

УДК 534.231

ВОЛНОВОД ПЕКЕРИСА В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОГО ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ ЗВУКА И ПОГЛОЩАЮЩЕГО ОСНОВАНИЯ

Ю. И. ПАПКОВА

*Севастопольский национальный технический университет**Получено 22.10.2010*

Предложена модель неоднородного по профилю скорости звука волновода на жидком поглощающем полупространстве. В ее рамках получены асимптотические формулы для вертикальных волновых чисел в водном слое и основании. Проанализированы зависимости численных результатов от параметров рассматриваемой системы.

Запропоновано модель неоднорідного за профілем швидкості звуку хвилеводу на рідинній поглинаючій основі. У її рамках отримано асимптотичні формули для вертикальних хвильових чисел у водному шарі й основі. Проаналізовано залежності числових результатів від параметрів розглянутої системи.

A model of waveguide with an inhomogeneous sound velocity profile and attenuation in liquid bottom half-space is proposed. Within this scope, the asymptotic expressions for complex vertical wave numbers in water layer and bottom are obtained. The dependencies of the numerical results from parameters of the considered system are analyzed.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в основу теории распространения звука в море положена концепция неидеальных волноводов [1]. Впервые такая модель волновода, состоящего из водного слоя (скорость звука c_1), который лежит на жидком полупространстве (скорость звука $c_2 > c_1$), рассмотрена Пекерисом [2]. Его решение для акустического поля состояло из суммы нормальных мод и интеграла по разрезу, проведенному параллельно мнимой оси комплексной плоскости горизонтальных волновых чисел ξ (П разрез). Модель Пекериса получила хорошее экспериментальное подтверждение при исследовании геофизических волноводов в мелких морях восточного побережья США [1]. Позднее она была подробно исследована Стиклером [3], чье решение состояло из двух компонент: конечной суммы нормальных мод (идентичных собственным модам в решении Пекериса) и контурного интеграла вокруг разреза, предложенного Юингом, Жардечки и Прессом (ЮЖП разрез). Преобразование ЮЖП разреза в П разрез приводит к тому, что используемый интеграл по замкнутому контуру частично переходит на второй лист комплексной плоскости горизонтально волновых чисел ξ . В результате появляются вытекающие моды, отвечающие экспоненциально затухающим с расстоянием и экспоненциально растущим с глубиной членам. Систематические натурные эксперименты показали, что структура звукового поля на мелководье в целом соответствует теории [1]. При этом труднее всего было объяснить наблюдаемый спад ам-

плитуды звукового давления, который во всех случаях происходит быстрее, чем предсказывает модель. Поскольку поглощение звука в самой морской среде мало, то в большинстве случаев этот эффект, имеющий большое практическое значение, обусловлен диссипативными потерями в подводном грунте, т. е. наличием поглощения в донном полупространстве.

Необходимость учета затухания в жидком грунте привела к тому, что в модели Пекериса [2] волновые числа, характеризующие жидкое дно, становятся комплексными. Первыми на этот факт обратили внимание Корнхаузер и Рени [1]. Так как указанное затухание обусловлено диссипативными потерями и утечкой энергии в грунт, то в этом случае появляются дополнительные диссипативные моды. Их присутствие усложняет исследование поля звукового давления, поэтому в работе [4] рассмотрен волновод Пекериса с дном в виде поглощающего полупространства. Здесь исследовано звуковое давление в двухслойном волноводе, где первый и второй слои характеризуются постоянными профилями скорости звука c_1 и c_2 соответственно. При этом учитывалось наличие затухания во втором слое. Основная сложность предлагаемой методики решения заключается в поиске и отборе корней полученного дисперсионного уравнения.

Цель данной статьи состоит в обобщении модели двухслойного волновода на случай произвольного профиля скорости звука в водном слое, причем второй слой считается жидким однородным поглощающим полупространством с постоянной

скоростью звука. На основе теории квазиполиномов строятся асимптотические формулы для корней дисперсионного уравнения с учетом затухания. Проводится сравнение вертикальных и горизонтальных волновых чисел для гидроакустического волновода при наличии и отсутствии затухания.

