уравнения неразрывности в виде уравнения типа Пуассона. При этом необходимые для его решения значения давления в граничных узлах определяются с помощью уравнений движения в комбинации с граничными условиями для компонентов скорости [208]. В процессе решения задачи требуется определить поля скорости и давления в расчетной области и оценить влияние числа Рейнольдса, формы профиля скорости и геометрического размера каверны на структуру течения и поле давления. Стационарное течение в канале характеризуется тем, что искомые переменные  $U$ ,  $V$ ,  $P$  не зависят от времени. Расчет параметров течения и структуры вихреобразования основаны на численном интегрировании системы уравнений движения (4.24) – (4.26) при начально-краевых условиях (4.27), (4.28). Отличительная особенность данного метода состоит в использовании физических переменных скорость-давление и разнесенных сеток

### 4.8.3. Особенности численного метода

В настоящем методе компоненты скорости и давления расщеплены так, что на любом этапе расчета решаются уравнения относительно одной зависимой переменной. Это упрощает применение стандартных методов решения систем линейных алгебраических уравнений полученного вида. Итерационный вычислительный процесс состоит из шагов по времени. В начале каждого временного цикла предполагаются известными поля скорости и давления.

Для решения сформулированной эволюционной гидродинамической задачи разработан алгоритм, который реализован в виде компьютерной программы CLF и позволяет получать стационарные решения, либо исследовать поведение характеристик течения во времени.

### 4.8.4. Результаты расчетов и их обсуждение. Поле скоростей и вихревые структуры

Проведенные численные исследования показали, что в результате взаимодействия потока жидкости с твердыми стенками канала и с жидкостью, находящейся внутри каверны, в верхней части зоны каверны образуется своеобразный слой смешения, который встречаясь с правой

вертикальной стенкой каверны приводит к возникновению вихревого циркуляционного движения внутри каверны. Поэтому слой смещения за левой кромкой каверны формируется при взаимодействии основного потока в канале с циркуляционным течением внутри каверны.

Обсуждаемые здесь результаты расчетов вихревой структуры течения выполнены на равномерных сетках с шагами по пространству  $\Delta x = \Delta y = 0,02$ , при значении глубины каверны  $B = b/h = 0,4$  для трех вариантов ее длины  $L = l/b = 1, 2, 4$ . Число Рейнольдса изменялось в диапазоне  $400 \leq Re \leq 10000$ .

Используемый численный метод решения позволяет рассчитывать мгновенные значения компонентов скорости и давления в зависимости от времени и основных параметров задачи, таких как число Рейнольдса и геометрических параметров каверны  $L$  и  $B$ . Наряду с этим, ставилась задача оценить влияние формы профиля продольной скорости перед каверной на процесс формирования слоя смещения и вихревую структуру течения внутри каверны. С этой целью рассматривались два случая. В первом случае профиль продольной скорости как в канале, так и непосредственно перед каверной соответствовал развитому ламинарному профилю Пуазейля, а во втором случае профиль на входе в расчетную область был однородным. Поэтому в непосредственной близости перед каверной он был более наполненным по сравнению с параболическим и был похож на профиль для турбулентного потока. Его расчетная форма при различных числах Рейнольдса и длине каверны  $L$  хорошо прослеживается на приведенных далее рисунках.

Выполненные расчеты зависимости скорости и давления от времени в зоне расположения каверны показали, что при малых числах Рейнольдса ( $Re \leq 400$ ) течение еще устойчиво, а с ростом числа  $Re$  происходит потеря его устойчивости и возникает нестационарный режим течения..

В качестве первого примера результатов расчета на рис. 4.41 показана общая картина течения в виде изолиний равных скоростей в длинном канале с прямоугольной каверной при параболическом ( первые пять фрагментов вверху) и однородном профиле скоростей на входе в канал (нижние пять фрагментов) соответственно, для пяти чисел Рейнольдса при глубине каверны  $B = 0,4$  и ее длине  $L = 4$ . Чтобы продемонстрировать возможности численной модели на этих рисунках специально выбрана большая длина расчетной области позади каверны, с целью показать важные особенности в изменении крупномасштабной структуры потока в канале вдали от каверны при двух формах профиля скорости на входе в канал при различных числах Рейнольдса.

Из приведенного рис. 4.41 отчетливо видно как с ростом числа  $Re$

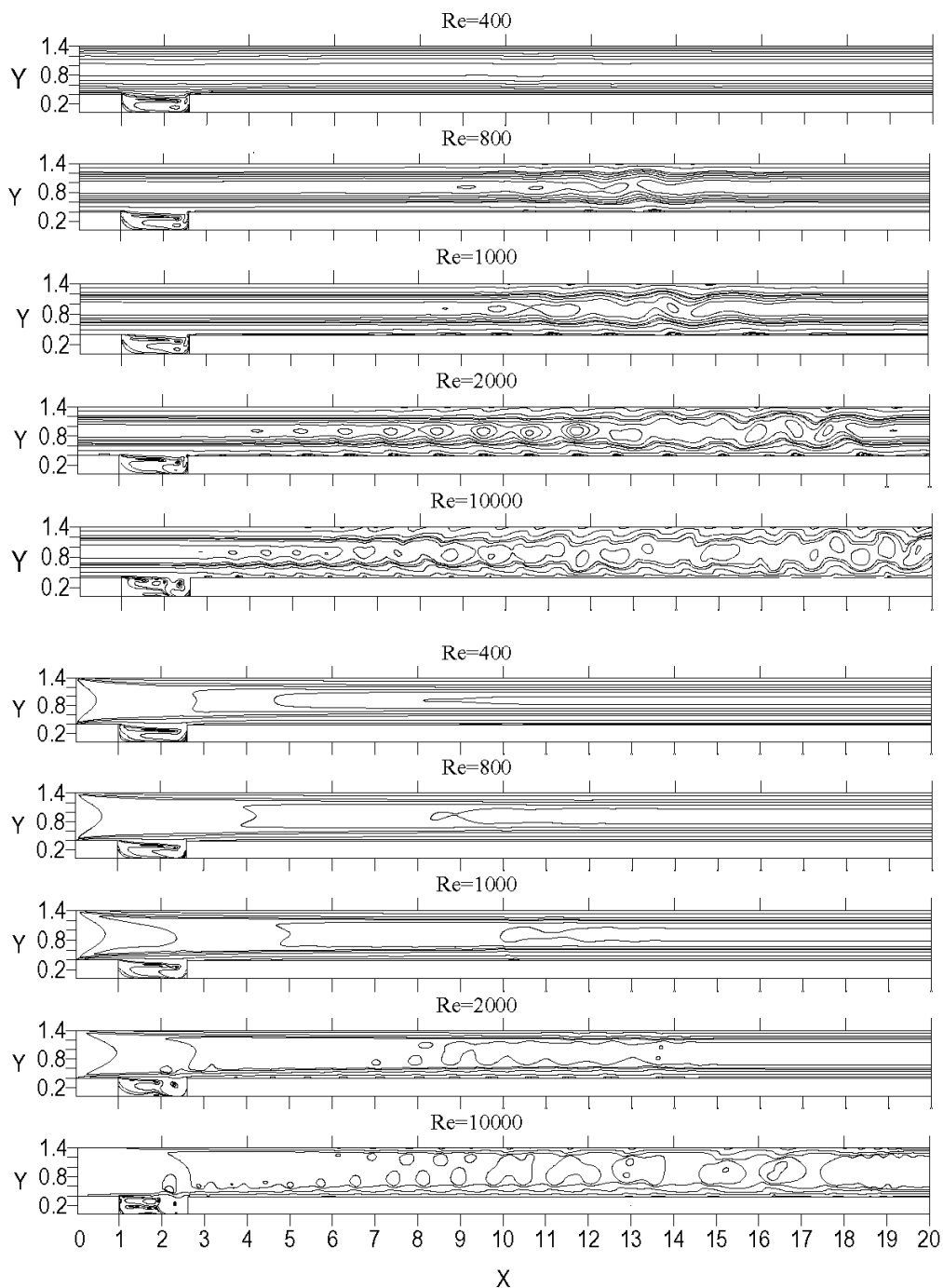


Рис. 4.41. Изолинии равных скоростей в плоском канале с прямоугольной каверной при параболическом (верхние пять фрагментов) и однородном (нижние пять фрагментов) профилях скорости на входе в канал при различных числах  $Re$  для  $\tau=100$

картина течения в изолиниях скорости перестраивается от слоистой ламинарной структуры в неустойчивый волновой режим и далее напоминает картину перехода в турбулентный режим. Расчеты были выполнены на длине канала равной 40 калибрам и показали, что картина течения стабилизируется уже при длине  $X = 20$ .

В дальнейшем результаты расчетов, относящиеся к области течения вблизи и внутри каверны будут подробно рассмотрены в более крупном масштабе.

В качестве второго примера результатов расчета на рис. 4.42 на верхних двух фрагментах приведены расчетные профили продольной скорости вдоль оси  $X$  в различных поперечных сечениях канала при числе Рейнольдса  $Re=1000$  для длины каверны  $L = 2$ . На нижних двух фрагментах показаны соответственно векторные поля скоростей. При этом, верхние фрагменты в обоих случаях соответствуют параболическому начальному профилю продольной скорости, а нижние – однородному начальному профилю. Нетрудно заметить, что на верхних фрагментах непосредственно перед началом каверны ( $X = 1$ ) профиль скорости имеет параболическую форму, а во втором варианте (нижние фрагменты), первоначально однородный профиль скорости на участке  $0 \leq X \leq 1$  вследствие вязкого прилипания к твердой стенке деформируется и становится похожим на турбулентный профиль. Кроме того на рисунках видно, что вихревые структуры внутри каверны при значении параметра  $L = 2$  имеют знакопеременный профиль скорости.

Следующим шагом исследования было изучение поля скоростей в изолиниях. На рис. 4.43 приведены результаты расчетов в виде изолиний равных скоростей для каверн с параметрами  $L = 1$  и  $L = 2$  при двух числах Рейнольдса. Эти расчеты наглядно демонстрируют степень влияния параметра  $L$  на общую картину скоростного поля в зоне каверны при двух вариантах формы профиля скорости перед каверной.

Особенно сложный режим вихреобразования имеет место при  $Re=10000$ . Анализ полученных расчетных данных показывает, что для каверн с параметрами  $L = 2$  длина развития слоя смещения больше, а поэтому время взаимодействия основного потока с вихревыми структурами в каверне оказывается большим и это естественно отражается на процессе вихреобразования. Поэтому на рис. 4.44 дополнительно приведены фрагменты результатов расчета изолиний полей скорости в зоне каверны с длиной  $L = 4$  при трех числах Рейнольдса. При этом данные приведенные на рис. 4.44 ( три верхних фрагмента) соответствуют параболическому профилю, а данные расположенные внизу соответствуют однородному начальному профилю продольной скорости в канале

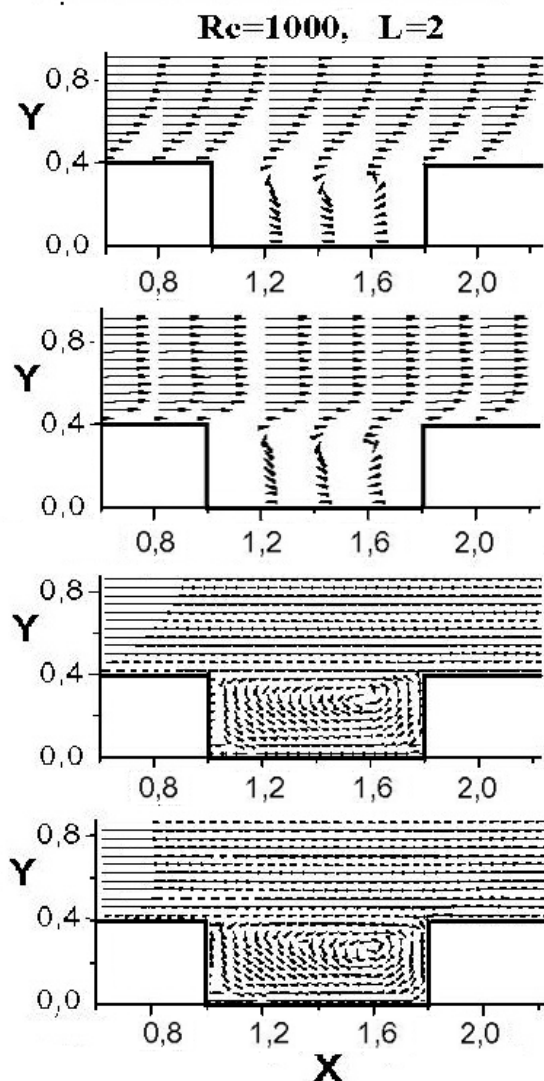


Рис. 4.42. Фрагменты профилей продольной скорости (два верхних фрагмента) и векторного поля скоростей (два нижних фрагмента) для длины каверны  $L=2$  с параболическим (верхние) и однородным (нижние) профилем скорости на входе в канал при  $Re=1000$  для  $\tau=100$

Эти результаты расчетов, подобно изолиниям тока, выразительно показывают многообразие вихревых структур полей скорости как внутри каверны, так и за ее пределами. По изолиниям скорости хорошо прослеживается и геометрия образования мелких вихревых структур, обусловленных механизмом дробления локальных циркуляций в зависимости от числа Рейнольдса.



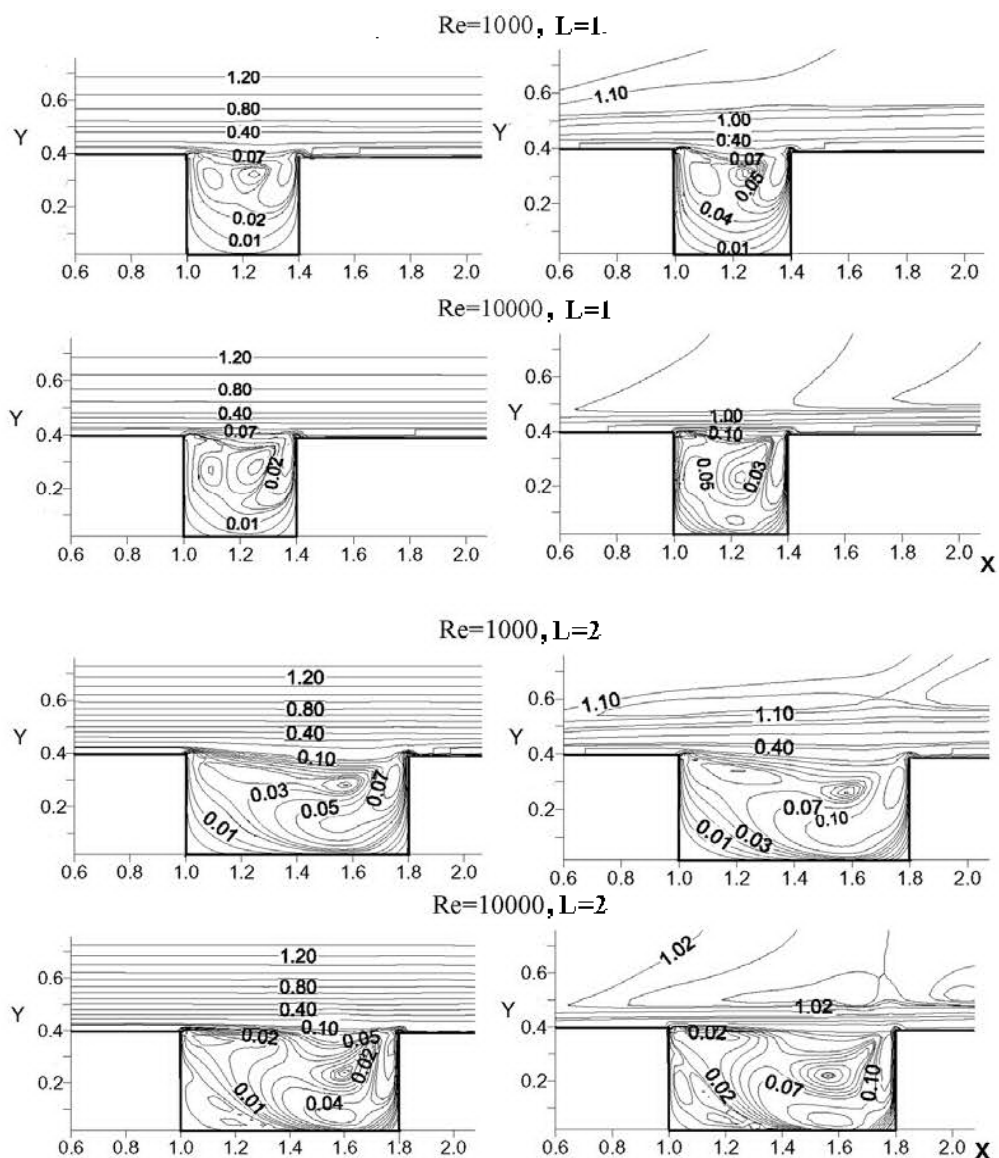


Рис. 4.43. Фрагменты расчетных изолинии равных скоростей в каверне с  $L=1$  и  $L=2$ ,  $B=0,4$  при параболическом (слева) и однородном (справа) профиле скорости на входе в канал при  $Re=1000, 10000$  для  $\tau=100$

Представление данных в виде изолиний равных скоростей с указанием на изолиниях численного значения скоростей позволяет отчетливо видеть мелкие и крупные вихреобразования. При этом легко просматривается картина формирования слоя смешения и циркуляционное движение внутри каверны.

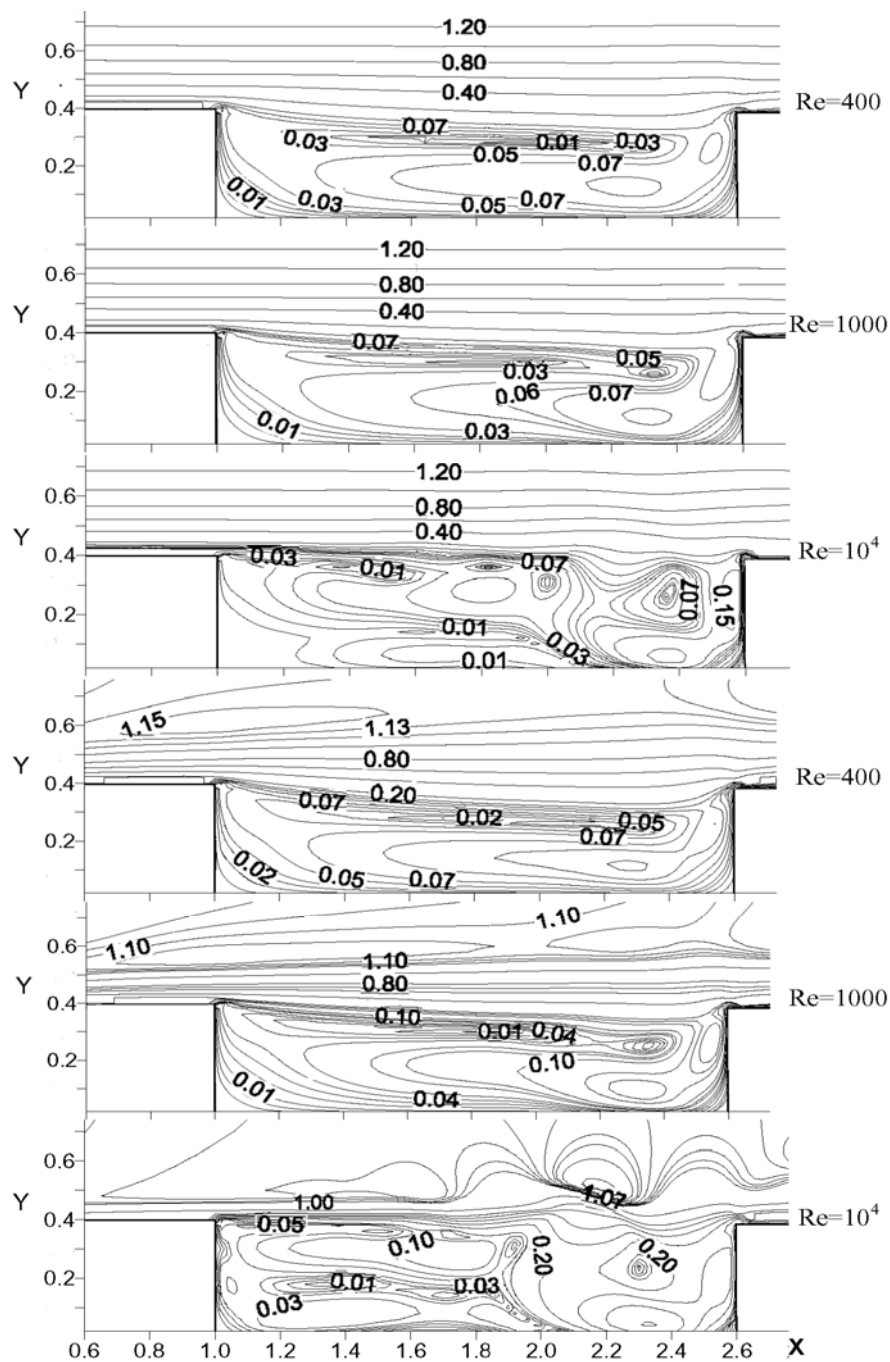


Рис. 4.44. Изолинии равных скоростей в прямоугольной камере ( $L=4$ ,  $B=0,4$ ) с параболическим (три верхних фрагмента) и однородным (три нижних фрагмента) профилем скорости на входе в канал при различных числах Рейнольдса для  $\tau=100$

На рис. 4.44 в правой части каверны видны «языки» проникновения внешней жидкости внутрь каверны. С ростом числа Рейнольдса структура усложняется.

В целом выполненные расчеты показали, что характерной особенностью рассматриваемого течения является формирование сдвигового слоя смешения в верхней части каверны после отрыва основного потока от левой кромки каверны. Течение в этом сдвиговом слое с ростом числа Рейнольдса становится неустойчивым по отношению к малым возмущениям в соответствии с механизмом Кельвина-Гельмгольца и течение в зоне такой каверны вызывает значительные пульсации скорости и давления, увеличивая локальное сопротивление и возможности возникновения резонансных колебаний.

Профили продольной скорости внутри каверны являются знакопеременными из-за наличия циркуляционных течений внутри каверны. При этом в зависимости от геометрии каверны ( $L = 1, 2, 4$ ) и числа Рейнольдса в канале формируется своя вихревая структура течения в каверне, которая может быть крупновихревой, а может и дробиться на мелкие вихри, которые обеспечивают наличие пульсации скорости и давления в каверне и в зоне смешения.

Для режима течения с числом Рейнольдса  $Re=1000$  на рис. 4.44 наблюдается один большой вихрь, который при  $B = 0,4$  и  $L = 4$  занимает почти 60% объема каверны, центр которого находится в правой части каверны и хорошо виден визуально.

Представление результаты расчетов полей скорости в виде их профилей, фрагментов векторных полей и изолиний скоростей, наглядно показывают картину формирования вихревых структур в зависимости от формы профиля скорости перед каверной, параметра ее длины  $L$  и от числа Рейнольдса.

Таким образом, с помощью численного моделирования исследовано двумерное течение несжимаемой жидкости в плоском канале с прямоугольной каверной, расположенной на нижней стенке плоского канала. Изучено влияние двух форм профиля продольной скорости перед каверной на вихревые структуры течения внутри каверны при различных числах Рейнольдса для трех вариантов геометрии каверны.

Результаты расчетов полей скоростей и вихревых структур представлены в графической форме для каверн с глубиной  $B = 0,4$  для трех вариантов ее относительной длины  $L = 1, 2, 4$  при числах Рейнольдса  $Re = 400 \div 10000$ . Показано, что в зависимости от параметра длины каверны  $L$  в ней образуются один, два и больше вихревых систем. Их центры и размеры хорошо видны на приведенных рисунках. При всех трех параметрах длины каверны существуют крупномасштабные циркуляционные образования внутри каверны, структура и размер которых зависит от геометрии каверны, профиля скорости перед каверной и от числа

Рейнольдса. Основная крупномасштабная вихревая система образуется у задней вертикальной стенки прямоугольной каверны при всех числах  $Re$  и вращается по часовой стрелке.

#### 4.8.5. Поля давления

Так как используемый метод решения системы исходных нестационарных уравнений движения несжимаемой жидкости реализован в переменных скорость-давление, то это дает возможность рассчитывать не только поля скорости, но и поля давления. Результаты численных исследований, относящиеся к распределению поля давления, представлены в виде зависимостей безразмерных коэффициентов давления  $C_p$

$$C_p = \frac{p - p_1}{\rho u_0^2 / 2} \quad (4.29)$$

от числа Рейнольдса и других основных параметров задачи. Здесь  $p$  - локальное значение давления, а  $p_1$  - характерное давление в невозмущенном потоке, то есть на геометрической оси во входном сечении канала.

Принципиальная схема рассматриваемого течения и параметров канала приведена на рис. 4.40. В результате проведенных расчетов были исследованы поля давления в зоне каверны с безразмерным параметром глубины  $B = 0,4$  и тремя параметрами длины  $L = 1, 2, 4$  при трех различных числах Рейнольдса.

В качестве примера полученных результатов на рис. 4.45 представлены расчетные значения коэффициента давления  $C_p$  в виде изолиний (изобар) для каверн с параметром длины  $L = 1$  и  $L = 2$ , глубиной  $B = 0,4$ , при параболическом профиле скорости на входе в канал (левые фрагменты) и при однородном профиле (правые фрагменты) для числа Рейнольдса  $Re = 1000$ . Нетрудно видеть, что картина этих изолиний достаточно сложна, а ниже по потоку сразу за каверной, давление в потоке быстро восстанавливается и становится постоянным в поперечных сечениях канала.

Расчеты также показывают, что с ростом числа Рейнольдса картина изолиний коэффициентов давления позади каверны качественно изменяется. Чтобы оценить влияние числа  $Re$  и протяженности каверны на вихревую структуру течения были выполнены расчеты для случая  $L = 4$ .

На рис. 4.46 представлены расчетные значения изобар для каверны с параметром  $L = 4$  и глубиной  $B = 0,4$ . При этом параболическому профилю скорости на входе в канал соответствуют три верхних фрагмента, а в случае однородного входного профиля скорости, картина распределения давления представлена на трех нижних фрагментах рис. 4.46.

Представленные фрагменты расчетных изолиний коэффициентов давления наглядно демонстрируют форму изобар в зоне каверны с  $L = 4$ , которая качественно отличается от предыдущих случаев. В частности при параболическом входном профиле и числах  $Re = 10000$  образуются периодические ячеистые структуры с зонами сжатия и разряжения внутри каверны.

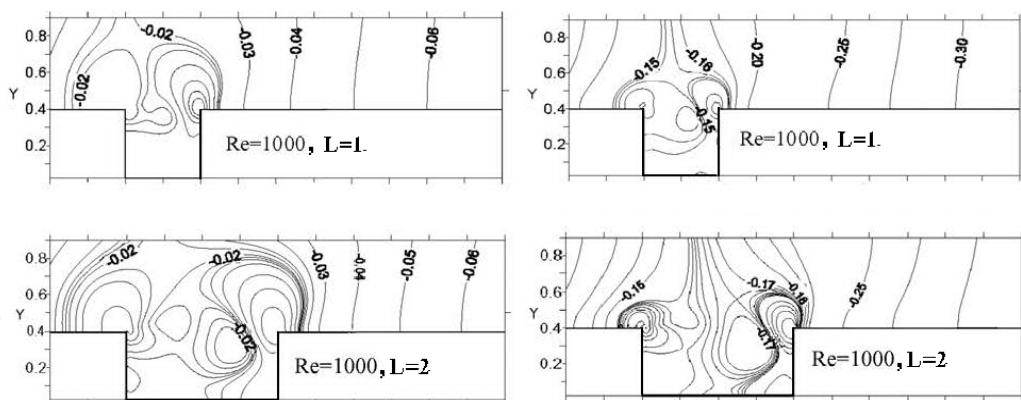


Рис. 4.45. Фрагменты расчетных изолиний коэффициентов давления  $C_p$  в каверне ( $L=1$  и  $L=2$ ;  $B=0,4$ ) с параболическим профилем скорости на входе в канал (левые фрагменты) и однородным (правые фрагменты) при  $Re = 1000$  для  $\tau=100$

Анализ представленных результатов расчетов по распределению давления показывает, что общая картина поля давлений в плоском канале с прямоугольной каверной при всех трех параметрах ее геометрии ( $L = 1, 2, 4$ ) зависит не только от числа Рейнольдса, но и от формы профиля продольной скорости на входе в канал.

В целом расчеты полей давления показали, что в зоне каверны возникают области сжатия и разряжения, обусловленные взаимодействием вихревого движения внутри каверны с внешним потоком. При этом для длины каверны  $L = 4$  эти области сжатия и разряжения смещаются внутрь каверны навстречу основному потоку

Рассмотрим теперь результаты расчетов изменения коэффициента давления  $C_p$  на характерных горизонтальных участках течения в зоне расположения каверны. Для этой цели было изучено распределение давления на верхней стенке канала  $BC$  и на нижней стенке канала по линии  $A_1D_1$ , совпадающей со свободной границей каверны.

Кроме того, было рассмотрено также распределение давления на двух характерных вертикальных участках  $EFB_1$  и  $QKC_1$ , проходящих через левую и правую вертикальные стенки каверны (см. рис. 4.40).

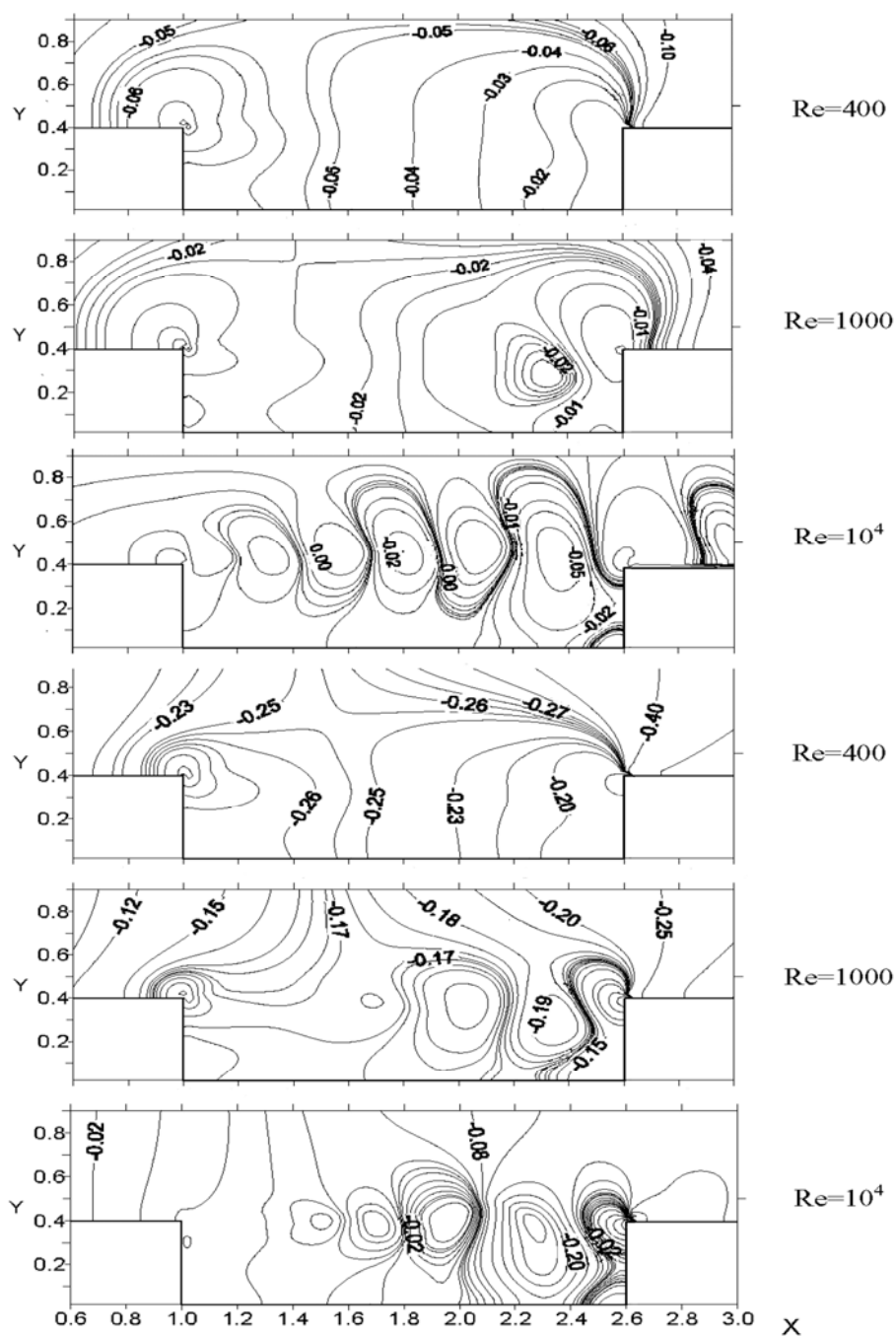


Рис. 4.46. Фрагменты расчетных изолиний коэффициентов давления  $C_p$  в прямоугольной каверне ( $L=4$ ,  $B=0,4$ ) с параболическим профилем скорости на входе в канал (три верхних фрагмента) и однородным (три нижних) при трех числах Рейнольдса для  $\tau=100$ .

В качестве примера на рис. 4.47 приведены результаты расчетов изменения коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси  $X$  на нижней стенке канала  $A_1D_1$  ( $Y=0,44$ ) при параболическом профиле скорости на входе в канал (слева) и однородном профиле (справа) для двух значений параметра длины каверны  $L=2, 4$  при четырех числах Рейнольдса (600, 1000, 2000, 10000) для  $\tau=100$ . Нетрудно видеть, что при указанных числах Рейнольдса для параметров длины каверны  $L=2, 4$  коэффициент давления  $C_p$  на участке  $0 \leq X \leq 1$  медленно убывает подобно поведению давления в прямолинейном канале без каверны. Однако, ниже по потоку давление зависит от числа Re. При числах  $Re > 2000$ , для каверны с  $L=2$  и  $L=4$  характер изменения давления становится иным. С ростом числа Рейнольдса давление вниз по потоку возрастает и при числах  $Re \geq 10000$  имеет волновой характер. Анализ расчетов при другом, то есть однородном профиле продольной скорости на входе в канал, показал, что это явление имеет место только при параболическом входном профиле скорости и связано с вихревой структурой потока в канале за каверной.

Обратимся теперь к распределению давления в двух характерных вертикальных сечениях  $EFB_1$  и  $QKC_1$ , проходящих через левую и правую вертикальные стенки каверны (см. рис. 4.40)

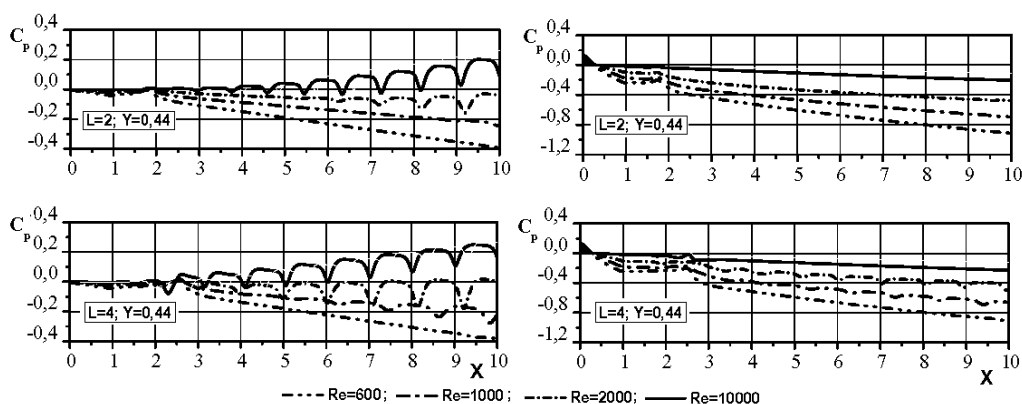


Рис.4.47. Изменение коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси  $X$  на высоте  $Y=0,44$  при параболическом (слева) и однородном (справа) профиле скорости на входе в канал для двух значений параметра  $L=2, 4$  при четырех числах Рейнольдса для  $\tau=100$

На рис. 4.48 (вверху) приведены результаты расчетов изменения коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси  $Y$  в сечении  $X=AE + EQ = 1 + 1,6 + 2,6$  вдоль правой вертикальной границы каверны  $QKC_1$  при четырех числах Рейнольдса, указанных на рисунках, для  $\tau=100$ .

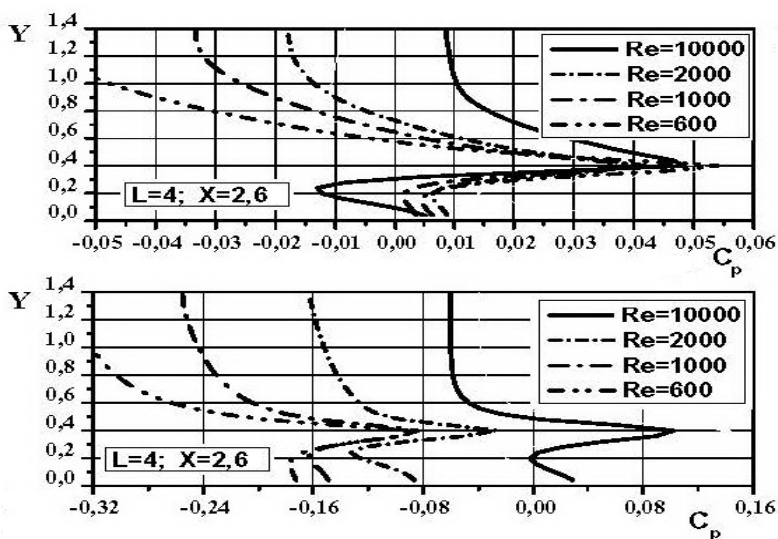


Рис.4.48. Изменение коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси  $Y$  в сечении  $X=2,6$  при параболическом (вверху) и однородном (внизу) профилях скорости на входе в канал для  $L=4$  и  $B=0,4$  при четырех числах Рейнольдса для  $\tau=100$

На том же рис. 4.48 внизу представлены аналогичные результаты расчетов изменения коэффициента давления  $C_p$  в вертикальном сечении  $QKC_I$ , но уже при однородном профиле продольной скорости. Сравнительный анализ показывает, что коэффициенты давления зависят от формы входного профиля и от длины каверны  $L$ , а с ростом числа Рейнольдса они увеличиваются. Кроме того отметим, что максимальные уровни давления наблюдаются в каверне с  $L = 4$  вблизи кормовой вертикальной стенки, а на передней левой стенке они минимальны.

#### 4.8.6. Нестационарность течения в плоском канале с прямоугольной каверной

Весьма интересным физическим явлением в исследуемой системе канал-каверна оказалось, что стационарный поток в канале при наличии каверны на его стенке, может вызывать самоподдерживающиеся осцилляции параметров потока в зоне каверны. Частота и амплитуда этих осцилляций зависят от числа Рейнольдса и других геометрических параметров задачи. В данном разделе подробно исследовалась каверна с параметром длины  $L = 4$  и глубиной  $B = 0,4$  при числе Рейнольдса  $Re = 10000$ , которое было выбрано исходя из анализа вихревых структур внутри каверны..

Нестационарность режима течения в зоне каверны изучалась с помощью расчета мгновенных значений параметров потока в слое смешения



основного потока в канале с жидкостью в каверне. При этом рассматривались два вида профиля продольной скорости на входе в канал.

Зависимость поведения вертикальной скорости  $V$  и коэффициента давления  $C_p$  от времени изучалась в 15 реперных точках рассматриваемого течения. Принципиальная схема расположения этих точек представлена на рис. 4.49.

Однако интересными для изучения оказались шесть точек с номерами 7, 8, 15, 10, 11, 12. Указанные точки находятся на одной горизонтали в наружном слое над каверной с вертикальной координатой  $Y = 0,43$ . Точки 7, 8 вдоль оси  $X$  удалены от левой кромки каверны вниз по потоку на расстояние  $0,1h$  и  $0,2h$  соответственно, а точки 15, 10, 11 удалены от правой кромки каверны влево вверх по потоку на расстояние  $0,3h$ ;  $0,2h$ ;  $0,1h$  соответственно. Точка 12 расположена за правым углом каверны вблизи стенки канала и удалена от угла каверны вдоль оси  $X$  по течению на расстояние  $0,1h$ .

Результаты расчетов поведения вертикальной скорости  $V$  и коэффициента давления  $C_p$  в различных реперных точках, в зависимости от времени при двух формах профиля продольной скорости при числе  $Re = 10000$  приведены на рис. 4.50 и рис. 4.51 соответственно для времени  $\tau = 100$ . Легко видеть, что оба параметра  $V$  и  $C_p$  во всех рассматриваемых шести точках совершают периодические колебания, как при параболическом, так и при однородном начальном профиле скорости, но они не идентичны в этих двух случаях.

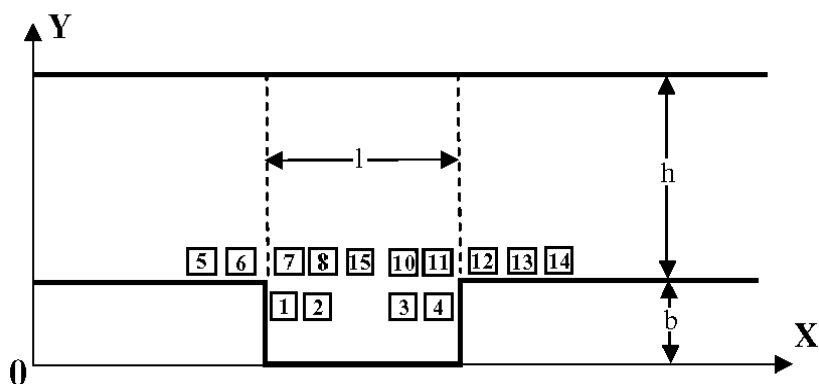


Рис. 4.49. Схема расположения 15 расчетных реперных точек

На рис. 4.50 представлены результаты расчетов зависимости вертикальной скорости  $V$  от времени в шести характерных реперных точках (шесть верхних фрагментов) при параболическом профиле скорости на входе в канал. Анализ полученных компьютерных осциллограмм показывает, что на рассматриваемом уровне  $Y = 0,43$  во всех шести точках

наблюдаются регулярные осцилляции скорости вблизи нулевого уровня с основной частотой, соответствующей числу Струхала  $St = f \cdot h / u_0 = 0,195$ , построенному по линейному масштабу  $h$  (высота канала). По нашим данным частота колебаний в каждой из шести точек в случае параболического профиля постоянна, а вот величина амплитуд разная. В точках 7, 8 они почти одинаковые и относительно малы, в точках 15, 10, 11 они максимальные и одинаковые. В точке 12, расположенной за правой кромкой каверны, значение амплитуды почти в два раза меньше максимальной, но значительно больше минимальной.

На том же рис. 4.50 представлены результаты расчетов зависимости вертикальной скорости  $V$  от времени, но при однородном профиле скорости на входе в расчетную область для числа  $Re = 10000$ . Анализ этих результатов показывает, что и в этом случае во всех шести рассматриваемых точках наблюдаются регулярные осцилляции, но основная частота в этом случае соответствует числу Струхала  $St = 0,182$ . Наряду с отличием значения числа Струхала от первого случая, имеются и другие отличия. Например, осцилляции вертикальной скорости в точках 7, 8 при однородном профиле совершаются возле не нулевого уровня. Кроме того, амплитуды колебания по времени в точках 15, 10 практически одинаковы. Другой отличительной чертой рассматриваемого случая однородного профиля скорости на входе, является наличие в осцилляциях вторых гармоник.

На рис. 4.51 представлены результаты расчетов и компьютерные осциллограммы зависимости коэффициентов давления  $C_p$  от времени в тех же шести реперных точках 7, 8, 15, 10, 11, 12 при параболическом (шесть верхних фрагментов) и однородном (шесть нижних фрагментов) профилях продольной скорости на входе в канал для числа  $Re = 10000$ ,  $B = 0,4$  и  $L = 4$ .

Анализ этих результатов показывает высокую корреляцию динамики коэффициентов давления  $C_p$  с динамикой поперечной скорости  $V$ . Во всех шести точках также наблюдаются регулярные осцилляции. Их форма хорошо видна на приведенных рисунках. Легко видеть, что формы колебаний  $C_p$  при однородном профиле значительно отличаются от формы кривых для случая параболического профиля скорости на входе в канал.

В целом анализ нестационарности показывает, что амплитуды колебания параметров потока  $V$  и  $C_p$  в различных точках слоя смешения отличаются друг от друга по величине в зависимости от формы профиля продольной скорости на входе. Наиболее высокие из них оказались при числе  $Re = 10000$  в зоне задней кромки каверны при однородном входном профиле.

По результатам расчетов были найдены периоды колебаний для определения характерных частот колебания параметров потока в зоне каверны. Соответствующие числа Струхала построенные по частоте изменения коэффициентов давления  $C_p$  в левой, средней и правой стороне каверны на уровне  $Y=0,43$  различны. В случае параболического профиля продольной скорости в точках 7, 8 основная частота соответствует числу Струхала  $St = 0,154$ , в точках 15, 10 числу Струхала  $St = 0,180$ , а в точках 11, 12 числу Струхала  $St = 0,192$ . В случае однородного входного профиля продольной скорости во всех точках – 7, 8, 15, 10, 11, 12 основная частота колебания давления почти одинаковая и соответствует числу  $St = 0,182$ .

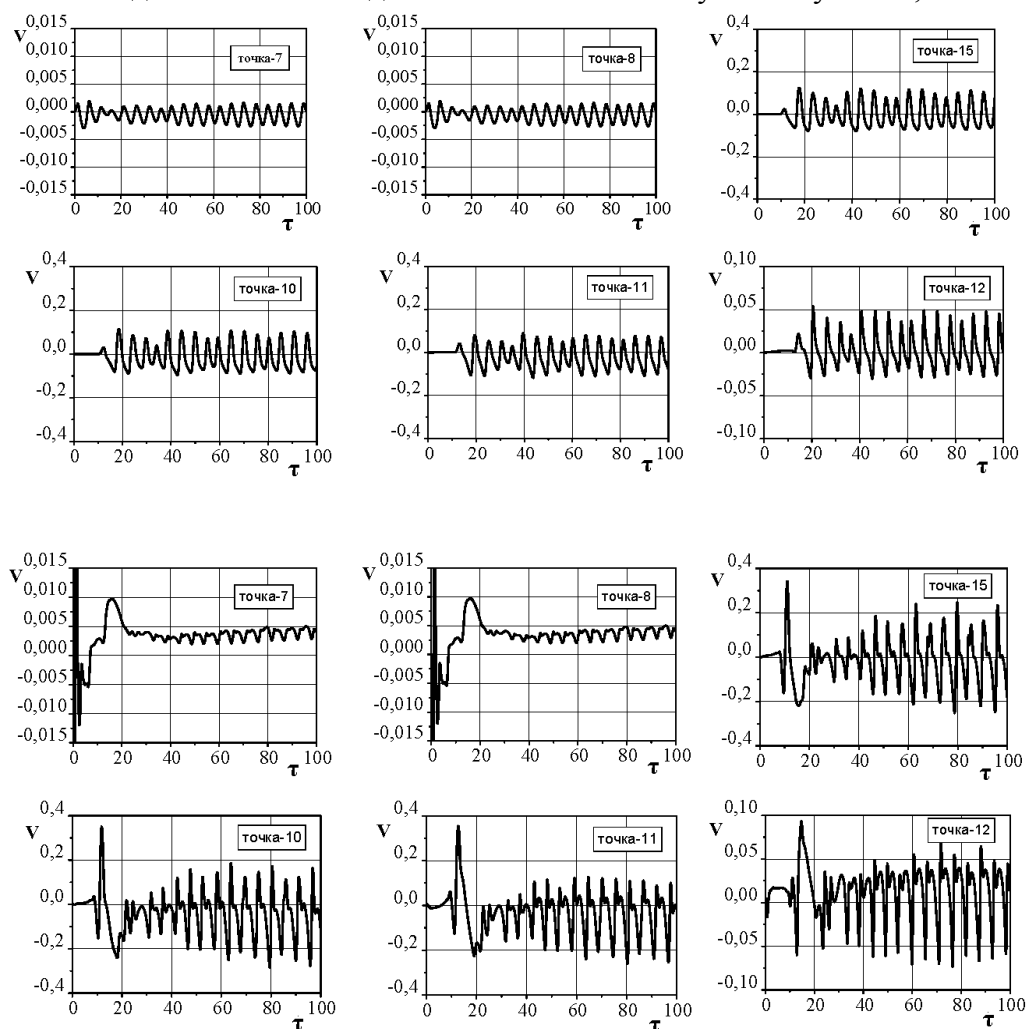


Рис. 4.50. Зависимость вертикальной скорости  $V$  от времени в шести реперных точках при параболическом профиле скорости (шесть верхних фрагментов) и однородном профиле скорости на входе в канал (шесть нижних фрагментов) для  $Re=10000$  ( $L=4$  и  $B=0,4$ )

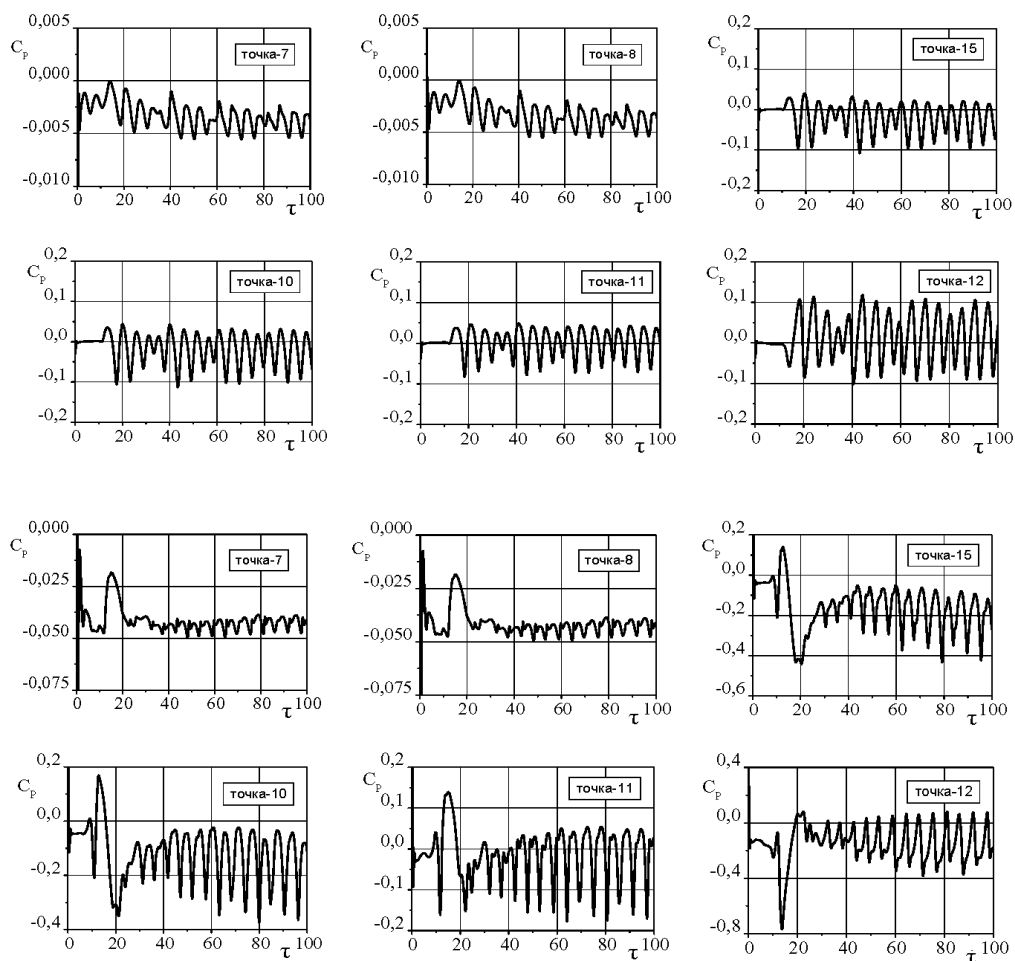


Рис. 4.51. Зависимость коэффициента давления  $C_p$  от времени в шести реперных точках при параболическом профиле скорости (шесть верхних фрагментов) и однородном профиле скорости на входе в канал (шесть нижних фрагментов) для  $Re=10000$  ( $L=4$  и  $B=0,4$ )

Таким образом, прямое численное моделирование на основе нестационарных уравнений движения вязкой жидкости в переменных скорость-давление показывает, что при определенных числах Рейнольдса наблюдаются осцилляции компонентов скорости и давления с доминирующими частотами, соответствующими числу Струхала  $St \approx 0,180$ , близкому к его значениям в следовой моде колебаний в сдвиговых слоях. Наряду с механизмом неустойчивости в сдвиговой зоне значительное влияние на интенсивность пульсаций поперечной скорости и давления в кормовой части каверны оказывает взаимодействие набегающего сдвигового слоя с задней стенкой каверны.

Анализ поведения изолиний равных скоростей и амплитудно-частотные характеристики скорости и давления указывают на наличие периодических выбросов жидкости из каверны в основной поток. Такой автоколебательный режим для различных углублений и лунок на обтекаемых поверхностях отмечался в расчетных и экспериментальных исследованиях и других авторов [69, 198, 204, 281, 298].

Чтобы лучше понять физический механизм перестройки течения внутри каверны, приводящий к периодическим выбросам жидкости из каверны в основной поток в канале, рассмотрим конкретный пример результатов расчета фрагментов скоростей в изолиниях в различные моменты времени на одном периоде колебаний при числе Рейнольдса  $Re=10000$  для двух форм профиля продольной скорости  $U(Y)$  перед каверной. Результаты таких расчетов показаны на рис. 4.52 в различные моменты времени  $\tau = 60 - 64,8$  с интервалом  $\Delta\tau = 1,2$ . При этом на рис. 4.52 слева представлены результаты расчетов поля скоростей в изолиниях для случая параболического профиля скоростей на входе в канал, а справа - для однородного профиля. Эти рисунки наглядно иллюстрируют изменение структуры поля скоростей в течении одного периода колебания обусловленного неустойчивостью в сдвиговом слое и его взаимодействием с жидкостью внутри каверны.

Сравнительный анализ этих двух рисунков демонстрирует различие вихревых структур течения в каверне на одном периоде колебания при параболическом и однородном профиле скорости на входе. В первом случае механизм неустойчивости в сдвиговом слое слабо развит и незначительно влияет на взаимодействие и смешение внешнего потока с жидкостью в каверне.

Во втором случае, когда профиль скорости перед каверной не параболический, а более наполненный, течение внутри каверны, особенно в задней ее части, имеет ярко выраженный большой вихрь, занимающий почти во все моменты времени половину объема каверны и имеющий большие локальные скорости порядка 0,2 от основной скорости. Этот интенсивный вихрь взаимодействует с внешним потоком и задней стенкой каверны, вызывая крупномасштабные периодические выбросы жидкости во внешний поток. Приведенные на рис. 4.52 справа различные фазы взаимодействия этого вихря на одном периоде колебаний позволяет проследить динамику внутри каверны с соответствующим изменением структуры течения в ней. Анализ рис. 4.52 показывает, что взаимодействие с внешним потоком при  $L=4$  значительно проявляется в задней половине области каверны.

Возникновение явления нестационарного обтекания каверны при стационарном набегающем потоке можно объяснить комплексным механизмом генерации вихрей в зоне каверны. Первый из них связан с отрывом потока с левого верхнего угла каверны, что приводит к возникновению неустойчи-

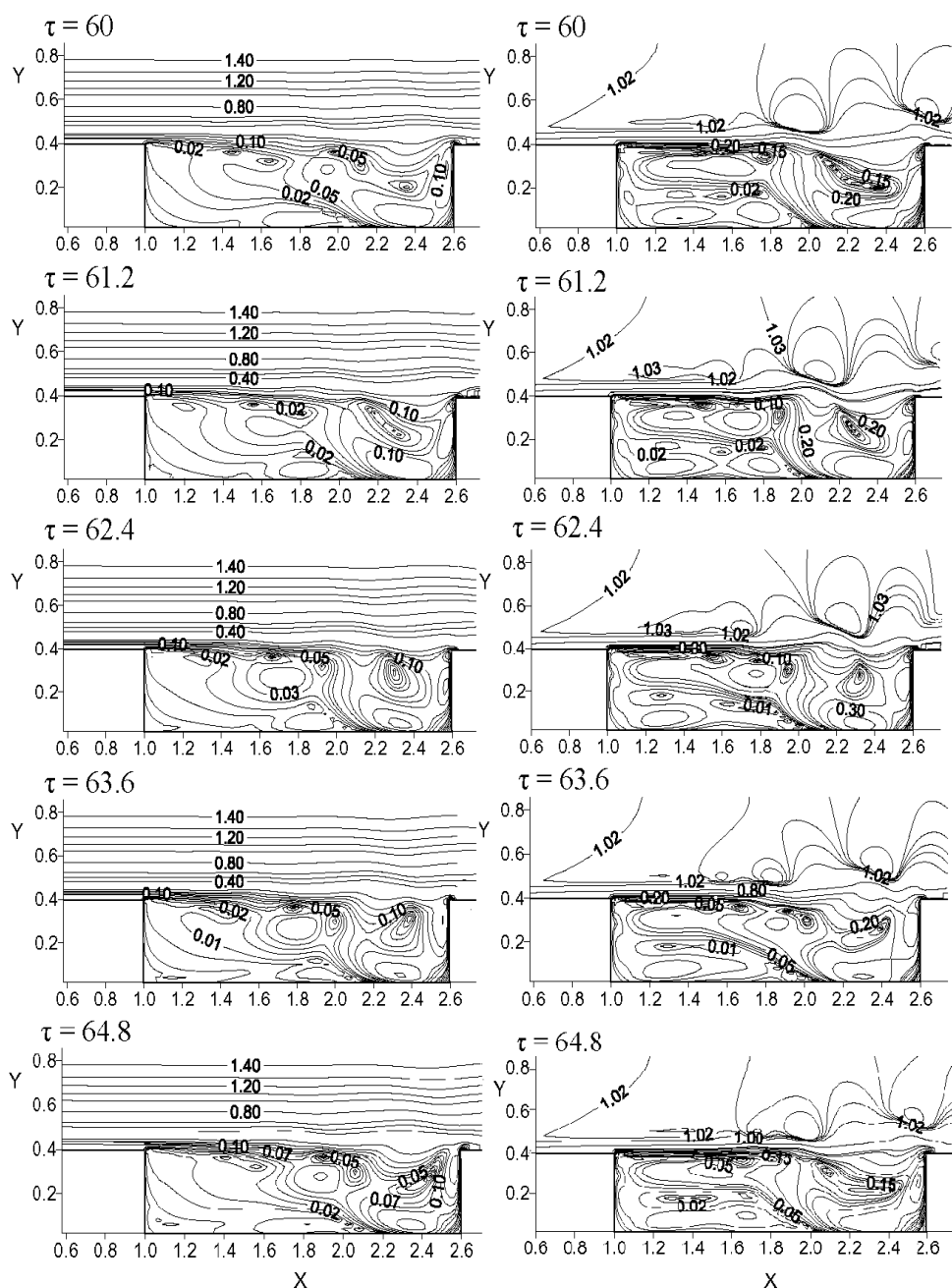


Рис. 4.52. Поле скоростей в изолиниях в различные моменты времени от  $\tau_1=60$  до  $\tau_2=64,8$  с интервалом  $\Delta\tau=1,2$  в зоне прямоугольной каверны ( $L=4$  и  $B=0,4$ ) с параболическим (слева) и однородным профилем скорости (справа) на входе в канал на одном периоде колебаний при числе  $Re=10000$

вости Кельвина-Гельмгольца в зоне слоя смешения и последующим переносом возмущений к правой задней кромке каверны. Это в свою

очередь приводит к инжекции вихревых образований во внутреннюю область каверны, которые способствуют дроблению находящихся там крупных вихрей и усилению флуктуаций параметров течения в правой части каверны.

Второй механизм связан с образованием крупного вихря в правой задней зоне каверны, который может выходить за пределы каверны и потому сопровождается отрывным режимом его обтекания. В результате в правой зоне каверны периодически происходит своеобразный выброс жидкости из каверны и давление в потоке здесь пульсирует.

Описанный механизм формирования нестационарности течения в зоне каверны подтверждается при внимательном визуальном анализе результатов расчета приведенных в графическом виде. Приведенное объяснение механизма вихреобразования в каверне в литературе уже обсуждалось [69]. В работе К. Chang и др. [359] представлены их собственные экспериментальные и теоретические результаты, которые получены с использованием LES моделирования. Там отмечается ограниченная возможность LES моделей с точки зрения анализа мелкомасштабной структуры течения.

Таким образом в рассматриваемом разделе численно исследованы поля давления и эффекты нестационарности для течения в плоском канале с прямоугольной каверной, расположенной на нижней его стенке. Для различных чисел Рейнольдса в шести реперных точках получены временные ряды мгновенных значений поперечной скорости и коэффициентов давления..

Показано, что стационарный поток в канале с прямоугольной каверной, имеющей параметры длины  $L = 2$  и  $L = 4$  с глубиной  $B = 0,4$  в зависимости от числа Рейнольдса может вызывать самоподдерживающиеся осцилляции течения типа автоколебаний в зоне расположения каверны.

Анализ расчетных результатов показал, что амплитуда колебания параметров потока в различных реперных точках в сдвиговом слое каверны различна и зависит от формы профиля продольной скорости перед каверной. Наиболее высокие из них находятся в зоне задней кромки каверны при однородном профиле продольной скорости на входе в канал.

Обнаружено, что при однородном профиле скорости на входе в канал для каверны с параметром длины  $L = 4$  и числе Рейнольдса  $Re = 10000$  существует экстремальный режим взаимодействия основного потока в канале с жидкостью в каверне, при котором наблюдаются значительные периодические выбросы жидкости за пределы каверны. Эти результаты хорошо видны на соответствующих расчетных рисунках и в целом

согласуются с известными экспериментальными и расчетными данными других авторов, полученных иными способами.

## **4.9. Отрывное обтекание квадратного цилиндра безграничным потоком вязкой жидкости**

### **4.9.1. Введение**

Режимы отрывных течений вязкой жидкости около плохообтекаемых тел или инженерных конструкций часто встречаются в природе и технике. Сложность исследования таких течений связана с тем, что при определенных числах Рейнольдса происходит отрыв потока от твердой обтекаемой поверхности, который вызывает нестационарность течения и образование различных вихревых структур [21, 85, 218, 226, 363]. Понимание механизма их возникновения имеет большое практическое значение для проектирования различных летательных аппаратов, их элементов и других технических устройств.

В силу сложности отрывных течений очень часто их изучение проводят на примерах двумерных задач внешнего обтекания цилиндров с различной формой поперечного сечения (круговой, эллиптической, квадратной, прямоугольной). Изучению такого класса течений посвящено большое количество как теоретических, так и экспериментальных работ [18, 21, 31, 165, 218]. Особенно много работ посвящено изучению обтекания кругового цилиндра [25, 27, 41, 93, 117, 167].

В данной работе рассматривается обтекание цилиндрических тел с квадратной формой их поперечного сечения. Эксперименты показывают, что в задачах такого класса в зависимости от числа Рейнольдса может реализоваться стационарное безотрывное обтекание и нестационарный периодический отрывный режим обтекания. В последнем случае в следе за цилиндром возникает система свободных вихревых образований, которые возникают при их отрыве с угловых кромок обтекаемого цилиндра.

Исследованию сопротивления и процессов срыва вихрей с плохообтекаемых тел в установившемся потоке несжимаемой жидкости посвящено множество работ. Характер обтекания цилиндров с квадратной и прямоугольной формой поперечного сечения отличается от обтекания кругового цилиндра. Многие из работ этого направления сочетают в себе как экспериментальные, так и теоретические подходы [176, 183].

Среди наиболее ранних численных исследований течения за квадратным цилиндром отметим работу Лайтхилла [314]. В качестве исходных уравнений он использует уравнения Навье-Стокса в переменных скорость - завихренность  $(V - \Omega)$ . Это дает возможность свести задачу к решению интегральных уравнений для скорости и завихренности [376]. Примерами



другого подхода к решению рассматриваемой задачи являются работы [31, 88, 139, 329], где использовался дискретно-вихревой метод.

Многие численные модели течения около квадратного цилиндра, основанные на решении уравнений Навье-Стокса выполнялись с использованием переменных функция тока – вихрь и дискретно – вихревого метода. Прямое численное моделирование течения около прямоугольного цилиндра при малых числах Рейнольдса было предпринято в пионерской работе [276], однако использование в ней схемы с центральными разностями приводило к появлению осцилляций в решении. В работе [264] приведены результаты численного решения задачи о течении около прямоугольного цилиндра в безграничном потоке с использованием специальных разностных схем для производных по времени и конвективных слагаемых. Результаты моделирования оказались успешными до чисел Рейнольдса  $Re \leq 1000$ . Для случая квадратного цилиндра получены зависимости коэффициентов лобового сопротивления от времени в виде синусоиды. В работах [88, 89] для решения этой задачи авторы используют систему уравнений Навье-Стокса в переменных «скорость-завихренность» и объединяют использование эйлеровых сеток, лагранжевых вихревых частиц и метод дискретных вихрей.

Современные подходы к численному моделированию обтекания тел при умеренных числах Рейнольдса вязкой несжимаемой жидкостью часто основываются на прямом решении полной системы уравнений Навье-Стокса. Одной из первых и наиболее полных работ по обтеканию квадратного цилиндра следует отметить работу Дэвиса и Мура [264], в которой алгоритм решения исходных уравнений использует метод сеток и метод конечных объемов.

Определенная сложность физической картины обтекания квадратного цилиндра делает эту задачу подходящей для тестирования новых и модифицированных численных схем при расчете отрывных течений с рециркуляциями. Цель данной работы состоит в применении метода DNM-LF для расчета полей скорости, давления, вихревой структуры течения и коэффициентов гидродинамических сил, действующих на обтекаемый квадратный цилиндр при различных числах Рейнольдса.

#### **4.9.2. Постановка задачи и основные уравнения**

Рассмотрим двумерную задачу обтекания цилиндрического тела с квадратной формой поперечного сечения безграничным ламинарным потоком имеющим скорость  $u_0$ . Физическая схема течения и границы расчетной области показаны на рис. 4.53. Начало введенной декартовой системы координат находится в левом нижнем углу расчетной области  $ABCD$ . Вертикальный размер расчетной области  $AB$  равен  $h$ , а общая длина

расчетной области  $S$  состоит из трех участков  $S=S_1+S_2+S_3$ . Неподвижный цилиндр  $FF_1K_1K$  находится внутри области  $ABCD$ , имеет вертикальный размер ребра  $b$ , а горизонтальный размер ребра в общем случае равен  $l$ . При  $l=b$  имеем случай квадратного цилиндра, который и будет рассматриваться ниже.

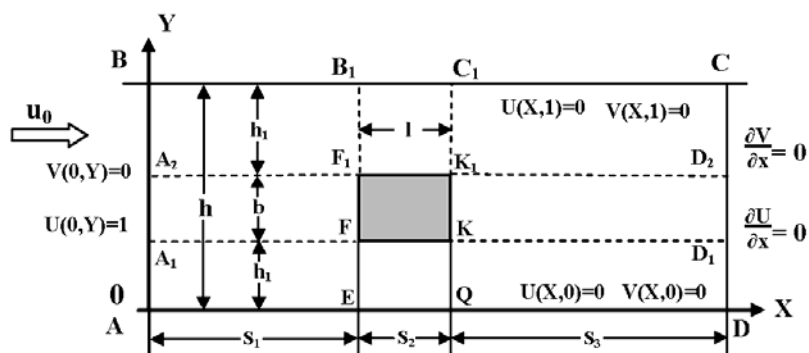


Рис. 4.53. Принципиальная схема поперечного обтекания квадратного цилиндра безграничным потоком

Левая внешняя граница расчетной области  $AB$  удалена от границы тела  $FF_1$  на расстояние  $S_1=4$ , а граница  $CD$  удалена от ребра  $K_1K$  вниз по потоку на расстояние  $S_3=15$ . Верхняя  $BC$  и нижняя  $AD$  границы потока считаются достаточно удаленными от контура тела  $FF_1K_1K$ , чтобы на них можно было принять условия невозмущенного потока. Численный эксперимент показал, что это расстояние  $h_1$  можно принять равным  $h_1=4b$ , чтобы оно не оказывало существенного влияния на результаты расчета с заданной точностью  $\varepsilon$  для рассматриваемых чисел Рейнольдса. Жидкость предполагается несжимаемой с постоянными физическими свойствами. При решении рассматриваемой задачи используется метод DNM-LF. Его специфика состоит в том, что для описания движения жидкости используются интегральные уравнения (4.1) и (4.2), выражающие законы сохранения массы и изменения количества движения. Как и выше для построения их дискретного аналога воспользуемся формулой Ньютона для напряжений и конечными разностями для соответствующих производных зависимых переменных. Далее переходим к безразмерным переменным. С этой целью за масштаб длины принимается размер ребра цилиндра  $b=l$ , за масштаб скорости принята скорость невозмущенного набегающего потока  $u_0$ , за масштаб времени принята величина  $t_0=b/u_0$ , а за масштаб давления принят скоростной напор  $p_0 = \rho u_0^2$ . В безразмерных переменных  $U=u/u_0$ ,  $V=v/b$ ,  $X=x/b$ ,  $Y=y/b$ ,  $\tau=u_0 t/b$ ,  $P=p/\rho u_0^2$  дискретный аналог системы исходных

уравнений, построенный на разнесенных сетках методом контрольного объема, подробно рассмотрен выше и имеет вид:

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P,$$

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = [\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U] / d_{j+1/2,i}^U, \quad (4.30)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V,$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}^U$ ,  $d_{j,i+1/2}^V$ ,  $c_1^P$ ,  $c_0^P$ ,  $b_1^P$ ,  $b_0^P$ , выражения  $G$  с верхними индексами  $U$ ,  $V$  и свободный член  $f^P$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются по определенным алгебраическим формулам. Система уравнений (4.30) связывает значения давления и компонентов скоростей на  $(n+1)$  временном слое.

Для завершения постановки задачи необходимо задать начальные и краевые условия на всех границах расчетной области и на обтекаемом теле  $FF_1K_1K$ . Предполагается, что в начальный момент времени во всей расчетной области безразмерная горизонтальная скорость  $U=1$ , а вертикальная скорость  $V$  и давление  $P$  равны нулю. В качестве граничных условий на входе в расчетную область для скорости используются условия невозмущенного потока, которые состоят в том, что  $U|_{AB}=1$  и  $V|_{AB}=0$ . На верхней  $BC$  и нижней  $AD$  границах расчетной области используются условия подвижных стенок с прилипанием. При постановке граничных условий на выходе из расчетной области в сечении  $CD$  мы сталкиваемся с проблемой моделирования граничных условий на бесконечности. В данном случае использованы стандартные условия свободного вытекания в форме Неймана. На твердых стенках неподвижного цилиндра выполняются условия прилипания  $U|_{\Gamma}=0$  и непротекания  $V|_{\Gamma}=0$ , где  $\Gamma$  - твердая граница препятствия.

Таким образом, решение системы уравнений (4.30) будем искать в области  $0 \leq X \leq S$ ,  $0 \leq Y \leq H$ , где  $S=s/b$ ,  $H=h/b$  с начальными и граничными условиями в виде:

Начальные условия:  $U(X,Y,0)=1$ ,  $V(X,Y,0)=0$ ,  $P(X,Y,0)=0$ .

Граничные условия:  $U|_{AB}=1$ ;  $U|_{BC}=1$ ;  $U|_{AD}=1$ ;  $\partial U / \partial X|_{CD}=0$ ;

$$V|_{AB}=0$$
;  $V|_{BC}=0$ ;  $V|_{AD}=0$ ;  $\partial V / \partial X|_{CD}=0$ , (4.31)
$$U|_{FF_1}=0$$
;  $U|_{F_1K_1}=0$ ;  $U|_{K_1K}=0$ ;  $U|_{KF}=0$ ;
$$V|_{FF_1}=0$$
;  $V|_{F_1K_1}=0$ ;  $V|_{K_1K}=0$ ;  $V|_{KF}=0$ .

Основными параметрами задачи для обтекаемого цилиндра являются число Рейнольдса  $Re = u_0 l / \nu$  и геометрический размер цилиндра  $l$ . Следует подчеркнуть, что давление  $P$  в рассматриваемой системе уравнений не является основной переменной. При нашем подходе необходимое уравнение для давления выводится из уравнения неразрывности в виде уравнения типа Пуассона. При этом, необходимые для его решения значения давления в граничных узлах определяются с помощью уравнений движения в комбинации с граничными условиями для компонентов скорости. В процессе решения задачи требуется определить поля скорости, давления и изучить влияние числа Рейнольдса на структуру течения в следе за цилиндром и на коэффициенты гидродинамического сопротивления и подъемной силы. Стационарное обтекание цилиндра характеризуется тем, что искомые переменные  $U, V, P$  не зависят от времени. Расчет параметров течения и структуры вихревых образований основан на численном решении системы уравнений движения жидкости (4.30) при начально-краевых условиях (4.31).

Для решения сформулированной задачи разработана компьютерная программа KC-LF, которая позволяет получать стационарные решения, либо исследовать поведение характеристик течения во времени.

#### **4.9.3. Результаты расчетов и их обсуждение. Стационарный режим**

С помощью разработанной программы была выполнена серия расчетов по определению полей скорости, давления и гидродинамических сил, действующих на обтекаемый безграничным потоком квадратный цилиндр при различных числах Рейнольдса ( $Re = 40, 50, 70, 100, 250, 500, 1000$ ) на равномерной сетке размером  $225 \times 500$ . Как и ожидалось, расчеты показали, что поле скоростей в зоне цилиндра, поле давления и коэффициенты гидродинамического сопротивления и подъемной силы зависят от числа Рейнольдса. В случае низких чисел Рейнольдса, меньших критического  $Re^*$  реализуется стационарный режим обтекания квадратного цилиндра однородным безграничным потоком. Экспериментальное подтверждение такого безотрывного режима обтекания отмечается в ряде работ [31]. Интересно отметить, что в случае обтекания кругового цилиндра критическое значение числа Рейнольдса находится в диапазоне  $Re^* \approx 40 \div 50$  [93]. Для квадратного цилиндра такое критическое число Рейнольдса так однозначно не определено. По литературным источникам оно составляет порядок  $Re^* \approx 80 \div 100$ , но встречаются и другие оценки. Из экспериментов известно, что при числах  $Re > Re^*$  наблюдается явление отрыва и снос вихрей с задних кромок цилиндра, которые оказывают существенное влияние на режим обтекания, структуру полей скорости и давления, а следовательно и на сопротивление обтекаемого тела и его подъемную силу.

В качестве первого примера результатов численных исследований рассмотрим изменение во времени локальных значений скоростей и коэффициентов давления  $C_p$  в четырех реперных точках потока при различных числах Рейнольдса. Схема расположения реперных точек и их координаты приведены на рис. 4.54. Изучение характеристик потока было проведено при различных числах Рейнольдса в диапазоне  $40 \leq Re \leq 1000$ . Для наших целей характерными оказались точки № 1, 2, 3.

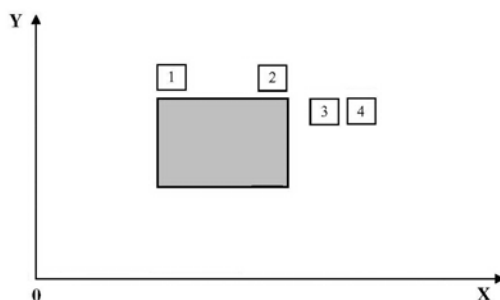


Рис. 4.54. Схема расположения реперных точек и их координаты:

№1 -  $X=4,08$ ;  $Y=5,08$ ; №2 -  $X=4,72$ ;  $Y=5,08$ ;

№3 -  $X=5,16$ ;  $Y=5,00$ ; №4 -  $X=5,24$ ;  $Y=5,00$

Результаты расчетов зависимости компонентов скорости  $U$ ,  $V$  и коэффициента давления  $C_p$  от времени для трех реперных точек показаны на рис. 4.55. Анализ расчетных компьютерных осциллограмм подтверждает, что в зависимости от числа Рейнольдса наблюдается два режима обтекания цилиндра. Первый это стационарный режим, при котором значения параметров со временем выходят на постоянные значения. Этот режим наблюдается при числах Рейнольдса  $Re < Re^* = 70$ . С ростом числа Рейнольдса картина обтекания изменяется. Примеры динамики значений скоростей  $U$ ,  $V$  и коэффициента давления  $C_p$  для чисел Рейнольдса  $Re=100, 250, 500, 1000$  приведены на четырех фрагментах рис. 4.55. Из рисунка видно, что с ростом числа Рейнольдса поведение параметров потока изменяется во времени вследствие потери устойчивости течения. При этом в рассматриваемых трех характерных реперных точках наблюдаются периодические осцилляции параметров потока. Они приводят к образованию вихрей на верхней и нижней горизонтальных стенках обтекаемого цилиндра. Далее эти вихри сносятся основным потоком и в следе за цилиндром развиваются периодические вихревые структуры, которые известны в литературе как вихревые дорожки Кармана [226].

В качестве второго примера расчетов рассмотрим результаты установившегося обтекания квадратного цилиндра. На рис. 4.56

представлены фрагменты векторного поля скоростей при числе Рейнольдса  $Re=40$  и  $Re=70$ .

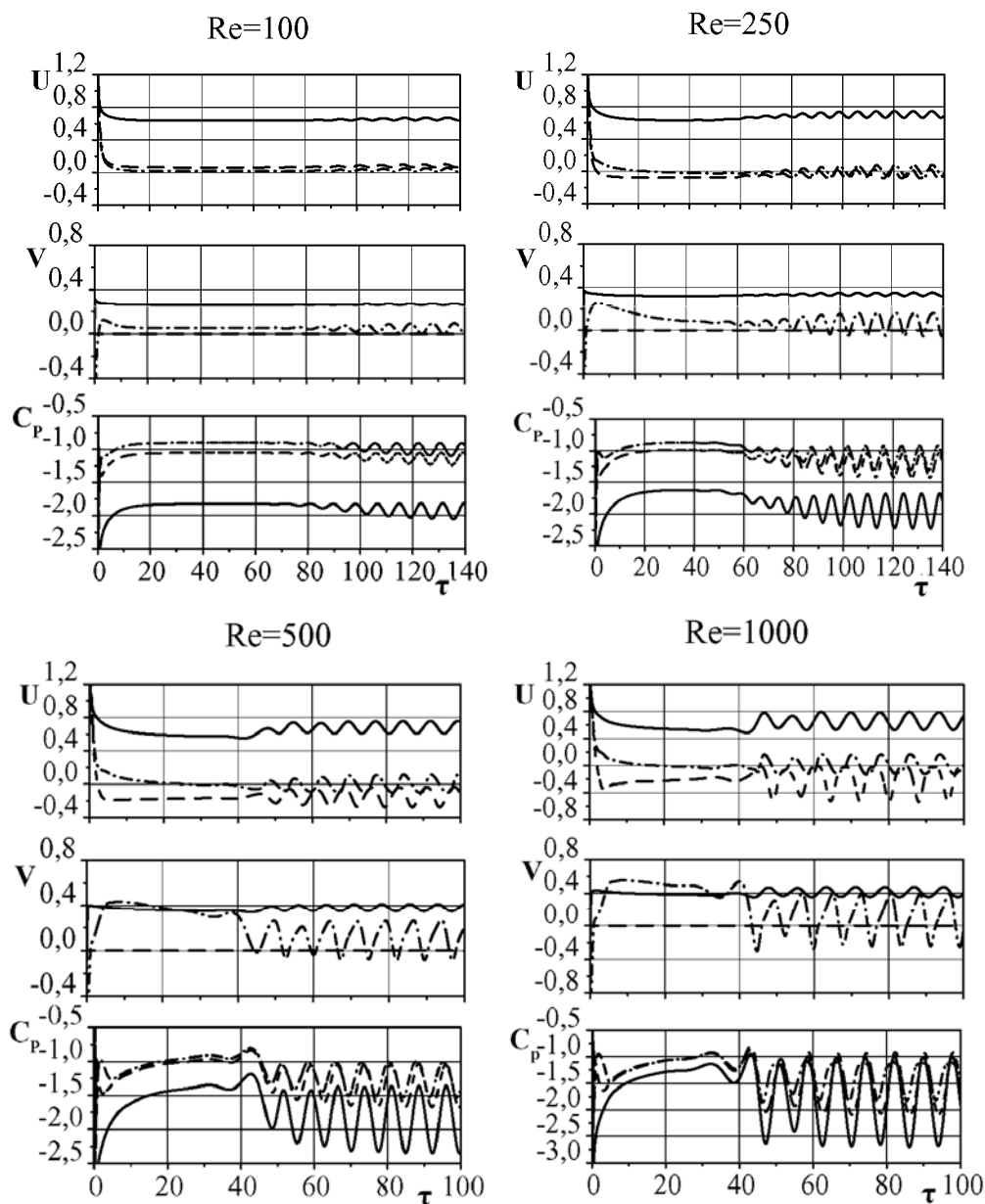


Рис. 4.55. Зависимость продольной  $U$ , вертикальной  $V$  скоростей и коэффициента давления  $C_p$  от времени при обтекании квадратного цилиндра для различных чисел Рейнольдса в трех реперных точках — 1, — 2, — 3

Анализ этих фрагментов показывает, что в следе за цилиндром характерно образование возвратного течения. При этом циркуляционная

зона вытянута вдоль по течению и при  $Re=40$  она еще симметрична, а при  $Re=70$  симметрия нарушается и указывает на возникновение переходного режима. Впереди цилиндра поток тормозится и обтекает его без образования вихревых зон на передних кромках цилиндра.

Поскольку исходные уравнения движения записаны и решаются в переменных скорость-давление, то это позволяет в процессе решения задачи сразу определить и поле давления в виде изолиний коэффициентов давления  $C_p$

$$C_p = \frac{p - p_1}{\rho u_0^2 / 2},$$

где  $p$  - локальное давление,  $p_1$  - характерное давление в невозмущенном потоке.

Результаты расчетов полей давления представлены ниже в виде изолиний коэффициентов давления.

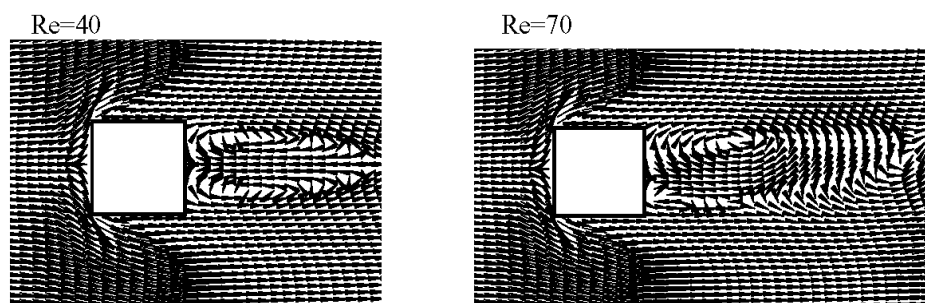


Рис. 4.56. Фрагменты векторного поля скоростей при обтекании квадратного цилиндра при числах Рейнольдса  $Re=40$  и  $Re=70$  для  $\tau=140$

С целью полноты представления результатов расчета для числа Рейнольдса  $Re=50$  на комплексном рис. 4.57 приведены изолинии коэффициентов давления (с) совместно с расчетными фрагментами векторного поля скоростей (а) и их изолиний (b). Характерным для этого режима является симметрия течения как в ближнем его следе так и во всей зоне расположения цилиндра. Векторное поле скоростей и их изолиний дополняют друг друга и позволяют наглядно видеть структуру течения и поле давления при заданном числе Рейнольдса.

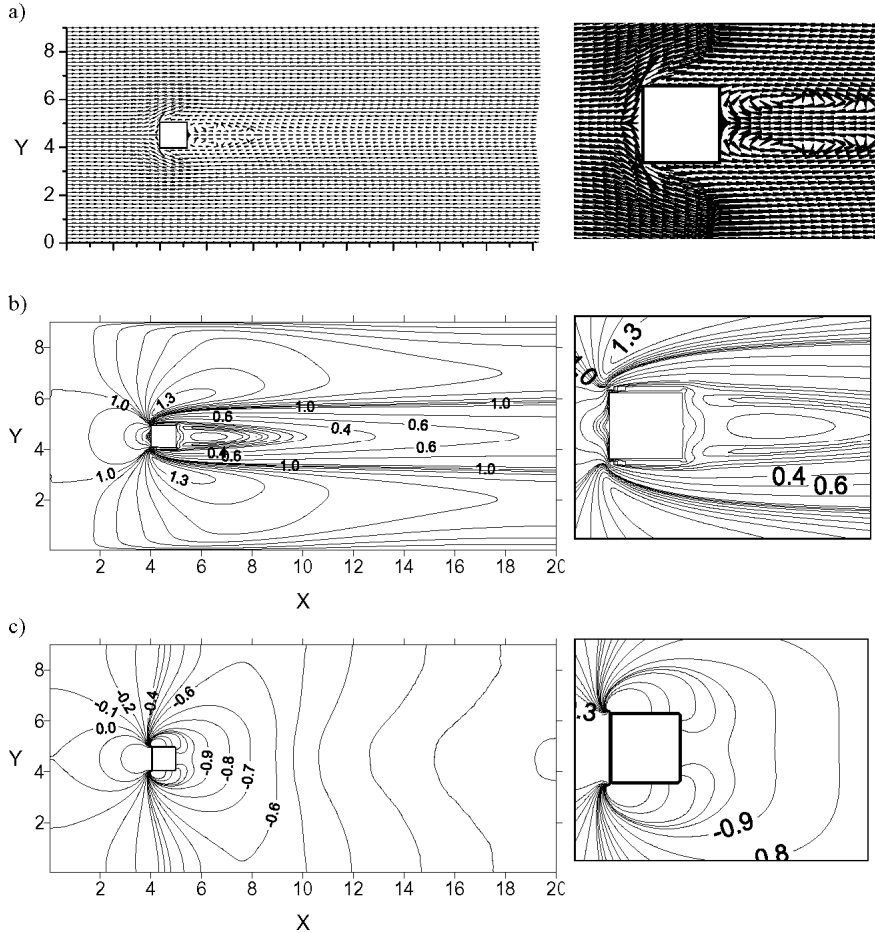


Рис. 4.57. Фрагменты векторного поля скоростей (a), их изолиний (b) и изолиний коэффициентов давления (c) при числе  $Re=50$  для  $\tau=140$

Результаты расчетов показывают, что такой стационарный режим обтекания наблюдается при числах  $Re < 70$  и согласуется с экспериментами. При этом полученные значения параметров потока при численном решении задачи выходят на постоянные значения, что свидетельствует об их асимптотической устойчивости. А вот при числе  $Re \geq 70$  наблюдается потеря стационарного режима обтекания. Средства компьютерной техники позволяют наглядно видеть формирование неустановившейся структуры течения с ростом числа Рейнольдса.