1. МОДЕЛЬ ВОЛНОВОДА

Рассматриваемый волновод представляет собой однородный слой жидкости со скоростью звука $c_1(z)$ и плотностью ρ_1 , лежащий на жидком поглощающем полупространстве со скоростью звука $c_2 > c_1(z)$, плотностью ρ_2 и коэффициентом затухания γ , рис. 1. Акустическое поле точечного гармонического источника с частотой ω , расположенного в точке O' с цилиндрическими координатами $(0; z_0)$, в данном волноводе выражается контурным интегралом

$$\Phi(r, z) = \frac{1}{4\pi} \int_C G(z, z_0, \xi^2) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \quad (1)$$

где $G(z, z_0, \xi^2)$ – функция Грина следующей краевой задачи:

$$G_1'' + \left(\frac{\omega^2}{c_1^2(z)} - \xi^2 \right) G_1 = -\delta(z - z_0), \quad (2)$$

$$0 \leq z \leq h,$$

$$G_2'' + (\bar{k}_2^2 - \xi^2) G_2 = 0, \quad z > h, \quad (3)$$

$$G_1(0) = 0,$$

$$\rho_1 G_1(h) = \rho_2 G_2(h), \quad (4)$$

$$G_1'(h) = G_2'(h).$$

Здесь $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака; $\bar{k}_2 = k_2(1 - i\gamma)$; $k_2 = \omega/c_2$; γ – коэффициент затухания (тангенс угла потерь). Путь интегрирования C выбирается так, чтобы охватить все особенности функции Грина G на подходящем листе комплексной ξ плоскости горизонтальных волновых чисел.

Разбив двухслойное пространство $[0; \infty)$ на две части, построим функцию Грина исходной задачи (2)–(4) на двух слоях: $[0; h]$ и $(h; \infty)$. В жидком однородном полупространстве с постоянным профилем скорости звука c_2 функцию Грина G_2 ищем в виде

$$G_2 = L \exp(-i\mu_2 z),$$

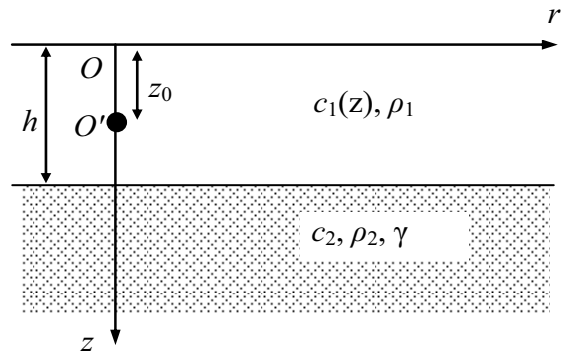


Рис. 1. Схема гидроакустического волновода

где L – константа, определяемая из условий (4), а волновые числа $\mu_2 = \sqrt{\bar{k}_2^2 - \xi^2}$ должны удовлетворять условию затухания в жидком полупространстве $\text{Im}(\mu_2) < 0$.

Для построения функции Грина G_1 в слое $[0; h]$ представим соответствующую краевую задачу в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\vec{X}' = \mathbf{P}(z) \cdot \vec{X} + \vec{Q}(z), \quad (5)$$

$$\mathbf{A} \cdot \vec{X}(0) + \mathbf{B} \cdot \vec{X}(h) = 0,$$

где

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_1' \end{pmatrix}; \quad \vec{Q}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta(z - z_0) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{\rho_2}{i\rho_1\mu_2} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\omega^2}{c_1^2(z)} - \xi^2 \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Зная фундаментальную матрицу

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_1' & s_2' \end{pmatrix}$$

однородной системы (5), определяем функцию

Грина $\tilde{G}(z, p)$ данной системы по формуле

$$\tilde{G}(z, p) = \begin{cases} \mathbf{S}(z) \cdot [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}(0) + \\ + \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}(h))^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}(0) - \mathbf{E}_2] \cdot \mathbf{S}^{-1}(p), & 0 \leq z < p, \\ \mathbf{S}(z) \cdot [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}(0) + \\ + \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}(h))^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}(0)] \cdot \mathbf{S}^{-1}(p), & p < z < h. \end{cases}$$

Здесь \mathbf{E}_2 – единичная матрица второго порядка.

Таким образом, решение неоднородной системы (5) может быть получено в форме

$$\vec{X} = \int_0^h \tilde{G}(z, p) \cdot \vec{Q}(z) dp = \begin{pmatrix} -[\tilde{G}(z, z_0)]_{1,2} \\ -[\tilde{G}(z, z_0)]_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Окончательно G_1 в интервале $[0; h]$ найдем как $G_1 = -[\tilde{G}(z, z_0)]_{1,2}$.

Основную сложность при построении функции Грина G_1 в слое $[0; h]$ представляет нахождение фундаментальной матрицы однородной системы (5), так как скорость звука в водном слое в первом приближении зависит от глубины z . Пусть профиль скорости звука $c_1(z)$ определен системой опорных точек $c(z_i) = c_i$. Тогда отрезок $[0; h]$ разбивается на N частей системой точек $\{z_k\}_{k=0}^N$ ($z_0 = 0, z_N = H$), на каждой из которых профиль скорости звука допускает аппроксимацию $c(z) = c_k(z)$ ($z \in [z_{k-1}; z_k]$), обеспечивающую существование аналитических решений дифференциального уравнения (2). Линейно-независимые решения уравнения (2) для аппроксимации [5]

$$\left(\frac{\omega}{c_k(z)}\right)^2 = a_k + b_k z,$$

$$a_k = \frac{\omega^2}{z_{k+1} - z_k} \left(\frac{z_{k+1}}{c_k^2} - \frac{z_k}{c_{k+1}^2}\right);$$

$$b_k = \frac{\omega^2}{z_{k+1} - z_k} \left(\frac{1}{c_{k+1}^2} - \frac{1}{c_k^2}\right)$$

при $b_k \neq 0$ выражаются через функции Эйри:

$$\varphi_1^k(z; \xi) = \text{Ai} \left(\frac{\xi^2 - a_k}{\sqrt[3]{b_k^2}} - \sqrt[3]{b_k} z \right),$$

$$\varphi_2^k(z; \xi) = \text{Bi} \left(\frac{\xi^2 - a_k}{\sqrt[3]{b_k^2}} - \sqrt[3]{b_k} z \right);$$

а при $b_k = 0$ – через показательную и тригонометрические функции:

$$\varphi_1^k(z; \xi) = \begin{cases} \cos(\sqrt{a_k - \xi^2} z), & a_k - \xi^2 \geq 0, \\ \exp(\sqrt{\xi^2 - a_k} z), & a_k - \xi^2 < 0; \end{cases}$$

$$\varphi_2^k(z; \xi) = \begin{cases} \sin(\sqrt{a_k - \xi^2} z), & a_k - \xi^2 \geq 0, \\ \exp(-\sqrt{\xi^2 - a_k} z), & a_k - \xi^2 < 0. \end{cases}$$

Таким образом, на отрезке аппроксимации $z \in [z_{k-1}; z_k]$ профиля скорости звука общее решение однородного дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$\psi_k = \phi_{1,k} C_{1,k} + \phi_{2,k} C_{2,k}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Для построения непрерывных со своей первой производной линейно-независимых решений для всего водного слоя в точках z_1, z_2, \dots, z_{N-1} , получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $C_{1,k}$ и $C_{2,k}$ ($k = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \phi_{1,1}(z_1)C_{1,1} + \phi_{2,1}(z_1)C_{2,1} &= \\ &= \phi_{1,2}(z_1)C_{1,2} + \phi_{2,2}(z_1)C_{2,2}, \\ \phi'_{1,1}(z_1)C_{1,1} + \phi'_{2,1}(z_1)C_{2,1} &= \\ &= \phi'_{1,2}(z_1)C_{1,2} + \phi'_{2,2}(z_1)C_{2,2}, \\ \phi_{1,2}(z_2)C_{1,2} + \phi_{2,2}(z_2)C_{2,2} &= \\ &= \phi_{1,3}(z_2)C_{1,3} + \phi_{2,3}(z_2)C_{2,3}, \\ \phi'_{1,2}(z_2)C_{1,2} + \phi'_{2,2}(z_2)C_{2,2} &= \\ &= \phi'_{1,3}(z_2)C_{1,3} + \phi'_{2,3}(z_2)C_{2,3}, \\ \dots & \\ \phi_{1,N-1}(z_{N-1})C_{1,N-1} + \phi_{2,N-1}(z_{N-1})C_{2,N-1} &= \\ &= \phi_{1,N}(z_{N-1})C_{1,N} + \phi_{2,N}(z_{N-1})C_{2,N}, \\ \phi'_{1,N-1}(z_{N-1})C_{1,N-1} + \phi'_{2,N-1}(z_{N-1})C_{2,N-1} &= \\ &= \phi'_{1,N}(z_{N-1})C_{1,N} + \phi'_{2,N}(z_{N-1})C_{2,N}. \end{aligned}$$