#### 4.9.4. Нестационарный периодический режим обтекания

Обратимся теперь к анализу результатов расчета в случае нестационарного отрывного обтекания квадратного цилиндра, то есть при



числах  $Re > Re^*$ . Выше, на рис. 4.55 представлены расчетные зависимости от времени мгновенных значений скоростей  $U$ ,  $V$  и коэффициента давления  $C_p$  в реперных точках № 1, 2, 3 для различных режимов обтекания. При этом в процесс расчетов никаких искусственных возмущений в поток не вводилось. Эти результаты расчетов согласуются с данными экспериментов [31] и с физической точки зрения объясняют влияние вихрей образующихся при числах  $Re > Re^*$  на верхней и нижней горизонтальных границах квадратного цилиндра на структуру течения в следе.

Рассмотрим принципиальную схему нестационарного отрывного обтекания квадратного цилиндра приведенную на рис. 4.58.

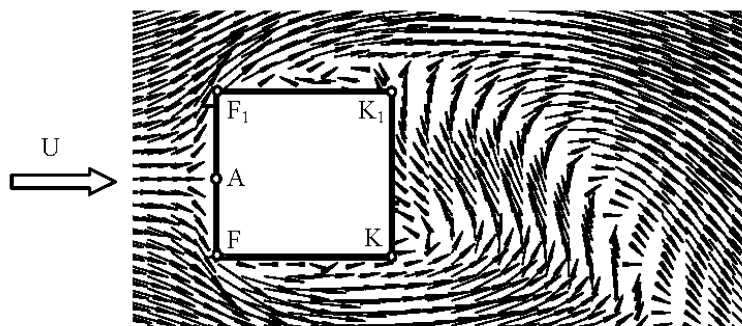


Рис. 4.58. Принципиальная схема нестационарного отрывного обтекания квадратного цилиндра ( $Re=100$ )

Набегающий на цилиндр поток тормозится и давление в передней критической точке  $A$  достигает максимума. На участке поверхности цилиндра  $AF_1$  давление, по мере продвижения от точки  $A$  к точке  $F_1$  снижается. В то же время, продольная скорость сразу за точкой  $F_1$  на верхней стенке цилиндра  $F_1K_1$  в пристенной области, в силу условия прилипания жидкости убывает, тогда как давление в этой области растет. Поэтому вблизи стенки  $F_1K_1$  заторможенная жидкость не может далеко продвинуться в область повышенного давления между точками  $F_1$  и  $K_1$ , и где-то не доходя до точки  $K_1$  останавливается, а затем под действием положительного градиента давления, жидкость в пристеночной области начинает двигаться в обратном направлении, увеличивая толщину пограничного слоя на участке  $F_1K_1$ . Если число  $Re > Re^*$ , то образовавшиеся вихри развиваются, и достигнув определенных размеров сносятся основным потоком и поочередно срываются с задних угловых кромок цилиндра. После отрыва вихрей структура течения в следе сильно изменяется и становится нестационарной и не симметричной. Аналогичная картина течения имеет место и на нижней стенке квадрата  $FK$ .

Рассмотренный процесс образования и отрыва вихрей с квадратного цилиндра приводит к появлению периодических вихревых структур в следе за цилиндром.

С целью более подробного изучения нестационарных режимов обтекания квадратного цилиндра была выполнена серия методических расчетов при различных числах Рейнольдса.

На рис. 4.59 - рис. 4.61 представлены результаты расчетов в виде фрагментов векторного поля скоростей, их изолиний и изолиний коэффициентов давления  $C_p$  в зоне обтекаемого квадратного цилиндра при трех числах Рейнольдса  $Re=100$ ,  $Re=250$  и  $Re=1000$  соответственно. Эти рисунки наглядно демонстрируют изменение картины поля скоростей и давлений при трех рассматриваемых числах Рейнольдса, по сравнению с рис. 4.56 для случая стационарного режима обтекания, когда число Рейнольдса  $Re=40$ .

$Re=100$

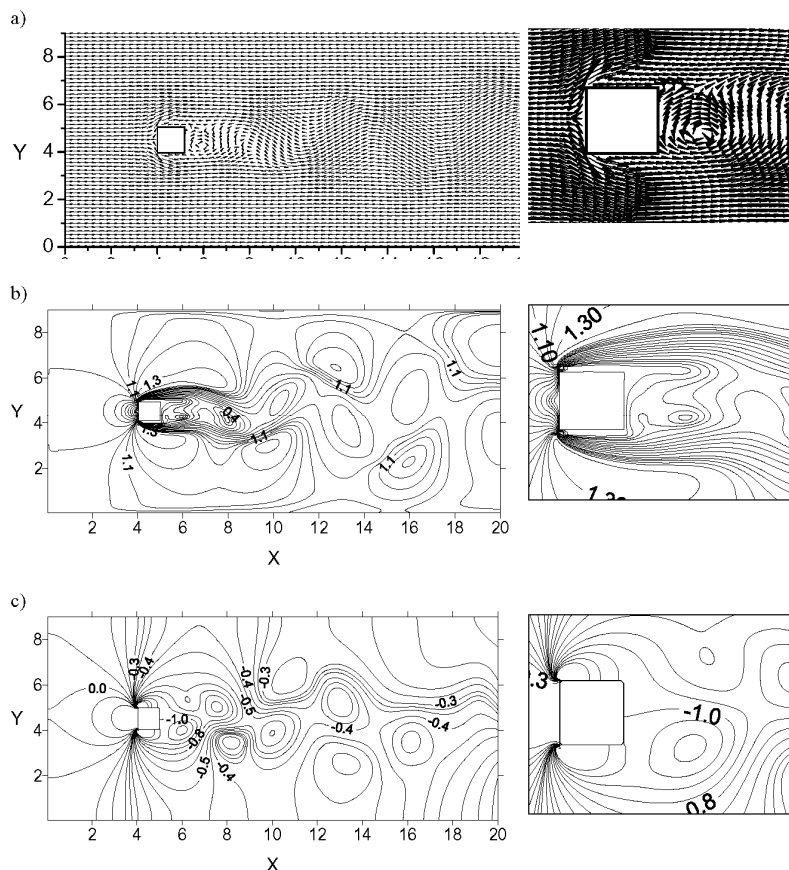


Рис. 4.59. Фрагменты векторного поля скоростей (a), их изолиний (b) и изолиний коэффициентов давления (c) при числе  $Re=100$  для  $\tau=140$

Их анализ показывает, что при числах  $Re = 100$ ,  $Re = 250$  и  $Re = 1000$  кинематическая структура течения в зоне за цилиндром качественно изменилась и уже не является симметричной. Рост числа Рейнольдса приводит к интенсивному срыву вихревых сгустков с верхней и нижней правых кромок цилиндра. При этом когда отрывается верхний вихревой сгусток, то нижний задерживается на некоторое время в донной области, увеличиваясь по размеру и смещаясь к осевой линии. Верхний вихрь вращается по часовой стрелке, а нижний против нее.

$Re=250$

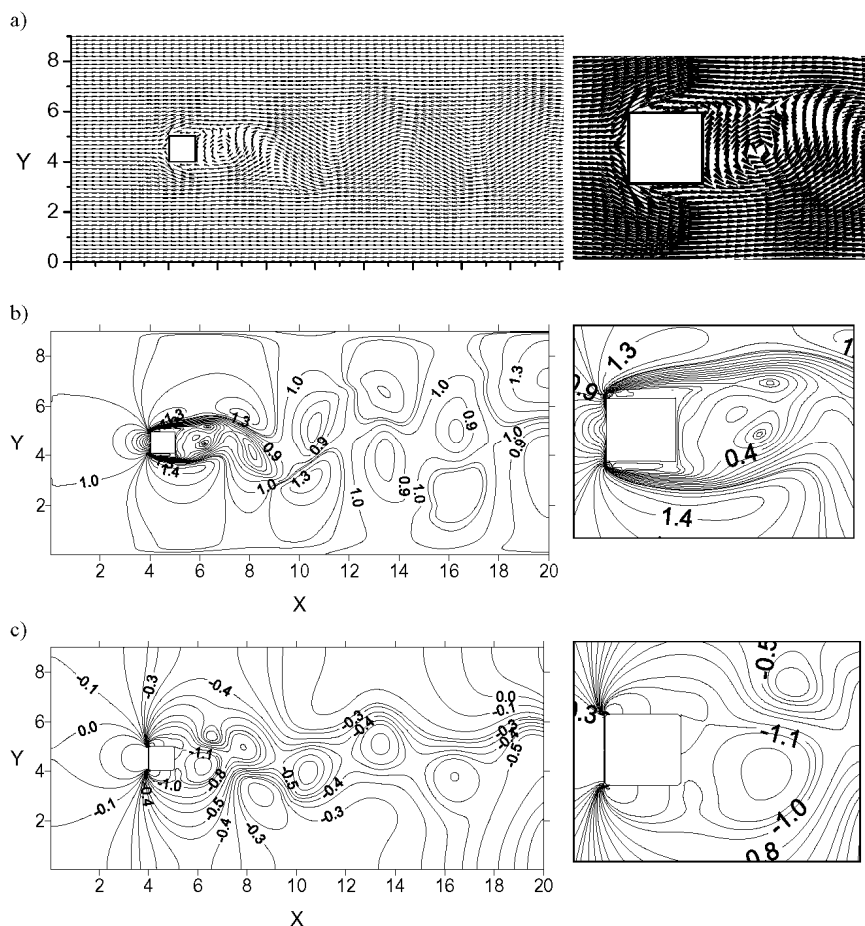


Рис. 4.60. Фрагменты векторного поля скоростей (a), их изолиний (b) и изолиний коэффициентов давления (c) при числе  $Re=250$  для  $\tau=140$

Эта картина течения периодически повторяется, так как вихревые сгустки на верхней и нижней кромках цилиндра, генерируются и срываются поочередно, а затем уносятся из донной области. Это приводит к возникновению периодического течения за цилиндром в виде так

называемой вихревой дорожки Кармана, которая хорошо наблюдается в расчетах на рис. 4.59 - рис. 4.61 и в экспериментах при визуализации течения [264]. С ростом числа Рейнольдса количество вихрей в следе увеличивается, а их взаимодействие в ближней зоне приводит к росту вертикального размера следа.

Представленные на рис. 4.59 - рис. 4.61 векторная картина течения и результаты расчетов в виде изолиний скоростей выразительно показывают особенности тонкой структуры отрывного течения и величину скорости в зоне расположения цилиндра при трех числах Рейнольдса. С удалением от цилиндра вихревые структуры вырождаются вследствие вязкости. Эти результаты расчетов согласуются с другими данными, полученными средствами измерительной техники и визуализацией течения [31].

$Re=1000$

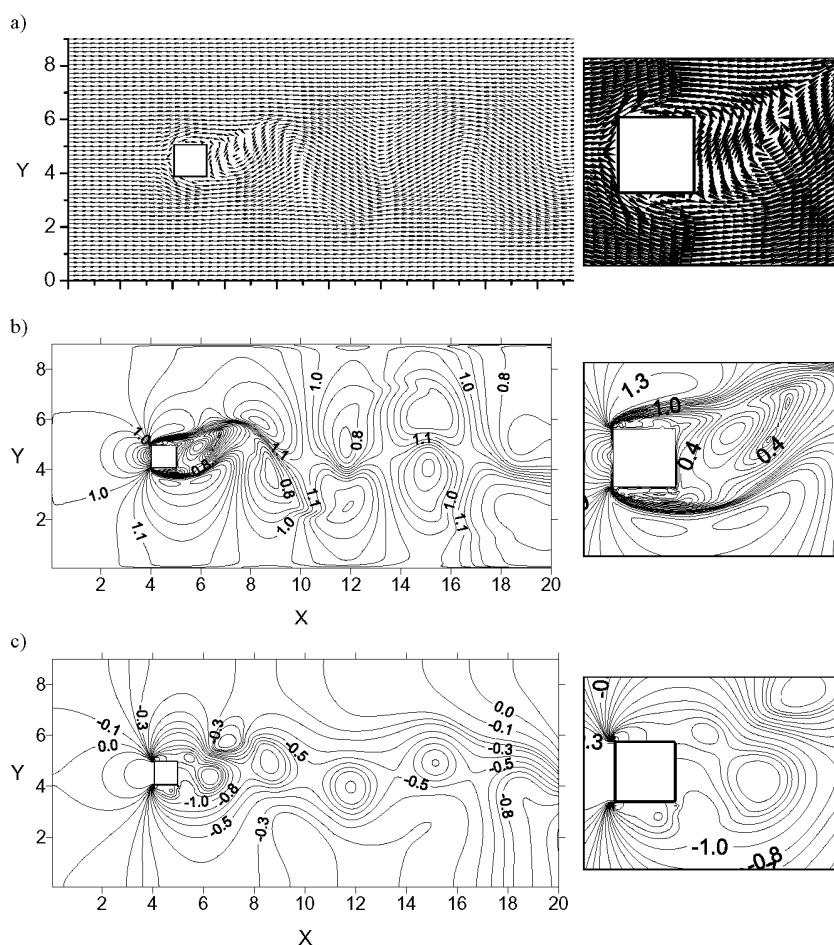


Рис. 4.61. Фрагменты векторного поля скоростей (a), их изолиний (b) и изолиний коэффициентов давления (c) при числе  $Re=1000$  для  $\tau=100$

Чтобы лучше понять физический механизм перестройки течения в следе за цилиндром, приводящий к асимметрии течения и образованию периодического вихревого следа, рассмотрим результаты расчета фрагментов векторных полей скорости (a) и их изолиний (b) в различные моменты времени на одном периоде колебания параметров потока при числе Рейнольдса  $Re=1000$ . Результаты таких расчетов показаны на рис. 4.62 в различные моменты времени  $\tau = (80 - 87)$  с интервалом  $\Delta\tau=1$ .

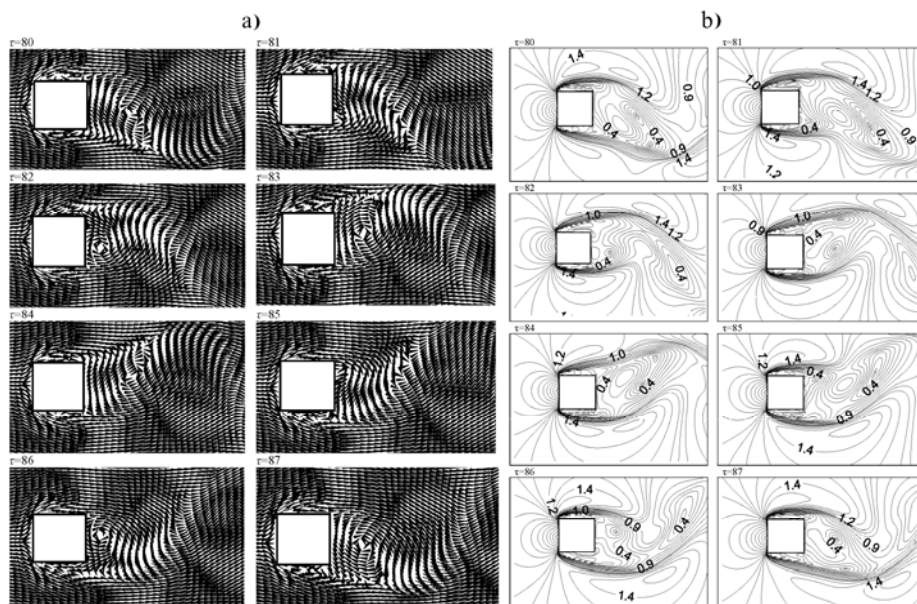


Рис. 4.62. Зависимость от времени векторного поля скоростей (a) и их изолиний (b) на одном периоде колебаний в интервале  $\tau_1=80$  до  $\tau_2=87$  с шагом  $\Delta\tau=1$  при обтекании квадратного цилиндра для числа  $Re=1000$

Эти рисунки наглядно демонстрируют структуру поля скоростей в течение одного периода колебания, обусловленного срывом вихря с правой верхней кромки цилиндра. Этот сход вихря приводит к разбалансированию структуры течения в следе. Первый фрагмент из рассматриваемой серии (a) (наверху слева рис. 4.62) относится к моменту времени  $\tau = 80$ , когда на верхней стенке цилиндра происходит образование вихря. Затем этот вихрь развивается и увеличивает свои размеры как по вертикали, так и по горизонтали навстречу основному потоку. Это заметно на верхнем фрагменте справа рис. 4.62 (a) соответствующих моменту времени  $\tau = 81$ .

На следующем, третьем фрагменте рисунка 4.62 (a) для момента времени  $\tau = 82$  уже видно вырождение сорвавшегося верхнего вихря и образование нового вихря в нижней части ближнего следа за цилиндром. Следующие фрагменты, представленные на рис. 4.62 (a) для других

моментов времени  $\tau$  иллюстрируют различные фазы эволюции вихрей, оторвавшихся с верхней и нижней кромок квадрата в моменты времени  $\tau = 83, 84, 85, 86, 87$  соответственно. При числе  $Re=1000$  на фрагментах (а) и (б) рис. 4.62 хорошо видны вертикальные колебания параметров потока. Периодический сход вихрей практически повторяется во времени и приводит к автоколебаниям течения в следе за телом с частотой равной частоте срыва вихрей.

#### **4.9.5. Поле давления в зоне обтекания квадратного цилиндра**

В рассматриваемой задаче большой практический интерес представляет распределение давления в зоне расположения цилиндра. Наш метод, в отличие от предшествующих работ позволяет непосредственно рассчитывать поля давления как в зоне расположения цилиндра, так и на его поверхности.

В качестве примера расчетов полей давления на рис. 4.59 (с) - рис. 4.61 (с) показаны фрагменты распределения полей давления в зоне цилиндра в виде изолиний коэффициентов давления  $C_p$  при числах  $Re = 100, Re = 250$  и  $Re = 1000$ . Картина этих изолиний сложна и характерна для отрывных течений за плохообтекаемыми телами. Анализ рис. 4.59 - рис. 4.61 позволяет выявить области низкого и высокого давления. Как и ожидалось, области высокого давления сильно коррелируют с областями, где жидкость тормозится, то есть там, где линии равных скоростей наименее уплотнены. Области низкого давления наоборот, соответствуют областям, где изолинии скоростей наиболее уплотнены, то есть скорости велики.

На расчетных графиках полей давления хорошо наблюдается развитие парных областей низкого и высокого давления, соответствующих каждому сорвавшемуся вихрю. Учитывая, что центры срывающихся вихрей двигаются со скоростью перемещения локальных минимумов давления [341], можно определить скорость переноса вихрей. В этом смысле картина распределения давления существенно дополняет информацию о динамике переноса вихрей.

В завихренной зоне позади кормовой части цилиндра давление значительно ниже давления в невозмущенном потоке. Это пониженное давление является причиной возникновения обратных течений в следе за цилиндром. Срывающиеся с концов цилиндра поочередно вихревые сгустки взаимодействуют с циркуляционным течением в следе и позади обтекаемого цилиндра возникает шахматная последовательность вихревых образований. Далее это нестационарное течение стабилизируется и выходит на устойчивый периодический режим, когда частота схода вихрей и амплитуда колебаний перестают меняться со временем.

#### 4.9.6. Гидродинамические силы действующие на обтекаемый квадратный цилиндр

Моделирование отрывного обтекания квадратного цилиндра на основе системы полных нестационарных уравнений движения несжимаемой жидкости в переменных скорость-давление позволяет непосредственно рассчитать гидродинамические силы, действующие на обтекаемое тело. Величина полного гидродинамического сопротивления плохообтекаемых тел в основном определяется силами давления. Для определения сил, действующих на обтекаемое тело необходимо иметь эпюру распределения давления по поверхности цилиндра. Используемый численный метод позволяет определить все характеристики течения во всей расчетной области, включая распределение давления и силы трения по поверхности обтекаемого тела, однако лишь при малых и умеренных числах Рейнольдса. Давление в точке на поверхности тела обычно характеризуют коэффициентами давления.

Рассмотрим результаты расчета локальных значений коэффициента давления  $C_p$  по поверхности квадратного цилиндра. На рис. 4.63. представлено распределение давления  $C_p$  по поверхности цилиндра  $KFF_1K_1K$  при трех числах Рейнольдса  $Re = 40, 250, 1000$ . Легко видеть, что на передней стороне  $FF_1$  коэффициент давления всюду положительный и в средней критической точке  $C_p = 1$ . На остальных трех сторонах квадратного контура коэффициент давления отрицательный. На этом же рисунке для сравнения, наряду с численным расчетом, представлены экспериментальные данные полученные в работе [191] при числах  $Re = 3,3 \cdot 10^4$  и  $Re = 6,6 \cdot 10^4$ . Из их сравнения видно, что теория и опытные данные хорошо согласуются между собой. Кроме того, здесь подтверждается гипотеза о слабой зависимости распределения давления по поверхности квадрата с острыми кромками от числа Рейнольдса.

Зная распределение давления по обтекаемому контуру тела легко определяются гидродинамические силы сопротивления  $F_x$  и подъемной силы  $F_y$  согласно общей формулы [50, 226]

$$\vec{F} = \int_{\sigma} \vec{P}_n d\sigma. \quad (4.32)$$

Как обычно, вместо компонентов сил  $F_x, F_y$  введем в рассмотрение безразмерные гидродинамические коэффициенты сил сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$  в виде отношения значений сил  $F_x, F_y$  к скоростному напору и характерной площади обтекаемого тела  $\Omega = b$

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho u_0^2 \cdot b}; \quad C_y = \frac{2F_y}{\rho u_0^2 \cdot b}. \quad (4.33)$$

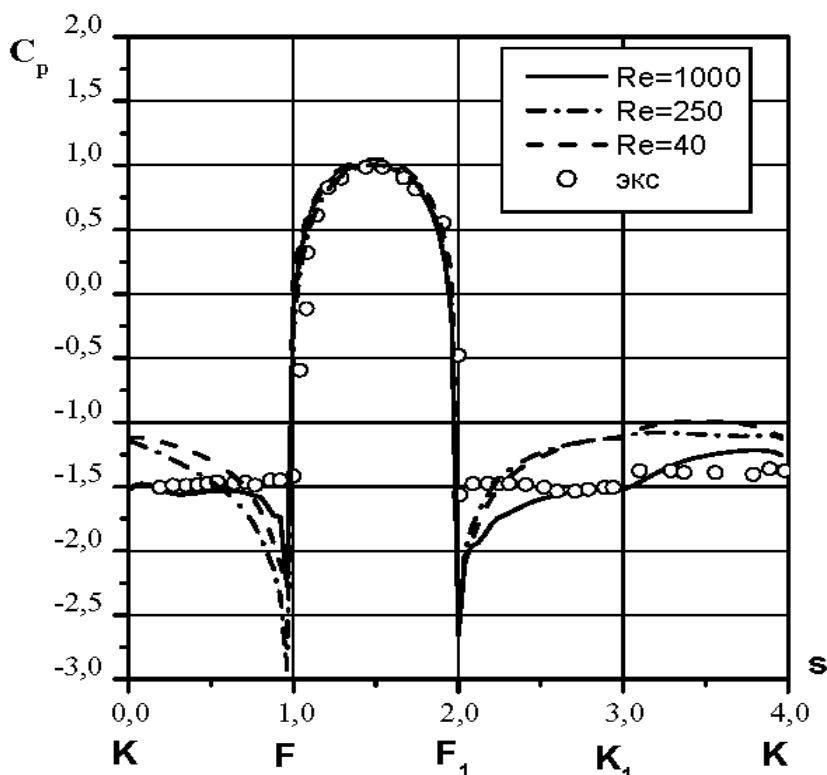


Рис. 4.63. Распределение давления  $C_p$  по поверхности цилиндра  $KFF_1K_1K$  при трех числах Рейнольдса  $Re = 40, 250, 1000$ : кривые – расчет;  $\circ$  – эксперимент [191]

Вычисление этих безразмерных интегральных характеристик в виде суммарного коэффициента профильного сопротивления  $C_x = C_{xp} + C_{xf}$  и подъемной силы  $C_y = C_{yp} + C_{yf}$  выполнялось по формулам (3.120) и (3.121):

$$C_x = \int_{S_1} C_{p1} dY - \int_{S_3} C_{p3} dY + \frac{1}{Re} \left[ \int_{S_2} \frac{\partial U_2}{\partial Y} dX - \int_{S_4} \frac{\partial U_4}{\partial Y} dX \right], \quad (4.34)$$

$$C_y = \int_{S_4} C_{p4} dX - \int_{S_2} C_{p2} dX - \frac{1}{Re} \left[ \int_{S_1} \frac{\partial V_1}{\partial X} dY - \int_{S_3} \frac{\partial V_3}{\partial X} dY \right]. \quad (4.35)$$



Здесь цифры у коэффициентов давления и скоростей обозначают номера ребер (границу) квадратного цилиндра  $S_i$ , на которых они вычисляются ( $S_1 = FF_1$ ,  $S_2 = F_1K_1$ ,  $S_3 = K_1K$ ,  $S_4 = KF$ )  $i = \overline{1,4}$ .

На рис. 4.64 представлено изменение во времени силы лобового сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$ , действующих на квадратный цилиндр при отрывном его обтекании при числах Рейнольдса  $Re = 250, 1000$ . Нетрудно видеть, что эти коэффициенты зависят от времени, а с его увеличением их значения выходят на устойчивый периодический режим колебаний. При этом среднее значение коэффициентов  $C_x$  зависит от числа Рейнольдса. При  $Re = 250$ , коэффициент  $C_x = 1,81$ ; при  $Re = 500$ , коэффициент  $C_x = 1,95$ ; при  $Re = 1000$ , коэффициент  $C_x = 2,12$ .

Следует отметить, что значение коэффициента подъемной гидродинамической силы  $C_y$  колеблется возле нулевого значения с частотой равной частоте срыва вихрей с поверхности цилиндра, что согласуется с известными теоретическими и экспериментальными данными [264]. Частота схода вихрей с задних кромок квадратного цилиндра в единицу времени зависит от числа Рейнольдса  $Re = u_0 l / \nu$  и согласно нашим расчетам она появляется при числе  $Re \geq 70$ , а для числа  $Re \leq Re^*$  течение остается ламинарным и устойчивым. Безразмерную частоту срыва вихрей называют числом Струхала  $Sh = fl / u_0$ , где  $f$  - частота срыва. Частота колебаний коэффициента  $C_x$  в два раза больше чем частота схода вихрей.

Результаты наших расчетов чисел Струхала при различных числах Рейнольдса приведены на рис. 4.65 сплошной линией. Там же значками показаны данные экспериментов заимствованные из работы [333].

Видно, что в целом они хорошо согласуются. Однако автор работы [191] отмечает сложность сравнения опытных данных с другими работами ввиду отсутствия требуемых надежных данных. Часто измерения выполнены на цилиндрах с округленными кромками. Например, данные приведенные в работе [333] по зависимости числа Струхала от Рейнольдса отличаются от данных работы [264].

Таким образом, данный метод позволяет глубже изучить механизм образования и эволюцию вихревых структур за плохообтекаемыми телами при малых и умеренных числах Рейнольдса. В работе показано, что в зависимости от числа Рейнольдса формируется как стационарный так и нестационарный режим обтекания, при котором структура течения за цилиндром носит периодический характер и имеет свои пространственные и временные масштабы, определяемые числом Струхала.

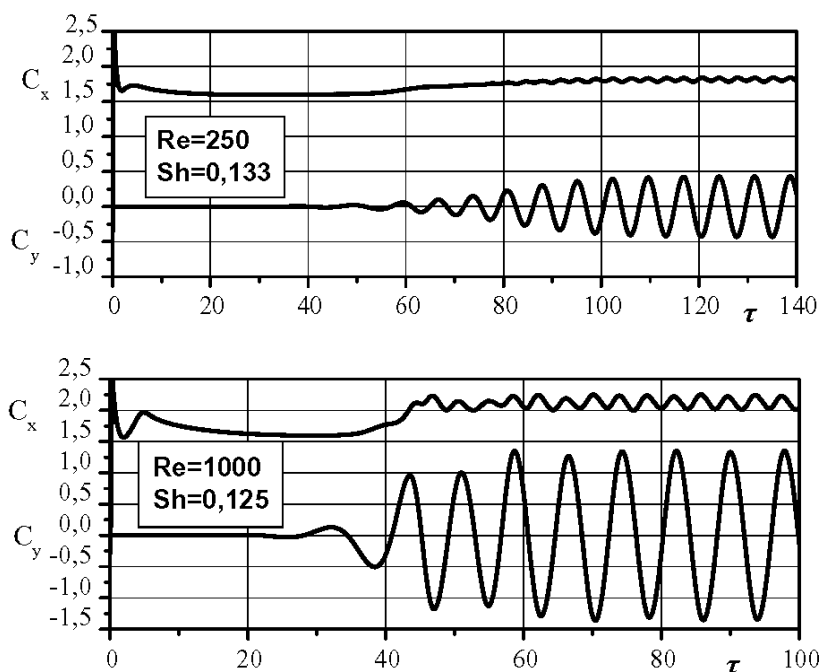


Рис. 4.64. Изменение во времени силы лобового сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$ , действующих на квадратный цилиндр при отрывном обтекании для  $Re=250, 1000$

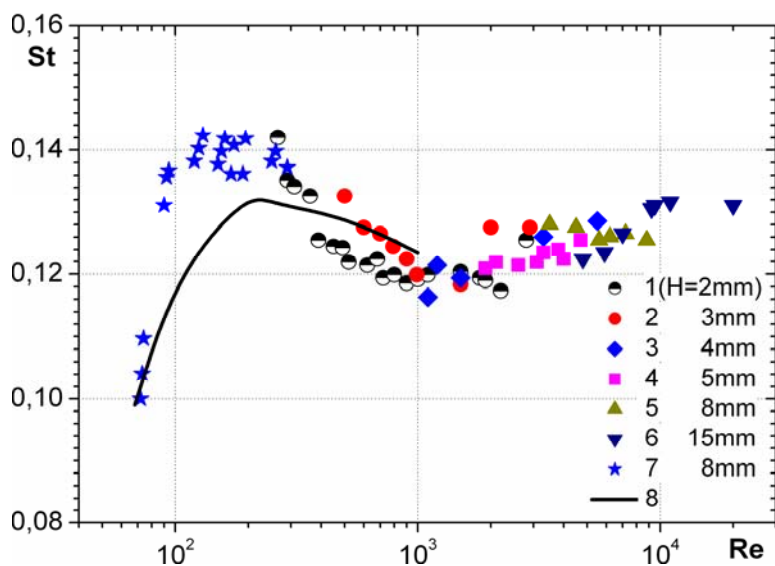


Рис. 4.65. Расчетная зависимость числа Струхала от числа Рейнольдса при обтекании квадратного цилиндра в сравнении с экспериментом ( точки 1 - 6 - эксперимент в аэродинамической трубе и 7 - эксперимент в бассейне [333]; кривая 8 - расчет)

## **4.10. Термогравитационная конвекция в замкнутой прямоугольной области, подогреваемой сбоку**

### **4.10.1. Введение**

Вопросы естественной конвекции изучаются уже более ста лет [76, 238]. Одна из практических целей исследования конвективных течений связана с изучением процессов гидродинамики и переноса тепла (примеси) в неоднородной по плотности среде. Причиной неоднородности может быть ее переменная температура, соленость или химический состав.

Простейшей моделью физических процессов происходящих в элементах конструкций, содержащих газ или жидкость при неоднородной температуре или концентрации химических веществ является тепловая гравитационная конвекция в замкнутых областях.

В качестве примеров таких технических устройств можно назвать установки по выращиванию монокристаллов, баки с криогенными жидкостями, емкости, содержащие какие-либо расплавы и растворы. Неоднородность плотности жидкости в таких емкостях при наличии гравитационного поля обуславливает появление архимедовых сил плавучести, которые и определяют поведение жидкости в них. В силу большой практической значимости эти вопросы изучались экспериментально и теоретически [157, 164, 169, 310].

Эксперименты показывают, что если боковые вертикальные стенки замкнутой квадратной или прямоугольной полости, содержащей вязкую теплопроводную жидкость, имеют различную температуру, а верхняя и нижняя стенки теплоизолированы, то в области занятой жидкостью возникает циркуляционное свободно-конвективное течение. Особенностью конвекции при боковом подогреве стенок емкости является движение жидкости в вертикальном направлении вблизи подогретой стенки, что приводит к появлению восходящих и нисходящих конвективных потоков жидкости, которые внутри области формируют сложную внутреннюю структуру взаимосвязанных полей скорости и температуры (концентрации). Хотя техника экспериментальных работ в этой области в настоящее время позволяет определить с помощью лазерных систем многие параметры течения и переноса тепла через слой жидкости, но расширение диапазона изменения определяющих параметров конвекции и их влияние на структуру течений по-прежнему представляет собой сложную задачу.

Использование математического моделирования для изучения рассматриваемых процессов в принципе позволяет расчетным путем исследовать динамику и структуру полей скорости и температуры при тепловой гравитационной конвекции. Однако исходная система уравнений гидротермодинамики в общем случае является очень сложной. Поэтому во

многих практических случаях принимается ряд гипотез и допущений, упрощающих исходную систему дифференциальных уравнений. В рассматриваемом классе задач используется система допущений широко известная как приближение Буссинеска [42, 162]. В этом приближении плотность  $\rho$  будет зависеть только от температуры и не зависит от давления. Кроме того, в системе уравнений движения плотность, за исключением архимедовой силы плавучести, принимается постоянной и равной  $\rho_0$ , а коэффициенты вязкости, теплопроводности и удельной теплоемкости считаются постоянными. При этом уравнение сохранения массы переходит в уравнение несжимаемости.

Существующие математические модели обсуждаемых процессов, состояние проблемы и полезные сведения по этому вопросу изложены в монографиях [76, 157, 164, 186]. Однако несмотря на большой объем знаний накопленных в этой области, современные задачи тепловой и концентрационной конвекции требуют более глубокого понимания механизмов протекания конвективных процессов и их устойчивости. Использование современных компьютерных технологий и разработка новых методов численного решения прикладных задач динамики вязкой жидкости и теплообмена открывает новые возможности в этом направлении, включая турбулентную вынужденную конвекцию [162].

Цель данной работы заключается в том, чтобы адаптировать предложенный выше метод численного решения системы нестационарных уравнений движения жидкости в переменных скорость-давление [57] на случай течений неоднородной по плотности среды. При этом ставится задача расчета влияния основных безразмерных параметров задачи, таких как числа Грасгофа, Прандтля и геометрии расчетной области на структуру и режим конвективного течения.

#### 4.10.2. Постановка задачи и исходные уравнения

Обратимся к рассмотрению двумерной задачи естественной термогравитационной конвекции несжимаемой теплопроводной жидкости в замкнутой квадратной или прямоугольной области с твердыми стенками, горизонтальный размер которой имеет длину  $l$ , а вертикальный высоту  $h$ . При  $h=l$  параметр высоты  $H=h/l=1$ , а рассматриваемая область будет квадратной. Принципиальная схема рассматриваемого течения и основные обозначения представлены на рис. 4.66. Начало прямоугольной декартовой системы координат  $0$  расположено в левом нижнем углу. Вектор однородного гравитационного поля  $\vec{g}$  направлен вертикально вниз вдоль оси  $y$ .

Особенность задачи состоит в том, что температура на левой  $AB$  и правой  $CD$  стенках поддерживается постоянной по высоте. При этом вертикальная стенка  $AB$  имеет температуру  $T_2$ , а стенка  $CD$  температуру

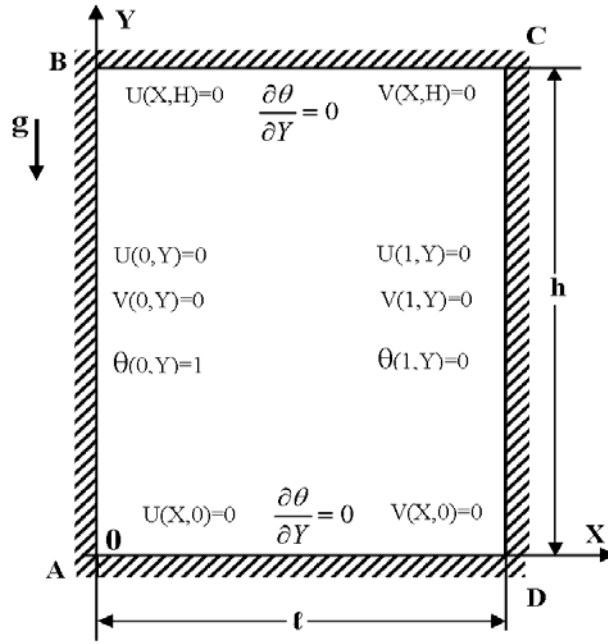


Рис. 4.66. Физическая схема термогравитационной конвекции в замкнутой прямоугольной области

$T_1$ , причем  $T_2 > T_1$ . Горизонтальные стенки верхняя  $BC$  и нижняя стенка  $AD$  теплоизолированы.

Расчетная картина тепловой конвекции в квадратной области рассмотрена в ряде работ в рамках приближения Буссинеска на основе уравнений Навье-Стокса, как в переменных функция тока – вихрь, так и в переменных скорость-давление [45, 46, 157, 164]. Ниже эта задача в двумерной постановке решается в рамках уравнений свободной конвекции в физических переменных скорость-давление с использованием метода DNM-LF. Его специфика состоит в том, что для описания движения жидкостей в приближении Буссинеска используются система интегральных уравнений, выражающих законы сохранения массы, изменения количества движения и уравнение сохранения энергии, которые для ньютоновской жидкости записывается в следующем общем виде [42, 76, 199]

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = 0, \quad (4.36)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \vec{v} d\tau = \iiint_{\tau} \text{div} \Pi d\tau + \iiint_{\tau} \vec{F} d\tau, \quad (4.37)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho e d\tau = - \iiint_{\tau} \text{div} \vec{q}_n d\tau + \iiint_{\tau} Q d\tau. \quad (4.38)$$

Здесь  $\vec{v}$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\Pi$  – тензор вязких напряжений,  $\vec{F}$  – вектор массовых сил,  $e = c_p T$  – внутренняя энергия для несжимаемой жидкости,  $\vec{q}_n = -\lambda \text{grad } T$  – поток тепла теплопроводностью,  $Q$  – источниковый член. Так как эти уравнения справедливы для любого контрольного объема  $\tau$ , то их можно применить и для произвольной ячейки расчетной области, а это открывает возможность построения дискретного аналога системы рассматриваемых интегральных законов сохранения. Дискретный аналог этой системы уравнений строится с использованием формулы Ньютона для тензора вязких напряжений и закона Фурье для потоков тепла теплопроводностью на разнесенных сетках методом контрольного объема. При аппроксимации производных применяется явная схема первого порядка точности по времени и неявная схема второго порядка точности по пространству.

При численном решении задачи удобно перейти к безразмерным переменным. С этой целью примем в качестве масштаба длины горизонтальный размер области  $l$ , за масштаб скорости примем величину  $u_0 = \nu / l$ , за масштаб времени примем величину  $t_0 = l^2 / \nu$ , за масштаб температуры примем разность характерных температур  $\Delta T = T_2 - T_1$ , за масштаб давления примем скоростной напор  $p_0 = \rho_0 u_0^2$ , а безразмерные переменные задачи обозначим через  $V_i, P, \theta, \tau, X_i$ . В этих безразмерных переменных дискретный аналог системы исходных уравнений (4.36)-(4.38) подробно рассмотрен выше и имеет вид:

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P, \quad (4.39)$$

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = [\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U] / d_{j+1/2,i}^U, \quad (4.40)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V, \quad (4.41)$$

$$d_{j,i}^T \cdot \theta_{j,i}^{n+1} + c_1^T \theta_{j+1,i}^{n+1} + c_0^T \theta_{j-1,i}^{n+1} + b_1^T \theta_{j,i+1}^{n+1} + b_0^T \theta_{j,i-1}^{n+1} = f^T. \quad (4.42)$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}^U, d_{j,i+1/2}^V, c_1, c_0, b_1, b_0$  с верхними индексами  $U, V, P, T$ , а также выражения  $G$  и свободные члены  $f^P$  и  $f^T$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются по определенным алгебраическим формулам.

Система уравнений (4.39) – (4.42) связывает значения давления, температуры и компонентов скоростей на  $(n+1)$  временном слое. При этом  $U = u / u_0, V = v / u_0, X = x / l, Y = y / l, \tau = t / t_0, P = p / p_0, \theta = (T - T_1) / (T_2 - T_1)$ . Здесь  $U$  и  $V$  – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости соответственно. Кроме того, система исходных уравнений содержит два

безразмерных параметра задачи: число Грасгоффа  $Gr = g\beta_T l^3 (T_2 - T_1) / \nu^2$  и число Прандтля  $Pr = \nu / a$ , где  $\nu = \mu / \rho_0$  - коэффициент кинематической вязкости,  $\beta_T$  - коэффициент теплового расширения жидкости,  $a = \lambda / \rho_0 c_p$  - коэффициент температуропроводности. Отметим, что в такой постановке безразмерная температура  $\theta$  входит не только в уравнение переноса тепла, но и в уравнение движения. Поэтому гидродинамическая и тепловая задачи взаимосвязаны.

Для завершения постановки задачи для всех зависимых переменных должны быть заданы начальные и краевые условия. В соответствии с постановкой задачи в момент времени  $\tau^n$  жидкость в рассматриваемой области находится в гидростатическом равновесии и неподвижна, а температура жидкости однородна и равна  $T_1$ . Следовательно, безразмерная температура  $\theta$  и компоненты скорости жидкости  $U$ ,  $V$  в начальный момент равны нулю. Краевые условия для компонентов скоростей в данной задаче состоят в том, что на всех четырех твердых границах расчетной области должны выполняться очевидные условия прилипания  $U|_\Gamma = 0$  и непротекания  $V|_\Gamma = 0$  жидкости,  $\Gamma$  - граница области. Краевые условия для температуры обсуждались выше. Следовательно, начальные и граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

Начальные условия:

$$U(X, Y, 0) = 0, \quad V(X, Y, 0) = 0, \quad P(X, Y, 0) = 0, \quad \theta(X, Y, 0) = 0.$$

Граничные условия:  $U|_{AB} = 0$ ;  $U|_{BC} = 0$ ;  $U|_{CD} = 0$ ;  $U|_{AD} = 0$ ,

$$V|_{AB} = 0; \quad V|_{BC} = 0; \quad V|_{CD} = 0; \quad V|_{AD} = 0, \quad (4.43)$$

$$\theta|_{AB} = 1; \quad \partial\theta/\partial Y|_{BC} = 0; \quad \theta|_{CD} = 0; \quad \partial\theta/\partial Y|_{AD} = 0,$$

$$0 \leq X \leq 1; \quad 0 \leq Y \leq H.$$

Сложность решения задачи связана не только с нелинейностью уравнений движения жидкости но и с определением давления, которое не является основной переменной ни в одном из исходных уравнений.

В процессе решения задачи требуется определить поля скорости, давления и температуры в расчетной области в зависимости от чисел Грасгофа и Прандтля. Стационарное течение характеризуется тем, что искомые переменные  $U, V, P, \theta$  не зависят от времени. Расчет параметров течения основан на численном интегрировании системы нестационарных уравнений движения и переноса тепла (4.39) – (4.42) при соответствующих начально-краевых условиях (4.43).

### 4.10.3. Особенности численного метода

Важная особенность данного метода состоит в том, что компоненты скорости в уравнениях (4.39) – (4.42) уже удовлетворяют уравнению неразрывности. Кроме того, вследствие использования разнесенных сеток, граничные условия для давления не требуются так как они определяются из уравнений движения в комбинации с граничными условиями для компонентов скорости [208]. Поэтому граничные условия задаются лишь для компонент скоростей и температуры. Другая характерная особенность данного метода состоит в том, что уравнения для давления, компонент скорости и температуры расщеплены так, что на любом этапе расчета решаются уравнения относительно одной зависимой переменной. Это упрощает применение стандартных методов решения систем линейных алгебраических уравнений полученного вида.

Решение системы уравнений (4.39) – (4.42) определяет изменение во времени и пространстве полей скорости, давления и температуры. Итерационный вычислительный процесс их решения состоит из шагов по времени и реализуется в виде следующих этапов.

В начале каждого временного цикла предполагаются известными поля скорости, давления и температуры. Вычислительная процедура расчета каждого шага по времени разбивается на четыре этапа и выполняется в следующей последовательности. **На первом этапе** при заданных на предыдущем временном шаге значениях скоростей  $U_{j+1/2,i}^n$ ,  $V_{j,i+1/2}^n$  и температуры  $\theta_{j,i}^n$  по соответствующим алгебраическим формулам рассчитываются коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}^U$ ,  $d_{j,i+1/2}^V$ ,  $d_{j,i}^P$ ,  $c_1^P$ ,  $c_0^P$ ,  $b_1^P$ ,  $b_0^P$ ,  $d_{j,i}^T$ ,  $c_1^T$ ,  $c_0^T$ ,  $b_1^T$ ,  $b_0^T$  и соответствующие выражения  $G^U$ ;  $G^V$ , включая свободные члены  $f^P$ ,  $f^U$ ,  $f^V$ ,  $f^T$ . **На втором этапе**, зная коэффициенты дискретизации уравнения Пуассона для давления с верхним индексом « $p$ » путем его решения находится поле давления  $P_{j,i}^{n+1}$ . Далее, **на третьем этапе**, зная коэффициенты дискретизации с индексом  $U$ ,  $V$  и поле давления  $P_{j,i}^{n+1}$  по уравнениям (4.40), (4.41), рассчитываются поля скорости  $U_{j+1/2,i}^{n+1}$ ,  $V_{j,i+1/2}^{n+1}$ , на  $(n+1)$  временном слое. **На четвертом этапе**, зная коэффициенты дискретизации с индексом « $T$ » решается разностное уравнение для температуры (4.42) и определяется новое значение температуры  $\theta^{n+1}$  на  $(n+1)$  - временном слое.

На этом первый временной цикл заканчивается и далее он повторяется. Задача решается на установление. Критерием окончания решения служит заданное время счета или условие, когда максимальная разность между



значениями искоемых переменных на предыдущем и следующем временном шаге не превышает заданную величину ошибки  $\varepsilon$ .

Важной частью решения системы уравнений свободной конвекции является необходимость решать на каждом временном слое эллиптические уравнения Пуассона для давления и температуры. При их решении здесь используется редукция двумерного разностного уравнения второго порядка к двум одномерным системам уравнений второго порядка с трехдиагональными матрицами, которые затем решаются методом «прогонки» [178, 181].

Используемая конечно-разностная схема аппроксимирует рассматриваемые уравнения с первым порядком точности по времени и со вторым порядком точности по пространственным переменным  $O(\Delta\tau, h^2)$  и можно показать, что она устойчива [25]. На каждом шаге по времени контролируется сходимость расчетов как основных уравнений, так и граничных условий. Алгоритм решения на установление позволяет получить как стационарное решение, так и исследовать динамику течений во времени. Стационарное течение характеризуется тем, что искоемые переменные  $U, V, P, \theta$  перестают зависеть от времени.

Важным моментом расчетов является переход в граничных условиях для  $U, V$ , и  $\theta$  к конечным разностям и контроль за выполнением уравнения неразрывности. Описанный алгоритм решения системы двумерных нестационарных уравнений свободной конвекции в приближении Бусинеска реализован в виде компьютерной программы GKLf.

#### **4.10.4. Результаты расчетов и их обсуждение для замкнутой квадратной области**

Разработанная компьютерная программа GKLf была использована для расчета полей скорости, температуры и давления при конвекции жидкости в квадратной и прямоугольной областях подогреваемых сбоку. Были рассмотрены пять вариантов соотношения сторон прямоугольника, когда параметр  $H = h/l = 1, 5, 10, 15, 20$ . Решения были получены для чисел Грасгофа  $Gr = 10^3 \div 10^{10}$  на сетках с равномерным шагом  $\Delta x = \Delta y = 0,02$ .

При нашем подходе, используемый численный метод решения системы нестационарных уравнений свободной конвекции в переменных скорость-давление, позволяет рассчитывать мгновенные значения скорости, температуры и давления во всей расчетной области в зависимости от времени и основных параметров задачи - чисел Грасгофа, Прандтля и вертикального размера области.

В качестве первого примера рассмотрим результаты расчетов полученные для случая конвекции в замкнутой квадратной области с параметром  $H = h/l = 1$  при  $Pr=1$ . На рис. 4.67 представлены результаты расчетов, показывающие изменение во времени значений безразмерной

температуры  $\theta$  при различных числах Грасгофа в двух реперных точках с координатами: точка 1 (0,3; 0,7) и точка 2 (0,7; 0,3). Анализ полученных расчетных осциллограмм изменения температуры во времени показывает, что при числах  $Gr \leq 3,6 \cdot 10^6$  происходит быстрое установление стационарного режима конвекции в рассматриваемых точках и в области в целом. При этом локальные значения температуры становятся постоянными. С ростом числа Грасгофа ( $Pr=1$ ), уже при  $Gr > 3,6 \cdot 10^6$ , начинается образование начальных возмущений (см. рис. 4.67), которые приводят сначала к переходному режиму -  $Gr(3,8 \div 4) \cdot 10^6$ , а затем при числах  $Gr \geq 5 \cdot 10^6$  к нестационарному режиму колебаний значения температуры.

При дальнейшем росте числа Грасгофа до  $Gr=10^7$  наблюдается появление второй длинноволновой моды колебаний относительно монотонных гидродинамических возмущений. Сложный переходной режим конвекции реализуется при числах Грасгофа  $Gr=10^8 - 10^{10}$ , а при  $Gr=10^{11}$  колебания температуры носят развитой хаотический характер подобный турбулентному режиму конвекции (см. рис. 4.67).

Следует отметить, что результаты расчетов установившейся конвекции для точек 1 и 2 в основном идентичны и поэтому в дальнейшем для другой геометрии расчетной области достаточно рассматривать лишь реперную точку 1.

Теоретические результаты, опирающиеся на исходную систему уравнений свободной конвекции в переменных функция тока-вихрь и экспериментальные данные в этой области, подробно обсуждаются в работах В.М.Пасконова, В.И. Полежаева [157, 164], Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, А.А. Непомнящий [76], Y.Lee [310] и других.

Рассмотрим подробнее результаты стационарных решений, полученных нами в диапазоне чисел Грасгофа  $10^3 \leq Gr \leq 3,5 \cdot 10^6$  при числе  $Pr=1$ . На рис. 4.68 приведены векторные поля скорости для квадратной области, которые наглядно характеризуют влияние числа Грасгофа на общую структуру поля течения при стационарной тепловой конвекции.

Расчеты выполнены для шести чисел Грасгофа  $Gr(10^3; 10^4; 10^5; 10^6; 3 \cdot 10^6; 3,5 \cdot 10^6)$  при  $Pr=1$ . Легко видеть, что под действием сил плавучести жидкость, находящаяся у левой подогретой стенки поднимается вверх и опускается вниз вдоль правой холодной стенки, образуя в стационарном режиме замкнутый циркуляционный поток.

Из рисунков видно, что в рассматриваемой области образуется большая вихревая зона при всех шести значениях числа Грасгофа. При малых числах  $Gr=10^3$  и  $Gr=10^4$  центры вихрей практически находятся в геометрическом центре квадратной области и жидкость вращается по часовой стрелке. С увеличением числа  $Gr$  картина течения перестраивается.

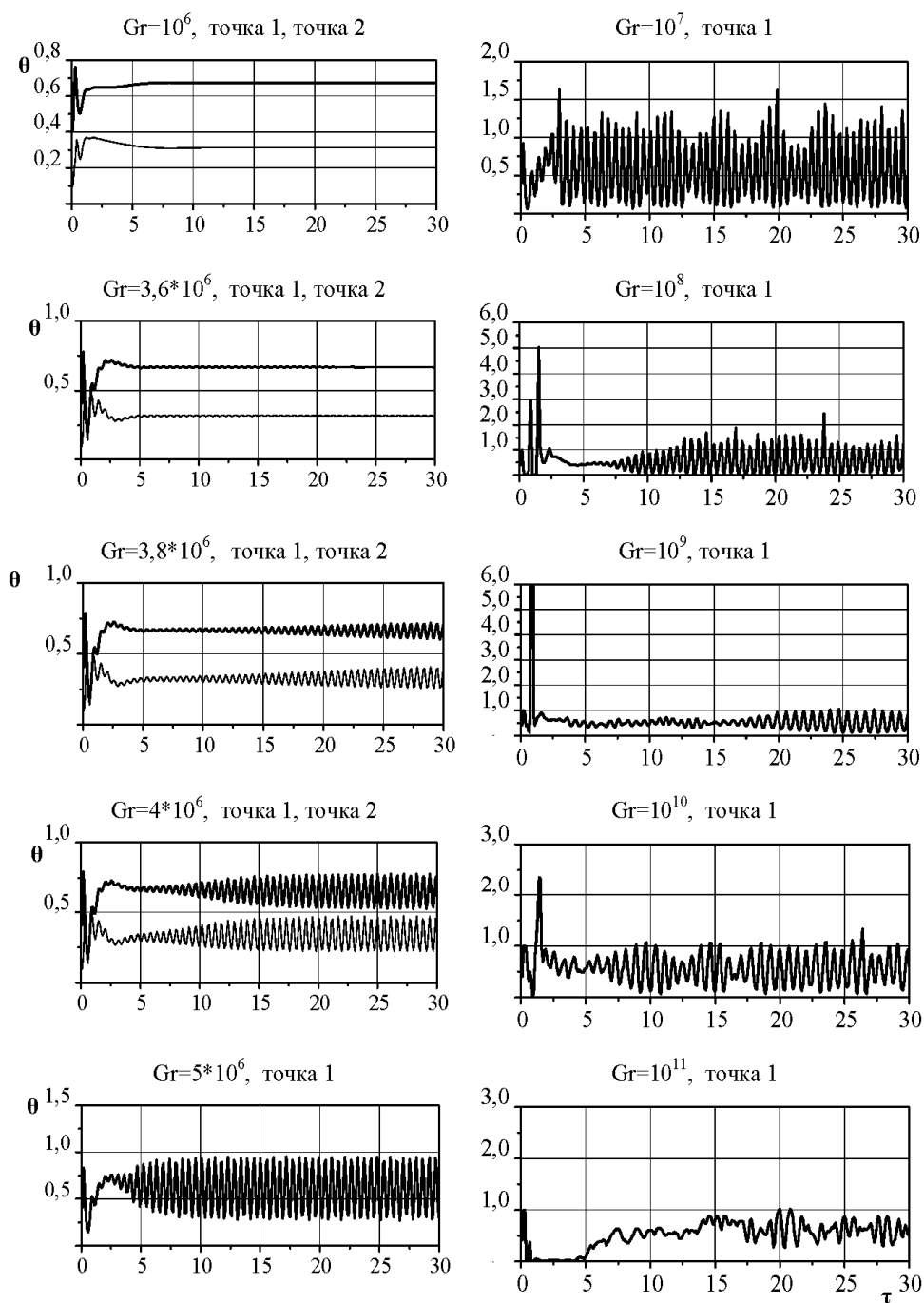


Рис. 4.67. Изменение температуры во времени в реперных точках 1 и 2 в квадратной области с высотой  $H=1$  при  $Pr=1$  и различных числах Грасгофа  $Gr$  для  $\tau=100$  (точка 1-верхняя кривая, точка 2-нижняя кривая)

Зоны с наибольшей интенсивностью течения располагаются у левой вертикальной нагретой стенки и у правой более холодной стенки, а в центре формируется зона с малыми скоростями движения, которая увеличивается в размерах с ростом числа Грасгофа. Следует отметить, что при числе  $Gr=10^5$  внутри области образуется двухвихревая структура течения, которая затем по мере увеличения числа  $Gr$  размывается. Этот интересный результат был отмечен также в работе [157] при анализе изолиний функции тока тепловой конвекции в квадратной области для  $Gr=10^5$  при решении задачи в переменных функция тока-вихрь.

В дополнение к приведенным векторным картинам течения на рис. 4.69 представлены результаты расчетов в виде изолиний равных скоростей при тех же шести числах Грасгофа. Эти изолинии, подобно функции тока, выразительно показывают тонкую вихревую структуру потока и величину безразмерной скорости в рассматриваемой квадратной области. Нетрудно заметить, что при числах  $Gr=10^3$  и  $Gr=10^4$  эти изолинии имеют пять семмитрично расположенных циркуляционных зон. С ростом числа Грасгофа картина меняется и изолинии скорости в центральной части полости становятся в основном прямолинейными и параллельными оси  $X$ . Естественно, что движение жидкости оказывает влияние на поле температур.

На рис. 4.70 представлены результаты расчетов в виде поля изотерм для квадратной области при тех же шести числах  $Gr$ . При их рассмотрении следует иметь ввиду, что при отсутствии архимедовых сил плавучести ( $Gr=0$ ) стационарные профили температуры прямолинейны и параллельны вертикальным стенкам квадратной области. Анализ рис. 4.70 показывает, что в ядре квадрата с ростом числа Грасгофа температура жидкости выравнивается по горизонтали. Физически это означает, что при достаточно больших числах  $Gr$  вдоль вертикальных стенок образуются как бы пристеночные струйные течения, направленные вверх у левой нагретой стенки и вниз у правой холодной стенки.

Поэтому внутри области формируется расслоение жидкости на теплую зону сверху и холодную зону внизу. Количественные показатели этого эффекта легко видеть по изотермам приведенным на рис. 4.70.

Поскольку исходные уравнения свободной конвекции записаны и решаются в переменных скорость-давление, то это позволяет в процессе решения задачи сразу определить и поле давления в рассматриваемой квадратной области. В качестве примера на рис. 4.71 представлены результаты расчетов поля давления для режима стационарной конвекции в виде изолиний коэффициентов давления  $C_p$

$$C_p = \frac{p - p_1}{\rho u_0^2 / 2},$$

где  $p_1$  - характерное давление в середине левой стенки квадрата.

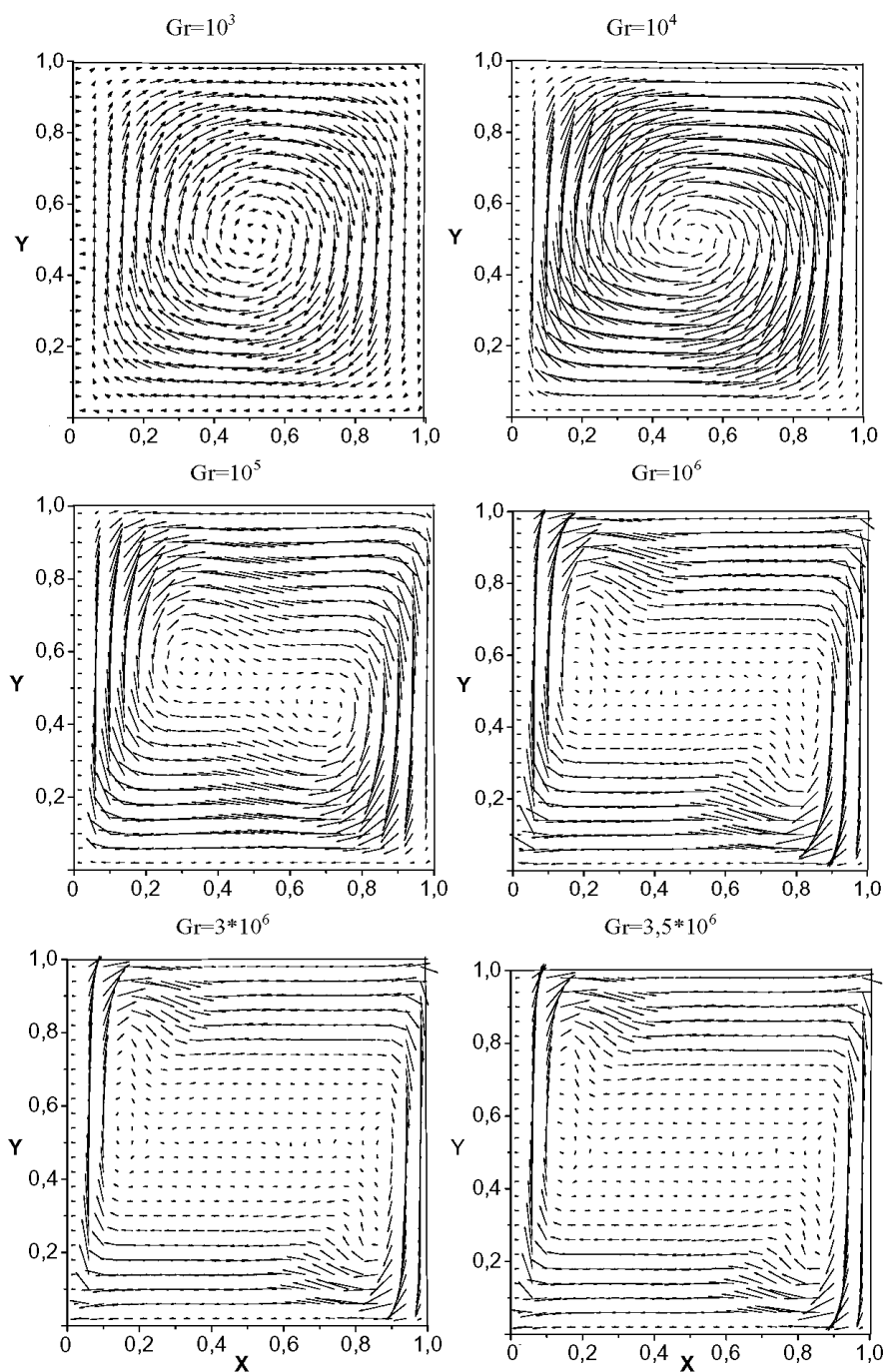


Рис. 4.68. Векторное поле скоростей для стационарного режима конвекции в квадратной области при  $Pr=1$  и разных числах Грасгофа  $Gr$  ( $10^3$  -  $3,5 \cdot 10^6$ ) для  $\tau=100$

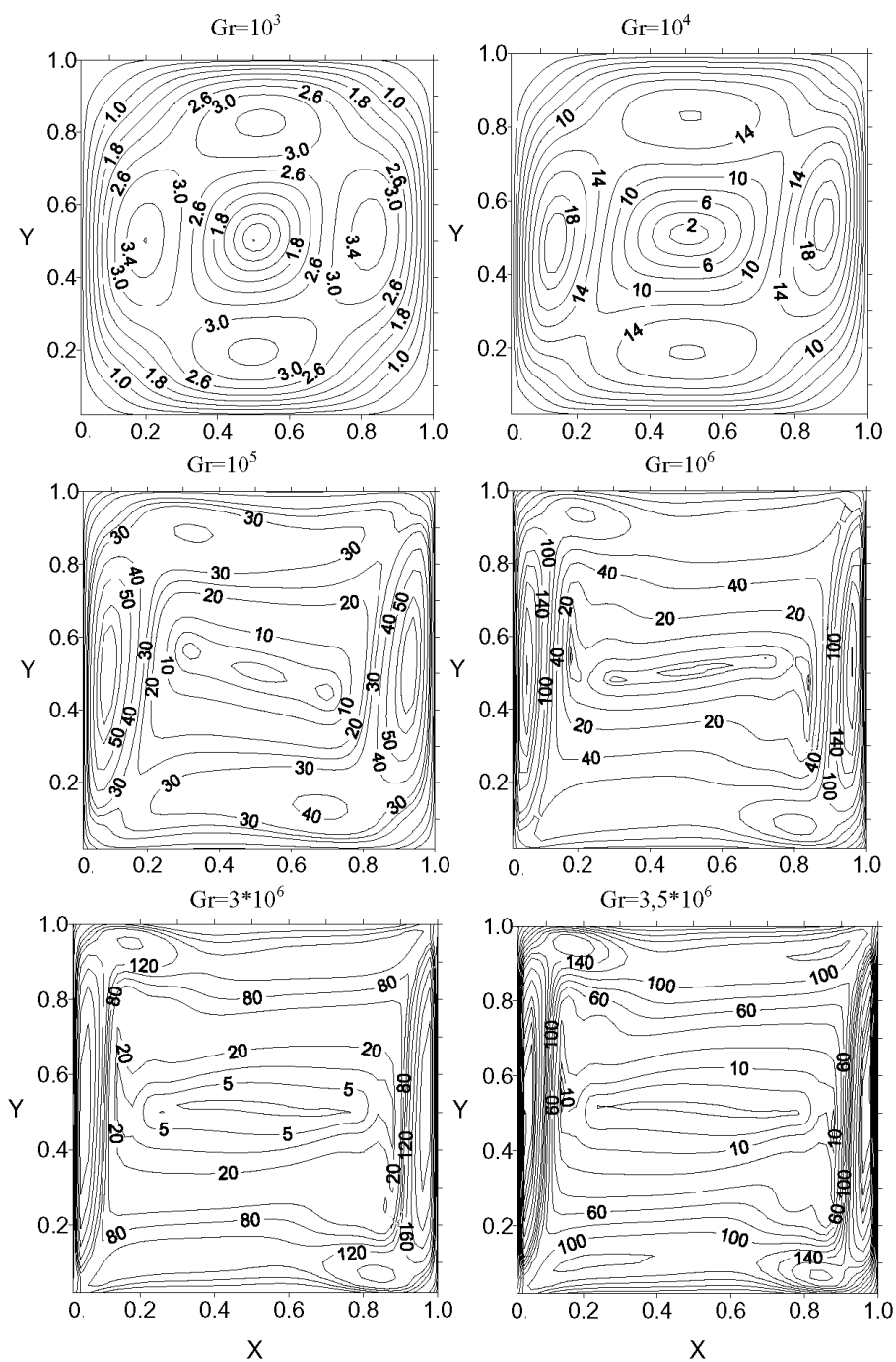


Рис. 4.69. Изолинии равных скоростей для стационарного режима конвекции в квадратной области при  $Pr=1$  и разных числах Грасгофа  $Gr$  ( $10^3 - 3,5 \cdot 10^6$ ) для  $\tau=100$

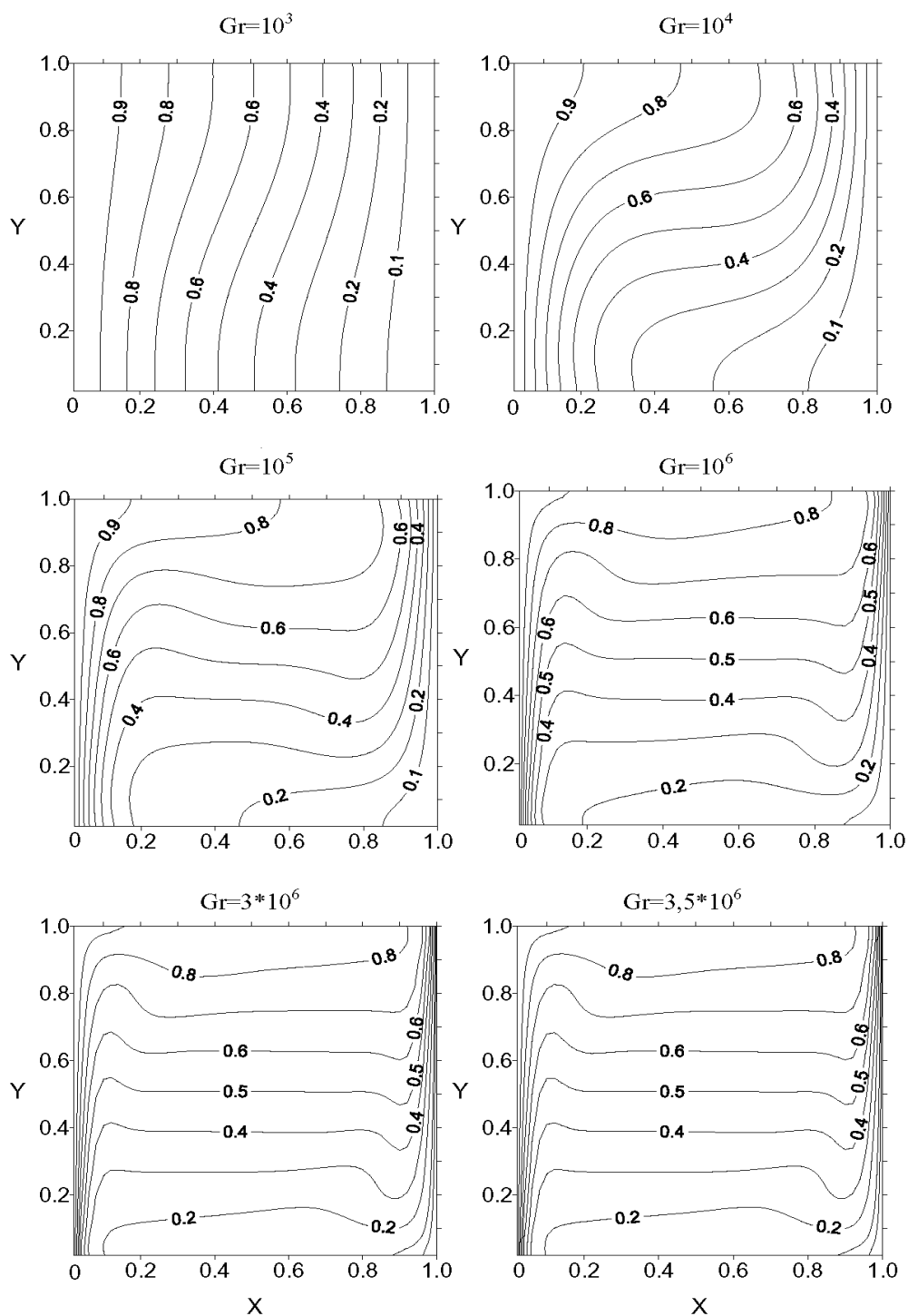


Рис. 4.70. Изотермы для стационарного режима конвекции в квадратной области при  $Pr=1$  и разных числах Грасгофа  $Gr$  ( $10^3$  -  $3,5 \cdot 10^6$ ) для  $\tau=100$

Из рис. 4.71 видно, что при малых числах Грасгофа  $Gr=10^3 \div 10^4$  изолинии коэффициентов давления имеют простую, но криволинейную форму и отклоняются от горизонтали вверх и вниз, а с ростом числа  $Gr$  изобары становятся горизонтальными и прямолинейными, за исключением узких зон, прилегающих к верхней и нижней стенкам.

Возвращаясь к рис. 4.63 видим, что при больших числах Грасгофа в квадратной области реализуется режим нестационарной конвекции. В качестве примера на рис. 4.72 представлены расчетные изотермы  $\theta$  в различные моменты времени  $\tau$  при неустановившемся режиме конвекции для числа  $Pr=10$  и числе Грасгофа  $Gr=10^7$  для четырех моментов времени  $\tau = 30, 100, 300, 500$ . Эти результаты наглядно показывают динамику формирования поля температур от времени для указанных условий в квадратной полости с  $H=1$ . При этом цифры показывают значения температур  $\theta$  на соответствующих изолиниях.

#### **4.10.5. Результаты расчетов и их обсуждение для замкнутых прямоугольных областей**

Обратимся к рассмотрению результатов расчета тепловой двумерной конвекции в **прямоугольной области**, подогреваемой сбоку при числах Прандтля равных единице. Режим и структура конвективного течения в этом случае будут определяться числом Грасгофа и геометрическим параметром высоты области, который будет равен  $H = 5, 10, 15, 20$ .

Результаты выполненных расчетов для четырех значений параметра  $H$  показывают, что для конвекции в прямоугольной области, как и в квадратной, при различных числах Грасгофа реализуются установившийся, переходный и нестационарный режим гравитационной тепловой конвекции. Сначала рассмотрим случай  $H = 5$ . На рис. 4.73 приведены результаты расчетов температуры в зависимости от времени в реперной точке 1 с координатами  $X = 0,3$  и  $Y = 0,7$  для  $H = 5$  при различных числах Грасгофа.

Анализ приведенных результатов показывает, что установившийся режим конвективного движения в прямоугольной области с  $H = 5$  имеет место при числах  $Gr \leq 10^6$ . При  $Gr > 10^6$  наблюдается появление возмущений и потеря устойчивости конвективного движения жидкости. Безразмерная температура  $\theta$  при этом носит волновой характер. Чтобы изучить динамику зарождения возмущений в зависимости от числа Грасгофа, были выполнены более подробные расчеты для разных чисел  $Gr$  в диапазоне  $10^6 \leq Gr \leq 10^9$ , характерные из которых приведены на рис. 4.73. Они указывают на существование сложного переходного режима конвекции в диапазоне чисел Грасгофа  $10^6 < Gr \leq 10^8$ , а при числе  $Gr = 10^9$  реализуется развитый нестационарный режим конвекции в прямоугольной области с параметром  $H = 5$ .



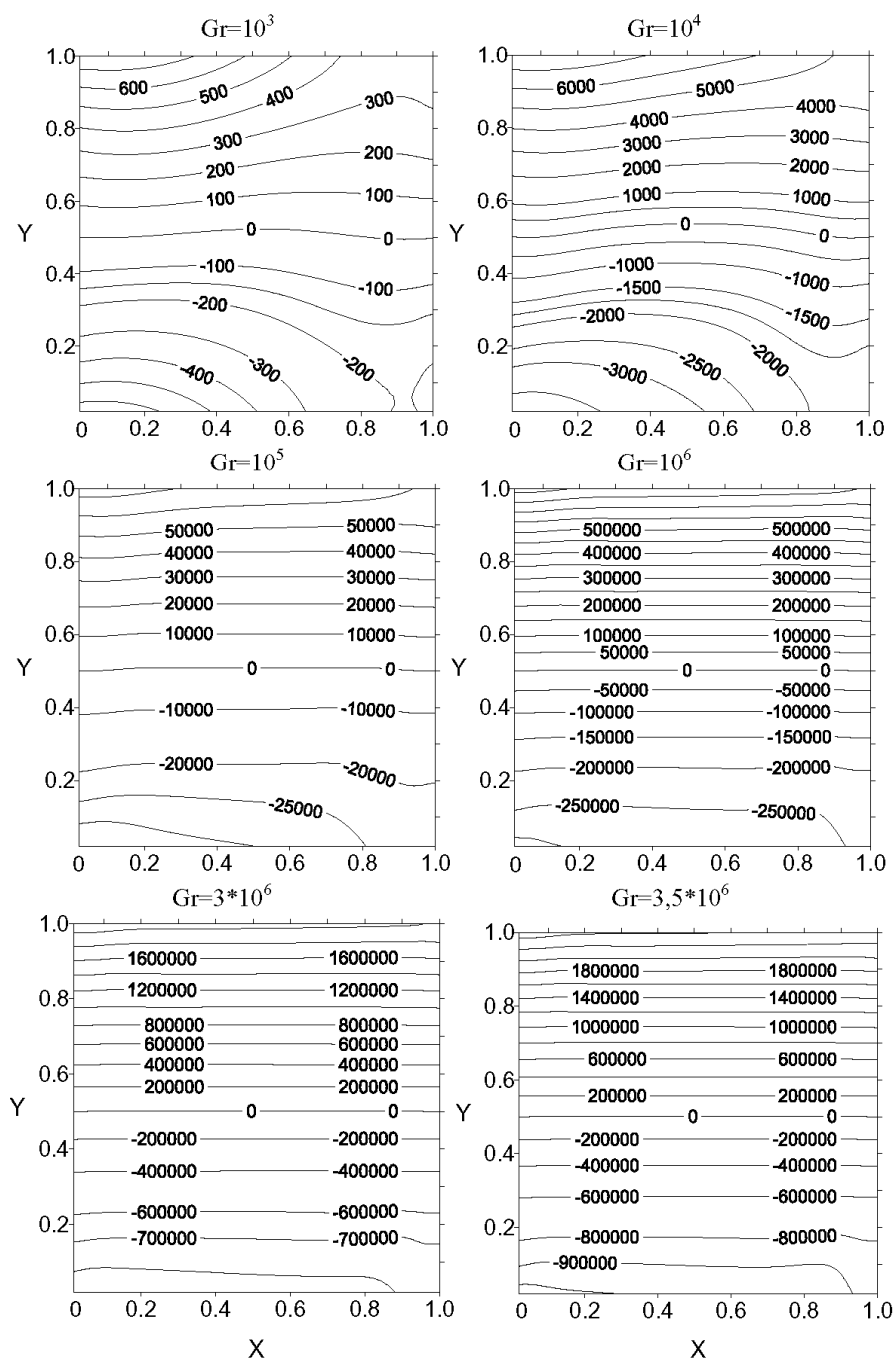


Рис. 4.71. Изолинии коэффициентов давления  $C_p$  для стационарного режима конвекции в квадратной области при  $Pr=1$  и разных числах Грасгофа  $Gr$  ( $10^3 - 3,5 \cdot 10^6$ ) для  $\tau=100$

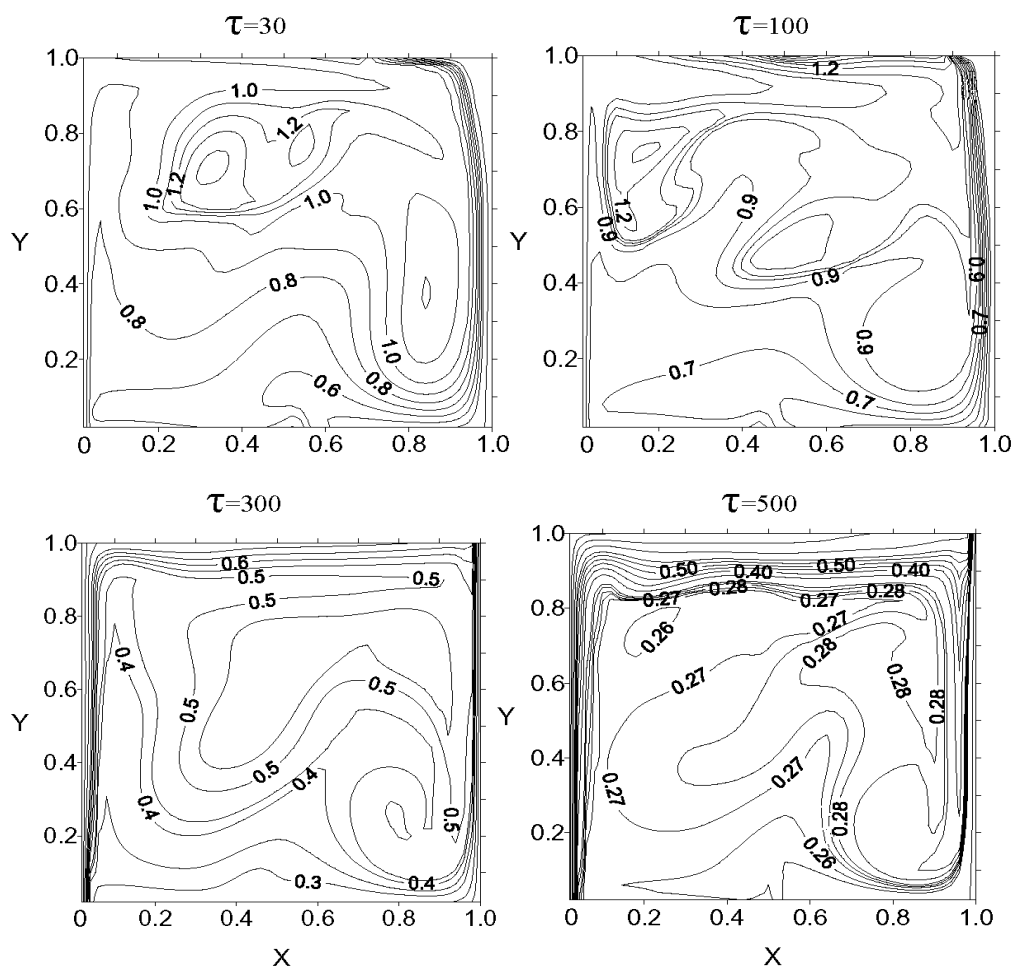


Рис. 4.72. Изотермы  $\theta$  в различные моменты времени  $\tau$  при неустановившемся режиме конвекции для  $Pr=10$  и числе  $Gr=10^7$

Рассмотрим подробнее особенности и структуру полей скорости, температуры и давления для стационарных режимов конвекции в прямоугольной области с  $H = 5$ . На рис. 4.74 в виде отдельных фрагментов (*a*, *b*, *c*) показаны расчетные векторные поля скорости, изолинии равных скоростей, изотермы и изобары коэффициентов давления  $C_p$  при трех значениях чисел Грасгофа  $Gr = 10^4$ ,  $Gr = 10^5$  и  $Gr = 10^6$ .

На первом фрагменте (*a*) рис. 4.74 представлены векторное поле скоростей, их изолинии, изотермы и изобары для коэффициента давления  $C_p$  при  $Gr = 10^4$ . Анализ изолиний скоростей этого фрагмента показывает образование четырех зон циркуляционного течения. Основное течение состоит из двух больших циркуляционных зон вытянутых вдоль вертикальной оси  $Y$ . А в верхней и нижней части прямоугольной области

образуются малые циркуляционные зоны. Формирование циркуляционных зон приводит к существенному изменению профилей скорости и температуры внутри области.

На втором фрагменте (b) рис. 4.74 представлены аналогичные результаты расчетов в виде векторного поля скоростей, их изолиний, изотерм и изобар при числе Грасгофа  $Gr = 10^5$ . Легко видеть, что в этом случае происходит качественное изменение картины конвективного течения по отношению к предыдущему случаю, когда  $Gr = 10^4$ . Основное течение теперь характеризуется одним большим циркуляционным течением вытянутым вдоль оси  $Y$ , а в верхней и нижней части сохраняются малые циркуляционные зоны. Поле изотерм также претерпевает значительные изменения.

На третьем фрагменте (c) рис. 4.74 приведены результаты аналогичных расчетов также в виде векторного поля скоростей, их изолиний, изотерм и изобар при числе Грасгофа  $Gr = 10^6$ .

Эти данные о параметрах течения иллюстрируют режим предшествующий потере устойчивости конвекции. Основное течение теперь состоит из двух вертикальных пограничных слоев возле боковых стенок с противоположным направлением движения, а средняя область характеризуется низкими скоростями с множеством мелких циркуляционных образований. Поле изотерм тоже претерпело значительные изменения. Характерным стало образование горизонтальных полок с почти постоянной температурой в  $x$ -направлении.

Из рис. 4.74 также видно, что картина полей давления в виде коэффициентов  $C_p$  почти не зависит от числа Грасгофа в области с  $H = 5$ . При этом давление монотонно изменяется по вертикали и остается постоянным в горизонтальном направлении за исключением концевых областей у верхней и нижней стенок расчетной области. Таким образом, при рассмотрении этих результатов легко видеть, что характер векторного поля скоростей, их изолиний и изотерм сильно зависит от числа Грасгофа. Цифры приведенные на изолиниях показывают не только качественное, но и количественное отличие.

Наряду с числом Грасгофа значительный интерес представляет вопрос влияния числа Прандтля на картину поля скоростей и температур. В качестве примера на рис. 4.75 приведены расчетные изолинии скорости  $V$  (слева) и изотерм  $\theta$  (справа) для трех чисел Прандтля  $Pr = 0,1; 1; 10$  в прямоугольной области с высотой  $H = 5$  при числе Грасгофа  $Gr = 10^5$ , то есть для случая установившегося режима конвекции. Эти рисунки наглядно показывают изменение тонкой структуры изолиний скорости и изотерм в зависимости от числа Прандтля. Нетрудно видеть, что при  $Pr = 0,1$  структура течения становится мультивихревой по сравнению со случаем, когда  $Pr = 1$ , а при числе  $Pr = 10$  возле левой и правой стенок образуются пограничные слои, а центр занимает большая циркуляционная зона с малыми скоростями.

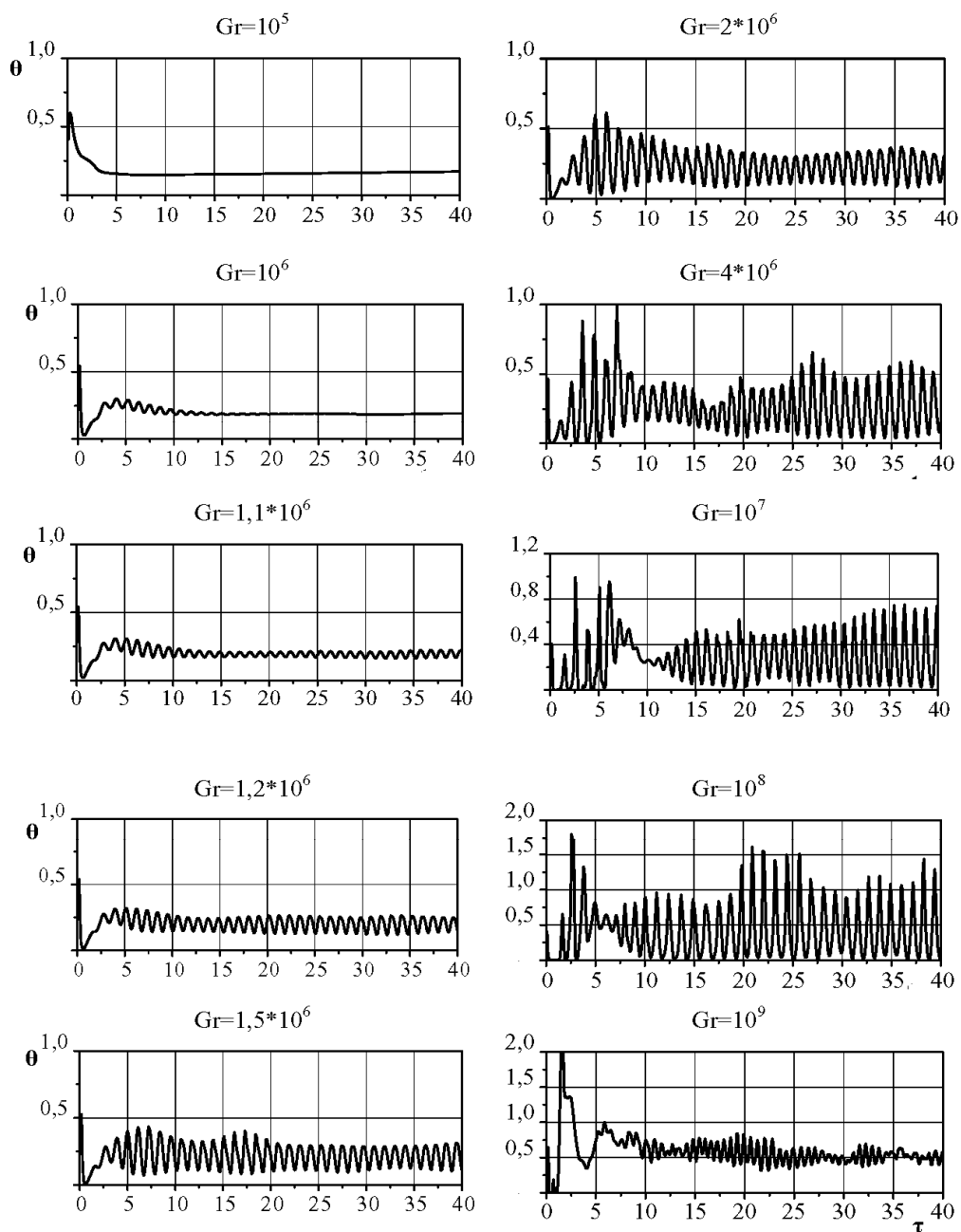
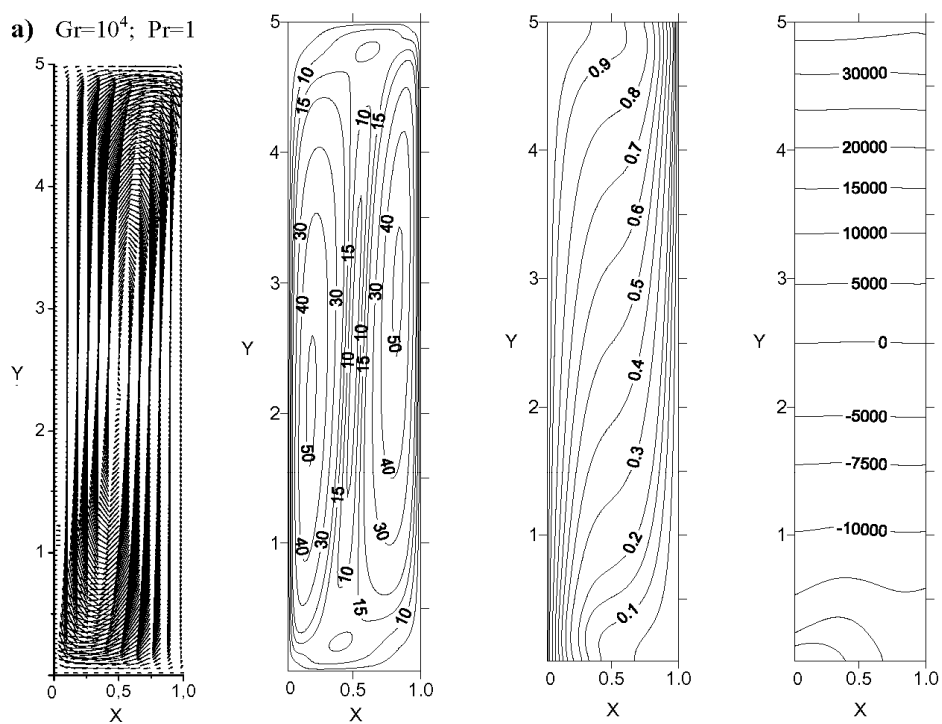
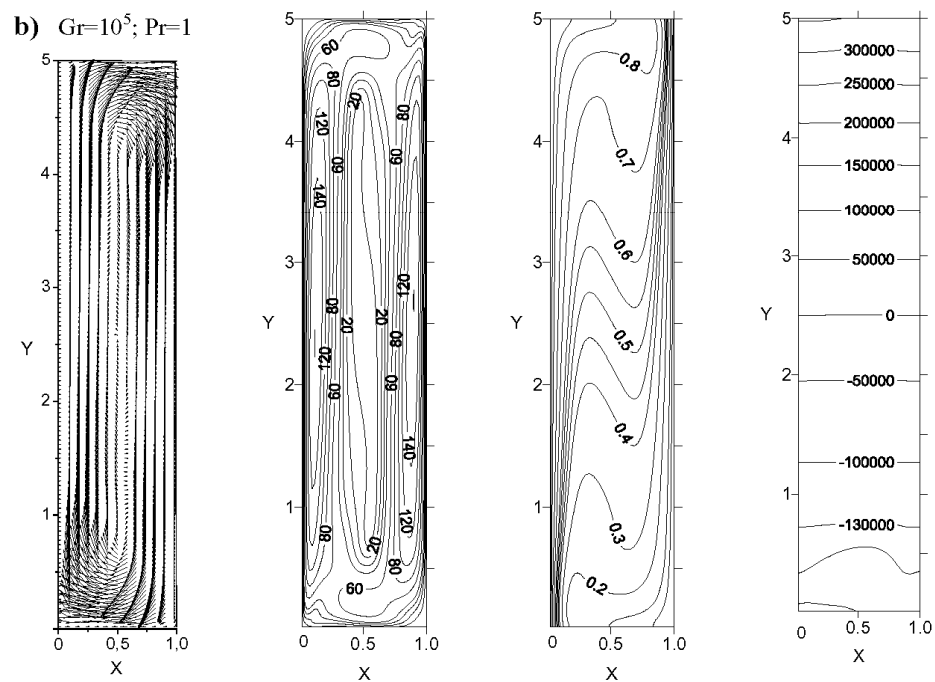


Рис. 4.73. Изменение температуры во времени в прямоугольной области с высотой  $H=5$  в реперной точке 1 при  $Pr=1$  и различных числах  $Gr$  для  $\tau=100$

**a)**  $Gr=10^4$ ;  $Pr=1$



**b)**  $Gr=10^5$ ;  $Pr=1$



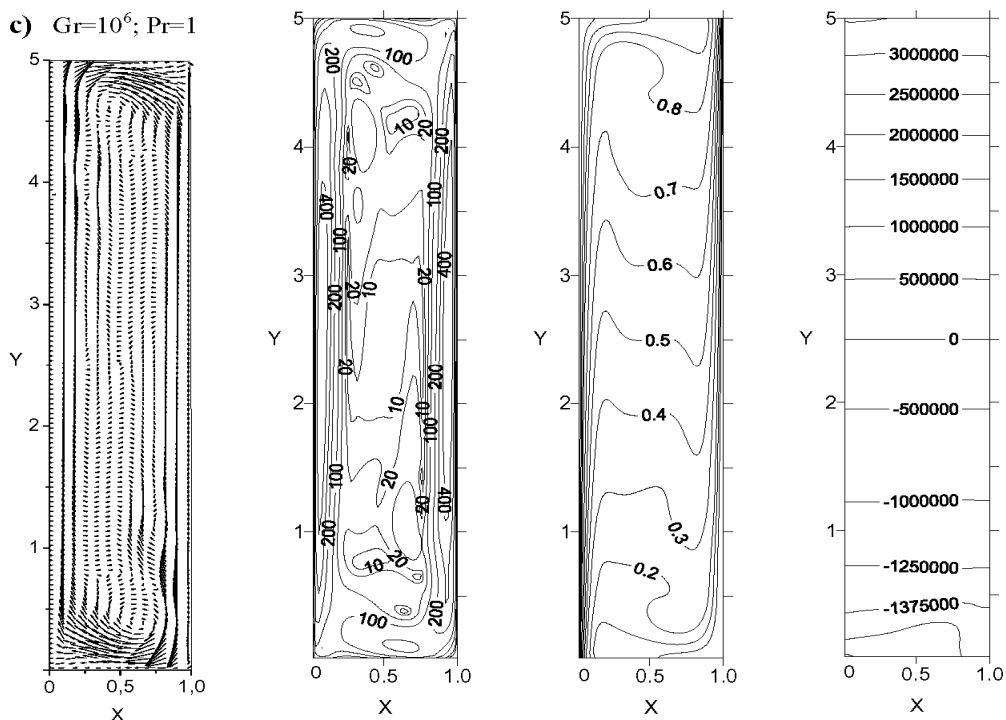


Рис. 4.74. Фрагменты параметров конвективного течения в прямоугольной области с высотой  $H=5$  в виде векторных полей скорости, их изолиний, изотерм и изобар при трех числах Грасгофа  $Gr=10^4$ ;  $10^5$ ;  $10^6$  и  $Pr=1$

Обсуждаемые результаты расчетов для области с параметром  $H = 5$  характеризуются определенным значением волнового числа возмущений. Однако наряду с проблемой исследования гидродинамических режимов конвективного течения в пристенных вертикальных пограничных слоях важную проблему представляет устойчивость вертикальных течений со сдвигом, при наличии двух встречных течений [76]. Еще Elder [272] с помощью экспериментов наблюдал мультячеистые структуры конвекции в вертикальных областях похожие на гидродинамическую неустойчивость. Позднее в работах Thomas, Davis [370] и других, расчетным путем были получены пяти и трех ячеистые структуры течения в областях с  $H = 10$ . Далее стало очевидно [310], что мультячеистые структуры наблюдаются в областях с большим параметром  $H \approx 15, 20$  при высоких числах Грасгофа. Большинство ранних исследований выполнено при  $H \leq 10$  и  $Pr=1$ . Ниже мы покажем, что изменяя значительно вертикальный размер области можно исследовать появление вторичных течений с различными длинами волн.

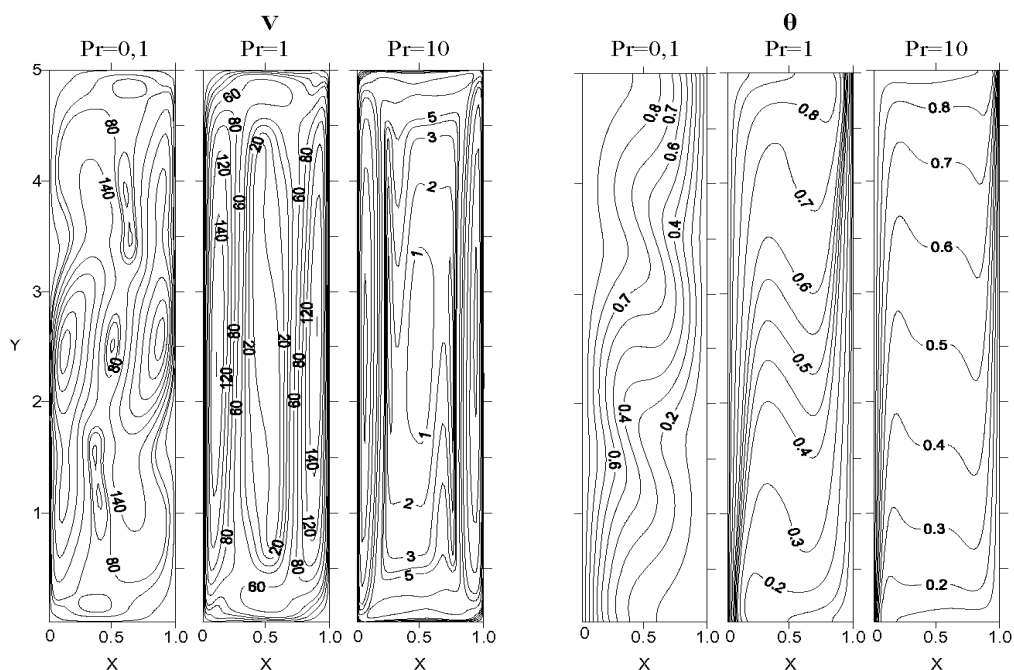


Рис.4.75. Изолинии скорости  $V$  (слева) и изотермы  $\theta$  (справа) в области шириной  $L=1$  и высотой  $H=5$  при числе  $Gr=10^5$  и трех числах Прандтля для  $\tau=100$

В качестве примера рассмотрим результаты расчетов для прямоугольной области с параметром  $H = 10$  и  $Pr=1$ . На рис. 4.76 представлены расчетные зависимости мгновенных значений температуры  $\theta$  от времени при различных четырех числах Грасгофа  $Gr = 10^5; 10^6; 10^7; 10^8$  в реперной точке 1 с координатами  $X = 0,3$  и  $Y = 0,7$ . Анализ этих результатов показывает, что при числе  $Gr = 10^5$  и  $Gr = 10^6$  в прямоугольной области с  $H = 10$  имеет место установившийся режим конвекции. С увеличением числа Грасгофа до  $Gr = 10^7$  наблюдается переходный режим с появлением второй длинноволновой моды колебаний значения температуры. При числе  $Gr = 10^8$  реализуется сложный нестационарный режим конвекции.

Рассмотрим подробнее особенности и структуру полей скорости, температуры и давления в прямоугольной области с  $H = 10$  в зависимости от числа Грасгофа при установившейся конвекции. На рис. 4.77 представлены расчетное векторное поле скоростей, их изолинии, изотермы и изобары при числе Грасгофа  $Gr = 10^5$  и числе Прандтля  $Pr=1$ . Анализ поля скоростей и их изолиний показывает образование одной большой циркуляционной зоны вытянутой вдоль вертикальной оси  $Y$  с плоскопараллельной структурой течения основного потока. Исключение

составляют лишь концевые зоны, где течение имеет более сложный характер.

На рис. 4.78 представлены аналогичные результаты расчета параметров конвективного потока для области с  $H = 10$  при числе Грасгофа  $Gr = 10^6$ . Эти рисунки показывают, что картина циркуляционного потока и форма изотерм значительно отличается от случая при  $Gr = 10^5$ . Размер высоты  $H = 10$  способствует появлению волновой неустойчивости. На фрагменте векторного поля скоростей в верхней левой и правой нижней зонах области хорошо видны визуально образующиеся волны. Кроме того, в тех же зонах на фрагменте с расчетными изолиниями равных скоростей хорошо просматривается мультитягистая структура конвективного течения.

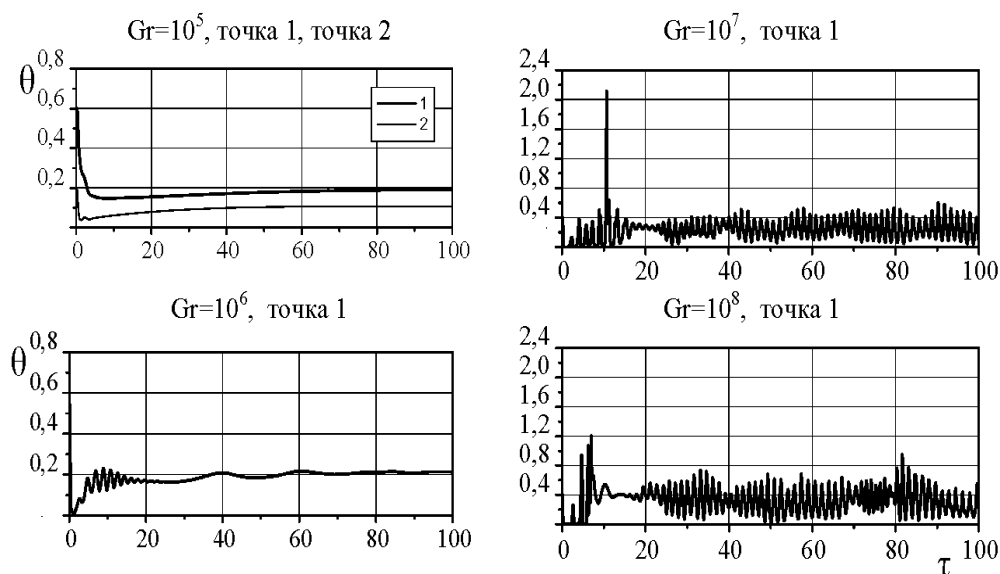


Рис. 4.76. Изменение температуры во времени в прямоугольной области с высотой  $H=10$  в реперных точках 1 и 2 при  $Pr=1$  и различных числах  $Gr$  для  $\tau=100$

В дополнение к этому на рис. 4.79 приведены профили скорости  $V$  вдоль оси  $Y$ -ов в сечениях  $X = H/2$  при трех значениях высоты  $H = 1, 5, 10$  и двух числах Грасгофа. Эти рисунки наглядно показывают, что течение состоит из двух встречных симметричных потоков. Интенсивность течения вблизи левой подогреваемой и правой холодной стенок сильно зависит от высоты  $H$  и числа  $Gr$ . При этом рост числа  $Gr$  приводит к деформации формы профиля скорости. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что даже в срединной части полости половинка профиля скорости по своей



форме несимметрична и значительно отличается от параболического профиля Пуазейля

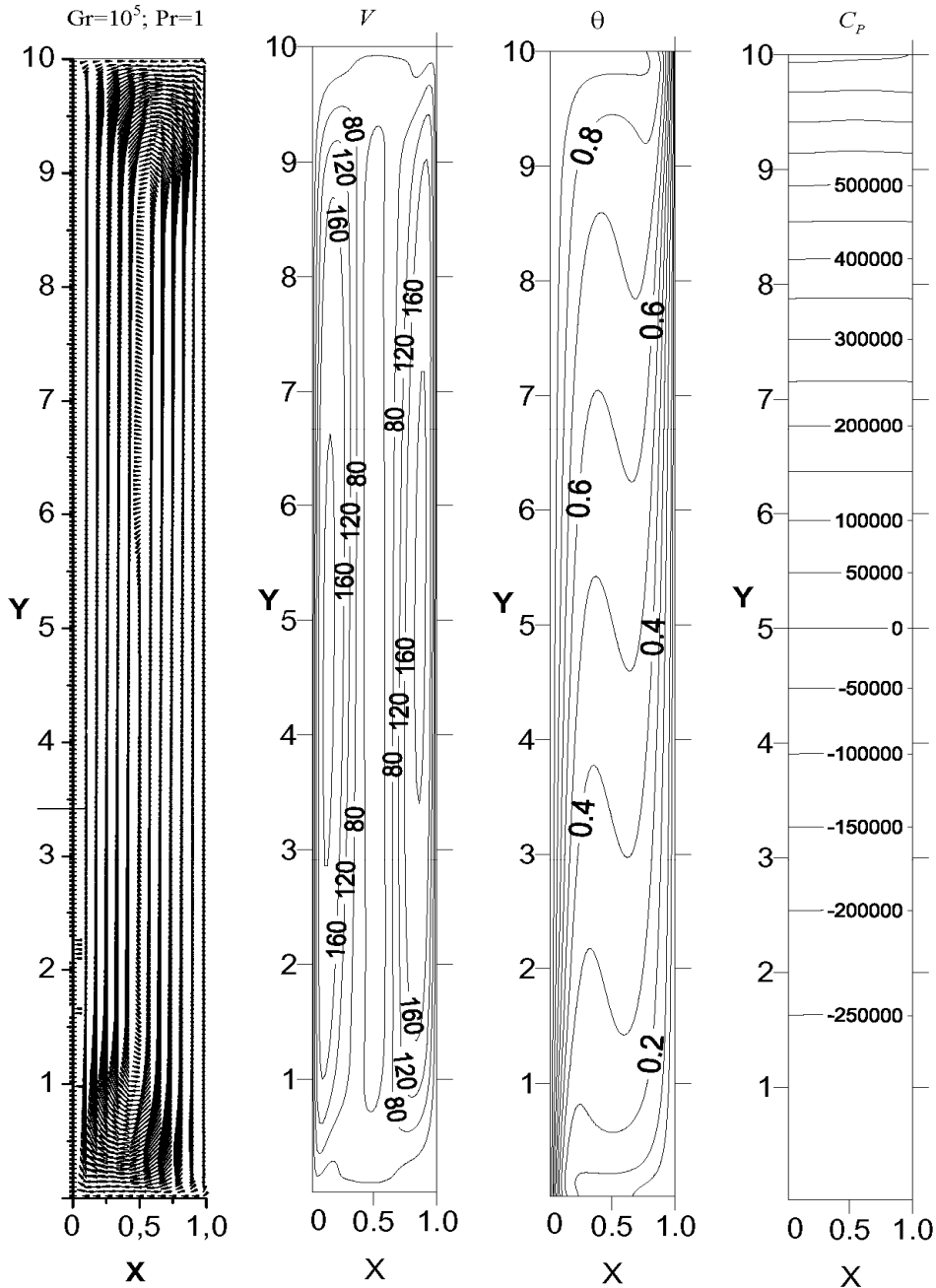


Рис. 4.77. Векторное поле скоростей, их изолинии  $V$ , изотермы  $\theta$  и изобары  $C_p$  в прямоугольной области с высотой  $H=10$  при  $Gr=10^5$  и  $Pr=1$

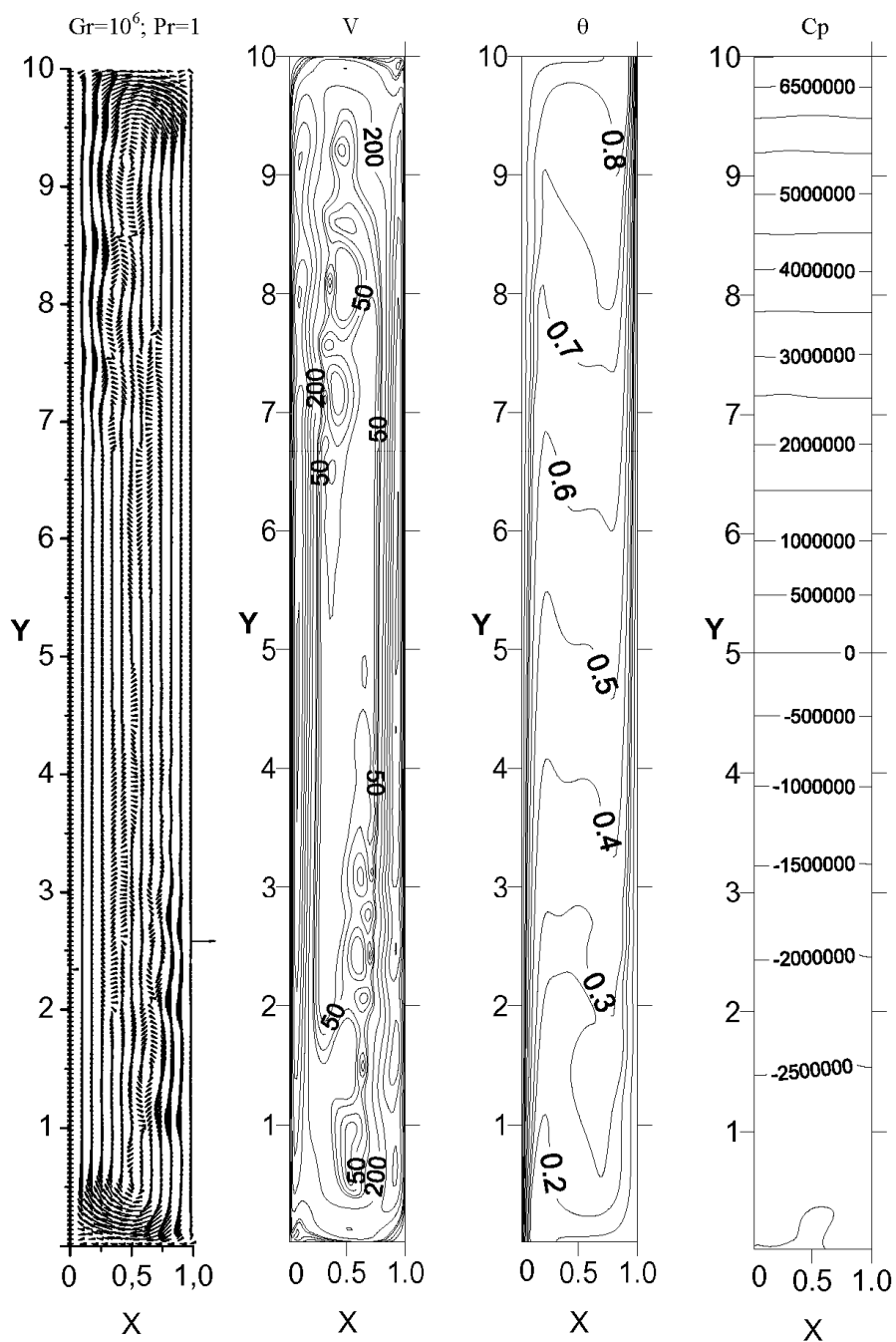


Рис. 4.78. Векторное поле скоростей, их изолинии  $V$ , изотермы  $\theta$  и изобары  $C_p$  в прямоугольной области с высотой  $H=10$  при  $Gr=10^6$  и  $Pr=1$

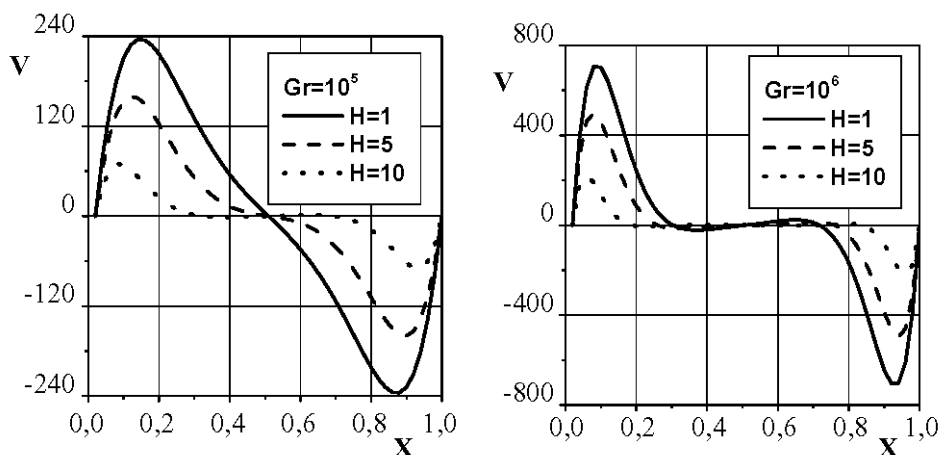


Рис. 4.79. Профиля поперечной скорости при установившейся конвекции вдоль горизонтальной оси  $X$  в среднем сечении областей с  $H=1$ ;  $H=5$ ;  $H=10$  для двух чисел Грасгофа  $Gr=10^5$  и  $Gr=10^6$  :

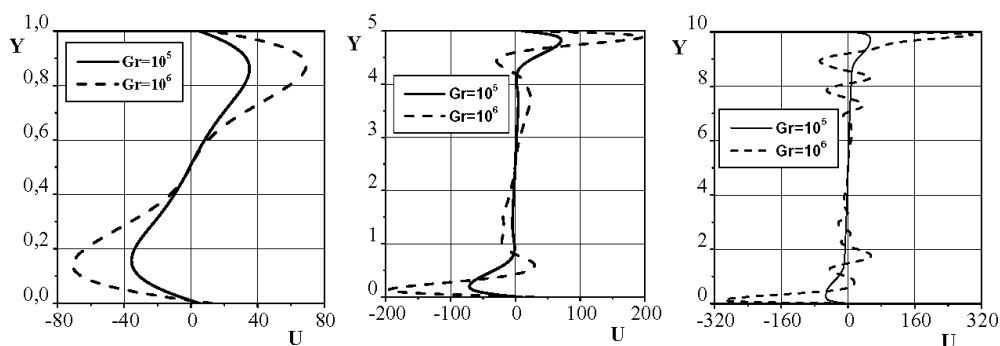


Рис. 4.80. Профиля продольной скорости вдоль вертикальной оси  $Y$  в сечении  $X=0,5$  для областей с  $H=1$ ;  $H=5$ ;  $H=10$  при двух числах Грасгофа  $Gr=10^5$  и  $Gr=10^6$

На рис. 4.80 показаны расчетные профили скорости  $U$  вдоль оси  $Y$  при  $X = 0,5$  для установившейся конвекции в полостях с высотой  $H = 1, 5, 10$  при двух числах Грасгофа  $Gr = 10^5$  и  $Gr = 10^6$ . Заметим, что на двух правых рисунках вертикальный масштаб  $Y$  искажен. Эти рисунки наглядно показывают как происходит перетекание жидкости из левой половины полости в правую и наоборот. Легко видеть, что при  $H = 1$  эти горизонтальные потоки происходят почти по всему вертикальному сечению, а при  $H = 5$  и  $H = 10$  интенсивное перетекание происходит лишь вблизи верхней и нижней горизонтальных стенок полости.

В центральной части полости это перетекание очень незначительное. Обращает на себя внимание, что при числе  $Gr = 10^6$  наблюдается критический режим течения, когда для скорости  $U$  появляются волновые возмущения (штриховые линии).

Наряду с профилями скорости, на рис. 4.81 представлены расчетные профили температур для тех же условий, что и выше. Они наглядно показывают влияние циркуляционного потока в полости на деформацию поля температур. Нетрудно видеть, что общая картина поля температур слабо зависит от высоты  $H$  и различие наблюдается лишь в концевых верхней и нижней зонах. В целом этот рисунок наглядно демонстрирует наличие эффекта температурного расслоения жидкости на верхние теплые и нижние холодные слои жидкости, что приводит к образованию устойчивой вертикальной стратификации внутри области. Наличие такого градиента влияет как на основное течение, так и на его устойчивость

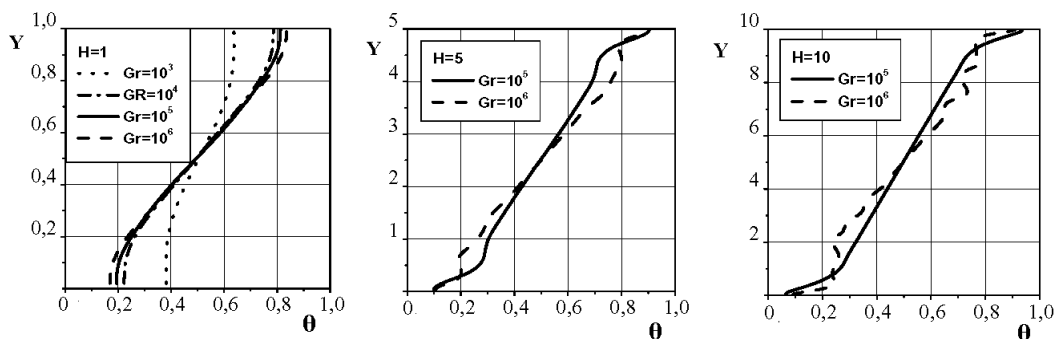


Рис. 4.81 . Изменение температуры  $\theta$  вдоль вертикальной оси  $Y$  в сечении  $X=0,5$  для областей с  $H=1$ ;  $H=5$ ;  $H=10$  при двух числах Грасгофа  $Gr=10^5$  и  $Gr=10^6$

Задача устойчивости конкретного конвективного течения в общем случае достаточно трудна и должна исследоваться отдельно. Даже в любом простом случае, когда реализуются двумерные стационарные вторичные течения, исследованию устойчивости должен предшествовать численный расчет параметров вторичных течений, зависящих от высоты  $H$  и чисел Грасгофа и Прандтля. Рассмотрим подробнее результаты расчетов изменения во времени значений безразмерной температуры  $\theta$  при различных числах Грасгофа в реперной точке 1 с координатами  $(0,3; 0,7)$  для двух случаев параметра  $H = 15$  и  $H = 20$ . На рис. 4.82 и рис. 4.83 приведены результаты расчетов температуры  $\theta$  в зависимости от времени при четырех числах Грасгофа. Анализ этих результатов показывает, что в обоих случаях высоты  $H = 15$  и  $H = 20$  при числах  $Gr=10^5$  и  $Gr=10^6$  наблюдается установившийся режим конвекции, а при числах  $Gr=10^7$  и  $Gr=10^8$

наблюдается осцилляция температуры и режим конвективного течения является нестационарным.

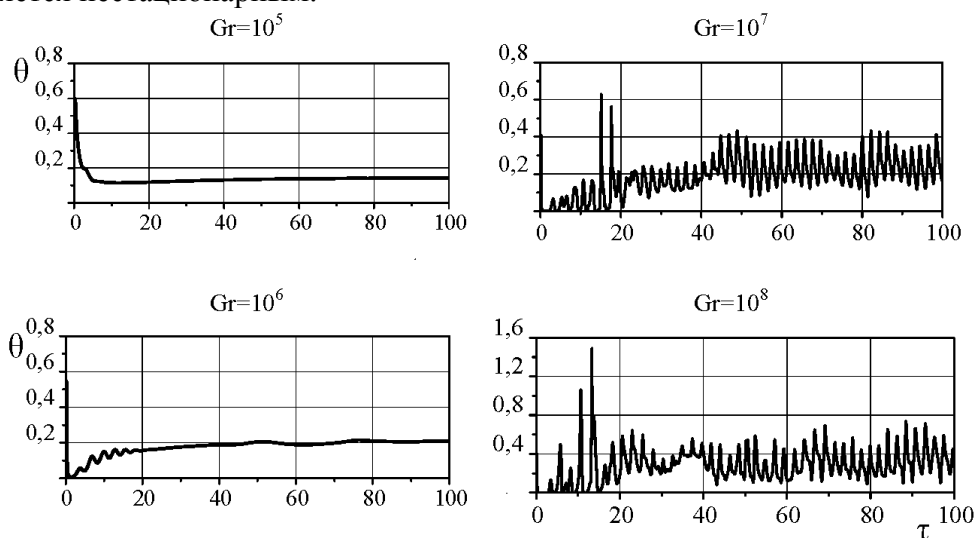


Рис. 4.82. Изменение температуры во времени в прямоугольной области с высотой  $H=15$  в реперных точке1 при  $Pr=1$  и различных числах  $Gr$  для  $\tau=100$

Обратимся к детальному рассмотрению параметров конвективного движения в рассматриваемых прямоугольных полостях при различных числах Грасгофа и числе Прандтля  $Pr=1$ .

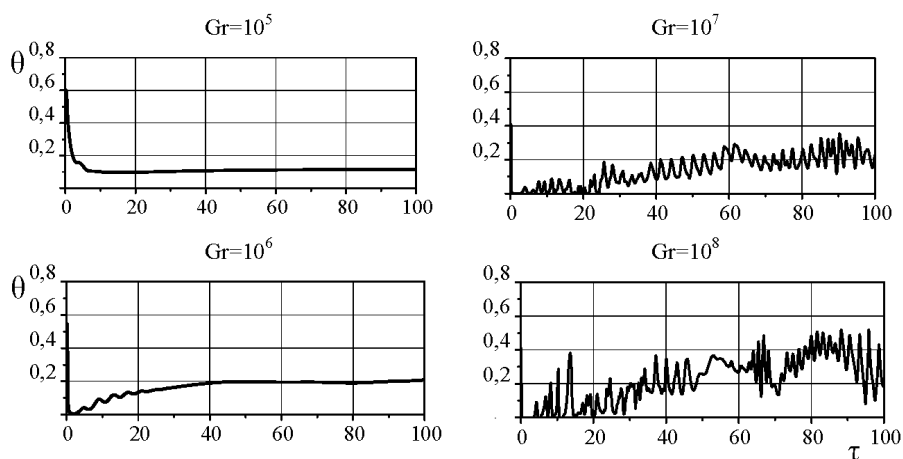


Рис. 4.83. Изменение температуры во времени в прямоугольной области с высотой  $H=20$  в реперной точке1 при  $Pr=1$  и различных числах  $Gr$  для  $\tau=100$

На рис. 4.84 и рис. 4.85 показаны мгновенные значения изолиний равных скоростей (слева) и изотермы (справа) в момент времени  $\tau = 100$  для двух параметров высоты полости  $H = 15$  и  $H = 20$  соответственно при четырех числах Грасгофа  $Gr = 10^5; 10^6; 10^7; 10^8$ . Они иллюстрируют этапы динамики тепловой гравитационной конвекции в двух вертикальных слоях в зависимости от числа Грасгофа.

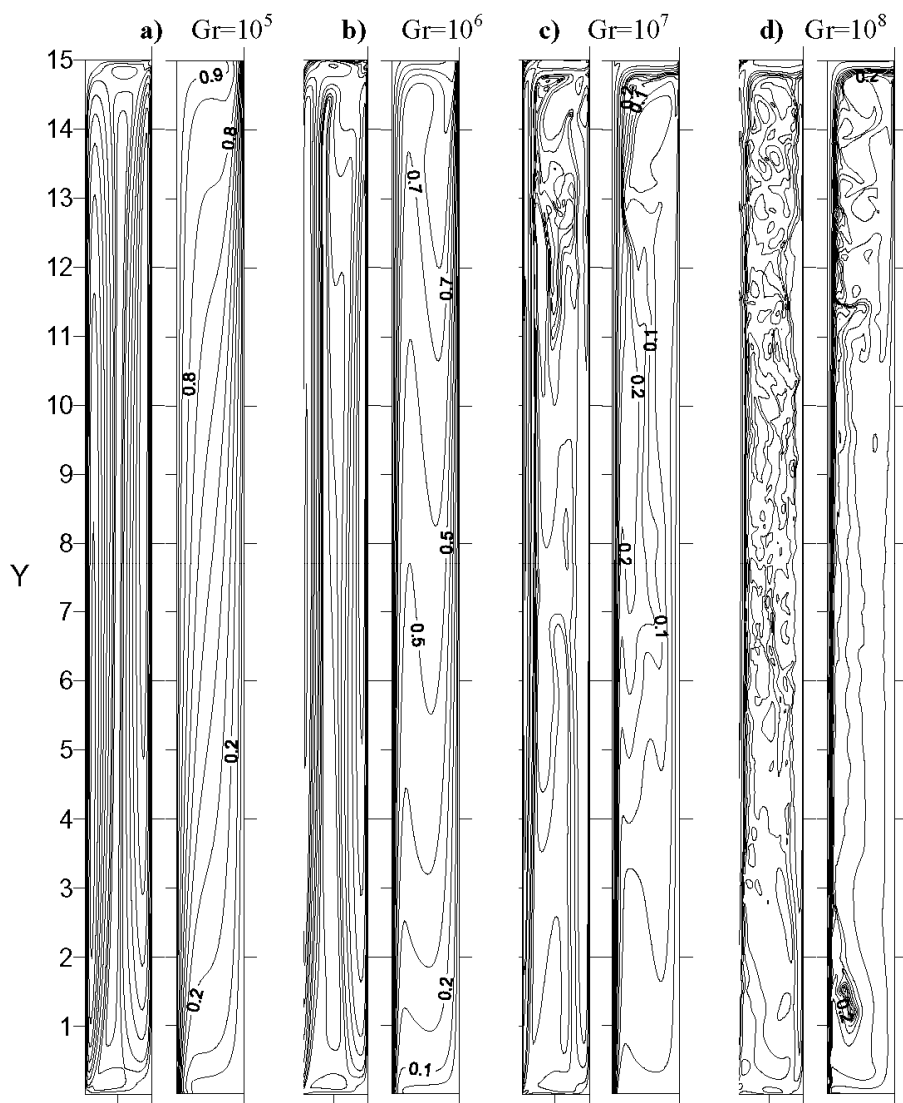


Рис. 4.84. Четыре фрагмента (a, b, c, d) изолиний скорости (слева) и изотерм (справа) в прямоугольной области с высотой  $H=15$  при  $Pr=1$  и различных числах Грасгофа для  $\tau=100$

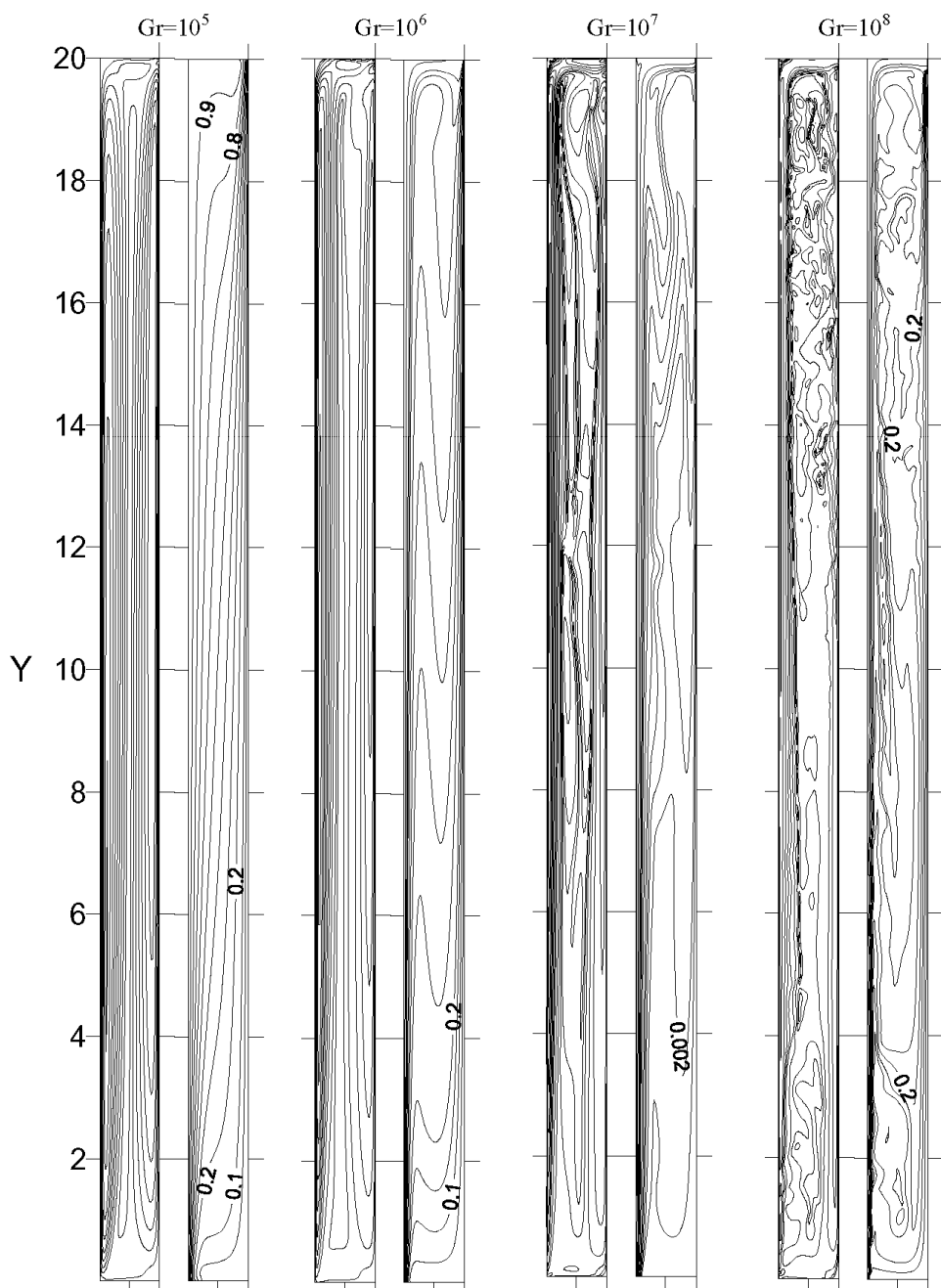


Рис. 4.85. Четыре фрагмента изолиний скорости (слева) и изотерм (справа) в прямоугольной области с высотой  $H=20$  при  $Pr=1$  и различных числах Грасгофа для  $\tau=100$ .

Следует отметить, что при умеренных числах Грасгофа ( $Gr = 10^4; 10^5$ ) наблюдается определенная симметрия полей течения и распределения температуры в верхней и нижней полости, а при больших числах Грасгофа эта симметрия нарушается и вдоль левой подогретой стенки образуется своеобразный динамический и тепловой пограничные слои.

В зависимости от геометрии полости и чисел  $Gr$  и  $Rg$  эти мелкочаеистые структуры могут объединяться и сливаться в более крупные вихревые образования. Если число Грасгофа продолжать увеличивать, то при  $Gr = 10^8$  образуется сравнительно устойчивая хаотическая структура. В связи с этим механизм теплопередачи между вертикальными стенками сильно осложнен и близок к турбулентному.

Таким образом, для задачи термогравитационной конвекции в квадратной и прямоугольных областях подогреваемых сбоку при пяти вариантах геометрии области, детально изучены особенности конвекции жидкости при различных числах Грасгофа и Прандтля.

На основе расчета мгновенных значений скорости и температуры в зависимости от времени, показано существование установившейся конвекции, переходного и нестационарного ее режима в зависимости от чисел Грасгофа и Прандтля.

Для геометрического параметра области  $H = 1, 5, 10, 15, 20$  в широком диапазоне чисел Грасгофа рассчитаны векторные поля скорости, их изолинии, изотермы и изобары, которые широко представлены в графическом виде. Численный эксперимент показывает, что увеличение числа Грасгофа приводит к потере устойчивости конвективного течения и возникновению циркуляционных течений с образованием не только монотонных гидродинамических колебаний параметров конвективного потока, но и второй длинноволновой моды возмущений. Метод обеспечивает высокое качество моделирования физических процессов конвекции и позволяет вести расчеты до чисел Грасгофа  $Gr = 10^{10}$ . Показано, что в прямоугольных областях с большим вертикальным размером ( $H > 10$ ) при высоких числах Грасгофа обнаруживается мультячеистая структура конвективного потока. С ростом числа  $Gr$  монотонность возмущений нарушается и в спектре могут появиться колебательные возмущения. Полный спектр возмущений при конвективном течении испытывает влияние температурного фактора.

Полученные результаты согласуются с известными экспериментальными данными и расчетами другими методами [76, 157, 164, 310], однако данный метод обладает простотой и позволяет расширить диапазон изменения таких определяющих параметров как числа Грасгофа и Прандтля.



## ГЛАВА 5

# ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ

### 5.1. Особенности турбулентных течений

Более стапятидесяти лет назад из наблюдений за движением жидкости было обнаружено существование двух типов течений, резко отличающихся друг от друга по своей структуре. Теперь эти режимы течения принято называть ламинарными и турбулентными. При ламинарном режиме течения наблюдается спокойное упорядоченное движение одних слоев жидкости относительно других. Однако при некоторых условиях это слоистое течение почти внезапно переходит в другой неупорядоченный (турбулентный) режим течения с сильным перемешиванием в поперечном направлении. Обе формы движения легко наблюдаются визуально с помощью красителя.

Несмотря на то, что существование указанных форм движения обнаружено очень давно, принято считать, что наука о турбулентности зародилась лишь после того, как появились замечательные работы О. Рейнольдса [346], посвященные исследованию течений в трубах и перехода ламинарного режима течения в турбулентный. Им установлен общий критерий перехода ламинарного движения в турбулентное, носящий теперь его имя.

Для ламинарных течений математическая постановка задачи и запись граничных условий не вызывают принципиальных трудностей, хотя остаются трудности интегрирования нелинейных уравнений Навье-Стокса. В турбулентном же потоке частицы жидкости совершают неупорядоченные неустановившиеся колебания (пульсации) по сложным траекториям. В общем случае турбулентные течения неустановившиеся, трехмерные и очень сложные по своей структуре [60]. Несмотря на эти трудности существует точка зрения, что одной из альтернатив решения проблемы турбулентности является непосредственное численное решение нестационарных уравнений Навье-Стокса. Однако, поскольку использование численных методов влечет за собой аппроксимацию поля течения конечным числом расчетных точек, что накладывает ограничение на масштаб

рассматриваемых движений, и учитывая особенности вычисления средних по ансамблю величин, прямые численные расчеты полей турбулентных течений практически пока связаны с огромными трудностями. Определенная работа в этом направлении ведется, но к ее обсуждению с современных позиций анализа этой проблемы мы вернемся в главе 9.

Другая альтернатива связана с тем, что развитое турбулентное течение характеризуется беспорядочными пульсациями скорости, температуры и давления. Это дает основание подойти к описанию турбулентных течений с помощью статистических характеристик случайных гидродинамических полей. В этом случае математическое описание движения носит вероятностный характер [215]. Однако корректная постановка полной задачи турбулентности с этих позиций и ее решение для практически интересных случаев пока наталкиваются на непреодолимые трудности. Менее полное описание турбулентности можно получить, если определить плотность вероятности различных значений пульсирующих величин в конечных группах точек потока [66, 145, 216]. Однако даже в такой постановке задачи турбулентности представляют огромные трудности. Еще менее полное, но практически оправданное, описание характеристик турбулентного потока можно получить, если вместо уравнений для плотности вероятности записать уравнения для так называемых моментов различного порядка.

В работе Л.В. Келлера, А.А. Фридмана [291] впервые была четко сформулирована задача статистического описания непрерывных полей, что послужило толчком к развитию статистической теории турбулентности на основе метода моментов.

Моментами, как известно [152, 216], для систем конечного числа величин  $v_1, v_2, \dots, v_N$ , подчиненных некоторому закону распределения  $f(v_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), называются следующие выражения:

$$M^{p_1, p_2, \dots, p_N} = \overline{v_1^{p_1} v_2^{p_2} \dots v_N^{p_N}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int \dots \int v_1^{p_1} v_2^{p_2} \dots v_N^{p_N} f(v_1, v_2, \dots, v_N) dv_1 \dots dv_N,$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_N$  - целые неотрицательные числа, причем сумма показателей  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_N$  называется порядком момента.

Моменты отклонений величины  $v_1, v_2, \dots, v_N$  от соответствующих математических ожиданий называются центральными моментами:

$$B^{p_1, p_2, \dots, p_N} = \overline{(v_1 - \overline{v_1})^{p_1} (v_2 - \overline{v_2})^{p_2} \dots (v_N - \overline{v_N})^{p_N}}.$$

Центральные моменты  $B^{p_1, p_2, \dots, p_N}$  могут быть выражены через  $M^{p_1, p_2, \dots, p_N}$  и моменты низших порядков. Моменты  $M^{p_1, p_2, \dots, p_N}$  легко вычисляются, если

известна характеристическая функция  $\varphi$  рассматриваемой системы случайных величин.

Наряду с моментами высших порядков в статистике часто рассматривают так называемые семиинварианты, когда вместо характеристической функции рассматривается ее логарифм [145,155].

При статистическом описании системы полей (скалярных или векторных) необходимо рассматривать моменты не только для каждого поля, но и смешанные моменты, т.е. средние произведения. Смешанные моменты описывают корреляцию между полями. Моменты для случайного поля являются функциями от переменных точек наблюдения. Поэтому моменты могут быть одно-, двухточечные и т.д.

Моменты первого порядка представляют собой просто средние значения скорости, давления, температуры и т.п. Одноточечные моменты второго порядка определяют турбулентный перенос количества движения, теплоты и вещества в турбулентном потоке, а также энергию турбулентности. Двухточечные моменты второго порядка позволяют судить о корреляции пульсаций различных величин в удаленных друг от друга точках, что определяет спектр турбулентности и размеры турбулентных вихрей. Одноточечные моменты третьего порядка описывают явление диффузии турбулентности, а двухточечные моменты третьего порядка – перераспределение энергии по спектру турбулентности. Моменты четвертого порядка важны при рассмотрении явления перемежаемости турбулентных пульсаций [142]. Моменты более высокого порядка трудно доступны для физической интерпретации.

В общем случае моменты удовлетворяют бесконечной цепочке уравнений переноса, называемых уравнениями Фридмана-Келлера

$$\frac{\partial M_k}{\partial t} + \mathcal{P}_k M_k - Q_k M_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $\mathcal{P}_k$  и  $Q_k$  - дифференциальные операторы.

Принципиальная особенность уравнений переноса для различных моментов – их незамкнутость, т.е. в уравнение для  $k$ -го момента  $M_k$  помимо моментов того же порядка входят также  $(k+1)$ -е моменты  $M_{k+1}$ . Это обстоятельство требует привлечения дополнительных гипотез статистического или физического характера, которые позволили бы привести в соответствие число рассматриваемых неизвестных гидродинамических параметров с числом имеющихся дифференциальных уравнений.

Если эту, в принципе, бесконечную цепочку уравнений ограничить, например, лишь первыми моментами, то получаются широко известные уравнения Рейнольдса, содержащие неизвестные вторые моменты. Описание турбулентности на основе уравнений для первых моментов следует считать описанием турбулентного потока в первом приближении.

Если цепочку уравнений ограничить вторыми моментами, то этот случай естественно считать вторым приближением и так далее.

Таким образом, реальная альтернатива расчета турбулентных течений сводится к построению приближенных моделей турбулентных течений. Фактически это означает, что замкнуть задачу расчета турбулентного потока можно, только опираясь на экспериментальный материал.

В свое время О. Рейнольдс был первый, кому удалось сделать очень важный практический шаг в направлении развития теории турбулентности. Базируясь на уравнениях Навье-Стокса, он впервые дал простой вывод уравнений турбулентного переноса количества движения для первых моментов, предложив представлять актуальные значения гидродинамических величин в турбулентном потоке в виде суммы осредненных по времени и пульсационных составляющих, и сформулировал основные правила осреднения в теории турбулентности. Используемые им правила осреднения сводятся к выполнению следующих соотношений:

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f}; \quad \overline{f'} = \overline{f - \bar{f}} = 0; \quad \overline{f\varphi} = \bar{f}\bar{\varphi}; \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}, \quad (5.1.)$$

где  $f$  и  $\varphi$  – актуальные мгновенные значения каких-либо из гидродинамических величин в рассматриваемой точке, черта сверху означает осредненные по времени значения этих величин, а знак «штрих» – пульсационную составляющую, или отклонение мгновенного значения гидродинамической величины от среднего, т.е.  $f' = f - \bar{f}$ .

Эти правила осреднения, вообще говоря, являются простейшей формой статистического среднего во времени

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f \, dt.$$

Его использование целесообразно, когда среднее не зависит от момента времени  $t_0$  в который начат процесс осреднения. В противном случае следует использовать среднее по ансамблю

$$\bar{f}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(t),$$

где суммирование ведется по набору реализаций.

Известная гипотеза об эргодичности [145] гласит о том, что для стационарного случайного процесса средние по времени и ансамблю идентичны. Более подробное изложение о методах осреднения имеется у А.С. Монины, А.М. Яглома [145], М.И. Вишика, А.В. Фурсикова [66] и др.

Пользуясь указанными правилами осреднения, можно на основе уравнений Навье-Стокса получить дифференциальные уравнения

осредненного и пульсационного движения жидкости, первые из которых носят имя Рейнольдса.

Уравнения Рейнольдса описывают турбулентное течение лишь приближенно, так как при выполнении операции осреднения могут быть потеряны некоторые характерные свойства исследуемого течения. Однако опыт использования уравнений Рейнольдса для описания широкого класса турбулентных течений указывает на пригодность этой модели для расчета многих характеристик турбулентных течений. Поэтому фундаментом всех теоретических построений в теории турбулентности, по существу, служат уравнения Навье-Стокса и следующие из них уравнения Рейнольдса.

## 5.2. Уравнения Рейнольдса и тензор турбулентных напряжений

Приведенные в предыдущей главе основные уравнения гидромеханики, учитывающие силы плавучести и включающие уравнения неразрывности, движения и энергии применимы для ламинарного потока жидкости. При их выводе предполагалось, что  $v_i$ ,  $p$ ,  $\rho$  и  $T$  - истинные значения соответственно скорости, давления, плотности и температуры.

Использование уравнений Навье-Стокса для описания турбулентных течений фактически предполагает, что рассматриваются только течения, имеющие нижний предел масштаба длины, который должен быть больше средней длины свободного пробега молекул. Для большинства турбулентных течений, представляющих практический интерес, это требование выполняется. Исключение составляют случаи сильно разреженных газов, которые здесь не рассматриваются. Поэтому исходные уравнения стратифицированных турбулентных течений будут получены в рамках моделей сплошной среды на основе общих законов сохранения. Обычно будем предполагать, что движение происходит в поле внешних гравитационных сил, а физические свойства жидкости остаются постоянными. Приведем основные уравнения математической модели турбулентных течений.

Для вывода дифференциальных уравнений осредненного турбулентного движения воспользуемся общими уравнениями неразрывности (1.16) и движения (1.28) в дивергентной форме при наличии массовых сил

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad (5.2)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \operatorname{div} \Pi + \vec{F}. \quad (5.3)$$

Предварительно преобразуем векторное уравнение количества движения (5.3) с помощью формулы (1.13) и уравнения неразрывности. В соответствии с формулой (1.13), положив  $\Phi = \rho \vec{v}$ , имеем

$$\frac{d\rho\vec{v}}{dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}\vec{v}).$$

Выполнив операцию дифференцирования в первом слагаемом левой части этого равенства, получим

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) = \frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}\vec{v}). \quad (5.4)$$

Замечая, что второй член левой части этого равенства в силу уравнения неразрывности равен нулю, и подставляя (5.4) в (5.3), приходим к следующей дивергентной форме уравнения движения:

$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} = \rho\vec{F} + \operatorname{div}(\Pi - \rho\vec{v}\vec{v}). \quad (5.5)$$

Второй член в круглых скобках характеризует перенос количества движения  $\rho\vec{v}$  потоком со скоростью  $\vec{v}$ .

Уравнения Рейнольдса получают разложением независимых переменных в уравнениях Навье-Стокса на осредненные и пульсационные компоненты с последующим осреднением по времени всего уравнения. Принято использовать два способа осреднения – классическое осреднение по Рейнольдсу и предложенное Фавром осреднение с использованием плотности в качестве весовой функции. Для течений, в которых флуктуациями плотности можно пренебречь, оба способа эквивалентны. Раздел динамики несжимаемой вязкой жидкости относится к этому случаю.

Согласно общему приему, указанному Рейнольдсом, представим теперь все входящие в уравнение (5.5) истинные значения гидродинамических параметров и их составляющих в виде суммы осредненных и пульсационных величин, обозначенных соответственно чертой сверху и штрихом:

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i + v'_i; \quad \Pi = \bar{\Pi} + \Pi'; \quad F_i = \bar{F}_i + F'_i \\ \vec{v} \cdot \vec{v} &= v_i v_k + \bar{v}_i \bar{v}_k + \bar{v}_i v'_k + v'_i \bar{v}_k + v'_i v'_k. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Подставляя представление актуальных значений гидродинамических величин в уравнения (5.2) и (5.5) и производя осреднение по ранее указанным правилам (5.1), т.е.  $v_i = \bar{v}_i$ ,  $\bar{v}'_i = 0$  и т.д., получаем дивергентную форму уравнений осредненного турбулентного движения, называемых уравнениями Рейнольдса,

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0; \\ \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} &= \rho \vec{F} + \operatorname{div} (\overline{\Pi} - \rho \vec{v} \vec{v} - \overline{\rho v' v'}),\end{aligned}\quad (5.7)$$

или в тензорной форме

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} &= \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (p_{ik} - \rho \bar{v}_i \bar{v}_k - \overline{\rho v'_i v'_k}).\end{aligned}\quad (5.8)$$

Сравнивая (5.7), (5.8) с общими уравнениями (5.2) и (5.5) для истинных значений гидродинамических величин, нетрудно видеть, что уравнение неразрывности сохранило прежний вид с формальной заменой актуального значения скорости  $v$  на осредненное  $\bar{v}$ , а уравнения осредненного турбулентного движения (5.8) отличаются от (5.5) дополнительным членом  $-\overline{\rho v'_i v'_k}$ , представляющим симметричный тензор второго ранга

$$\Gamma = -\overline{\rho v'_i v'_k}, \quad (5.9)$$

который принято трактовать как дополнительный тензор кажущихся турбулентных напряжений или рейнольдсовых напряжений, обусловленных осредненной величиной переноса количества движения  $-\rho v_i$  пульсационными скоростями  $v'_k$ .

В целях удобства и различия вязких и турбулентных напряжений введем для компонент тензора турбулентных напряжений в отличие от тензора вязких напряжений  $\Pi = p_{ik}$  следующие обозначения:

$$\Gamma = \tau_{ik} = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho v_i'^2} & -\overline{\rho v'_1 v'_2} & -\overline{\rho v'_1 v'_3} \\ -\overline{\rho v'_1 v'_2} & -\overline{\rho v_2'^2} & -\overline{\rho v'_2 v'_3} \\ -\overline{\rho v'_1 v'_3} & -\overline{\rho v'_2 v'_3} & -\overline{\rho v_3'^2} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

и величину  $\tau_{ik}$  будем называть тензором турбулентных напряжений. Если снова воспользоваться соотношением (5.4), то уравнения Рейнольдса (5.8) можно тождественно преобразовать к виду

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} (\Pi + \Gamma), \quad (5.11)$$

или

$$\rho \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \right) = \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (p_{ik} - \rho \overline{v'_i v'_k}). \quad (5.12)$$

Появившиеся неизвестные турбулентные напряжения  $-\rho \overline{v'_i v'_k}$  являются прямым следствием нелинейности уравнений Навье-Стокса. Они показывают, что в турбулентном потоке помимо обмена количеством движения за счет сил молекулярной вязкости имеет место перенос количества движения благодаря пульсациям скорости, что создает физическую возможность перехода энергии от движения одного масштаба в энергию движения другого масштаба, причем наиболее вероятен переход от больших масштабов к меньшим.

При достаточно больших числах Рейнольдса, которые характеризуют отношение инерционных сил к вязким, основное движение является неустойчивым и порождает пульсационное движение другого более мелкого масштаба. Если основное движение поддерживается и является стационарным, то статистически стационарной будет и вся иерархия турбулентных движений. Пульсации скорости образуются от распада мелких вихрей, появляющихся с той же скоростью из распада крупных вихрей, а те в свою очередь порождаются энергией основного потока. Очевидно, что для поддержания основного потока ему надо сообщать это же количество энергии.

Из уравнения (5.11) видно, что турбулентные напряжения прибавляются к обычным вязким, поэтому полные напряжения в турбулентном потоке можно представить как результат их алгебраического сложения, т.е.  $\pi = \Pi + \Gamma$ , или  $\pi_{ik} = p_{ik} + \tau_{ik}$ . В развернутом виде, используя формулу Ньютона для полных напряжений имеем

$$\pi_{ik} = -p \delta_{ik} + \mu \left( \overline{\Phi_{ik}} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} \right) - \rho \overline{v'_i v'_k}, \quad (5.13)$$

где  $\overline{\Phi_{ik}} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i}$  - тензор скоростей деформаций. Тогда уравнения

Рейнольдса можно записать в следующей форме:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \text{div} \pi \quad \text{или} \quad \rho \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (p_{ik} + \tau_{ik}). \quad (5.14)$$

Во многих практических случаях, включая задачи свободной турбулентности, турбулентные напряжения значительно больше вязких  $\tau_{ik} \gg p_{ik}$ , поэтому последними часто пренебрегают, не делая при этом значительной ошибки, если, не рассматривается область вязкого подслоя, граничащая с твердой стенкой, или другие ситуации, где локальное число Рейнольдса мало.



Уравнения Рейнольдса в проблеме турбулентности служат фундаментом всех теоретических построений. Они объясняют существование вихревых напряжений в потоке. Но к сожалению турбулентные напряжения  $\tau_{ik}$  являются неизвестными величинами и в общем случае число неизвестных, входящих в систему уравнений Рейнольдса, превышает число исходных уравнений, поэтому в математическом отношении задача оказывается незамкнутой. В этом и состоит основная трудность в проблеме теоретического исследования закономерностей турбулентных потоков.

### 5.3. Турбулентный перенос и его моделирование

Представление поля турбулентного потока в виде осредненного и пульсационного движений, которые наблюдаются в реальных течениях, привело к появлению в исходных уравнениях слагаемых, описывающих перенос импульса и других видов физических субстанций, таких, как теплота и вещество, из одного слоя жидкости в другой за счет пульсационного движения. Этот перенос напоминает молекулярный перенос в ламинарных движениях. Однако, вследствие того, что в турбулентном потоке носителями различных субстанций являются не малые молекулы, а вихревые структуры конечных размеров, этот турбулентный процесс переноса происходит во много раз интенсивней, чем молекулярный [132]. Имеющий при этом место перенос количества движения пульсационными скоростями создает турбулентное трение между слоями жидкости, перенос теплоты вызывает турбулентную теплопроводность, а перенос примеси вещества обуславливает турбулентную диффузию примеси.

Поскольку проблема турбулентности ввиду необычайной сложности ее механизма представляет собой очень трудную и далеко не решенную задачу механики жидкости и газа, все же для ряда практических приложений существуют удовлетворительные полуэмпирические модели турбулентности, позволяющие рассчитывать некоторые основные осредненные, а иногда и пульсационные характеристики турбулентных потоков [200-203]. Надо сказать, что все попытки создания феноменологических и статистических теорий турбулентности до сих пор заканчиваются необходимостью привлечения различного рода полуэмпирических гипотез. И хотя некоторые из этих гипотез в силу их большой практической значимости возведены в ранг теории (теории Буссинеска, Прандтля, Кармана, Тейлора, Рейхарда и др.), в наши дни они иногда оказываются мало приемлемыми для полного исследования тех видов турбулентных течений, для которых они были предложены. Поэтому теоретические модели постоянно совершенствуются на основе более тонких измерений и экспериментальных данных о характере изменения определенных функций и величин, характеризующих турбулентное течение, а в последние годы много внимания уделяется

построению принципиально новых современных моделей турбулентности, о которых речь будет идти ниже в главе 9.

В основе расчета осредненных турбулентных полей скорости, температуры и концентрации обычно лежат феноменологические модели турбулентности первого приближения, позволяющие получить замкнутую систему исходных уравнений переноса импульса, теплоты и вещества, что обеспечивает возможность их интегрирования.

Выполненные многочисленные опыты с турбулентными потоками показали, что механизм турбулентного переноса как количества движения, так и теплоты и вещества во многом одинаков. Поэтому закономерности переноса, полученные для одной какой-нибудь субстанции, обычно на основе аналогии Рейнольдса обобщаются и распространяются на другие с учетом особых свойств переносимой субстанции. Первые модели турбулентности были предложены для переноса импульса.

#### **5.4. Модели турбулентности первого приближения или градиентные модели**

Наиболее ранние полуэмпирические модели турбулентности предложены различными авторами для уравнений осредненного турбулентного движения Рейнольдса, которые в тензорных обозначениях для несжимаемой жидкости записываются в виде

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_i v_k}}{\partial x_k} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} - \overline{v_i' v_k'} \right). \quad (5.15)$$

Построение модели турбулентности – по существу, выбор модели для турбулентных напряжений

$$\tau_{ik} = -\rho \overline{v_i' v_k'}. \quad (5.16)$$

Первые модели турбулентности носили феноменологический характер и основывались на гипотезе градиентной диффузии, при которой перенос импульса или другой какой-либо субстанции пропорционален градиенту соответствующей осредненной величины. Коэффициенты пропорциональности в этих соотношениях по аналогии с ламинарным случаем называют коэффициентами турбулентной вязкости, турбулентной теплопроводности и турбулентной диффузии. Такие модели турбулентности будем называть градиентными в противоположность современным дифференциальным параметрическим моделям турбулентности, использующим дополнительные дифференциальные уравнения переноса для корреляционных моментов второго порядка и выше или других транспортных характеристик турбулентного течения типа энергии турбулентности и скорости ее диссипации.

**Модель Буссинеска.** Одна из первых попыток замыкания уравнений Рейнольдса и, следовательно, первая модель турбулентности принадлежит И. Буссинеску [237]. Основа этой модели базируется на аналогии переноса импульса с соответствующим молекулярным переносом и предполагается, что турбулентный перенос импульса прямо пропорционален градиенту осредненной скорости  $\tau = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ . Здесь  $\mu_t$  – коэффициент турбулентной вязкости.

Естественно, что при построении первых моделей турбулентности рассматривались простейшие плоские течения, для которых имела место лишь одна компонента тензора турбулентных напряжений  $\tau = \tau_{12} = \tau_{xy}$ .

Обратимся к случаю трехмерного потока. Тогда, вспоминая (5.12), для полных компонент напряжений в случае несжимаемой жидкости в декартовой системе координат можно записать

$$\pi_{ik} = P_{ik} + \tau_{ik} = -\delta_{ik} \rho + \overline{\mu \Phi_{ik}} - \overline{\rho v'_i v'_k}. \quad (5.17)$$

При рассмотрении выражения (5.17) с точки зрения отыскания связи турбулентных напряжений с осредненными параметрами потока напрашивается предположение, что полные напряжения подобно вязким должны быть прямо пропорциональны градиенту осредненной скорости. Если это допущение принять, то необходимо, чтобы

$$\tau_{ik} = -\overline{\rho v'_i v'_k} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) = \mu_t \overline{\Phi_{ik}}. \quad (5.18)$$

Именно эту гипотезу впервые и выдвинул И. Буссинеск, а формула (5.18) представляет ее обобщение для трехмерного случая. Поэтому тензор полных напряжений и уравнения Рейнольдса принимают вид

$$\pi_{ik} = -\delta_{ik} \bar{p} + (\mu + \mu_t) \overline{\Phi_{ik}}; \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{v}_i \bar{v}_k)}{\partial x_k} = -\frac{\delta_{ik}}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (\nu + \nu_t) \overline{\Phi_{ik}} \right] \quad (5.20)$$

Однако, как позднее показал И.О. Хинце [216], в общем случае выражение (5.18) несправедливо. Действительно, если к нему применить операцию свертки, то легко приходим к соотношению

$$-\overline{\rho v'_i v'_k} = -\overline{\rho v_i^2} = 2\mu_t \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i}. \quad (5.21)$$

Левая часть соотношения представляет собой удвоенную кинетическую энергию турбулентного пульсационного движения  $k = \overline{v_i^2}/2$ , которая в

общем случае не равна нулю в турбулентном сдвиговом потоке, в том числе, например, на оси струи, а правая часть для несжимаемой жидкости в силу уравнения неразрывности будет равна нулю.

Для устранения этого противоречия, в предположении о скалярном характере турбулентной вязкости [216] по аналогии с вязкой жидкостью, необходимо выделить из турбулентных напряжений среднее турбулентное давление

$$\overline{p_t} = \frac{1}{3} \overline{\rho v'_i v'_k} \quad (5.22)$$

и для тензора Рейнольдсовых напряжений ввести следующее соотношение:

$$\tau_{ik} = -\overline{\rho v'_i v'_k} = -\frac{2}{3} \rho k \delta_{ik} + \mu_t \overline{\Phi}_{ik}. \quad (5.23)$$

Тогда операция свертывания приводит к равенству левой и правой частей этого выражения, т.е. формальное противоречие устраняется и полные напряжения в турбулентном потоке примут вид

$$\pi_{ik} = p_{ik} + \tau_{ik} = -\delta_{ik} \left( \overline{p} + \frac{\rho}{3} \overline{v'_i v'_k} \right) + (\mu + \mu_t) \overline{\Phi}_{ik}. \quad (5.24)$$

Коэффициент турбулентной вязкости  $\mu_t$  в отличие от коэффициента молекулярной вязкости  $\mu$  не является собственно свойством жидкости, а зависит непосредственно от состояния турбулентности. Из соображений размерности следует, что  $\mu_t$  пропорционален масштабам скорости  $V$  и турбулентности  $L$ :  $\mu_t \approx \rho V L$ . Если реальное распределение этих масштабов достаточно хорошо аппроксимировано, то для таких течений можно надежно определить и коэффициент турбулентной вязкости.

По прямой аналогии с турбулентным переносом количества движения понятие турбулентной диффузии теплоты или массы вещества предполагает следующую связь:

$$-\overline{v'_i C} = k_i \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i}, \quad (5.25)$$

где  $k_i$  - коэффициент турбулентной диффузии для теплоты или массы;  $\overline{C}$  - осредненное значение переносимой скалярной субстанции.

Подобно турбулентной вязкости  $\mu_t$  коэффициент  $k_i$  не является собственной характеристикой жидкости, а зависит от состояния турбулентности.

По аналогии с ламинарным движением для характеристики процессов турбулентного переноса импульса, теплоты и вещества вводят турбулентные

числа Прандтля и Шмидта  $\sigma_i = \nu_t / k_i$ , где  $\sigma_i$  - турбулентное число Прандтля-Шмидта.

Эксперименты показали, что в отличие от  $\nu_t$  и  $k_i$  их отношение  $\sigma_i$  слабо изменяется как в пределах рассматриваемого течения, так и от течения к течению. Поэтому в практических расчетах для многих течений турбулентное число Прандтля-Шмидта принимается постоянным.

Концепции турбулентных вязкости и диффузии используются не только в моделях турбулентности первого приближения, но по существу, и в моделях второго приближения. Напомним, что в модели турбулентности Буссинеска  $\nu_t = \text{const}$ . Однако, как показали измерения, такое предположение в общем случае для потоков с поперечным сдвигом не выполняется.

Несмотря на принципиальные недостатки модели Буссинеска, она успешно использовалась при исследовании некоторых типов течений, где изменением  $\nu_t$  можно было пренебречь. Так, например, обстоит дело при исследовании атмосферной турбулентности, свободных слоев смешения, закрученных потоков в циклонных камерах и в ряде других случаев.

**Модель Прандтля.** Первую попытку учесть непостоянство коэффициента турбулентной вязкости и выразить его через характеристики турбулентного потока предпринял Л. Прандтль [343]. Его модель турбулентности основана на введении понятия пути смешения по аналогии с молекулярной длиной свободного пробега в кинетической теории газов. Выведенную им формулу можно получить различными способами, включая соображения размерности. Наиболее просто ее можно получить [73] на основе понятий о корреляционных моментах [145].

Для иллюстрации рассмотрим случай плоского потока. Представим корреляцию продольной и поперечной составляющих пульсации скорости в виде

$$-\overline{\rho u'v'} = \rho R_{uv} \sqrt{u'^2} \sqrt{v'^2}, \quad (5.26)$$

где  $R_{uv}$  – коэффициент корреляции.

Пусть

$$\sqrt{u'^2} = l_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad \sqrt{v'^2} = l_v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (5.27)$$

Тогда, подставляя выражения (5.27) в (5.26) и полагая длину  $l = R_{uv} l_u l_v$  получаем известную формулу Прандтля

$$\tau = -\overline{\rho u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad \mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (5.28)$$

Заметим, что длина пути смешения является неизвестной функцией, однако считают, что она не зависит от скорости и определяется геометрией потока. Для некоторых классов течений Л. Прандтль указал приемы определения длины пути смешения. Так, для пристеночных течений принято, что путь смешения прямо пропорционален расстоянию от стенки:

$$l = k_1 y. \quad (5.29)$$

Для расчета струйных течений он ввел предположение о постоянстве пути смешения в поперечном сечении потока и его пропорциональности ширине  $b$  зоны смешения:

$$l(x) = k_2 b(x), \quad (5.30)$$

где  $k_2$  - эмпирическая постоянная.

Позднее, анализируя экспериментальные данные Х. Рейхарда [345], Л. Прандтль предложил новую формулу для турбулентной кинематической вязкости [344]

$$v_t = \alpha b(u_{\max} - u_{\min}), \quad (5.31)$$

которая пригодна только для задач свободной турбулентности и является следствием (5.28) если положить  $l \approx b$  и заменить производную конечной разностью, т.е. принять  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \approx \frac{u_{\max} - u_{\min}}{b}$ .

Эти гипотезы, подтвержденные экспериментально, значительно упрощают теоретическое исследование турбулентных течений. Их применению для замыкания исходных уравнений Рейнольдса и расчету разнообразных струйных течений посвящено огромное число работ, начиная от простейших автомодельных задач [3, 16] и включая неавтомодельные задачи, решенные интегральным методом [79, 197]. Полученные с помощью этих формул профили осредненных скоростей хорошо согласуются с опытом [371, 372].

Учитывая аналогию механизма переноса количества движения, теплоты и вещества, корреляционные моменты второго порядка, появляющиеся в уравнениях энергии и турбулентной диффузии, можно представить в аналогичном (5.28) виде

$$\theta_i = -\rho \overline{v'_i T'} = a_t \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad m_i = -\rho \overline{v'_i C'} = a_g \frac{\partial C}{\partial x_i}. \quad (5.32)$$

Приведенные выше формулы широко используются при расчетах конкретных струйных течений.

**Модель Тейлора.** Кроме модели Прандтля известны и другие модели пути смешения, основанные на иных концепциях о сохраняющейся величине при переходе из одного слоя турбулентного потока в другой. К

числу таких моделей относится модель турбулентности Г.И. Тейлора [369], основанная на предположении, что свойством сохраняющейся переносимой субстанции в турбулентном потоке обладает завихренность, а не количество движения. В остальном модель Тейлора аналогична модели Прандтля.

Г.И.Тейлор рассматривал плоское установившееся движение, при котором все параметры течения зависят от поперечной координаты  $y$ . В этом случае из уравнения Рейнольдса следует

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = -\rho \overline{v' \omega'}, \quad (5.33)$$

где  $\omega'$  - пульсация вихря скорости,

$$\omega' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial u'}{\partial y}.$$

Как и при рассмотрении теории Прандтля, будем полагать

$$\overline{v' \omega'} = R_{v\omega} \sqrt{\overline{v'^2}} \sqrt{\overline{\omega'^2}}, \quad (5.34)$$

где  $R_{v\omega}$  – коэффициент корреляции. Тогда после подстановки (5.34) в (5.33) имеем

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = -\rho R_{v\omega} \sqrt{\overline{v'^2}} \sqrt{\overline{\omega'^2}}. \quad (5.35)$$

Если теперь ввести путь перемешивания для вихря  $l_\omega$  и поперечной составляющей скорости  $l_v$  и положить

$$\sqrt{\overline{v'^2}} = l_v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad \sqrt{\overline{\omega'^2}} = l_\omega \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y},$$

получим

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = -\rho R_{v\omega} l_v l_\omega \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Учитывая, что  $\bar{\omega} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$  и  $\partial \bar{\omega} / \partial y \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3}$ , получаем известную формулу Тейлора

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho l_0^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad \text{или} \quad -\overline{v' \omega'} = \rho l_0^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right|, \quad (5.36)$$

где  $l_0$  - характерная длина, аналогичная длине  $l$  в формуле Прандтля, которая пока тоже неизвестна,  $l_0^2 = -R_{v\omega} l_v l_\omega$ .

Вследствие того, что для пространственного течения составляющие завихренности не сохраняются при переносе, модель Тейлора в таком виде применима лишь для расчета плоских течений. В литературе имеются обобщения теорий Прандтля и Тейлора на случай пространственных течений.

Первая модель Прандтля (5.28) и модель Тейлора не могут описать процессы турбулентного переноса в точках, где  $\overline{\partial u} / \partial y = 0$  и  $\partial \overline{T} / \partial y = 0$ , так как, основываясь на модели турбулентности Буссинеска, в этом случае  $\nu_t = 0$ ,  $\alpha_t = 0$ , в то время как в действительности они должны иметь конечную величину. Вторая модель Прандтля лишена этого недостатка.

**Модель Кармана.** Попытка получить приемлемое к широкому кругу задач выражение для длины пути смешения сделана Т. Карманом [289], сформулировавшим гипотезу подобия, которая основывается на предположении, что структура турбулентного потока в разных точках различается лишь масштабами скорости и длины.

Вывод формулы Кармана для турбулентного трения достаточно подробно освещен в ряде известных работ [133, 226], поэтому приведем лишь основной результат, получаемый формальным способом.

Если предположить, что длина пути смешения  $l$  в формуле Прандтля (5.28) зависит от двух производных  $\overline{\partial u} / \partial y$  и  $\partial^2 \overline{u} / \partial y^2$ , то из соображений размерности следует

$$l = \text{const} \frac{\overline{\partial u} / \partial y}{\partial^2 \overline{u} / \partial y^2}. \quad (5.37)$$

Эта зависимость была в значительной мере подтверждена опытами И. Никурадзе. Подстановка выражения (5.37) в (5.28) приводит к известной [224] формуле Кармана для турбулентного трения:

$$\tau = \alpha \rho \left( \frac{\overline{\partial u}}{\partial y} \right)^4 / \left( \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} \right), \quad (5.38)$$

где  $\alpha$  - опытная константа.

Формула Кармана для турбулентного трения широко используется при исследовании пристеночной турбулентности, в том числе для турбулентного пограничного слоя и течений в трубах и каналах [132, 226]. Однако для свободных турбулентных течений (струи) ее применение затруднительно, так как профиль скорости в этих случаях имеет точку перегиба, поэтому в ней  $\partial^2 \overline{u} / \partial y^2 = 0$ , следовательно,  $\tau$  обращается в бесконечность, что не соответствует действительности.

**Модель Рейхарда.** Х. Рейхард предложил свою модель применительно к свободным турбулентным струям. Учитывая экспериментальный факт, что профиль осредненной продольной скорости в поперечном сечении



автомодельной области смещения струи хорошо аппроксимируется кривой Гаусса, Х. Рейхард предположил, что дифференциальное уравнение турбулентного переноса должно быть идентично уравнению молекулярной диффузии. Это привело его к гипотезе о пропорциональности турбулентных напряжений градиенту продольной составляющей количества движения.

Для иллюстрации этих идей рассмотрим плоскую или осесимметричную струю. Если отбросить члены с градиентом давления и пренебречь молекулярной вязкостью, то в предположении стационарности уравнение Рейнольдса принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} (y^j \overline{u'v'}) = 0,$$

где  $j = 0$  для плоской струи и  $j = 1$  для круглой струи.

Если же величина  $\overline{u^2}$  следует Гауссовому закону, то она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} = \Lambda(x) \frac{\partial^2 \overline{u^2}}{\partial y^2},$$

где  $\Lambda(x)$  - параметр, имеющий размерность длины и, по предположению, зависящий лишь от продольной координаты  $x$ .

Чтобы оба уравнения были эквивалентны, необходимо постулировать  $\overline{u'v'} = -\Lambda(x) \partial \overline{u^2} / \partial y$ . Это соотношение Х. Рейхард назвал законом переноса импульса. Таким образом, при сделанном допущении уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} = \Lambda(x) \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} \right).$$

С помощью этого уравнения можно решать задачу о распространении турбулентной струи, причем, для получения универсального профиля для продольной скорости в поперечном сечении струи требуется предположить, что  $\Lambda = cx$ . Несмотря на то, что эта теория не учитывает физический механизм турбулентного переноса, с ее помощью удастся получить решение ряда задач о простейших струйных течениях, удовлетворительно согласующихся с опытом.

## 5.5. Анализ моделей турбулентности первого приближения

Во всех моделях турбулентности первого приближения, по существу, заложена идея линейной зависимости неизвестных вторых моментов от градиентов осредненных скорости, температуры или концентрации примеси. Совершенно очевидно, что пределы применимости этих моделей

ограничены. Однако выполненные многочисленные экспериментальные исследования показали, что указанные градиентные модели турбулентности в основном правильно отражают наиболее важные особенности осредненных характеристик турбулентных течений, что обусловило их широкое использование в практических расчетах. Надо отметить, что для сравнительно простых течений разные методы при соответствующем подборе констант дают примерно одинаковые результаты по распределению поля скоростей, но благодаря определенной простоте и удовлетворительному совпадению результатов расчета с данными эксперимента в широком диапазоне чисел Рейнольдса некоторое предпочтение в практике расчетов свободных турбулентных течений получили первая и вторая формулы Прандтля.

Конкретное применение градиентных моделей для расчета турбулентных течений в трубах, каналах, пограничных слоях, струях и следах приведено в ряде работ [1, 4, 16, 64, 78-80, 132, 135, 226]. В то же время следует отметить, что с помощью моделей турбулентности первого приближения можно получить информацию только об осредненных характеристиках потока, но не о характеристиках турбулентности. Исследования последних лет позволили значительно углубить представления о механизме турбулентного переноса и в ряде случаев обнаружили определенные недостатки градиентных моделей турбулентности первого приближения. Эти модели хорошо применимы для описания лишь простейших медленно изменяющихся прямолинейных течений жидкости и газа. Действительное же поведение турбулентных течений не всегда удается описать указанными моделями турбулентности и результаты расчета по ним часто не согласуются с экспериментальными наблюдениями. Для преодоления возникших трудностей в последние годы рядом авторов предложены более сложные и более общие модели турбулентных течений, которые кратко будут рассмотрены в шестой главе. Однако и этот сравнительно новый путь решения проблем турбулентности пока по-прежнему сталкивается с принципиальными трудностями построения замкнутой системы уравнений турбулентных течений. Поэтому, несмотря на имеющиеся недостатки, многие из старых градиентных моделей турбулентности пока широко используются в практике инженерных расчетов.

## ГЛАВА 6

# ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПУЛЬСАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ

### 6.1. Общие тенденции в развитии теории турбулентности

Долгое время основу исследования турбулентных течений составляли уравнения переноса для осредненных величин, описанные в пятой главе, и модели турбулентности первого приближения, т.е. градиентные модели, обладающие определенной простотой, но не лишенные и недостатков. Такой подход в какой-то мере удовлетворял запросам практики при рассмотрении определенного класса задач. Однако полуэмпирический характер проблемы замыкания и необходимость теоретических расчетов сложных течений требовали разработки более совершенных моделей турбулентного переноса.

Определенный прогресс в этом направлении связан со статистическим подходом к проблеме турбулентности, учитывающим пульсационную структуру турбулентного потока. Значительные успехи здесь были достигнуты благодаря работам Л.В. Келлера, А.А. Фридмана [291], Г.И. Тейлора [368], А.Н. Колмогорова [110, 111], А.М. Обухова [152, 153], Л. Прандтля [343], Б.И. Давыдова [96, 97] и др. Огромный вклад в разработку этого направления внес А.Н. Колмогоров [110, 111], который понятию изотропной турбулентности придал более широкий смысл. Он ввел корреляционные функции вида  $B = \overline{(\nu'_2 - \nu'_1)^2}$  и назвал турбулентность локально изотропной, если эти корреляционные функции в некоторой ограниченной области остаются неизменными при поворотах и зеркальных отображениях осей. В достаточно малой области  $r \ll L$ , где  $r$  - расстояние между рассматриваемыми точками 1 и 2,  $L$  - масштаб турбулентности,

$$L = \int_0^r R_{uv} dr,$$

где  $R_{uv}$  - корреляционная функция,

$$R_{uv} = \frac{\overline{v'_1 v'_2}}{\sqrt{\overline{v'^2_1}} \sqrt{\overline{v'^2_2}}},$$

такая локальная изотропность существует в любом турбулентном потоке, если только число Рейнольдса  $Re_t = \sqrt{kL} / \nu$  достаточно велико.

Сформулированные А.Н. Колмогоровым законы и гипотезы в теории локальной изотропной турбулентности послужили основой дальнейшего развития теории турбулентности. Ему же принадлежит идея описывать турбулентность такими локальными характеристиками, как кинетическая энергия турбулентности  $k$  ее масштаб  $L$ .

На этой основе А.Н. Колмогоров [110] и Л. Прандтль [343] заложили новое направление в теории турбулентности и предложили метод описания турбулентных течений с поперечным сдвигом на основе совместного использования уравнений осредненного движения и дифференциального уравнения переноса турбулентной энергии с соответствующими гипотезами, необходимыми для получения замкнутой системы уравнений. В дальнейшем их идеи развивались как отечественными, так и зарубежными авторами, но существенный вклад в эту проблему был внесен лишь в 1951 г. И. Ротта [353].

Принципиальную трудность на пути развития этого направления и практических методов расчета по-прежнему составляли проблема замыкания и связанное с ней моделирование неизвестных корреляционных членов. Кроме того, этот подход требовал решения системы сложных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

В 60-х годах развитие науки и техники выдвигает перед исследователями ряд новых более сложных задач, которые не всегда могли быть решены в рамках старых представлений. С одной стороны, эти обстоятельства привели к созданию мощных экспериментальных стендов, оснащенных комплектами современной измерительной техники, что позволило выполнить тонкие физические исследования по структуре турбулентных течений и в какой-то степени углубить знания о механизме турбулентного переноса. С другой стороны, одновременно с этим глубже развивались теоретические исследования по изучению турбулентности, совершенствовались численные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и возрастали возможности электронно-вычислительной техники. Эти достижения привели к возможности удовлетворительного моделирования некоторых неизвестных корреляционных членов и численной реализации сложных моделей турбулентности, включающих уравнение переноса турбулентной кинетической энергии и ее интегральный масштаб. Такой подход в определенных случаях позволил более точно описать развитие

турбулентных течений и соответствующие процессы переноса, так как он уже учитывал пульсационную структуру турбулентного потока.