Ее решение зависит от двух свободных постоянных, так как число неизвестных равно $2N$ при ранге системы $2(N-1)$. Действительно, представим данную систему в виде последовательности матричных уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}(z_k) \cdot \vec{C}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{S}}_k(z_k) \cdot \vec{C}_k, \\ k &= 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\tilde{S}_k(z) = \begin{pmatrix} \phi_{1,k} & \phi_{2,k} \\ \phi'_{1,k} & \phi'_{2,k} \end{pmatrix}; \quad \vec{C}_k = \begin{pmatrix} C_{1,k} \\ C_{2,k} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из уравнений (6) следуют соотношения

$$\vec{C}_k = M_k \cdot \vec{C}_1, \quad k > 1,$$

$$M_k = \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{S}_{j+1}^{-1}(z_j) \cdot \tilde{S}_j(z_j).$$

Следовательно, общее решение на отрезке $[z_{k1}; z_k]$ может быть выражено в форме

$$\psi_k = \tilde{\phi}_{1,k} C_{1,1} + \tilde{\phi}_{2,k} C_{2,1},$$

где

$$\tilde{\phi}_{1,k} = [M_k]_{1,1} \phi_{1,k}(z) + [M_k]_{2,1} \phi_{2,k}(z);$$

$$\tilde{\phi}_{2,k} = [M_k]_{1,2} \phi_{1,k}(z) + [M_k]_{2,2} \phi_{2,k}(z).$$

В качестве линейно-независимых решений однородного уравнения (2) на отрезке $[0; h]$ возьмем функции $s_1 = \tilde{\phi}_{1,k}$, $s_2 = \tilde{\phi}_{2,k}$ при $z \in [z_{k-1}; z_k]$ ($k=2, 3, \dots, N$) и $s_1 = \tilde{\phi}_{1,1}$, $s_2 = \tilde{\phi}_{2,1}$ при $z \in [z_0, z_1]$. Это позволяет построить фундаментальную матрицу S однородной системы (5).

В результате функция Грина G_1 в слое $[0; h]$ представляется следующим образом:

$$G_1 = -\frac{1}{\Delta(\xi)(s_1(z_0)s_2'(z_0) - s_1'(z_0)s_2(z_0))} \times \\ \times \left[\left(s_1(h) - \frac{i\rho_2}{\rho_1\mu_2} s_1'(h) \right) \times \right. \\ \times (s_1(0)s_2(z_0)s_2(z) - s_2(0)s_1(z_<)s_2(z_>)) + \\ \left. + \left(s_2(h) - \frac{i\rho_2}{\rho_1\mu_2} s_2'(h) \right) \times \right. \\ \left. \times (-s_1(0)s_1(z_>)s_2(z_<) + s_2(0)s_1(z)s_1(z_0)) \right], \quad (7)$$

где

$$\Delta(\xi) = s_1(0) \left[s_2(h) - \frac{i\rho_2}{\rho_1\mu_2} s_2'(h) \right] - \\ - s_2(0) \left[s_1(h) - \frac{i\rho_2}{\rho_1\mu_2} s_1'(h) \right];$$

$$z_< = \min(z; z_0), \quad z_> = \max(z; z_0).$$

Заметим, что при отсутствии затухания ($\gamma=0$) и постоянной скорости звука c_1 в водном слое формула (7) дает известное выражение для функции Грина в волноводе Пекериса [2]:

$$G_1 = \frac{\sin(\mu_1 z_<)}{\mu_1 \Delta(\xi)} [\mu_1 \cos(\mu_1(h - z_>)) + \\ + ib_{12}\mu_2 \sin(\mu_1(h - z_>))],$$

$$G_2 = \frac{\sin(\mu_1 z_0) \exp(-i\mu_2(z - h))}{\Delta(\xi)},$$

где

$$b_{12} = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \mu_j = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_j}\right)^2 - \xi^2}, \quad j = 1, 2;$$

$$\Delta(\xi) = \mu_1 \cos(\mu_1 h) + ib_{12}\mu_2 \sin(\mu_1 h).$$

2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Функции G_1 и G_2 содержат в знаменателе выражение $\Delta(\xi)$, равенство нулю которого определяет дисперсионное уравнение (дает полюса функции Грина в комплексной плоскости горизонтальных волновых чисел ξ). В случае мелкой воды общие решения однородного вертикального волнового уравнения (2) для различных вариаций профиля скорости звука [6] отличаются мало и могут быть описаны с помощью следующих асимптотических формул:

$$s_1 = \sin \tilde{\mu}_1 z + O\left(\frac{1}{\tilde{\mu}_1}\right), \\ s_2 = \cos \tilde{\mu}_1 z + O\left(\frac{1}{\tilde{\mu}_1}\right), \quad (8)$$

где $\tilde{\mu}_1 = \sqrt{\tilde{k}_1^2 - \xi^2}$ – вертикальное волновое число; $\tilde{k}_1 = \omega/\tilde{c}_1$; $\tilde{c}_1 = (\max c_1(z) + \min c_1(z))/2$ – среднее значение скорости звука в водном слое исследуемого волновода.