В дальнейшем благодаря усилиям таких авторов, как Б.И. Давыдов [96, 97], И.К. Ротта [177], П. Бредшоу [38-40, 240-247], Д.Б. Сполдинг [366], Г.С. Глушко [82 - 84], Б.Э. Лоундер [303-308], К. Ханжалик и Б.Э. Лоундер [277], В. Роди и Д.Б. Сполдинг [352], Е. Наудашер [330], Б.И. Дейли и Ф.Х. Харлоу [261, 262], А.Н. Секундов [189], В.С. Левеллен, М.И. Теске [129, 312, 313], К. Дональдсон [266, 267], П.Г. Саффмен [185, 355, 356], Т.Л. Ламли [315, 316 ], Ф.Х. Харлоу, П.И. Накояма [279 ], В.В. Ни и Л.С.Г. Коважный [331], М. Вольштейн [380], Г.Л. Меллор [141, 319-321], Б.А. Коловандин [112, 113], В. Роди [349-352], Н.И. Акатнов [5, 6], К.Е. Джаугаштин [98, 99], К.И. Чжен [252, 253] и других, появились новые более сложные модели турбулентности, в которых наряду с уравнениями переноса для осредненных величин и переноса турбулентной энергии с уравнением для масштаба турбулентности фигурируют дополнительные дифференциальные уравнения переноса корреляционных моментов и других локальных характеристик турбулентного потока, например, турбулентной вязкости  $\nu_t$  и скорости диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon$ . Следует отметить, что почти все модели турбулентности первоначально были предложены применительно к описанию полей скорости и переносу импульса и лишь несколько позднее аналогичные модели применены к расчету полей температур и концентраций примеси.

Описание турбулентного движения на основе уравнений переноса для осредненных характеристик и дополнительных дифференциальных уравнений переноса вторых моментов и других турбулентных характеристик вида  $k, L, \varepsilon, \tau, \nu_t$  следует считать описанием во втором приближении и соответственно моделями второго приближения или дифференциальными параметрическими моделями турбулентности. основополагающие идеи моделей второго приближения, по существу, сформулированы в работах А.Н. Колмогорова, Л. Прандтля и Б.И. Давыдова. Все последующие работы в этой области в основном связаны с различного рода уточнениями аппроксимации неизвестных членов исходных уравнений, решением конкретных задач и определением неизвестных констант моделей.

Накопленный опыт численных расчетов на основе моделей турбулентности второго приближения показал, что эти модели, в принципе, способны довольно успешно описывать турбулентные характеристики, включая вторые моменты, в достаточно сложных турбулентных течениях. С их помощью удалось расширить круг задач, поддающихся решению, включая неавтономные задачи и пульсационные характеристики турбулентного течения.

Большое практическое значение и прогресс в области численных методов обусловили быстрое развитие новых дифференциальных

параметрических моделей турбулентности. В настоящее время методы расчета турбулентных течений на основе моделей второго приближения развиваются многими исследователями, однако возможности этих методов еще полностью не раскрыты. Необходимы дополнительные тонкие экспериментальные исследования в этой области, прежде чем они надежно войдут в практику инженерных расчетов. Однако на данном этапе развития теории турбулентности это, по-видимому, единственный конструктивный путь для решения сложных задач турбулентности.

Отдавая себе отчет в невозможности охватить весь материал по рассматриваемому вопросу, мы все же уделим достаточно внимания его идейной стороне и выводу точных дифференциальных уравнений переноса для корреляционных моментов второго порядка и локальных характеристик турбулентности, лежащих в основе современных моделей турбулентности второго приближения.

## 6.2. Уравнения переноса пульсационных параметров турбулентного потока

Прежде чем приступить к выводу дополнительных дифференциальных уравнений переноса, используемых в моделях турбулентности второго приближения, получим основные уравнения переноса для турбулентного пульсационного движения, причем для простоты будем считать жидкость несжимаемой, но учитывать в приближении Буссинеска температурную неоднородность или стратификацию среды. С этой целью выпишем основные уравнения движения температурно-стратифицированной жидкости, т.е. уравнения неразрывности и Навье-Стокса, а также уравнения переноса теплоты и вещества в прямоугольной декартовой системе координат в следующей тензорной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0; \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= F_i + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + v_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} &= \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial q_{nk}}{\partial x_k} + \frac{E}{\rho_0 c_p} + \frac{Q}{c_p}; \\ \frac{\partial c}{\partial t} + v_k \frac{\partial c}{\partial x_k} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q_{ck}}{\partial x_k} + Q_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где  $F_i = g_i \beta \theta$  - объемные силы плавучести,  $p_{ik}$  - тензор вязких напряжений;  $q_{nk}$  и  $q_{ck}$  - потоки тепла и вещества;  $Q$  и  $Q_1$  - дополнительные источники соответственно теплоты и вещества.

Вспомяная, что в случае несжимаемой жидкости

$$\left. \begin{aligned} p_{ik} &= -p\delta_{ik} + \rho_0 \nu \Phi_{ik}; \quad \Phi_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}; \\ E &= \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2; \quad q_{nk} = a \frac{\partial \theta}{\partial x_k}; \quad q_{ck} = D \frac{\partial c}{\partial x_k}, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

после подстановки этих выражений в (6.1) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0; \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= F_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -\frac{p}{\rho_0} \delta_{ik} + \nu \Phi_{ik} \right); \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + v_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( a \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) + \frac{E}{\rho_0 c_p} + \frac{Q}{c_p}; \\ \frac{\partial c}{\partial t} + v_k \frac{\partial c}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( D \frac{\partial c}{\partial x_k} \right) + Q_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

где коэффициент температуропроводности  $a = \lambda / \rho_0 c_p$ .

Напомним, что уравнения (6.3) записаны относительно актуальных мгновенных значений гидродинамических величин. Наряду с этим выпишем аналогичную систему уравнений относительно осредненных величин турбулентного потока, т.е. расширенную систему уравнений Рейнольдса для случая стратифицированных сред,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} &= \bar{F}_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -\frac{\bar{p}}{\rho_0} \delta_{ik} + \nu \bar{\Phi}_{ik} - \overline{v'_i v'_k} \right); \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( a \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} - \overline{v'_k \theta'} \right) + \frac{\bar{E}'}{\rho_0 c_p} + \frac{Q}{c_p}; \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} - \overline{v'_k c'} \right) + Q_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{E} &= \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right)^2; \quad \bar{E}' = \mu \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right)^2; \\ \bar{\Phi}_{ik} &= \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Если в системе уравнений (6.3) представить мгновенные значения скорости, давления, температуры и так далее в виде суммы осредненных и пульсационных величин, т.е.

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i; \quad p = \bar{p} + p'; \quad \theta = \bar{\theta} + \theta'; \quad F_i = \bar{F}_i + F'_i; \quad E = \bar{E} + E',$$

и соответственно вычесть из нее систему (6.4), то получим следующую систему уравнений относительно пульсационных характеристик турбулентного потока:

$$\frac{\partial v'_j}{\partial x_j} = 0; \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \bar{v}'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \bar{v}_i v'_k + \bar{v}_k v'_i + v'_i v'_k + \left( \frac{p'}{\rho_0} \right) \delta_{ik} - \nu \Phi'_{ik} \right] = F'_i + \frac{\partial \bar{v}'_i \partial \bar{v}'_k}{\partial x_k}; \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} + v'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}'_k \theta'}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( a \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right) + \frac{E' - \bar{E}'}{\rho_0}; \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + v_k \frac{\partial c'}{\partial x_k} + v'_k \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial c'}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}'_k c'}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( D \frac{\partial c'}{\partial x_k} \right), \quad (6.9)$$

где

$$\Phi'_{ik} = \Phi_{ik} - \bar{\Phi}_{ik} = \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i}. \quad (6.10)$$

Эта система уравнений пульсационного движения используется ниже для вывода дифференциальных уравнений переноса интересующих нас турбулентных характеристик. Техника вывода будет продемонстрирована на примерах вывода уравнений переноса вторых корреляционных моментов  $\overline{v'_i v'_j}$ ,  $\overline{v'_i \theta'}$ ,  $\overline{\theta'^2}$  и уравнений переноса кинетической энергии турбулентности  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$ .



### 6.3. Уравнения переноса вторых корреляционных моментов пульсаций скорости (напряжений Рейнольдса)

Уравнения Рейнольдса и турбулентного переноса теплоты показывают, что для описания стратифицированных течений большой интерес представляют неизвестные одноточечные корреляционные моменты второго порядка  $\overline{v'_i v'_j}$  и  $\overline{v'_i \theta'}$ , т.е. вторые моменты пульсаций скорости, через которые выражается турбулентное трение  $\tau_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j}$  и вторые смешанные моменты пульсаций скорости и температуры, выражающие турбулентный поток теплоты  $q_T = -\rho \overline{v'_i \theta'}$ .

Поэтому полученные системы уравнений, описывающих динамику этих моментов в турбулентном стратифицированном потоке, имеют принципиальное значение для проблемы замыкания и для более глубокого понимания процессов турбулентного переноса. Ниже, на основе уравнений пульсационного турбулентного движения и элементарных операций дифференцирования и осреднения по Рейнольдсу, будут получены точные дифференциальные уравнения переноса для одноточечных корреляционных моментов второго порядка.

Для вывода уравнений переноса напряжений Рейнольдса или вторых моментов пульсации скорости  $\overline{v'_i v'_j}$ , которые определяют турбулентный поток импульса, рассмотрим локальное изменение во времени интересующей нас величины и воспользуемся общей формулой дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v'_i v'_j}) = \overline{v'_i} \frac{\partial v'_j}{\partial t} + \overline{v'_j} \frac{\partial v'_i}{\partial t}. \quad (6.11)$$

Легко видеть, что правую часть соотношения (6.11) можно преобразовать с помощью основных уравнений пульсационного движения (6.6) и (6.7). С этой целью выпишем уравнения для пульсационных составляющих скорости  $v'_i$  и  $v'_j$ . В соответствии с (6.7) имеем

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{v'_i v'_k} + \overline{v'_k v'_i} + v'_i v'_k + \left( \frac{p'}{\rho_0} \right) \delta_{ik} - \nu \Phi'_{ik} \right] = F'_i + \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k}; \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial v'_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{v'_j v'_k} + \overline{v'_k v'_j} + v'_j v'_k + \left( \frac{p'}{\rho_0} \right) \delta_{jk} - \nu \Phi'_{jk} \right] = F'_j + \frac{\partial \overline{v'_j v'_k}}{\partial x_k}; \quad (6.13)$$

Учитывая структуру выражения (6.11), умножим уравнение (6.12) на  $v'_j$ , а (6.13) на  $v'_i$  и сложим их почленно. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(v'_i v'_j) = & -v'_i v'_k \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - v'_j v'_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial(\bar{v}_k v'_i v'_j)}{\partial x_k} - \frac{\partial(v'_i v'_j v'_k)}{\partial x_k} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{p'}{\rho_0} v'_i \delta_{ik} + \frac{p'}{\rho_0} v'_j \delta_{jk} \right) + \frac{p'}{\rho_0} \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \delta_{ik} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \delta_{jk} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} (\nu \Phi'_{jk} v'_i + \nu \Phi'_{ik} v'_j) - \nu \Phi'_{jk} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} - \nu \Phi'_{ik} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + \\ & + F'_i v'_j + F'_j v'_i + v'_j \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k} + v'_i \frac{\partial \overline{v'_j v'_k}}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

В процессе преобразования здесь использовались следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k v'_i v'_j) &= v'_i \frac{\partial(\bar{v}_k v'_j)}{\partial x_k} + v'_j \frac{\partial(\bar{v}_k v'_i)}{\partial x_k}; \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (v'_i v'_j v'_k) &= v'_i \frac{\partial(v'_j v'_k)}{\partial x_k} + v'_j \frac{\partial(v'_i v'_k)}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Учитывая равенство

$$\nu \left( v'_j \frac{\partial \Phi'_{ik}}{\partial x_k} + v'_i \frac{\partial \Phi'_{jk}}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \frac{\partial v'_i v'_j}{\partial x_k} \right) - 2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \quad (6.16)$$

и выполняя операцию осреднения над уравнением (6.14) в соответствии с правилами Рейнольдса, после группировки соответствующих слагаемых получаем точное дифференциальное уравнение переноса вторых моментов пульсации скорости (напряжений Рейнольдса):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j} + \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k}}{\alpha} = & \frac{\overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \beta \overline{g_i v'_j \theta} + \overline{g_i v'_i \theta}}{I} - \\ & \frac{\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k} + \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k}}{II} + \frac{\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k} + \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k}}{III} - \\ & \frac{\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k} + \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k}}{IV} - 2\nu \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Здесь третий член справа получен заменой объемных сил их выражением  $F_i = g_i \beta \theta'$  для случая движения стратифицированной жидкости. Учитывая прямую связь корреляционных моментов второго порядка пульсации скорости с тензором напряжений  $\tau_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j}$ , можно сказать, что I выражает конвективный перенос напряжений Рейнольдса, а члены, находящиеся в правой части уравнения, имеют следующий физический смысл: II – генерация или работа напряжений Рейнольдса за счет градиента средней скорости и сил плавучести; III – турбулентная диффузия; IV – диссипация вследствие эффектов вязкости.

Полученные уравнения переноса напряжений Рейнольдса (6.17) отражают основную физическую сущность турбулентного переноса. Они в известном смысле являются точными, но, как и уравнения Рейнольдса, содержат ряд неизвестных корреляционных членов. Если попытаться выразить эти неизвестные величины с помощью уравнений для третьих моментов и выше, то в силу нелинейности уравнений движения в них снова будут появляться неизвестные члены.

Таким образом, хотя мы и получили шесть дополнительных уравнений для вторых моментов пульсаций скорости, но они также содержат новые неизвестные корреляционные члены, однако их структура уже иная и в некоторых случаях для них удастся получить надежные оценки или вывести соответствующие дифференциальные уравнения переноса, описывающие их поведение в турбулентном потоке.

## **6.4. Уравнения переноса кинетической энергии турбулентности и градиентное число Ричардсона**

Для математического описания и расчета характеристик турбулентных течений с поперечным сдвигом широко используется дифференциальное уравнение переноса кинетической энергии турбулентности, впервые предложенное А.Н. Колмогоровым [110, 111] и Л. Прадтлем [343]. Это уравнение в свое время составило основу построения новых моделей турбулентности второго приближения и по прежнему неизменно входит в общую систему уравнений и в других более сложных современных параметрических моделях турбулентности. Его большая значимость объясняется тем, что это уравнение легко и наглядно выводится из исходных уравнений, поддается физической интерпретации и его отдельные члены и группы членов удастся измерить экспериментально в течениях определенного класса.

Основная гипотеза Колмогорова, как известно, состоит в предположении, что существенной характеристикой турбулентного потока является удельная кинетическая энергия пульсационного движения

$$k = \frac{v_i'^2}{2} = \frac{1}{2} v_i' v_i' = \frac{1}{2} (v_i'^2 + v_2'^2 + v_3'^2),$$

а статистический режим мелкомасштабной турбулентности при больших числах Рейнольдса является универсальным и определяется лишь двумя параметрами – коэффициентами турбулентной вязкости  $\nu_t$  и средней скоростью диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon$  через которые можно определить турбулентную энергию и, следовательно, напряжения Рейнольдса, что приводит к получению замкнутой исходной системы уравнений.

Для вывода уравнения переноса турбулентной кинетической энергии  $k$  обратимся к уравнениям переноса напряжений Рейнольдса (6.17). В частном случае, когда  $i = j$ , это уравнение превращается в уравнение переноса для  $k$ . Поэтому, выполнив операцию свертки над уравнением (6.17), сразу же получим точное уравнение переноса для удельной кинетической энергии турбулентности в виде

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{v_k} \frac{\partial k}{\partial x_k}}_I = \underbrace{-\overline{v_i' v_k'} \frac{\partial \overline{v_i'}}{\partial x_k}}_{II} + \underbrace{g_i \beta \overline{v_i' \theta'}}_{III} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{v_k' \left( \frac{p'}{\rho_0} \right)} + \overline{v_k' k} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right]}_{IV} - \underbrace{\overline{v_i' \left( \frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \right)^2}}_{IV} \quad (6.18)$$

Уравнение (6.18) часто называют уравнением баланса турбулентной энергии [42, 145, 216]. Физический смысл отдельных членов этого уравнения хорошо известен [216]. Левый член уравнения (6.18) описывает сумму локального и конвективного переносов турбулентности со средней скоростью потока в данной точке, два первых члена в правой части описывают генерацию турбулентности при неоднородной средней скорости и наличии стратификации, следующий член – турбулентную диффузию тремя различными механизмами и последний член – описывает диссипацию турбулентности.

Второй член в правой части уравнения (6.18), т.е.  $g_i \beta \overline{v_i' \theta'}$ , характерен для стратифицированных турбулентных течений. Он описывает взаимные превращения энергии турбулентных пульсаций и потенциальной энергии в поле сил тяжести, обусловленных неоднородностью температуры. Эти члены играют существенную роль, если их вклад сопоставим с другими членами, как например, при описании движений в атмосфере, океане и других случаях.

Если вертикальная стратификация устойчива, то вертикальные перемещения турбулентных элементов сопровождаются затратой энергии на работу против архимедовых сил плавучести. В случае неустойчивой стратификации, наоборот, при вертикальных перемещениях турбулентных

объемов работа архимедовых сил совершается за счет потенциальной энергии стратификации.

Объединим стоящие в правой части уравнения (6.18) члены, выражающие генерацию, тогда получим

$$-\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} + g_i \beta \overline{v'_i \theta'} = -\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} (1 - Rf). \quad (6.19)$$

Безразмерный параметр

$$Rf = g_i \beta \frac{\overline{v'_i \theta'}}{\overline{v'_i v'_k} \partial \overline{v'_i} / \partial x_k} \quad (6.20)$$

называют динамическим числом Ричардсона, которое характеризует влияние стратификации на перенос турбулентной кинетической энергии. При некоторых оговорках выражение (6.19) может служить критерием существования генерации турбулентности в стратифицированном турбулентном потоке со сдвигом. Действительно, если  $Rf \rightarrow 0$ , то этот член в уравнении баланса турбулентной энергии обращается в нуль, а, значит, турбулентность не генерируется.

Если для турбулентного трения и потока теплоты принять гипотезу градиентной диффузии, т.е. положить

$$-\overline{v'_i v'_k} = -\frac{2}{3} k \delta_{ik} + \nu_t \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_i} \right); \quad -\overline{v'_i \theta'} = a_t \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}, \quad (6.21)$$

и подставить выражения (6.21) в (6.20), то приходим к градиентному представлению числа Ричардсона в следующем виде:

$$Ri = \frac{g_i \beta \partial \overline{\theta} / \partial x_k}{Pr \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} \left[ \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{k}{\nu_t} \delta_{ik} \right]}, \quad Pr_t = \frac{\nu_t}{a_t}. \quad (6.22)$$

Рассмотрим двумерный турбулентный стратифицированный вертикальный поток с поперечным сдвигом, направленный вдоль оси  $x$ , и заменим в (6.22) значения производных их конечными разностями, т.е. положим

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\overline{u_1} - \overline{u_2}}{b_d}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\overline{\theta_1} - \overline{\theta_2}}{b_T} \quad (6.23)$$

(индексы 1 и 2 означают значения скорости и температуры на границах соответственно динамического  $b_d$  и теплового  $b_T$  слоев). Тогда приходим к следующему выражению для числа Ричардсона.

$$Ri = \frac{1}{Pr_t} \frac{b_d^2}{b_T^2} \frac{g\beta b_T (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)}{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}. \quad (6.24)$$

Если положить, что  $b_d = \sqrt{Pr_t} b_T$ , то (6.24) примет вид

$$Ri = g\beta b_T (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) / (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2. \quad (6.25)$$

При  $Pr_t = 1$  имеем  $b_d = b_T$  и выражение (6.24) для  $Ri$  превращается в широко известную формулу для интегрального числа Ричардсона [142, 197, 204]. Если температурная неоднородность отсутствует ( $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2$ ), то  $Ri=0$ .

Таким образом, строгое определение градиентного числа Ричардсона вытекает из рассмотрения уравнения баланса турбулентной энергии (6.18) и описывается выражением (6.20). Другие формулы для числа Ричардсона вида (6.22) и (6.25) носят частный характер и имеют место при определенных допущениях.

## 6.5. Уравнения переноса вторых смешанных корреляционных моментов пульсаций скорости и температуры

В уравнения переноса напряжений Рейнольдса (6.17) и турбулентной энергии (6.18) входит неизвестный корреляционный член  $\overline{v'_i \theta'}$ , выражающий поток теплоты (или массы). Для второго момента пульсации скорости и температуры можно также получить дифференциальное уравнение переноса, подобно тому как было выведено уравнение переноса для  $\overline{v'_i v'_j}$ .

Для этой цели, как и выше, воспользуемся общей формулой дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{v'_i \theta'}) = \overline{v'_i} \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \theta' \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial t}. \quad (6.26)$$

Рассматривая правую часть выражения (6.26) видим, что ее можно преобразовать с помощью основных уравнений пульсационного движения. Действительно, если умножить уравнение (6.8) на  $v'_i$ , а (6.7) на  $\theta'$  и сложить их, то после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{v'_i \theta'} = & -\overline{v'_i} \frac{\partial \overline{v'_k} \theta'}{\partial x_k} - \theta' \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k} - \overline{v'_i} \frac{\partial \overline{\theta' v'_k}}{\partial x_k} - \theta' \frac{\partial \overline{v'_k v'_i}}{\partial x_k} - \overline{v'_i} \frac{\partial \overline{\theta' v'_k}}{\partial x_k} - \\ & - \theta' \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k} - \overline{v'_i} \frac{\partial \overline{v'_k \theta'}}{\partial x_k} + \overline{v'_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( a \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right) + \overline{v'_i} \frac{(E - E')}{\rho_0} - \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$-\theta' \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{p'}{\rho_0} \right) \delta_{ik} + \nu \frac{\partial \Phi'_{ik} \theta'}{\partial x_k} - \nu \Phi'_{ik} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} + \theta' F'_i + \theta' \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k}.$$

Используя для преобразования уравнений (6.27) соотношение  $F'_i = g_i \beta \theta'$  и уравнение неразрывности для осредненного и пульсационного движения

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} = 0; \quad \frac{\partial v'_k}{\partial x_k} = 0,$$

а также очевидные соотношения

$$\frac{\partial (\bar{v}_k v'_i \theta')}{\partial x_k} = v'_i \frac{\partial \bar{v}_k \theta'}{\partial x_k} + \theta' \frac{\partial \bar{v}_k v'_i}{\partial x_k};$$

$$\frac{\partial (v'_i v'_k \theta')}{\partial x_k} = v'_i \frac{\partial v'_k \theta'}{\partial x_k} + \theta' \frac{\partial v'_k v'_i}{\partial x_k},$$

после операции осреднения уравнения (6.27) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{v'_i \theta'} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}'_i \theta'}{\partial x_k} = & -\overline{v'_k \theta'} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} + g_i \beta \overline{\theta'^2} - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v'_i v'_k \theta'} - \\ & - \frac{\bar{\theta}'}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + a \overline{v'_i \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_k \partial x_k}} + \nu \overline{\theta' \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k \partial x_k}}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Уравнение (6.28) представляет собой точное уравнение переноса вторых моментов пульсации скорости и температуры, описывающее механизм переноса потока скалярной субстанции в турбулентном сдвиговом течении.

По аналогии с уравнением (6.18) можно сказать, что левая часть уравнения (6.28) выражает локальный и конвективный перенос вторых моментов пульсаций скорости и температуры, а члены, находящиеся в правой части, - соответственно генерацию, диффузию и диссипацию. Заметим, что и для этого уравнения характерным является наличие новых неизвестных корреляционных членов, порождающих проблему замыкания.

## 6.6. Уравнения переноса вторых моментов пульсаций температуры

В уравнение переноса вторых смешанных моментов пульсаций скорости и температуры (6.28) входит средний квадрат скалярной величины  $\overline{\theta'^2}$ . Выведем уравнение переноса для этого момента пульсации температуры. С этой целью, как и ранее, воспользуемся общей формулой дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta'^2 = 2\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial t}. \quad (6.29)$$

Умножив уравнение для пульсации температуры (6.8) на  $2\theta'$  и подставив полученное выражение в правую часть соотношения (6.29), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta'^2}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \theta'^2}{\partial x_k} = & -2v'_k \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} - v'_k \frac{\partial \theta'^2}{\partial x_k} - 2\theta' \frac{\partial \overline{v'_k \theta'}}{\partial x_k} + \\ & + 2\theta' \frac{\partial}{\partial x_k} \left( a \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right) + 2\theta' (E - E'). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( a \frac{\partial \theta'^2}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( 2a\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right) = 2a \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} + 2a\theta' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_k^2},$$

и выполняя операцию осреднения над уравнением (6.30), окончательно находим

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} = -2\overline{v'_k \theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{v'_k \theta'^2} - a \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} \right) - 2a \left( \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \right). \quad (6.31)$$

Уравнение (6.31) представляет собой точное дифференциальное уравнение переноса второго момента пульсации температуры  $\overline{\theta'^2}$ . По аналогии с предыдущим, члены, стоящие в правой части этого уравнения, также можно интерпретировать соответственно как генерацию, диффузию и диссипацию. Заметим, что термин «точное» употребляется здесь в том смысле, чтобы отличить полученные уравнения от приближенных модельных уравнений, рассматриваемых в восьмой главе.

## 6.7. Уравнения переноса диссипации турбулентной энергии

В уравнение переноса турбулентной энергии (6.18) входит слагаемое описывающее диссипацию  $\varepsilon$

$$\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} = \nu \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right)^2 = \varepsilon. \quad (6.32)$$

В моделях турбулентности второго приближения оно играет большую роль, так как позволяет с помощью эмпирического соотношения

$$L \approx k^{2/3} \varepsilon^{-1}, \quad (6.33)$$



следующего из соображений размерности, исключить из рассмотрения неизвестный гипотетический масштаб турбулентности  $L$ . Этот подход открывает новые возможности в проблеме замыкания, если указан способ определения величины  $\varepsilon$ .

Выведем уравнение переноса для диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon$ , которое впервые получил Б.И. Давыдов [96, 97]. С этой целью рассмотрим предварительно выражение

$$\nu \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right)^2. \quad (6.34)$$

Поскольку нас интересует скорость изменения диссипации турбулентной энергии в стратифицированном потоке, то как и прежде воспользуемся общей формулой дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \nu \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] = 2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) = 2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v'_i}{\partial t} \right). \quad (6.35)$$

Далее преобразуем правую часть выражения (6.35) с помощью уравнения (6.7) для пульсации скорости. Подставляя (6.7) в (6.35), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \nu \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] = & -2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}'_i v'_k + \bar{v}'_k v'_i + v'_i v'_k + \right. \\ & \left. + \frac{p'}{\rho_0} \delta_{ik} - \nu \Phi'_{ik}) - F'_i - \frac{\partial \bar{v}'_i v'_k}{\partial x_k} \right]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Выполняя операцию дифференцирования в правой части выражения (6.36) и помня, что в силу уравнения неразрывности  $\partial \bar{v}_k / \partial x_k = \partial v'_k / \partial x_k = 0$ , после соответствующих преобразований и операции осреднения с учетом (6.32) получаем следующее точное дифференциальное уравнение переноса для диссипации турбулентной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = & -2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - 2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} - \\ & - 2\nu \bar{v}'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k \partial x_j} - 2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \bar{v}'_k \varepsilon + \frac{2\nu}{\rho_0} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial p'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] + 2\nu \beta g_i \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Сопоставляя полученное уравнение с уравнением переноса кинетической энергии турбулентности (6.18), видим, что члены, стоящие в правой части (6.37), можно по аналогии интерпретировать как генерацию, диффузию и диссипацию посредством взаимодействия с градиентами соответствующих гидродинамических величин.

Следует отметить, что в решениях практических задач при достаточно больших числах Рейнольдса в полученных дополнительных дифференциальных уравнениях переноса можно пренебречь некоторыми членами, зависящими от вязкости, без существенной потери информации. Этот вопрос будет обсуждаться при рассмотрении модельных уравнений переноса.

## ГЛАВА 7

### МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ИЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ.

#### 7.1. Общий обзор и классификация моделей турбулентности второго приближения

На протяжении всей истории развития теории турбулентности проблема замыкания исходных уравнений, описывающих турбулентное движение, находилась в центре внимания ведущих специалистов по механике жидкости и газа как в нашей стране, так и за рубежом. Пытаясь рассчитать характеристики турбулентных потоков, многие авторы предлагали способы определения турбулентных касательных напряжений и потоков теплоты и вещества. Первые соотношения непосредственно связывали турбулентное трение с параметрами осредненного потока на основе гипотезы градиентного переноса. Модели этого вида замыкания, как отмечалось выше, являются моделями турбулентности первого приближения и широко используются для расчета сравнительно простых течений. Однако они позволяют получить информацию лишь об осредненных характеристиках движения и содержат определенные недостатки. Желание преодолеть ограниченность моделей турбулентности первого приближения, а также необходимость расчета более сложных течений и пульсационных характеристик привели к построению более сложных моделей турбулентности, базирующихся на дополнительных дифференциальных уравнениях переноса локальных характеристик турбулентности. Важнейший шаг в создании таких моделей практически сделали А.Н. Колмогоров и Л. Прандтль. Модели этого вида относятся к моделям турбулентности второго приближения [42, 141]. Наиболее плодотворной, как известно, оказалась идея о связи турбулентной вязкости с кинетической энергией турбулентности  $k$  и ее масштабом  $L$ , предложенная А.Н. Колмогоровым [110] и Л. Прандтлем [343]  $\nu_t \approx k^{1/2} L$ . В работах [110, 111, 177, 343, 380] получены дифференциальные уравнения переноса для  $k$  и  $L$  и сформулированы простые гипотезы о механизме переноса и диссипации, ставшие

общепринятыми. При таком определении турбулентная вязкость учитывает предысторию потока. Обзор первых работ этого направления имеется у А.С. Мони́на, А.М. Яглома [145] и в ряде других работ.

В настоящее время различным вариантам использования уравнения переноса кинетической энергии турбулентности для замыкания исходных уравнений движения посвящено большое количество работ. Их различие часто обусловлено разным способом определения линейного масштаба турбулентности  $L$ , характеризующего размеры энергосодержащих вихрей, спектр которых в реальных течениях довольно широк. Это обстоятельство не дает возможности подобрать универсальную формулу для описания или вычисления значения  $L$ , входящего в формулу Колмогорова-Прандтля для турбулентной вязкости  $\nu_t = c'_\mu k^{1/2} L$ . Если воспользоваться эмпирическим соотношением для скорости диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon = c_D k^{3/2} L^{-1}$ , то гипотетический масштаб турбулентности можно исключить из рассмотрения и для турбулентной вязкости получим  $\nu_t = c_\mu k^2 / \varepsilon$ ,  $c_\mu = c'_\mu c_D$  ( $c_\mu$  - опытный коэффициент).

Это соотношение справедливо при больших числах Рейнольдса, когда течение близко к изотропному. Преимущество такого подхода заключается в том, что для определения диссипации  $\varepsilon$ , как видно из параграфа 6.7 шестой главы, удастся получить строгое дифференциальное уравнение переноса для однозначного определения значения  $\varepsilon$ .

При исследовании стратифицированных течений необходимо включать в рассмотрение уравнение переноса скалярной субстанции и учитывать влияние стратификации и сил плавучести на процессы турбулентного переноса. В рамках моделей турбулентности второго приближения это удастся сделать, так как они учитывают пульсационную структуру потока.

На сегодняшний день опубликовано ряд работ [112, 137, 141, 171, 200 - 203], посвященных анализу методов замыкания уравнений турбулентного движения и обзору моделей турбулентности второго приближения, в которых приведена обширная библиография. Поэтому кратко отметим лишь некоторые характерные работы и используемые в них модели.

Во многих работах авторы использовали полуэмпирическую модель Колмогорова-Прандтля, в которой турбулентная вязкость выражается через турбулентную кинетическую энергию  $k$  и масштаб турбулентности  $L$ . Отметим модель, предложенную Г.С. Глушко [82 - 84], и работы [141, 172, 199, 360], где использованы разные подходы к определению масштаба турбулентности.

Модель турбулентности, включающая уравнение переноса кинетической энергии турбулентности, применялась П. Бредшоу [39, 40] для расчета плохого пограничного слоя, а Т. Мореллом и Т.П. Торда [338], В.П. Проходько [170], К.Е. Джаугашиным [98, 99] для случая двумерных

свободных турбулентных течений. Эта же модель и ее модификации применялись также В. Роди [351] и Д.Б. Сполдингом [352], Б.Э. Лоундером [303 - 305] и другими авторами при анализе свободных турбулентных течений, причем ими были использованы различные уравнения переноса для масштаба турбулентности. В работах С.К. Ли и П.Т. Харша [130, 214, 280, 309], В.П. Проходько [170], Е.В. Бруяцкого, В.П. Проходько [58], наряду с уравнением переноса турбулентной энергии для масштаба турбулентности использовалось алгебраическое выражение, а не уравнение переноса.

Модель турбулентности, использующая уравнение переноса турбулентной вязкости, по аналогии с уравнением переноса для скалярной субстанции предложена В.В. Ни и Л.С. Коважным [331], П.Г. Саффменом [356] и А.Н. Секундовым [189]. Они применили эту модель для решения задачи о пограничном слое и свободном слое смешения.

Модель турбулентности, в которой используется уравнение переноса кинетической турбулентной энергии  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$ , предложена Б.Э. Лоундером [304] и применена им для конкретных расчетов совместно с В.П. Джонсоном [286, 287], К. Ханжаликом [277], М.М. Гибсоном [77] и другими исследователями. Эта модель известна как  $(k - \varepsilon)$  модель, на основе которой рядом авторов выполнены расчеты различных струйных течений и течений в пограничных слоях [141, 172, 200-203, 361].

Указанные дифференциальные модели турбулентности, использующие уравнения переноса для турбулентной энергии и интегрального масштаба, или диссипации турбулентности, позволяют, в принципе, описывать более сложные течения, однако и они обладают рядом принципиальных недостатков, например не учитывают нормальные компоненты напряжений Рейнольдса, необходимые при расчете вторичных и рециркуляционных течений. Область применимости этих моделей существенно расширяется при их использовании совместно с уравнениями переноса для всех составляющих тензора напряжений Рейнольдса  $-\overline{\rho v'_i v'_k}$  и скалярных потоков  $-\overline{\rho v'_i \theta}$ .

Примеры использования таких моделей, хотя и немногочисленные, имеются в работах С. М. Рхи, П.И. Чжоу [179], И.К. Ротта [177], Б.И. Дейли и Ф.Х. Харлоу [262], С.В. Желазны [100] и других. Опыт использования этих моделей для расчета конкретных течений представлен в работах К. Дональдсона [266, 267], В.С. Левеллена [129, 312], К. Ханжалик и Б.Э. Лоундер [277, 303, 306, 307] развил эту же модель, но вместо уравнения для масштаба турбулентности они использовали уравнение для скорости диссипации турбулентной кинетической энергии  $\varepsilon$ .

Из приведенного краткого обзора видно, что модели турбулентности второго приближения получили широкое распространение при расчетах различных турбулентных течений. На основе этих моделей наиболее полно

исследовались поля скорости, т.е. однородные по плотности течения, расчеты же полей температуры и концентрации пассивной примеси рассмотрены менее детально. Однако в настоящее время рядом авторов внесен значительный вклад в ликвидацию этого разрыва, поскольку эти вопросы очень важны при исследовании характеристик теплопереноса в турбулентных потоках с поперечным сдвигом и в стратифицированных потоках.

Значительный толчок развитию моделей турбулентности второго приближения для стратифицированных сред дали геофизические задачи турбулентного теплопереноса, включающие задачи атмосферной турбулентности, метеорологии и океанологии. Специфика этих задач заключается в необходимости учета объемных массовых сил в исходных уравнениях, являющихся следствием стратификации, т.е. наличия в исследуемом течении градиентов плотности или температуры.

Вероятно, одной из первых работ, использующих модель турбулентности второго приближения для стратифицированных сред, была работа Т.Х. Эллисона [273], в которой предложены простейшие уравнения переноса для среднего квадрата пульсаций плотности и смешанного второго момента пульсации плотности и скорости.

Существенный вклад в разработку методов описания процессов теплопереноса в стратифицированных средах на основе моделей второго приближения сделали К. Дональдсон и его сотрудники [266, 267]. Их модели предложены применительно к решению нестационарных метеорологических задач для приземного слоя атмосферы с учетом архимедовых и кориолисовых сил.

К числу моделей, предназначенных для расчета средних значений скорости и температуры и вторых моментов, характеризующих процессы переноса в стратифицированных турбулентных потоках, относятся модели Г.Л. Меллора [319 - 321], Б.Э. Лоундера [134], Б.А. Коловандина [112] и др.

В упомянутых работах содержится обширная библиография по моделям второго приближения, предназначенным для расчета одноточечных моментов второго порядка взаимодействующих полей скорости и температуры. Модели турбулентности третьего приближения подробно обсуждаются в работе Б.А. Коловандина [112] и в [259], где имеются характеристика состояния вопроса и библиографическая справка.

Оценивая модели турбулентности второго приближения типа Колмогорова-Прандтля и Лоундера, нужно сказать, что они позволяют учитывать конвективный и диффузионный переносы одновременно с предысторией турбулентного процесса, поэтому когда эти факторы играют существенную роль, то они оказываются предпочтительнее моделей турбулентности первого приближения.

При рассмотрении моделей турбулентности второго приближения термин «модель турбулентности» следует понимать в широком смысле, т.е.

сюда входят не только алгебраические соотношения, но и дифференциальные уравнения переноса для различных локальных характеристик турбулентности. Совокупность этих уравнений, позволяющих замкнуть систему уравнений Рейнольдса и переноса теплоты или примеси, будем называть моделью турбулентности во втором приближении.

Наличие большого числа моделей турбулентности второго приближения приводит к необходимости их классификации. Всякая классификация, конечно, носит условный характер. Вопросы классификации методов замыкания во втором приближении обсуждались в [42, 141, 171, 242, 305]. Один из хороших обзоров о методах замыкания и их классификации имеется в работе [201]. Из ранних обзоров прежде всего следует выделить работу Г.Л. Меллора и Х.И. Херринга [141], в которой предложена классификация моделей турбулентности. Авторы разделили широко известные модели турбулентных течений на модели, замыкаемые с помощью поля средней скорости (ПСС), и модели, в которых используются уравнения переноса осредненных характеристик турбулентности (ПХТ). Последние в свою очередь подразделены на две группы моделей, одна из которых содержит уравнения переноса для напряжений Рейнольдса (ПНР), а другая группа включает уравнение переноса кинетической энергии (ПКЭ) турбулентности.

Нам представляется целесообразной следующая классификация. Простейшие модели турбулентности, базирующиеся на гипотезе градиентного переноса, следует отнести к моделям первого приближения или градиентным моделям. К их числу относятся описанные в пятой главе модели Буссинеска, Прандтля, Тейлора, Кармана, Рейхарда и др. Модели турбулентности, использующие дополнительные уравнения переноса локальных турбулентных характеристик вида  $k, L, \nu_t, \varepsilon, \tau$ , объединяются в класс дифференциальных параметрических моделей, или моделей турбулентности второго приближения.

Существование сравнительно большого числа дифференциальных параметрических моделей объясняется двумя обстоятельствами. Первое из них связано с выбором полноты использования дифференциальных уравнений переноса, а второе – с приближенным моделированием неизвестных корреляционных членов. Модели турбулентности, использующие помимо уравнений Рейнольдса дополнительные дифференциальные уравнения для турбулентной энергии  $k$  и масштаба турбулентности  $L$ , т.е. модель Колмогорова-Прандтля, обычно классифицируют как параметрическую  $(k - L)$ -модель. По аналогии с этим модель турбулентности, включающую дополнительно дифференциальное уравнение переноса для турбулентной вязкости, можно классифицировать как  $(\nu_t - L)$ -модель, а модель, включающую дополнительно дифференциальные уравнения переноса турбулентных напряжений (вторых моментов пульсации скорости), как  $\tau$ -модель. Если в модели турбулентности в

качестве дополнительных уравнений используются дифференциальные уравнения энергии турбулентности  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$ , то ее обычно классифицируют как параметрическую  $(k - \varepsilon)$ - модель. Если в эту модель входят еще уравнения переноса для напряжений Рейнольдса, то это  $(k - \varepsilon - \tau)$ - модель, а если среда температурно-неоднородна и к анализу привлекается уравнение переноса для скалярной субстанции  $\theta$  то это  $(k - \varepsilon - \tau - \theta)$ - модель. Последняя модель является наиболее полной. Ниже будут рассмотрены характерные из названных моделей турбулентности второго приближения.

## 7.2. Модель Невзглядова-Драйдена ( $k - \tau$ – модель)

Одна из первых моделей замыкания уравнений Рейнольдса, заслуживающая внимания, в которой турбулентное трение  $\tau$  выражается через кинетическую энергию турбулентности  $k$ , была предложена В.Г. Невзглядовым [148], а ее применение для конкретного расчета выполнено Х.Л. Драйденом [268]. В этой модели местное турбулентное трение связано с кинетической энергией турбулентности. Для двумерного течения эта связь имеет вид

$$\tau = -\overline{\rho u'v'} = a_1 \rho k, \quad (7.1)$$

где  $a_1$  - постоянная величина.

Соотношение (7.1) совместно с уравнением турбулентной кинетической энергии позволяет рассчитать  $\tau$  в некоторой точке поля течения с учетом развития поля течения до этой точки, т.е. с учетом предистории потока. Такое линейное соотношение использовали П. Бредшоу, Д.Х. Фэррис и Н.П. Этуэлл [247] при исследовании пристеночных пограничных слоев и получили хорошее согласование теории с опытом. Однако эта модель не смогла претендовать на универсальность. Она оказалась неприменима для течений, где  $\tau$  изменяет свой знак и неприменима для описания трения в свободных струях, так как  $\tau$  на оси струи обращается в нуль, а турбулентная энергия там отлична от нуля. Однако рядом авторов предложены различные модификации этой модели, пригодные для расчета определенного вида течений. К их числу можно отнести работы С.К. Ли и П.Т. Харша [130], П. Бредшоу [247] для плоских течений в пограничном слое и работы П.Т. Харша [214], Т. Моурела и Т.П. Торда [146] для плоских свободных турбулентных течений. К этому классу моделей относятся и модификации интегральных методов, предложенные В.К. Пейтелом и М.Р. Хедом [337] для течений в пограничном слое и К.Е. Петерсом, В.И. Фаресом [342] для свободных турбулентных течений.



### 7.3. Модель Колмогорова-Прандтля ( $k - L$ – модель)

Другая широко известная модель турбулентности Колмогорова – Прандтля наряду с уравнениями для осредненного движения использует уравнение переноса кинетической энергии турбулентности. Исходная система уравнений, лежащая в основе этой модели, в случае плоских и осесимметричных течений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(y^j \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(y^j \bar{v}) &= 0; \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y}(y^j \overline{u'v'}); \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} &= -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^j \left( \frac{1}{\rho} \overline{p'v'} + \overline{v'k} \right) \right] - \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

В таком виде система уравнений (7.2) пока незамкнута, так как число неизвестных  $\bar{u}, \bar{v}, \overline{u'v'}, \left( \frac{p'v'}{\rho} + \overline{v'k} \right), \varepsilon$  превышает число уравнений.

Согласно модели Колмогорова-Прандтля турбулентный перенос импульса и пульсационной энергии осуществляется посредством диффузии градиентного типа:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad -\overline{v' \left( \frac{p'}{\rho} + k \right)} = \nu_k \frac{\partial \bar{k}}{\partial y},$$

а турбулентная вязкость и диссипация турбулентности могут зависеть только от энергии турбулентности  $k$  и некоторого линейного масштаба  $L$ . Тогда, исходя из соображений теории размерности, эти величины можно представить в виде  $\nu_t = c'_\mu k^{1/2} L$ ;  $\nu_k = \alpha \nu_t$ ;  $\varepsilon = c_\varepsilon k^{3/2} L^{-1}$ , где  $c'_\mu, \alpha, c_\varepsilon$  – эмпирические постоянные. С учетом приведенных соотношений исходная система уравнений модели Колмогорова-Прандтля примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(y^j \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(y^j \bar{v}) &= 0; \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j L \sqrt{k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right); \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} &= c'_\mu L \sqrt{k} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \frac{c'_\mu \alpha}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j L \sqrt{k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right) - c_\varepsilon \frac{k \sqrt{k}}{L} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Легко видеть, что для получения замкнутой системы уравнений необходимо дополнительно иметь уравнение для определения масштаба  $L$ . Один из простейших способов его определения для задач свободной турбулентности состоит в использовании гипотезы Прандтля, когда  $L = \alpha b$  [5, 98, 170]. Во втором, более сложном, случае для определения  $L$  выводится дополнительное дифференциальное уравнение. Впервые такое уравнение при больших числах Рейнольдса предложено А.Н. Колмогоровым [110] и Л. Прандтлем [343], а затем и другими учеными, например И. Ротта [177], Н.С. Глушко [83], В.М.Иевлевым [101]. В первые уравнения для  $L$  входило не само значение, а произведение  $kL$  [81, 111]. Позднее преобразованием уравнений переноса для двухточечной корреляции скорости было получено и явное уравнение относительно масштаба  $L$  [376]. Применительно к описанию турбулентных струйных течений уравнение для  $L$  имеет вид

$$\begin{aligned} -\bar{u} \frac{\partial kL}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial kL}{\partial y} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \frac{k\sqrt{k}L}{\sigma_1} \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\sqrt{k}L^2}{\sigma_2} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \\ + c_p \sqrt{k}L^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - c_s k \sqrt{k}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, c_p, c_s$  - эмпирические константы.

В таком виде модель турбулентности Колмогорова-Прандтля применялась многими авторами для расчета различных течений.

Расчеты пограничного слоя на основе модели Колмогорова-Прандтля выполнены Г.С. Глушко [82], Г.Л. Меллором и Х.И. Херрингом [321], В.П. Джонсоном и Б.Э. Лоундером [286, 287], а свободные струйные течения рассчитывались С.К. Ли и П.Т. Харшой [130, 310], В. Роди и Д.Б. Сполдингом [352], В.П. Проходько [170] и другими. Многие исследователи модифицируют эти основные соотношения или используют их гибрид, как, например, С.К. Ли и П.Т. Харша [130] при исследовании свободных слоев смешения.

## 7.4. Модель Брэдшоу ( $k - \tau$ – модель)

Практический метод расчета, в котором используется модель турбулентности Невзглядова-Драйдена (7.1), впервые предложен П. Брэдшоу. Результаты расчетов по этой модели приведены в работе П. Брэдшоу и Д.Х. Ферриса [243]. Для расчета двумерного пограничного слоя несжимаемой жидкости исходными уравнениями в этой модели служат уравнения Рейнольдса и уравнение переноса напряжений Рейнольдса в следующем виде [201]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0; \quad (7.5)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau}{\partial y}; \quad (7.6.)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \tau}{\partial y} = & -\overline{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{p'}{\rho_0} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p'}{\rho_0} \overline{v' + v'^2 u'} \right) - \\ & - \overline{v'(u' \nabla^2 v' + v' \nabla^2 u')}. \end{aligned} \quad (7.7.)$$

В связи с тем, что моделирование корреляционных членов уравнения (7.7) вызывает большие трудности, при анализе еще используют уравнение переноса кинетической энергии турбулентности

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\tau}{\rho_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p'}{\rho_0} \overline{v' + k v'} \right) - \varepsilon. \quad (7.8)$$

Пользуясь гипотезой Таунсенда для  $\tau(y)$ , П. Бредшоу и Д.Х. Феррис для замыкания уравнения (7.8) использовали соотношения

$$a_1 = \tau / \rho_0 k; \quad l = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\tau}{\rho_0} \right)^{3/2}; \quad G = \frac{(\overline{p' v'} / \rho_0 + \overline{k v'})}{(\tau / \rho_0)(\tau_{\max} / \rho_0)^{1/2}}, \quad (7.9)$$

которые, по существу, являются их определениями. Дополнительно они предполагали, что эти величины являются универсальными функциями координаты  $y/\delta$ . С помощью этой модели были выполнены расчеты различных течений [39, 247, 310]. Полученные данные показали хорошее согласование теории и экспериментов. Модифицированные варианты метода Бредшоу применялись затем для расчета двухмерных течений в трубах [39] и свободных слоях смешения [129, 310, 328]. Интересная модификация метода Бредшоу –полуинтегральный метод расчета пограничных слоев, предложена В.К. Пейтелем и М.Р. Хэдом [337].

## 7.5. Модель Ни-Коважного и Секундова ( $k - \nu$ – модель)

В моделях турбулентности первого приближения обычно предполагается, что турбулентная вязкость  $\nu_t$  является скалярной величиной. В.В. Ни и Л. С.Г. Коважный [331], А.Н. Секундов [189] и П.Г. Саффмен [185, 355] предположили, что турбулентная вязкость является переносимой турбулентным потоком скалярной субстанцией, следовательно, для нее можно записать соответствующее дифференциальное уравнение переноса

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial v_t}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v_t \frac{\partial v_t}{\partial x_k} \right) + G - D, \quad (7.10)$$

где  $G$  и  $D$  - соответственно генерация и диссипация вязкости. При записи этого уравнения постулировалось условие самодиффузии.

При практическом использовании этой модели необходимо также иметь дополнительное уравнение для определения масштаба длины  $L$ . Эта модель переноса турбулентной вязкости не имеет каких-либо преимуществ по сравнению с моделями, использующими уравнение переноса кинетической энергии турбулентности. В силу этих обстоятельств и трудностей аппроксимации членов  $G$  и  $D$  указанная модель долгое время не находила широкого применения в практических расчетах турбулентных течений. Однако в настоящее время ее модификации стали популярными [365]. Позднее в девятой главе мы вернемся к более подробному обсуждению этой модели.

## 7.6. Модель Лоундера ( $k - \varepsilon$ – модель)

Следующая, часто применяемая модель турбулентности, предложенная Б.Э. Лоундером [304], по существу, является вариантом модели Колмогорова – Прандтля. Ее отличие заключается в том, что вместо неизвестного масштаба  $L$  в ней используются строгое уравнение переноса для диссипации турбулентной кинетической энергии  $\varepsilon$  и алгебраическое соотношение

$$\varepsilon \propto k^{3/2} L^{-1}, \quad (7.11)$$

позволяющее исключить из рассмотрения масштаб  $L$ . В этом случае турбулентная вязкость

$$v_t = c_\mu k^2 / \varepsilon \quad (7.12)$$

и, следовательно,  $\tau = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ .

Эта модель развита в работах Б.Э. Лоундера [304 - 307] применительно к расчету свободных сдвиговых течений, а также В.П. Джонсона и Б.Э. Лоундера [286, 287] для пристенных течений. При использовании этой модели дополнительно к уравнениям для осредненного движения привлекаются следующие уравнения переноса кинетической энергии турбулентности  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$ :

$$\rho \bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho v_t y^j}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \rho v_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \rho \varepsilon; \quad (7.13)$$

$$\rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho v_i y^j}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \rho v_i \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k}, \quad (7.14)$$

которые содержат пять постоянных  $c_\mu, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$ . Здесь  $j = 0$  для плоских течений и  $j = 1$  для осесимметричных течений.

В результате проведенного в NASA комплекса контрольных расчетов [305, 310] выбраны следующие их значения:

$$c_\mu = 0,09; \quad c_{\varepsilon 1} = 1,43; \quad c_{\varepsilon 2} = 1,92; \quad \sigma_k = 1,0; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3. \quad (7.15)$$

Такой выбор постоянных в основном обеспечил удовлетворительные результаты расчетов выбранных контрольных течений, однако расчеты для осесимметричных затопленных и спутных струй при указанных значениях констант плохо согласовывались с результатами экспериментов. Для повышения точности расчетов В. Роди [349] затем Б.Э. Лоундером [304] и другими введены соответствующие поправки, которые обеспечили хорошие результаты расчета как для плоских, так и для осесимметричных течений, но лишь в случае сильных сдвиговых течений.

При расчетах пристеночных течений, когда необходимо вести расчет вплоть до стенки, приходится сталкиваться с тем обстоятельством, что вблизи стенки местные числа Рейнольдса малы и поэтому эмпирические зависимости, полученные в условиях больших чисел Рейнольдса, не работают. В работах [286, 287] предложены модификации и на этот случай.

## 7.7. Модель Лоундера-Ханжалика ( $k - \varepsilon - \tau$ – модель)

Рассматриваемая модель турбулентности [277] отличается от модели Лоундера тем, что для определения турбулентного трения вместо алгебраического соотношения используется уравнение переноса для напряжений Рейнольдса. Таким образом, при использовании этой модели необходимо помимо уравнений для осредненного движения совместно решать уравнения переноса кинетической энергии турбулентности  $k$ , скорости ее диссипации  $\varepsilon$  и турбулентных напряжений  $-\rho \overline{v'_i v'_j}$ . Хотя в явном виде связь между величинами  $\rho \overline{v'_i v'_j}$  и  $k$  в этой модели не фигурирует, однако идеи Колмогорова-Прандтля [110, 343] широко используются при моделировании неизвестных корреляционных членов, присутствующих в соответствующих уравнениях переноса.

В случае плоских течений несжимаемой жидкости соответствующие дополнительные уравнения переноса в рассматриваемой модели записываются в виде [201]

$$\left. \begin{aligned} \overline{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial k}{\partial y} &= c_{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \overline{u'v'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \varepsilon; \\ \overline{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= c_{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) - c_{\varepsilon 1} \overline{u'v'} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}; \\ \overline{u} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} &= c_s \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right) - c_{\varphi 1} \left( \overline{u'v'} \frac{\varepsilon}{k} + c_{\mu} k \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Для постоянных величин, входящих в эти уравнения, Б.Э. Лоундер [279] предложил следующие значения:

$$c_s = 0,1; \quad c_{\mu} = 0,09; \quad c_{\varphi 1} = 2,8; \quad c_{\varepsilon} = 0,09; \quad c_{\varepsilon 1} = 1,4; \quad c_{\varepsilon 2} = 1,9. \quad (7.17)$$

К. Ханжалик и Б.Э. Лоундер [277] при исследовании двумерных пограничных слоев решали дифференциальные уравнения относительно турбулентной кинетической энергии  $k$ , скорости диссипации  $\varepsilon$  и напряжений Рейнольдса  $\overline{\rho v'_i v'_j}$ . К. Дональдсон [266] со своими коллегами решал уравнения переноса для  $k$  и  $\overline{v'_i v'_j}$ , а для  $\varepsilon$  использовал алгебраическое выражение.

Расчетов по моделям турбулентности, использующим уравнения переноса для напряжений Рейнольдса, значительно меньше. В работе [266] выполнены расчеты по определению всех компонент тензора напряжений Рейнольдса для пограничного слоя плоской пластины и в турбулентном струйном течении, причем масштаб длины авторы задавали алгебраически. Б. И. Дейли и Ф. Х. Харлоу [262] рассчитали течение в канале, их результаты хорошо совпали с измерениями Т. Лауфера [301, 302].

Материалы сопоставления результатов расчета свободных слоев смешения по различным моделям турбулентности второго приближения с экспериментальными данными имеются в работе [201] и других. Они носят удовлетворительный характер.

## 7.8. Модель турбулентности для стратифицированных сред ( $k - \varepsilon - \tau - \theta$ – модель)

Рассмотренные выше модели турбулентности второго приближения были разработаны первоначально применительно к расчету полей скорости, т.е. для однородных по температуре (плотности) сред.

Модели турбулентности второго приближения применительно к стратифицированным по плотности температурно-неоднородным средам также рассматривались во многих работах [42, 64]. Исходными в этих

моделях являются уравнения переноса для осредненных величин и соответствующих корреляционных моментов пульсационных составляющих скорости и температуры, а также уравнение для масштаба турбулентности или скорости диссипации. В исследованных случаях жидкость предполагалась несжимаемой, однако в ней допускались небольшие изменения плотности (температуры), которые в соответствии с приближением Буссинеска [76, 207] учитываются лишь в слагаемых, выражающих действие массовых архимедовых сил плавучести, входящих в уравнение переноса количества движения. В уравнениях модели Дональдсона, как уже отмечалось, присутствуют члены, характеризующие влияние сил Кариолиса.

Обсуждая модели турбулентности второго приближения особо следует отметить работы Б.А. Коловандина [112], в которых показано, что известные модели турбулентности этого класса корректно описывают процессы турбулентного переноса только в двух предельных случаях: либо для мелкомасштабной, либо для крупномасштабной турбулентности.

Анализируя рассмотренные модели турбулентности второго приближения и используя результаты, полученные в шестой главе, можно записать следующую исходную систему точных дифференциальных уравнений переноса для расчета сдвиговых турбулентных стратифицированных течений: уравнения неразрывности и состояния

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0; \quad \frac{\bar{\rho} - \rho_0}{\rho_0} = -\beta(\bar{T} - T_0) + \alpha(\bar{S} - S_0); \quad (7.18)$$

уравнение переноса осредненного движения

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) - \overline{v'_i v'_k} \right] + g_i \beta \bar{\theta}; \quad (7.19)$$

уравнение переноса скалярной субстанции (теплоты, вещества)

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( a \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} - \overline{\theta' v'_k} \right) + Q_1; \quad (7.20)$$

уравнение переноса напряжений Рейнольдса (вторых моментов пульсации скорости)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{v'_i v'_j} + \bar{v}_k \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} = & -\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \beta(g_j \overline{v'_i \theta'} + g_i \overline{v'_j \theta'}) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v'_i v'_j v'_k} - \left[ \overline{v'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{p'}{\rho_0} \right)} + \overline{v'_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p'}{\rho_0} \right)} \right] + \nu \frac{\partial^2 \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k^2} - 2\nu \left( \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k} \right); \end{aligned} \quad (7.21)$$

уравнение переноса турбулентной кинетической энергии

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = -\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \beta g_i \overline{v'_i \theta'} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{v'_k \left( \frac{p'}{\rho_0} \right)} + \bar{v}'_k k - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] - \nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k}}; \quad (7.22)$$

уравнение переноса диссипации турбулентной энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = & -2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k}} - 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j}} + 2\nu \beta g_i \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} - \\ & - 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{v'_k \varepsilon} + 2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{p'}{\rho_0} \right) \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] - 2\nu v'_k \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k \partial x_j}}; \end{aligned} \quad (7.23)$$

уравнение переноса смешанных моментов пульсации скорости и скалярной субстанции

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{v'_i \theta'} + \bar{v}_k \frac{\partial \overline{v'_i \theta'}}{\partial x_k} = & -\overline{v'_k \theta'} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \beta g_j \overline{\theta'^2} - \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v'_i v'_k \theta'} - \overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{p'}{\rho_0} \right)} + a \overline{v'_i \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_k \partial x_k}} + \nu \overline{\theta' \frac{\partial^2 v'}{\partial x_k \partial x_k}}; \end{aligned} \quad (7.24)$$

уравнение переноса вторых моментов пульсации скалярной величины (температуры)

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\theta'^2} + \bar{v}_k \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} = -2\overline{v'_k \theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v'_k \theta'^2} + a \frac{\partial^2 \overline{\theta'^2}}{\partial x_k \partial x_k} - 2a \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}. \quad (7.25)$$

В целях удобства для диссипации и членов, описывающих генерацию или порождение, в уравнениях (7.21), (7.22) и (7.24) введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k}}; \quad P = -\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + g_i \beta \overline{v'_i \theta'}; \quad (7.26)$$

$$P_{ij} = -\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \beta (g_i \overline{v'_j \theta'} + g_j \overline{v'_i \theta'}); \quad (7.27)$$

$$P_{iT} = -\overline{v'_k \theta'} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \beta g_i \overline{\theta'^2}; \quad (7.28)$$

Тогда эти уравнения можно переписать в виде



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{v'_i v'_j} + \overline{v_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} = P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v'_i v'_j v'_k} - \frac{1}{\rho_0} \left( \overline{v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right) + \\ + \nu \frac{\partial^2 \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}}; \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{v_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{v'_k \frac{p'}{\rho_0}} + \overline{v'_k k} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) + P - \varepsilon; \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{v'_i \theta'} + \overline{v_k} \frac{\partial \overline{v'_i \theta'}}{\partial x_k} = P_{iT} - \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v'_i v'_k \theta'} - \\ - \frac{\overline{\theta' \frac{\partial p'}{\partial x_i}}}{\rho_0} + a \overline{v'_i \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_k \partial x_k}} + \nu \overline{\theta \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k \partial x_k}}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Данная система уравнений описывает поведение стратифицированной жидкости во втором приближении. Она так же, как и в случае однородной среды, характеризуется незамкнутостью, поскольку в каждом дополнительном уравнении содержатся неизвестные корреляционные члены. Легко видеть, что рассмотренная модель турбулентности для стратифицированной жидкости является наиболее общей и содержит в себе предыдущие как частные случаи.

Для выполнения конкретных расчетов неизвестные корреляционные члены необходимо выразить через другие переменные или обосновано пренебречь некоторыми из них. Моделированию этих членов посвящено много работ.

## ГЛАВА 8

# МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ВТОРЫХ МОМЕНТОВ, ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ И СКОРОСТИ ЕЕ ДИССИПАЦИИ

### 8.1. Уравнения переноса вторых корреляционных моментов пульсации скорости (напряжений Рейнольдса)

В настоящее время вопросу получения замкнутой системы уравнений на основе приближенной аппроксимации неизвестных корреляционных слагаемых в исходных уравнениях переноса вторых моментов уделяется много внимания. И хотя достаточно обоснованные рекомендации в этой области пока оставляют желать лучшего, тем не менее многие из них уже с успехом используются для практических расчетов.

Рассмотрим точные уравнения переноса напряжений Рейнольдса (7.21), содержащие три неизвестных члена, которые необходимо выразить через другие параметры.

В настоящее время наиболее надежно моделируются диссипативные члены, характеризующие влияние вязкой диссипации на структуру напряжений Рейнольдса. Основная причина диссипации турбулентной энергии – наличие мелкомасштабных вихрей. Для турбулентных течений с большими числами Рейнольдса эта мелкомасштабная турбулентность является локально изотропной даже при наличии анизотропного крупномасштабного течения. По предложению И.К. Ротта [177], для диссипативного члена при больших числах Рейнольдса обычно принимается следующая аппроксимация:

$$2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon. \quad (8.1)$$

В работах [262, 267] это выражение было обобщено и на случай анизотропии процессов диссипации, что привело к появлению в правой части выражения (8.1) еще одного слагаемого. В литературе известны и другие более сложные аппроксимации этого корреляционного соотношения,

например в [130]. Однако в практических расчетах задач свободной турбулентности часто учитывают лишь вклад от первого члена.

Моделирование второго члена уравнения (7.21), содержащего корреляционную функцию пульсации скорости и давления, связано с большими трудностями, так как им учитываются два различных механизма диффузии и для многих течений именно он уравнивает член, описывающий генерацию. На основе решения уравнения Пуассона для пульсации давления, согласно данным [177, 305, 329], для этого члена принимается следующая аппроксимация, использование которой дало удовлетворительное согласие результатов расчета и экспериментальных данных:

$$\frac{\overline{v'_i} \partial p'}{\rho_0 \partial x_j} + \frac{\overline{v'_j} \partial p'}{\rho_0 \partial x_i} = c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{v'_i v'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + c_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right), \quad (8.2)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  - эмпирические коэффициенты;  $P_{ij}$  и  $P$  - члены, выражающие генерацию или порождение в уравнениях (7.21) и (7.22) и определяемые формулами (7.26) и (7.27).

Различные варианты по аппроксимации этих членов рассматривались в [262, 277, 303, 336]. Однако надо отметить, что такое приближенное моделирование этого члена хорошо работает в обычных условиях, но может привести к осложнениям в особых случаях, поскольку оно не удовлетворяет так называемому условию реализуемости Ламли [141].

Рассмотрим теперь член с моментом третьего порядка пульсации скорости. Для моделирования этого члена было предложено ряд вариантов. Надежной в настоящее время, по-видимому, следует считать аппроксимацию, предложенную К. Ханжаликом и Б.Э. Лоундером [277], полученную в результате рассмотрения и усечения точного уравнения переноса тройных корреляций:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v'_i v'_j v'_k} = c \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{v'_k v'_e} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_e} + \overline{v'_i v'_e} \frac{\partial \overline{v'_j v'_k}}{\partial x_e} + \overline{v'_j v'_e} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_e} \right) \right]. \quad (8.3)$$

Имеются и другие более сложные выражения для этого члена, содержащие не одну, а ряд неизвестных констант. Простейшая модель этого члена основывается на идее диффузии градиентного типа, т.е. для него в практических расчетах обычно принимается следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_i v'_j v'_k}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} \right), \quad \nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (8.4)$$

Таким образом, модельное уравнение переноса напряжений Рейнольдса принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{v'_i v'_j} + \overline{v_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} \right) + P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon - \\ - c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{v'_i v'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - c_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Полученные приближенные уравнения переноса содержат уже меньшее число неизвестных за счет замены рассмотренных трех корреляций через  $k$  и  $\varepsilon$ .

Физическая обоснованность указанного моделирования напряжений Рейнольдса и других неизвестных членов проверялась сопоставлением расчетов с экспериментальными данными [141, 201, 303]. При определенном выборе констант наблюдалось удовлетворительное соответствие теории и опытов, но их численные значения для пограничного слоя и свободных струйных течений оказались неуниверсальными.

## 8.2. Уравнения переноса турбулентной энергии

Рассмотрим точное уравнение переноса турбулентной кинетической энергии (7.22). Оно проще рассмотренных выше уравнений переноса напряжений Рейнольдса и содержит два неизвестных корреляционных члена. Диссипативный член

$$\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} = \varepsilon, \quad (8.6)$$

а для аппроксимации диффузионного члена обычно используется гипотеза градиентного переноса, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{v'_k} \frac{p'}{\rho_0} + \overline{v'_k} k - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{(\nu + \nu_t)}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right]. \quad (8.7)$$

С учетом этих соотношений, моделирующих диффузию и диссипацию турбулентной энергии, модельное уравнение переноса удельной кинетической энергии турбулентности принимает вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{v_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{(\nu + \nu_t)}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + P - \varepsilon, \quad (8.8)$$

где выражение для  $P$  определяется соотношением (7.27). В таком виде это уравнение часто используется для выполнения конкретных расчетов по моделям Лоундера и других.

### 8.3. Уравнения переноса вторых моментов пульсаций температуры

Рассмотрим точные уравнения переноса смешанных моментов пульсации скорости и скалярной субстанции (7.24) и уравнение переноса вторых моментов пульсации скалярного поля (7.25). Эти уравнения, как и рассмотренные выше, содержат ряд неизвестных членов. Моделированию этих членов посвящено много работ. Большинство предложений по аппроксимации этих членов строится на аналогии моделирования рассмотренных выше членов. Так, для корреляции пульсации температуры с градиентом давления принимается следующая аппроксимация, первое слагаемое которой предложено А.С. Мониным [145]

$$\frac{\overline{\theta' \frac{\partial p'}{\partial x_i}}}{\rho_0} = c_{1T} \frac{\varepsilon}{k} \overline{v'_i \theta'} + c_{2T} P_{iT}, \quad (8.9)$$

где  $c_{1T}$  и  $c_{2T}$  - эмпирические постоянные;  $P_{iT}$  - член, описывающий порождение и определяемый соотношением (7.28).

Диффузионные члены моделируются на основе гипотезы градиентного переноса, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{(v'_i v'_k \theta')} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \overline{v'_i \theta'}}{\partial x_k} \right); \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{(v'_i \theta'^2)} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_T} \frac{\partial \overline{v'_i \theta'^2}}{\partial x_k} \right), \quad (8.11)$$

где  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_T$  - эмпирические константы.

При моделировании диссипативного члена хорошие результаты дает следующая его аппроксимация:

$$2a \frac{\partial \overline{\theta'}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta'}}{\partial x_k} = c_T \frac{\varepsilon}{k} \overline{\theta'^2}, \quad (8.12)$$

где  $c_T$  - эмпирический коэффициент.

Сложный механизм сдвиговых турбулентных стратифицированных течений иногда вынуждает пренебречь некоторыми эффектами. Так обстоит дело с последними двумя членами уравнения (7.24) и предпоследним членом в правой части уравнения (7.25), однако при больших числах Рейнольдса для локально изотропной турбулентности это обосновано.

В результате модельные уравнения переноса вторых моментов пульсации скалярной величины (температуры) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{v'_i \theta'} + \overline{v_k} \frac{\partial \overline{v'_i \theta'}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \overline{v'_i \theta'}}{\partial x_k} \right) + P_{iT} (1 - c_{2T}) - \\ - \overline{v_i v'_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - c_{1T} \frac{\varepsilon}{k} \overline{v'_i \theta'}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\theta'^2} + \overline{v_k} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} \right) - 2 \overline{v'_k \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - c_T \frac{\varepsilon}{k} \overline{\theta'^2}. \quad (8.14)$$

В такой форме они использовались рядом авторов при выполнении практических расчетов [219, 201].

## 8.4. Уравнения переноса диссипации турбулентной энергии

Рассмотрим теперь уравнение переноса (7.23) для диссипации кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon$ . Здесь снова необходимо выразить неизвестные корреляционные члены через вторые моменты,  $\varepsilon, k$  и градиенты осредненных величин скорости и температуры.

Рассмотрим сначала три члена в правой части уравнения (7.23), характеризующих генерацию  $\varepsilon$ . Для них обычно принимается такая аппроксимация:

$$\text{генерация } \varepsilon = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left( - \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \beta g_i \overline{v'_i \theta'} \right) = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P. \quad (8.15)$$

Для диссипативных членов большинством авторов принимается следующее простое выражение:

$$\text{диссипация } \varepsilon = c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (8.16)$$

Оставшиеся члены в уравнении (7.23) характеризуют влияние диффузионных процессов. По аналогии с моделированием членов переноса для напряжений Рейнольдса эти члены аппроксимируются также с помощью модели градиентного переноса, т.е.

$$\text{диффузия } \varepsilon = c_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right), \quad (8.17)$$

где  $c_\varepsilon$ ,  $c_{\varepsilon 1}$  и  $c_{\varepsilon 2}$  - эмпирические константы.

В результате модельное уравнение переноса диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon$  принимает тождественный модели Лоундера - Ханжалика вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{v_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = c_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) + \\ + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left( -\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \beta g_i \overline{v'_i \theta'} \right) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Приведенная приближенная система модельных уравнений турбулентных стратифицированных течений является замкнутой с точностью до эмпирических постоянных, поэтому она может использоваться для выполнения конкретных расчетов. Однако практическая реализация расчетов на основе этой системы уравнений представляет собой довольно сложную нелинейную математическую задачу, требующую привлечения мощной вычислительной техники с высоким быстродействием и большой оперативной памятью. Поэтому такие модели, несмотря на их большие потенциальные возможности, в практических расчетах пока используются сравнительно редко. Однако они совершенно необходимы при выводе очень важных алгебраических соотношений для напряжений и потоков.

## **8.5. Локально - равновесное приближение и алгебраические соотношения для вторых корреляционных моментов**

Во многих моделях турбулентности вязкость и диффузия предполагаются изотропными. Это допущение для некоторых течений является слишком грубым. Модели турбулентности второго приближения позволяют отказаться от этого допущения, если дополнительно учесть уравнения переноса для всех компонент напряжений Рейнольдса и потоков теплоты и массы, которые будут учитывать анизотропную природу турбулентности. Однако задача в этом случае становится довольно сложной. Поэтому для выполнения практических расчетов на основе полных модельных уравнений целесообразно прибегнуть к дальнейшему, хорошо зарекомендовавшему себя, упрощению исходных уравнений. Покажем, что уравнения для напряжений и потоков можно упростить до алгебраических соотношений, сохранив фундаментальные свойства этих уравнений, что позволяет получить выражения для неизотропных коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии.

Рассмотрим случай так называемых равновесных стратифицированных течений, т.е. таких течений, где скорости производства и диссипации энергии турбулентности равны [199, 71]. Такое условие локального равновесия, подтвержденного экспериментом в трубах, каналах и пограничном слое, позволяет определить корреляционные моменты

$\overline{v'_i v'_j}, \overline{v'_i \theta'}, \overline{\theta'^2}$  не из дифференциальных уравнений переноса (8.5), (8.13), (8.14), а более простым способом.

Действительно, в этом случае конвективные и диффузионные члены в уравнениях переноса корреляционных моментов (8.5) и (8.13), (8.14) уравниваются друг друга, так как они примерно равны по величине и противоположны по знаку. Поскольку это единственные члены, содержащие производные от турбулентных напряжений  $\overline{v'_i v'_j}$  и тепловых потоков  $\overline{v'_i \theta'}, \overline{\theta'^2}$ , то уравнение переноса (8.5), (8.13) и (8.14) относительно  $\overline{v'_i v'_j}, \overline{v'_i \theta'}$  и  $\overline{\theta'^2}$  превращаются из дифференциальных в алгебраические

$$\overline{v'_i v'_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{k}{c_1} (c_1 - 1) + \frac{(1 - c_2)}{c_1} \left[ P_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{c_2}{(1 - c_2)} P \right]; \quad (8.19)$$

$$\overline{v'_i \theta'} = \frac{1}{c_{1T}} \frac{k}{\varepsilon} \left[ (1 - c_{2T}) P_{iT} - \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \right]; \quad (8.20)$$

$$\overline{\theta'^2} = -\frac{2}{c_T} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v'_k \theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k}. \quad (8.21)$$

Полученные соотношения (8.19) – (8.21) совместно с зависимостями (7.26) – (7.28) определяют связь между корреляционными моментами второго порядка и градиентами скорости и температуры осредненного течения. Эта связь представляет собой систему алгебраических соотношений, которую можно использовать для построения зависимости корреляционных моментов от градиентов средней скорости и температуры. Нетрудно заметить, что при таком подходе влияние переноса полностью определяется величинами  $k$  и  $\varepsilon$ .

При рассмотрении стратифицированных течений необходимо учитывать направление действия сил плавучести, определяемое вектором силы тяжести. Это обстоятельство вносит принципиальное различие в схему расчета стратифицированных течений, ориентированных горизонтально или вертикально. Поэтому на этом этапе целесообразно отдельно рассмотреть случай, когда основное течение направлено горизонтально и вертикально вверх.

Рассмотрим случай свободного горизонтального двухмерного турбулентного течения со сдвигом. Направим координату  $x$  горизонтально вдоль основного течения, а координату  $y$  - вертикально вверх. Обозначим соответствующие компоненты скорости в  $x$ - и  $y$ -направлениях через  $u$  и  $v$ . Тогда, предположив, что течение удовлетворяет приближению пограничного слоя и аппроксимации Буссинеска из соотношений (8.19) – (8.21), получим следующие выражения для вторых моментов:



$$\overline{v'^2} = \frac{2}{3} \frac{k}{c_1} \left( c_1 - 1 + \frac{3 - 4c_2}{\varepsilon} \beta g \overline{v' \theta'} \right); \quad (8.22)$$

$$\overline{v' \theta'} = \frac{1}{c_{1T}} \frac{k}{\varepsilon} \left[ (1 - c_{2T}) g \beta \overline{\theta'^2} - \overline{v'^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y} \right]; \quad (8.23)$$

$$-\overline{u' v'} = \frac{(1 - c_2)}{c_1} \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{v'^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \beta g \overline{u' \theta'} \right); \quad (8.24)$$

$$-\overline{u' \theta'} = \frac{1}{c_{1T}} \frac{k}{\varepsilon} \left[ (1 - c_{2T}) \overline{v' \theta'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{u' v'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y} \right]; \quad (8.25)$$

$$\overline{\theta'^2} = -\frac{2}{c_T} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v' \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}. \quad (8.26)$$

Нетрудно заметить, что при определенных условиях гипотеза локального равновесия, по существу, приводит к известной формуле градиентного вида для турбулентных трения и потока теплоты. Особенно легко это просматривается для случая нестратифицированной жидкости. Действительно, в этом случае из (8.24) следует

$$-\overline{u' v'} = \frac{2}{3} \frac{(1 - c_2)(c_1 - 1)}{c_1^2} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y},$$

если обозначить  $\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ ;  $c_\mu = \frac{2}{3} (1 - c_2)(c_1 - 1) / c_1^2$ .

Рассмотрим теперь случай двумерной вертикальной плавучей струи. Направим координату  $x$  вертикально вверх вдоль направления распространения струи, а координату  $y$  - перпендикулярно к ней. Обозначим соответствующие компоненты скорости через  $u$  и  $v$  для осредненного течения и  $u', v'$  - для пульсационного. Избыточную осредненную температуру струи и пульсации температуры обозначим соответственно через  $\overline{\theta}$  и  $\theta'$ . Тогда для рассматриваемого течения неизвестные корреляции  $\overline{u' v'}$ ,  $\overline{v' \theta'}$ ,  $\overline{u' \theta'}$ ,  $\overline{v'^2}$  и  $\overline{\theta'^2}$ , представляющие собой турбулентное трение и турбулентные потоки теплоты и импульса, в соответствии с (8.19) – (8.21) примут вид

$$\overline{v'^2} = \frac{2}{3} k \frac{(c_1 - 1)}{c_1} \quad \text{или} \quad \frac{\overline{v'^2}}{k} = \frac{2}{3} \frac{(c_1 - 1)}{c_1}; \quad (8.27)$$

$$\overline{v' \theta'} = \frac{1}{c_{1T}} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v'^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}; \quad (8.28)$$

$$\overline{u'v'} = \frac{(1-c_2)}{c_1} \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \beta g \overline{v'\theta'} \right); \quad (8.29)$$

$$\overline{u'\theta'} = \frac{1}{c_{1T}} \frac{k}{\varepsilon} \left[ (1-c_{2T}) \left( \overline{v'\theta'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \beta g \overline{\theta'^2} \right) + \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]; \quad (8.30)$$

$$\overline{\theta'^2} = -\frac{2}{c_T} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v'\theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}. \quad (8.31)$$

Приведенные соотношения позволяют приближенно оценить турбулентные напряжения и потоки импульса и теплоты в стратифицированных средах в предположении равновесности турбулентного процесса, когда основной поток направлен вертикально вверх или горизонтально.

## 8.6. Неравновесное приближение для вторых моментов и эмпирические постоянные.

При более строгом рассмотрении процессов переноса импульса и теплоты в турбулентных потоках со сдвигом желательно учесть неравновесность течения. Это замечание особенно относится к случаю свободных слоев смешения, где, как показали измерения баланса турбулентной энергии, нет равенства порождения и диссипации [101]. Следуя данным работы [342] такая попытка для свободной турбулентности была предпринята М.М. Гибсоном и Б.Э. Лоундером [77]. Предложенный ими подход и соответствующие аппроксимации позволили и в этом случае получить алгебраическое выражение для турбулентных напряжений  $\overline{v'_i v'_j}$ , тепловых потоков  $\overline{v'_i \theta'}$ , а также потоков импульса  $\overline{v'^2_i}$ .

В этом случае в качестве основного допущения принимается, что перенос напряжений Рейнольдса  $\overline{v'_i v'_j}$  конвекцией и диффузией пропорционален аналогичному переносу кинетической энергии турбулентности, умноженному на отношение  $\overline{v'_i v'_j} / k$ , т.е.

$$\frac{d}{dt} \overline{v'_i v'_j} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} \right) = \frac{\overline{v'_i v'_j}}{k} \left[ \frac{dk}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) \right]. \quad (8.32)$$

Тогда, используя уравнения переноса (8.5) и (8.8), после простых преобразований приходим к следующему соотношению:

$$P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon - c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{v'_i v'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - c_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) = \frac{\overline{v'_i v'_j}}{k} (P - \varepsilon), \quad (8.33)$$

откуда получаем алгебраическое выражение для напряжений Рейнольдса

$$\overline{v'_i v'_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k \frac{(c_1 - 1)}{(c_1 - 1 + P/\varepsilon)} + \frac{(1 - c_2)}{(c_1 - 1 + P/\varepsilon)} \frac{k}{\varepsilon} \left( P_{ij} + \frac{c_2}{1 - c_2} \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right). \quad (8.34)$$

Легко видеть, что по форме (8.34) идентично формуле (8.19), полученной для равновесного случая, а различие заключается лишь в определении выражения для знаменателя, где вместо  $c_1$  стоит  $(c_1 - 1 + P/\varepsilon)$ , т.е. отношение  $P/\varepsilon$  стало фигурировать как бы в качестве параметра. Из этого уравнения можно получить выражения для шести напряжений Рейнольдса.

Аналогично можно аппроксимировать конвективные и диффузионные члены в уравнении переноса для  $\overline{v'_i \theta'}$ . Принимая

$$\frac{d}{dt} \overline{v'_i \theta'} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \overline{v'_i \theta'}}{\partial x_k} \right) = \frac{\overline{v'_i \theta'}}{k} \left[ \frac{dk}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) \right] \quad (8.35)$$

и используя соответствующие уравнения переноса, имеем

$$(1 - c_{2T}) P_{iT} - c_{1T} \frac{\varepsilon}{k} \overline{v'_i \theta'} - \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{\theta'}}{\partial x_k} = \frac{\overline{v'_i \theta'}}{k} (P - \varepsilon),$$

откуда выражение для потока теплоты имеет вид

$$\overline{v'_i \theta'} = \frac{1}{(c_{1T} - 1 + P/\varepsilon)} \frac{k}{\varepsilon} \left[ (1 - c_{2T}) P_{iT} - \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{\theta'}}{\partial x_k} \right]. \quad (8.36)$$

По существу, это уравнение совпадает с равновесным случаем, отличие состоит лишь в члене, стоящем в знаменателе, где вместо  $c_{1T}$  стоит  $(c_{1T} - 1 + P/\varepsilon)$ .

Величина  $\overline{\theta'^2}$ , входящая в выражение для  $P_{iT}$ , аппроксимируется тем же соотношением, что и в равновесном случае, т.е.

$$\overline{\theta'^2} = -\frac{2}{c_T} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v'_k \theta'} \frac{\partial \overline{\theta'}}{\partial x_k}. \quad (8.37)$$

Таким образом, и в случае неравновесных течений получена система алгебраических уравнений для определения компонент турбулентных напряжений  $\overline{v'_i v'_j}$  и теплового потока  $\overline{v'_i \theta'}$ . Особенностью данной неравновесной модели является то, что она содержит отношение  $P/\varepsilon$  (производство/диссипация) в качестве параметра. В. Роди [349] по-видимому, первым осознал важность этого параметра при определении турбулентных напряжений в свободных турбулентных потоках со сдвигом.

Полученные уравнения содержат градиент от осредненных величин и две неизвестные скалярные характеристики турбулентности  $k$  и  $\varepsilon$ , которые

можно найти из решения уравнений переноса для этих величин (8.8) и (8.18). Заметим, что оба уравнения содержат члены, учитывающие влияние стратификации.

В случае горизонтального и вертикального основных течений в неравновесном случае соотношения для потоков импульса и теплоты принимают соответственно тот же, что и в равновесном случае, вид с заменой стоящих в знаменателе коэффициентов  $c_1$  и  $c_{1T}$  соответственно на  $(c_1 - 1 + P/\varepsilon)$  и  $(c_{1T} - 1 + P/\varepsilon)$ .

Полная модель турбулентности для стратифицированных сред, включающая уравнение переноса характеристик осредненного движения (7.18) – (7.20), модельные уравнения переноса вторых моментов (8.5), (8.13), (8.14), энергии турбулентности (8.8) и скорости ее диссипации (8.18), содержит 11 эмпирических постоянных. Их определению посвящены ряд работ и специальная конференция (Стенфорд, 1968 г.). Эмпирические константы находились из условий наилучшего согласования расчетных и экспериментальных данных для определенного класса течений. К сожалению, выяснилось, что эмпирические постоянные не обладают желаемой универсальностью для различных типов течений. Однако для плоских слоев смешения подавляющим большинством исследователей принимаются следующие их значения [201] :

$$\left. \begin{aligned} c_1 = 2,2; \quad c_2 = 0,55; \quad c_T = 1,25; \quad c_{1T} = 3,2; \quad c_{2T} = 0,5; \\ c_\varepsilon = 0,15; \quad c_{\varepsilon 1} = 1,45; \quad c_{\varepsilon 2} = 1,92; \quad \sigma_k = 1; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3; \quad \sigma_\theta = 0,9. \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

В случае осесимметричных струй, как показали исследования, необходимо вводить некоторые поправки. Наши численные эксперименты показали [58], что хорошее согласование расчетов и опытных данных для круглых струй получается, если изменить лишь два коэффициента  $c_2$  и  $c_{1T}$  по сравнению с (8.38) и принять следующие значения этих эмпирических постоянных:

$$c_2 = 0,83; \quad c_{1T} = 8,2. \quad (8.39)$$

Таким образом, приведенные выше модельные уравнения оказываются замкнутыми и с их помощью можно описывать разнообразные течения. Однако при использовании этих уравнений нельзя забывать о тех гипотезах и допущениях, которые были приняты при их получении. Это очень важно при рассмотрении вопроса о применимости тех или иных моделей турбулентности к решению конкретных задач.

При расчетах турбулентных стратифицированных течений с помощью моделей турбулентности второго приближения многие факторы влияющие на турбулентность, учитываются более полно, чем в моделях первого приближения. Однако при всем этом следует помнить, что и эти более

сложные модели по-прежнему остаются приближенными, полуэмпирическими.

По-видимому, нецелесообразно противопоставлять друг другу модели турбулентности первого и второго приближений, так как в них заведомо заложена различная степень полноты учета влияния тех или иных характеристик турбулентности. Важно, чтобы более сложные модели по возможности содержали в себе простые. При этом, если оказывается возможным, то использование более простых методов и моделей должно быть предпочтительным.

## **8.7. Другие дифференциальные параметрические модели турбулентности**

Анализ литературных источников показывает, что пока ни одна из существующих моделей турбулентности не имеет большого преимущества над остальными по всей совокупности показателей ее эффективности. Поэтому несмотря на то, что в настоящее время существует большое количество моделей турбулентности, необходимых для замыкания уравнений осредненного турбулентного движения, их разработка продолжается и является актуальной задачей. Так как каждая конкретная модель должна быть надежно протестирована на данном классе задач и одним из важных критериев ее успешности связан с ее простотой и эффективностью методики расчетов в целом.

Двухпараметрическая  $(k - \varepsilon)$ - модель турбулентности в 70-80-е годы XX столетия стала очень популярной [42, 128]. Постепенно в среде специалистов сформировалось понятие стандартной  $(k - \varepsilon)$ - модели, построенной в предположении больших чисел Рейнольдса. Позднее появилось целое семейство  $(k - \varepsilon)$ - моделей благодаря которым был достигнут существенный прогресс в расчетах различных типов сложных течений. Это привело к тому, что модели типа  $(k - \varepsilon)$  составили основу вычислительных программ при расчетах сложных турбулентных течений, которые широко используются в том числе в коммерческих пакетах, предназначенных для решения прикладных задач гидромеханики, аэродинамики и теплообмена, экологии и т.д.

Как отмечалось выше,  $(k - \varepsilon)$ - модель, строго говоря, пригодна для развитых турбулентных течений при больших числах Рейнольдса. Однако, в задачах пограничного слоя вблизи стенки вязкие эффекты преобладают над турбулентными. Для учета этого обстоятельства рядом авторов, включая Д. Сполдинга [159], предложено использовать поправочные пристеночные функции для учета вышеназванного недостатка. В большинстве работ для этой цели используется коррекция стандартных констант путем введения их зависимости от турбулентного числа Рейнольдса [20, 21].

В последние годы принципиальный шаг в разработке моделей турбулентности связан с  $(k - \omega)$ -моделью, предложенной Д. Уилкоксом [378]. В этой модели турбулентная вязкость определяется по формуле

$$\nu_t = k / \omega,$$

Основываясь на том, что стандартная и другие модификации  $(k - \varepsilon)$ -модели хорошо описывают свойства развитых турбулентных сдвиговых течений, а модели типа  $(k - \omega)$  имеют преимущество при моделировании пристеночных течений, Ф. Ментера [324] предложил зональную модель, сочетающую в себе указанные сильные стороны той и другой модели. Для этого  $(k - \varepsilon)$ -модель переформулировалась в терминах  $(k - \omega)$ , а затем в полученные модельные уравнения была введена эмпирическая функция  $F_1$ , обеспечивающая плавный переход от  $(k - \omega)$ -модели в пристеночной области к  $(k - \varepsilon)$ -модели вдали от твердых стенок.

Второй важный шаг, сделанный Ментера, состоял в видоизменении стандартной связи между  $k$ ,  $\omega$  и турбулентной вязкостью  $\nu_t$ . В эту связь был введен специальный ограничитель. Подробнее об этом подходе можно найти в работах [324, 165, 102].

Еще одна, заслуживающая внимания однопараметрическая модель турбулентности, получившая широкое распространение была предложена Спалартом-Аллмарасом [365], в которой постулируется уравнение для коэффициента турбулентной вязкости  $\mu_t$  в виде

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu}_t \cdot f_{\nu 1},$$

где  $f_{\nu 1} = \chi^3 / (\chi^3 + c_{\nu 1}^3)$  - демпфирующая функция кинематических вязкостей,  $\chi = \tilde{\nu}_t / \nu$ . Здесь  $\tilde{\nu}_t$  - рабочая переменная. Уравнение для определения  $\tilde{\nu}_t$  в модели Спаларта-Аллмараса имеет вид [365]

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu}_t + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (\nu + \tilde{\nu}_t) \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_k} \right] + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_k} - f_w \left[ \frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} \right] \left[ \frac{\tilde{\nu}_t}{d} \right]^2. \quad (8.40)$$

Кроме приведенной стандартной модели Спаларта-Аллмараса (SA) известны другие ее версии, как например, модель SARC [360, 364], SALSA [354] и др. Модель SA [365] разработана в 1992 г. и предназначена для описания равновесных течений типа пограничного слоя. Генерация турбулентности в ней определяется через вихрь поля скоростей. В 1997 году Spalart и Shur предложили модификацию модели SA [353] на модель SARC [360, 364] с целью учета кривизны линий тока и вращения твердой обтекаемой поверхности. В 2003 году была предложена модель SALSA [354], являющаяся модификацией модели SA, в которой генерация

турбулентности определяется не через вихрь, а через тензор скоростей деформаций. Кроме того, на основе опыта использования этих моделей были уточнены некоторые константы моделей.

Сравнительно недавно, в связи с растущим интересом к моделированию крупномасштабных вихрей с применением операторов фильтра и параметризацией процессов подсеточных масштабов, были выдвинуты новые альтернативные предложения по определению коэффициента турбулентной вязкости с использованием различных соотношений для вихря скорости или других энергетических характеристик. Суть предложенной методологии крупно-вихревого моделирования (Large Eddy Simulation, LES) состоит в следующем. В рассматриваемом пространстве течения вводится оператор фильтрации с определенными свойствами. Его применение к системе исходных уравнений турбулентного движения в форме Рейнольдса приводит к системе уравнений, описывающих поведение фильтрованных компонентов скорости, которые, к сожалению, как и уравнения Рейнольдса, содержат неизвестное слагаемое типа тензора турбулентных напряжений из нефильтрованных компонент скорости. Поэтому полученная новая система уравнений оказывается незамкнутой. Методология LES предполагает замену реального тензора на некоторое его модельное представление. Такое соотношение принято называть моделью подсеточной турбулентности. Подробности этого подхода можно найти в соответствующей литературе [123, 206, 318].

В заключение отметим, что при решении практических задач должны быть сформулированы четкие критерии полноты описания турбулентного потока. Степень сложности используемой модели турбулентности должна быть разумно осмыслена для каждой конкретной решаемой задачи.

Имеющийся опыт работы с моделями турбулентности второго приближения позволяет глубже проникнуть в суть механизма турбулентного переноса и выявить те перспективные направления в обработке эмпирических данных, которые могут привести к построению более совершенных моделей турбулентности. Однако уже сегодня можно констатировать, что современная наука по турбулентности располагает возможностью выбора того или иного метода расчета в зависимости от типа и сложности рассматриваемого течения. В арсенале ученых имеются достаточно простые и эффективные интегральные методы и более сложные, но достаточно гибкие модели с несколькими дополнительными дифференциальными уравнениями переноса. Их использование целесообразно в том случае, когда особенности турбулентного смешения и тепломассопереноса исключают возможность применения более простых методов и оправданы с точки зрения затрат на программирование и вычисление.

## 8.8. Применение двухпараметрической ( $k - \varepsilon$ ) модели турбулентности для замыкания системы уравнений Рейнольдса

Ознакомление с различными моделями турбулентности показывает, что несмотря на определенный оптимизм в области компьютерных технологий, реальные методы расчета характеристик турбулентных течений, в настоящее время попрежнему основываются на решении уравнений Рейнольдса, получаемых из системы уравнений Навье-Стокса путем разложения мгновенных значений параметров потока на осредненную и пульсационную составляющую с последующим их осреднением по времени.

Чтобы рассчитать характеристики турбулентного течения путем решения уравнений Рейнольдса, необходимо, ввиду их незамкнутости, предварительно принять гипотезу замыкания исходной системы уравнений, определив каким-либо способом неизвестные корреляционные моменты, описывающие турбулентные напряжения и потоки тепла. Большинство известных моделей турбулентности по аналогии с молекулярным переносом основаны на гипотезе турбулентной (вихревой) вязкости в совокупности с моделью градиентного переноса Буссинеска для соответствующей гидродинамической субстанции. В связи с тем, что модели турбулентности в основном построены для развитых течений при больших числах Рейнольдса, то особая сложность возникает при моделировании течений вблизи твердых стенок, где эффекты вязкости доминируют по сравнению с турбулентным переносом.

Рассмотрим конструктивную схему численного моделирования задач турбулентного движения жидкости, когда в зависимости от числа Рейнольдса и масштабов процессов переноса включается как механизм ламинарного молекулярного переноса, так и механизм турбулентного вихревого переноса одновременно. Для этого необходимо чтобы эти два механизма учитывались единой моделью переноса, например, с помощью модели градиентного переноса, но с использованием суммарной эффективной динамической вязкости  $\mu_{эф}$

$$\mu_{эф} = \mu + \mu_t,$$

где  $\mu$  - физическая динамическая вязкость, а  $\mu_t$  - турбулентная вихревая псевдовязкость. Такой подход позволяет более адекватно учесть смешанный механизм процессов переноса импульса в турбулентном потоке, а какой из них окажется доминирующим, будет определяться в процессе расчетов в локальных точках нестационарного турбулентного потока согласно принятой алгебраической или дифференциальной параметрической модели турбулентности.



Желая использовать изложенную концепцию при моделировании турбулентных течений, выпишем стандартную форму гипотез ламинарного и турбулентного градиентного переноса для тензоров суммарных вязких и турбулентных напряжений  $(p_{ik} + \tau_{ik})$ , потоков тепла  $(q_i + q_{it})$  и потоков вещества  $(m_i + m_{it})$  соответственно в следующем виде [42]:

$$p_{ik} + \tau_{ik} = -p \cdot \delta_{ik} + (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} \right), \quad (8.41)$$

$$q_i + q_{it} = (a + a_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}; \quad m_i + m_{it} = (D + D_t) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i},$$

где

$$\mu = \nu \rho; \quad \mu_t = \nu_t \rho; \quad a = \frac{\nu}{\text{Pr}}; \quad a_t = \frac{\nu_t}{\text{Pr}_t}; \quad D = \frac{\nu}{\text{Sc}}; \quad D_t = \frac{\nu_t}{\text{Sc}_t}.$$

Их использование позволяет записать обобщенную систему уравнений для турбулентного стратифицированного потока в случае несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска. Действительно, дополняя систему уравнений движения жидкости уравнением состояния, переноса тепла и уравнением для концентрации химического компонента, приходим к следующей форме записи этой обобщенной системы уравнений в консервативной тензорной форме [42, 164]

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_i \bar{v}_k) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) \right] + g \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \delta_{i3}; \quad (8.42)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} = 0; \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0 (\beta T' + \beta_c C'); \quad (8.43)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (a + a_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \right] + Q; \quad (8.44)$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k \bar{C}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (D + D_t) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_k} \right] + Q_1. \quad (8.45)$$

Здесь черта сверху традиционно обозначает осредненное значение,  $\nu$  и  $\nu_t$  - коэффициенты молекулярной и турбулентной вихревой псевдовязкости,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $\delta_{i3}$  - символ Кронекера,  $a$  и  $D$  - коэффициенты молекулярной температуропроводности и диффузии,  $a_t$  и  $D_t$  - коэффициенты турбулентной температуропроводности и диффузии. Напомним, что коэффициенты молекулярного переноса  $\nu, a, D$  являются постоянными физическими характеристиками жидкости. А коэффициенты турбулентного

переноса  $\nu_t, a_t, D_t$  являются переменными величинами и зависят от параметров потока.

Способ определения этих неизвестных коэффициентов турбулентного переноса в зависимости от характеристик течения принято называть моделью турбулентности, с помощью которой исходная система уравнений движения жидкости становится замкнутой. Очевидно, что при необходимости в систему уравнений могут быть добавлены источники слагаемые.

В практических расчетах турбулентных течений разными авторами используются модели различной степени сложности, от так называемых, алгебраических до дифференциальных двухпараметрических моделей и моделей, использующих полные дифференциальные уравнения переноса напряжений Рейнольдса [42, 72]. Наиболее сложные модели не всегда являются лучшими, так как они основаны на использовании определенных допущений и большого количества неуниверсальных эмпирических констант. Вследствие этого вопрос о выборе той или иной модели замыкания к конкретным задачам расчета турбулентных течений, неизбежно вызывает полемику и определяется на основе опыта и квалификации исследователя с последующим сравнением результатов расчета с экспериментом или другими подходящими данными.

В качестве примера использования дифференциальной модели турбулентности рассмотрим подробнее стандартную двухпараметрическую  $(k - \varepsilon)$ - модель турбулентности. Для описания течения будем использовать систему двумерных уравнений движения в форме Рейнольдса (8.42). Согласно  $(k - \varepsilon)$ - модели динамический коэффициент турбулентной вязкости  $\mu_t$  выражается через кинетическую энергию турбулентности  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$  с помощью соотношений Колмогорова-Прандтля [42]

$$\mu_t = \rho_0 C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \nu_t = \mu_t / \rho_0, \quad (8.46)$$

где параметры модели  $k$  и  $\varepsilon$  удовлетворяют следующим модельным уравнениям переноса [42]

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{(\nu + \nu_t)}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + G - \varepsilon, \quad (8.47)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} f_1 G - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (8.48)$$

Здесь

$$G = -\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + g \delta_{i3} \beta \overline{v'_i T'}, \quad (8.49)$$

$C_\mu, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$  - эмпирические константы,  $f_\mu, f_1, f_2$  - эмпирические функции. В настоящее время имеется несколько модификаций  $(k - \varepsilon)$ -модели турбулентности, которые отличаются друг от друга, главным образом, видом эмпирических функций  $f_\mu, f_1, f_2$  и в меньшей мере значениями эмпирических констант  $C_\mu, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$ . Однако эти функции и константы не универсальны. Они зависят от класса рассматриваемых течений. Поэтому достаточно надежно они определены лишь для некоторых простых течений. Чаще всего в расчетах используются значения констант, заимствованные из работы Б. Лаундера и Д. Сполдинга [307].

Пусть пока для простоты функция  $f_\mu = f_1 = f_2 = 1$ . Тогда общая система уравнений (8.42) – (8.49) турбулентного движения и тепломассопереноса в приближении Буссинеска, учитывающая линейную стратификацию по температуре и использующая для замыкания  $(k - \varepsilon)$ -модель турбулентности в прямоугольной декартовой системе координат для двумерного течения может быть записана в следующем консервативном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right]; \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}^2)}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] - \\ &\quad - g\beta(T - T_0 + m\gamma); \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{T})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{T})}{\partial y} + \bar{v} \frac{b}{H} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( a + \frac{\nu_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( a + \frac{\nu_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + \nu\varphi; \quad (8.50) \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{c})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{c})}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( D + \frac{\nu_t}{\text{Sc}_t} \right) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right] &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( D + \frac{\nu_t}{\text{Sc}_t} \right) \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right]; \\ \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{k})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{k})}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} \right] &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right] + G - \varepsilon; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\varepsilon)}{\partial y} &= C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} G - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \text{ где} \\ \text{где } G &= \nu_t \Phi - \frac{\nu_t}{\text{Pr}_t} \cdot g \cdot \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial y}; \quad \Phi = 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

Здесь для простоты предполагалось, что диссипативные  $\overline{E}, \overline{E'}$  и источники  $Q, Q_1$  слагаемые уравнений переноса тепла и вещества отсутствуют, параметр стратификации  $m = (T_0 - T_w) / H$  и введены соответствующие турбулентные числа Прандтля  $Pr_t$  и Шмидта  $Sc_t$ .

Решение такой сложной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных возможно только численными методами. Для удобства их применения целесообразно перейти к безразмерным переменным. С этой целью, как обычно, введем в рассмотрение характерные масштабы длины  $L$ , скорости  $u_0$ , времени  $t_0 = L / u_0$ , плотности  $\rho_0$ , давления  $p_0 = \rho_0 u_0^2$ , температуры  $\Delta T = T_0 - T_w$ , концентрации  $c_0$ , вязкости  $\nu_0 = \nu$ . Тогда рассматриваемая система уравнений турбулентного движения для линейно-стратифицированного потока в безразмерных переменных

$$X = x / L, \quad Y = y / L, \quad U = u / u_0, \quad V = v / u_0, \quad \theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad \tau = t u_0 / L,$$

$$P = (p - p_0 + \rho_0 g y) / \rho_0 u_0^2, \quad C = c / c_0, \quad R = \nu_t / \nu, \quad K = k / u_0^2, \quad E = \varepsilon L / u_0^3,$$

$$Re = u_0 L / \nu, \quad \Pi = GL / u_0^3, \quad \Phi = EL / u_0^3$$

принимает вид :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial(U^2)}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial X} \left[ (1+R) \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left[ (1+R) \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right], \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(V^2)}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial X} \left[ (1+R) \left( \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left[ (1+R) \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + \\ &+ Ri_0 \left( \theta + \frac{b}{H} Y \right); \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(\theta U)}{\partial X} + \frac{\partial(\theta V)}{\partial Y} = -\frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{1}{Pe_r} (1+R \frac{Pr}{Pr_t}) \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{1}{Pe_r} (1+R \frac{Pr}{Pr_t}) \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] - V \frac{b}{H}; \quad (8.51)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{\partial(CU)}{\partial X} + \frac{\partial(CV)}{\partial Y} = -\frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{1}{Pe_d} (1+R \frac{Sc}{Sc_t}) \frac{\partial C}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{1}{Pe_d} (1+R \frac{Sc}{Sc_t}) \frac{\partial C}{\partial Y} \right];$$

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} + \frac{\partial(KU)}{\partial X} + \frac{\partial(KV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{1}{Re} (1 + \frac{R}{\sigma_k}) \frac{\partial K}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{1}{Pe_r} (1 + \frac{R}{\sigma_k}) \frac{\partial K}{\partial Y} \right] + \Pi - \Phi;$$

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial(EU)}{\partial X} + \frac{\partial(EV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{C_\varepsilon}{Re} \frac{R}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{C_\varepsilon}{Re} \frac{R}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial Y} \right] + \frac{E}{K} (C_{\varepsilon 1} \Pi - C_{\varepsilon 2} E).$$

Здесь  $p_0$  - характерное давление,  $\rho_0, T_0$  - плотность и температура при  $p = p_0$ ,  $Re$  - число Рейнольдса,  $Ri_0$  - число Ричардсона,  $R = \nu_t / \nu$  - безразмерная турбулентная псевдовязкость,  $Pe = u_0 L / a = Re \cdot Pr$ ,  $Pr = \nu / a$ ,  $Pr_t = \nu_t / a_t$ ,  $Pe_d = u_0 L / D = Re \cdot Sc$ ,  $Sc = \nu / D$ ,  $Sc_t = \nu_t / D_t$ ,  $\sigma_k = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1$  - соответствующие ламинарные и турбулентные числа Пекле, Прандтля и Шмидта.

После того как модель замыкания выбрана, в принципе, можно приступить к численному решению соответствующей системы уравнений при заданных начально-краевых условиях. Однако, в настоящее время стали возможны и другие альтернативные подходы к проблеме математического моделирования турбулентных течений, один из которых рассматривается в следующей главе.

## **ГЛАВА 9**

# **НОВАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ И МЕТОД ИХ РАСЧЕТА**

### **9.1. Введение**

Физическое и математическое моделирование турбулентного режима движения жидкостей и газов, начавшееся в конце девятнадцатого века, остается одной из центральных тем в различных областях гидродинамики, аэродинамики, газовой динамики, теплообмена, метеорологии, геофизики, химических технологий, машиностроении и т. д. Такой постоянный интерес к этой проблеме определяется тем, что турбулентные режимы течения являются самой распространенной формой движения жидкостей и газов в природе и технике. В мире затрачены огромные усилия на то, чтобы понять и изучить это сложное физическое явление с целью разработки его математической модели и надежного расчета характеристик турбулентных течений.

В настоящее время в различных странах ежегодно публикуется огромное количество журнальных статей, в которых сообщается о результатах исследований турбулентных течений применительно к решению конкретных задач. При этом результаты численных расчетов турбулентных течений сравниваются с экспериментальными данными, а методы расчетов и их численные алгоритмы постоянно совершенствуются. Наряду с этим развитие исследований по проблемам турбулентности характеризуется наличием коллективных монографий и обзоров, подготовленных группой ученых, в основу которых положены тексты лекций и докладов, прочитанных ими в университетах, на семинарах и различных конференциях [73, 142, 200-203]. Такой подход содействует оперативному появлению в печати определенных достижений в этой области и более глубокому пониманию нерешенных проблем в таком разделе науки как турбулентность.

В 2004 г. интересный хронологический обзор моделей турбулентных течений и методов их расчета опубликовал Ю. В. Лапин [128]. Его статья посвящена 70-летию кафедры «гидроаэродинамика» Санкт Петербургского Государственного Политехнического Университета, которой он заведовал после профессора Л. Г. Лойцянского (1900- 1991). В статье представлено краткое описание характерных идей, подходов и моделей турбулентности,

которые на протяжении многих лет составляли основу практических расчетов турбулентных течений. Ниже рассматривается краткое содержание этой работы, так как она убедительно показывает необходимость создания новой альтернативной модели турбулентности.

Начало статьи посвящено рассмотрению проблемы моделирования турбулентности на основе метода Рейнольдса, когда мгновенные значения параметров течения представляются в виде суммы осредненных по времени значений и пульсационных составляющих. Отмечается вклад Буссинеска в идею использования градиентных моделей в процессах переноса различных гидродинамических субстанций и огромная значимость теории «пути смешения» Л. Прандтля (1925), которая в свое время предопределила успех всей полуэмпирической теории турбулентности. Принципиальное теоретическое и практическое значение для решения проблемы замыкания уравнений турбулентного движения имели формулы Прандтля для турбулентной вязкости во внутренней области пограничного слоя и формула Клаузера [106] для внешней области.

В 1968 г. в Стэнфорде (США) состоялась 1-ая Стэнфордская конференция, посвященная проблемам турбулентного пограничного слоя и оценке практических возможностей имеющихся моделей турбулентности для замыкания системы уравнений движения жидкости для первых моментов. Общая тональность заключительного заявления конференции отметила неудовлетворительность решения проблемы моделирования турбулентности.

Косвенным следствием этой оценки стало заметное снижение в последующие годы интереса к разработке алгебраических моделей турбулентности и уменьшение масштабов экспериментальных исследований. Такое положение дел послужило толчком для более интенсивных разработок полуэмпирических дифференциальных моделей турбулентности на основе использования уравнения для кинетической энергии турбулентности.

Теория А.Н. Колмогорова [110] и Л. Прандтля [343] о локальной структуре изотропной турбулентности при больших числах Рейнольдса позволила установить универсальную связь между турбулентной вихревой псевдовязкостью, кинетической энергией турбулентности и ее масштабом или скоростью диссипации энергии турбулентности. Однако возможности использования этой модели для вихревой вязкости при описании турбулентных течений оказались ограниченными и применимы лишь к областям течения лежащим выше вязкого подслоя и переходной области. Это обстоятельство привело к созданию модифицированных моделей, состоящих в использовании так называемых пристеночных функций [20, 186].

Длительный опыт применения стандартной  $(k - \varepsilon)$  - модели с использованием различных модификаций пристеночных функций показал нерешенность многих проблем турбулентности. Особенно это очевидно при описании пристеночных эффектов в потоках с большими продольными

перепадами давления и при умеренных числах Рейнольдса. Итог развития этого направления исследований подвела 2-ая Стенфордская конференция (1980 г.) . Результаты оказались неутешительными и мало отличались от оценок 1-ой конференции. Особенно выделялась неудовлетворительность эффективностью многочисленного семейства  $(k - \varepsilon)$  - моделей применительно к расчету пристенных течений при наличии отрыва турбулентного пограничного слоя под действием сильного положительного перепада давления.

Попыткой улучшить описание пристенных течений в рамках рассматриваемого класса дифференциальных моделей турбулентности явилось предложение использовать вместо уравнения для скорости диссипации  $\varepsilon$  уравнение для параметра  $\omega = \varepsilon / c_\mu k$ , имеющего размерность частоты (1/с). Такая  $(k - \omega)$  - модель была предложена Уилкоксом в 1988 г. [378] и стала весомым вкладом в моделирование пристенных течений при больших продольных перепадах давления.

В течение двух десятилетий двухпараметрические дифференциальные модели турбулентности  $(k - L, k - \varepsilon, k - \omega)$  занимали лидирующие позиции в проблеме моделирования турбулентности. Однако в 1993 году конкуренцию этим моделям составила двухпараметрическая, так называемая двухзональная  $(k - \omega)$  - модель, предложенная Ф. Ментера [322, 324]. В рамках этой модели во внутренней области пристенного течения использовалась модифицированная  $k - \omega$  - модель Уилкокса, а во внешней – стандартная  $k - \varepsilon$  - модель. Эта модель уже почти двадцать лет успешно применяется для решения различных практических задач, однако она, как и другие модели изначально ограничена постулатами Рейнольдса, связанными с операцией осреднения исходных уравнений и нерешенностью проблемы замыкания этих уравнений. То же самое замечание относится и к моделям турбулентности основанным на уравнениях переноса для компонент тензора напряжений Рейнольдса [42, 72, 131, 134].

В 1992 г. появилась однопараметрическая модель Спаларта-Аллмараса (SA) [365], в которой постулируется дифференциальное уравнение для коэффициента турбулентной вязкости. Далее появились и другие ее версии. В 1997 г. появилась модель CARC [364], а в 2003 г. модель SALSA [354], которые успешно применяются в прикладных расчетах [104, 165-168].

Значительное внимание в обзоре Ю.В. Лапина уделено и рассмотрению так называемых альтернативных подходов к моделированию турбулентности. Одним из них является «прямое численное моделирование» DNS (Direct Numerical Simulation) уравнений Навье-Стокса. На основе этого метода удалось получить ряд интересных результатов. Однако характерной особенностью метода DNS является их пространственная ограниченность и умеренные числа Рейнольдса. Другой альтернативой моделирования



турбулентности является, так называемое «крупномасштабное вихревое моделирование» LES [206]. Основная идея этого метода заключается в формальном математическом разделении крупных и мелких вихревых структур посредством операции фильтрации исходных уравнений, которая по существу является операцией сглаживания. Этот подход приводит к уравнениям содержащим неизвестные корреляционные моменты для фильтрованных зависимых переменных, которые необходимо моделировать. В литературе известно значительное количество подсеточных моделей фильтров и примеров расчета турбулентных характеристик [123, 124, 318]. Тем не менее до сих пор нет полной ясности в преимуществе подсеточных моделей и вариантах размеров фильтра. В связи с этим в практическом отношении, по-видимому, предпочтительней является модель Смагоринского [202, 362] для турбулентной вязкости, которая определяется через подсеточный масштаб первого порядка.

Следующий альтернативный метод моделирования турбулентности известен как метод DES (метод моделирования отсоединенных вихрей [194]). Для этого метода характерен гибридный подход, который заключается в использовании метода Рейнольдса RANS только в тех областях потока, где линейный масштаб  $L_T$  меньше масштаба сетки  $\Delta$ , а в остальной области, где  $\Delta < L_T$ , используется метод LES. Для замыкания системы уравнений движения в конкретной реализации метода LES используются ( $k - \varepsilon$ ) модель [124], SA модель [365] и другие [194].

Таким образом, в настоящее время можно выделить четыре основных способа решения задач расчета основных характеристик турбулентных течений, которые включают:

- метод RANS (Reynolds Averaged Navier- Stokes equations), в котором используются осредненные по Рейнольдсу или Фавру уравнения Навье-Стокса замкнутые с помощью алгебраических или дифференциальных моделей турбулентности;
- метод DNS (Direct Numerical Simulation) - прямое численное моделирование, при котором решаются нестационарные уравнения Навье-Стокса без каких либо замыкающих соотношений;
- метод LES (Large Eddy Simulation), который основан на решении нестационарных уравнений Навье-Стокса с моделированием влияния вихрей подсеточного масштаба;
- метод DES (Detached Eddy Simulation), который является комбинацией двух предыдущих подходов, когда в зоне внешнего «гладкого течения» используется RANS, а в зоне отрыва потока с крупными вихрями - LES метод;

Как обычно критерием оценки достоинств и недостатков всех моделей обычно служат результаты вычислительного и физического эксперимента. Анализ таких результатов свидетельствуют о том, что указанные модели и

методы расчета турбулентных течений не позволяют рассчитывать мгновенные характеристики всегда нестационарных турбулентных течений. Они позволяют фактически оценить только степень пригодности модели замыкания при определении тех или иных параметров течения в различных прикладных задачах. Это обстоятельство приводит к необходимости поиска новых альтернативных подходов к моделированию турбулентных течений.

Казалось бы, что начинать надо с определения явления турбулентности. Однако сделать это оказалось очень сложно, а существующие попытки такого плана пока нельзя признать удовлетворительными. Одно из первых определений турбулентности было сформулировано еще Дж. Тейлором и Т. Карманом (1937) [226] и связано с понятием «неупорядоченности» течения. Второе развернутое определение было дано Бредшоу (1974) [38]. «Турбулентность – это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения. Она является обычным состоянием движущейся жидкости, за исключением течений при малых числах Рейнольдса». Следующее определение, связано с понятием «хаоса» [156]. Однако возможность описать детали хаотического движения как функцию времени и пространственных координат очевидно является нереальной задачей. К счастью, турбулентное движение жидкости хотя и содержит элементы хаоса и неупорядоченности, но оно поддается описанию с помощью детерминированных законов сохранения механики сплошных сред. Это открывает принципиальную возможность построить модель таких нестационарных течений и рассчитать мгновенные значения скорости и давления в потоке. Обычно при анализе турбулентного течения изучают осредненные и пульсационные характеристики течения, а мгновенные значения расчету не поддаются. В этом состоит основной недостаток существующих моделей турбулентности.

Настоящая книга содержит не только накопленный материал по моделированию турбулентности за прежние годы, но и раздел в котором отдельно представлено наше понимание современного состояния некоторых вопросов моделирования турбулентности и обобщены результаты наших исследований за последние годы. В основу предлагаемого ниже подхода заложена не только модификация модели турбулентности, но и коррекция самой модели жидкости, способной более адекватно описать нестационарные турбулентные течения. Подробности этого подхода рассматриваются далее.

## 9.2. Особенности математического моделирования и физическая природа эффектов турбулентности

При математическом моделировании различных видов турбулентных течений на основе системы уравнений механики сплошных сред необходимо учитывать их характерные масштабы длины, скорости и времени. Это позволяет среди их огромного многообразия выделить хотя бы крупномасштабную и мелкомасштабную турбулентность. Совершенно очевидно, что течение жидкости, например, в океане или движение воздушных масс в атмосфере следует отнести к крупномасштабным турбулентным течениям, а течения в пограничных слоях возле твердых поверхностей или движущихся тел, а также движение жидкости в трубах, каналах и других технических устройствах тогда можно отнести к мелкомасштабным турбулентным течениям, которые и будут рассматриваться в дальнейшем. Это разделение турбулентных течений на два больших класса конечно является условным. Естественно, что в каждом из этих больших классов течений могут быть выделены еще и другие их подклассы. Так, например, течения в океане охватывают широчайшую область масштабов длины от сантиметров до тысяч километров, а масштабы времени составляют периоды от секунд до года. Совершенно очевидно, что получить строгое решение гидродинамической задачи для движений всех масштабов нереально. В моделях атмосферной турбулентности по этой причине принято выделять глобальные, региональные, локальные и другие модели [43]. Поэтому постановка решения задач механики жидкости и газа в рамках моделей сплошных сред целесообразна лишь на ограниченном участке спектра масштабов длин и частот, расположенного, например, где-нибудь в области максимальных градиентов изменчивости параметров рассматриваемой системы или явления.

При изучении мелкомасштабных турбулентных течений влияние больших масштабов в первом приближении можно учесть, например, через граничные условия задачи или как фоновые значения определенных параметров. Но детальное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки нашего обсуждения.

В данной работе рассматривается обычный классический подход к моделированию мелкомасштабного турбулентного течения с поперечным сдвигом при котором приходится традиционно использовать ряд известных гипотез и допущений. Одна из них связана с возможностью описания движения сплошной среды как континуума на макроуровне. Это дает возможность не рассматривать в движущейся среде ансамбли молекул и их взаимодействие, как это делается в кинетической теории газов на основе известных уравнений Больцмана. Однако это допущение сразу ограничивает наше рассмотрение существованием нижнего предела масштаба длины в

проблеме моделирования турбулентности, когда, например внутренний масштаб длины Колмогорова [128] должен быть большим по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул. Для большинства мелкомасштабных турбулентных течений, представляющих практический интерес, это требование выполняется. Действительно, если для умеренных скоростей воздушного потока порядка 100 м/сек принять, что наименьший масштаб вихря равен 1 мм, то эта величина еще очень велика по сравнению с длиной свободного пробега молекул, которая имеет порядок  $10^{-4}$  мм. Приблизительно в одном кубическом миллиметре воздуха содержится  $2,7 \cdot 10^{16}$  молекул. Следовательно, при исследовании турбулентных течений газа и жидкости при умеренных скоростях могут рассматриваться как сплошные среды. Кроме того, приемлемые значения турбулентных пульсаций скорости составляют примерно 10% от средней скорости потока и лежат скажем в пределах от 1 до 1000 см/сек. В случае воздуха средняя скорость молекул имеет порядок около 50000 см/сек. Следовательно, если частота турбулентных пульсаций изменяется от 1 до  $10^4$  сек $^{-1}$ , то частота столкновений молекул составит около  $5 \cdot 10^9$  сек $^{-1}$ . Таким образом, диапазон пульсаций, характерный для турбулентности, лежит достаточно далеко от диапазона соответствующих молекулярных величин. Следовательно, пространственно-временные масштабы турбулентности существенно превосходят пространственно-временные масштабы молекулярных движений. Поэтому для описания движения жидкости в принципе можно использовать известные уравнения движения механики сплошных сред в интегральной конечно-объемной форме или в виде системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса или Рейнольдса.

Обсудим кратко некоторые общие свойства мелкомасштабной турбулентности. Одним из важнейших свойств турбулентных течений является их нестационарность по времени и неупорядоченность по пространственным координатам. Кроме того, турбулентность характеризуется интенсивными процессами переноса импульса, которые сопровождаются каскадным механизмом переноса энергии движения жидкости из одних слоев в другие. При этом, как правило, перенос осуществляется от больших масштабов к меньшим. Поэтому турбулентность может существовать только при непрерывном подводе энергии от основного течения, либо за счет работы, например, архимедовых сил плавучести, или за счет дополнительных вихревых напряжений трения в основном потоке.

В настоящее время выполненные многочисленные эксперименты показывают, что в потоках с большими числами Рейнольдса вихревые структуры играют решающую роль в возникновении и поддержании турбулентности, при этом картина зарождения самих вихрей часто носит периодический характер [105, 293]. В случае обтекания каких-либо тел или геометрических неоднородностей на стенке, образующиеся вихри

распространяются по потоку на большие расстояния, во много раз превосходящие характерный размер этих тел или препятствий, послуживших причиной их возникновения. Кроме того, при движении жидкости вдоль твердой стенки внешний поток вызывает напряжение растяжения жидкости вследствие ее прилипания к стенке и на ней при определенном значении напряжений зарождаются вихревые системы, которые развиваются в отчетливо выраженные продольные вихри [227, 275, 357, 367, 235]. Подобные упорядочные вихревые структуры обнаруживаются не только в пристенных течениях, но и в свободных слоях смешения на фоне нестационарных полей давления и скорости. При этом эти структуры взаимодействуют между собой и обмениваются энергией. В результате, например, в пристеночной области сдвигового течения зарождаются и существуют мелкомасштабные вихри и когерентные структуры, известные в литературе как своеобразные «полосы» [292 - 294]. Эти структуры представляют собой продольные вихри с встречным вращением. Такие вихри при определенных числах Рейнольдса могут спонтанно разрушаться, образуя соответствующие возмущения в потоке. Вследствие этого, в зависимости от их масштабов и частоты в потоке формируется переходная или развитая турбулентность.

Существование такой структуры течения было установлено и подтверждается визуальными исследованиями С. Клайна и др. [297, 105], Дж. Кима и др. [292, 294], а также Е. П. Корино, Р. С. Бродки [115]. Известны и другие исследования этих механизмов [201]. Обзор и анализ современных представлений о вихревых и когерентных структурах в пограничном слое имеется, например, в работах В.В. Бабенко и др. [11, 13]. Там же приведена обширная библиография работ этого направления. Очевидно, что характер взаимодействия вихревых структур в потоке в основном и определяет тонкую структуру мелкомасштабной турбулентности.

Чтобы глубже проникнуть в суть проблемы зарождения турбулентности заметим, что потеря устойчивости исходного ламинарного течения по отношению к возникающим в потоке гидродинамическим возмущениям или возмущениям поступающим извне, является необходимым, но не достаточным условием перехода ламинарного режима течения к турбулентному. Если нарастание энергии в потоке от возмущений происходит быстрее, чем ее потеря вследствие трения и вязкой диссипации, то течение может потерять устойчивость, но это еще не означает переход к турбулентному режиму. Процесс перехода зависит от величины числа Рейнольдса. Еще К. К. Федяевский. [205] и И.К. Никитин [150] отмечали, что наличие волновых возмущений и пульсаций скорости в потоке не означают, что течение стало турбулентным. Оно может считаться турбулентным лишь при наличии в нем вихревой турбулентной вязкости, появление которой в потоке обусловлено механизмом типа обрушения внутренних волн и их свертывания в

мультивихревые структуры. Эта концепция согласуется с нашей гипотезой о том, что основу зарождения турбулентности составляет изменение напряженного состояния жидкости, обусловленное вихревой нестационарностью в потоке. При этом коэффициент вихревой турбулентной псевдовязкости является средством моделирования этих дополнительных касательных напряжений. Поэтому характерным условием перехода течения к турбулентному режиму является увеличение числа Рейнольдса до значения при котором энергия основного потока, например, в трубе или канале, станет больше той, которая необходима для преодоления сил трения, эффектов диссипации и возникновения спонтанного разрушения вихревых структур.

В гидродинамике ламинарных течений с поперечным сдвигом диссипативные процессы определяются градиентами скоростей, которые высоки вблизи твердой стенки. В турбулентном потоке диссипация происходит более интенсивно, так как кроме обычного механизма существуют еще нестационарность течения, которая порождает большие локальные градиенты скорости и дополнительно увеличивает касательные напряжения в жидкости. Вследствие этого интенсифицируются и процессы переноса в таком нестационарном потоке по сравнению с ламинарным режимом течения. При этом с ростом числа Рейнольдса вихри становятся все более мелкими, а сам процесс обмена импульсом принимает каскадный характер. Вследствие этого диапазон линейных масштабов турбулентности с ростом числа Рейнольдса расширяется, что и наблюдается при экспериментальных исследованиях.

О. Рейнольдс экспериментально установил, что течение в трубе может стать турбулентным, если число  $Re > 2000$  [171]. Это значение обычно служит критерием для определения перехода и в плоских каналах и других инженерных гидродинамических задачах. Однако, известно, что если вход в трубу или канал очень плавный и окружающая среда неподвижна, то течение может оставаться ламинарным при существенно больших числах Рейнольдса [188].

Широкополосный энергетический спектр турбулентности не позволяет простыми средствами определить вид временной зависимости флуктуаций гидродинамических параметров в турбулентном потоке. С уверенностью можно лишь утверждать, что эти флуктуации не являются следствием только граничных условий рассматриваемого течения. Развитое турбулентное движение жидкости является намного более сложным и предвидеть вихревую структуру таких течений можно лишь на основе глубокого изучения внутренней динамики вихревых образований, которые обнаруживают свойства к самоорганизации в них мелко- и крупномасштабных продольных вихрей с встречным вращением.

Обсудим кратко механизм переноса и поддержания турбулентной кинетической энергии в нестационарном потоке. Для наглядности модельного представления процесса переноса кинетической энергии в движущейся среде удобно использовать понятие цилиндрического контрольного объема и вихревых трубок [201]. Рассмотрим воображаемый цилиндрический объем жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью. Пусть он обладает массой  $m$ , кинетической энергией  $E$  и моментом количества движения  $M$ . Представим себе, что этот вихревой элемент растягивается, при этом его момент количества движения остается постоянным. Это имеет место если диффузия пренебрежимо мала или жидкость идеальная, то есть без вязкости. Тогда растяжение будет увеличивать завихренность и энергию вращающегося элемента, причем требуемая работа совершается на концах растягивающегося цилиндра. Такая простая модель переноса энергии от больших масштабов движения к малым объясняет механизм изменения масштаба скорости при растяжении, который имеет место в турбулентном потоке и часто моделируется в виде суперпозиции вихревых трубок [201]. Но поскольку растяжение происходит в направлении нормальном плоскости вращения вихря, то очевидно, что эта форма переноса энергии требует, чтобы движение жидкости было трехмерным, так как параллельные ячейки не могут растягивать одна другую. Некоторый аналог описанного механизма вихревых течений можно визуально наблюдать в природе при возникновении смерчей или торнадо.

Из экспериментальных исследований известно, что самый большой масштаб вихря может быть близок к поперечному размеру потока. Очевидно, что источником энергии основного потока в трубе или канале является перепад давления; в пограничном слое это – внешний поток; в струе это – начальная кинетическая энергия жидкости и т.п. Перенос этой энергии независимо от характера источника, осуществляется каскадным механизмом от осредненного движения к большим вихрям, от них к меньшим и т.д. Самые малые их масштабы диссипируют вследствие вязкости. Это представление объясняет наличие широкого диапазона временных и пространственных масштабов турбулентности.

Учитывая сказанное, турбулентные течения часто моделируют движением вихрей различных масштабов. Однако, понятие вихря в турбулентности должно использоваться осторожно, так как структура полностью развитых турбулентных потоков является очень сложной и представлять ее простой суперпозицией ячеистых вихревых элементов можно лишь приближенно. Тем не менее, использование простых элементов при анализе проблемы турбулентности позволяет достигнуть определенных результатов.

Таким образом, для успешного математического моделирования турбулентных течений их модель должна учитывать в явном виде наличие в

ней вихревых структур. Такой подход может быть реализован, если модель жидкости будет содержать соответствующий гидродинамический параметр, например, в виде вихревой турбулентной псевдовязкости. Ниже мы введем такое допущение и опираясь на него попытаемся предложить некоторые новые соображения в проблеме моделирования турбулентных течений и методов их расчета. При этом важную роль в этом вопросе будет играть значительный прогресс достигнутый в области компьютерной гидродинамики, который открыл возможности прямого численного моделирования турбулентных течений на основе численного решения исходных интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии. Поэтому для перехода от описательного уровня проблемы моделирования турбулентных течений несжимаемой жидкости приступим к конкретному рассмотрению нашей будущей модели и начнем с анализа общего векторного уравнения динамики жидкости в напряжениях (1.38)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{div} \Pi + \rho \vec{F}, \quad (9.1)$$

где  $\vec{v}$  - вектор скорости,  $\Pi$  - тензор напряжений в жидкости,  $\rho$  - плотность,  $\vec{F}$  - вектор объемных сил. Это уравнение, как известно, справедливо для любых форм движения жидкости [132], включая режимы ламинарных и турбулентных течений. Далее необходимо дополнительно ввести модель сплошной среды, которая бы конкретизировала свойства сплошной среды, движущейся в ламинарном или в турбулентном режиме.

Простейшей моделью сплошной среды является, как известно, **модель идеальной жидкости** [132]. В этой модели на площадках выделенного произвольного контрольного жидкого объема  $\tau$  считают отсутствующими касательные напряжения, а присутствуют лишь нормальные напряжения.

Следующей в порядке сложности моделью сплошной среды является **модель вязкой жидкости**, в которой при движении, кроме нормальных напряжений  $p_{ii}$ , имеются и касательные напряжения  $p_{ik}$ ,  $i \neq k$ . Эти напряжения в вязкой жидкости вызывают деформацию ее жидких элементов. Поэтому для построения модели вязкой сплошной среды необходимо конкретизировать связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформации [118, 133, 187].

В случае изотропной ньютоновской жидкости было предложено использовать линейную связь между двумя рассматриваемыми тензорами. Однако, следует подчеркнуть, что это простейшее соотношение Ньютона о линейной связи тензора напряжений с тензором скоростей деформации в виде [132]

$$\Pi = p_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \mu' \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ik}; \quad \mu' = \frac{1}{3} \mu, \quad (9.2)$$



хотя и признано классическим законом, но оно является всего лишь предположением. Тем не менее, для таких жидкостей как вода и воздух оно оказалось приемлемым для адекватного описания движения этих жидкостей. Однако, как теперь очевидно, лишь при определенных условиях, когда число Рейнольдса меньше некоторого критического его значения  $Re_*$ .

Специалистам известно, что подстановка выражения (9.2) в уравнения движения в форме (9.1) приводит к получению известной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса, которые адекватно описывают законы движения жидкости в случае ламинарных режимов течения, то есть при малых и умеренных числах Рейнольдса, когда  $Re < Re_*$ . Ясно, что в более общем случае, то есть при моделировании турбулентных режимов течения, необходимо использовать более сложную модель вязкой сплошной среды, в которой при нестационарном турбулентном движении учитывались бы дополнительные вихревые напряжения в жидкости, обусловленные механизмом действия поперечных пульсаций нестационарного поля скорости, которые связаны с внутренней динамикой вихревых структур и растяжением вихревых трубок [201]. Опираясь на такие представления, сосредоточимся на обсуждении вопросов, связанных с механизмом зарождения турбулентности и ее поддержанием в потоке. А впоследствии рассмотрим новую модель турбулентных течений и метод их расчета.

### **9.3. Переход ламинарного течения в турбулентное**

Чтобы лучше понять идейную сторону новой модели турбулентных течений рассмотрим предварительно некоторые вопросы перехода ламинарного течения в турбулентное. Эта проблема является одной из наиболее сложных проблем в механике жидкости. Попытки ее решения имеют более чем вековую историю.

Физическая природа процесса перехода рассматривалась еще Г. Хагеном, а затем О. Рейнольдсом (1883 г.). В экспериментальных исследованиях процесс перехода обычно определялся по появлению пульсационных скоростей, разрывающих струйку окрашенной жидкости, или по резкому возрастанию коэффициента сопротивления. Эти и другие исследования показали, что причиной перехода ламинарного течения в турбулентное является его гидродинамическая неустойчивость. При этом ламинарный слоистый характер течения сохраняется лишь при числах Рейнольдса меньших некоторого его критического значения  $Re_*$ .

С ростом числа Рейнольдса ламинарный режим течения теряет свою устойчивость и достигает состояния, при котором локальные параметры течения, такие как скорость, давление и температура начинают испытывать флуктуации. Эти колебания являются результатом появления гидродинамических возмущений, которые при малых числах Рейнольдса не

развиваются. Но когда число Рейнольдса достигает некоторого критического значения  $Re_*$ , то в зависимости от класса течения, эти возмущения имеют свойство развиваться и изменять кинематическую структуру течения. В истории исследования механизма перехода особое внимание уделялось главным образом исследованию вопроса устойчивости двумерных течений по отношению к малым возмущениям простейшего вида.

Теоретически проблема гидродинамической устойчивости течений и их перехода от ламинарного режима течения к турбулентному, традиционно рассматривалась с позиций метода малых возмущений. Однако, определенный прогресс в компьютерной гидродинамике дает возможность исследовать этот вопрос и на основе прямого численного решения системы нестационарных уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости и в принципе позволяет рассчитать динамику мгновенных значений параметров течения в широком диапазоне чисел Рейнольдса в зависимости от времени в любой точке расчетной области, как это показано в десятой главе данной книги.

Из классической гидромеханики известно, что течения вблизи твердых стенок при отсутствии физической вязкости очень устойчивы. Для появления гидродинамической неустойчивости профиль скорости в локальных областях таких течений должен иметь перегибы, а это возможно лишь при образовании в потоке вихревых структур. Л. Розенхед (1932) показал [201], что если вихревой элемент изменяет направление движения, то начинается необратимый процесс его сворачивания и вихри стремятся сконцентрироваться в более крупные образования типа клубков, жгутов или вихревой пелены. Такие образования часто называют «когерентными структурами». Этот процесс характерен для случая, когда длина волн возмущений, превышает толщину слоя смешения. Физическая вязкость при этом оказывает демфирующее влияние на неустойчивость, однако это влияние сильно зависит от величины числа Рейнольдса построенного по толщине слоя смешения. Так как толщина обменного слоя смешения обычно невелика, то поэтому рост или затухание волнового возмущения сильно зависят от его местоположения в потоке. Наибольшая чувствительность к случайным возмущениям имеет место на небольшом расстоянии от стенки, где впервые начинают проявляться нелинейные эффекты за пределами вязкого подслоя. Однако эти колебания являясь низкочастотными и длинноволновыми еще не имеют прямого отношения к турбулентности. В случае малых длин волн, колебания быстро затухают, но не только под действием сил вязкости, а вследствие существования другого механизма демпфирования известного в физике плазмы, который исследовал Л. Д. Ландау [127].

Чтобы глубже проникнуть в причину и механизм перехода ламинарного течения в турбулентное обратимся к обсуждению проблемы перехода в плоском канале, то есть в потоке с поперечным сдвигом. Важно понять причину его устойчивости при числах  $Re < Re_*$  и причину потери

устойчивости при числах  $Re > Re_*$ . Результаты экспериментальных и численных исследований динамики параметров течения, например, поперечной скорости, в таком потоке показывают, что при ламинарном режиме течений ( $Re < Re_*$ ) основное течение в канале преобразует начальные возмущения таким образом, что они остаются малыми и не развиваются. При числах  $Re > Re_*$  имеет место нестационарность течения, а изменение касательных напряжений в жидкости приводит к возникновению другого, турбулентного режима течения, которое характеризуется нелинейной зависимостью тензора напряжений от тензора скоростей деформаций. Образующиеся в ламинарном пристенном слое вихревые трубки параллельны друг другу, а при турбулентном режиме течения эти трубки непрерывно изменяют свое направление и скручиваются [201]. Вблизи стенки вихревые трубки наиболее запутаны, они могут скручиваться в клубки или жгуты и потому изменяют процессы переноса импульса в жидкости, а следовательно изменяют касательные напряжения. Поэтому при определенном числе Рейнольдса  $Re > Re_*$  вблизи стенки индуцируется вихревое поле, которое взаимодействуя с профилем скорости основного сдвигового потока и вызывает новое образование вихревых структур. Этот механизм носит каскадный характер и очевидно является причиной зарождения неустойчивых колебаний в потоке с поперечным сдвигом, фиксируемых с помощью измерительной аппаратуры. При этом наличие флуктуаций в потоке приводит к внутренней нестационарности течения и к турбулентности.

Рассмотрим динамику возмущений в ламинарном и в турбулентном сдвиговом потоке. В случае ламинарного режима течения касательные напряжения в жидкости линейно зависят от тензора скоростей деформаций и осредненное течение в канале преобразует начальные возмущения в регулярные вихревые элементы, которые затем через характерное время  $t_1 = \lambda / u_0$  хотя и сохраняются, но остаются ничтожно малыми. В случае турбулентного профиля скорости, касательные напряжения в жидкости нелинейно зависят от тензора скоростей деформаций и поэтому основное течение в канале порождает рост возмущений и их флуктуаций, которые зависят от величины числа Рейнольдса. Предположим, что поперечная скорость  $v_1$  за промежуток времени  $\Delta t$  изменится на величину  $\Delta v_1$ . Это значение возмущенной поперечной скорости будет существовать до тех пор, пока основное течение не преобразует его в дискретный вихрь. Такой процесс в турбулентном потоке повторяется и это приводит к существованию в слое смешения неустойчивых колебаний конечной величины, что подтверждается, например, в экспериментах Г. Б. Шубауэра [226], И.К. Никитина [150] и других.

Таким образом, механизм возникновения перехода ламинарного течения в турбулентное может быть объяснен тем, что рост числа Рейнольдса

способствует потере устойчивости течения и зарождению вихревой нестационарности в потоке, благодаря которой возникают дополнительные касательные напряжения в жидкости, которые нелинейно связаны с тензором скоростей деформаций. Когда суммарные молекулярные и вихревые напряжения в локальной области течения превысят некоторое пороговое их значение, то это приводит к спонтанному разрушению вихревой структуры, что в свою очередь, может привести к возникновению турбулентности. Из этого следует, что переход является нелинейным и быстро протекающим процессом. Поэтому его анализ с помощью преобразования Фурье не является подходящим инструментом для исследования явлений такого класса. Их, по-видимому, нельзя описывать с помощью суперпозиции синусоидальных составляющих. Лучше исследовать волновые процессы, полученные путем прямого численного решения соответствующих исходных уравнений движения жидкости.

В заключение отметим, что обсуждая проблему перехода, следует помнить, что переход может быть стимулирован возмущениями различной природы. Это могут быть естественные факторы типа уровня начальной турбулентности, шероховатости и кривизны стенки или искусственными возмущениями типа вибраций, звуковых волн, электрических полей и т.д. Как сопоставлять влияние возмущений различного вида на процесс возникновения перехода до сих пор не ясно. Вероятно возмущения различного вида следует связывать с завихренностью, так как она является ключевым фактором в этой проблеме.

#### **9.4. Модель течений жидкости с вихревой псевдовязкостью**

Возвращаясь к нашей главной теме отметим, что методы математического моделирования течений вязкой жидкости должны основываться на известном экспериментальном факте о существовании в природе и технике ламинарных и турбулентных режимов течения. Современный уровень знаний в области моделирования и расчетов ламинарных течений вязкой жидкости позволяет считать, что система нестационарных уравнений Навье-Стокса для ньютоновской жидкости, использующая линейную зависимость тензора напряжений от тензора скоростей деформаций, адекватно описывает режим ламинарных течений этих жидкостей и их характеристики надежно могут быть определены путем решения этих уравнений при заданных начально-краевых условиях. При этом поле скоростей и давления однозначно определяются таким безразмерным гидродинамическим параметром, как число Рейнольдса. Кроме того, в настоящее время можно считать, что принципиальный вопрос о возможности прямого численного решения нестационарных уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление для несжимаемой жидкости

является решенным для задач с простой геометрией. В литературе известно несколько способов их численного интегрирования без каких-либо особых допущений [24, 57, 165, 167, 208, 212]. Например, нами был предложен эффективный численный метод их решения [57], названный DNM-LF методом, который прошел широкую апробацию при решении ряда тестовых задач [44-49, 52 -56]. Аббревиатура DNM-LF обозначает Direct Numericul Method of Laminar Flow.

Естественно, что этот успех привел к попытке адаптировать этот метод для расчета течения с большими числами Рейнольдса, превышающими его критическое значение  $Re_*$ . Однако, как и следовало ожидать, наши численные эксперименты показали, что система уравнений Навье-Стокса адекватно описывает лишь ламинарные режимы течения при малых и умеренных числах Рейнольдса. А при увеличении числа Рейнольдса течение становится вихревым и нестационарным и тогда математическая модель перестает быть адекватной физическому процессу такого движения жидкости. Из этого следует, что в рамках двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса, использующих линейную зависимость тензора напряжений в жидкости от тензора скоростей деформаций, нельзя получить адекватное описание переходных и турбулентных режимов течения. Этот принципиальный вывод и известные результаты экспериментов указывают на необходимость разработки более сложной модели жидкости способной учитывать многогранную природу явления турбулентности. За основу такой новой модели жидкости предлагается принять жидкость, напряженное состояние которой при ее движении будет отличаться от традиционного, наличием дополнительных вихревых напряжений, обусловленных эффектами внутренней нестационарности турбулентного потока. При этом дополнительный тензор вихревых напряжений уже нелинейно связан с тензором скоростей деформаций. Приняв такие допущения с целью более адекватного моделирования турбулентных течений, введем в рассмотрение новую модель сплошной среды, содержащую дополнительный внутренний гидродинамический параметр в виде вихревой псевдовязкости  $\mu_t$ , который моделирует дополнительные вихревые напряжения в движущейся жидкости.

Отдавая себе отчет в исключительной сложности природы явления турбулентности, мы попытаемся построить физическую модель турбулентного потока в виде следующей простой схемы. Пусть турбулентное движение жидкости представляется в виде суперпозиции вихрей с различными линейными масштабами и различной их ориентацией в пространстве. Предполагается, что в развитом турбулентном потоке его структура нестационарна во времени. При этом совокупность вихревых элементов характеризуется широким спектром их масштабов. Порядок величины самых крупных вихрей может быть сравним с поперечным размером рассматриваемой области турбулентного движения, а размер наименьших

вихрей определяется процессами вязкой диссипации. В процессе турбулентного движения жидкости все вихри, независимо от их размеров испытывают деформацию в форме растяжения и сжатия со стороны основного течения и соседних вихрей, которые взаимодействуют между собой, что порождает механизм вихревой турбулентной диффузии и образование дополнительных напряжений в жидкости. Очевидно, что широкий диапазон изменения размеров вихрей и нелинейный механизм растяжения и сжатия вихревых элементов лежит в основе появления в потоке вихревой псевдовязкости и позволяет объяснить механизм перехода энергии осредненного движения к вихрям меньшего масштаба.

Действительно, если для простоты пренебречь эффектом вязкости и привлечь к рассмотрению теорему Кельвина об изменении количества движения, то из закона сохранения импульса следует, что произведение завихренности на квадрат расстояния должно оставаться постоянным, а это значит, что в процессе растяжения циркуляция скорости вокруг вихревых элементов тоже должна оставаться постоянной в отсутствие сил вязкости. Таким образом, кинетическая энергия вращательного движения увеличивается за счет кинетической энергии основного движения, вызывающего растяжение вихревого элемента. При этом растяжение вихревого элемента в одном направлении приводит к уменьшению его размера в другом направлении и увеличению составляющих скорости в двух других направлениях. Такая деформация вихревого элемента порождает новые изменения полей скорости и вихревой структуры, который в свою очередь вызывают деформацию и растяжение других вихревых образований и этот процесс происходит непрерывно. Обычно считается, что он носит каскадный характер и размеры вихревых элементов уменьшаются, а энергия основного потока частично переходит в энергию движения вихрей со все более меньшими масштабами. Очевидно с помощью такого механизма можно объяснить появление в жидкости дополнительных касательных вихревых напряжений. Указанное явление исследовалось рядом авторов. В частности, оно рассмотрено в фундаментальных работах Таунсенда (1954) и Уберои (1957). Таким образом, вихри являются носителями кинетической энергии в потоке, а анизотропность турбулентности является следствием неравномерного распределения кинетической энергии по компонентам скорости.

С физической точки зрения вихри в потоке проявляются как возмущения с энергиями, распределенными в некотором интервале волновых чисел. Каждому размеру вихря « $l$ » соответствует величина обратная волновому числу, то есть малому волновому числу соответствует больший размер вихря, и наоборот. Поэтому энергетический спектр турбулентности характеризует не только уровень турбулентной

пульсационной энергии, содержащейся в интервале волновых чисел от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ , но и вихревых напряжений в жидкости.

Таким образом, нестационарность и вихри являются причиной порождения вихревых касательных напряжений в потоке, которые достигнув определенной величины, путем спонтанного разрушения, приводят к образованию вихревой псевдовязкости. Физическая вязкость обеспечивает непрерывность процесса и участвует в перераспределении вихревых структур. При этом перенос вихревой псевдовязкости в потоке происходит благодаря механизмам конвекции и диффузии, что приводит к возникновению дополнительного обмена импульсом между слоями движущейся жидкости. Несогласование по фазе вторичных течений и основных флуктуаций жидкости является дополнительной причиной неустойчивости течения в пограничном слое или слое смешения. Сдвиг фаз двух возмущений также приводит к изменению напряженного состояния в жидкости.

Однако потеря устойчивости и наличие флуктуаций скорости еще не решает проблему возникновения турбулентности, так как появление и развитие волновых возмущений и вихрей в жидкости еще не означает его турбулентного характера. Это связано с тем, что периодические волновые возмущения сами по себе не приводят к изменению напряженного состояния в жидкости и поэтому вихревая псевдовязкость на этой стадии еще не появляется. Она возникает только при таких числах Рейнольдса при которых реализуется механизм разрушения вихревых структур в форме обрушения волн и их свертывания в мультивихревые структуры, которые и обуславливают зарождение турбулентности. При этом происходит изменение действующих в жидкости касательных напряжений, которые принято отождествлять с турбулентными напряжениями Рейнольдса. Далее вихревая турбулентная псевдовязкость в виде вихревых сгустков переносится потоком аналогично переносу других гидродинамических субстанций типа теплоты или компонентов химических веществ благодаря механизму конвекции и диффузии. Очевидно, что наличие в потоке такой дополнительной гидродинамической субстанции как вихревая псевдовязкость требует учета ее влияния на динамику и структуру основного потока и наоборот. Поэтому для расчета параметров турбулентного течения исходные уравнения движения жидкости должны быть дополнены уравнением переноса вихревой псевдовязкости по аналогии с переносом таких субстанций в потоке как тепло или химические компоненты примеси. При этом эти задачи математически будут связаны друг с другом и их нужно будет решать совместно. Количественной мерой диффузии вихревой псевдовязкости является коэффициент ее вихревого турбулентного переноса. Это практически единственный очевидный дополнительный внутренний параметр, который необходимо ввести и использовать при моделировании режима турбулентного течения.

Приступая к обсуждению режима турбулентных течений подчеркнем, что они относятся к классу течений с поперечным сдвигом, в которых изменение профиля скорости и процессов переноса вызваны в основном действием касательных напряжений. Типичными примерами таких течений являются пограничные слои, течения в трубах и каналах, струи и вихревые течения в следе за телами. Именно в таких течениях может возникнуть явление турбулентности, но необходимым условием ее зарождения является определенный уровень локальных касательных напряжений в жидкости. Такой уровень в течениях с поперечным сдвигом может возникнуть в области течения с большими градиентами скоростей. Обычно это имеет место вблизи стенки, либо при возникновении отрыва потока или в следах от каких-либо геометрических неоднородностей. А когда на жидкость, обладающую внутренним трением, начинают действовать дополнительные напряжения, то становится возможным появление различного рода вторичных течений. Если такие течения проявляются в регулярной форме, то они могут быть связаны с градиентами давления, зависящими обычно от геометрии обтекаемой поверхности. Нерегулярные формы вторичных течений, очевидно связаны с другим механизмом возникновения и перемещения жидких элементарных объемов из одного слоя жидкости в другой в направлении не совпадающем с направлением действия касательных напряжений. Этот механизм следует искать внутри самого нестационарного течения.

Данные многочисленных экспериментов показывают, что течение вязкой жидкости вблизи твердых поверхностей при больших числах Рейнольдса сопровождается процессами вихреобразования. Поэтому вопрос генерации завихренности на твердых стенках потока является ключом к анализу проблемы возникновения турбулентности. Вихревые течения в общем случае могут иметь различную физическую природу. Обычно генерация завихренности обусловлена действием сил вязкости и больших градиентов скорости, что имеет место вблизи твердых границ течения или в свободных слоях смешения струйных течений. Поэтому источником завихренности обычно является пристенная область течения или сдвиговая зона смешения. Образовавшиеся вихревые сгустки далее переносятся благодаря нестационарному механизму конвекции и диффузии. С ростом числа Рейнольдса интенсивность вихревого течения увеличивается и вихревые образования при определенных условиях способны спонтанно разрушаться подобно механизму обрушения волн, что приводит к возникновению нестационарного хаотического турбулентного режима течения. Таким образом, механизм возникновения турбулентности можно сравнить с опрокидыванием вихревых структур, а условием такого опрокидывания является превышение локальной орбитальной скорости элемента вихря в сравнении с его фазовой скоростью.



Когда процесс турбулентного движения жидкости называют хаотическим, то при этом подчеркивается целесообразность его описания с позиций случайных гидродинамических полей. Однако, это не согласуется с детерминированным характером основных законов сохранения в механике жидкости. Кроме того, современные экспериментальные исследования свидетельствуют в пользу того, что структура турбулентного потока состоит из множества вихревых образований с широким диапазоном их масштабов. Поэтому тонкая структура турбулентности определяется характером взаимодействия вихрей и их сгустков, а интересующие нас средние характеристики течения зависят от выбора интервала осреднения.

### **9.5. Основные уравнения турбулентных течений с вихревой псевдовязкостью в дифференциальной форме**

Возможность создания метода расчета мгновенных характеристик нестационарных турбулентных течений давно обсуждаются в среде специалистов [145, 216]. Предполагалось, что нестационарные трехмерные уравнения Навье-Стокса могут адекватно моделировать не только ламинарные, но и турбулентные режимы течения. Однако такой подход вызывал определенную полемику, связанную в основном с ограниченными возможностями компьютерной техники и сомнениями в том, что классическая ньютоновская модель вязкой жидкости обладает всеми свойствами, обеспечивающими физическую и математическую адекватность природы турбулентных течений.

Традиционные способы расчета характеристик турбулентных течений основываются обычно на решении уравнений движения жидкости в форме Навье-Стокса осредненных по времени, то есть на уравнениях Рейнольдса, замкнутых с помощью какой-либо модели турбулентности различной сложности, которая обычно содержит эмпирические коэффициенты. Отсутствие универсальности этих коэффициентов для различных классов течения снижает надежность и точность расчетов. Кроме того, при таком подходе, основанном на допущении о справедливости использования осредненных по времени уравнений Рейнольдса для моделирования принципиально нестационарного турбулентного течения, сводит все практические расчеты турбулентных течений фактически к оценке справедливости принятых гипотез и допущений, которые использовались для замыкания исходной системы уравнений турбулентного движения.

Учитывая сказанное, следует констатировать, что общая модель турбулентности и корректная математическая постановка задачи расчета характеристик турбулентных течений фактически пока отсутствует, так как она еще со времен Рейнольдса заменена решением задачи об определении функциональных соотношений между напряжениями Рейнольдса и

осредненными параметрами турбулентного потока. Поэтому желательно разработать новую модель сплошной среды, которая была бы лишена этих недостатков. Эта цель может быть достигнута если учесть эффекты нестационарности турбулентных течений с помощью дополнительных вихревых напряжений, возникающих в движущейся среде при числах Рейнольдса превышающих их критическое значение.

Учитывая наши результаты численного эксперимента по расчету характеристик течения в плоском канале на основе полных уравнений Навье-Стокса можно утверждать, что модель сплошной среды с линейным законом зависимости напряжений в жидкости от тензора скоростей деформаций не является адекватной моделью развитого турбулентного течения (см. раздел 4.2). Поэтому обратимся к вопросу моделирования нестационарных турбулентных течений несжимаемой жидкости с новых позиций. Очевидно, что для того чтобы сформулировать задачу расчета турбулентных течений, нужно прежде всего иметь модель таких течений и определить параметры характерные для такого режима течения. Из этого следует, что модель течения и набор параметров в ламинарном и турбулентном потоках должны быть различны. Подробнее этот вопрос удобно рассмотреть на примере пристенного течения с поперечным сдвигом. Здесь следует выделять два этапа движения жидкости вблизи твердой стенки. Первый этап относится к процессу зарождения турбулентности, а второй этап связан с условиями поддержания развитого турбулентного течения.

Выше уже отмечалось, что течение вязкой жидкости характеризуется таким параметром как число Рейнольдса. При небольших числах Рейнольдса течение обычно устойчивое и ламинарное. С ростом числа Рейнольдса слоистое ламинарное течение теряет свою устойчивость, а возникающие при этом возмущения в виде флуктуаций параметров течения и образования вихревых структур приводит к нестационарности течения, что обуславливает дополнительный перенос импульса внутри потока и изменение касательных напряжений в движущейся жидкости. При этом, согласно современным представлениям, турбулентность наступает относительно внезапно, когда напряжения в жидкости достигают такого критического уровня, что уже существующие вихревые образования выходят на этап их спонтанного разрушения подобно некоторому взрыву или механизму обрушения волн. Благодаря этому внутри жидкости появляется внутренний параметр в виде вихревой псевдовязкости, который служит отличительным признаком турбулентного режима течения от ламинарного. Следовательно, для описания турбулентного режима течения необходимо ввести в модель сплошной среды дополнительный параметр в виде коэффициента вихревой турбулентной псевдовязкости  $\mu_t$ . В соответствии с теорией размерности коэффициент  $\mu_t$  можно представить в виде

произведения плотности жидкости  $\rho$  на скорость  $v$  и на линейный характерный размер  $l$ , то есть

$$\mu_t = \rho v l,$$

где  $v$  - составляющая скорости нестационарного течения в поперечном направлении, а  $l$  - длина перемещения элементарного объема жидкости за время, когда его скорость равна  $v$ . Этот новый параметр жидкости характеризует дополнительные вихревые напряжения в потоке, обусловленные его нестационарностью.

Поскольку при турбулентном режиме течения в потоке происходит дополнительный обмен не только импульсом, но и другими гидродинамическими субстанциями типа тепла или концентрации химических компонентов, то этот механизм распространяется и на перенос такой гидродинамической субстанции, как вихревая псевдовязкость. Поэтому, для расчета параметров турбулентного течения при новом подходе, к исходной системе уравнений движения жидкости необходимо дополнительно присоединить уравнение для описания динамики вихревой турбулентной псевдовязкости, которое будет учитывать эффекты нестационарного поперечного переноса массы и импульса. Только в этом случае общая система исходных уравнений движения сможет адекватно описать турбулентный режим течения в зависимости от заданной величины числа Рейнольдса. Однако для реализации этого подхода необходимо указать способ определения вихревой турбулентной псевдовязкости с помощью какой-либо подходящей модели. Физически эта модель должна включать механизм порождения вихревой псевдовязкости, который связан с растяжением и скручиванием вихревых образований при числах Рейнольдса, превышающих его критическое значение. Поэтому при построении модели сплошной среды адекватной турбулентному режиму течения, примем за основу тот факт, что турбулентные течения являются принципиально нестационарными и, следовательно, существующие в таких течениях пульсации поперечных скоростей обуславливают существование в жидкости дополнительного механизма переноса количества движения из одного слоя жидкости в другой. Следовательно, подходящая модель вязкого континуума, адекватно описывающая турбулентные течения, должна состоять из уравнения сохранения массы, векторного уравнения движения жидкости в интегральной или дифференциальной форме и модельного уравнения переноса вихревой турбулентной псевдовязкости. Если два первых уравнения очевидны и имеют универсальный вид [132, 188, 226], то в выборе последнего уравнения пока существует определенная неясность. Однако, разработанное множество полуэмпирических моделей замыкания системы уравнений Рейнольдса дает уверенность успешно решить эту проблему. Обсуждение этого вопроса в конкретной форме будет проведено далее.

Таким образом, уравнение неразрывности для модифицированной несжимаемой сплошной среды с вихревой псевдовязкостью при нестационарном турбулентном режиме течения имеет обычный вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

где  $\vec{v}$  - мгновенное значение вектора скорости. Векторное уравнение изменения количества движения рассматриваемой турбулентной среды, удовлетворяющее принципу суммарных напряжений в жидкости  $\pi$ , записывается также в общей форме уравнений движения сплошной среды в напряжениях [42, 132]

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \operatorname{div} \pi + \rho \vec{F}. \quad (9.3)$$

Однако, здесь тензор напряжений  $\pi$  представляет собой сумму

$$\pi = \Pi + \Gamma$$

вязких напряжений  $\Pi = p_{ik}$  и вихревых турбулентных напряжений  $\Gamma = \tau_{ik}$ , а входящие в них компоненты скорости представляют собой действительные мгновенные значения.

Физический смысл тензора вязких напряжений для несжимаемой жидкости хорошо известен [132] и в рамках ньютоновских жидкостей, типа вода и воздух, тензор напряжений  $p_{ik}$  определяется через тензор скоростей деформаций согласно линейному закону Ньютона

$$\Pi = p_{ik} = -\bar{p} \cdot \delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right),$$

где  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости, который постоянен, а  $\bar{p}$  - среднее давление

$$\bar{p} = -\left(\frac{1}{3}\right) \operatorname{tr} \Pi.$$

Ниже предполагается, что соотношение такого же типа имеет место и для тензора вихревых турбулентных напряжений  $\Gamma$ . В этом случае по аналогии с вязкими напряжениями тензор вихревых напряжений будет определяться выражением

$$\Gamma = \tau_{ik} = -\bar{p}_t \cdot \delta_{ik} + \mu_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad (9.4)$$

где  $\mu_t$  - коэффициент вихревой турбулентной динамической псевдовязкости, которая является переменной величиной и зависит от

параметров потока, а  $\bar{p}_t$  - соответствующее среднее вихревое турбулентное давление равное

$$\bar{p}_t = -\left(\frac{1}{3}\right) tr \Gamma. \quad (9.5)$$

Таким образом, модель полных напряжений  $\pi$  в нестационарном потоке рассматриваемой сплошной среды с вихревой псевдовязкостью определяется соответствующей суммой, то есть выражением

$$\pi = -(\bar{p} + \bar{p}_t) \cdot \delta_{ik} + (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad (9.6)$$

которое учитывает вклад обоих механизмов переноса импульса. Кроме того, так как в несжимаемой сплошной среде давление не является термодинамической переменной, то с точностью до множителя можно предположить, что

$$\bar{p} + \bar{p}_t = p, \quad (9.7)$$

то есть, сумма шаровых частей обоих тензоров напряжений может быть отождествлена с действительным средним давлением  $p$  в потоке. Тогда окончательно модель для полных напряжений  $\pi$  в нестационарном потоке несжимаемой жидкости с вихревой псевдовязкостью определится по формуле

$$\pi = p_{ik} + \tau_{ik} = -p \cdot \delta_{ik} + (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad (9.8)$$

где  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера. Если теперь подставить выражение (9.8) в уравнение изменения количества движения в напряжениях (9.3), то после простых преобразований получим систему нестационарных уравнений турбулентного движения несжимаемой жидкости с вихревой псевдовязкостью в дифференциальной консервативной форме, которая в тензорных обозначениях имеет вид:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial(v_i v_k)}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] + F_i, \quad (9.9)$$

где  $v = \mu / \rho$ ,  $v_t = \mu_t / \rho$  - соответствующие коэффициенты кинематической молекулярной и вихревой вязкостей. Несмотря на формальную схожесть этого векторного уравнения с осредненными уравнениями турбулентного движения жидкости в форме Рейнольдса, они принципиально отличаются от них тем, что здесь скорости  $v_i$ , давление  $p$  и вихревая псевдовязкость  $v_t$ , являются не осредненными по времени, а мгновенными их значениями.

Для двумерной задачи система полученных дифференциальных уравнений турбулентного движения (9.9), при отсутствии объемных массовых сил, в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат, принимает вид:

в направлении оси  $x$  -ов

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ (v + v_t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad (9.10)$$

в направлении оси  $y$  -ов

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + v_t) \frac{\partial v}{\partial y} \right], \quad (9.11)$$

которая дополняется уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (9.12)$$

Из уравнений (9.10) – (9.12) видно, что эта система уравнений нестационарного турбулентного движения жидкости по форме идентична системе уравнений для ламинарного течения [42], но принципиально отличается наличием дополнительного слагаемого с переменной вихревой псевдовязкостью  $v_t$ , которая должна определяться из дополнительного модельного уравнения, описывающего ее динамику в турбулентном потоке.

В заключение отметим, что если в рассматриваемых уравнениях движения (9.10), (9.11) перейти к безразмерным величинам, вводя по обычным правилам характерные масштабы длины, скорости, времени и давления, то в системе уравнений движения появится новый безразмерный параметр  $R = \nu_t / \nu$ , представляющий собой отношение вихревой кинематической псевдовязкости к молекулярной.

## 9.6. Интегральная форма уравнений турбулентных течений с вихревой псевдовязкостью и их дискретный аналог

Выше, при расчете характеристик ламинарных течений была показана эффективность использования не дифференциальных уравнений движения сплошной среды, а системы общих интегральных законов сохранения механики жидкости и способа построения их дискретных аналогов с помощью метода контрольного объема. Поэтому, опираясь на этот опыт, для описания режима турбулентных течений целесообразно также использовать не дифференциальную их форму (9.9), а фундаментальные интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии, записанные в конечно-

объемной форме применительно к выделенному в жидкости элементарному контрольному объему  $\tau$ , ограниченному поверхностью  $\sigma$ . Очевидно, что законы сохранения справедливы для обеих форм движения жидкости – ламинарной и турбулентной. Кроме того, при таком подходе, вследствие выполнения операции интегрирования исходных уравнений по контрольному объему, их порядок понижается на единицу по сравнению с традиционным способом использования системы дифференциальных уравнений в форме Навье-Стокса. Поэтому, используя универсальность законов сохранения массы и изменения количества движения записанных в напряжениях, выпишем конкретный вид исходной системы основных интегральных соотношений в случае турбулентного режима течения несжимаемой жидкости в следующем общем виде:

$$\frac{d}{dt} \iiint_x \rho d\tau = 0 \quad (9.13)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \vec{v} d\tau = \iiint_{\tau} \text{div}(\Pi + \Gamma) d\tau + \iiint_{\tau} \rho \vec{F} d\tau. \quad (9.14)$$

где  $\rho$  - плотность,  $\vec{v}$  - вектор скорости,  $\pi = \Pi + \Gamma = P_{ik} + \tau_{ik}$  - суммарный тензор вязких  $\Pi$  и вихревых  $\Gamma$  напряжений соответственно,  $\vec{F}$  - вектор массовых объемных сил. Наша основная цель теперь состоит в том, чтобы показать, как эта система уравнений может быть решена численно при рассмотрении различных прикладных задач, включая способ определения тензора  $\pi = \Pi + \Gamma$  и модельного уравнения переноса вихревой псевдовязкости  $\nu_t$ , входящей в выражение для тензора вихревых напряжений  $\Gamma$ . В особенности мы подробно рассмотрим процесс построения дискретных аналогов системы интегральных уравнений турбулентного движения (9.13), (9.14) и модельного уравнения для вихревой турбулентной псевдовязкости, которое позволит замкнуть исходную систему уравнений турбулентного движения в физических переменных скорость-давление.

Из уравнений (9.13), (9.14) видно, что принятая постановка задачи расчета характеристик турбулентного течения такова, что можно использовать тот же метод, который применялся при расчетах ламинарных течений. То есть, он будет основан на методе конечных разностей с использованием разнесенных сеток и балансового метода контрольного объема.

Для простоты ограничимся рассмотрением двумерных задач, решение которых будем искать в заданной области  $D$ . Введем в рассмотрение декартову систему координат  $x, y$  и разобьем рассматриваемую область  $D$  на ряд прямоугольников конечных размеров. Далее введем основную ортогональную сетку  $S_0(j, i)$  для плотности, давления, температуры и для вихревой псевдовязкости, а также временную сетку  $S_t = \{t_n = n \cdot \Delta t\}$ , а для

компонентов скорости вводятся дополнительные полуцелые сетки  $S_1(j+1/2, i)$  и  $S_2(j, i+1/2)$ . В результате, на такой разнесенной сетке зависимые переменные будут определяться в разных узлах сетки. Конфигурация такой разнесенной сетки использовалась в методе МАС [212], а затем и другими исследователями [24]. На рис. 3.5. представлен сеточный шаблон, который использовался нами при дискретизации уравнений для ламинарных течений и, естественно, его можно использовать и в данном случае.

Итак, будем предполагать, что давление определяется в центре контрольного объема (ячейки), а компоненты скорости на его гранях. Такая структура делает сетку удобной для дискретизации исходных уравнений по методу контрольного объема.

Введем для сеточных функций зависимых переменных следующие компактные обозначения  $U_{j+1/2, i}$ ,  $V_{j, i+1/2}$ ,  $P_{j, i}$ ,  $R_{j, i}$  и перейдем к описанию способа дискретизации исходной системы уравнений турбулентного движения жидкости (9.13), (9.14) на выбранном шаблоне с разнесенной сеткой. Следуя принципу метода контрольного объема, выполним операцию интегрирования рассматриваемых уравнений по соответствующим контрольным объемам. Сначала рассмотрим уравнение сохранения массы (9.13). Центр произвольного контрольного объема для этого уравнения поместим в узел  $(j, i)$  основной сетки  $S_0(j, i)$ .

Представим предварительно в уравнении (9.13) субстанциональную производную по времени в виде суммы локального и конвективного слагаемых согласно общей формулы (3.7). Тогда из (9.13) будем иметь

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \, d\tau = \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] d\tau = 0. \quad (9.15)$$

В рассматриваемом случае несжимаемой жидкости  $\rho = \rho_0 = \text{const.}$  Следовательно для элементарной ячейки с центром  $(j, i)$  из (9.15) для двумерной задачи имеем ( $\tau \approx s$ ):

$$\iint_S \operatorname{div} \vec{v} \, ds = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (9.16)$$

Отсюда, после аппроксимации производных конечными разностями и выполнения операции интегрирования, получим дискретный аналог уравнения сохранения массы в следующей форме уравнения неразрывности

$$\frac{(u_{j+1/2, i} - u_{j-1/2, i})^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(v_{j, i+1/2} - v_{j, i-1/2})^{n+1}}{\Delta y} = 0. \quad (9.17)$$



которое по виду совпадает с уравнением (3.15) для ламинарного режима движения жидкости.

Для построения конечно-разностного аналога системы уравнений турбулентного движения (9.14), описывающих баланс изменения количества движения действию поверхностных и объемных сил, необходимо перейти от векторной формы уравнения к системе скалярных уравнений, записанных в проекциях на выбранную декартову систему координат  $x, y$ . Используемая здесь техника построения конечно-разностных аналогов уравнений турбулентного движения в проекциях на оси координат  $x, y$  аналогична той, которая была применена выше при дискретизации уравнений движения в случае ламинарных течений в третьей главе. Поэтому переходя далее к двумерным интегралам и записывая  $x$ -компоненту импульса в соответствии с выбранным шаблоном для контрольного объема в центре с узлом  $(j+1/2, i)$ , а  $y$ -компоненту для объема в центре с узлом  $(j, i+1/2)$ , из уравнения (9.14) с помощью формул конвективного переноса (3.7) и оператора  $div = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$  будем иметь:

для  $x$ -направления

$$\frac{d}{dt} \iint_S u d\sigma = \int_j^{j+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] dx dy = \quad (9.18)$$

$$\int_j^{j+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial(\Pi + \Gamma)_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial(\Pi + \Gamma)_{xy}}{\partial y} \right] dx dy;$$

для  $y$ -направления

$$\frac{d}{dt} \iint_S v d\sigma = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_i^{i+1} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] dx dy = \quad (9.19)$$

$$\int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_i^{i+1} \left[ \frac{\partial(\Pi + \Gamma)_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial(\Pi + \Gamma)_{yy}}{\partial y} \right] dx dy + \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_i^{i+1} \rho g dx dy.$$

Если теперь воспользоваться гипотезой градиентного переноса Буссинеска для несжимаемой жидкости при турбулентном режиме течения, то согласно (9.8) для компонент суммарного тензора напряжений имеем:

$$\begin{aligned}
\pi_{xx} &= (\Pi + \Gamma)_{xx} = -p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial x}; \\
\pi_{xy} &= (\Pi + \Gamma)_{xy} = (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\
\pi_{yx} &= (\Pi + \Gamma)_{yx} = (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\
\pi_{yy} &= (\Pi + \Gamma)_{yy} = -p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Введем для удобства следующее обозначение  $\mu_{эф} = \mu + \mu_t$ . Тогда, подставляя выражения (9.20) в уравнение (9.18) и (9.19), для соответствующих уравнений изменения количества движения получим: для  $x$ -направления

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iint_S u d\sigma &= \int_j^{j+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] dx dy = \\
&= \int_j^{j+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left\{ \frac{\partial(-p + 2\mu_{эф} \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial \left[ \mu_{эф} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]}{\partial y} \right\} dx dy ;
\end{aligned} \tag{9.21}$$

для  $y$ -направления

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iint_S v d\sigma &= \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_i^{i+1} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] dx dy = \\
&= \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_i^{i+1} \left\{ \frac{\partial \left[ \mu_{эф} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]}{\partial x} + \frac{\partial(-p + 2\mu_{эф} \frac{\partial v}{\partial y})}{\partial y} \right\} dx dy + \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_i^{i+1} \rho g dx dy.
\end{aligned} \tag{9.22}$$

Полученная система уравнений (9.21) и (9.22) очень похожа на систему соответствующих уравнений для ламинарного течения (3.27), (3.28), но существенно отличается тем, что дополнительно содержит переменный коэффициент вихревой псевдовязкости ( $\mu_{эф} = \mu + \mu_t$ ). Это обстоятельство необходимо учитывать в дальнейшем.

Для получения конечно-разностных аналогов уравнений турбулентного движения (9.21) и (9.22) будем использовать метод контрольного объема и явную разностную схему первого порядка точности по времени и неявную схему второго порядка точности по пространству. Предварительно осуществим операцию интегрирования рассматриваемой системы уравнений движения по соответствующим контрольным объемам в предположении, что зависимые переменные внутри ячейки равны их значению в центре и распространены на весь контрольный объем. Тогда, после соответствующих преобразований и выполнения итерационной линеаризации для конвективных и диффузионных слагаемых в соответствующих уравнениях движения, получим их конечно-разностную форму, которая подобна уравнениям для ламинарного течения (3.27), (3.28). В силу их сложности и большого объема они будут выписаны ниже, но после их обезразмеривания. Поэтому введем сначала характерные масштабные параметры длины  $L$ , скорости  $u_0$ , давления  $P_0 = \rho u_0^2$ , вязкости  $\nu_0 = \nu$ , времени  $t_0 = L/u_0$  и перейдем к следующим безразмерным величинам

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad P = \frac{P}{\rho u_0^2}, \quad R = \frac{\nu_t}{\nu}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0}, \quad \tau = \frac{tu_0}{L}.$$

Тогда в этих безразмерных переменных искомая система дискретных аналогов уравнений турбулентного движения запишется в следующем виде: для  $x$ -направления

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta y \cdot h x_{j+1}}{\Delta t} (U_{j+1/2,i} - U_{j+1/2,i}^*) + \Delta y (U_{j+1,i}^* U_{j+1,i} - U_{j,i}^* U_{j,i}) + \\ & + h x_{j+1} (V_{j+1/2,i+1/2}^* \cdot U_{j+1/2,i+1/2} - V_{j+1/2,i-1/2}^* \cdot U_{j+1/2,i-1/2}) = \\ & = -\Delta y (P_{j+1,i} - P_{j,i}) + \frac{4(1+R_{j+1,i}^*) \Delta y}{\text{Re} \cdot h x_2} (U_{j+3/2,i} - U_{j+1/2,i}) - \frac{4(1+R_{j,i}^*) \Delta y}{\text{Re} \cdot h x_1} (U_{j+1/2,i} - U_{j-1/2,i}) + \\ & + \frac{(1+R_{j+1/2,i+1/2}^*) h x_{j+1}}{\text{Re}} \frac{h x_{j+1}}{h y_{i+1}} (U_{j+1/2,i+1} - U_{j+1/2,i}) - \frac{(1+R_{j+1/2,i-1/2}^*) h x_{j+1}}{\text{Re}} \frac{h x_{j+1}}{h y_i} (U_{j+1/2,i} - U_{j+1/2,i-1}) + \\ & + \frac{(1+R_{j+1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} (V_{j+1,i+1/2}^* - V_{j,i+1/2}^*) - \frac{(1+R_{j+1/2,i-1/2}^*)}{\text{Re}} (V_{j+1,i-1/2}^* - V_{j,i-1/2}^*); \quad (9.23) \end{aligned}$$

для  $y$ -направления

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x \cdot h y_{i+1}}{\Delta t} (V_{j,i+1/2} - V_{j,i+1/2}^*) + h y_{i+1} (U_{j+1/2,i+1/2}^* \cdot V_{j+1/2,i+1/2} - U_{j-1/2,i+1/2}^* \cdot V_{j-1/2,i+1/2}) + \\ & + \Delta x (V_{j,i+1}^* \cdot V_{j,i+1} - V_{j,i}^* \cdot V_{j,i}) = -\Delta x (P_{j,i+1} - P_{j,i}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1 + R_{j+1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} \frac{1}{hx_{j+1}} \frac{hy_{i+1}}{2} (V_{j+1,i+1/2} - V_{j,i+1/2}) - \frac{(1 + R_{j-1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} \frac{1}{hx_j} \frac{hy_{i+1}}{2} (V_{j,i+1/2} - V_{j-1,i+1/2}) + \\
& + \frac{4(1 + R_{j,i+1}^*)}{\text{Re}} \frac{\Delta x}{hy^2} (V_{j,i+3/2} - V_{j,i+1/2}) - \frac{4(1 + R_{j,i}^*)}{\text{Re}} \frac{\Delta x}{hy^1} (V_{j,i+1/2} - V_{j,i-1/2}) + \\
& + \frac{(1 + R_{j+1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} (U_{j+1/2,i+1}^* - U_{j+1/2,i}^*) - \frac{(1 + R_{j-1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} (U_{j-1/2,i+1}^* + U_{j-1/2,i}^*) + \\
& + \Delta x \cdot hy_{i+1} \cdot Ri \left[ \theta_{j,i}^* + \frac{b}{H} Y(i) \right]. \tag{9.24}
\end{aligned}$$

Здесь  $\text{Re} = u_0 L / \nu$  - число Рейнольдса, величины  $U$ ,  $V$ ,  $P$ ,  $R$  - с различными нижними индексами являются сеточными функциями искомых зависимых переменных. Те из них, которые помечены значком (\*) относятся к предыдущему шагу по времени и являются известными. Все остальные аналогичные величины относятся к текущему временному слою и являются неизвестными, которые подлежат определению.