В результате дисперсионное уравнение может быть приведено к виду

$$\tilde{\mu}_1 \cos \tilde{\mu}_1 h + ib_{12}\mu_2 \sin \tilde{\mu}_1 h = 0. \quad (9)$$

Выразив $\mu_2 = -\sqrt{\tilde{k}_2^2 - \tilde{k}_1^2 + \tilde{\mu}_1^2}$, соотношение (9) можно записать как

$$\text{tg}(\tilde{\mu}_1 h) = -\frac{\tilde{\mu}_1}{b_{12}\sqrt{\tilde{k}_1^2 - \tilde{k}_2^2 - \tilde{\mu}_1^2}}, \quad (10) \\ m = 1, 2, \dots,$$

где m – номер собственной моды волновода.

Уравнение (10) совпадает с дисперсионным уравнением для волновода с постоянным профилем скорости звука $c_1 = \tilde{c}_1$ в водном слое, исследованным в работе [4]. Отсюда следует, что оно имеет лишь конечное число $M \geq 1$ решений, удовлетворяющих условию $\text{Im}(\mu_2) < 0$.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ МОД И АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

3.1. Двухслойный волновод без затухания в жидком полупространстве

Рассмотрим двухслойный волновод с произвольным профилем скорости звука в водном слое, лежащем на жидком однородном полупространстве с постоянным волновым числом $k_2 = \omega/c_2$. В случае постоянного профиля скорости звука в воде получаем классический волновод Пекериса. При произвольном профиле скорости звука в силу асимптотической формулы (8) распределение корней дисперсионного уравнения будет в первом приближении описываться уравнением с усредненным значением скорости звука.

При отсутствии затухания существуют только захваченные моды, удовлетворяющие условию $\text{Im}(\mu_2) < 0$. Их количество может быть найдено из уравнения (10) при условии, что $\tilde{\mu}_1 = \sqrt{\tilde{k}_1^2 - k_2^2}$:

$$M_0 = \left[\frac{\tilde{\mu}_1 h}{\pi} + \frac{1}{2} \right].$$

Далее корни дисперсионного уравнения в исследуемом волноводе обычно находятся с помощью численного метода Ньютона:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)},$$

где $f(X)$ – преобразованная функция из уравнения (10):

$$f(X) = X - \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi - \arctg \frac{b_{12} \sqrt{h^2(\tilde{k}_1^2 - k_2^2) - X^2}}{X};$$

$X = \tilde{\mu}_1 h$ ($m = 1, 2, \dots, M_0$). В качестве начального приближения берут $X_0 = (m - 1/2)\pi$.

Используя тот факт, что всякую аналитическую функцию можно определить через степенной ряд, получаем асимптотическую формулу для (10), разложив функцию в ряд Маклорена по степеням

$\tilde{\mu}_1 h$:

$$\arctg \frac{\tilde{\mu}_1}{b_{12} \sqrt{\tilde{k}_1^2 - k_2^2 - \mu_1^2}} \approx \frac{\tilde{\mu}_1 h}{b_{12} h \sqrt{\tilde{k}_1^2 - k_2^2}}, \quad (11)$$

$$\tilde{\mu}_1 h \approx m\pi - \frac{\tilde{\mu}_1 h}{b_{12} h \sqrt{\tilde{k}_1^2 - k_2^2}}.$$

Асимптотическая формула (11) может быть приведена к виду [4]

$$\tilde{\mu}_{1,m} \approx \frac{m\pi}{h_e},$$

где величина $h_e = H(1 + b_{12} h \sqrt{\tilde{k}_1^2 - k_2^2})$ носит название “эффективной” глубины.

3.2. Двухслойный волновод с затуханием в жидком полупространстве

Рассмотрим гидроакустический волновод, в котором первый слой характеризуется непрерывным распределением скорости звука $c_1(z)$, а второй представляет собой жидкое однородное поглощающее полупространство (грунт) с постоянной скоростью звука c_2 . Наличие затухания приводит к тому, что характеризующее жидкое дно вертикальное волновое число становится комплексным: $\tilde{k}_2 = k_2(1 - i\gamma)$, где γ – коэффициент затухания. Модель такого волновода с постоянной скоростью звука в водном слое подробно исследована в [4]. Как известно, наличие затухания приводит к тому, что моды волновода делятся на захваченные и диссипативные моды.

В данном случае дисперсионное уравнение (9) примет вид

$$\tilde{\mu}_1 h \cos(\tilde{\mu}_1 h) - i b_{12} h \sqrt{\tilde{\mu}_1^2 + \tilde{k}_2^2 - \tilde{k}_1^2} \sin(\tilde{\mu}_1 h) = 0.$$

Обозначив $\tilde{\mu}_1 h = Z$ и $h^2(\tilde{k}_2^2 - \tilde{k}_1^2) = \tau$, представим его как

$$z \cos z - i b_{12} \sqrt{z^2 + \tau} \sin z = 0. \quad (12)$$

При решении дисперсионного уравнения основная сложность состоит в поиске и отборе корней уравнения на комплексной плоскости. Поставим задачу построения асимптотической аналитической формулы, описывающей решение уравнения (12), которое перепишем в форме

$$z^2 \cos 2z - b_{12}^2 (z^2 + \tau) \cos 2z + (1 + b_{12}^2) z^2 + b_{12} \tau = 0.$$

Используя соотношение

$$\cos 2z = \frac{\exp(2zi) + \exp(-2zi)}{2}$$

и осуществив замену переменной $2zi = \zeta$, представим его правую часть в форме квазиполинома:

$$(1 - b_{12}^2)\zeta^2 \exp(2\zeta) + 4\tau b_{12}^2 \exp(2\zeta) + 2(1 + b_{12}^2)\zeta^2 \exp \zeta - 8\tau b_{12}^2 \exp \zeta + (1 - b_{12}^2)\zeta^2 + 4\tau b_{12}^2 = 0. \quad (13)$$

Напомним, что квазиполиномом называют [7] линейную комбинацию функций вида $\zeta^{m_j} \exp(\beta_j \zeta)$, где m_j – неотрицательные целые числа; β_j – неотрицательные вещественные числа.

Воспользуемся асимптотическим методом определения нулей квазиполиномов, описанным в работе Беллмана [7]. Построим на плоскости множества точек (β_j, m_j) , соответствующих всем членам квазиполинома: $(2, 2)$; $(2, 0)$; $(1, 2)$; $(1, 0)$; $(0, 2)$; $(0, 0)$, рис. 2. Согласно указанному методу, проводится выпуклая вверх (без вертикальных звеньев) ломаная, ограничивающая множество точек (β_j, m_j) сверху и имеющая вершины в точках, принадлежащих ему. Например, на рис. 2 ломаная проходит через три точки (β_j, m_j) .

Корни квазиполинома могут быть вычислены из уравнений, полученных посредством опускания в нем всех слагаемых, кроме тех, которые соответствуют точкам границы множества, расположенным только на одном из отрезков ломаной. Таким образом исходное уравнение (12) разделяется на два:

$$(1 - b_{12}^2)\zeta^2 + 2(1 + b_{12}^2)\zeta^2 \exp \zeta = 0, \quad (14)$$

$$(1 - b_{12}^2)\zeta^2 \exp(2\zeta) + 2(1 + b_{12}^2)\zeta^2 \exp \zeta = 0.$$

Первое из них дает

$$\zeta_k = \ln \left| \frac{b_{12}^2 - 1}{2(1 + b_{12}^2)} \right| + i\pi(2k + 1), \quad k \in Z. \quad (15)$$

Решения второго уравнения (14) дополняют корни (15) с комплексно сопряженными значениями.

Оставляя решение в форме (15) и возвращаясь к переменной z , получаем приближенные значения корней уравнения (12):

$$z_k = \frac{\pi(2k + 1)}{2} - \frac{i}{2} \ln \left| \frac{b_{12}^2 - 1}{2(1 + b_{12}^2)} \right|, \quad k \in Z. \quad (16)$$

Перейдя к вертикальным волновым числам, имеем

$$\tilde{\mu}_{1k} = \frac{\pi(2k + 1)}{2h} - \frac{i}{2h} \ln \left| \frac{b_{12}^2 - 1}{2(1 + b_{12}^2)} \right|, \quad k \in Z. \quad (17)$$

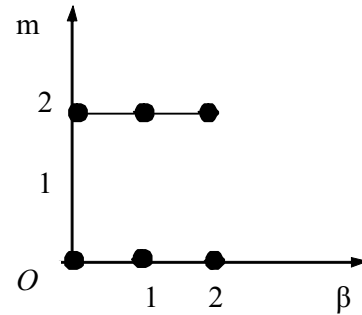


Рис. 2. Точки (β_j, m_j) , соответствующие всем членам квазиполинома

Дальнейшее уточнение корней осуществим по итерационному методу Ньютона:

$$z_k = z_{0,k}, \quad z_{(p+1),k} = z_{p,k} + \frac{F(z_{p,k})}{F'(z_{p,k})}, \quad (18)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots,$$