Легко проверить, что при значении параметра  $R = 0$  система уравнений (9.23) и (9.24) совпадает с аналогичной системой уравнений (3.29), (3.30) для ламинарного течения.

Полученные дискретные аналоги уравнений турбулентного движения (9.23) и (9.24) содержат слагаемые с целыми и дробными индексами у компонентов скоростей, давления  $U$ ,  $V$ ,  $P$  и вихревой турбулентной псевдовязкости  $R$ , что соответствует их значениям в узлах основной и вспомогательных сеток. Способ их вычисления в этих узлах зависит от выбора схемы аппроксимации конвективных и диффузионных слагаемых. При аппроксимации диффузионных слагаемых обычно используется схема с центральными разностями. В конвективных слагаемых, как и при рассмотрении ламинарных течений, будем использовать аппроксимацию по схеме «против потока» в виде (3.33), которая существенно стабилизирует расчетную процедуру при моделировании течений с рециркуляциями и вихреобразованиями.

Кроме того, полученные разностные уравнения турбулентного движения содержат слагаемые, когда их значения не соответствует положению узлов сетки согласно принятого шаблона. В этих случаях при аппроксимации будем использовать формулы типа (3.34). Подставляя эти аппроксимации в систему конечно-разностных уравнений движения (9.23) и (9.24) после простых преобразований и группировки соответствующих

слагаемых, получаем каноническую форму дискретных аналогов уравнений турбулентного движения в  $x$  и  $y$  направлениях в следующем виде:

$$d_{j+1/2,i}^U U_{j+1/2,i}^{n+1} + c_1^U U_{j+3/2,i}^{n+1} + c_0^U U_{j-1/2,i}^{n+1} + b_1^U U_{j+1/2,i}^{n+1} + b_0^U U_{j+1/2,i}^{n+1} = -\Delta y (P_{j+1,i}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + f^U, \quad (9.25)$$

$$d_{j,i+1/2}^V V_{j,i+1/2}^{n+1} + c_1^V V_{j,i+3/2}^{n+1} + c_0^V V_{j,i-1/2}^{n+1} + b_1^V V_{j+1,i+1/2}^{n+1} + b_0^V V_{j-1,i+1/2}^{n+1} = -\Delta x (P_{j,i+1}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + f^V, \quad (9.26)$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j+1/2,i}^U$ ,  $d_{j,i+1/2}^V$ ,  $c_1$ ,  $c_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$  и свободные члены  $f$  с верхними индексами  $U$  и  $V$  являются известными с предыдущего шага величинами, которые определяются по следующим алгебраическим формулам:

$$\begin{aligned} d_{j+1/2,i}^U &= 0.5 \frac{hx_{j+1} \cdot hy_1}{\Delta t} + 0.5 hy_1 [\beta(U_{j+1,i}^*) U_{j+1,i}^* - (1 - \beta(U_{j,i}^*)) U_{j,i}^*] + \\ &+ 0.5 hx_{j+1} [\beta(V_{j,i+1/2}^*) V_{j,i+1/2}^* + \beta(V_{j+1,i+1/2}^*) V_{j+1,i+1/2}^* - \\ &- (1 - \beta(V_{j,i-1/2}^*)) V_{j,i-1/2}^* - (1 - \beta(V_{j+1,i-1/2}^*)) V_{j+1,i-1/2}^*] + \\ &+ \frac{2(1 + R_{j+1,i}^*)}{\text{Re}} \frac{hy_1}{hx_2} + \frac{2(1 + R_{j,i}^*)}{\text{Re}} \frac{hy_1}{hx_1} + \frac{(1 + R_{j+1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} \frac{hx_{j+1}}{hy_{i+1}} + \frac{(1 + R_{j+1/2,i-1/2}^*)}{\text{Re}} \frac{hx_{j+1}}{hy_i}, \\ c_1^U(j+1/2,i) &= 0.5 \cdot hy_1 [1 - \beta(U_{j+1,i}^*)] U_{j+1,i}^* - \frac{2(1 + R_{j+1,i}^*)}{\text{Re}} \frac{hy_1}{hx_2}, \\ c_0^U(j+1/2,i) &= -0.5 \cdot hy_1 \beta(U_{j,i}^*) U_{j,i}^* - \frac{2(1 + R_{j,i}^*)}{\text{Re}} \frac{hy_1}{hx_1}, \\ b_1^U(j+1/2,i) &= 0.5 \cdot hx_{j+1} [(1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) V_{j,i+1/2}^* + (1 - \beta(V_{j+1,i+1/2}^*)) V_{j+1,i+1/2}^*] - \\ &- \frac{(1 + R_{j+1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} \frac{hx_{j+1}}{hy_{i+1}}, \\ b_0^U(j+1/2,i) &= -0.5 \cdot hx_{j+1} [\beta(V_{j,i-1/2}^*) V_{j,i-1/2}^* + \beta(V_{j+1,i-1/2}^*) V_{j+1,i-1/2}^*] - \\ &- \frac{(1 + R_{j+1/2,i-1/2}^*)}{\text{Re}} \frac{hx_{j+1}}{hy_i}, \\ d_{j,i+1/2}^V &= 0.5 \frac{hx_1 \cdot hy_{i+1}}{\Delta t} + 0.5 \cdot hx_1 [\beta(V_{j,i+1}^*) V_{j,i+1}^* - (1 - \beta(V_{j,i}^*)) V_{j,i}^*] + \end{aligned} \quad (9.27)$$

$$+ 0.5 \, hy_{i+1} \left[ \beta(U_{j+1/2,i}^*) U_{j+1/2,i}^* + \beta(U_{j+1/2,i+1}^*) U_{j+1/2,i+1}^* - (1 - \beta(U_{j-1/2,i}^*)) U_{j-1/2,i}^* - \right. \\ \left. - (1 - \beta(U_{j-1/2,i+1}^*)) U_{j-1/2,i+1}^* \right] + \\ + \frac{2(1 + R_{j,i+1}^*)}{\text{Re}} \frac{hx_1}{hy_2} + \frac{2(1 + R_{j,i}^*)}{\text{Re}} \frac{hx_1}{hy_1} + \frac{(1 + R_{j+1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} \frac{hy_{i+1}}{hx_{j+1}} + \frac{(1 + R_{j-1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} \frac{hy_{i+1}}{hx_j},$$

$$c_1^V(j, i + 1/2) = 0.5 \cdot hx_1 \left[ 1 - \beta(V_{j,i+1}^*) \right] V_{j,i+1}^* - \frac{2(1 + R_{j,i+1}^*)}{\text{Re}} \frac{hx_1}{hy_2},$$

$$c_0^V(j, i + 1/2) = -0.5 \cdot hx_1 \beta(V_{j,i}^*) V_{j,i}^* - \frac{2(1 + R_{j,i}^*)}{\text{Re}} \frac{hx_1}{hy_1},$$

$$b_1^V(j, i + 1/2) = 0.5 \cdot hy_{i+1} \left[ (1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) U_{j+1/2,i}^* + (1 - \beta(U_{j+1/2,i+1}^*)) U_{j+1/2,i+1}^* \right] - \\ - \frac{(1 + R_{j+1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} \frac{hy_{i+1}}{hx_{j+1}},$$

$$b_0^V(j, i + 1/2) = -0.5 \cdot hy_{i+1} \left[ \beta(U_{j-1/2,i}^*) U_{j-1/2,i}^* + \beta(U_{j-1/2,i+1}^*) U_{j-1/2,i+1}^* \right] - \\ - \frac{(1 + R_{j-1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} \frac{hy_{i+1}}{hx_j},$$

$$f^U(j + 1/2, i) = 0.5 \frac{hx_{j+1} \cdot hy_1}{\Delta t} U_{j+1/2,i}^* + \frac{(1 + R_{j+1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} (V_{j+1,i+1/2}^* - V_{j,i+1/2}^*) - \\ - \frac{(1 + R_{j+1/2,i-1/2}^*)}{\text{Re}} (V_{j+1,i-1/2}^* - V_{j,i-1/2}^*);$$

$$f^V(j, i + 1/2) = 0.5 \frac{hx_1 \cdot hy_{i+1}}{\Delta t} V_{j,i+1/2}^* + \frac{(1 + R_{j+1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} (U_{j+1/2,i+1}^* - U_{j+1/2,i}^*) - \\ - \frac{(1 + R_{j-1/2,i+1/2}^*)}{\text{Re}} (U_{j-1/2,i+1}^* - U_{j-1/2,i}^*) + 0.5 \cdot hx_1 \cdot hy_{i+1} \cdot Ri_0 \left( \theta_{ji}^* + \frac{b}{H} Y(i) \right).$$

Конечно-разносный аналог уравнения неразрывности в безразмерных величинах имеет вид

$$\frac{U_{j+1/2,i} - U_{j-1/2,i}}{\Delta x} + \frac{V_{j,i+1/2} - V_{j,i-1/2}}{\Delta y} = 0. \quad (9.28)$$

В приведенных формулах (9.27) аппроксимация компонентов скоростей с целым индексом осуществлялись по простейшим формулам среднего арифметического, приведенных в конце раздела 3.4. Значение параметра  $\beta$  равно либо нулю, либо единице в зависимости от знака соответствующей скорости. Подробно это было рассмотрено при анализе ламинарных

течений в главе 3. Кроме того, приведенные формулы (9.27) содержат сеточные функции вихревой псевдовязкости не только с целыми индексами, но и с дробными. Поэтому аппроксимация соответствующих значений вихревой псевдовязкости с половинными индексами через значения с целыми индексами осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned} R_{j+1/2,i+1/2} &= 0.25(R_{j,i} + R_{j+1,i} + R_{j,i+1} + R_{j+1,i+1}); \\ R_{j+1/2,i-1/2} &= 0.25(R_{j,i} + R_{j+1,i} + R_{j,i-1} + R_{j+1,i-1}); \\ R_{j-1/2,i+1/2} &= 0.25(R_{j,i} + R_{j-1,i} + R_{j,i+1} + R_{j-1,i+1}). \end{aligned} \quad (9.29)$$

Очень важно отметить, что при нашем подходе к задаче расчета турбулентных течений, добавление в исходных уравнениях к тензору вязких напряжений еще тензора вихревых турбулентных напряжений в принципе не усложняет метод решения системы исходных уравнений турбулентного движения по сравнению со случаем ламинарных течений, если вихревая псевдовязкость известна, то есть определяется путем решения соответствующего модельного уравнения.

## 9.7. Конечно-разностная форма уравнения для расчета давления

Полученная система конечно-разностных уравнений турбулентного движения (9.25), (9.26) пока содержит неизвестное давление и по форме идентична системе разностных уравнений (3.35), (3.36) для ламинарного движения жидкости, но отличается от них коэффициентами дискретизации (9.27), которые содержат неизвестные коэффициенты вихревой турбулентной псевдовязкости  $R$  с различными индексами. Для решения этой системы уравнений турбулентного движения, дополненных уравнением неразрывности (9.28), будем использовать процедуру SIMPLE [158, 159, 336] подобно тому как это было сделано при решении системы уравнений для ламинарного течения. С этой целью рассмотрим соответствующую систему уравнений движения (9.25) и (9.26), и оставим в левых частях этих уравнений только те неизвестные сеточные функции скоростей на  $(n+1)$  временном слое, которые относятся к узлам с номером  $(j+1/2,i)$  и  $(j,i+1/2)$  соответственно. Они будут определяться на текущем  $(n+1)$  временном слое. Другие, соседние сеточные функции скорости считаются известными с предыдущего слоя. Соответствующие слагаемые уравнений, которые их содержат, переносятся в правую сторону уравнений и объединяются со свободными членами  $f^U$  и  $f^V$  соответственно. В результате рассматриваемая система уравнений турбулентного движения (9.25), (9.26) преобразуется к виду:

$$d_{j+1/2,i}^U U_{j+1/2,i}^{n+1} = -\Delta y (P_{j+1,i}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U; \quad (9.30)$$

$$d_{j,i+1/2}^V V_{j,i+1/2}^{n+1} = -\Delta x (P_{j,i+1}^{n+1} - P_{j,i}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V, \quad (9.31)$$

где выражения  $G_{j+1/2,i}^U$  и  $G_{j,i+1/2}^V$  известны, так как они зависят от скоростей с предыдущего временного слоя  $n$  и определяются по формулам:

$$G_{j+1/2,i}^U = f_{j+1/2,i}^U - c_1^U(j+1/2,i) U_{j+3/2,i}^* - c_0^U(j+1/2,i) U_{j-1/2,i}^* - b_1^U(j+1/2,i) U_{j+1/2,i+1}^* - b_0^U(j+1/2,i) U_{j+1/2,i-1}^*; \quad (9.32)$$

$$G_{j,i+1/2}^V = f_{j,i+1/2}^V - c_1^V(j,i+1/2) V_{j,i+3/2}^* - c_0^V(j,i+1/2) V_{j,i-1/2}^* - b_1^V(j,i+1/2) V_{j+1,i+1/2}^* - b_0^V(j,i+1/2) V_{j-1,i+1/2}^*. \quad (9.33)$$

Полученная система дискретных аналогов уравнений турбулентного движения (9.30) и (9.31) хотя и является основной системой уравнений, но она пока содержит неизвестные слагаемые с давлением и вихревой турбулентной псевдовязкостью. С целью получения необходимого уравнения для давления на  $(n+1)$  временном слое используем уравнение неразрывности (9.28). Учитывая его структуру, предварительно в выражениях (9.30) и (9.31) для скоростей, понизим индексы  $j$  и  $i$  на единицу соответственно. Тогда получим необходимые выражения для соответствующих компонентов скоростей в виде:

$$U_{j-1/2,i}^{n+1} = [-\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j-1,i}^{n+1}) + G_{j-1/2,i}^U] / d_{j-1/2,i}^U, \quad (9.34)$$

$$V_{j,i-1/2}^{n+1} = [-\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i-1}^{n+1}) + G_{j,i-1/2}^V] / d_{j,i-1/2}^V. \quad (9.35)$$

Аналогично из формул (9.32) и (9.33) определяются необходимые значения величин  $G_{j-1/2,i}^U$  и  $G_{j,i-1/2}^V$ . Далее выделим из уравнений движения (9.30), (9.31), (9.34), (9.35) значения скоростей в явном виде и подставим их значения в уравнение неразрывности (9.28). Тогда получим выражение, в котором неизвестными величинами являются лишь сеточные функции давления в интересующем нас узле с номером  $(j,i)$  и окружающих его соседних узлах. Выполнив простые преобразования, после группировки соответствующих слагаемых, получим следующий конечно-разностный аналог для вычисления сеточных функций давления на  $(n+1)$  временном слое

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P, \quad (9.36)$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j,i}^P$ ,  $c_1^P$ ,  $c_0^P$ ,  $b_1^P$ ,  $b_0^P$  и свободный член  $f^P$  определены соотношениями:



$$\begin{aligned}
c_1^P &= -\frac{hy_1}{hxl} \frac{1}{d_{j+1/2,i}^U}; & c_0^P &= \frac{hy_1}{hxl} \frac{1}{d_{j-1/2,i}^U}; \\
b_1^P &= -\frac{hxl}{hy_1} \frac{1}{d_{j,i+1/2}^V}; & b_0^P &= \frac{hxl}{hy_1} \frac{1}{d_{j,i-1/2}^V}; \\
d_{j,i}^P &= -c_1^P - c_0^P - b_1^P - b_0^P; \\
f^P &= 2 \left[ -\frac{G_{j+1/2,i}^U}{d_{j+1/2,i}^U \cdot hxl} + \frac{G_{j-1/2,i}^U}{d_{j-1/2,i}^U \cdot hxl} - \frac{G_{j,i+1/2}^V}{d_{j,i+1/2}^V \cdot hy_1} + \frac{G_{j,i-1/2}^V}{d_{j,i-1/2}^V \cdot hy_1} \right]; \\
hxl &= (hx_j + hx_{j+1}), & hy_1 &= (hy_i + hy_{i+1}).
\end{aligned} \tag{9.37}$$

Отметим, что входящие в эти соотношения значения величин  $d^U, d^V, G^U, G^V$  с различными нижними индексами были определены выше и являются известными величинами.

Таким образом, исходя из интегральных законов сохранения массы и изменения количества движения, используя метод контрольного объема и разнесенную шахматную сетку, получены дискретные аналоги уравнений турбулентного движения в виде (9.30), (9.31), которые для удобства запишем в следующей явной форме

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = [\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U] / d_{j+1/2,i}^U, \tag{9.38}$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V. \tag{9.39}$$

Система уравнений (9.36), (9.38), (9.39) связывает значения давления и компонентов скоростей на  $(n+1)$  временном слое. Она является фундаментальным результатом, представляющим универсальный дискретный аналог системы общих нестационарных уравнений турбулентного движения несжимаемой жидкости. Совершенно очевидно, что решение рассматриваемых систем алгебраических уравнений значительно проще, чем исходных интегральных или дифференциальных уравнений. Отметим, что уравнение типа Пуассона для давления фактически заменяет уравнение неразрывности и система уравнений турбулентного движения будет замкнутой, если указать способ определения вихревой псевдовязкости  $R$ , то есть как и при традиционном подходе в проблеме турбулентности. Поэтому ниже будет рассмотрена математическая модель для турбулентной псевдовязкости  $R = \nu_t / \nu$ , которая практически решит проблему замыкания новой системы исходных уравнений нестационарного турбулентного движения.

## 9.8. Модельное интегральное уравнение для вихревой турбулентной псевдовязкости

Полученная выше система конечно-разностных уравнений турбулентного движения по-прежнему остается незамкнутой, так как в коэффициенты дискретизации (9.27) этой системы уравнений входят слагаемые с неизвестными пока значениями вихревой турбулентной псевдовязкости  $R(x, y, t)$ . Различные нижние индексы у сеточной функции вихревой псевдовязкости  $R$  указывают на ее значение в узлах основной сетки  $S_0(j, i)$  и узлах двух полуцелых сеток  $S_1$  и  $S_2$ . Определение способа расчета сеточной функции вихревой турбулентной псевдовязкости  $R_{j,i}$  фактически решает проблему построения замкнутой системы нестационарных турбулентных течений. Поэтому рассмотрим этот вопрос подробно.

Исторически эта проблема возникла более ста пятидесяти лет тому назад, но несколько в иной постановке. Действительно, когда О. Рейнольдс (1883) предложил фактически заменить задачу расчета нестационарных турбулентных течений на задачу расчета осредненного по времени течения и его статистических характеристик, то это породило огромное количество работ, связанных с замыканием системы уравнений Рейнольдса для осредненного турбулентного движения, так как при такой постановке турбулентная вязкость оказалась необходимой для определения турбулентного трения.

Впервые практический способ определения турбулентных касательных напряжений  $\tau$  по аналогии с ламинарным течением был предложен И. Буссинеском (1877) [237] в виде зависимости

$$\tau = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad \nu_t = \mu_t / \rho,$$

где  $\mu_t$  - коэффициент динамической турбулентной вязкости,  $\bar{u}$  - продольная составляющая осредненной скорости. Коэффициент кинематической турбулентной вязкости  $\nu_t$ , как и  $\mu_t$  является локальной характеристикой турбулентного потока. Для равномерных, то есть не изменяющихся по длине течений с поперечным сдвигом, все турбулентные характеристики, включая  $\nu_t$ , считаются зависящими лишь от расстояния  $y$  и не зависящими от координаты  $x$ . Поэтому для практической реализации расчетов турбулентных характеристик таких течений требовалось иметь способ определения коэффициента кинематической турбулентной вязкости  $\nu_t(y)$ . Первые полуэмпирические зависимости для  $\nu_t$  представляли собой алгебраические модели. Наиболее плодотворной оказалась модель Прандтля, использующая понятие длины пути смешения [226]. Он пред-

положил, что для пристенных сдвиговых течений, включая пограничный слой, величина кинематической турбулентной псевдовязкости  $\nu_t$  пропорциональна квадрату этой длины и абсолютному значению производной от осредненной продольной скорости по нормали к стенке, то есть

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|.$$

Само же значение длины пути перемешивания вблизи обтекаемой поверхности принималось пропорциональным расстоянию до стенки, то есть  $l = \alpha y$ , где эмпирический коэффициент  $\alpha = 0,4$  принято называть постоянной Кармана [150, 226].

Другой путь определения  $\nu_t$  был связан с использованием многочисленных экспериментальных данных по измерению коэффициентов сопротивления в трубах, каналах и на плоской пластине. Коэффициент сопротивления  $\lambda$  является интегральной характеристикой турбулентного потока и представляет собой связь между касательными напряжениями на стенке  $\tau_w$  и среднерасходной или максимальной скоростью в потоке. Основой такого подхода было использование степенного закона сопротивления, установленного Г. Блазиусом в 1911 г. путем обобщения материалов измерения сопротивлений при турбулентном течении в гладких трубах [226]. Этот закон в дальнейшем был модифицирован Л. Прандтлем и Т. Карманом и получил название «закона степени 1/7». Долгое время он плодотворно использовался при решении многих задач, в том числе и для расчета турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. Однако, степенные законы распределения скоростей, хорошо описывают лишь турбулентное ядро течения, но не учитывают особенностей структуры течения вблизи стенки и в пристенной области они неприменимы. Поэтому в дальнейшем широкое распространение получила теория длины пути смещения Л. Прандтля и следующий из нее логарифмический закон распределения скоростей в виде

$$u = \nu_* / \alpha \ln y + C \quad \text{или} \quad \frac{u}{\nu_*} = A \ln \frac{\nu_* y}{\nu} + B. \quad (9.41)$$

В дальнейшем многими авторами с целью получения более общей формулы для  $\nu_t$  были предприняты различные уточнения зависимости длины пути смещения от основных параметров осредненного пристенного течения. Каждое такое уточнение часто называлось новой моделью или модификацией уже существующей. Некоторые наиболее ранние алгебраические модели рассмотрены в нашей работе [42]. В более поздних моделях характер изменения длины пути смещения поперек пограничного слоя моделируют более детально [144, 186]. Эксперименты показывают, что

в турбулентных течениях с поперечным сдвигом следует различать три характерные области в направлении нормали к стенке, которые существенно отличаются друг от друга. Для учета этих особенностей течения Карманом [226] было предложено выделять три области: область вязкого подслоя, примыкающая к поверхности; буферная область и внешняя область или турбулентное ядро [150]. В каждой из этих областей турбулентная вязкость определяется по различным зависимостям с выполнением условий сопряжения для них.

В простейших моделях во внутренней вязкой области часто используется модель Прандтля. Одной из ее модификаций является модель, предложенная Е. Р. Ван-Дристом [374]

$$l = \alpha y \left[ 1 - \exp\left(-\frac{u_* y}{k_1 \nu}\right) \right], \quad (9.42)$$

где  $\alpha$  и  $k_1$  - эмпирические постоянные ( $\alpha = 0,4$ ;  $k_1 = 26$ ), а

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad \tau_w = \mu \left( \partial \bar{u} / \partial y \right) \Big|_{y=0} - \text{трение на стенке.}$$

Выражение (9.42) получено для безградиентного течения вдоль плоской гидравлически гладкой стенки. В работе [240] предложены выражения для длины пути смешения, учитывающие влияние градиента давления. Существует множество других работ этого направления [144, 186, 225]. Некоторые модели турбулентной вязкости учитывают, кроме того, эффекты, связанные с продольной кривизной обтекаемой поверхности. Рассмотренные и другие алгебраические модели турбулентной вязкости и их модификации широко использовались при проведении конкретных расчетов. Анализ этих результатов говорит о том, что с их помощью можно учесть многие факторы, влияющие на характеристики турбулентных течений в пограничных слоях. Однако, они имеют и большие ограничения, так как не учитывают анизотропность процессов переноса в турбулентных потоках и пригодны только для течений «погранслоного типа», когда профиля продольной скорости изменяются монотонно. В случае нарушения монотонности профиля продольной скорости, например, при отрывном течении или образовании иных циркуляционных течений, возникают серьезные трудности моделирования таких течений, включая определение вихревой турбулентной псевдовязкости.

Для преодоления этих трудностей были предложены более сложные одно- и двух параметрические дифференциальные модели турбулентности. В настоящее время известно большое число моделей для определения вихревой турбулентной вязкости. Среди них можно отметить следующие наиболее известные и часто применяемые в расчетах модельные выражения коэффициента вихревой турбулентной псевдовязкости  $R = \nu_t / \nu$  :

- модель Прандтля [226]  $R = \text{Re} \, \varkappa^2 Y^2 \frac{\partial U}{\partial Y};$
- модель Ван-Дрифта [186]  $R = \text{Re} \, \varkappa^2 Y^2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Y^+}{k_1}\right) \right]^2 \frac{\partial U}{\partial Y};$
- модель Колмогорова-Прандтля [110, 343]  $R = c_\mu \text{Re} \frac{K^2}{E};$
- модель Лаундера [286]  $R = c_\mu \text{Re} \frac{K^2}{E} [1 - \exp(-A_\mu R_t)];$
- модель Роди [142, 349]  $R = c_\mu \text{Re} \frac{K^2}{E} \frac{2}{3} (1 - \gamma) \frac{(c - 1 + \gamma P/E)}{(c - 1 + P/E)}.$
- модель Смагоринского [202, 362]

$$R = \text{Re}(c_\mu \cdot \bar{\Delta} \cdot f)^2 \cdot |\bar{S}|, \quad \bar{\Delta} = \sqrt[3]{\Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z},$$

$$f = 1 - e^{-Y^2/25}, \quad |\bar{S}| = (2\bar{S}_{ij} \cdot \bar{S}_{ij})^{1/2}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial X_i} \right)$$

Модельные константы в этих формулах обычно следующие:  $\varkappa = 0,4$ ;  $k_1 = 26$ ;  $c_\mu = 0,09$ ;  $A_\mu = 0,0015$ ;  $c = 2,8$ ;  $\gamma = 0,6$ . Модели Прандтля и Ван-Дрифта справедливы для пристенной области, когда  $y < 0,2 \delta$ , далее часто постулируется их постоянное значение. Нужно отметить, что при относительно малых числах Рейнольдса все эти модели включая модель переноса напряжений Рейнольдса имеют значительный разброс расчетных значений  $R$ , но при больших числах Рейнольдса наблюдается хорошее совпадение расчетных значений по указанным модельным зависимостям.

Преимущества и недостатки этих моделей хорошо известны и большинство из них подробно обсуждены в соответствующей литературе. Главный их недостаток связан с наличием большого количества неуниверсальных эмпирических констант.

Подробный обзор моделей, учитывающих анизотропию процессов переноса, можно найти в целом ряде работ [19, 20, 42, 128, 141]. Их анализ показывает, что они, наряду с алгебраическими моделями, успешно применяются многими авторами для расчета осредненных и статистических характеристик турбулентных течений. В последние годы в прикладных расчетах широко используются различные версии  $(k - \varepsilon)$  моделей турбулентности [305] в сочетании с пристенными функциями [20], модель Ментера [323, 324], модель Спаларта-Аллмараса [365] и другие. Однако проблема надежного моделирования и расчета сложных турбулентных течений остается одной из нерешенных до конца проблем в гидродинамике.

При нашем подходе к проблеме моделирования турбулентных течений главная особенность связана с учетом явления внутренней вихревой нестационарности в потоке, которая приводит к изменению напряжений действующих в жидкости. Такой подход должен обеспечить адекватное моделирование турбулентности на основе использования мгновенных значений характеристик течения и он будет свободен от эмпирических констант свойственных старым традиционным моделям, опирающимся на использование осредненных во времени характеристик течения.

Согласно развиваемой новой модели турбулентных течений, любой нестационарный поток характеризуется дополнительными напряжениями в жидкости, обусловленными поперечным переносам импульса. Поэтому в качестве основных параметров такой модели жидкости следует принять не только ее скорость  $v_i$ , плотность  $\rho$  и физический динамический коэффициент вязкости  $\mu$ , но и динамический коэффициент вихревой псевдовязкости  $\mu_t$ , обусловленный поперечными пульсациями скорости. В этом случае элементарный контрольный объем такой движущейся среды характеризуется не только массой, импульсом и энергией, но и величиной кинематической вихревой псевдовязкости  $\nu_t = \mu_t / \rho$ , которая является в потоке дополнительной переменной величиной. Поэтому в новой модели турбулентного течения для нее, как для характерной гидродинамической субстанции, влияющей на структуру потока, по аналогии с температурой и концентрацией химического компонента, следует записать соответствующее дифференциальное уравнение переноса в виде уравнения турбулентной диффузии для вихревой псевдовязкости (1.85). Подобное допущение в свое время уже рассматривалось в работах В. В. Ни, С.Г. Коважного [331], А.Н. Секундова [91, 189], П.Г. Сафмена [185], а в последние годы в работах Ф. Менстера [322 - 325], П.Р. Спаларта, С.Р. Алмараса [365] и других. Однако это имело место в другом контексте. В нашем случае при описании процесса переноса турбулентной псевдовязкости будем использовать общий закон механики для изменения произвольной гидродинамической субстанции  $\Phi$  в интегральном виде (1.6), когда это изменение равно сумме потоков субстанции  $\Phi$  через поверхность  $\sigma$  контрольного объема  $\tau$  и скорости ее объемного порождения в виде

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi d\tau = - \iint_{\sigma} \vec{q}_{\Phi} d\sigma + \iiint_{\tau} Q_{\Phi} d\tau, \quad (9.43)$$

где  $\vec{q}_{\Phi}$  - поток субстанции  $\Phi$  через поверхность  $\sigma$ , выделенного контрольного объема  $\tau$ ,  $Q_{\Phi}$  - источниковое слагаемое.

Полагая теперь в уравнении (9.43) значение  $\Phi = \nu_t$  для вихревой турбулентной псевдовязкости  $\nu_t$ , получаем следующее интегральное уравнение переноса

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \nu_t d\tau = - \iint_{\sigma} \vec{q}_v d\sigma + \iiint_{\tau} Q_v d\tau, \quad (9.44)$$

Физически оно означает, что изменение вихревой турбулентной псевдовязкости в рассматриваемой движущейся турбулентной среде в объеме  $\tau$ , равно потоку турбулентной псевдовязкости, входящей и выходящей из него в единицу времени за счет механизмов диффузии, конвекции и источникового члена. Последнее слагаемое в правой части уравнения (9.44) моделирует скорость порождения турбулентной псевдовязкости за 1 сек в объеме  $d\tau$ . Вектор потока турбулентной псевдовязкости  $\vec{q}_v$  согласно гипотезе градиентных моделей переноса Буссинеска [238] определится соотношением, подобным закону Фурье для теплоты или закону Фика для вещества, то есть в виде

$$\vec{q}_v = -D_v \cdot \text{grad } \nu_t, \quad (9.45)$$

где  $D_v$  - коэффициент диффузии вихревой псевдовязкости, а компоненты вектора потока  $\vec{q}_v$  согласно градиентной модели равны

$$(q_v)_x = -D_v^x \frac{\partial \nu_t}{\partial x}, \quad (q_v)_y = -D_v^y \frac{\partial \nu_t}{\partial y}. \quad (9.46)$$

Вернемся теперь к уравнению (9.44) и преобразуем в нем поверхностный интеграл, стоящий в правой части, по формуле Остроградского-Гаусса в объемный. Тогда из (9.44) будем иметь

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \nu_t d\tau = - \iiint_{\tau} \text{div} \vec{q}_v d\tau + \iiint_{\tau} Q_v d\tau. \quad (9.47)$$

Далее можно показать [42, 132], что при эйлеровом описании движения жидкости субстанциональная производная по времени от любой гидродинамической субстанции  $\Phi$ , может быть представлена суммой локального и конвективного слагаемых в виде (3.7), то есть

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi d\tau = \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div}(\Phi \vec{v}) \right] d\tau \quad (9.48)$$

Тогда, полагая  $\Phi = \nu_t$ , уравнение (9.47), с помощью уравнения (9.48) и формулы (9.45) запишется в следующей окончательной интегральной форме

$$\iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial \nu_t}{\partial t} + \text{div}(\vec{v} \nu_t) \right] d\tau = \iiint_{\tau} \text{div}(D_v \text{grad } \nu_t) d\tau + \iiint_{\tau} Q_v d\tau. \quad (9.49)$$

Так как это уравнение имеет место для любого объема  $\tau$ , то его можно записать в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v} v_i) = \operatorname{div}(D_v \operatorname{grad} v_i) + Q_v. \quad (9.50)$$

или в дивергентной тензорной форме

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial (v_k v_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( D_v \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + Q_v. \quad (9.51)$$

Таким образом, уравнение для определения турбулентной вихревой псевдовязкости  $\nu_i$  в рассматриваемой модели турбулентных течений имеет интегральную форму (9.49) и дифференциальную (9.51).

Рассмотрим подробнее вопрос определения источникового слагаемого  $Q_v$  в уравнении (9.51) переноса вихревой псевдовязкости. Так как при достаточно больших числах Рейнольдса основное движение становится неустойчивым и порождает вихревое, а затем и пульсационное движение другого более мелкого масштаба, то можно принять, что процесс образования и переноса вихревой псевдовязкости  $\nu_i$  происходит в результате передачи энергии осредненного движения пульсационному движению. Пульсации скорости образуются обычно вблизи стенки вследствие распада мелких вихрей, появляющихся с той же скоростью из распада более крупных вихрей, а те в свою очередь порождаются из еще более крупных вихрей, которые в итоге порождаются энергией основного потока. Каждый масштаб получает от больших столько же энергии, сколько он отдает меньшим. Самые мелкие вихри затухают вследствие физической вязкости  $\nu$ . Таким образом, существует непрерывный поток энергии от основного движения к малым пульсациям, где он превращается в теплоту. Очевидно, что для поддержания основного турбулентного потока ему надо сообщать это же количество энергии. Если основное движение поддерживается и является квазистационарным, то статистически стационарной будет и вся структура вихревого турбулентного потока.

В соответствии с физической постановкой задачи источниковое слагаемое моделирующее порождение вихревой псевдовязкости в объеме  $\tau$  в единицу времени можно определить через вихревые напряжения в жидкости  $\tau_{ik}$ , связанные с внутренней нестационарностью в потоке. Поэтому допуская, что мощность порождения вихревой псевдовязкости прямо пропорционально величине касательных напряжений можно записать, что

$$Q_v = k_R \cdot \tau_{ik} / \rho = k_R |\nu_i| |\nu_k|; \quad i \neq k,$$



где  $k_R$  - эмпирический коэффициент, характеризующий интенсивность генерации вихревой псевдовязкости  $\nu_t$ ;  $\nu_i$  и  $\nu_k$  - мгновенные локальные значения компонентов скорости ( $i \neq k$ ). В случае двумерной задачи имеем

$$Q_\nu = k_R |u| |v|.$$

Нетрудно заметить, что при таком подходе источниковое слагаемое  $Q_\nu$  станет значимым при расчетах лишь после того, как значение мгновенной поперечной скорости достигнет определенной величины, которая зависит от вихревой структуры потока, то есть от числа Рейнольдса.

Таким образом, в модельном уравнении для вихревой псевдовязкости  $\nu_t$  фигурируют два эмпирических коэффициента  $D_\nu$  и  $k_R$ , подлежащие определению. При этом коэффициент диффузии  $D_\nu$  практически может быть определен, если ввести в рассмотрение понятие турбулентного вихревого числа Бруацкого – Шмидта

$$Br_\nu = \frac{\nu_t}{D_\nu},$$

которое по аналогии с турбулентными числами Прандтля и Шмидта может быть принято в потоке постоянным. Поэтому выбрав величину  $Br_\nu$  коэффициент диффузии  $D_\nu$  станет известен.

Коэффициент  $k_R$  связан с эффектами влияния шероховатости стенки на интенсивность порождения вихревой псевдовязкости  $\nu_t$ . Следовательно на данном этапе обсуждения этого вопроса необходимые константы будут определяться эмпирически путем сравнения расчетов с экспериментом. Выполненный нами численный эксперимент при расчетах характеристик турбулентного течения с поперечным сдвигом в плоском прямолинейном канале показал, что для гидравлически гладкой стенки можно принять

$$Br_\nu = 0,02, \quad k_R = 2.$$

Очевидно, что в дальнейшем эти коэффициенты должны быть уточнены.

В общем случае эксперименты показывают, что при ламинарном режиме течения, когда относительная высота шероховатости на стенке невелика по сравнению с поперечным размером потока, то ее влияние на сопротивление мало и поверхность можно считать гидравлически гладкой. В случае турбулентного режима течения эффекты шероховатости заметно влияют на трение и это влияние увеличивается с ростом числа Рейнольдса. При больших числах Рейнольдса коэффициент трения на стенке канала или трубы почти полностью определяется шероховатостью и слабо зависит от числа Рейнольдса. Причина этого состоит в том, что если пристенное

течение таково, что элементы шероховатости погружены в вязкий подслой, то они почти не участвуют в создании трения. Однако, если режим течения таков, что в потоке имеются вихри и пульсации скорости, которые достигают элементов шероховатости, то их взаимодействие приводит к повышению напряжения трения. Чем больше выступы шероховатости, тем меньше число Рейнольдса, при котором начинается это взаимодействие. Согласно таким представлениям, поверхность может вести себя как гидродинамически гладкая, если выступы шероховатости меньше чем толщина вязкого подслоя. Стенка будет шероховатой, если режим течения таков, что высота элементов шероховатости превосходит размеры вязкого подслоя и основной вихревой турбулентный поток взаимодействует с ней. Следовательно, понятие гладкости обтекаемой стенки определяется не только физическими свойствами поверхности, а зависит и от характера течения, то есть от числа Рейнольдса.

### **9.9. Дискретизация уравнения переноса вихревой турбулентной псевдовязкости методом контрольного объема**

В рассматриваемой модели турбулентного течения уравнение переноса вихревой псевдовязкости входит в полную систему исходных уравнений турбулентного течения и они должны решаться совместно. Поэтому обратимся к построению конечно-разностного аналога интегрального уравнения переноса (9.49) для вихревой псевдовязкости с помощью метода контрольного объема. Далее ограничимся рассмотрением двумерной задачи и введем сеточный шаблон с разнесенными сетками как это делалось выше при анализе уравнений ламинарного и турбулентного движения.

В центре нашего внимания будет произвольная внутренняя точка  $(j, i)$ , которая находится в центре контрольного объема и окружена соответствующими соседними узлами  $(j+1, i)$ ,  $(j-1, i)$ ,  $(j, i+1)$ ,  $(j, i-1)$ . Сеточную функцию вихревой турбулентной псевдовязкости  $\nu_{j,i}$  для произвольного внутреннего узла  $(j, i)$  будем определять в узле основной сетки  $S_0(j, i)$ , а компоненты скорости  $u, v$  в узлах дополнительных полуцелых сеток  $S_1(j+1/2, i)$  и  $S_2(j, i+1/2)$  соответственно.

При построении дискретного аналога для уравнения переноса вихревой псевдовязкости используем процедуру интегрирования уравнения переноса по контрольному объему. С этой целью рассмотрим уравнение (9.51) применительно к произвольной двумерной ячейке  $D_{j,i}$ . Учитывая выше сказанное относительно структуры источникового слагаемого  $Q_\nu$ , а также формулы для операторов  $div$  и  $grad$  преобразуем уравнение (9.51) к следующему виду

$$\begin{aligned}
& \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial(uv_t)}{\partial x} + \frac{\partial(vv_t)}{\partial y} \right] dx dy = \\
& = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (D_v^x \frac{\partial v_t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (D_v^y \frac{\partial v_t}{\partial y}) \right] dx dy + \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} [k_R |u| |v|] dx dy.
\end{aligned} \tag{9.52}$$

Предполагая теперь, что процесс переноса  $v_t$  изотропен и коэффициенты диффузии  $D_v^x$  и  $D_v^y$  равны  $D_v$ , а турбулентная вязкость  $v_t$  внутри рассматриваемой ячейки постоянна и равна ее среднему значению в центре ячейки  $(j, i)$ , после конечно-разностной аппроксимации соответствующих производных по времени и по пространству, а также операции интегрирования по контрольному объему, получим конечно-разностный аналог уравнения переноса для сеточной функции вихревой турбулентной псевдовязкости  $v_{j,i}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} (v_{j,i}^{n+1} - v_{j,i}^n) + \Delta y (u_{j+1/2,i} v_{j+1/2,i} - u_{j-1/2,i} v_{j-1/2,i})^{n+1} + \\
& + \Delta x (v_{j,i+1/2} v_{j,i+1/2} - v_{j,i-1/2} v_{j,i-1/2})^{n+1} = \\
& = \Delta y \left[ D_{j+1/2,i} \frac{(v_{j+1,i} - v_{j,i})}{hx_{j+1}} - D_{j-1/2,i} \frac{(v_{j,i} - v_{j-1,i})}{hx_j} \right]^{n+1} + \\
& + \Delta x \left[ D_{j,i+1/2} \frac{(v_{j,i+1} - v_{j,i})}{hy_{i+1}} - D_{j,i-1/2} \frac{(v_{j,i} - v_{j,i-1})}{hy_i} \right]^{n+1} + k_R \langle\langle |u| \cdot |v| \rangle\rangle_{j,i}^{n+1} \Delta x \cdot \Delta y,
\end{aligned} \tag{9.53}$$

где  $\langle\langle |u| \cdot |v| \rangle\rangle_{j,i}$  - среднее по объему  $\tau$  вихревые напряжения в ячейке  $(j, i)$ , обусловленные эффектами нестационарности.

В целях удобства перейдем к безразмерной форме конечно-разностного уравнения (9.53). Для этого, как обычно, введем соответствующие масштабы длины  $L$ , скорости  $u_0$ , времени  $t_0 = L/u_0$  и вязкости  $\nu_0 = \nu$ . Кроме того, будем предполагать, что в этом уравнении по аналогии с задачей переноса тепла значение компонентов скорости и коэффициентов диффузии  $D$  берутся на предыдущем  $n$ -ом временном слое и, следовательно они считаются известными с предыдущей итерации или из начальных условий. Тогда, обозначая как и прежде, такие значения переменных значком звездочка (\*), а искомые значения вихревой турбулентной псевдовязкости на  $(n+1)$  временном слое пусть будут для простоты записи без значка. Наконец, учитывая, что рассматриваемая система уравнений содержит уравнение переноса для скалярной субстанции

$R$  с коэффициентом диффузии  $D_\nu$  целесообразно ввести в рассмотрение безразмерное турбулентное число Бруацкого - Шмидта в виде  $Br_\nu = \nu_{j,i} / D_{j,i}$ . Тогда принимая для безразмерных переменных следующие обозначения  $X = x/L$ ,  $Y = y/L$ ,  $U = u/u_0$ ,  $V = v/u_0$ ,  $\tau = tu_0/L$ ,  $R = \nu_t/\nu$ ,  $R^* = \nu_t^*/\nu$ ,  $Br_\nu = \nu_{j,i}^*/D_{j,i}^*$ ,  $Re = u_0L/\nu$ , преобразуем систему конечно-разностных уравнений (9.53) к следующему безразмерному виду относительно искомой сеточной функции  $R_{j,i}$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau} (R_{j,i} - R_{j,i}^*) + \Delta Y (U_{j+1/2,i}^* R_{j+1/2,i} - U_{j-1/2,i}^* R_{j-1/2,i}) + \\ & + \Delta X (V_{j,i+1/2}^* R_{j,i+1/2} - V_{j,i-1/2}^* R_{j,i-1/2}) = \\ & = \frac{\Delta Y}{Re Br_\nu} \left[ \frac{R_{j+1/2,i}^*}{hX_{j+1}} (R_{j+1,i} - R_{j,i}) - \frac{R_{j-1/2,i}^*}{hX_j} (R_{j,i} - R_{j-1,i}) \right] + \\ & + \frac{\Delta X}{Re Br_\nu} \left[ \frac{R_{j,i+1/2}^*}{hY_{i+1}} (R_{j,i+1} - R_{j,i}) - \frac{R_{j,i-1/2}^*}{hY_i} (R_{j,i} - R_{j-1,i}) \right] + k_R (|U^*| \cdot |V^*|)_{j,i} Re \Delta X \Delta Y. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Заметим, что если воспользоваться гипотезой самодиффузии [189], то есть положить  $D_{j,i} = \nu_{j,i}$ , то в этом случае число Бруацкого - Шмидта для вихревой псевдовязкости будет равно единице  $Br_\nu = 1$ . Однако по физическому смыслу очевидно, что значение  $Br_\nu$  следует определять на основе численных экспериментов.

Полученное уравнение (9.54) содержит искомые величины псевдовязкости  $R$  с полуцелыми индексами, которые указывают на ее значение не в центре контрольного объема  $(j,i)$ , а на его гранях. С подобной ситуацией мы уже сталкивались раньше. Поэтому при конечно-разностной аппроксимации таких слагаемых снова воспользуемся схемой «против потока» в виде:

$$\begin{aligned} U_{j+1/2,i}^* R_{j+1/2,i} &= U_{j+1/2,i}^* \left[ (1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) R_{j+1,i} + \beta(U_{j+1/2,i}^*) R_{j,i} \right]; \\ U_{j-1/2,i}^* R_{j-1/2,i} &= U_{j-1/2,i}^* \left[ (1 - \beta(U_{j-1/2,i}^*)) R_{j,i} + \beta(U_{j-1/2,i}^*) R_{j-1,i} \right]; \\ V_{j,i+1/2}^* R_{j,i+1/2} &= V_{j,i+1/2}^* \left[ (1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) R_{j,i+1} + \beta(V_{j,i+1/2}^*) R_{j,i} \right]; \\ V_{j,i-1/2}^* R_{j,i-1/2} &= V_{j,i-1/2}^* \left[ (1 - \beta(V_{j,i-1/2}^*)) R_{j,i} + \beta(V_{j,i-1/2}^*) R_{j,i-1} \right], \end{aligned} \quad (9.55)$$

где параметр  $\beta$  принимает значение либо ноль, либо единицу, в зависимо-

сти от знака скорости в соответствующем узле. Кроме того, полученное конечно-разностное уравнение переноса вихревой турбулентной псевдовязкости (9.54) содержит слагаемые с коэффициентами, которые не соответствуют положению узлов расчетной сетки согласно принятого шаблона. В этом случае для их определения будет использована следующая аппроксимация

$$\begin{aligned} R_{j+1/2,i}^* &= 0,5(R_{j,i}^* + R_{j+1,i}^*); & R_{j-1/2,i}^* &= 0,5(R_{j,i}^* + R_{j-1,i}^*); \\ R_{j,i+1/2}^* &= 0,5(R_{j,i}^* + R_{j,i+1}^*); & R_{j,i-1/2}^* &= 0,5(R_{j,i}^* + R_{j,i-1}^*). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в формуле (9.54) относится к центру контрольного объема  $(j,i)$ . Но согласно нашей модели компоненты скорости определяются через их значения на серединах сторон контрольного объема. Поэтому для их определения воспользуемся простейшей линейной аппроксимацией вида

$$\begin{aligned} U_{j,i} &= 0,5(U_{j+1/2,i} + U_{j-1/2,i}), \\ V_{j,i} &= 0,5(V_{j,i+1/2} + V_{j,i-1/2}). \end{aligned}$$

Теперь подставляя эти формулы и формулы (9.55) в уравнение (9.54) и группируя подобные слагаемые, после соответствующих преобразований получим дискретный аналог уравнения переноса для безразмерной турбулентной псевдовязкости  $R = \nu_t / \nu$  в стандартной форме в виде следующей системы разностных алгебраических уравнений

$$d_{j,i}^R R_{j,i}^{n+1} + c_1^R R_{j+1,i}^{n+1} + c_0^R R_{j-1,i}^{n+1} + b_1^R R_{j,i+1}^{n+1} + b_0^R R_{j,i-1}^{n+1} = f^R, \quad (9.56)$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j,i}^R, c_1^R, c_0^R, b_1^R, b_0^R$  и свободный член  $f^R$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} d_{j,i}^R &= 0,25 \cdot hx1 \cdot hy1 / \Delta \tau + 0,5 \cdot hy1 \cdot [U_{j+1/2,i}^* \beta(U_{j+1/2,i}^*) - U_{j-1/2,i}^* (1 - \beta(U_{j-1/2,i}^*))] + \\ &+ 0,5 \cdot hx1 \cdot [V_{j,i+1/2}^* \beta(V_{j,i+1/2}^*) - V_{j,i-1/2}^* (1 - \beta(V_{j,i-1/2}^*))] + \\ &+ 0,5 \frac{R_{j+1/2,i}^* hy1}{Br_\nu Re h x_{j+1}} + 0,5 \frac{R_{j-1/2,i}^* hy1}{Br_\nu Re h x_j} + \\ &+ 0,5 \frac{R_{j,i+1/2}^* hx1}{Br_\nu Re h y_{j+1}} + 0,5 \frac{R_{j,i-1/2}^* hx1}{Br_\nu Re h y_i}; \end{aligned} \quad (9.57)$$

$$\begin{aligned}
c_1^R &= 0,5 \cdot hy_1 \cdot \left[ U_{j+1/2,i}^* (1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) - \frac{R_{j+1/2,i}^*}{Br_v \operatorname{Re} h x_{j+1}} \right]; \\
c_0^R &= -0,5 \cdot hy_1 \cdot \left[ U_{j-1/2,i}^* \cdot \beta(U_{j-1/2,i}^*) + \frac{R_{j-1/2,i}^*}{Br_v \operatorname{Re} h x_j} \right]; \\
b_1^R &= 0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i+1/2}^* (1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) - \frac{R_{j,i+1/2}^*}{Br_v \operatorname{Re} h y_{i+1}} \right]; \\
b_0^R &= -0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i-1/2}^* \beta(V_{j,i-1/2}^*) + \frac{R_{j,i-1/2}^*}{Br_v \operatorname{Re} h y_i} \right]; \\
f^R &= 0,25 \cdot hx_1 \cdot hy_1 \cdot \left[ \frac{R_{j,i}^*}{\Delta \tau} + 0,25 k_R (U_{j+1/2,i}^* + U_{j-1/2,i}^*) \cdot (V_{j,i+1/2}^* + V_{j,i-1/2}^*) \cdot \operatorname{Re} \right].
\end{aligned}$$

Полученный дискретный аналог для уравнения переноса вихревой турбулентной псевдовязкости в виде (9.56) является основным результатом этого раздела и имеет фундаментальное значение, так как позволяет замкнуть систему уравнений турбулентного движения. Важной особенностью этого уравнения является то, что с математической точки зрения оно представляет собой уравнение типа Пуассона, с решением которого мы уже сталкивались при определении поля давления в случае ламинарных течений. Поэтому ясно, что его решение не вызывает принципиальных трудностей и оно может быть получено итерационными методами. При нашем подходе решение этого уравнения будет строиться с помощью его редукции к двум одномерным уравнениям второго порядка с трехдиагональными матрицами коэффициентов, которые эффективно решаются методом прогонки [87, 178, 181].

## 9.10. Общий алгоритм решения системы уравнений турбулентных течений методом DNM-TF

Выше было показано, что рассматриваемая модель турбулентного течения содержит новый параметр жидкости в виде вихревой турбулентной псевдовязкости  $R$ . Поэтому для замыкания общей системы уравнений движения жидкости (9.35), (9.37), (9.38) ее нужно дополнить разностным уравнением (9.56) для вихревой псевдовязкости. В результате имеем следующую замкнутую систему алгебраических конечно-разностных уравнений турбулентного движения жидкости, которая должна решаться совместно на каждом временном слое при соответствующих начально-краевых условиях

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P, \quad (9.58)$$

$$U_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta y(P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^U] / d_{j,i+1/2}^U, \quad (9.59)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x(P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V, \quad (9.60)$$

$$d_{j,i}^R R_{j,i}^{n+1} + c_1^R R_{j+1,i}^{n+1} + c_0^R P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^R R_{j,i+1}^{n+1} + b_0^R R_{j,i-1}^{n+1} = f^R. \quad (9.61)$$

При этом следует учитывать то обстоятельство, что выбор способа ведения итерации при решении всей системы уравнений в целом может влиять на результат решения каждой конкретной задачи.

Систему уравнений турбулентного движения несжимаемой жидкости (9.58)-(9.61) для соответствующих сеточных функций  $P$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $R$  необходимо решать при заданных начальных и краевых условиях. Важной особенностью данного метода является то, что расчеты выполняются для четырех основных физических переменных – давление, две компоненты скорости и вихревая турбулентная псевдовязкость. При этом искомые зависимые переменные расщеплены таким образом, что на любом этапе расчета решаются уравнения относительно одной зависимой переменной  $P$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $R$ . Это упрощает применение стандартных методов решения систем линейных алгебраических уравнений полученного вида. Другая важная особенность состоит в том, что благодаря использованию разнесенных сеток, граничные условия для решения уравнения типа Пуассона относительно давления не требуются, так как они определяются из уравнений движения (9.59), (9.60) в комбинации с граничными условиями для компонентов скоростей [208].

Для решения всей системы уравнений в целом используется итерационный вычислительный процесс, который состоит из шагов по времени. В начале каждого временного цикла предполагаются известными поля скорости, давления и значение вихревой псевдовязкости  $R$  в момент времени  $\tau_n$ . Вычислительная процедура расчета каждого шага по времени разбивается на четыре этапа и выполняется в следующей последовательности.

На первом этапе при заданных на предыдущем временном слое значениях скоростей  $U_{j,i+1/2}^n$ ,  $V_{j,i+1/2}^n$  и вихревой псевдовязкости  $R_{j,i}^n$  по соответствующим алгебраическим формулам, определяются все коэффициенты дискретизации  $d_{j,i+1/2}^U$ ,  $d_{j,i+1/2}^V$ ,  $c_1$ ,  $c_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$  с различными верхними индексами  $P$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $R$  и соответствующие выражения  $G^U$ ,  $G^V$ , включая свободные члены  $f^U$ ,  $f^V$ ,  $f^R$ ,  $f^P$ , входящие в соответствующие исходные уравнения.

На втором этапе, зная коэффициенты дискретизации с верхним индексом « $p$ », решается разностное уравнение для давления (9.58) и находится поле давления  $P_{j,i}^{n+1}$  на  $(n+1)$  временном слое.

На третьем этапе, зная коэффициенты дискретизации с верхними индексами « $U$ ,  $V$ » и соответствующие выражения  $G^U, G^V$  по известному уже полю давления  $P_{j,i}^{n+1}$  с помощью уравнений движения (9.59) и (9.60) рассчитываются значения сеточных функций компонентов скоростей  $U_{j+1/2,i}^{n+1}, V_{j,i+1/2}^{n+1}$  на  $(n+1)$  временном слое.

На четвертом этапе по известным значениям коэффициентов дискретизации с верхним индексом « $R$ » решается разностное уравнение (9.61) для вихревой псевдовязкости и определяется ее новое значение  $R_{j,i}^{n+1}$  на  $(n+1)$  - временном слое. На этом первый временной цикл заканчивается и далее он повторяется.

Задача решается на установление. Критерием окончания решения служит заданное время счета или условие, когда максимальная разность между значениями искомых переменных на предыдущем и следующем временном слое не превышает заданную величину ошибки  $\varepsilon$ .

Используемая конечно-разностная схема для уравнений нестационарного турбулентного движения аппроксимирует рассматриваемые уравнения с первым порядком точности по времени и со вторым порядком точности по пространственным переменным  $O(\Delta\tau, h^2)$  и можно показать, что она устойчива [24]. На каждом слое по времени контролируется сходимость расчетов основных уравнений и граничных условий. Алгоритм решения на установление позволяет получить как стационарное решение, так и исследовать динамику течений во времени. Метод решения реализован в виде компьютерной программы на языке Фортран.

Наряду с решением основной задачи по определению мгновенных значений скоростей, давления и вихревой псевдовязкости в программе предусмотрен отдельный модуль, выполняющий обработку результатов расчета по определению осредненных и пульсационных статистических характеристик течения.

В заключение отметим, что безусловным достоинством развиваемого подхода является то, что алгоритм численного решения системы исходных уравнений турбулентного течения аналогичен разработанному и апробированному ранее алгоритму численного решения задач ламинарного течения, который хорошо тестируется. Кроме того, рассматриваемый метод DNM-TF допускает изучение характеристик турбулентных течений в рамках единой модели при различных значениях числа Рейнольдса.



## 9.11. Основные принципы статистической обработки результатов расчета мгновенных значений характеристик турбулентных течений

Рассмотренный выше алгоритм решения системы уравнений турбулентного движения позволяет определить мгновенные значения параметров течения.

Средние значения параметров течения могут быть определены различными способами. Однако, строго говоря, процесс осреднения можно произвести только в тех случаях, когда выполняются определенные условия. Если изучаемый процесс или режим течения являются квазистационарными, то можно пользоваться осреднением по времени. Однако, если процесс не является таковым, то произвести осреднение по времени может оказаться невозможным. В таких случаях среднее можно определять, например, по ансамблю реализаций.

В качестве примера рассмотрим среднюю по времени продольную составляющую величины скорости в некоторой реперной точке области течения. Эта средняя величина определяется следующим образом

$$\bar{U}(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U(x, y, t) dt,$$

где  $U(x, y, t)$  - мгновенное значение продольной компоненты скорости,  $T$  – время.

В практических задачах время осреднения не может быть бесконечно большим и поэтому встает вопрос как выбрать время осреднения. Ясно, что в выборе массива мгновенных скоростей, подлежащих анализу, есть большой произвол. В задачах гидродинамики этот выбор можно сделать, если, например, известна компьютерная осциллограмма динамики параметров в реперных точках турбулентного потока. Тогда на ней обычно легко выделить некоторый средний квазистационарный период изменения картины течения, как показано, например, далее на рис. 10.3. Таким образом если результаты прямого численного решения системы нестационарных уравнений турбулентного течения (9.58) – (9.61) позволяют определить мгновенные значения параметров потока  $U$ ,  $V$ ,  $P$ ,  $R$  в любой точке расчетной области в зависимости от времени, то средние значения гидродинамических параметров находятся путем осреднения во времени мгновенных значений согласно формуле

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{(\tau_k - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_k} f(x, y, \tau) d\tau; \quad f(x, y, \tau) = U, V, P, R. \quad (9.62)$$

Здесь через  $\tau_l$  - обозначено время, соответствующее началу осреднения, а через  $\tau_k$  - конец осреднения,  $f(x,y,\tau)$  - любой соответствующий параметр течения. Этот прием достаточно обоснован если осредненное значение со временем не изменяется.

При описании структуры турбулентности часто используются понятия статистических корреляций пульсаций скорости и давления в одной или двух точках потока. Примером статистических корреляций двух компонентов скорости в одной точке являются напряжения Рейнольдса. Анализ и полнота статистических корреляций изучаемого течения обычно тесно связана с решаемой задачей.

При экспериментальном исследовании турбулентных течений с помощью термоанемометров или лазерной техники обычно определяют средние по времени скорости  $\bar{v}_i$ , давление  $\bar{p}$ , температуру  $\bar{T}$  и т. д., а также пульсационные параметры течения в форме дисперсий  $S_i = \sqrt{\overline{v_i'^2}}$  и различные корреляционные моменты вида  $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{u'T'}$ ,  $\overline{v'T'}$ ,  $\overline{v'p'}$  и т.п. Поэтому очевидно, что в основу статистической обработки результатов расчета мгновенных значений параметров потока следует заложить алгоритм определения указанных выше характеристик. Естественно, что полученные расчетом временные ряды динамики мгновенных значений параметров течения (компьютерные осциллограммы) при необходимости позволяют рассчитать не только средние значения зависимых переменных и различные корреляционные зависимости, но и спектры.

В общем случае при обработке численных результатов физического эксперимента и его сравнения с результатами аналитических или численных расчетов, следует учитывать особенности пространственно-временной структуры данных в этих двух случаях. В физическом эксперименте обычно получают длинные временные ряды в малом числе пространственных точек, а в численном эксперименте наоборот. Как правило получают короткие временные ряды в большом числе пространственных точек.

Обычно первый шаг статистической обработки состоит в определении условной границы квазиустановившегося течения по критерию стационарности. Временной участок численной реализации должен иметь достаточную протяженность для получения достоверных оценок статистических характеристик. На следующем этапе определяется момент времени  $t_l$ , начиная с которого средние значения параметров течения не зависят от начальных условий с заданной степенью точности  $\varepsilon$ . После этого выбирается временной интервал от  $t_l$  до  $t_k$  и путем интегрирования по этому интервалу времени определяются средние значения параметров потока по формуле (9.62). В качестве примера на рис. 10.3 приведена компьютерная осциллограмма динамики возмущений поперечной скорости  $V$  в плоском канале в реперной точке №2. Видно, что процесс колебаний скорости уста-

навливается во времени где-то при  $\tau \geq 200$ . Следовательно  $\tau_1 = 200$ ,  $\tau_k = 500$  и принятый для осреднения период составляет  $500 - 200 = 300$ . Ясно, что чем больше будет этот период, тем надежнее будет статистика.

Далее определяются пульсационные характеристики турбулентного течения согласно общей зависимости

$$f'(x, y, \tau) = f(x, y, \tau) - \bar{f}(x, y), \quad (9.63)$$

То есть

$$U'(x, y, \tau) = U(x, y, \tau) - \bar{U}(x, y);$$

$$V'(x, y, \tau) = V(x, y, \tau) - \bar{V}(x, y);$$

$$P'(x, y, \tau) = P(x, y, \tau) - \bar{P}(x, y),$$

где значение параметров  $U, V, P$  без значка соответствует его мгновенному значению, а штрих означает пульсацию.

Интенсивность пульсаций характеризуется их среднеквадратическими значениями, которые рассчитывается с помощью соответствующих интегралов в виде

$$\overline{f'^2} = \frac{1}{(\tau_k - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_k} f'^2(x, y, \tau) d\tau, \quad (9.64)$$

то есть

$$\overline{U'^2} = \frac{1}{(\tau_k - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_k} U'^2(x, y, \tau) d\tau,$$

$$\overline{V'^2} = \frac{1}{(\tau_k - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_k} V'^2(x, y, \tau) d\tau, \quad \overline{P'^2} = \frac{1}{(\tau_k - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_k} P'^2(x, y, \tau) d\tau,$$

Тогда дисперсии соответствующих параметров течения равны  $S = \sqrt{\overline{f'^2}}$  или

$$S_U = \sqrt{\overline{U'^2}}, \quad S_V = \sqrt{\overline{V'^2}}, \quad S_P = \sqrt{\overline{P'^2}}. \quad (9.65)$$

Рейнольдсовы напряжения сдвига определяются через интегралы вида

$$\overline{U'(x, y)V'(x, y)} = \frac{1}{(\tau_k - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_k} U'(x, y, \tau) \cdot V'(x, y, \tau) d\tau. \quad (9.66)$$

Другие корреляционные моменты определяются аналогично. Осредненная турбулентная энергия равна

$$k = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2}}{2}, \quad K = \frac{k}{u_0^2} = \frac{\overline{U'^2} + \overline{V'^2}}{2}. \quad (9.67)$$

При анализе турбулентного движения, кроме распределения пульсационных скоростей используются и другие характеристики. Например, представление о пространственной структуре турбулентного течения можно получить посредством изучения пульсаций скорости в двух соседних точках 1 и 2 поля течения. Такое изучение позволяет определить введенную Дж. И. Тейлором [224] корреляционную функцию.

$$R = \frac{\overline{u_1 u_2}}{\sqrt{\overline{u_1^2}} \sqrt{\overline{u_2^2}}},$$

Интеграл от корреляционной функции  $R$  по поперечному сечению канала  $S$  определяет интегральный масштаб турбулентности, который дает представление о среднем размере турбулентных вихревых образований.

Аналогичную формулу можно записать для пульсаций скорости в одной и той же точке, но в различные моменты времени. Тогда получим так называемую автокорреляционную функцию пульсаций

$$R_L(\tau) = \frac{\overline{v_i(t) \cdot v_i(t + \tau)}}{\sqrt{\overline{v_i^2(t)}} \sqrt{\overline{v_i^2(t + \tau)}}}, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Различные корреляционные функции в общем случае изменяются в промежутке от 0 до 1. Для описания структуры турбулентности вместо корреляционной функции можно использовать частотный анализ движения жидкости, который приводит к понятию спектра турбулентности в потоке. Если обозначить через  $\lambda$  частоту пульсаций параметра и через  $F(\lambda)d\lambda$  - процентное содержание среднего квадратичного значения, например,  $\overline{v_i'^2}$  в области частот от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ , то функция  $F(\lambda)$  будет представлять собой спектральное распределение среднего квадратичного  $\overline{v_i'^2}$  пульсации

скорости. Тогда согласно определению, мы будем иметь  $\int_0^\infty F(\lambda)d\lambda = 1$ . На

математическом языке спектральная функция  $F(\lambda)$  есть не что иное как результат преобразования Фурье автокорреляционной функции.

## **9.12. Интегральная форма уравнения турбулентного переноса тепла и его дискретизация методом контрольного объема**

В третьей главе был подробно рассмотрен вопрос дискретизации уравнения переноса тепла для случая ламинарного режима течения, когда коэффициент температуропроводности "а" постоянен. В данном разделе на основе использования интегральной формы закона сохранения энергии,

будет выполнена его дискретизация методом контрольного объема для случая турбулентного режима течения с учетом переменности коэффициента турбулентной теплопроводности  $a_t$  и при наличии температурной стратификации среды.

Выпишем уравнение турбулентного переноса тепла в следующем интегральном виде

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho c_p T d\tau = - \iiint_{\tau} \operatorname{div} (\vec{q}_n + \vec{q}_{nt}) d\tau + \iiint_{\tau} Q^T d\tau + \iiint_{\tau} \mu \varphi d\tau, \quad (9.68)$$

где  $T$  - температура,  $\rho$  - плотность,  $c_p$  - теплоемкость,  $\vec{q}_n$  и  $\vec{q}_{nt}$  - ламинарный и турбулентный потоки тепла, определяемые законом теплопроводности Фурье,  $\varphi$  - диссипативные слагаемые,  $Q^T$  - источники слагаемые. При построении дискретного аналога уравнения турбулентного переноса тепла ограничимся рассмотрением двумерной задачи и, следовательно будем рассматривать не тройные, а двойные интегралы по выделенному контрольному объему, а источник тепла и диссипативные процессы для простоты пока не будем учитывать..

Введем в рассмотрение сеточный шаблон разнесенной сетки для двумерной задачи с центром контрольного объема для температуры в узле  $(j, i)$  основной сетки  $S_0(j, i)$ , а компоненты скорости  $u$ ,  $v$ , как и прежде, будем определять в узлах дополнительных полуцелых сеток  $S_1(j+1/2, i)$  и  $S_2(j, i+1/2)$ .

Интегральный закон сохранения внутренней энергии (9.68) справедлив для произвольного объема. Поэтому его можно применить и для выделенной нами внутренней ячейки  $D_{j,i}$ . Если учесть формулу для оператора конвективного переноса в левой части уравнения (9.68) и формулу оператора  $\operatorname{div}$  в правой его части, то для несжимаемой жидкости из (9.68) будем иметь:

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{d}{dt} \iint_{\sigma} T d\sigma &= \rho c_p \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} \right] dx dy = \\ &= - \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial(q_n + q_{nt})_x}{\partial x} + \frac{\partial(q_n + q_{nt})_y}{\partial y} \right] dx dy. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Если теперь воспользоваться градиентным законом Фурье для суммарных потоков тепла для  $x$  и  $y$  - направлений в виде:

$$(q_n + q_{nt})_x = -(a + a_t) \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (q_n + q_{nt})_y = -(a + a_t) \frac{\partial T}{\partial y}; \quad a = \frac{\lambda}{\rho_0 c_p} \quad (9.70)$$

и предположить, что температура внутри объема ячейки постоянна и равна ее значению в центре ячейки  $(j, i)$ , то подставляя (9.70) в (9.69) и используя неявную схему для производных по пространству, после операции интегрирования, получим конечно-разностный аналог уравнения переноса тепла в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} (T_{j,i}^{n+1} - T_{j,i}^n) + \Delta y (u_{j+1/2,i} T_{j+1/2,i} - u_{j-1/2,i} T_{j-1/2,i})^{n+1} + \Delta x (v_{j,i+1/2} T_{j,i+1/2} - v_{j,i-1/2} T_{j,i-1/2})^{n+1} = \\ = \Delta y \left[ (a + a_t)_{j+1/2,i} \frac{(T_{j+1,i} - T_{j,i})}{hx_{j+1}} - (a + a_t)_{j-1/2,i} \frac{(T_{j,i} - T_{j-1,i})}{hx_j} \right]^{n+1} + \quad (9.71) \\ + \Delta x \left[ (a + a_t)_{j,i+1/2} \frac{(T_{j,i+1} - T_{j,i})}{hy_{j+1}} - (a + a_t)_{j,i-1/2} \frac{(T_{j,i} - T_{j,i-1})}{hy_i} \right]^{n+1} - \bar{v}_{j,i}^{n+1} \frac{b}{H} \Delta x \Delta y, \end{aligned}$$

где  $\bar{v}_{j,i}$  - среднее по ячейке  $(j, i)$  значение скорости  $v$ .

В целях удобства перейдем к безразмерной форме уравнения (9.71). Для этого, как обычно, введем масштабы длины  $L$ , скорости  $u_0$ , избыточной температуры  $\Delta T = (T_1 - T_2)$  и числа Пекле и Прандтля, подобно тому как это было сделано при рассмотрении уравнений ламинарного переноса тепла. Кроме того, будем предполагать, что в этом уравнении компоненты скорости и вихревая псевдовязкость уже известны из решения на предыдущем  $n$ -ом шаге. Обозначим значение температуры на предыдущем  $n$ -ом слое значком звездочка (\*), а искомые величины температуры на  $(n+1)$  слое будут вообще без значка. Тогда переходя в (9.71) к безразмерным величинам:  $X = x/L$ ,  $Y = y/L$ ,  $U = u/u_0$ ,  $V = v/u_0$ ,

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}, Pe_T = \frac{u_0 L}{a}, Pr = \frac{\nu}{a}, Pr_t = \frac{\nu_t}{a_t}, R = \nu_t / \nu \text{ после простых преобразова-}$$

ний будем иметь следующее уравнение переноса тепла

$$\begin{aligned} \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} (\theta_{j,i} - \theta_{j,i}^*) + \Delta Y (U_{j+1/2,i}^* \theta_{j+1/2,i} - U_{j-1/2,i}^* \theta_{j-1/2,i}) + \Delta X (V_{j,i+1/2}^* \theta_{j,i+1/2} - V_{j,i-1/2}^* \theta_{j,i-1/2}) = \\ = \frac{\Delta Y}{Pe_T} \left[ \frac{1}{hx_{j+1}} \left( 1 + R_{j+1/2,i}^{n+1} \frac{Pr}{Pr_t} \right) (\theta_{j+1,i} - \theta_{j,i}) - \frac{1}{hx_j} \left( 1 + R_{j-1/2,i}^{n+1} \frac{Pr}{Pr_t} \right) (\theta_{j,i} - \theta_{j-1,i}) \right] + \quad (9.72) \\ + \frac{\Delta X}{Pe_T} \left[ \frac{1}{hy_{j+1}} \left( 1 + R_{j,i+1/2}^{n+1} \frac{Pr}{Pr_t} \right) (\theta_{j,i+1} - \theta_{j,i}) - \frac{1}{hy_i} \left( 1 + R_{j,i-1/2}^{n+1} \frac{Pr}{Pr_t} \right) (\theta_{j,i} - \theta_{j,i-1}) \right] - V_{j,i}^* \frac{b}{H} \Delta X \Delta Y. \end{aligned}$$

Полученное конечно-разностное уравнение турбулентного переноса тепла (9.72) содержит в конвективных слагаемых искомую температуру  $\theta$  с полуцелыми индексами, то есть она определена на гранях контрольного

объема, а не в его центре. С этой ситуацией мы уже сталкивались. Поэтому при аппроксимации этих слагаемых воспользуемся схемой «против потока» в виде:

$$\begin{aligned}
 U_{j+1/2,i}^* \theta_{j+1/2,i} &= U_{j+1/2,i}^* \left[ (1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) \theta_{j+1,i} + \beta(U_{j+1/2,i}^*) \theta_{j,i} \right]; \\
 U_{j-1/2,i}^* \theta_{j-1/2,i} &= U_{j-1/2,i}^* \left[ (1 - \beta(U_{j-1/2,i}^*)) \theta_{j,i} + \beta(U_{j-1/2,i}^*) \theta_{j-1,i} \right]; \\
 V_{j,i+1/2}^* \theta_{j,i+1/2} &= V_{j,i+1/2}^* \left[ (1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) \theta_{j,i+1} + \beta(V_{j,i+1/2}^*) \theta_{j,i} \right]; \\
 V_{j,i-1/2}^* \theta_{j,i-1/2} &= V_{j,i-1/2}^* \left[ (1 - \beta(V_{j,i-1/2}^*)) \theta_{j,i} + \beta(V_{j,i-1/2}^*) \theta_{j,i-1} \right],
 \end{aligned} \tag{9.73}$$

где параметр  $\beta$  принимает значение либо ноль, либо единицу, в зависимости от знака соответствующей скорости.

Кроме того, полученное разностное уравнение турбулентного переноса тепла (9.72) содержит слагаемые с коэффициентами турбулентной псевдовязкости  $R$ , которые не соответствуют положению узлов расчетной сетки согласно принятого шаблона. Для их аппроксимации воспользуемся формулами (9.55). Тогда подставляя формулы (9.73) в уравнение (9.72) и группируя подобные слагаемые после соответствующих преобразований, получаем окончательную разностную форму уравнения турбулентного переноса тепла для несжимаемой жидкости в виде замаскированного уравнения Пуассона

$$d_{j,i}^T \theta_{j,i}^{n+1} + c_1^T \theta_{j+1,i}^{n+1} + c_0^T \theta_{j-1,i}^{n+1} + b_1^T \theta_{j,i+1}^{n+1} + b_0^T \theta_{j,i-1}^{n+1} = f^T, \tag{9.74}$$

где коэффициенты  $d_{j,i}^T$ ,  $c_1^T$ ,  $c_0^T$ ,  $b_1^T$ ,  $b_0^T$  и свободный член  $f^T$  являются известными величинами по результатам предыдущей итерации и определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 d_{j,i}^T &= 0,25 \cdot hx_1 \cdot hy_1 / \Delta \tau + 0,5 \cdot hy_1 \cdot \left[ U_{j+1/2,i}^* \beta(U_{j+1/2,i}^*) - U_{j-1/2,i}^* (1 - \beta(U_{j-1/2,i}^*)) \right] + \\
 &+ 0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i+1/2}^* \beta(V_{j,i+1/2}^*) - V_{j,i-1/2}^* (1 - \beta(V_{j,i-1/2}^*)) \right] + \\
 &+ \frac{0,5}{Pe_T} \left( 1 + R_{j+1/2,i}^* \frac{Pr}{Pr_t} \right) \left( \frac{hy_1}{hx_{j+1}} + \frac{hx_1}{hy_{i+1}} \right) + \frac{0,5}{Pe_T} \left( 1 + R_{j-1/2,i}^* \frac{Pr}{Pr_t} \right) \left( \frac{hy_1}{hx_j} + \frac{hx_1}{hy_i} \right); \\
 c_1^T &= 0,5 \cdot hy_1 \cdot \left[ U_{j+1/2,i}^* (1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) - \frac{1}{Pe_T} \left( 1 + R_{j+1/2,i}^* \frac{Pr}{Pr_t} \right) \frac{1}{hx_{j+1}} \right]; \\
 c_0^T &= -0,5 \cdot hy_1 \cdot \left[ U_{j-1/2,i}^* \cdot \beta(U_{j-1/2,i}^*) + \frac{1}{Pe_T} \left( 1 + R_{j-1/2,i}^* \frac{Pr}{Pr_t} \right) \frac{1}{hx_j} \right];
 \end{aligned} \tag{9.75}$$

$$b_1^T = 0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i+1/2}^* (1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) - \frac{1}{Pe_T} \left( 1 + R_{j,i+1/2}^* \frac{Pr}{Pr_t} \right) \frac{1}{hy_{i+1}} \right];$$

$$b_0^T = -0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i-1/2}^* \cdot \beta(V_{j,i-1/2}^*) + \frac{1}{Pe_T} \left( 1 + R_{j,i-1/2}^* \frac{Pr}{Pr_t} \right) \frac{1}{hy_i} \right];$$

$$f^T = 0,25 \cdot hx_1 \cdot hy_1 \cdot \theta_{j,i}^* / \Delta \tau - 0,125 \cdot hx_1 \cdot hy_1 (V_{j,i+1/2}^* + V_{j,i-1/2}^*) \frac{b}{H}.$$

Система разностных уравнений (9.74) записана для внутренних узлов расчетной сетки, которые принадлежат пространству рассматриваемого течения. В математическом отношении она идентична системам уравнений для давления  $P_{j,i}$  или вихревой псевдовязкости  $R_{j,i}$  и потому может быть решена тем же методом при значениях коэффициентов определенных формулами (9.75). Таким образом, при решении задач с учетом турбулентного переноса тепла общее число уравнений подлежащих решению возросло. Всего их стало пять. Это уравнение для определения турбулентной псевдовязкости  $R$  (9.61), уравнение для определения давления  $P$  (9.58), уравнение для определения температуры  $\theta$  (9.74) и два уравнения для определения компонентов скорости  $U$  (9.59) и  $V$  (9.60). Указанная система уравнений должна решаться совместно итерационным методом на каждом временном слое при конкретных начальных и граничных условиях.

### 9.13. Интегральная форма уравнения турбулентной диффузии концентрации химического компонента и его дискретизация методом контрольного объема

Для многих гидродинамических задач характерно наличие в жидкости пассивных примесей типа солености или других химически реагирующих веществ. Это обстоятельство приводит к необходимости учитывать в уравнениях движения жидкости массовые объемные силы гравитационной природы, связанные с разностью плотностей за счет переменной массовой концентрации. Поэтому для расчета параметров течения основные уравнения движения жидкости должны быть дополнены уравнением переноса концентрации вещества. При этом гидродинамическая и диффузионная задачи оказываются связанными и их нужно решать совместно.

В третьей главе был подробно рассмотрен вопрос о дискретизации уравнения переноса вещества (диффузии) для случая ламинарного режима



течения, когда коэффициент диффузии  $D$  постоянен. В данном разделе будет показана техника построения дискретного аналога уравнения турбулентного переноса примеси (диффузии) аналогичная той, которая использовалась в разделе ламинарных течений. То есть, для этого будем использовать общий интегральный закон сохранения концентрации вещества, а отличие в основном будет состоять лишь в том, что в случае турбулентного течения коэффициент турбулентной диффузии  $D_t$  будет не постоянным, как в ламинарном течении, а переменным и будет зависеть от координат и параметров течения.

При нашем подходе уравнением, описывающим динамику концентрации примеси является интегральное уравнение сохранения концентрации в выделенном контрольном объеме  $\tau$ , ограниченном поверхностью  $\sigma$ , которое имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} c \, d\tau = - \iint_{\sigma} (\bar{q}_c + \bar{q}_{ct}) d\sigma + \iiint_{\tau} Q^c d\tau \quad (9.76)$$

где  $\bar{q}_c$  и  $\bar{q}_{ct}$  - молекулярный и вихревой потоки вещества,  $Q^c$  - источниковое слагаемое. Физически это уравнение означает, что скорость изменения концентрации вещества  $c$  в объеме  $\tau$  равна сумме ламинарного и вихревого турбулентного потоков вещества через границу  $\sigma$  контрольного объема  $\tau$ . Преобразуем поверхностный интеграл в уравнении (9.76) по формуле Остроградского-Гаусса в объемный. Тогда будем иметь

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} c d\tau = - \iiint_{\tau} \operatorname{div} (\bar{q}_c + \bar{q}_{ct}) d\tau + \iiint_{\tau} Q^c d\tau. \quad (9.77)$$

Ограничимся для простоты рассмотрением двумерной задачи. Следовательно интегралы будем рассматривать не трехмерные, а двухмерные. Для построения конечно-разностного аналога уравнения (9.77) введем сеточный шаблон с разнесенными сетками  $S_0(j,i)$ ,  $S_1(j+1/2,i)$  и  $S_2(j,i+1/2)$ . Сеточную функцию концентрации  $c_{j,i}$  будем определять в узлах основной сетки  $S_0(j,i)$ , а компоненты скорости  $u$  и  $v$  как и раньше – в узлах дополнительных полуцелых сеток  $S_1(j+1/2,i)$  и  $S_2(j,i+1/2)$  соответственно. В центре нашего внимания будет произвольная внутренняя точка  $(j,i)$ , которая находится в центре контрольного объема. Следуя общему принципу построения дискретного аналога исходного интегрального уравнения методом контрольного объема применим уравнение (9.77) к разностной ячейки  $D_{j,i}$  и вычислим интегралы, входящие в это уравнение. Сначала рассмотрим интеграл, находящийся в левой части уравнения (9.77). Используя общую формулу конвективного переноса рассматриваемой гидродинамической субстанции  $c$ , представим

субстанциональную производную по времени в виде суммы локального и конвективного слагаемого. Тогда с учетом двумерности задачи будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \iint_{\sigma} c d\sigma = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} \right] dx dy. \quad (9.78)$$

Теперь рассмотрим первое слагаемое в правой части уравнения (9.77). Для преобразования подинтегрального выражения воспользуемся сначала оператором  $div$  в виде

$$div(\vec{q}_c + \vec{q}_{ct}) = \left[ \frac{\partial(q_c + q_{ct})_x}{\partial x} + \frac{\partial(q_c + q_{ct})_y}{\partial y} \right]. \quad (9.79)$$

Тогда уравнение (9.77) с помощью соотношений (9.78) и (9.79) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\sigma} c d\sigma &= \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} \right] dx dy = \\ &= - \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{\partial(q_c + q_{ct})_x}{\partial x} + \frac{\partial(q_c + q_{ct})_y}{\partial y} \right] dx dy + \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{j-1/2}^{j+1/2} Q^c dx dy. \end{aligned} \quad (9.80)$$

Далее, для определения проекций векторов потоков вещества двумя механизмами, молекулярным и вихревым турбулентным, используем классический градиентный закон Фика в виде

$$(q_c + q_{ct}) = -(D + D_t) grad c \quad (9.81)$$

где  $D$  и  $D_t$  коэффициенты молекулярной и вихревой диффузии вещества. Теперь допуская, что диффузия изотропная, а величина концентрации  $c$  внутри ячейки постоянная и равна ее среднему значению в центре ячейки  $(j, i)$ , после использования неявной схемы для производных по пространству и выполнения операции интегрирования, получаем конечно-разностный аналог интегрального уравнения турбулентного переноса примеси в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta X \cdot \Delta Y}{\Delta t} (c_{j,i}^{n+1} - c_{j,i}^n) + \Delta Y (u_{j+1/2,i} c_{j+1/2,i} - u_{j-1/2,i} c_{j-1/2,i})^{n+1} + \\ &+ \Delta X (v_{j,i+1/2} c_{j,i+1/2} - v_{j,i-1/2} c_{j,i-1/2})^{n+1} = \\ &= \Delta Y \left[ (D + D_t)_{j+1/2,i} \frac{(c_{j+1,i} - c_{j,i})}{hx_{j+1}} - (D + D_t)_{j-1/2,i} \frac{(c_{j,i} - c_{j-1,i})}{hx_j} \right]^{n+1} + \\ &+ \Delta X \left[ (D + D_t)_{j,i+1/2} \frac{(c_{j,i+1} - c_{j,i})}{hy_{j+1}} - (D + D_t)_{j,i-1/2} \frac{(c_{j,i} - c_{j,i-1})}{hy_i} \right]^{n+1} - (\bar{Q}^c)^{n+1} \Delta X \Delta Y, \end{aligned} \quad (9.82)$$

где  $\bar{Q}^c$  - среднее по ячейке значение величины  $Q^c$ .

Далее, целесообразно перейти к безразмерной форме уравнения (9.82). С этой целью введем характерные масштабы длины  $L$ , скорости  $u_0$ , времени  $t_0 = L/u_0$ , концентрации  $c_0$  и следующие безразмерные величины  $X = x/L$ ,  $Y = y/L$ ,  $U = u/u_0$ ,  $V = v/u_0$ ,  $\tau = tu_0/L$ ,  $C = c/c_0$ , а также безразмерный параметр  $Pe_d = u_0 L/D$  - диффузионное число Пекле, ламинарное и турбулентное числа Шмидта  $Sc = \frac{\nu}{D}$ ,  $Sc_t = \frac{\nu_t}{D_t}$  соответственно.

Кроме того, будем предполагать, что в уравнении (9.82) компоненты скорости уже известны из решения системы уравнений движения. Поэтому обозначим их значения и значения концентрации на предыдущем  $n$ -ом временном слое значком звездочка (\*), а искомые величины концентрации на  $(n+1)$ - временном слое будут вообще без значка. Тогда из (9.82) после простых преобразований получим следующий дискретный аналог уравнений турбулентного переноса концентрации примеси в безразмерных величинах

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} (C_{j,i} - C_{j,i}^*) + \Delta Y (U_{j+1/2,i}^* C_{j+1/2,i} - U_{j-1/2,i}^* C_{j-1/2,i}) + \Delta X (V_{j,i+1/2}^* C_{j,i+1/2} - V_{j,i-1/2}^* C_{j,i-1/2}) = \\ & = \frac{\Delta Y}{Pe_d} \left[ \frac{1}{hx_{j+1}} \left( 1 + R_{j+1/2,i}^{n+1} \frac{Sc}{Sc_t} \right) (C_{j+1,i} - C_{j,i}) - \frac{1}{hx_j} \left( 1 + R_{j-1/2,i}^{n+1} \frac{Sc}{Sc_t} \right) (C_{j,i} - C_{j-1,i}) \right] + \\ & + \frac{\Delta X}{Pe_d} \left[ \frac{1}{hy_{i+1}} \left( 1 + R_{j,i+1/2}^{n+1} \frac{Sc}{Sc_t} \right) (C_{j,i+1} - C_{j,i}) - \frac{1}{hy_i} \left( 1 + R_{j,i-1/2}^{n+1} \frac{Sc}{Sc_t} \right) (C_{j,i} - C_{j,i-1}) \right] - \bar{Q}^c \Delta X \Delta Y, \end{aligned} \quad (9.83)$$

где  $R$  с различными индексами есть значение сеточной функции безразмерной турбулентной вязкости ( $R = \nu_t / \nu$ ).