где $F(z)$ – преобразованная функция в уравнении (12):

$$F(z) = \operatorname{tg} z + \frac{iz}{b_{12}\sqrt{z^2 + \tau}}.$$

После подстановки в соотношения (18) соответствующих функций итерационная формула примет вид

$$z_{(p+1),k} = z_{p,k} + \frac{\operatorname{tg} z_{p,k} + \frac{iz_{p,k}}{b_{12}\sqrt{z_{p,k}^2 + \tau}}}{1 + \operatorname{tg}^2 z_{p,k} + \frac{i\tau}{b_{12}(\sqrt{z_{p,k}^2 + \tau})^3}}, \quad (19)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots$$

Используя (19), можно уточнить асимптотическую формулу (17) для вертикального волнового числа $\tilde{\mu}_1$:

$$\tilde{\mu}_{1m} = \frac{\pi(2k + 1)}{2h} - \frac{i}{2h} \ln \left| \frac{b_{12}^2 - 1}{2(1 + b_{12}^2)} \right| + i \frac{(b_{12} - 1)(3b_{12}^2 + 1)}{8hb_{12}(b_{12}^2 + 1)}. \quad (20)$$

Таким образом, конечное множество решений $m = 1, 2, \dots, M$ дисперсионного уравнения (9), удовлетворяющих условию затухания $\operatorname{Im}(\mu_2) < 0$, можно разделить на M_0 захваченных и $M_1 = M - M_0$ диссипативных мод.

Таблица. Собственные значения для волновода Занга ($f=200$ Гц, $\gamma=0.0916171$)

m	ξ_m^0	ξ_m	μ_{2m}
1	$0.837503 + 0.000710i$	$0.835944 + 0.000091i$	$0.166527 - 0.338912i$
2	$0.833454 + 0.002142i$	$0.830478 + 0.000365i$	$0.171496 - 0.327767i$
3	$0.825298 + 0.003605i$	$0.821283 + 0.000831i$	$0.180685 - 0.308997i$
4	$0.812909 + 0.005245i$	$0.808221 + 0.001507i$	$0.195687 - 0.282559i$
5	$0.796098 + 0.006727i$	$0.791067 + 0.002450i$	$0.219032 - 0.249167i$
10	$0.630171 + 0.017942i$	$0.625199 + 0.012925i$	$0.480745 - 0.100746i$
20	$0.030327 + 0.765292i$	$0.027885 + 0.767616i$	$1.095970 - 0.032034i$
30	$0.023440 + 1.497920i$	$0.022561 + 1.498770i$	$1.690460 - 0.013428i$
40	$0.021970 + 2.139880i$	$0.021461 + 2.140340i$	$2.278660 - 0.004643i$

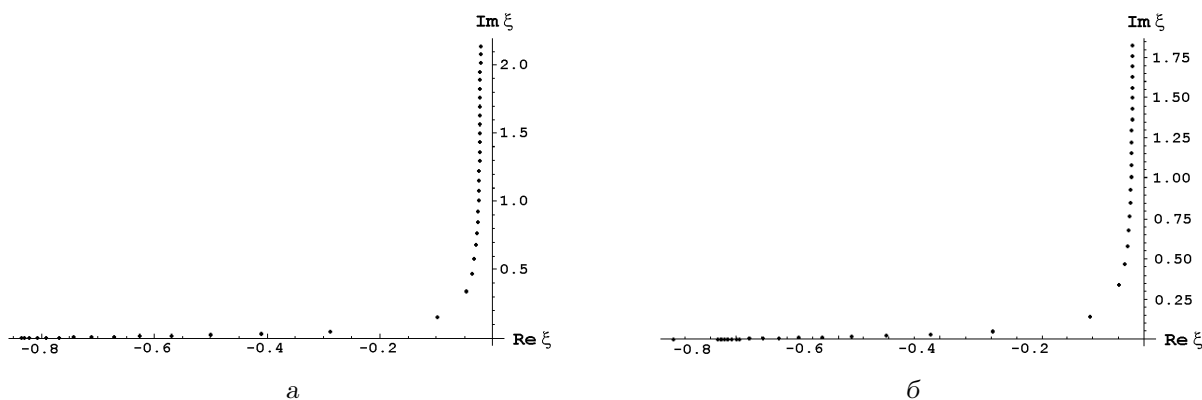


Рис. 3. Значения горизонтальных волновых чисел ξ во второй четверти комплексной плоскости для волновода Занга:
 а – затухание в грунте $\gamma=0.0916171$; б – без затухания