Напомним, что при использовании разнесенной сетки концентрация  $C$ , как и давление с температурой, определяется в узлах основной сетки  $S_0(j,i)$ . Однако, конвективные слагаемые полученного разностного уравнения (9.83) содержат значения концентраций с полуцелым индексом, то есть они определены в узлах вспомогательных сеток на гранях контрольного объема. Для их аппроксимации, как и ранее, используем противопоточную схему в виде (3.73) с параметром  $\beta$ , который в зависимости от знака скорости принимает значение либо ноль, либо единицу. Подставляя эти формулы в уравнение (9.83) и выполнив соответствующие преобразования, получим стандартную конечно-разностную форму уравнения турбулентного переноса примеси в следующем виде:

$$d_{j,i}^c C_{j,i}^{n+1} + c_1^c C_{j+1,i}^{n+1} + c_0^c C_{j-1,i}^{n+1} + b_1^c C_{j,i+1}^{n+1} + b_0^c C_{j,i-1}^{n+1} = f^c, \quad (9.84)$$

где коэффициенты  $d_{j,i}^c$ ,  $c_1^c$ ,  $c_0^c$ ,  $b_1^c$ ,  $b_0^c$  и свободный член  $f^c$  являются известными величинами и определяются по формулам:

$$\begin{aligned} d_{j,i}^c &= 0,25 \cdot hx_1 \cdot hy_1 / \Delta \tau + 0,5 \cdot hy_1 \cdot \left[ U_{j+1/2,i}^* \beta(U_{j+1/2,i}^*) - U_{j-1/2,i}^* (1 - \beta(U_{j-1/2,i}^*)) \right] + \\ &+ 0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i+1/2}^* \beta(V_{j,i+1/2}^*) - V_{j,i-1/2}^* (1 - \beta(V_{j,i-1/2}^*)) \right] + \\ &+ \frac{0,5}{Pe_d} \left( 1 + R_{j+1/2,i}^* \frac{Sc}{Sc_t} \right) \left( \frac{hy_1}{hx_{j+1}} + \frac{hx_1}{hy_{i+1}} \right) + \frac{0,5}{Pe_d} \left( 1 + R_{j-1/2,i}^* \frac{Sc}{Sc_t} \right) \left( \frac{hy_1}{hx_j} + \frac{hx_1}{hy_i} \right); \\ c_1^c &= 0,5 \cdot hy_1 \cdot \left[ U_{j+1/2,i}^* (1 - \beta(U_{j+1/2,i}^*)) - \frac{1}{Pe_d} \left( 1 + R_{j+1/2,i}^* \frac{Sc}{Sc_t} \right) \frac{1}{hx_{j+1}} \right]; \\ c_0^c &= -0,5 \cdot hy_1 \cdot \left[ U_{j-1/2,i}^* \cdot \beta(U_{j-1/2,i}^*) + \frac{1}{Pe_d} \left( 1 + R_{j-1/2,i}^* \frac{Sc}{Sc_t} \right) \frac{1}{hx_j} \right]; \\ b_1^c &= 0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i+1/2}^* (1 - \beta(V_{j,i+1/2}^*)) - \frac{1}{Pe_d} \left( 1 + R_{j,i+1/2}^* \frac{Sc}{Sc_t} \right) \frac{1}{hy_{i+1}} \right]; \\ b_0^c &= -0,5 \cdot hx_1 \cdot \left[ V_{j,i-1/2}^* \cdot \beta(V_{j,i-1/2}^*) + \frac{1}{Pe_d} \left( 1 + R_{j,i-1/2}^* \frac{Sc}{Sc_t} \right) \frac{1}{hy_i} \right]; \\ f^c &= 0,25 \cdot hx_1 \cdot hy_1 \cdot C_{j,i}^* / \Delta \tau - 0,125 \cdot hx_1 \cdot hy_1 \bar{Q}^c, \end{aligned} \quad (9.85)$$

где значения скоростей  $U^*$ ,  $V^*$  и турбулентной вязкости  $R^*$  являются известными величинами на данном расчетном временном слое. Система разностных уравнений (9.84) записана для внутренних узлов расчетной области. В математическом отношении она идентична системе уравнений для температуры (9.74) и потому решается тем же итерационным методом при значениях коэффициентов, определенных формулами (9.85).

Таким образом, при решении гидродинамической задачи с учетом процесса турбулентного переноса концентрации химического компонента  $C$  общее число уравнений подлежащих совместному решению еще возросло на единицу. Поэтому в общем случае их стало уже шесть. Это уравнение для определения давления  $P$  (9.58), два уравнения для компонентов скорости  $U$  (9.59) и  $V$  (9.60), уравнение для определения турбулентной псевдовязкости  $R$  (9.61), уравнение для определения температуры  $\theta$  (9.74) и уравнения для определения концентрации примеси  $C$  (9.84). Система этих уравнений должна решаться совместно итерационным методом на каждом временном слое при конкретных начальных и граничных условиях.

При использовании разнесенной сетки особенность состоит в том, что сеточные функции концентрации находятся в пограничных узлах основной сетки  $S_0(j, i)$  и поэтому ближайшее расстояние между граничной поверхностью и пограничными узлами равны половинам шагов по соответствующим координатным направлениям. Поэтому граничное условие, например, отражение на горизонтальной поверхности, запишется в виде

$$\left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \text{ или } \frac{(c_{j,1} - c_{j,0})}{hy_1} = 0, \quad (9.86)$$

где  $i = 1$  это номер узла ближайший к поверхности во внутренней части расчетной области, а  $i = 0$  это номер узла ближайший к этой же стенке с внешней стороны сетки, которая уже не принадлежит расчетной области. С помощью этого условия из разностного уравнения переноса концентрации исключаются сеточные функции концентрации примеси для фиктивных узлов, которые не принадлежат пространству рассматриваемого процесса диффузии. Аналогично анализируются граничные условия и на других границах.

## ГЛАВА 10

# ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ DNM-TF

### 10.1. Общие замечания

Одной из важнейших проблем гидродинамики является исследование силового и теплового взаимодействия вязкой жидкости с обтекаемой поверхностью в условиях ламинарного и турбулентного режимов течения. Эти задачи встречаются в природе и технике в самых различных ситуациях. Например, трение воздуха на крыле самолета, на корпусе ракеты или на поверхности автомобиля, сопротивление движению судна или торпеды в воде, потери напора в трубах, каналах и других трубопроводах, гидравлические потери в турбомашинах и т.д. Все эти примеры течения дополнительно осложнены процессами теплообмена. Поэтому расчет гидродинамических параметров течений и переноса тепла является необходимой составной частью при проектировании названных объектов, а также при строительстве и создании различных теплообменников, систем охлаждения ядерных и химических реакторов, трубопроводов, камер внутреннего сгорания и т.п. Из этих примеров видна важность и необходимость расчетов структуры турбулентных течений в различных прикладных задачах.

Однако, расчет таких течений вязкой несжимаемой жидкости, даже на основе полных уравнений Навье-Стокса, оказывается удовлетворительным лишь до чисел Рейнольдса не превышающих некоторое их критическое значение  $Re_*$ . Причина этого связана с ограниченностью возможностей математической модели движения жидкости, основанной на гипотезе линейной зависимости тензора напряжений от тензора скоростей деформации. Поэтому в рамках уравнений Навье-Стокса, использующих такую линейную модель, не удастся адекватно описать турбулентные режимы течения жидкости или газа, так как с ростом числа Рейнольдса течение теряет свою устойчивость и становится вихревым и нестационарным. Поэтому для адекватного математического моделирования течений при числах Рейнольдса превышающих критическое значение

необходимо использовать более сложную модель течения. Традиционно этот путь состоял в переходе от системы уравнений движения Навье-Стокса к системе уравнений Рейнольдса, получаемых путем представления мгновенных значений параметров течения в виде суммы осредненных и пульсационных величин и их осреднения по времени, в которых при этом появляются дополнительные корреляционные слагаемые, описывающие турбулентный перенос. Однако эти слагаемые выражаются через пульсационные величины и поэтому могут быть определены лишь с помощью какой-либо дополнительной полуэмпирической модели турбулентности. Кроме того, такой метод расчета характеристик турбулентных течений имеет определенные недостатки, связанные, например, с привлечением большого количества неуниверсальных эмпирических коэффициентов, что снижает точность и достоверность результатов расчета.

Чтобы преодолеть эти недостатки выше предложена новая модель турбулентных течений, основанная на модификации не только модели турбулентности, но и коррекции модели самой сплошной среды с целью более адекватного описания нестационарного турбулентного движения несжимаемой жидкости. Подробности и обоснование этой модели обсуждались в девятой главе. Новизна модели основана на гипотезе существования в нестационарном вихревом турбулентном потоке дополнительных касательных напряжений, которые нелинейно связаны с тензором мгновенных скоростей деформаций. Эти напряжения учитываются с помощью нового параметра течения называемого вихревой псевдовязкостью, которая возникает и существует в потоке только при наличии нестационарности течения при числах Рейнольдса превышающих его критическое значение. При этом для описания динамики вихревой псевдовязкости постулируется дополнительное, к системе уравнений движения, модельное уравнение переноса скалярной гидродинамической субстанции, подобно уравнению переноса тепла в задачах теплообмена. В рамках такой новой модели удастся разработать метод расчета основных характеристик нестационарных турбулентных течений несжимаемой жидкости при различных больших числах Рейнольдса.

В данном разделе на конкретном примере течения проводится проверка адекватности предлагаемой модели жидкости и тестирование метода расчета параметров турбулентных течений. Рассматриваемый метод, названный DNM-TF (Direct Numerical Method of Turbulent Flow), может стать основой для расчета различных турбулентных течений. Однако для этого необходимо выполнить верификацию этого метода. Поэтому очень важно правильно выбрать подходящий для этой цели пример течения, которое надежно исследовалось другими расчетными и экспериментальными методами.

## 10.2. Расчет характеристик турбулентного течения в плоском прямолинейном канале

### 10.2.1. Особенности изучения характеристик турбулентных течений в каналах

Среди огромного многообразия турбулентных течений особый интерес представляет простейшее течение жидкости в прямолинейных каналах и трубах. Для таких течений характерна геометрическая простота и удобство как для экспериментального, так и для теоретического изучения структуры турбулентных течений с поперечным сдвигом. Кроме того, исследование турбулентного течения в каналах и трубах представляет не только большой практический интерес, но и позволяет получить ценные сведения для понимания природы самого явления турбулентности.

Из экспериментов хорошо известно, что в области входного сечения канала или трубы существует начальный участок стабилизации течения. За ним вниз по потоку, при заданном числе Рейнольдса на достаточном удалении от входа, устанавливается осредненная во времени структура потока, которая сохраняется однородной, то есть распределение средних и пульсационных скоростей на этом участке зависит лишь от поперечной координаты  $Y = y/h$  нормальной к стенке и перестает зависеть от продольной координаты  $X = x/h$ .

Длина входного участка стабилизации в плоском канале при ламинарном режиме течения рассматривалась рядом исследователей и рассчитывается аналитически. В нашей работе [57] показано, что при умеренных числах Рейнольдса  $Re \leq 1000$  она хорошо описывается линейной зависимостью

$$X_n = x_n / h = 0,06 Re.$$

Следовательно, при числе  $Re = 1000$  длина участка стабилизации составляет  $X_n = 60$ . Известно, что при турбулентном режиме течения длина участка стабилизации короче чем при ламинарном течении, но ее значение тяжело определить из-за сложной и нестационарной структуры турбулентного потока. Существует несколько различных оценок протяженности этой области. В частности, она может быть определена по формуле [114]

$$X_n = 1,87 \cdot Re^{0,25}.$$

Обычно экспериментальные измерения турбулентных характеристик в течениях такого класса ограничены данными полученными на полностью развитом участке течения. О. Рейнольдс (1883), И. Никурадзе (1929), Х.



Рейхард (1938), Т. Лауфер (1954), Ж. Конт-Белло (1968) были среди первых, которые экспериментально изучали развитые течения в каналах. Измерения И. Никурадзе были ограничены изучением осредненных характеристик течения, а Х. Рейхард изучал и пульсационные параметры потока. Позднее Т. Лауфер детально изучал и турбулентные статистические характеристики в трубах и каналах при трех числах Рейнольдса (12300, 30800 и 61800), построенных по средней осевой скорости и радиусу трубы. При высоких числах Рейнольдса 57000, 120000, 230000 ( $Re = u_0 h / 2\nu$ ) детальные измерения в плоском канале были проведены Ж. Конт-Белло [114]. Ее измерения наряду с осредненными и пульсационными характеристиками включали корреляционные моменты и энергетические турбулентные спектры. Позднее многими исследователями были выполнены подобные измерения с помощью термоанемометрической и лазерной аппаратуры на различных экспериментальных установках. К сожалению, нужно отметить, что даже для этого простого течения между данными различных исследователей наблюдается существенное рассогласование для таких параметров течения как среднеквадратические пульсации скоростей, особенно в области близкой к стенке.

При математическом моделировании турбулентных течений жидкостей и газов имеется несколько различных точек зрения. Одна из них состоит в том, что турбулентные течения полностью описываются системой уравнений Навье-Стокса [174]. Однако в последнее время уровень развития численных методов и вычислительной техники достиг такого уровня, что стало возможным исследовать различные подходы с помощью вычислительного эксперимента.

Имеющиеся в литературе результаты, включая наш собственный опыт [57], привел нас к выводу о невозможности описать переходный и турбулентный режимы течения в рамках системы уравнений Навье-Стокса, использующих линейный закон зависимости тензора напряжений от тензора скоростей деформаций. Поэтому нужны другие альтернативные подходы к этой проблеме.

Теоретическое изучение характеристик турбулентных течений представляет большие трудности по целому ряду причин. Главная из них связана с отсутствием корректной постановки задачи расчета всегда нестационарных характеристик турбулентного течения. В свое время О. Рейнольдс предложил рассчитывать не мгновенные значения параметров турбулентных течений, а их осредненные во времени значения. Такой подход, к сожалению, приводит к незамкнутости исходной системы уравнений турбулентного движения. Поэтому к настоящему времени в рамках осредненных по времени уравнений Рейнольдса предложено большое количество полуэмпирических методов их расчета. Однако, все эти методы обладают определенными недостатками и практически не позволяют выполнить расчет мгновенных характеристик турбулентных

течений, а служат лишь проверкой адекватности используемых гипотез и полуэмпирических моделей замыкания исходной системы уравнений для рассматриваемой задачи. Вследствие этого возможность создания прямого численного метода расчета мгновенных, осредненных и пульсационных характеристик турбулентного течения при произвольном числе Рейнольдса всегда была в центре внимания исследователей и давно обсуждается среди специалистов. Однако конкретные результаты появились недавно. Предлагаемый новый метод расчета характеристик турбулентного течения, названный DNM-TF методом, удовлетворяет этой цели и представляет собой численный метод интегрирования системы нестационарных уравнений турбулентного течения в форме интегральных законов сохранения массы и изменения количества движения, замкнутых с помощью однопараметрической модели вихревой псевдовязкости. В этом методе касательные напряжения в движущейся сплошной среде состоят из суммы двух напряжений. Первые из них обусловлены наличием физической молекулярной вязкости жидкости, а вторые – наличием вихревой псевдовязкости. При этом вторые напряжения нелинейно связаны с тензором скоростей деформаций и проявляются в потоке лишь при определенном состоянии вихревой структуры в нем, зависящей от числа Рейнольдса.

Новый метод расчета турбулентных течений позволяет определить мгновенные значения полей скорости, давления и вихревой псевдовязкости во всей расчетной области в зависимости от времени и от числа Рейнольдса. Зная мгновенные значения параметров турбулентного течения в узлах расчетной сетки по соответствующим формулам статистики определяются осредненные по времени, а затем и пульсационные характеристики потока.

### **10.2.2. Постановка задачи и основные уравнения**

Из сказанного выше следует, что подходящим примером течения для верификации новой модели турбулентных течений может служить задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском прямолинейном полубесконечном канале с неподвижными гидравлически гладкими жесткими стенками. Особо отметим, что рассматриваемое течение относится к классу напорных течений, поэтому для характеристики режима течения необходимо поставить дополнительное условие, которое должно состоять в постоянстве расхода жидкости в канале или в условии постоянства среднего градиента давления. Для стационарных течений и умеренных числах Рейнольдса можно принять любое из этих условий [174]. Однако в общем случае следует использовать условие постоянства расхода, а давление должно рассчитываться.

Принципиальная схема рассматриваемого течения в канале и конфигурация расчетной области  $ABCD$ , показаны на рис. 10.1. Начало введенной

декартовой системы координат  $O$  находится в левом нижнем углу прямоугольной области  $ABCD$ . Будем изучать течение на установившемся участке плоского канала, т. е. предполагается, что его характеристики зависят только от вертикальной координаты  $Y$  и не зависят от продольной координаты  $X$ .

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы путем численного решения новой системы уравнений турбулентного течения найти класс нестационарных течений несжимаемой жидкости, который по своим свойствам и характеристикам близок к наблюдаемым турбулентным течениям.

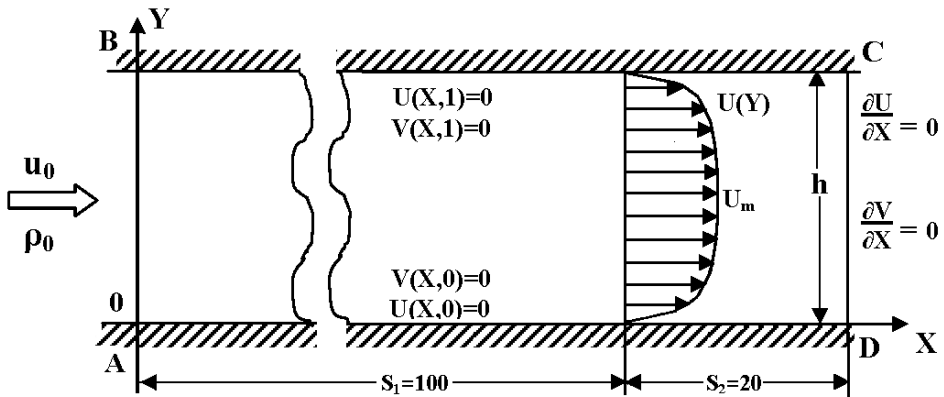


Рис. 10.1. Принципиальная схема развитого турбулентного течения в плоском канале

Для решения рассматриваемой задачи применим прямой численный метод DNM-TF. Его особенность состоит в том, что для описания турбулентного движения жидкости используется не система дифференциальных уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу, а система основных интегральных законов сохранения массы, переноса импульса и вихревой псевдовязкости, записанных для мгновенных значений параметров течения в конечно-объемной форме для произвольного объема  $\tau$ , выделенного в жидкости и ограниченного поверхностью  $\sigma$ . Эти интегральные соотношения записываются соответственно в следующем общем виде:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = 0, \quad (10.1)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \vec{v} d\tau = \iiint_{\tau} \text{div}(\Pi + \Gamma) d\tau + \iint_{\sigma} \vec{F} d\tau, \quad (10.2)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} v_i d\tau = - \iiint_{\tau} \text{div} \vec{q}_v d\tau + \iint_{\sigma} Q_v d\tau. \quad (10.3)$$

Здесь  $\rho$  - плотность жидкости,  $\vec{v}$  - вектор скорости,  $\Pi, \Gamma$  – тензоры вязких и вихревых напряжений соответственно,  $\vec{F}$  - вектор массовых сил,  $\nu_t$  - вихревая турбулентная псевдовязкость,  $\vec{q}_v = -D \text{grad } v_t$  - вектор диффузионного потока вихревой псевдовязкости,  $D$  – коэффициент диффузии вихревой псевдовязкости,  $Q_v$  - источниковое слагаемое.

Чтобы решить систему интегральных уравнений (10.1) - (10.3) в ней сначала используются соотношения, связывающие суммарный тензор напряжений  $(\Pi + \Gamma)$  с тензором скоростей деформаций, а затем используются градиентная модель для потока вихревой псевдовязкости и эмпирическое выражение для источникового слагаемого  $Q_v$ . Решение полученной системы исходных уравнений выполняется методом конечных разностей на разнесенных сетках. После введения пятиточечного шаблона и компактных обозначений  $P_{j,i}, U_{j+1/2,i}, V_{j,i+1/2}, R_{j,i}$  с помощью метода контрольного объема строится их дискретный аналог. В итоге получаем систему конечно-разностных уравнений турбулентного движения несжимаемой жидкости в которой для удобства осуществлен переход к безразмерным величинам по обычным правилам.

В рассматриваемом случае в качестве масштаба длины принимается ширина канала  $h$ , за масштаб скорости принята среднерасходная скорость в канале  $u_0 = Q/h$ , за масштаб времени принята величина  $t_0 = h/u_0$ , за масштаб вихревой псевдовязкости принят коэффициент физической молекулярной вязкости  $\nu$ , а за масштаб давления принят скоростной напор  $p_0 = \rho u_0^2$ . В девятой главе было показано, что в безразмерных величинах  $U = u/u_0, V = v/u_0, X = x/h, Y = y/h, \tau = tu_0/h, R = \nu_t/\nu, P = p/\rho u_0^2$  исходная система двумерных уравнений турбулентного движения жидкости (10.1) – (10.3) в конечно-разностной форме, после соответствующих преобразований принимает вид:

$$d_{j,i}^P P_{j,i}^{n+1} + c_1^P P_{j+1,i}^{n+1} + c_0^P P_{j-1,i}^{n+1} + b_1^P P_{j,i+1}^{n+1} + b_0^P P_{j,i-1}^{n+1} = f^P, \quad (10.4)$$

$$U_{j+1/2,i}^{n+1} = [\Delta y (P_{j,i}^{n+1} - P_{j+1,i}^{n+1}) + G_{j+1/2,i}^U] / d_{j+1/2,i}^U; \quad (10.5)$$

$$V_{j,i+1/2}^{n+1} = [\Delta x (P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i+1}^{n+1}) + G_{j,i+1/2}^V] / d_{j,i+1/2}^V; \quad (10.6)$$

$$d_{j,i}^R R_{j,i}^{n+1} + c_1^R R_{j+1,i}^{n+1} + c_0^R R_{j-1,i}^{n+1} + b_1^R R_{j,i+1}^{n+1} + b_0^R R_{j,i-1}^{n+1} = f^R, \quad (10.7)$$

где коэффициенты дискретизации  $d_{j,i}, d_{j+1/2,i}, d_{j,i+1/2}, c_1, c_0, b_1, b_0$  выражения для  $G^U, G^V$  и свободные члены  $f^s$  с верхними индексами  $P, U, V, R$  являются известными величинами по данным с предыдущего шага и определяются по определенным алгебраическим формулам.

Выписанная система разностных алгебраических уравнений (10.4) – (10.7) является замкнутой, так как она содержит четыре уравнения и четыре независимых переменных  $P, U, V, R$ . Поэтому она может быть решена численно итерационным методом при заданных начально-краевых условиях.

Выше уже отмечалось, что характерной особенностью течений в каналах является то, что движение жидкости происходит под действием продольного перепада давления, однако, заданной величиной в рассматриваемом классе течений принимается расход жидкости  $Q = u_0 \cdot h$  через поперечное сечение канала. Следовательно, при такой постановке задачи число Рейнольдса задано в виде  $Re = u_0 h / \nu$ , а давление определяется в процессе решения задачи. Напомним, что в соответствии с постановкой задачи нас будут интересовать значения мгновенных, осредненных по времени и пульсационных параметров течения в выбранном на развитом участке канала поперечном сечении. Пусть, например, это сечение будет удалено от входного сечения в канале на расстояние  $X = 100$ .

Для завершения постановки задачи необходимо задать начальные и граничные условия искомых переменных на всех границах расчетной области. На входе в расчетную область используется условие невозмущенного течения в виде

$$U|_{AB} = 6(1 - Y)Y; \quad V|_{AB} = 0; \quad R|_{AB} = R_0,$$

то есть, продольная скорость  $U(Y)$  имеет параболический профиль Пуазейля, поперечная составляющая скорости  $V$  равна нулю, а вихревая псевдовязкость равна некоторому постоянному значению  $R_0$ , которое связано с уровнем начальной турбулентности.

На верхней стенке канала  $BC$  и на нижней  $AD$  выполняются очевидные условия прилипания  $U|_{\Gamma} = 0$  и непротекания  $V|_{\Gamma} = 0$ , а для вихревой псевдовязкости  $R|_{\Gamma} = 0$ , где  $\Gamma$  – твердая граница. При постановке граничного условия в выходном сечении канала  $CD$ , мы сталкиваемся с проблемой моделирования граничного условия на бесконечности. В данном случае для компонентов скорости и вихревой псевдовязкости используются мягкие граничные условия Неймана.

Таким образом граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} U|_{AB} &= 6(1 - Y)Y; \quad U|_{BC} = 0; \quad U|_{AD} = 0; \quad \partial U / \partial X|_{CD} = 0; \\ V|_{AB} &= 0; \quad V|_{BC} = 0; \quad V|_{AD} = 0; \quad \partial V / \partial X|_{CD} = 0; \\ R|_{AB} &= R_0; \quad R|_{BC} = 0; \quad R|_{AD} = 0; \quad \partial R / \partial X|_{CD} = 0. \end{aligned} \quad (10.8)$$

При постановке начальных условий будем предполагать, что вертикальная скорость  $V$  и давление  $P$  во всей области равны нулю, а

горизонтальная скорость  $U(Y)$  имеет параболический профиль. Вихревая псевдовязкость во всей области в начальный момент равна нулю.

Граничные условия для давления в постановке задачи отсутствуют. Но при нашем подходе необходимые значения давления в граничных узлах определяются с помощью уравнений движения в универсальной дискретной форме в комбинации с граничными условиями для скоростей. По существу они представляют собой условия Неймана

$$\partial P / \partial n|_{\Gamma} = \mu_{\Gamma},$$

где  $n$  - нормаль к границе области  $\Gamma$ , а  $\mu_{\Gamma}$  - известная величина.

Сформулированная задача о турбулентном течении вязкой жидкости в плоском прямолинейном полубесконечном канале решалась численно итерационным методом на установление с помощью разработанной компьютерной программы PC-TF.

### **10.2.3. Результаты расчетов. Динамика возмущений параметров турбулентного потока**

Разработанная программа позволяет рассчитывать мгновенные значения параметров потока в узлах расчетной сетки и определить компоненты скорости, давление и коэффициент вихревой псевдовязкости в любом узле расчетной области, в зависимости от времени и от числа Рейнольдса. Это, в свою очередь, дает возможность определить осредненные по времени и пульсационные характеристики турбулентного течения по стандартным формулам статистики.

В данном разделе представлены результаты методических расчетов значений параметров турбулентного потока в поперечном сечении плоского канала высотой  $h$  и длиной  $L = l/h = 120$  в широком диапазоне чисел Рейнольдса  $100 \leq Re \leq 10^6$ . Расчеты выполнены в основном на сетке с постоянными шагами по пространству  $\Delta X = 0,04$ ,  $\Delta Y = 0,02$ . Основная цель расчетов состояла в верификации метода расчета и исследовании характеристик течения соответствующих развитому турбулентному потоку в плоском канале в сечении  $X = 100$  при различных числах Рейнольдса. Кроме того, в качестве примера были выполнены также расчеты по программе PC-LF при докритических числах Рейнольдса  $Re = 100 \div 1000$ , соответствующих ламинарному режиму течения ( $R = 0$ ).

Прежде всего изучалась зависимость динамики компонентов скорости  $U$ ,  $V$  и давления  $P$  от времени в четырех реперных точках с номерами 1, 2, 3, 4. Указанные точки расположены на одной вертикали  $Y$  на расстоянии от нижней стенки соответственно  $Y = 0,1; 0,2; 0,3; 0,5$ , которая удалена от

входа в канал на расстояние  $X = 100$ . В качестве примера на комплексном рис. 10.2 приведены результаты расчетов зависимости от времени двух компонентов скорости  $U$ ,  $V$  и давления  $P$  в четырех реперных точках при числе Рейнольдса  $Re = 10^5$  в виде компьютерных осциллограмм для мгновенных значений параметров потока. Этот рисунок иллюстрирует характер флуктуаций основных характеристик турбулентного течения на различном удалении реперных точек от нижней стенки канала. Нетрудно видеть, что величина амплитуды колебаний поперечной скорости  $V$  имеет минимальные значения вблизи стенки при  $Y = 0,1$  и на оси канала при  $Y = 0,5$ . А максимальное значение ее амплитуд соответствует реперным точкам с координатами  $Y = 0,2$  и  $Y = 0,3$  находящимися выше вязкого подслоя.

Амплитуды же колебаний продольной скорости  $U$  вблизи стенки при  $Y = 0,1$  и на оси канала при  $Y = 0,5$  имеют максимальные значения по сравнению с точками имеющими координаты  $Y = 0,2$  и  $Y = 0,3$ . Эти данные указывают на определенное различие динамики возмущений продольной и поперечной компонентов скорости по ширине канала в идентичных реперных точках при числе  $Re = 10^5$ .

Динамика пульсаций давления  $P$  во всех четырех реперных точках практически идентична и их значения выходят на одинаковый уровень. Это свидетельствует об относительном постоянстве давления по ширине канала, что согласуется с данными известных экспериментов.

Рассмотрим далее динамику поведения поперечной скорости  $V$  в одной характерной реперной точке с координатами  $Y = 0,2$  и  $X = 100$  при различных числах Рейнольдса. На рис. 10.3 показаны результаты таких расчетов вертикальной компоненты скорости  $V$  в зависимости от времени при двенадцати числах Рейнольдса. При этом набор чисел Рейнольдса таков, что охватываются как ламинарные режимы течения (модель DNM-LF), так и турбулентные - (модель DNM-TF). Легко видеть, что при числах Рейнольдса  $Re \leq 1000$  возмущения поперечной скорости очень малы, но с ростом числа Рейнольдса, начиная с  $Re > 1500$ , происходит образование начальных возмущений скорости, которые далее развиваются и приводят к появлению сначала флуктуаций переходного режима, а затем с ростом числа Рейнольдса они развиваются и приводят к появлению флуктуаций переходного режима и далее происходит переход к квазипериодическому режиму колебаний поперечной скорости, а при числах  $Re \geq 10^6$  наблюдается уже развитый нестационарный турбулентный режим течения. Таким образом, численными расчетами показано существование неустойчивости ламинарного течения в плоском канале в закритической области чисел Рейнольдса.

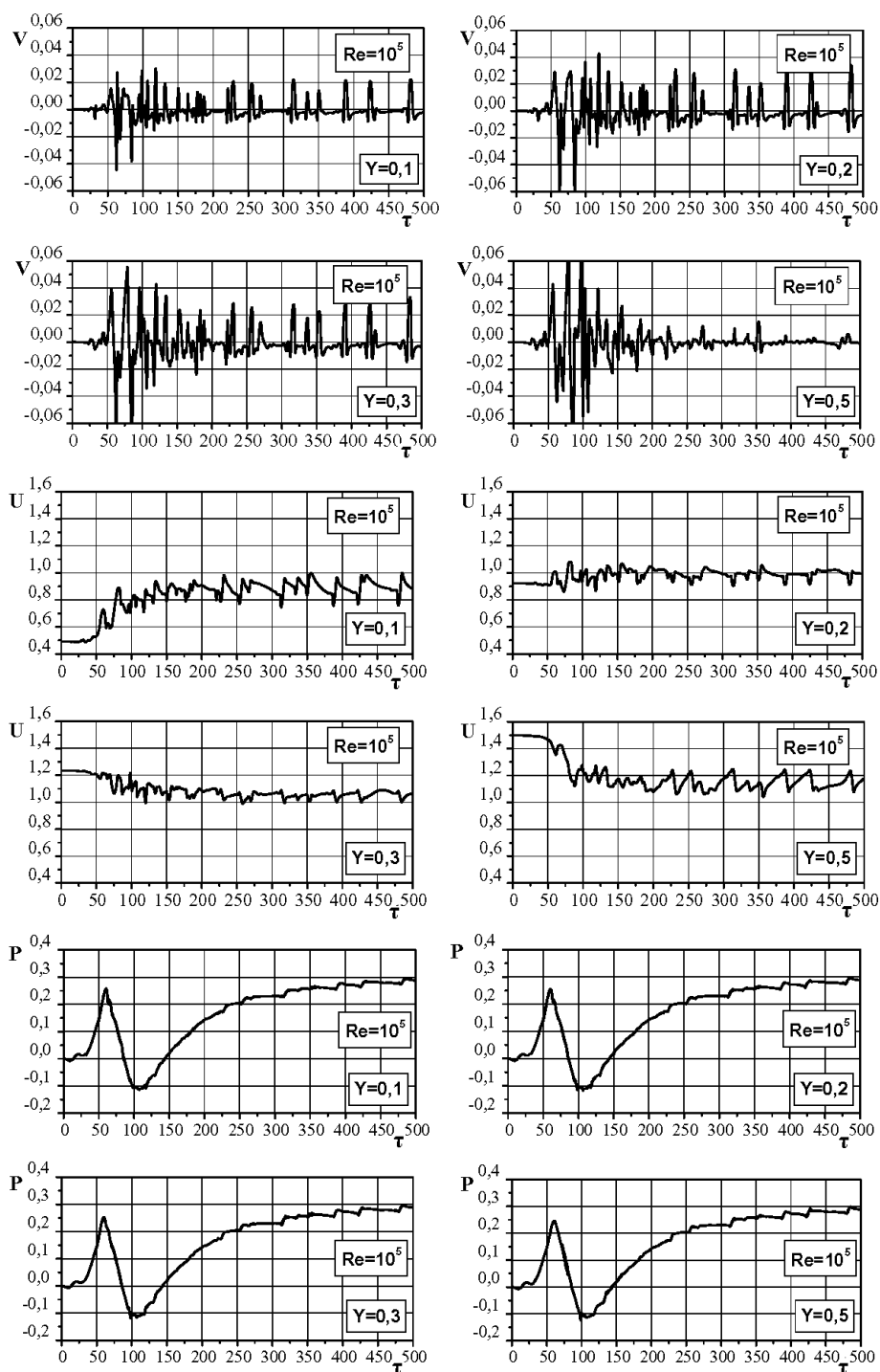


Рис. 10.2. Компьютерные осциллограммы пульсаций компонентов скорости  $V$ ,  $U$  и давления  $P$  в четырех реперных точках плоского канала в сечении  $X=100$  при числе  $Re=10^5$  ( $Br=0,02$ ;  $k_R=2$ )



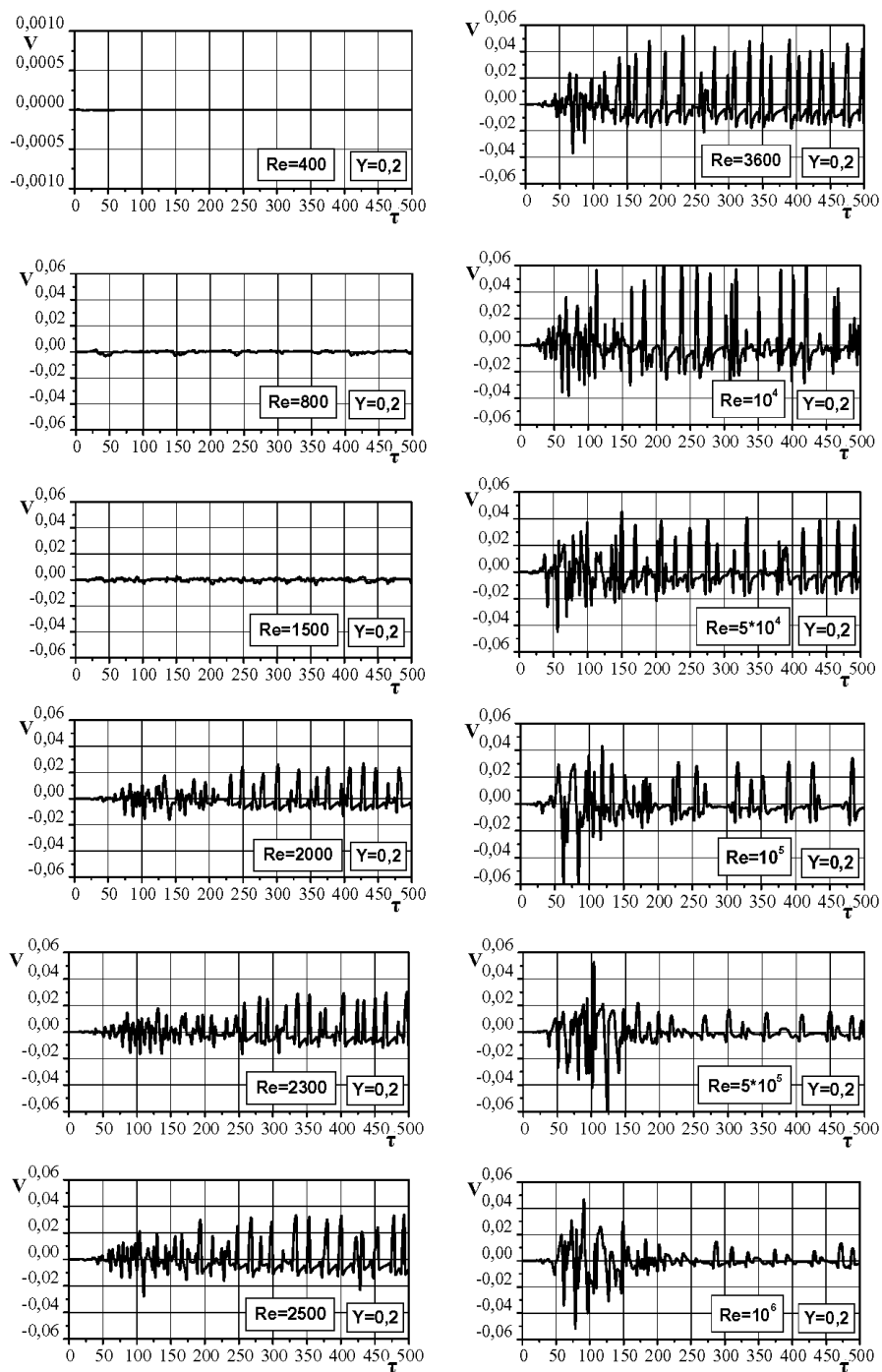


Рис. 10.3. Компьютерные осциллограммы мгновенных значений поперечной скорости  $V$  в точке  $X=100$ ,  $Y=0,2$  при различных числах Рейнольдса для  $\tau=500$ . ( $Br=0,02$ ;  $k_R=2$ ).

Общий анализ приведенных на рис. 10.3 результатов динамики поперечной скорости  $V$  от времени показывает, что в зависимости от величины числа Рейнольдса можно выделить три режима. Первый из них характеризуется тем, что скорость выходит на постоянное значение, что соответствует слоистому ламинарному режиму течения при числах  $Re \leq 1500$ . Второй режим обычно называют переходным. Как видно из осциллограмм он наблюдается при числах Рейнольдса  $2000 < Re < 10^5$ . При числах  $Re > 10^5$  отмечается третий беспорядочный хаотический режим колебаний поперечной компоненты скорости, который характерен для турбулентного режима течения. Таким образом, как и ожидалось, в рамках данной модели изменяя число Рейнольдса удается проследить последовательную смену режимов течения от установившегося ламинарного к переходному, а затем и к нестационарному турбулентному режиму течения. Представленные на рис. 10.3 результаты расчетов зависимости скорости от времени при различных числах Рейнольдса в виде компьютерных осциллограмм являются прямой иллюстрацией явления потери устойчивости течения в плоском канале и его перехода от ламинарного режима к турбулентному. Эти данные подтверждают принятую ранее гипотезу о механизме перехода, связанную со спонтанным разрушением вихревых структур в пристенной области течения при достижении касательными напряжениями внутри локальных областей критических значений.

#### 10.2.4. Осредненные характеристики турбулентного течения в плоском канале

Для тестирования численного метода DNM-TF большой интерес представляют расчетные эпюры профилей параметров потока по ширине канала  $h$ , осредненные во времени. С этой целью на основе полученных расчетом мгновенных характеристик турбулентного течения в сечении канала  $X = 100$ , были определены эпюры осредненных продольной  $\bar{U}$  и поперечной  $\bar{V}$  скоростей, давления  $\bar{P}$ , их среднеквадратические пульсации  $S_U = \sqrt{\overline{U'^2}}$ ,  $S_V = \sqrt{\overline{V'^2}}$ ,  $S_P = \sqrt{\overline{P'^2}}$ , профиль осредненного значения вихревой псевдовязкости  $\bar{R}$  и вторые корреляционные моменты  $(\overline{UV'})$ ,  $(\overline{VP'})$  в функции от поперечной координаты  $Y = y/h$  по следующим стандартным формулам:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, y) &= \frac{1}{(\tau_k - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_k} f(x, y, \tau) d\tau, \\ f'(x, y, \tau) &= f(x, y, \tau) - \bar{f}(x, y, \tau), \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\overline{f'^2}(x, y) = \frac{1}{(\tau_k - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_k} f'^2(x, y, \tau) d\tau.$$

$$\overline{U'(x, y)V'(x, y)} = \frac{1}{(\tau_k - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_k} U'(x, y, \tau) \cdot V'(x, y, \tau) d\tau.$$

$$\overline{V'(x, y)P'(x, y)} = \frac{1}{(\tau_k - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_k} V'(x, y, \tau) \cdot P'(x, y, \tau) d\tau.$$

Здесь  $f$  - мгновенное значение параметра,  $\bar{f}$  - его среднее значение,  $f'$  - его пульсация,  $\overline{f'^2}$  - среднеквадратическое значение параметра,  $\tau$  - время,  $f = U, V, P, R$ . Результаты этих расчетов при различных числах Рейнольдса показаны ниже на соответствующих рисунках. Зная о сложностях измерения характеристик турбулентного течения вблизи стенок, которые подробно обсуждались И. О. Хинце [216], Ж. Конт-Белло [114] и другими, были апробированы два варианта структуры расчетной сетки с постоянными размерами шагов  $\Delta X = 0,04$ ;  $\Delta Y = 0,02$  и  $\Delta X = 0,02$ ;  $\Delta Y = 0,01$ . Полученные результаты расчетов показали незначительное их отличие друг от друга, но мелкая сетка более удобна для анализа характеристик течения в вязком подслое, однако она требовала значительного увеличения времени счета. Поэтому в основном использовался первый вариант шагов расчетной сетки.

На рис. 10.4 (а) показаны результаты расчета профилей продольной осредненной скорости  $\bar{U}$  по ширине канала, нормированных на средне-расходную скорость в канале  $u_0$ , при пяти различных числах Рейнольдса. Легко видеть, что с увеличением числа Рейнольдса профили скорости становятся более наполненными по сравнению с ламинарным профилем Пуазейля ( $Re = 400$ ), а вблизи стенки градиенты имеют максимальные значения. Эти изменения эпюры продольной скорости с ростом числа Рейнольдса являются прямой иллюстрацией физического изменения вихревой структуры течения внутри плоского канала в зависимости от величины числа Рейнольдса. Из других особенностей обращает на себя внимание тот факт, что все профили нормированной продольной скорости  $\bar{U}$  пересекаются в двух точках, которые имеют координаты  $Y = 0,2$  и  $Y = 0,8$ , при этом значение нормированной скорости в них равно единице независимо от величины числа Рейнольдса.

На рис. 10.4 (с) представлены расчетные эпюры осредненной поперечной скорости  $\bar{V} = \bar{v}/u_0$  при пяти различных числах Рейнольдса, нормированной на осредненную скорость в канале  $u_0$ . Характерным здесь является

то, что изменение поперечной скорости вдоль координаты  $Y$  зависит от числа Рейнольдса, а по величине чрезвычайно мало и составляет порядок  $2 \cdot 10^{-4}$  от среднерасходной скорости.

Используемый метод расчета характеристик турбулентного течения позволяет рассчитывать и безразмерное значение вихревой псевдовязкости  $\bar{R} = \bar{\nu}_t / \nu$ . На рис. 10.4 (d) показаны результаты расчетов распределения осредненной вихревой псевдовязкости в поперечном сечении плоского канала при  $X = 100$  для семи различных чисел Рейнольдса.

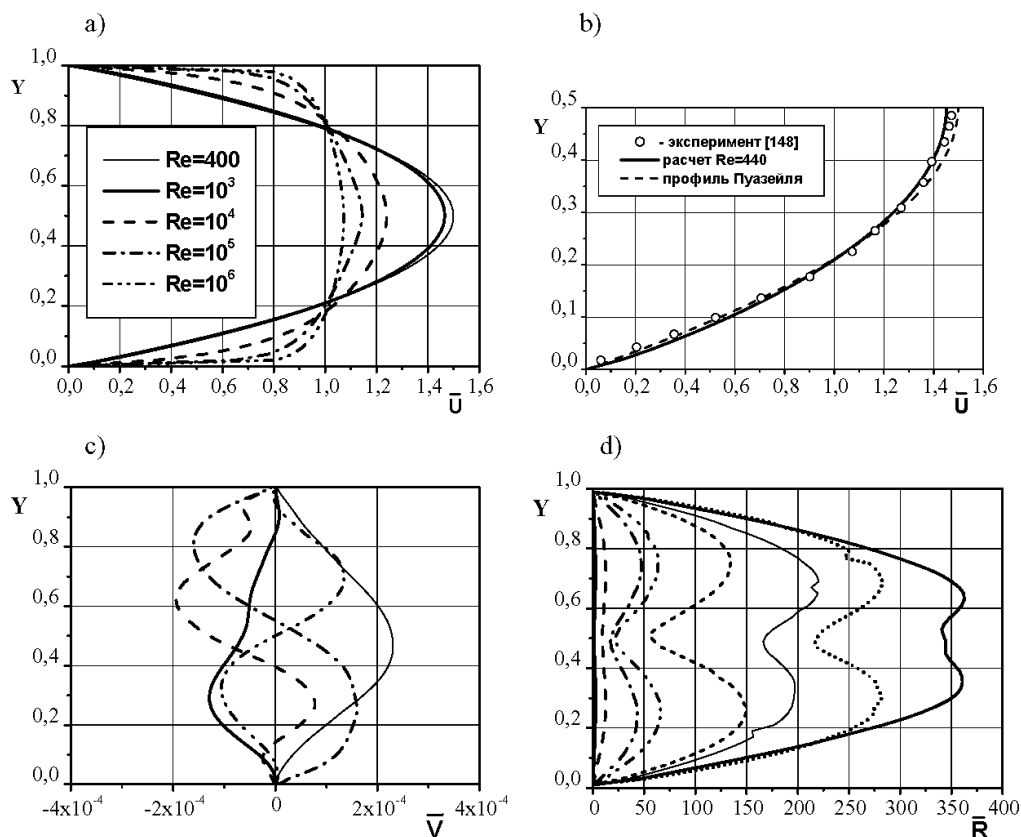


Рис. 10.4. Распределение осредненных по времени компонентов скоростей  $\bar{U}$  (а, б),  $\bar{V}$  (с), и вихревой псевдвязкости  $\bar{R}$  (д) по ширине канала при различных числах  $Re$ , показанных разными линиями  
(— —  $Re = 10^4$ ; — — —  $Re = 5 \cdot 10^4$ ; — · — ·  $Re = 10^5$ ;  
-----  $Re = 3 \cdot 10^5$ ; ———  $Re = 5 \cdot 10^5$ ; .....  $Re = 7 \cdot 10^5$ ; ———  $Re = 10^6$ )

Первой особенностью распределения псевдовязкости  $\bar{R}$  является то что каждому числу Рейнольдса соответствует свой профиль вихревой псевдовязкости, при этом он имеет два экстремума и их величина существенно увеличивается с ростом числа Рейнольдса. Максимумы коэффициента вихре-

вой псевдовязкости  $\bar{R}$  расположены симметрично относительно оси  $x$  – ов и находятся в области между стенкой и осью канала. На твердых стенках значение  $\bar{R} = 0$ , а на оси канала значение  $\bar{R}$  имеет экстремум. Из рисунка видно, что при больших числах Рейнольдса вихревая псевдовязкость в десятки и сотни раз может превышать значение физической молекулярной вязкости.

Для оценки достоверности полученных результатов расчетов для осредненных характеристик обратимся к их сравнению с экспериментальными данными. В качестве примера на рис. 10.4 (b) сплошной линией показан расчетный профиль осредненной продольной скорости, полученный с помощью DNM-LF метода для ламинарного режима течения с докритическим числом Рейнольдса  $Re=440$ . На этом же рисунке прерывистой линией показан параболический профиль Пуазейля, а кружками нанесены данные измерений И.К. Никитина [150], соответствующие этому числу Рейнольдса. Видно, что расчетные кривые хорошо согласуются между собой и с экспериментом.

Рассмотрим теперь результаты расчета и измерений профиля продольной скорости в плоском канале для турбулентного режима течения. При построении числа Рейнольдса в качестве масштаба скорости часто используются, либо среднерасходная скорость в канале  $u_0$ , либо максимальная осевая скорость  $u_m$ , а в качестве масштаба длины принимаются ширина канала  $h$  или полуширина канала  $h/2$ . Для унификации и удобства сравнения данных расчета и измерений число Рейнольдса было принято в виде  $Re = u_0 h / \nu$ , что позволяет привести числа Рейнольдса используемые различными авторами в соответствие с введенным основным числом  $Re$  согласно соотношения

$$Re = u_0 h / \nu = 2 \tilde{Re} / U_m,$$

где  $\tilde{Re}$  - число Рейнольдса построено по максимальной осевой скорости  $u_m$  и полуширине канала  $h/2$ . Например, измерения Х. Рейхарда [348] были выполнены в гладкой прямоугольной трубе с помощью термоанометра при числе  $\tilde{Re} = u_0 h / 2\nu = 6500$ , что в наших масштабах соответствует числу  $Re = u_0 h / \nu = 13000$ . Измерения Т. Лауфера проводились на участке полностью развитого турбулентного течения в плоском канале при трех числах Рейнольдса  $\tilde{Re} = u_m h / 2\nu = 12300, 30800, 61600$ , которые равны нашим числам  $Re = u_0 h / \nu = 24000, 52000, 106000$  соответственно. Далее при выполнении сравнения расчетных и экспериментальных данных используется указанная процедура унификации данных.

При анализе профилей продольной скорости в каналах и трубах в качестве масштаба скорости часто используется значение максимальной осевой скорости  $u_m$ . На рис.10.5 приведена расчетная зависимость безразмерной продольной скорости  $U_m$  от величины числа Рейнольдса.

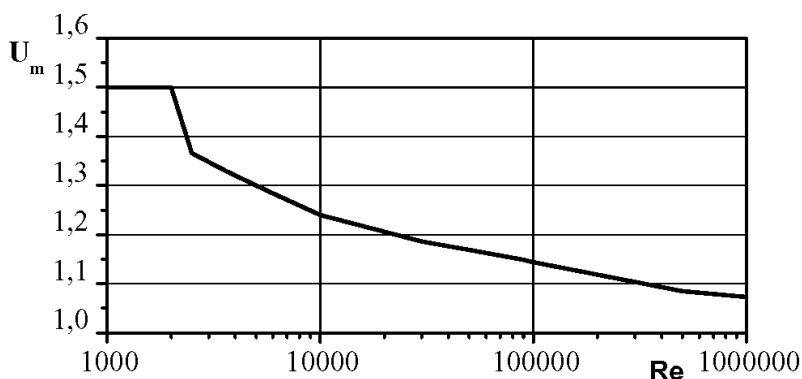


Рис. 10.5. Зависимость безразмерной продольной скорости  $U_m$  от числа Рейнольдса на развитом участке плоского канала при  $Br_V = 0,02$  и  $k_R = 2$

Ниже на рис. 10.6 приведены расчетные данные продольной скорости в плоском канале нормированные на осевую скорость  $U_m = u/u_m$  в зависимости от  $Y = y/h$  в сравнении с экспериментальными данными Т. Лауфера [301] при различных числах Рейнольдса.

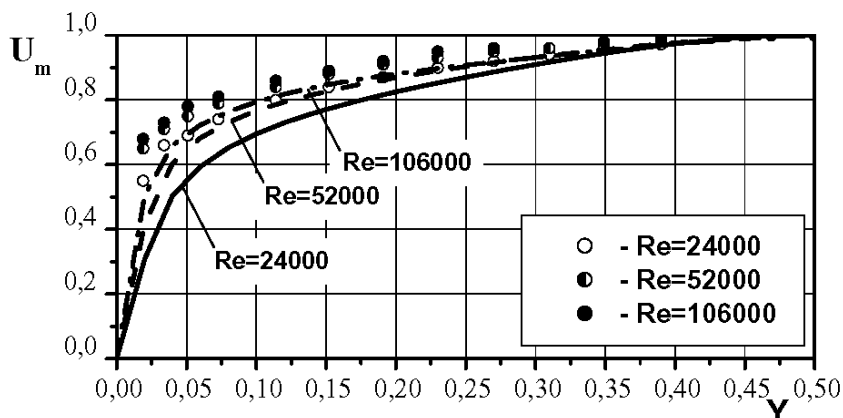


Рис. 10.6. Профили расчетной осредненной продольной скорости в сравнении с данными измерений Т. Лауфера при трех числах Рейнольдса (значки – эксперимент [301], линии – наш расчет)

Заметим, что в отличие от ламинарного случая здесь имеет место не один профиль, а семейство профилей продольной скорости, зависящих от числа  $Re$ . Видно, что хотя приведенные данные неплохо согласуются между собой, однако расчетные кривые ложатся несколько ниже по сравнению с экспериментом. Это можно объяснить, например, несогласованностью значения начальной степени турбулентности и шероховатости стенки в расчетах и эксперименте.

На следующем рис. 10.7 показаны зависимости распределения по полуширине канала продольной скорости  $U_m$ , нормированной на осевую

максимальную скорость, при трех числах Рейнольдса ( $Re = 114000, 240000, 460000$ ). Сплошными линиями приведены результаты наших расчетов, а точки соответствуют экспериментальным данным Ж. Конт-Белло [114].

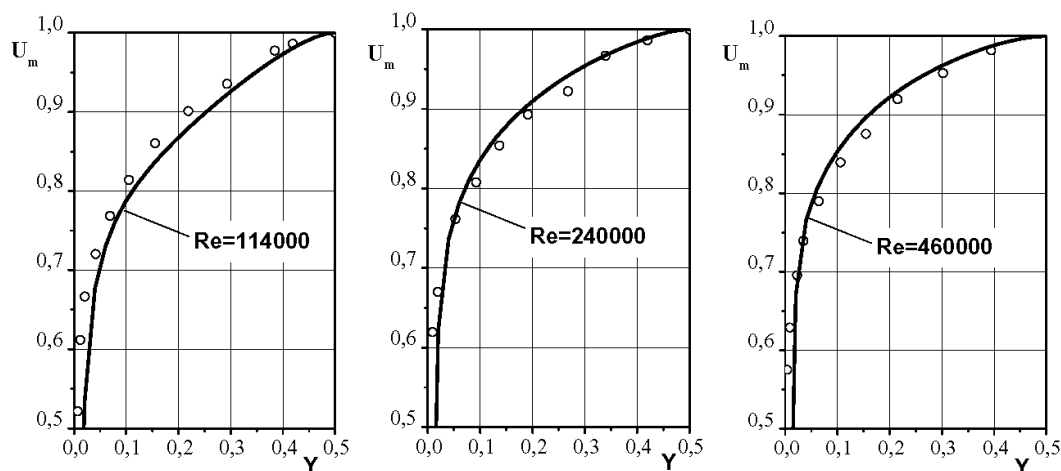


Рис. 10.7. Сравнение расчетных профилей продольной скорости  $U_m = u/u_m$  нормированной на максимальную скорость с данными экспериментов Конт-Белло [114] в плоском канале при трех числах Рейнольдса. Сплошная линия – наш расчет, кружки (○) – эксперимент [114]

Нетрудно видеть, что расчетные и экспериментальные результаты хорошо согласуются между собой. Заметим, что число Рейнольдса здесь определено по ширине канала  $h$ .

Хорошо известно, что с ростом числа Рейнольдса изменяется динамическая скорость на стенке, которая определяется через локальное трение  $\nu_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ . Поэтому эта скорость часто используется в качестве характерного масштаба течения.

Для примера на рис. 10.8 показано расчетное распределение продольной скорости  $U^+$  от  $Y^+$  в виде сплошной и пунктирной линий в сравнении с экспериментальными данными Т. Лауфера [301]. Здесь для удобства рассмотрения зависимости  $U^+$  от малых  $Y^+$  использована логарифмическая горизонтальная шкала. Из рисунка видно, что экспериментальный профиль скорости в ламинарном подслое линейно зависит от поперечной координаты  $Y^+$  и обладает большой универсальностью непосредственно около стенки. Эта закономерность, повидимому, является достаточно строгой даже в случаях, когда существуют градиенты давления. Кроме того, из рисунка видно, что при  $Y^+ > 12$  характер этой зависимости перестает быть линейным, а экспериментальные и расчетные данные с ростом  $Y^+$  указывают на

существование переходной области и логарифмического участка профиля скорости.

В обычной практике расчетов параметров пограничного слоя для лучшего согласования теории с опытом, согласно Клаузеру, кроме внутренней области течения, за пределами логарифмической области выделяется еще внешняя область, включающая участок постоянной турбулентной вязкости подобный «закону следа». Из соображений размерности эта вязкость равна  $\nu_t = k\nu_*\delta^*$ , где  $k = 0,018$  эмпирическая константа Ф. Клаузера [106],  $\delta^* = \int_0^\delta (1 - u/u_m) dy$  - толщина вытеснения.

Такое представление структуры пристенного слоя было экспериментально установлено П. С. Клебановым, а ее описание предложено Ф. Клаузером.

Следует отметить, что использование координаты  $Y^+$  характерно при анализе параметров течений в пограничном слое, например, при обтекании пластины безграничным потоком. В случае же рассмотрения структуры течения в плоском канале значение  $Y^+$  ограничено осью канала и эта область течения испытывает влияние верхней стенки канала. Поэтому характеристики внешней области пристенного течения в этих двух случаях не идентичны.

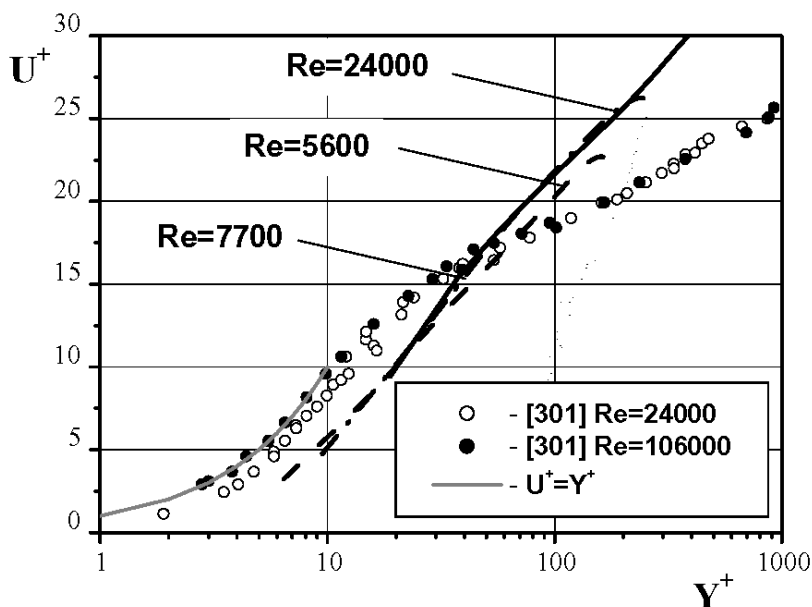


Рис. 10.8 Сравнение результатов расчета и эксперимента для профиля продольной скорости нормированного на динамическую скорость (значки – эксперимент Т. Лауфера [301]; линии – наш расчет при  $Br_v=0,02$  и  $k_R=2$ )



В целом, приведенные материалы расчетов и измерений показывают, что данный метод позволяет надежно рассчитать осредненные характеристики турбулентного потока в плоском канале.

### 10.2.5. Пульсационные характеристики турбулентного течения в плоском канале

Совершенно очевидно, что для полного понимания природы и свойств нестационарных турбулентных течений необходимо изучать не только осредненные, но и пульсационные статистические характеристики потока. Имея расчетные осциллограммы мгновенных значений скорости и давления легко определяются не только осредненные, но и пульсационные характеристики в виде их среднеквадратических значений и корреляционных моментов. Некоторые данные таких расчетов приводятся ниже на соответствующих рисунках.

На рис. 10.9 (a) и 10.9 (b) представлено распределение среднеквадратических продольных  $S_U = \sqrt{U'^2}$  и поперечных  $S_V = \sqrt{V'^2}$  пульсаций скоростей соответственно по ширине канала, для различных чисел Рейнольдса, которые определены численным методом DNM-TF и нормированы на среднерасходную скорость в канале  $u_0$ .

Выполненные расчеты показывают, что среднеквадратические значения пульсаций продольной и поперечной скорости зависят от координаты  $Y$  и от числа Рейнольдса. При этом профили поперечных пульсаций  $S_V$  (10.9 (b)) имеют минимальное значение в центре канала и увеличиваются по направлению к стенке до точки максимума, расположенной на расстоянии  $Y = 0,2$  и  $Y = 0,8$ . При дальнейшем движении к стенке эти два максимума, расположенные симметрично относительно оси  $X$ , плавно уменьшаются до нуля. Продольные пульсации скорости  $S_U$  (10.9 (a)) имеют три максимума – два из них расположены вблизи стенок, а третий на оси канала. После точки максимума, расположенной у стенки на расстоянии  $Y \leq 0,1$  интенсивность продольных пульсаций резко падает до нуля. При различных числах Рейнольдса значения среднеквадратических пульсаций при такой нормировке образуют семейство кривых, показанных на рисунках.

В целом интересно отметить, что наличие третьего максимума продольных пульсаций на оси канала, ранее не обнаруживалось. Однако этот результат у нас надежно прослеживается и на первичном материале расчетов, где представлены компьютерные осциллограммы динамики продольных пульсаций вблизи стенки и на оси канала (см. рис. 10.2).

Далее на рис. 10.9 (c) и 10.9 (d) показано изменение вторых корреляционных моментов для  $\overline{U'V'}$  (слева) и корреляционного момента  $\overline{V'P'}$  (справа) по ширине канала, нормированные на среднерасходную

скорость. Из рисунка видно, что характер распределения обоих корреляционных моментов зависит от числа Рейнольдса, а вихревые напряжения на оси канала равны нулю, при этом между стенкой и ядром потока они имеют максимумы и лишь при  $Re = 10^5$  профиль становится почти линейным. А при других числах Рейнольдса в средней части канала профиль имеет нулевую полку.

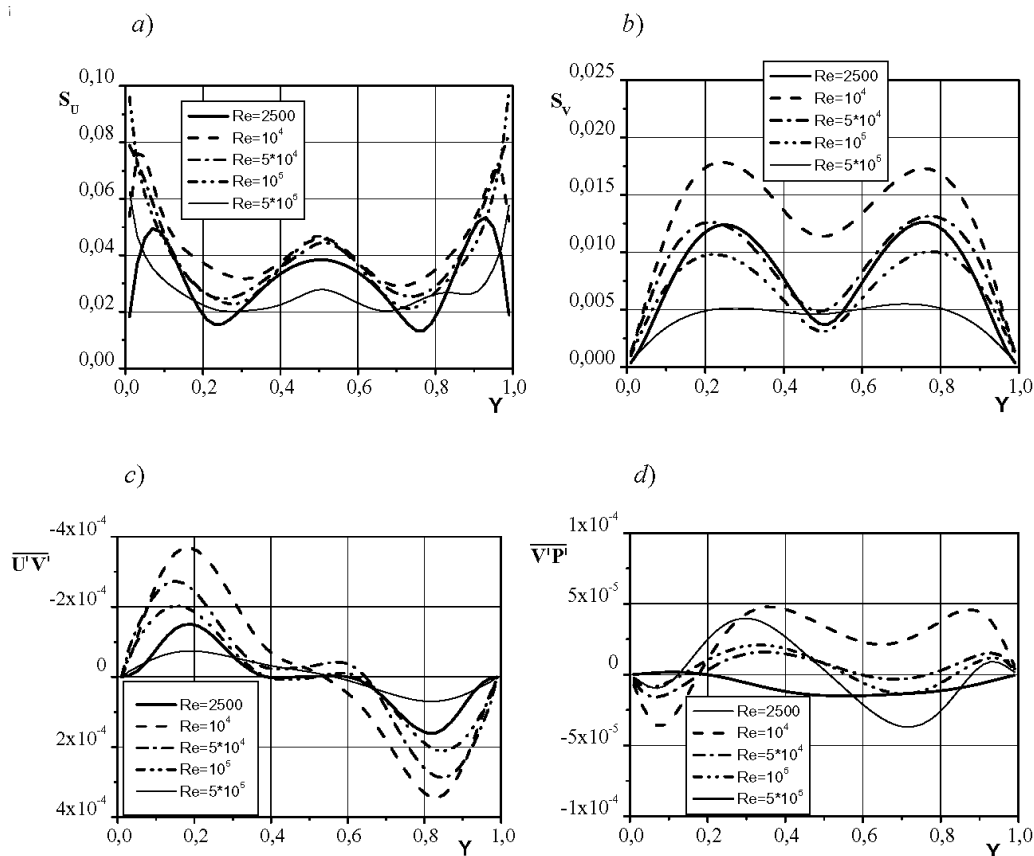


Рис. 10.9. Распределение по ширине канала среднеквадратических пульсаций продольной  $S_u$  (a), поперечной  $S_v$  (b) скорости и вторых корреляционных моментов  $\overline{U'V'}$  (c),  $\overline{V'P'}$  (d), нормированных на среднерасходную скорость  $u_0$  при различных числах Рейнольдса для  $Bg_v = 0,02$  и  $k_R = 2$

Профиль корреляционного момента  $\overline{V'P'}$  для течения в плоском канале ранее нам не встречался. Результаты наших расчетов показаны на рис. 10.9 (d). Видно, что профили имеют максимумы, положение которых зависит от числа Рейнольдса, а по величине они малы и имеют порядок  $10^{-5}$ .

Особенности и трудности измерений пульсационных характеристик турбулентного потока хорошо известны и рассматриваются в специальной

литературе [216, 114]. И хотя корректное сопоставление теории с результатами измерений затруднительно, из-за большого разброса экспериментальных данных, однако определенное сравнение можно выполнить с помощью использования для нормировки характеристик турбулентного потока пристенных вязких масштабов.

### 10.2.6. Результаты расчетов нормированные на пристенные вязкие масштабы и их сравнение с экспериментом

Для анализа характеристик турбулентных течений с поперечным сдвигом часто используются локальные пристенные вязкие масштабы, такие как динамическая скорость  $u_*$ , которая определяется через локальное трение на стенке  $u_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$  и динамические масштабы длины  $l_* = \nu / u_*$  и времени  $t_* = h / u_*$ . Определение динамической скорости  $u_*$  обычно связано с большими сложностями. В зависимости от наличия расчетных и экспериментальных данных определяют либо интегральный коэффициент сопротивления  $\lambda$ , либо динамическую скорость  $u_*$ .

Определение коэффициента сопротивления основано на расчете или измерении перепада давления, который определяется через коэффициент сопротивления  $\lambda$  в следующем виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\lambda}{h} \frac{\rho u_0^2}{2},$$

где  $(p_1 - p_2)$  – перепад давления в канале на участке длиной  $l$  и шириной  $h$ . С другой стороны, так как касательные напряжения на стенке канала  $\tau_w$  должны уравниваться перепадом давления, то должно выполняться следующее соотношение

$$\tau_w = \frac{(p_1 - p_2)h}{l} = \lambda \frac{\rho u_0^2}{2}.$$

откуда

$$\lambda = 2 \frac{(p_1 - p_2)}{L \cdot \rho u_0^2} = \frac{C_p}{L},$$

где  $L = l/h$ ,  $C_p = 2 \frac{(p_1 - p_2)}{\rho u_0^2}$ .

Определение динамической скорости  $u_*$  основано на теоретическом расчете локальных касательных напряжений на стенке  $\tau_w$  по формуле Ньютона

$$u_*^2 = \frac{\tau_w}{\rho} = (\nu + \nu_t) \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (10.10)$$

Эта формула верна для произвольного числа Рейнольдса, поэтому для  $u_*$  будем иметь

$$u_* = \sqrt{\nu(1+R)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (10.11)$$

Пологая, что при  $y = 0$  вихревая турбулентная псевдовязкость  $R = 0$  и переходя к безразмерным переменным для динамической скорости получим

$$V_* = \frac{u_*}{u_0} = \sqrt{\frac{1}{\text{Re}} \frac{d\bar{U}}{dY}}.$$

Рассмотрим умеренные числа Рейнольдса. Тогда вспомним, что при докритических числах Рейнольдса, когда  $\text{Re} \leq \text{Re}_*$ , профиль продольной скорости в плоском канале имеет параболический профиль Пуазейля (1.110)

$$U(Y) = 6(1 - Y)Y,$$

из которого следует, что  $dU/dY \Big|_{Y=0} = 6$  и следовательно  $V_* = \sqrt{\frac{6}{\text{Re}}}$  при всех

$\text{Re} \leq \text{Re}_*$ . Очевидно, что при  $\text{Re} > \text{Re}_*$  динамическую скорость  $u_*$  можно найти численно. В этом случае для определения производной от продольной осредненной скорости  $\bar{u}$  в интересующем нас сечении  $X = \Delta X \cdot (j + 1/2) = 100$  при  $Y = 0$  воспользуемся ее разностным представлением на разнесенных сетках. Простейший случай, это когда искомая производная аппроксимируется с первым порядком точности и тогда разностное представление имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\bar{u}(j + 1/2, 1) - \bar{u}(j + 1/2, 0)}{hy(1)} = \frac{\bar{u}(j + 1/2, 1)}{hy(1)}. \quad (10.12)$$

Во втором случае можно использовать аппроксимацию производной со вторым порядком точности с помощью метода интерполяции профиля скорости вблизи стенки полиномом второй степени в виде  $\bar{u} = a + by + cy^2$ , тогда  $\partial \bar{u} / \partial y \Big|_{y=0} = b$ . Если сетка разнесенная, то продольные скорости в ближайших к стенке узлах представляются в виде

$$u_1 = a,$$

$$u_2 = a + b(\Delta y/2) + c(\Delta y/2)^2,$$

$$u_3 = a + b(3\Delta y/2) + c(3\Delta y/2)^2.$$

Эти уравнения можно решить относительно коэффициентов  $a, b, c$  при заданных  $u_1, u_2, u_3$  и  $\Delta y$ . Так как при  $y = 0$   $u_1 = a$ , то из этих соотношений находим

$$b = \frac{-8u_1 + 9u_2 - u_3}{3\Delta y}.$$

Следовательно, интересующая нас производная аппроксимируется выражением

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{-8u_1 + 9u_2 - u_3}{3\Delta y}. \quad (10.13)$$

В рассматриваемой задаче скорость на стенке задана в виде  $u_1|_{y=0} = 0$ . Тогда из (10.13) следует

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{9u_2 - u_3}{3\Delta y}.$$

Можно показать [7], что эта конечно-разностная аппроксимация имеет второй порядок точности  $O(\Delta y)^2$ . Подставляя (10.13) в (10.11) и вспоминая, что  $u_2 = \bar{u}(j+1/2,1)$  и  $u_3 = \bar{u}(j+1/2,2)$  для искомой динамической скорости имеем

$$v_* = \sqrt{\frac{\nu \cdot (9\bar{u}(j+1/2,1) - \bar{u}(j+1/2,2))}{3\Delta y}}.$$

Переходя теперь к безразмерным величинам для динамической скорости получаем

$$V_* = \frac{v_*}{u_0} = \sqrt{\frac{9\bar{U}(j+1/2,1) - \bar{U}(j+1/2,2)}{3\text{Re} \cdot \Delta y}}, \quad (10.14)$$

где  $\text{Re} = \frac{u_0 h}{\nu}$ ,  $\bar{U} = \frac{\bar{u}}{u_0}$ ,  $Y = \frac{y}{h}$ ;  $V_* = \frac{v_*}{u_0}$  - безразмерная динамическая скорость. Зная значения динамической скорости рассчитываются традиционные безразмерные характеристики течения по формулам

$$U^+ = \frac{\bar{u}}{v_*}, \quad V^+ = \frac{\bar{v}}{v_*}, \quad V_m^* = \frac{v_*}{\bar{u}_m}, \quad S_U^+ = \sqrt{u'^2}/v_*, \quad S_V^+ = \sqrt{v'^2}/v_*, \quad \bar{K} = (\bar{U}^2 + \bar{V}^2)/2,$$

$$S_p^+ = \sqrt{c_p'^2}/v_*, \quad Y^+ = \frac{y}{l_*} = \frac{v_* y}{\nu} = \text{Re} V_* \cdot Y, \quad \bar{U}_m = \frac{\bar{u}}{\bar{u}_m},$$

$$(\overline{U'V'})^+ = (\overline{u'v'})/v_*^2, \quad (\overline{V'P'})^+ = (\overline{v'p'})/v_*^3, \quad \text{Re}^+ = \frac{v_* h}{\nu} = \text{Re} V_*, \quad \text{Re}^m = \frac{\bar{u}_m h}{\nu} = \text{Re} \bar{U}^m.$$

Заметим, что параметр  $Y^+ = \text{Re}^+ \cdot Y$ , где  $\text{Re}^+$  - принято называть числом Кармана. Соответствующая формула для динамической скорости (10.12) в безразмерных величинах принимает вид

$$V_* = \frac{v_*}{u_0} = \sqrt{\frac{\overline{U}(j+1/2,1)}{\text{Re} \cdot \Delta y}}. \quad (10.15)$$

В процессе методических расчетов были использованы оба случая конечно-разностного представления первой производной от продольной скорости. Результаты соответствующих расчетов для динамической скорости  $V_*$  для различных чисел Рейнольдса представлены графически на рис. 10.10. При этом на участке  $1000 \leq \text{Re} \leq 2000$  для расчета  $V_*$  использовалась аналитическая формула, соответствующая течению Пуазейля, а при  $\text{Re} \geq 2000$  динамическая скорость определялась по расчетным профилям продольной скорости. При этом верхняя кривая соответствует формуле (10.14), а нижняя кривая формуле (10.15).

Теперь отметим, что на значение динамической скорости  $V_*$ , как и на коэффициент сопротивления  $\lambda$ , большое влияние оказывают начальная степень турбулентности основного потока и шероховатость стенки. Представленные на рис. 10.10 результаты расчетов предполагают низкую начальную степень турбулентности  $\epsilon \leq 0,4\%$  и гидравлически гладкую стенку.

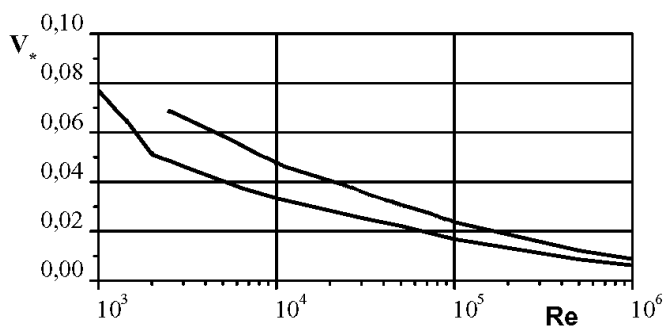


Рис. 10.10. Зависимость динамической скорости  $V_* = v_*/u_0$  от числа Рейнольдса на развитом участке плоского канала, верхняя кривая соответствует формуле (10.14), а нижняя – (10.15)

Далее в качестве примера на комплексном рис. 10.11 в виде фрагментов (*a*, *b*, *c*, *d*) представлено распределение среднеквадратических продольной  $S_v^+$ , поперечной  $S_v^+$  пульсаций скорости и вторых корреляционных моментов  $(\overline{U'V'})^+$ ,  $(\overline{V'P'})^+$  по ширине канала, нормированных на динамическую скорость  $v_*$  при различных числах Рейнольдса. Здесь в расчетах использовалась формула (10.15). Предпочтение этой формулы по отношению к формуле (10.14) было отдано после выполненного анализа условия лучшего согласования расчетов с экспериментом.

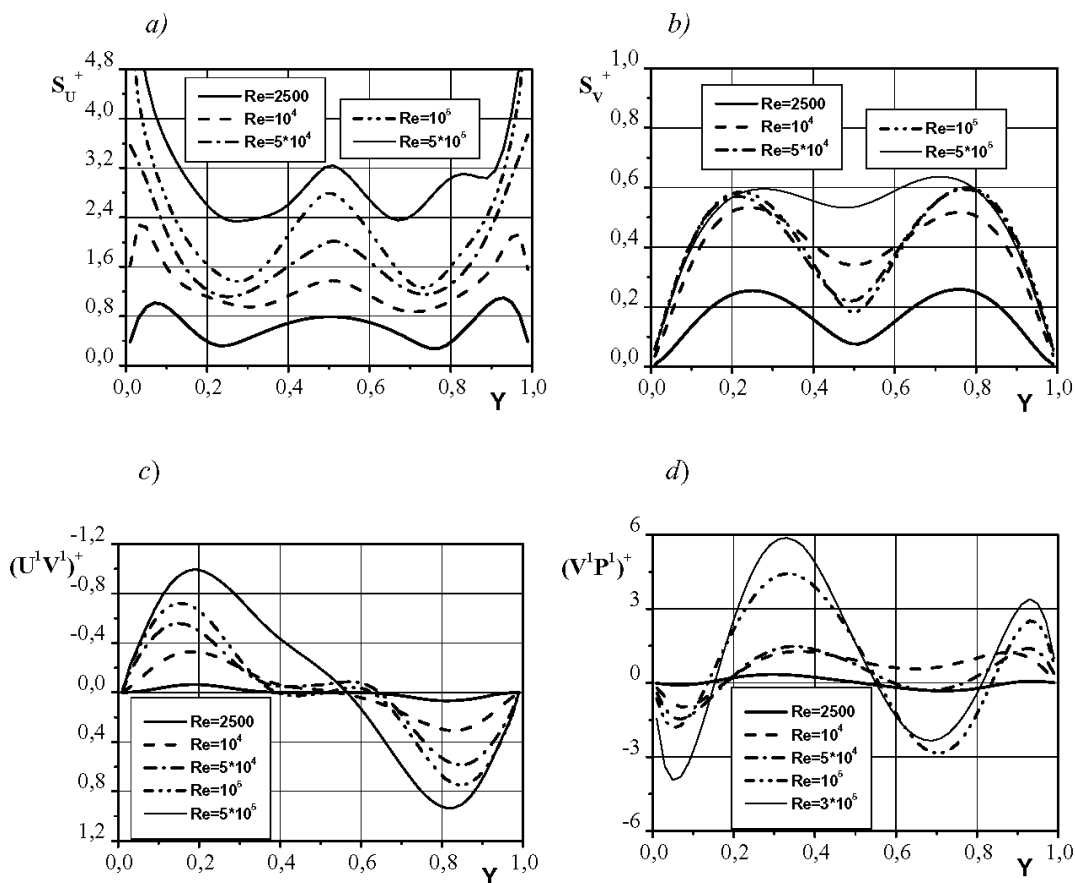


Рис. 10.11. Распределение по ширине канала среднеквадратических продольной  $S_U^+$  (a), поперечной  $S_V^+$  (b) пульсаций скорости и вторых корреляционных моментов  $(\overline{U^1 V^1})^+$  (c),  $(\overline{V^1 P^1})^+$  (d), нормированных на динамическую скорость  $U_*$  при различных числах Рейнольдса для  $Br_v = 0,02$  и  $k_R = 2$

Для оценки достоверности расчета пульсационных характеристик течения в плоском канале обратимся к рассмотрению некоторых результатов измерений. Очень трудно найти подходящие для наших целей данные, включающие информацию о величине динамической скорости. Нами использовались данные заимствованные из работ [285, 294, 301, 377]. Динамическая скорость в которых определялась по измеренным градиентам продольной осредненной скорости  $d\bar{u}/dy$ .

Сравнение результатов расчета с данными эксперимента приведено на рис. 10.12 в виде зависимости распределения среднеквадратических продольной  $S_U^+$  (a) и поперечной  $S_V^+$  (b) пульсаций скорости,

нормированных на динамическую скорость  $u_*$  в функции от параметра  $Y^+$  при различных числах Рейнольдса. При этом измерения характеристик турбулентного течения воды в плоском канале были выполнены с помощью двухкомпонентного лазер-доплеровского анемометра [377]. Из рисунка видно, что расчет и эксперимент согласуется лишь качественно.

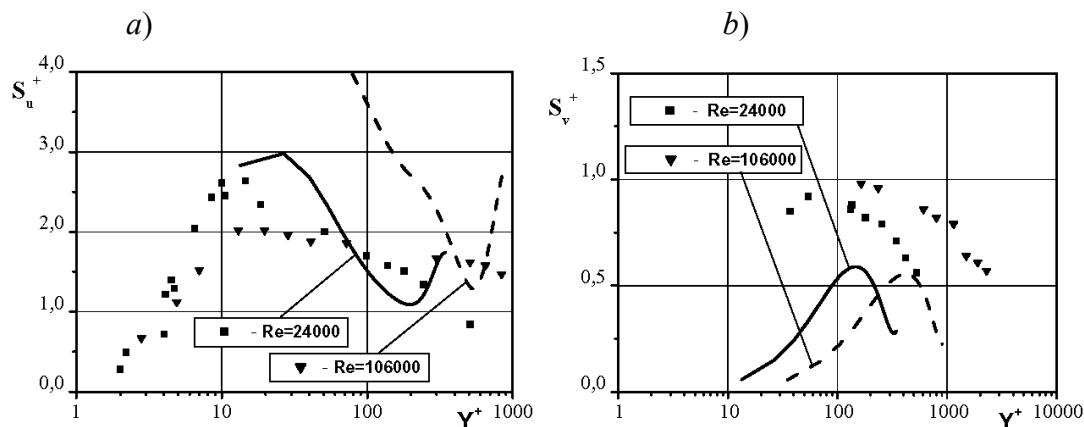


Рис. 10.12. Сравнение результатов расчета с экспериментами Т. Лауфера для интенсивности продольной (а) и поперечной (б) пульсаций скорости в плоском канале в зависимости от координаты  $Y^+$ : значки - эксперимент [301, 377]; линии – наш расчет при  $Br_v = 0,02$  и  $k_R = 2$

На рис. 10.13 дополнительно представлена зависимость распределения тех же среднеквадратических значений продольной (а) и поперечной (б) пульсаций скоростей по ширине канала от координаты  $Y$ , нормированных на динамическую скорость. Здесь видно, что расчеты для среднеквадратичных поперечных пульсаций скорости согласуются несколько лучше, а для продольных пульсаций данные расчета и эксперимента неплохо согласуются лишь в зонах, расположенных вблизи стенок, а в центральной зоне канала наблюдается значительное отличие, так как расчетные профили имеют экстремум, который в эксперименте не наблюдался. Последнее замечание уже отмечалось выше и нуждается в дополнительном изучении.

Сравнивая рис. 10.9 и рис. 10.11, которые отличаются масштабами нормировки видно, что при нормировке на динамическую скорость (рис. 10.11) кривые пульсационных характеристик с ростом числа Рейнольдса изменяются монотонно по сравнению с кривыми приведенными на рис. 10.9, которые нормированы на  $u_0$ . Это создает определенные удобства при их анализе.

Наряду со среднеквадратичными значениями продольной и поперечной скоростей по ширине канала ниже на рис. 10.14 приведено сравнение распре-



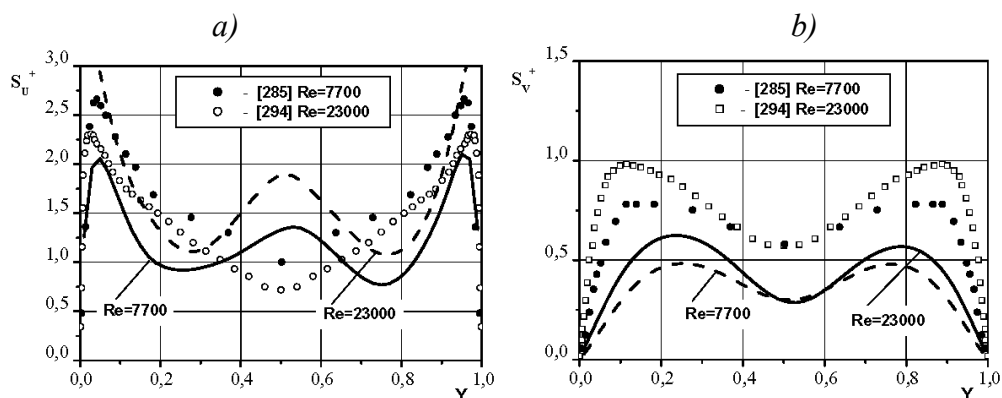


Рис. 10.13. Сравнение результатов расчета и эксперимента для распределения среднеквадратических значений продольной (а) и поперечной (b) скоростей по ширине канала (значки - эксперимент  $\circ$  - [294]  $\bullet$  - [285], линии – наш расчет при  $Br_v = 0,02$  и  $k_R = 2$ )

деления расчетных и экспериментальных данных для вторых корреляционных моментов  $(\overline{U'V'})^+$  при двух числах Рейнольдса [114]. Их анализ показывает, что они неплохо согласуются с экспериментом. Кроме того, для оценки надежности расчета распределения по ширине канала коэффициента вихревой турбулентной псевдовязкости  $R$ , на рис. 10.15 показана зависимость его изменения от координаты  $Y^+$ , полученная с помощью модели DNM-TF (сплошная линия) и численного метода DNS [344] (значки) при числе  $Re = 30000$ . Их сравнение указывает на качественное согласование.

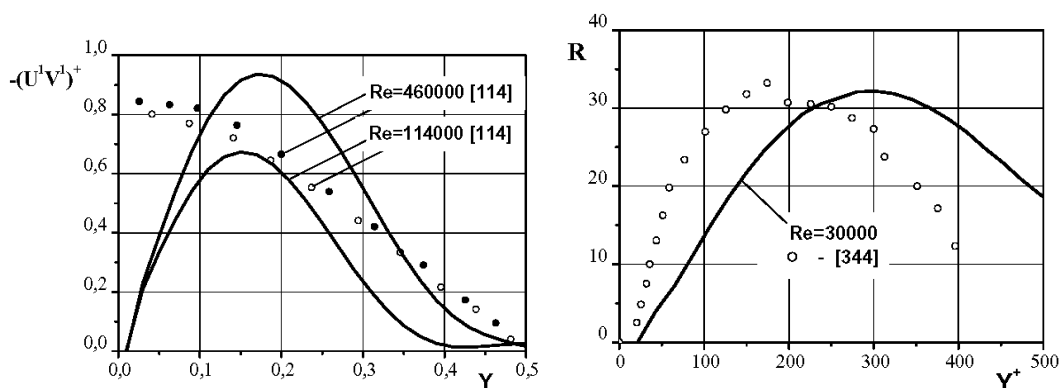


Рис.10.14. Сравнение результатов расчета и эксперимента для распределения вторых корреляционных моментов по ширине канала (линии – наш расчет при  $Br_v = 0,02$  и  $k_R = 2$ ;  $\circ$   $\bullet$  - Ж. Конт-Белло [114])

Рис.10.15. Распределение коэффициента вихревой псевдовязкости  $R$  поперек плоского канала, рассчитанного по модели DNM –TF, в сравнении с расчетом по модели DNS [344]

В целом представленные материалы расчетов осредненных и пульсационных характеристик турбулентных течений в плоском канале, полученные с помощью численного метода DNM-TF хорошо согласуются с экспериментом. Однако при этом, пульсационные характеристики при выбранных значениях эмпирических констант согласуются лишь качественно, поэтому указанные константы нуждаются в дополнительном исследовании.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии на основе рассмотрения классических законов сохранения механики сплошных сред выведены основные уравнения гидродинамики и теплообмена в конечно-объемной и дифференциальной формах для вязкой несжимаемой однородной и стратифицированной жидкости. В ней подробно описан разработанный метод их численного интегрирования с помощью метода сеток, использования неявных конечно-разностных схем и метода прогонки. Особое внимание уделено моделированию течений, характеризующихся наличием вихревых и циркуляционных течений. При этом в монографии широко использован «метод контрольного объема» адаптированный для построения дискретных аналогов основных интегральных уравнений сохранения массы, изменения количества движения и энергии.

В книге впервые в полном объеме представлена новая альтернативная модель ламинарных и турбулентных течений и численный метод их расчета. Модель турбулентности является однопараметрической и основана на учете дополнительных вихревых напряжений внутри жидкости, учитывающих нестационарность поперечных пульсаций скорости. Она апробирована на примере решения двумерных задач о движении жидкости в плоском канале при расчете ламинарных и турбулентных режимов течения. Модель турбулентности нуждается в дополнительном уточнении значений двух эмпирических констант и оценке пределов ее применимости на примере решения других задач.

В целом изложенные основы теории и метод расчета характеристик течения вязкой несжимаемой жидкости при ламинарном и турбулентном режимах течения показал, что несмотря на ряд допущений результаты теоретических расчетов хорошо согласуются с экспериментом, а это дает уверенность, что используемые принципы и подходы могут дать хорошие результаты при рассмотрении более сложных задач.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абрамович Г. Н.** Прикладная газовая динамика.- М.: Наука, 1969.- 824 с.
2. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй.- М. Физматгиз, 1960.- 715 с.
3. **Абрамович Г. Н., Крашенинников С.Ю., Секундов А.Н.** Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомоделности.- М.: Машиностроение, 1975.- 96 с.
4. **Абрамович Г.Н., Крашенинников С.Ю., Секундов А.Н., Смирнова И. П.** Турбулентное смешение газовых струй /Под ред. Г. Н. Абрамовича.- М.: Наука, 1974.- 272 с.
5. **Акатнов Н.И., Кузнецов А.П.** Уравнение баланса энергии турбулентных пульсаций в теории свободного турбулентного пограничного слоя. // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1970, №6, С. 75-79.
6. **Акатнов Н.И., Тульверт В.Ф.** Использование уравнения баланса пульсационной энергии в теории пристеночных турбулентных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1973, № 3, С. 25-33.
7. **Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. – Т.1 – 384с.; Т.2. – 392 с.
8. **Атиас М., Вольфштейн М., Израэли М.** Эффективность численных методов решения уравнений Навье-Стокса. // Ракетн. Техн. и космонавтика, 1977, т. 15, №2, С. 161-164.
9. **Бабаков А.В., Белоцерковский О.М., Северинов Л.И.** Численное исследование течения вязкого теплопроводного газа у тупого тела конечных размеров. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, №3, С. 112-123.
10. **Бабаков А.В., Северинов Л.И.** Стационарный вариант метода поттоков для решения задач механики сплошной среды. – ЖВМ и МФ, 1976, 16, №1, С. 140-151.
11. **Бабенко В. В., Воропаев Г. А.** Управление когерентными структурами в пограничном слое. Гидромеханика, 1996, 70, С. 12-20.
12. **Бабенко В. В., Мусиенко В. П., Турик В. Н., Милюков Д. Е.** Визуализация обтекания полусферических углублений. Прикладна гідромеханіка.- 2010.-12(84), №4, С. 3-25.
13. **Бабенко В.В., Гнитецкий Н. А., Аббас Ф. Махмуд.** Взаимодействие пограничного слоя с трехмерными возмущениями.// Прикладна гідромеханіка.-2011.-13 (85), № 3.-С. 3-22.
14. **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.

15. **Бай-Ши-И.** Введение в теорию сжимаемой жидкости.-М.: ИЛ, 1962.-410 с.
16. **Бай-Ши-И.** Турбулентное течение жидкостей и газов: Пер. с англ.-М.: Изд-во иностр. лит., 1962.- 344 с.
17. **Безуглый В.Ю., Беляев Н.М.** Численные методы теории конвективного теплообмена. – Киев: Вища школа, 1984. – 176 с.
18. **Белов И. А.** Взаимодействие неравномерных потоков с преградой. М.: Машиностроение, 1983. -166 с.
19. **Белов И.А., Исаев С. А.** Циркуляционное движение жидкости в прямоугольной каверне при средних и высоких числах Рейнольдса. // Журн. прикл. техн. физ. 1982.-№1 С. 41-45.
20. **Белов И.А., Исаев С.А.** Моделирование турбулентных течений. - СПб., 2001.-108 с.
21. **Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А.** Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. – М.: Судостроение, 1989. – 256 с.
22. **Белов И.А., Кудрявцев Н.А.** Теплоотдача и сопротивление пакетов труб. – Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 223 с.
23. **Белоцерковский О.М.** Вычислительная механика. Современные проблемы и результаты. – М.: Наука, 1991. – 183 с.
24. **Белоцерковский О.М.** Численное моделирование в механике сплошных сред: 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 1994. - 448 с.
25. **Белоцерковский О.М.** Численное моделирование в механике сплошных сред. - М.: Наука, Физматлит; 1984. - 519 с.
26. **Белоцерковский О.М., Северинов Л.И.** Консервативный метод потоков и расчет обтекания тела конечных размеров вязким теплопроводным газом. – ЖВМ и МФ, 1973, 12, №2, С. 385 –397.
27. **Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.О., Гуцин В.А.** Численное моделирование нестационарного периодического течения вязкой жидкости в следе за цилиндром // Ж. Вычисл. Матем. и матем. Физ. - 1984. - Т. 24. - С. 1207-1216.
28. **Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Щенников В.В.** Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. - 1975. - т. 15, № 1. - С. 197 - 207.
29. **Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.** Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. – М.: Наук. Физматлит. 1982. – 392 с.
30. **Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.** Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов. – Ж. Вычисл. Матем. И матем. Физ., 1971, 11, № 1, С. 182-207.
31. **Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М.** Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел.-М.: Наука, 1988.- 132 с.

32. **Белоцерковский С.О., Гуцин В.А.** Моделирование некоторых течений вязкой жидкости.-М.: ВЦ АН СССР, 1982. – 66 с.
33. **БенODEкар Р.В., Годдард А. Дж. Г., Госман А.Д., Исса Р.И.** Численные расчет обтекания выступов на плоскости // Аэрокосмическая техника. - 1986. - Т. 4, № 2.- С. 125 - 134.
34. **Бим Р.М., Уорминг Р.Ф.** Неявная факторизованная разностная схема для уравнения Навье-Стокса сжимаемого газа // Ракетная техника и космонавтика. – 1978. – 16, №4. – С.145-156.
35. **Биркгоф Г., Сарантонелло Э.** Струи, следы и каверны.- М.: Л.: Госэнергоиздат, 1957.-320 с.
36. **Боксер В. Д., Судаков Г. Г.** Аэродинамическое сопротивление тел в околосвуковом потоке: теория и приложения к вычислительной аэродинамике. МЖГ, 2008, №4, С. 128-140.
37. **Браиловская И.Ю., Кускова Т.В., Чудов Л.А.** Разностные методы решения уравнений Навье-Стокса: (Обзор)// Вычисл. Методы и программирование.-М.: МГУ, 1968.-Вып. 11.-С. 3-18.
38. **Бредшоу П.** Введение в турбулентность и ее измерение. М.: Мир, 1974.- 279 с.
39. **Бредшоу П., Дин Р. Б., Макэлигот Д. М.** Расчет взаимодействующих турбулентных слоев со сдвигом /Течение в канале.- - Теорет. основы инж. расчетов. Сер. Д, , 1973, 95, № 2, С. 115-123.
40. **Бредшоу П., Феррис Д. Х.** Использование общего метода расчета турбулентных течений со сдвигом.- Теорет. основы инж. расчетов. Сер. Д, 1972, 94, № 2, с. 97—108.
41. **Бруацкий Е.В.** Приближенный метод решения краевой задачи Озеена для цилиндра произвольной формы// Прикладная механика-1966.- т. II, в. 10. С. 121-127. (Отделение механики и кибер. АН УССР).
42. **Бруацкий Е.В.** Турбулентные стратифицированные струйные течения. –Киев: Наукова думка, 1986. - 296 с.
43. **Бруацкий Е.В.** Теория атмосферной диффузии радиоактивных выбросов.-Киев.: Ин-т гидромеханики НАН Украины, 2000.-443 с.
44. **Бруацкий Е.В., Костин А.Г.** Численное исследование течения жидкости в закрытой прямоугольной полости с движущейся верхней крышкой// Прикладна гідромеханіка.-2009.-11 (83), № 1.-С. 3-15
45. **Бруацкий Е.В., Костин А.Г.** Термогравитационная конвекция в двумерной области, подогреваемой сбоку. Часть I. Квадратная область//Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки №2/2009. С. 49-63.
46. **Бруацкий Е.В., Костин А.Г.** Термогравитационная конвекция в двумерной области, подогреваемой сбоку. Часть II. Прямоугольная область//Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки №2/2009. С. 64-77.

47. **Бруяцкий Е.В., Костин А.Г.** Расчет полей скорости и давления для течения в плоском канале с внезапным односторонним сужением// Прикладна гідромеханіка.-2009.-11 (83), № 2.-С. 3-15
48. **Бруяцкий Е.В., Костин А.Г.** Прямое численное моделирование течения в плоском внезапно расширяющемся канале на основе уравнений Навье-Стокса// Прикладна гідромеханіка.-2010.-12 (84), № 1.-С. 11-27.
49. **Бруяцкий Е.В., Костин А.Г.** Компьютерное моделирование отрывного обтекания квадратного цилиндра безграничным потоком вязкой жидкости // Прикладна гідромеханіка.-2012.-14 (86), № 3.-С. 22-36.
50. **Бруяцкий Е.В., Олейник А. Я., Фридман В. М., Галин В. В.** Оптимизация процесса смешения при струйной подаче реагента в смеситель.- ДАН УССР, сер. А, №9, 1982, С. 30-33.
51. **Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И.** Вихревая структура потока в плоском канале при наличии на его стенке квадратного препятствия. Труды первого международного семинара «Повховские научные чтения». Донецк: ДонНУ, 2010. -С. 3-6.
52. **Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И.** Вынужденная конвекция жидкости в квадратной полости под воздействием верхней движущейся крышки// Прикладна гідромеханіка.-2008.-10 (82), № 4.-С. 3-12.
53. **Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И.** Численное исследование полей скорости и давления в плоском канале при наличии на его стенке квадратного препятствия// Прикладна гідромеханіка.-2011.-13 (85), № 3.-С. 33-47.
54. **Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И.** Вихревая структура потока в плоском канале при наличии на его стенке квадратного препятствия //Вісник Донецького національного університету, Сер. А: Природничі науки 2011, №2. С.42-50
55. **Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е. И.** Моделирование полей скорости и давления в зоне прямоугольной каверны, расположенной на стенке плоского канала. Часть I // Прикладна гідромеханіка.-2013.- Т. 15(87), № 3.-С. 25-36.
56. **Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е. И.** Моделирование полей скорости и давления в зоне прямоугольной каверны, расположенной на стенке плоского канала. Часть II // Прикладна гідромеханіка.-2013.- Т. 15(87), № 4.-С. 3-12.
57. **Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И., Розумнюк Н.В.** Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление// Прикладна гідромеханіка.-2008.-10(82), № 2.-С. 13-23.
58. **Бруяцкий Е.В., Проходько В.П.** Расчет вертикальных осесимметричных плавучих струй интегральным и численным методом// Гидромеханика.- 1986. вып. 54, С. 48-54.

59. **Быстров Ю.А., Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Леонтьев А.И.** Численное моделирование интенсификации теплообмена в пакетах труб. – СПб.: Судостроение. 2005 – 392 с.
60. **Бэтчелор Дж.** Теория однородной турбулентности. - М.: Изд-во иностр. лит., 1955.- 197с.
61. **Вазов В., Форсайт Дж.** Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: ИЛ, 1963, 488 с.
62. **Вайбищевич П.Н., Павлов А.Н., Чурбанов А.Г.** Численные методы решения нестационарных уравнений Навье-Стокса в естественных переменных на частично разнесенных сетках // Мат. Моделирование. - 1997. - Т. 9, № 4. - С. 85 - 114.
63. **Валандер С. В.** Лекции по гидроаэромеханике.-Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.-295 с.
64. **Васильев О.Ф., Квон В.И. и др.** Стратифицированные течения // Гидромеханика / Итоги науки и техники. – М.: ВИНТИ, 1975. – т. 8. С. 74-131.
65. **Вержбицкий В.М.** Основы численных методов. М.: Высшая школа, 220,-840 с.
66. **Вишик М. И., Фурсиков А. В.** Математические задачи статистической гидромеханики. - М.: Наука, 1980.- 440с.
67. **Вовк И. В., Малюга В. С.** Об одном методе оценки звукового поля эолоновых тонов // Акустичний вісник. -2010.-13, №2. –С. 3-19.
68. **Волков К.Н.** Применение метода контрольного объема для решения задач механики жидкости и газа на неструктурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – т.6, №1.- С. 43-60.
69. **Воропаев Г. А., Воскобойник А. В., Воскобойник В. А., Гринченко В. Т., Исаев С. А., Розумнюк Н. В.** Источники псевдозвуковых пульсаций давления при обтекании сферической лунки //Акустичний вісник.-2008.-11. №3.-С. 27-49
70. **Воропаев Г. А., Воскобойник А. В., Воскобойник В. А., Исаев С. А.** Визуализация ламинарного обтекания овального углубления //Прикладна гідромеханіка,-2009.-т.11. №4.-С. 31-46.
71. **Воропаев Г.А., Розумнюк Н.В.** Численное моделирование вязкого течения над поверхностью с углублением // Прикладна гідромеханіка. – 2004. – 6(78), №4. – С. 17 – 23.
72. **Воропаев Г.А., Птуха Ю. А.** Моделирование турбулентных сложных течений. Киев: Наукова думка.- 1991.- 167 с.
73. **Вычислительные методы в гидродинамике.** Ред. **Б. Олдер, С. Фернбах, М. Ротенберг.** М.: Мир, 1967. - 383 с.
74. **Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б.** Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен.-в 2-х книгах. – М.: Мир, 1991. 678 с., 528 с.



75. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость в несжимаемой жидкости.- М. : Наука, 1972.- 390 с.
76. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
77. *Гибсон М. М., Лоундер Б.Э.* О расчете свободных горизонтальных турбулентных течений со сдвигом в условиях влияния естественной конвекции. - Теплопередача. Сер. С, 1976, 98, № 1, с. 86-94.
78. *Гиневский А.С.* Теория турбулентных струй и следов.-М.: Машиностроение, 1969.- 400 с.
79. *Гинзбург И. П.* Теория сопротивления и теплопередачи : Учеб. пособие. - Л. : Изд-во ЛГУ, 1970.- 375 с.
80. *Гинзбург И.П.* Аэрогазодинамика. - М. : Высш. шк., 1966. - 404 с.
81. *Гиршович Т.А.* О применении метода интегральных соотношений при использовании усложненных моделей турбулентности.- Инж. физ. журнал, 1979, 36, № 3, С. 517-521.
82. *Глушко Г. С.* Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости.-Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение, 1965 №4 С. 13-23.
83. *Глушко Г.С.* Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчета турбулентного пограничного слоя на плоской пластине.-В кн.: Турбулентные течения. М. : Наука, 1970, С. 37-44.
84. *Глушко Г.С.* Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом.- Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1971, №4, С. 127-134.
85. *Гогош Л.В., Степанов Г.Ю.* Турбулентные отрывные течения. –М.: Наука, 1979. – 368 с.
86. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. - 340 с.
87. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. - М.: Наука, 1977. – 440 с.
88. *Горбань В. О., Горбань І. М.* Вихрова структура потоку при обтіканні квадратної призми: числова модель // Прикладна гідромеханіка.- 2005.-7(79), N2.-С. 8-26.
89. *Горбань В. О.* Вивчення взаємодії квадратних циліндрів розташованих тандемом // Прикладна гідромеханіка.-2008.-10 (82), № 2.-С. 36-47.
90. *Госмен А.М., Пан В.М., Ранчел А.К. и др.* Численные методы исследования течений вязкой жидкости. - М.: Мир, 1972. - 323 с.
91. *Гуляев А. Н., Козлов В. Е. , Секундов А. Н.* К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1993, №4 С. 69-

92. **Гуцин В.А.** Метод расщепления для решения задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. - 1981. - т. 21, № 4. - С. 1003 - 1017.
93. **Гуцин В.А.** Численное исследование отрывных течений вязкой жидкости около цилиндра. Стационарный и периодический режимы. – М.: ВЦ АН СССР. 1985 – 62 с.
94. **Гуцин В.А., Щенников В.В.** Об одном численном методе решения уравнений Навье-Стокса. Ж. Выч. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 2, С. 512 – 520.
95. **Гхиа К.Н, Хэнки В.Л., Ходжс Дж.К.** Решение уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в обычных переменных // Ракетная техника и космонавтика. – 1979. - №3, - С. 89 – 92.
96. **Давыдов Б.И.** К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости.- Докл. АН СССР, 1959, 127, № 4, С. 768-771.
97. **Давыдов Б.И.** К статистической турбулентности.- Докл. АН СССР, 1961, 136, № 5, С. 980-982.
98. **Джаугаштин К.Е.** Баланс пульсационной энергии в свободных турбулентных струях несжимаемой жидкости.-Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1970, № 3, С. 80-89.
99. **Джаугаштин К.Е., Солдаткин А.В.** Распространение осесимметричной струи при воздействии архимедовых сил.— Изв. Сиб. отд. ния АН СССР. Сер. техн. наук, 1981, вып. 2, № 8, С. 60-63.
100. **Желазны С.В., Моргенталер И. Х., Херендин Д. Л.** Модели для расчета напряжений трения и интенсивности турбулентных пульсаций для осесимметричных спутных струй.— Ракет, техника и космонавтика, 1973, 11, № 8, С. 137-146.
101. **Иевлев В. М.** Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред.- М.: Наука, 1975.- 256 с.
102. **Исаев С. А., Баранов П. А., Кудрявцев Н. А., Усачев А. Е.** Анализ вихревого теплообмена при поперечном обтекании траншеи на плоскости с помощью моноблочных вычислительных технологий и различных полуэмпирических моделей турбулентности// Инженерно-физический журнал.-2004.-77, №4.-С. 53-63.
103. **Калиткин Н.Н.** Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
104. **Кваша Ю. А.** Численное моделирование плоского турбулентного течения газа в компрессорных решетках// Техническая механика.- 2007, №2, С. 67-73.
105. **Клайн С., Рейнольдс У., Штрауб Ф., Ранстедлер П.** Структура турбулентных пограничных слоев. – Механика, 1959, №4, с. 41-78.
106. **Клаузер Ф.** Турбулентный пограничный слой: Проблемы механики, вып. 2. М.: ИЛ, 1959, С. 297-340.

107. **Ковеня В. М., Яненко Н.Н.** Методы расщепления в задачах газовой динамики. - Новосибирск: Наука. Сб. отд-ние, 1981, - 376 с.
108. **Ковеня В.М., Тарановский Г.А., Черный С.Г.** Применение метода расщепления в задачах газовой динамики. – Н.: Наука, 1981. – 304 с.
109. **Козлов Л. Ф.** Теоретические исследования пограничного слоя.— Киев : Наук. думка, 1982.- 296 с.
110. **Колмогоров А. Н.** Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.- Докл. АН СССР, 1941, 30. № 4, С. 299-303.
111. **Колмогоров А. Н.** Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости.- Изв. АН СССР. Сер. Физика, 1942, 6, № 1/2, с. 56-58.
112. **Коловандин Б.А.** Моделирование теплопереноса при неоднородной турбулентности.- Минск : Наука и техника, 1980.- 184 с.
113. **Коловандин Б.А., Мартыненко О. Г., Сосинович В. А.** Моделирование турбулентных неоднородных полей скорости и температуры.- В кн.: Тепло- и массоперенос: Физ. основы и методы исслед. Минск : ИТМО, 1979, С. 77-79.
114. **Конт-Белло Ж.** Турбулентные течения в канале с параллельными стенками, Изд. МИР, М., 1968 - 176 с.
115. **Корино Е. П., Бродки Р. С.** Визуальное исследование пристеночной области в турбулентном течении.- Механика, 1971, №1, С. 51-82.
116. **Короткин А. И. , Роговой Ю.А.** Метод расчета продольных средних скоростей в пристенных турбулентных течениях несжимаемой жидкости. - СПб.: Мор Вест, 2009. -121 с.
117. **Корявов П.П., Павловский Ю.Н.** Численное решение задачи о движении кругового цилиндра в потоке вязкой жидкости, в сб. «Проблемы прикладной математики и механики», М.: Наука, 1971, С. 247-261.
118. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. -М.: Физматгиз, 1963. –т. 2. 728 с.
119. **Кочубей А.А., Рядно А.А.** Численное моделирование процессов конвективного переноса на основе метода конечных элементов. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1991. - 223 с.
120. **Краснов Н. Ф., Захарченко В. Ф., Кошевой В. Н.** Основы аэродинамического расчета. - М.: Высш.школа, 1984.-264 с.
121. **Кудинов П.И.** Метод расчета процессов гидродинамики и теплообмена в неортогональных криволинейных координатах // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. - 1998. Випуск 1. - Т. 1. - С. 117 - 125.
122. **Кудинов П.И.** Сравнение методов конечных элементов и контрольных объемов в произвольной криволинейной системе координат при численном решении уравнений Навье-Стокса // Придніпровський науковий вісник № 4. – Дніпропетровськ: 1996. – С. 41.

123. **Кузьменко В. Г.** Численное моделирование нестационарного турбулентного течения с отрывом над впадиной и внутри впадины//Прикладна гідромеханіка.-2009. – 11(83), №3. –С. 28-41.
124. **Кузьменко В. Г.** Численное моделирование турбулентного пристенного течения с преградой на основе гибридного LES/RANS подхода// Прикладна гідромеханіка.-2011. – 13(85), №3. –С. 48-60.
125. **Куон и др.** Расчет течений с внезапным расширением при помощи уравнений пограничного слоя. – Теор.инж.рас., 1984, №3, с. 116.
126. **Ламб Г.** Гидромеханика, ГИТЛ, 1947.-928 с.
127. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика.- М.:Наука, 1986. - Т. 6. Гидродинамика.- 736 с.
128. **Лапин Ю. В.** Статистическая теория турбулентности: прошлое и настоящее (краткий очерк идей) // Научно-технические ведомости СПб ГПУ 2' 2004 -С. 7-20
129. **Левеллен В. С., Теске М., Дональдсон К.** Применение полу-эмпирических уравнений пульсационного движения к расчету осесимметричных следов.- Ракет, техника и космонавтика, 1974, 12, № 5, С. 56-63.
130. **Ли С. К., Харша П. Т.** Использование турбулентной кинетической энергии в исследованиях свободного смешения.- Ракет, техника и космонавтика, 1970, 8, № 6, С. 45-53.
131. **Лин А., Вольштейн М.** Теоретическое исследование уравнений для напряжений Рейнольдса.- В кн.: Турбулентные сдвиговые течения / Под ред. А. С. Гиневского. М. : Машиностроение, 1982, ч. 1, С. 343-360.
132. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. 5-е изд.-М.: Наука, 1978.- 736 с.
133. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа.- М. : Наука, 1970.- 904 с.
134. **Лоундер Б. Э.** Обобщенная алгебраическая модель переноса напряжений.- Ракет, техника и космонавтика, 1982, 20, № 4, С. 131-132.
135. **Лунис М, Мамчук В. И., Мовчан В. Т., Романюк Л. А., Шквар Е. А.** Алгебраические модели турбулентной вязкости и теплопроводности в расчетах пристенных турбулентных течений// Прикладна гідромеханіка.-К.: ІГМ. 2001.- т. 3(75), №1.-С. 37-45.
136. **Льюис, Плетчер.** Пределы применимости уравнений пограничного слоя для расчета ламинарных течений с симметричным внезапным расширением. – Теор. Основы инж. Расч. 1986, №2, С. 284-294.
137. **Люлька В.А., Щенников В.В.** Численное решение уравнений Навье-Стокса, в сб. «Сборник теоретических работ по гидродинамике», Труды ВЦ АН СССР, М.: 1970, С. 107-149.
138. **Мак-Кормак Р.В.** Численный метод решения уравнений вязких течений // Аэрокосмическая техника. – 1983. – 1, № 4. – с. 114-123.

139. **Марцинковски В., Шкадов В. Я.** Численное исследование двумерного отрыва на основе уравнений Навье-Стокса // *Механика жидкости и газа*.-1985.-С. 26-32..
140. **Марчук Г.И.** Методы расщепления. - М.: Наука, 1988. - 264 с.
141. **Меллор Г. Л., Херринг Х. Д.** Обзор моделей для замыкания уравнений осредненного турбулентного течения.- *Ракет, техника и космонавтика*, 1973, 11, № 5, С. 17-30.
142. Методы расчета турбулентных течений : Пер. с англ. /Под ред. **А. Д. Хонькина**.- М. : Мир. 1984.- 464 с.
143. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика: Пер. с англ. /Под ред. Н. Н. Моисеева.- М. : Мир, 1964.- 655 с.
144. **Мовчан В. Т., Шквар Є. О.** Різномірні математичні моделі коефіцієнта турбулентної в'язкості // *Прикладна гідромеханіка*.-2010.-12 (84), № 1.-С. 55-67.
145. **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности. Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 1992. – 694 с.
146. **Моурел Т., Торда Т.П.** Расчет свободного турбулентного смещения методом взаимодействия.— *Ракет, техника и космонавтика*, 1974, 12, № 4, С. 150—160.
147. **Мышенков В.И.** Численное исследование отрывного течения перед уступом Изв. АН СССР. МЖГ.- 1979. - № 5. – С. 72-79.
148. **Невзглядов В. Г.** К феноменологической теории турбулентности.- Докл. АН СССР, 1945, 47, №3. с. 169-173.
149. **Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И.** Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. – М.: Физматлит, 2003. – 456 с.
150. **Никитин И.К.** Сложные турбулентные течения и процессы теплопереноса.- Киев: Наук. думка, 1980.- 240 с.
151. **Никитин Н. В.** Спектрально-конечно-разностный метод расчета турбулентных течений несжимаемой жидкости в трубах и каналах. Ж.вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. №6. С. 909-925.
152. **Обухов А. М.** Статистическое описание непрерывных полей.- Тр. геофиз. ин-та АН СССР, 1954, № 24, С. 3-42.
153. **Обухов А.М.** О распределении энергии в спектре турбулентного потока.-Докл. АН СССР, 1941, 32, №1, С. 22-24.
154. **Оран Э., Борис Дж.** Численное моделирование реагирующих потоков. - М.: - Мир, 1990. - 661 с.
155. **Панчев С.** Случайные функций и турбулентность.-Л. : Гидрометеиздат, 1967.-448с.
156. **Панченков А. Н.** Энтропия – 2: Хаотическая механика. – Н. Новгород: Издательство общества “Интелсервис”, ГУП “МПИК”, 2002.- 713 с.

157. **Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. - 288 с.
158. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152 с.
159. **Патанкар С.В., Сполдинг Д.Б.** Тепло- и массообмен в пограничных слоях: - Пер. с англ.- М.: Энергия, 1967.- 127с.
160. **Пейре Р., Тейлор Т.Д.** Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеиздат, 1986. - 352 с.
161. **Пилипенко В.В.** Кавитационные автоколебания. – К.: Наук. думка, 1989.-316 с.
162. **Плетчер Р.Х.** Достижения в области исследования турбулентной вынужденной конвекции// Тр.амер.общ-ва инж.-мех. Современ.машиностр.Сер. А.-1989.-№ 6.-С. 12-31.
163. **Плоткин.** Расчеты спектральным методом некоторых отрывных ламинарных течений в каналах. – Аэрокосмическая техника, 1983, № 7, 75 с.
164. **Полежаев В.И., Бунз А.В., Вerezуб Н.А. и др.** Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса. М.: Наука, 1987. - 272с.
165. **Приходько А. А.** Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и теплообмене. – Киев: Наук. Думка. 2003. – 382 с.
166. **Приходько А. А., Редчиц Д. А.** Численное моделирование дозвукового обтекания осциллирующего профиля на основе уравнений Навье-Стокса. Техническая механика.-2006, №1, С. 104-114.
167. **Приходько А. А., Редчиц Д. А.** Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса// Прикладна гідромеханіка.-2005.-7, N1.-С.56-71.
168. **Приходько А. А., Полевой О. Б., Пилипенко А. А.** Влияние теплообмена на автоколебания скачка уплотнения при трансзвуковом обтекании профиля НАСА 0012 // Техн. механика.-2011.-№1, С. 21-28.
169. **Приходько А.А.** Численное моделирование термогравитационной конвекции в замкнутых областях произвольного поперечного сечения на основе уравнений конвекции и теплообмена в физических переменных // Численно-аналитическое исследование процессов теплопереноса. – Днепропетровск: ДГУ, 1990, - С. 69 –76.
170. **Проходько В.П., Рубцов М. Л.** Применение уравнения баланса турбулентной энергии для расчета поверхностных плавучих струй несжимаемой жидкости.-Гидромеханика, Киев, 1978, вып. 38, С. 28-34.
171. **Рейнольдс А.Д.** Турбулентные течения в инженерных приложениях.- М. :Энергия, 1979.- 405 с.
172. **Рейнольдс А.Д., Себечи Т.** Расчет турбулентных течений.- В кн.: Турбулентность /Под ред. П. Бредшоу. М. : Машиностроение, 1980, С. 202-235.

173. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972 -418 с.
174. *Рождественский Б. Л., Симакин И. Н.* Моделирование турбулентных течений в плоском канале. ЖВМ и МФ- 1985, т. 25, №1,-С. 96-121.
175. *Розумнюк Н. В.* Мгновенные и осредненные характеристики вязкого потока около прямоугольной каверны//Прикладна гідромеханіка.- 2007.-т.9(81), №4.-С. 49-58.
176. *Рокуэлл Д. О.* Упорядочные пульсации течения около цилиндра квадратного поперечного сечения.- Теоретические основы инженерных расчетов, 1977, №3, 175 с.
177. *Ротта И.К.* Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости.- Л. : Судостроение, 1967.- 232 с.
178. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980. - 616 с.
179. *Рхи С.М., Чоу У.Л.* Численный расчет турбулентного обтекания профиля с отрывом у задней кромки // Аэрокосмическая Техника. - 1984. - Т. 2, № 7. - С. 33 - 43.
180. *Савельев А. Д.* О влиянии задней кромки каверны на интенсивность пульсаций потока. 2001, МЖГ, №3, С. 79-89.
181. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - 656 с.
182. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
183. *Сарпкаяя Т., Ириг А.* Внезапно начинающееся течение около прямоугольной призмы. Эксперимент и модель дискретных вихрей. Теоретические основы инженерных расчетов. Труды Америк. об-ва инж.-мех.-1986.-1.-С. 198-213.
184. *Саульев В.К.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. – М.: Физматгиз, 1960.-240 с.
185. *Саффмен П.Г., Уилкокс Д.К.* Модели турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя.- Ракет, техника и космонавтика, 1974, 72, № 4, С. 160-167.
186. *Себеси Т., Брэдишоу П.* Конвективный теплообмен, пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 592 с.
187. *Седов Л.И.* Введение в механику сплошных сред, Физматгиз, М., 1962, 284 с.
188. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Наука, М., 1983. т. 1, 528 с.; т. 2. – 560 с.
189. *Секундов А. Н.* Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений.- Изв. АН СССР. Сер.Механика жидкости и газа, 1971, № 5, С. 114-127.

190. **Синха С. Н., Гунта А. К., Оберай М. М.** Ламинарное отрывное обтекание уступов и каверн. Ч 1. Течение за уступом // Ракетная техника и космонавтика. –1981.-**19**, №12.-С. 33-37.
191. **Случановская З. П.** Распределение давления по поверхности прямоугольного, трехгранного и полукруглого цилиндров и их аэродинамические коэффициенты// Сб. научных трудов Института механики МГУ.-1973.-№24 С. 52-60.
192. **Стегер Дж.Л.** Неявный конечно-разностный метод для расчета двумерного обтекания тел с произвольной геометрией // Ракетная техника и космонавтика. – 1978. – 16, № 7. – С. 51-60.
193. **Стегер, Кутлер.** Неявные конечно-разностные методы расчета вихревых следов // Ракетнокосмическая Техника. - 1977. - № 4. - С. 161 - 173.
194. **Стрелец М. Х., Травин А. К., Шур М. Л., Спаларт Ф. Р.** Метод моделирования отсоединенных вихрей для расчета отрывных турбулентных течений: предпосылки, основная идея и примеры применения //Научно-технические ведомости СПбГПУ 2' 2004 -С. 22-33.
195. **Тейлор Т.Д., Ндефо Э.** Расчет течения вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления. – В кн. Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973, С. 218-229.
196. **Темам Р.** Уравнение Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
197. Теория турбулентных струй/ **Г. Н. Абрамович, Т. А. Гиршович, С. Ю. Крашенинников** и др. / Под ред. Г. Н. Абрамовича. - 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Наука, 1984.- 715 с.
198. **Терехов В. И., Калинина С. В., Мшвидобадзе Ю. М.** Экспериментальное исследование развитие течения в канале с полусферической каверной // Сиб. физ. –тех. ж. – 1992.-Вып. 1.-С. 77-85.
199. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкости. –М.: Мир, 1977. – 431 с.
200. Турбулентность : Пер. с англ. / Под ред. **А. С. Гиневского.**- М.: Машиностроение, 1980.-342 с.
201. Турбулентность, принципы и применения / Под ред. **У. Форста, Т. Моулдена.**- М. : Мир, 1980.- 535 с.
202. Турбулентные сдвиговые течения / Под ред. **А. С. Гиневского.**- М. : Машиностроение, 1982.- Ч. 1. 432 с.
203. Турбулентные сдвиговые течения/Под ред. **А. С. Гиневского.**- М. : Машиностроение, 1983.- Ч. 2. 422 с.
204. Управление обтеканием тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки (численное и физическое моделирование) . Под ред. **А.В. Ермишина и С.А. Исаева.**М.:СПб., 2001.- 360 с.



205. **Федяевский К. К.** Турбулентный пограничный слой крыла. Часть 2. О законе сопротивления.- Труды./Центр. аэрогидродинам. ин-т, 1937, вып. 316, С. 83-96.
206. **Ферцингер Дж. Х.** Численное моделирование крупных вихрей для расчета турбулентных течений. Ракетн. техн. и космонавтика. 1977, т. 15, №9, С. 56-66.
207. **Филлипс О. М.** Динамика верхнего слоя океана.- Л. : Гидрометеиздат, 1980.- 319 с.
208. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. – 1.-501 с.; 2. - 552 с.
209. **Форсайт Дж., Моллер К.** Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. - М.: мир, 1969. - 166 с.
210. **Фрязинов И.В.** Экономичные симметризованные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа // ЖВМ и МФ. - 1968. - т.8, №2. - С. 436-443.
211. **Халатов А. А.** Вихревые технологии аэротермодинамики в энергетическом газотурбостроении, -К., НАНУ, Ин-т техн. Теплофизики, 2006.-291 с.
212. **Харлоу Ф.Х.** Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике.-М.: Мир, 1967.-С.316 –342.
213. **Хартвич П.М., Су Ч.-Х.** Односторонняя схема высокой точности для расчета несжимаемых трехмерных течений по уравнениям Навье-Стокса // Аэрокосмическая техника. - № 7. - С. 95-105.
214. **Харша П.** Модели переноса кинетической энергии.- В кн.: Турбулентность: Принципы и применение /Под ред. У. Форста, Т. Моулдена. М. : Мир, 1980, С. 207—258.
215. **Хинце И.О.** Корреляционная теория стационарных стохастических процессов.- Успехи мат. наук, 1938, вып. 5, С. 42-51.
216. **Хинце И.О.** Турбулентность.- М. : Физматгиз, 1963.- 680 с.
217. **Чжен П.** Управление отрывом потока.-М. Мир, 1979. 552 с.
218. **Чжен П.** Отрывные течения. – М.: Мир, 1972-1973. – Т.1. – 300 с., Т.2. – 280 с.; Т.3.–354 с.
219. **Чжень, Хо, Хэмффи** Стационарная двумерная свободная конвекция в прямоугольных полостях с различной температурой стенок //Тр. Амер. Об-ва инж.-механиков. Теплопередача. 1988. №1. С. 104-111.
220. Численные методы в динамике жидкостей /Под ред. **Г. Вириц, Ж.Смолдена.** – М.: Мир, 1981 – 400 с.
221. Численные методы в механике жидкости / Под ред. **О.М. Белоцерковского.** – М.: Мир, 1973.-304 с.
222. Численные решения задач гидромеханики / Под ред. **Р.Д. Рихтмайера.** –М.: Мир, 1977. – 267 с.

223. **Шевелев Ю.Д.** Пространственные задачи вычислительной аэродинамики.-М.: Наука, 1986.-367 с.
224. **Шенг Дж.С.** Обзор численных методов решения уравнений Навье-Стокса для течений сжимаемого газа: Пер. с англ. // Аэрокосм. техника. 1986. Т. 4. № 2. С. 65 – 92.
225. **Шквар Е. А.** К учету влияния шероховатости обтекаемой поверхности Журн. ПМТФ.- 1986.-№6.-С. 57-63.
226. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 742 с.
227. **Юрченко Н.Ф., Зигмантас Г.П.** Генерирование продольных вихрей в пограничных слоях под действием объемных сил. Инженерно-физический журнал, 1989, 57, 3, С. 392-398.
228. **Яненко Н.Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. - 196 с.
229. **Abdallah S.** Numerical solution for the incompressible Navier-Stokes equations using a non-staggered grid, II, J. Comput. Phys. 70, 1 (1987), С. 193-202.
230. **Abdallah S.** Numerical solution for the pressure Poisson equation with Neumann boundary conditions using a non-staggered grid, I, J. Comput. Phys. 70, 1 (1987), С. 182-192.
231. **Acrivos A., Schrader M.L.** Steady Flow in a Sudden Expansion at High Reynolds Number. – Phys. Fluids, v. 25, №6, 1982, P. 923-930.
232. **Armaly B. F., Durst F., Pereira J. C. F., Schönung B.** Experimental and theoretical investigation of backward-facing stap flow // J. Fluid Mech. – 1983.-127.-P. 473-496.
233. **Aziz K., Hellums J.** Numerical solution of the theree dimensinal equations of motion for laminar natural convection.-Phys. Fluids, 1967, 10, N2. P. 314-332.
234. **Bhattacharyya S., Dennis S. R. and Smith F. T.** Saparation Shear Flow Past a Suface-Mounted Blunt Obstacle, J. Eng. Math., 2001, 39, pp., 47-62.**Blasius H.,** Laminare Stromung in Kanalen Wecselnder Briete, Zeitschrift fuer Mathematik und Physik, vol. 10, 1910, 225 p.
235. **Blackwelder R. F., Eckelmann H.** Streamwise vortices associated with the bursting phenomenon. 1979, J. Fluid Mech., 94, P. 577-594.
236. **Blasius H.** Laminare Stromung in Kanalen Wecselnder Briete, Zeitschrift fuer Mathematik und Physik, vol. 10, 1910, p. 225 p.
237. **Boussinesq J.** Essai sur la thebrie des eaux courantes. Memoires presentees par diversas savants a l'Acad. d. Sci.- Paris, 1877.- 23 p.
238. **Boussinesq J.** Theorie analytique de la chaleur. T. 2. –Paris: Gauthier-Villars, 1903,-625 p.
239. **Bozeman J.D., Dalton C.** Numerical Study of Viscous Flow in a Cavity // J. Computational Physics, 1973.v. 12,№ 3.- P. 348-363.

240. **Bradshaw P., Cebeci T., Whitelaw J.H.** Engineering calculation methods for turbulent flow. London: Academic Press, 1981. – 331 p.
241. **Bradshaw P.** The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow.- Ibid., 1969, 36, pt 1, P. 117-191.
242. **Bradshaw P.** Calculation of three-dimensional turbulent boundary layers. - Ibid., 1971, 46, pt 3, P. 417-445.
243. **Bradshaw P.** Effect of external disturbances on the spreading rate of a plane turbulent jet.- J. Fluid Mech., 1977, 80, pt 4, P. 796-797.
244. **Bradshaw P.** The effect of initial conditions on the development of a free shear layer.- Ibid., 1966, 26, pt 2, P. 225-236.
245. **Bradshaw P.** The turbulence structure of equilibrium boundary layers.- Ibid., 29, pt 4, P. 625-645.
246. **Bradshaw P.** The understanding and prediction of turbulent flows. - Aeronaut. J., 1972, 76, July, P. 403-418.
247. **Bradshaw P., Ferriss D.N., Atwell N.P.** Calculation of boundary layer development using the turbulence energy equation.- Ibid., 1967, 26, pt 3, P. 593-616.
248. **Brujatsky E.V.** Principal integral equations for a jet in drift (cross) flow. - Fluid Mechanics – Soviet Research, v. 9, №5, 1980. P. 21-25.
249. **Burggraf O.R.** Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows// J. Fluid. Mech.v.24, №1, Jan, 1966, P. 113-151.
250. **Chen C.J., Schetz J.A.** Numerical solution of the three-dimensional Navier-stokes equations with applications to channel flows and a buoyant jet in a cross-flow.- J. Appl. Mech., 1975, 42, March, P. 575-579.
251. **Chen Y.S.** A numerical methods for three-dimensional incompressible flows using nonorthogonal body-fitted coordinate systems // AIAA Paper, 1986. - № 86-1654. 9 p.
252. **Chen C. J.** On the near field characteristics of axisymmetric turbulent buoyant jets in a uniform environment. — Int. J. Heat and Mass Trans., 1979, 22, N 2, P. 245-256.
253. **Chen C.J. Rodi W.** A review of experimental data of vertical turbulent buoyant jets.- Sci. and Appl. Heat and Mass Trans., 1978, 11, 171 p..
254. **Cherdron W., Durst F., Whitelaw J.H.** Asymmetric Flow and Instabilities in Symmetric Ducts with Sudden Expansion. J. Fluid Mech. v.84, 1978, P. 13-31.
255. **Chia V., Chia H.V., Shin C.T.** High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method // J. Comput. Phys. - 1982. - v. 48, №3. P. 387 - 411.
256. **Chorin A.J.** A numerical method for solving incompressible viscous flow problems //J. Comput. Phys. – 1967. – 2. N1 – P. 12 –26.
257. **Chorin A.J.** Numerical solution of the Navier-Stokes equations // Math.Comput. - 1968. - v. 22. - P. 745 - 762.

258. **Comte-Bellot G., Corrsin S.** The use of a contraction to improve the isotropy of grid generated turbulence // J. Fluid Mech, 1966, 25, N4, P. 657-682.
259. **Cormak D. E., Leal G., Scinfeld G.H.** An evaluation of mean Reynolds stress turbulence models: The triple velocity correlation.- Trans. ASME, 1978, 100, P. 47-54.
260. **Courant R. Isaacson E., Rees M.** On the solution of non-linear hyperbolic differential equations by finite difference, Communication on Pure and Applied Mathematics, 1952, 5, 243 p.
261. **Daly B.J.** A numerical study of turbulence transitions in convective flow. - J. Fluid Mech., 1974, 64, pt 1, P. 129-165.
262. **Daly B.J., Harlow F.H.** Transport equations in turbulence. - Phys. Fluids, 1970, 13, N 11, P. 2634-2649.
263. **Dauglas J., Gunn J.E.** A general formulation of alternating direction implicit methods. Pt. 1. Parabolic and hyperbolic problems // Numer. Math.-1964. - V.6, №5. - P. 428 - 453.
264. **Davis R. W., Moor E. F.** A numerical study of vortex shedding from rectangles // J. Fluid Mechanics.-1982.-116.-P. 475-506.
265. **De Vahl Davis G., Mallison G.D.** An Evaluation of Upwind and Central Difference Approximations by a Study of Recirculating Flow // Computers of Fluids, 1976, v. 4. P. 29-43.
266. **Donaldson C.** A progress report on an attempt to construct an invariant model of turbulent shear flows. Turbulent shear flows.- S. 1., 1971.- 121 p.- (AGARD; . N CP-93).
267. **Donaldson C. du P. A.** Progress report on an attempt to construct in invariant model of turbulent shear flows : North Atlantic treaty organization.- S. 1., 1972.- 107 p.- (AGARD; N CP-93).
268. **Dryden H. L.** Recent advances in the mechanics of boundary flow,- Adv, Appl, Mech., 1948, P. 1-40.
269. **Durst F., Melling A., Whitelaw J.H.** Low Reynolds Number Flow-over a Plane Symmetric Sudden Expansion. J.Fluid Mech.,v.64, №1, 1974, P. 111-118.
270. **Easton C.R.** Homogeneous boundary conditions for pressure in MAC method. J. Comp. Phys., 1972, v. 9, № 2, P. 375-379.
271. **Eckelmann H.** The structure of the viscous sublayer and the adjacent wall region in turbulent channel flow. 1974, J. Fluid Mech., 65, P. 439-459.
272. **Elder J. W.** Laminar free convection in a vertical slot, J. Fluid Mech. 1965, 23, p.77-98.
273. **Ellison T.N.** Turbulent transport of heat and momentum from an infinite rough plane.- J. Fluid Mech., 1957, 2, pt 4, P. 456-466.
274. **Ferziger J.H., Peric M.** Computational Methods for fluid dynamics. – Springer, Verlag, 1999.-408 p.
275. **Floran J. M.** Goertler instability of boundary layers over concave and convex walls, 1989, Phys. Fluids, 29(8), P. 2380-2387.

276. **Fromm J.E., Harlow F.H.** Numerical solution of the problem of vortex street development. *Phys. Fluids*. 1963, 6, P. 975-982.
277. **Hanjalic K., Launder B.E.** A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows.- *J. Fluid. Mech.*, 1972, 52, pt 4, P. 609-616.
278. **Harlow F.H. Welch J.E.** Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. - *Phys. Fluids*, 1965, 8, № 12, P. 2182-2189.
279. **Harlow F.N., Nakayama P.I.** Turbulence transport equations.-*Phys. Fluids*, 1967, 10, N 11, P.2323-2332.
280. **Harsha P.T.** Prediction of free turbulent mixing using a turbulent kinetic energy method.- In: *Free turbulent shear flows Conf. proc. S. 1.*, 1971, vol. I, P. 463-519. (NACA Rep.; NSP-321).
281. **Hiwada M., Kawamura T., Mabuchi J., Kumada M.** Some characteristics of flow pattern and heat transfer past circular cylindrical cavity // *JSMF.*, 1983. 26 (220). P. 1744-1753.
282. **Honji H.** The starting flow down a step // *J. Fluid Mech.* -1975.-V. 69, p 2.-P. 229-240.
283. **Issa R.I.** Numerical methods for two- and three-dimensional recirculating flows // *Comput. Meth. Turbulent Transonic and Flows*. Berlin e.a. 1983. - P. 183 - 211.
284. **Issa R.I.** Solution of the implicit fluid flow in two- dimensional cavity // *Jorn. Comput. Phys.* - 1986. Vol. № 62, - P. 40 - 65.
285. **Jimenez J., Moin P.** The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 225, P. 213-240.
286. **Jones W. P., Launder B. E.** The prediction of laminarization with two-equation model of turbulence.- *Int. J. Heat. and Mass Trans.*, 1972, 15, P. 301-295.
287. **Jones W. P., Launder B. E.** The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence.- *Ibid.*, 1973, 16, P. 1119-1130.
288. **Kang W., Sung H. J.** Large-scale structures of turbulent flows over an open cavity. *Journal of Fluid and Structures*. 2009, 25 P. 1318-1333
289. **Karman T.** Mechanische Aehnlichkeit und Turbulenz- *Nachr. Ges. Wiss. Gottin-gen, Math.-Phys. Kl*, 1930, P. 58—68.
290. **Kawaguti M.** Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for the Flow in a Two-Dimensional Cavity // *J. Physical Soc. of Japan*, 1961, v. 16, P. 2307-2315.
291. **Keller L.V., Fridman A.A.** Differenzialgleichungen für die turbulente Bewegung einer incompressible Flüssigkeit.—In: *Proc. 1-st Intern. Congr. Appl. Mech.* 1924, 395 p.

292. **Kim H T., Kline S J., Reynolds W.C.** The production of turbulence near a smooth wall in turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 1971, 50, pt. 1, P. 133-160.
293. **Kim J.** On the structure of wall-bounded turbulent flows. 1983 *Phys. Fluids.*, 26(7), P. 2088-2097.
294. **Kim J., Moin P., Moser R.** Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. 1987, *J. Fluid Mech.*, 177, P. 133-166.
295. **Kjellgren P., Hyvarinen J.** An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method // *Comput. Mechanics.* - 1998. - Vol. 21, № 1. - P. 81 - 90.
296. **Kline S J., Runstadler P W.** Some preliminary results of visual studies of the flow model of the wall layers of the turbulent boundary. *Transactions ASME.* 81, 1959, P. 166-170.
297. **Kline S.J., Reynolds W.C., Schraub F.A., Runstadler P.W.** The structure of turbulent boundary layer/ 1967, *J. Fluid Mech.*, 30, P. 741-733.
298. **Knisely C., Rockwell D.** Self-sustained low-frequency components in an impinging shear layer // *Journal of Fluids Mechanics.* - 1982, - 116. - P. 157 - 186.
299. **Kumar A., Yajnik K.S.** Internal Separated Flow at large Reynolds Number. *J. Fluid Mech.* v.97, №1, 1980, P. 27-51.
300. **Latimer B.R., Pollard A.** Comparison of pressure-velocity coupling solution algorithms // *Numer. Heat Transfer.* - 1985. - Vol. 8. № 6, - P. 635-652.
301. **Laufer T.** Some recent measurements in a two-dimensional turbulent channel, *Jour. Aero. Sci.*, 1950, 17, N 3, P. 277-287.
302. **Laurence D.R., Uribe J.C., Utyuzhnikov S.V.** A robust formulation of the v2-f model// *Flow, Turbulence and Combustion.*- 2004.-V. 73.- P. 169-185.
303. **Launder B.E., Reece G.E., Rodi W.** Progress in the development of Reynolds -stress turbulence closure.— *J. Fluid Mech.*, 1975, 68, pt 3, P. 537-566.
304. **Launder B.E., Morse A., Rodi W., Spalding D.B.** Prediction of free shear flows. A comparison of the performance of six turbulence models.- In: *Free turbulent shear flows Conf. proc. S. 1., 1973, vol. 1, P. 361—422. (NASA Rep.; NSP-321).*
305. **Launder B.E., Spalding D.B.** The numerical computation of turbulent flow.- *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 1974, 3, 269 p.
306. **Launder B.E.** On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum.— *J. Fluid Mech.*, 1975, 67, pt 3, P. 569-582.
307. **Launder B.E., Spalding D.B.** *Mathematical models of turbulence.*- London : Acad. press, 1972.- 169 p.
308. **Launder B.E., Spalding D.B.** *Lectures in mathematical models of turbulence.* New York, Academic Press, 1972, 137 p.
309. **Le H., Moin P., Kim J.** Direct numerical simulation of turbulent flow a backward-facing step // *J. Fluid Mech.* -1997.-V. 330, -P. 349-374.

310. **Lee Y., Korpela E.A.** Multicellular natural convection in a vertical slot. J, Fluid Mech., 1983, v. P. 91-121.
311. **Leonard B.P.** A stable and accurate convective modelling procedure based on quadrature upstream interpolation //Comp.meth.appl.mesh.eng.-1979. – 19, № 1. – P. 59 – 98.
312. **Lewellen W.S., Teske M.E.** Prediction of the Monin-Obukhov similarity functions from an invariant model of turbulence.- J. Atmos. Sci., 1973, 30, P. 1340-1345.
313. **Lewellen W.S., Teske M.E., Donaldson C. DuP.** Examples of variable density flows computed by a second-order closure description of turbulence.- AIAA Journal, 1976, 14, March, P. 382-387.
314. **Lighthill M. J.** Laminar boundary layers. Chap. II.-London: Oxford University Press. 1963.-355 p.
315. **Lumley T.L.** Modeling turbulent flux of passive scalar quantities in inhomogeneous flows.- Phys. Fluids, 1975, 18, N 6, P. 619-621.
316. **Lumley T.L.** Towards a turbulent constitutive relation.- J. Fluid Mech., 1970, 41, pt 2, P. 413-434.
317. **Mahapatra S. Smith F. T.** Influence of surface roughness of shear flow. ASME. J. Appl. Mech. 2004, vol. 71, № 4, P. 459-464..
318. **Mason P. J., Callen N. S.** On the magnitude of the subgrid-scale eddy coefficient in large-eddy simulations of turbulent channel flow// J. Fluid Mech., 1986, 162, P. 439 - 462.
319. **Mellor G. L.** Incompressible turbulent boundary layers with arbitrary pressure gradients and divergent or convergent cross flows.— AIAA Journal, 1967, 5, N 9, P. 1570-1579.
320. **Mellor G. L., Gibson D.M.** Equilibrium turbulent boundary layers.- J. Fluid Mech., 1966, 24, pt 2, P. 225-253.
321. **Mellor G.L., Herring H.T.** Two methods of calculating turbulent boundary layer behavior based on numerical solutions of the equations of motion. - In: Proc. AFOSR-IFP Stanford Conf. Stanford, 1968, vol. 1, P. 331-345.
322. **Menter F.** Eddy Viscosity Transport Equations and Their Relation to the  $k - \varepsilon$  Model. Journal of Fluids Engineering, Vol. 119, 1997, 876 p.
323. **Menter F.R.** Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal.-1994.-32, № 8. –P. 1598 – 1605.
324. **Menter F.R.** Zonal two equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows //AIAA Paper, 1993. №93-2906. 21 p.
325. **Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.** Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turbulence, Heat and Mass Transfer/ Ed. K. Hanjalic, Y. Nagano, M., Tummers. New York: Begell House, Inc., 2003.
326. **Mercan H., Atalik K.** Vortex formation in lid-driven air-shape cavity flows at high Reynolds numbers. European J. of Mechanics B/Fluids, 2009, 28, P. 61-71.

327. **Mills R.D.** Numerical Solutions of the Viscous flow Equations in a Class of Closed flows// J. of Royal Aeronaut. Society, 1965, v. 69, P. 714-718.
328. **Morel T., Torda T.P., Bradshaw P.** Turbulent kinetic energy equation and free mixing.- In: Free turbulent shear flows Conf. proc. S. 1. 1973, vol. 1, P. 549-573. (NASA Rep.; NSP-321).
329. **Nagano S., Naito M., Takata H.** A numerical analysis of two-dimensional flow a rectangular prism by a discrete vortex model // Computers and Fluids.-1982.-10.-P. 243-259.
330. **Naudascher E.** Flow in the wake of self-propelled bodies and related sources of turbulence.- J. Fluid Mech., 1965, 22, pt 4, P. 625-656.
331. **Nee V. W., Kovasznay L. S. G.** Simple phenomenological theory of turbulent, shear flows.- Phys. Fluids, 1969, 12, N 3, P. 473-484.
332. **Oden J.I., Carter Wellford L.** Analysis of flow of viscous fluids by finite element method // Jorurn. AIAA. - 1972. - Vol. 10, №12. - P. 72-80.
333. **Okajima A.** Strouhal numbers of rectangular cylinders// J. Fluid Mech. - 1982.-vol. 123. P. 379-398.
334. **Pan D., Lomax H.** A new aproximate LV factorization sheme for the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations// AIAA Pap.-1986.-№0337.-10p.
335. **Pan F., Acrivos A.** A study flow in Rectanqular Cavities // J. Of Fluid Mech., 1967, v. 28, p. 4, P. 643-655.
336. **Patancar S.V., Spolding P.V.** Calculation Proccerdure for Heat, Mass, and Momentum Transfer in Theree-dimeneional Parabolic Flows //Int.j.Heat and Mass Transfer,-1972.-15. -P.1787-1806 p.
337. **Patel V.C., Head M R.** A simplified version of Bradshaw's method for calculating two-dimensional turbulent boundary layers.- Aeronaut. Quart., 1970, 21, P. 243 - 262.
338. **Peaceman D.W., Rachford H.H.** The numerical solution of parabolic and ellliptie differentional equations // J. Soc. Indust. Appl. Math. - 1955. - V. 3, №1. - P. 28 - 41.
339. **Pereira J.C.F., Sonsa J.M.M.** Experimental and numerical investigation of flow oscillations in a rectanqular cavity. – 1995, J. Fluids Engng 117, P. 68 – 73.
340. **Pereira J.C.F., Sonsa J.M.M.** Influence of impingement edge geometry on cavity flow oscilation // AIAA Journal, - 1994. – 32. – P. 1737 – 1740.
341. **Perry A E., Chong M S., Lim T T.** The vortex shedding process behind two-dimensional bluff bodies. J. Fluid Mech., 1982, v. 116, P. 77-90.
342. **Peters C.E., Phares W.J.** An integral turbulent kinetic energy analysis of free shear flows.- In: Free turbulent shear flows Conf. proc. S. 1., 1973, vol. 1, p. 577 - 624. (NASA Rep.; NSP-321).
343. **Prandtl L., Weighardt K.** Uber ein neyes Formelsystem fur die ausgebildete Turbulenz.-Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. Math.-Phys. Kl., 1945, P. 6-19.



344. **Ptasinski P.K.** Turbulent channel flow near maximum drag reduction: simulations, experiments and mechanisms / P. K. Ptasinski, B. J. Boersma, F. T. M. Nieuwstadt, M. A. Hulsen, B. H. A. A. Van Den Brule, J. C. R. Hunt // J. Fluid Mech., -2003, -V. 490. -P. 251-291.
345. **Reichardt H.** Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz.- Z. angew. Math, and Mech., 1941, 21, P. 257-264.
346. **Reynolds O.** An experimental investigation of the circumstances, which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels.— Trans. Roy. Soc. London A, 1883, 174, P. 935-982.
347. **Reynolds W. C.** Recent advances in the computation of turbulent flows.- Adv. Chem. Eng., 1974, 9, P. 193-246.
348. **Rockwell D., Knisely C.** Observation of the three-dimensional nature of unstable flow past a cavity. Phys. Fluids. 1980, 23, P. 425-431.
349. **Rodi W.** A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses.- ZAMM, 1976, 56, P. 219-221.
350. **Rodi W.** Berechnung der AbwSrme- und Adwasserausbreitung in Flussen.— Wasserwirtschaft, 1980, 70, N5, P. 185-190.
351. **Rodi W.** Progress in turbulence modeling for incompressible flows.- AIAA Pap., 1981, N 45, 12 p.
352. **Rodi W., Spalding D.B.** A two-parameter model of turbulence and its application to free jets.— Warmestoffubertrag, 1970, 3, P. 85-95.
353. **Rotta J.C.** Statistische theorie nichthomogener turbulent.-Z. Phys., 1951, 129, N 5, P. 547-572; 131, N 1, P. 51-77.
354. **Rung T., Bunge U., Schatz M., Thiele P.** Restatement of the Spalart-Allmaras eddy-viscosity model in strane-adaptive formulation // AIAA Journal. 2003. -Vol. 41, №7. P. 1396-1399.
355. **Saffman P. G.** A model for inhomogeneous turbulent flows.- Proc. Roy. Soc. London A, 1970. 317, P. 417-433.
356. **Saffman P. G.** Problems and progress In the theory of turbulence.- Lect. Notes . Phys., 1978, 76, P. 273-306.
357. **Salwen H., Grosch C. E.** The stability of pasenille flow in a pipe circular cross-section// J. Fluid mech. 1972, v. 54, N1, P. 93-112.
358. **Saric W. S.** Goertler vortices, 1994, Annu. Rev. Fluid Mech., 26, P. 379-409.
359. **Shang K., Constantinescu G., Park S.** Analis of the flow and mass transfer processes for the incompressible flow past an open cavity with a laminar and fully turbulent incoming boundary layer. J. Fluid Mech. 2006, Vol. 561, P. 113-145.
360. **Shur M. L., Strelets M. K., Travin A., K., Spalart P. R.** Turbulence modeling in rotating and curved channels: Assessing the Spalart-Shur correction// AIAA. J.-2000.-Vol. 38 N5.-P. 784-792.

361. *Singhal A.K., Spalding D. B.* Prediction of two-dimensional boundary layer with the aid of the  $(k - \varepsilon)$  model of turbulence.- Comput. Math. Appl. Mech. and Eng., 1981, 25, N3, P. 365-368.
362. *Smagorinsky J., Manabe S., Holloway J. L.* Numerical results from a nine-level general circulation model of the atmosphere, Mon. Weather Rev., 1965, 93, P. 727-768.
363. *Sohankar A., Norberg C., Davidson L.* Low-Reynolds Number flow around a square cylinder at incidence: study of blockade, on set of vortex shedding and outlet boundary condition. International. Journal for numerical methods in fluids, vol. 26. 1998, P. 39-56.
364. *Spalart P. R., Shur M. L.* On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature// Aerospace Sci. Technol. J.-1997.-1, N5,-P. 297-366.
365. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flow// AIAA Paper. – 1992. – Vol. 12, N 1. – P. 439 – 478.
366. *Spalding D.B.* A novel finite difference formulation for expressions involving both first and second derivatives//Int.J. Numer. Methods in Engineering/ - 1972. – v.4.-P. 551-559.
367. *Tani I.* Production of longitudinal vortices in the boundary layer along a concave wall. J. Geophys. Research, 1962, 17, No. 8, P. 3075-3088.
368. *Taylor G. I.* Statistical theory of turbulence.- Proc. Roy. Soc. London A, 1935, 151, P. 421-478.
369. *Taylor G. I.* The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion.- Ibid.. 1932, 135, P. 685-706.
370. *Taylor G. I.* Diffusion by continuous movement // Proc. London. Math. Soc. Ser. 2.-1921.-20.- P. 196-202.
371. *Van der Heegge Zijnen B. G.* Measurements of the distribution of heat and water in a plane turbulent jet of air.- Appl. Sci. Res. A, 1958. P. 277-292.
372. *Van der Heegge Zijnen G. G.* Measurements of turbulence in a plane jet of air by the diffusion method and by the hot-wire method.- Ibid., P. 293-312.
373. *Van Doormaal J.P., Raithby G.D.* Enhancements of SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow // Numer. Heat Transfer. - 1984. -Vol. 7. - №2. - P. 147-163.
374. *Van Driest E. R.* On turbulent flow near a wall // J. Aero. Sci. -1956, v. 23, P. 1007-1011.
375. *Viecelli J.A.* A computing Method for Incompressible flows Bounded by Moving Wall. J. Comput. Phys. 1971, 8, P. 119-143.
376. *Wang C. M., Wu J. C.* Numerical solution of steady Navier-Stokes problems using integral representations // AIAA J.-1986.-8. P. 1305-1312.
377. *Wei T., Willmarth W. W.* Reynolds-number effects on the structure of a turbulent channel flow, J. Fluid Mech., 1989, vol. 204, P. 57-95.
378. *Wilcox D. C.* Multiscale Model for turbulent flows, AIAA Journal, 1988, v. 26, N11, P. 1311-1320.

379. **Williams P. T., Baker A. J.** Numerical Simulation of Laminar Flow Over a 3D Backward-Facing Step, Int J. Numer Methods Fluids, 1997, 24, P. 1159-1183.
380. **Wolfstein M.** On the length-scale of turbulence equation.- Isr. J. Tech., 1970, 8, N 1/2, P. 87-99.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.....	6
ВВЕДЕНИЕ.....	10
<b>Г л а в а 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ.....</b>	<b>20</b>
1.1. Общая система уравнений механики жидкости и газа в интегральной конечно-объемной форме.....	20
1.2. Дивергентная дифференциальная форма основных законов сохранения. Уравнения Навье-Стокса.....	26
1.3. Математическая модель вязкой стратифицированной несжимаемой жидкости.....	36
1.4. Математическая модель диффузии химического компонента с простейшей кинетикой.....	47
1.5. Пример точного решения уравнений Навье-Стокса для распределения скорости в плоском канале при полностью развитом течении.....	50
1.6. Пример точного решения для распределения температуры в неизотермическом плоском канале при развитом поле скоростей.....	54
1.7. Пример точного решения уравнений Навье-Стокса для распределения скорости в круглой трубе при развитом течении.....	57
1.8. Метод сеток и дискретизация дифференциальных уравнений.....	61
1.9. Краткий анализ методов численного решения уравнений Навье-Стокса...	68
1.10. Метод контрольного объема.....	78
<b>Г л а в а 2. ПРИМЕР ДИСКРЕТИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА МЕТОДОМ КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА.....</b>	<b>85</b>
2.1. Установившаяся одномерная теплопроводность.....	85
2.2. Теплопроводность граней контрольного объема, граничные условия.....	90
2.3. Решение систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки.....	93
2.4. Нестационарная одномерная теплопроводность.....	96
2.5. Двухмерная нестационарная теплопроводность.....	100
2.6. Установившаяся одномерная конвекция и диффузия тепла.....	103
2.7. Дискретный аналог для двухмерной нестационарной задачи переноса тепла.....	106

<b>Г л а в а 3. ПРЯМОЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОХРАНЕНИЯ МАССЫ И ИЗМЕНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ.....</b>	<b>109</b>
3.1. Трудности расчета поля давления и разнесенные сетки.....	109
3.2. Новый подход к построению системы конечно-разностных уравнений гидродинамики.....	113
3.3. Разнесенная разностная сетка и расположение сеточных функций.....	117
3.4. Дискретизация основных интегральных законов сохранения массы и изменения количества движения методом контрольного объема.....	122
3.5. Преобразование системы разностных уравнений движения с помощью алгоритма SIMPLE и уравнение для давления.....	136
3.6. Процедура численного решения полной системы уравнений гидродинамики.....	138
3.7. Дискретизация интегрального закона сохранения энергии методом контрольного объема.....	140
3.8. Дискретизация интегрального закона сохранения концентрации химического компонента или примеси методом контрольного объема.....	145
3.9. Краткое обсуждение граничных условий.....	150
3.10. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.....	155
3.11. Гидродинамическое сопротивление тел обтекаемых потоком вязкой жидкости.....	162
3.11.1. Вводная часть.....	162
3.11.2. Объемные и поверхностные силы в сплошной среде.....	163
3.11.3. Основные принципы определения гидродинамического сопротивления.....	167
3.11.4. Расчет коэффициентов гидродинамического сопротивления и подъемной силы.....	171
3.11.5. Второй вариант расчетных формул для гидродинамических сил.....	176
<b>Г л а в а 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ DNM-LF.....</b>	<b>181</b>
4.1. Введение.....	181
4.2. Краткое изложение прямого численного метода DNM-LF для решения системы уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости.....	183
4.3. Течение на начальном участке плоского канала.....	185
4.3.1. Постановка задачи.....	185
4.3.2. Результаты расчетов и их обсуждение.....	188
4.4. Вынужденная конвекция жидкости в замкнутой квадратной и прямоугольной полости под воздействием верхней движущейся крышки.....	193
4.4.1. Введение.....	193
4.4.2. Постановка задачи.....	195
4.4.3. Результаты расчетов и их обсуждение для квадратной полости.....	196

4.4.4. Результаты расчетов и их обсуждение для прямоугольной полости...	202
4.5. Течение в плоском внезапно сужающемся канале.....	206
4.5.1. Введение.....	206
4.5.2. Постановка задачи и исходные уравнения.....	206
4.5.3. Результаты расчетов и их обсуждение.....	209
4.6. Течение в плоском внезапно-расширяющемся канале.....	215
4.6.1. Введение.....	215
4.6.2. Постановка задачи и исходные уравнения.....	216
4.6.3. Результаты расчетов и их обсуждение.....	219
4.7. Течение в плоском канале с квадратным выступом на его стенке.....	231
4.7.1. Введение.....	231
4.7.2. Постановка задачи и основные уравнения.....	232
4.7.3. Результаты расчетов и их обсуждение.....	234
4.8. Течение в плоском канале с прямоугольной каверной на его стенке.....	246
4.8.1. Введение.....	246
4.8.2. Постановка задачи и исходные уравнения.....	248
4.8.3. Особенности численного метода.....	251
4.8.4. Результаты расчетов и их обсуждение. Поле скоростей и вихревые структуры.....	251
4.8.5. Поля давления.....	259
4.8.6. Нестационарность течения в плоском канале с прямоугольной каверной.....	263
4.9. Отрывное обтекание квадратного цилиндра безграничным потоком вязкой жидкости.....	271
4.9.1. Введение.....	271
4.9.2. Постановка задачи и основные уравнения.....	272
4.9.3. Результаты расчетов и их обсуждение. Стационарный режим.....	275
4.9.4. Нестационарный периодический режим обтекания.....	279
4.9.5. Поле давления в зоне обтекания квадратного цилиндра.....	285
4.9.6. Гидродинамические силы действующие на обтекаемый квадратный цилиндр.....	286
4.10. Термогравитационная конвекция в замкнутой прямоугольной области, подогреваемой сбоку.....	290
4.10.1. Введение.....	290
4.10.2. Постановка задачи и исходные уравнения.....	291
4.10.3. Особенности численного метода.....	295
4.10.4. Результаты расчетов и их обсуждение для замкнутой квадратной области.....	296
4.10.5. Результаты расчетов и их обсуждение для замкнутых прямоугольных областей.....	303

## **Г л а в а 5. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ..... 320**

5.1. Особенности турбулентных течений.....	320
5.2. Уравнения Рейнольдса и тензор турбулентных напряжений.....	324

5.3. Турбулентный перенос и его моделирование.....	328
5.4. Модели турбулентности первого приближения или градиентные модели.....	329
5.5. Анализ моделей турбулентности первого приближения.....	336

## **Г л а в а 6. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПУЛЬСАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ..... 338**

6.1. Общие тенденции в развитии теории турбулентности.....	338
6.2. Уравнения переноса пульсационных параметров турбулентного потока....	341
6.3. Уравнения переноса вторых корреляционных моментов пульсаций скорости (напряжений Рейнольдса).....	344
6.4. Уравнения переноса кинетической энергии турбулентности и градиентное число Ричардсона.....	346
6.5. Уравнения переноса вторых смешанных корреляционных моментов пульсаций скорости и температуры.....	349
6.6. Уравнения переноса вторых моментов пульсаций температуры.....	350
6.7. Уравнения переноса диссипации турбулентной энергии.....	351

## **Г л а в а 7. МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ИЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ..... 354**

7.1. Общий обзор и классификация моделей турбулентности второго приближения.....	354
7.2. Модель Невзглядова-Драйдена ( $k - \tau$ – модель).....	359
7.3. Модель Колмогорова-Прандтля ( $k - L$ – модель).....	360
7.4. Модель Брэдшоу ( $k - \tau$ – модель).....	361
7.5. Модель Ни-Коважного и Секундова ( $k - \nu$ – модель).....	362
7.6. Модель Лоундера ( $k - \varepsilon$ – модель).....	363
7.7. Модель Лоундера-Ханжалика ( $k - \varepsilon - \tau$ – модель).....	364
7.8. Модель турбулентности для стратифицированных сред ( $k - \varepsilon - \tau - \theta$ – модель).....	365

## **Г л а в а 8. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ВТОРЫХ МОМЕНТОВ, ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ И СКОРОСТИ ЕЕ ДИССИПАЦИИ..... 369**

8.1. Уравнения переноса вторых корреляционных моментов пульсаций скорости (напряжений Рейнольдса).....	369
8.2. Уравнения переноса турбулентной энергии.....	371
8.3. Уравнения переноса вторых моментов пульсаций температур.....	372
8.4. Уравнения переноса диссипации турбулентной энергии.....	373
8.5. Локально-равновесное приближение и алгебраические соотношения для вторых корреляционных моментов.....	374
8.6. Неравновесное приближение для вторых моментов и эмпирические постоянные.....	377

8.7. Другие дифференциальные параметрические модели турбулентности.....	380
8.8. Применение двухпараметрической ( $k - \varepsilon$ ) модели турбулентности для замыкания системы уравнений Рейнольдса.....	383

## **Г л а в а 9. НОВАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ И МЕТОД ИХ РАСЧЕТА .....**

389

9.1. Введение.....	389
9.2. Особенности математического моделирования и физическая природа эффектов турбулентности.....	394
9.3. Переход ламинарного течения в турбулентное.....	400
9.4. Модель течений жидкости с вихревой псевдовязкостью.....	403
9.5. Основные уравнения турбулентных течений с вихревой псевдовязкостью в дифференциальной форме.....	408
9.6. Интегральная форма уравнений турбулентных течений с вихревой псевдовязкостью и их дискретный аналог.....	413
9.7. Конечно-разностная форма уравнения для расчета давления.....	422
9.8. Модельное интегральное уравнение для вихревой турбулентной псевдовязкости.....	425
9.9. Дискретизация уравнения переноса вихревой турбулентной псевдовязкости методом контрольного объема.....	433
9.10. Общий алгоритм решения системы уравнений турбулентных течений методом DNM-TF.....	437
9.11. Основные принципы статистической обработки результатов расчета мгновенных значений характеристик турбулентных течений.....	440
9.12. Интегральная форма уравнения турбулентного переноса тепла и его дискретизация методом контрольного объема.....	443
9.13. Интегральная форма уравнения турбулентной диффузии концентрации химического компонента и его дискретизация методом контрольного объема.....	447

## **Г л а в а 10. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ DNM-TF.....**

453

10.1. Общие замечания.....	453
10.2. Расчет характеристик турбулентного течения в плоском прямолинейном канале.....	455
10.2.1. Особенности изучения характеристик турбулентных течений в каналах.....	455
10.2.2. Постановка задачи и основные уравнения.....	457
10.2.3. Результаты расчетов. Динамика возмущений параметров турбулентного потока.....	461
10.2.4. Осредненные характеристики турбулентного течения в плоском канале.....	465
10.2.5. Пульсационные характеристики турбулентного течения в плоском канале.....	472



10.2.6. Результаты расчетов нормированные на пристенные вязкие масштабы и их сравнение с экспериментом.....	474
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	482
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	483
ОГЛАВЛЕНИЕ.....	507
CONTENTS.....	513

# CONTENTS

PREFACE.....	3
KEY SYMBOLS.....	6
INTRODUCTION.....	9
<b>Chapter 1. BASIC EQUATIONS OF MOTION OF VISCOUS FLUIDS.....</b>	<b>20</b>
1.1. General system of equations of fluid dynamics in finite volume integral form.....	20
1.2. Divergent differential form of the fundamental conservation laws. Navier-Stokes equations.....	26
1.3. Mathematical model of a stratified viscous incompressible fluid.....	36
1.4. Mathematical model of diffusion chemical component with the simplest kinetics...	47
1.5. Example of an exact solution of the Navier-Stokes equations for the velocity distribution in a plane channel with a fully developed flow.....	50
1.6. Example of an exact solution for the temperature distribution in the non-isothermal plane channel in developed velocity field.....	54
1.7. Example of an exact solution of the Navier-Stokes equations for the velocity distribution in a circular pipe with flow evolution.....	57
1.8 The grid method and discretization of differential equations.....	61
1.9. Brief analysis of numerical methods for solving the Navier-Stokes equations.....	68
1.10. Control volume method.....	78
<b>Chapter 2. EXAMPLE OF DISCRETIZATION OF DIFFERENTIAL EQUATION OF HEAT TRANSFER BY CONTROL VOLUME METHOD.....</b>	<b>85</b>
2.1. Steady one dimensional heat conduction.....	85
2.2. The thermal conductivity of the faces of control volume, the boundary conditions.....	90
2.3. Solving systems of algebraic equations with tridiagonal matrix by the sweep method.....	93
2.4. Nonstationary one-dimensional heat conduction.....	96
2.5. Two-dimensional unsteady heat conduction.....	100
2.6. Steady one dimensional convection and diffusion of heat.....	103
2.7. Discrete analogue for unsteady two-dimensional heat transfer problem.....	106
<b>Chapter 3 DIRECT NUMERICAL METHOD FOR SOLVING INTEGRAL EQUATIONS OF CONSERVATION OF MASS AND MOMENTUM CHANGE.....</b>	<b>109</b>
3.1. Difficulties of calculating the pressure field and spaced grid.....	109
3.2. A new approach to building a system of finite-difference equations of hydrodynamics.....	113
3.3. The spaced computational mesh and location of grid functions.....	117
3.4. Discretization of basic integral equations of conservation of mass and momentum	

change by the method of control volume.....	122
3.5. Transformation of the system of difference equations of motion using the SIMPLE algorithm and the equation for the pressure.....	136
3.6. The procedure for the numerical solution of the complete system of equations of hydrodynamics.....	138
3.7. Discretization of the integral equation of energy conservation by the method of control volume.....	140
3.8. Discretization of the integral conservation equation for concentration of a chemical component or impurity by the method of control volume.....	145
3.9. A brief discussion of the boundary conditions.....	150
3.10. Methods for solving systems of linear algebraic equations.....	155
3.11. Hydrodynamic drag of bodies streamlined by viscous flow.....	162
3.11.1. Introductory part.....	162
3.11.2. Body and surface forces in a continuous medium.....	163
3.11.3. The guidelines for determining the hydrodynamic drag.....	167
3.11.4. Calculation of hydrodynamic drag and lift coefficients.....	171
3.11.5. The second variant of calculation formulas for the hydrodynamic forces.....	176
<b>Chapter 4. EXAMPLES OF CALCULATIONS OF LAMINAR INCOMPRESSIBLE FLOW BY THE DNM-LF METHOD.....</b>	<b>181</b>
4.1. Introduction.....	181
4.2. Summary of direct numerical DNM-LF method for solving the system of equations of motion of a viscous incompressible fluid.....	183
4.3. Flow on the initial section of a flat channel.....	186
4.3.1. Formulation of the problem.....	185
4.3.2. Results of calculations and discussion.....	188
4.4. Forced convection of fluid in a closed square and rectangular cavity under the influence of the top moving lid.....	193
4.4.1. Introduction.....	193
4.4.2. Formulation of the problem.....	195
4.4.3. Results of calculations and their discussion for a square cavity.....	196
4.4.4. Results of calculations and discussion for a rectangular cavity.....	202
4.5. Flow for suddenly narrowing flat channel.....	206
4.5.1. Introduction.....	206
4.5.2. Formulation of the problem and the governing equations.....	206
4.5.3. Results of calculations and discussion.....	209
4.6. Flows in suddenly expanding flat channel.....	215
4.6.1. Introduction.....	215
4.6.2 Formulation of the problem and the governing equations.....	216
4.6.3. Results of calculations and discussion.....	219
4.7. The flow in flat channel with a square planar projection on its wall.....	231
4.7.1. Introduction.....	231
4.7.2. Formulation of the problem and the governing equations.....	232
4.7.3. Results of calculations and discussion Results of calculations and discussion.....	234
4.8. The flow in a flat channel with a rectangular cavity on its wall.....	246

4.8.1. Introduction.....	246
4.8.2. Formulation of the problem and the governing equations.....	248
4.8.3. Peculiarities of the numerical method.....	251
4.8.4. Results of calculations and discussion. The velocity field and vortex structures.....	251
4.8.5. Pressure fields.....	259
4.8.6. Nonstationarity of flows.....	263
4.9. Separated viscous flow around a square cylinder.....	271
4.9.1. Introduction.....	271
4.9.2. Formulation of the problem and the governing equations.....	272
4.9.3. Results of calculations and discussion. Stationary regime.....	275
4.9.4. Unsteady periodic flow regime.....	279
4.9.5. Pressure field in the zone a square cylinder flow.....	285
4.9.6. Hydrodynamic forces acting on a streamlined square cylinder.....	286
4.10. Natural convection in a closed rectangular area, heated from the one side.....	290
4.10.1. Introduction.....	290
4.10.2. Formulation of the problem and the governing equations.....	291
4.10.3. Peculiarities of the numerical method.....	295
4.10.4. Results of calculations and their discussion for a closed square domain.....	296
4.10.5. Results of calculations and discussion for closed rectangular regions.....	303
<b>Chapter 5. GOVERNING DIFFERENTIAL EQUATION OF TURBULENT STRATIFIED FLOWS.....</b>	<b>320</b>
5.1. Peculiarities of the turbulrent flows.....	320
5.2. Reynolds equation and the turbulent stress tensor.....	324
5.3. Turbulent transfer simulation.....	328
5. 4 First approximation turbulence model or gradient model.....	329
5.5. Analysis of the first approximation turbulence models.....	336
<b>Chapter 6. GOVERNING DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR THE PULSATING FLOWS.....</b>	<b>338</b>
6.1. General tendencies of the turbulence theory development.....	338
6.2. Transport equations for turbulent pulsations.....	341
6.3. Transport equations for Reynolds stresses.....	344
6.4. Transport equations of turbulent kinetic energy and the gradient Richardson number.....	346
6.5. Transport equations for the second mixed correlation moments of velocity and temperature pulsations.....	349
6.6. Transport equations for the second moments of temperature pulsations...	350
6.7. Transport equations for the turbulent energy dissipation.....	351
<b>Chapter 7. SECOND APPROXIMATION TURBULENCE MODELS OR DIFFERENTIAL MODELS.....</b>	<b>354</b>
7.1. Overview and classification of the second approximation models of turbulence.....	354
7.2. Model of Nevzglyadova-Dryden ( $k - \tau$ - model).....	359
7.3. Model of Kolmogorov-Prandtl ( $k - L$ - model).....	360

7.4. Model of Bradshaw ( $k - \tau$ -model).....	361
7.5. Model of Ni-Kovazhnogo and Sekundova ( $k - \nu$ -model).....	362
7.6. Model of Loundera ( $k - \varepsilon$ -model).....	363
7.7. Model of Loundera-Hanzhalika ( $k - \varepsilon - \tau$ -model).....	364
7.8. Turbulence model for stratified media ( $k - \varepsilon - \tau - \theta$ - model).....	365
<b>Chapter 8. MODEL TRANSPORT EQUATIONS OF SECOND MOMENTS OF THE TURBULENT ENERGY AND ITS DISSIPATION RATE.....</b>	<b>369</b>
8.1. Transport equations for Reynolds stresses.....	369
8.2. Transport equations of turbulent energy.....	371
8.3. Transport equations for the correlation moments of temperature pulsations.....	372
8.4. Transport equation of turbulent energy dissipation.....	373
8.5. Local equilibrium approximation and algebraic correlations for second correlation moments.....	374
8.6. Non-equilibrium approximation for the second moments and the empirical constants.....	377
8.7. Other differential parametric turbulence model.....	380
8.8. Application of the two-parametric ( $k - \varepsilon$ ) turbulence model for closing of Reynolds equations.....	383
<b>Chapter 9. A NEW MODEL FOR TURBULENT FLOWS AND METHOD OF CALCULATIONS.....</b>	<b>389</b>
9.1. Introduction.....	389
9.2. Peculiarities of mathematical modeling and physical nature of the turbulence effects.....	394
9.3. Laminar turbulent flow transition.....	400
9.4. Fluid flows model with vortex pseudoviscosity.....	403
9.5. Governing equations of turbulent flows with vortex pseudoviscosity in differential form.....	408
9.6. The integral form of the equations of turbulent flows with a vortex pseudoviscosity and discrete analogue.....	413
9.7. Finite-difference form of the equation for pressure calculations.....	422
9.8. Model integral equation for the turbulent vortex pseudoviscosity.....	425
9.9. Discretization of the transport equation of vortex turbulent pseudoviscosity by the method of control volume.....	433
9.10. A general algorithm for solving of system of equations of turbulent flows by M-TF method.....	437
9.11. The basic principles of statistical processing of calculating the instantaneous characteristics of turbulent flows.....	440
9.12. Integral form of the turbulent heat transfer equation and its discretization by method of control volume.....	443
9.13. Integral form of the equation of turbulent diffusion concentration of a chemical component and its discretization by the method of control volume.....	447

<b>Chapter 10. EXAMPLES OF CALCULATION OF TURBULENT FLOWS CHARACTERISTICS BY DNM-TF METHOD .....</b>	<b>453</b>
10.1. General remarks.....	453
10.2. Calculation of a turbulent flow in a flat rectilinear channel.....	455
10.2.1. Peculiarities of study the characteristics of turbulent flows in channels.....	455
10.2.2. Statement of the problem and the governing equations.....	457
10.2.3. The results of calculations. Dynamics of perturbation parameters of a turbulent flow.....	461
10.2.4. Averaged characteristics of the turbulent flow in a flat channel.....	465
10.2.5. Pulsation characteristics of turbulent flow in a flat channel.....	472
10.2.6. The calculation results based on the near-wall viscous scale and comparison with experiment.....	474
CONCLUSIONS.....	482
REFERENCES.....	483
CONTENTS.....	507

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE  
INSTITUTE OF HYDROMECHANICS

**Bruyatskiy E. V.,  
A. G. Kostin, E .I. Nikiforovich**

**THE FINITE-VOLUME METHOD  
IN COMPUTER HYDROMECHANICS**

Approved for publication by Scientific Council  
of the Institute of Hydromechanics, NAS of Ukraine  
Editor-in-chief:

E .I. Nikiforovich, Dr. of physical-mathematical sciences, professor,  
Corresponding Member of NAS of Ukraine, Honoured Science Engineering  
Worker of Ukraine

Reviewers: G. A. Voropaev, Dr. of physical-mathematical sciences, professor,  
Corresponding Member of NAS of Ukraine  
E. A. Shevvar, Dr. Engineering, professor

The monograph presents basic equations of fluid dynamics and heat transfer in finite-volume and differential forms. It gives a detailed discussion of a numerical approach to their integration for laminar and turbulent flows of incompressible homogeneous or stratified fluids. Special attention is paid to types of flows out of the boundary-layer concept. They are, e.g. separated flows with recirculation and vortex generation, flows with forced and natural convection in confined areas.

Finite-differential analogs of initial equations of fluid dynamics and heat transfer are constructed with an emphasis of the control volume method applied to basic integral laws of mass, momentum, and energy conservation. This approach and the use of spaced grids provides conservative finite difference scheme of the system of equations of fluid motion in terms of velocity- pressure. The book thoroughly describes main principles and calculation examples of complex flows that illustrates a potential of the discussed method.

For researchers, lecturers, and students of relevant disciplines.

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ГІДРОМЕХАНІКИ

**Бруяцький Євген Васильович  
Костін Олександр Григорович  
Никифорович Євген Іванович**

# МЕТОД КОНТРОЛЬНОГО ОБ'ЄМУ В КОМП'ЮТЕРНОЇ ГІДРОДИНАМІЦІ

(Російською мовою)

Підп. до друку 15.05.2015. Формат 70 x 100/16. Папір офс.№1.  
Гарн. Times New Roman. Друк арк. 30,75. Ум.друк. арк. 33,47  
Наклад 300 прим. Зам. №141

Видавництво «Міленіум»  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції  
ДК № 535 від 19.07.2001 р.

м. Київ, вул. Фрунзе, 60  
Тел.: +38 067 849-34-60  
Факс +38 044 222-74-35  
E-mail: milenium\_ofis@ukr.net



## **Предыдущие монографии авторов**

**Бруязцкий Е. В.** Турбулентные стратифицированные струйные течения, - Киев: Наук. думка, 1986.- 296 с.

**Бруязцкий Е. В.** Теория атмосферной диффузии радиоактивных выбросов, - Киев: Институт гидромеханики НАН Украины, 2000. - 443 с.

**Федоровский А, Д., Никифорович Е. И., Приходько Н. А.** Процессы переноса в системах газ-жидкость, - Киев: Наук. думка, 1988. - 256 с.

**Доманов В. Н., Костин А. Г., Никифорович Е. И.** Процессы теплообмена водоемов-охладителей с атмосферой, - Киев: Наук. думка, 2011, - 320 с.