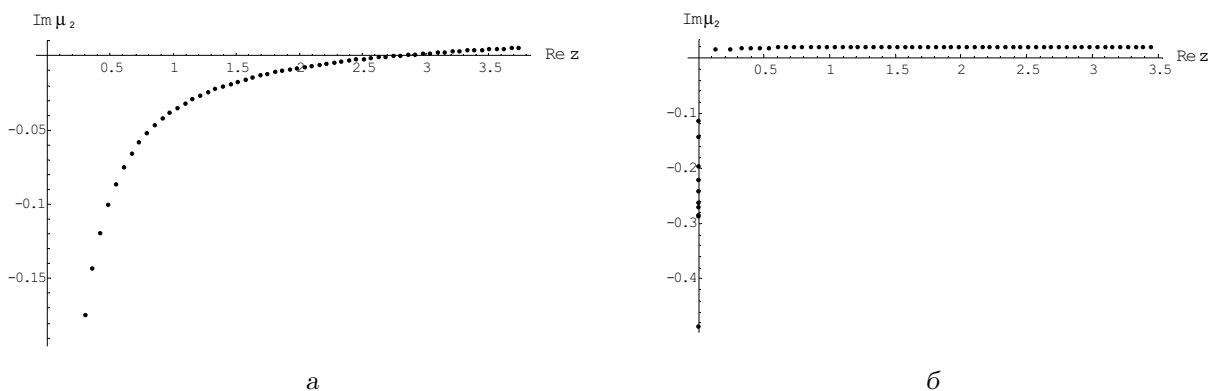


Рис. 4. Значения вертикальных волновых чисел μ_2 для волновода Занга:
 а – затухание в грунте $\gamma=0.0916171$; б – без затухания

4. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В гидроакустическом волноводе Занга [8], представляющем собой однородный слой воды $h=54$ м с усредненной скоростью звука $\tilde{c}_1=1500$ м/с на жидком полупространстве с затуханием γ и скоростью звука $c_2=1600$ м/с при отношении плотностей $b_{12}=0.8$, проводилось исследование спектра краевой задачи (2). При этом варьировались частота f и коэффициент затухания γ . В таблице приведено численное сопоставление результатов для горизонтальных волновых чисел $\xi = -\sqrt{\tilde{k}_1^2 - \tilde{\mu}_1^2}$ ($\tilde{k}_1 = \omega/\tilde{c}_1$), вычисленных с помощью итерационного метода Ньютона, с приближенными значениями $\xi_m^0 = -\sqrt{\tilde{k}_1^2 - (\tilde{\mu}_{1m}^0)^2}$, полученными на основе представления (20), при частоте $f=200$ Гц и $\gamma=0.0916171$. Рассмотренный волновод представляет собой достаточно характерный пример для случая мелкой воды. Заметим, что при достаточно высоком затухании в нем имеется большое количество мод $M=45$, удовлетворяющих условию $\text{Im}(\mu_2) < 0$. Из представленных в таблице данных следует, что предлагаемая в статье асимптотическая формула (20) для собственных значений волновода ξ_m , дает удовлетворительные результаты даже для первых собственных значений, с увеличением порядкового номера точность улучшается.

На рис. 3 отображены значения горизонтальных волновых чисел ξ для волновода Занга при частоте $f=100$ Гц при $\gamma=0.0916171$ и без затухания. Сравнение этих результатов показывает, что наличие затухания в грунте не оказывает качественного влияния на значения горизонтальных волновых чисел ξ в случае “мелкой” воды, а лишь незначительно изменяет расположение горизонтальных волновых чисел ξ . Данный факт подтверждается натурными экспериментами, проведенными Корнхаузером и Рени [1].

Следует отметить, что даже незначительные вариации горизонтальных волновых чисел ξ приводят к существенным отличиям в расположении вертикальных волновых чисел μ_2 , характеризующих грунт. При наличии затухания (рис. 4, а) они имеют как действительную, так и мнимую часть, поскольку затухание обусловлено диссипативными потерями и утечкой энергии в грунт. Если же затухания в грунте нет (рис. 4, б), то вертикальные волновые числа делятся на чисто мнимые, отвечающие захваченным модам, и комплексные. Наличие чисто мнимых μ_2 обусловлено исключительно утечкой энергии в грунт.

Связь между захваченными и диссипативными

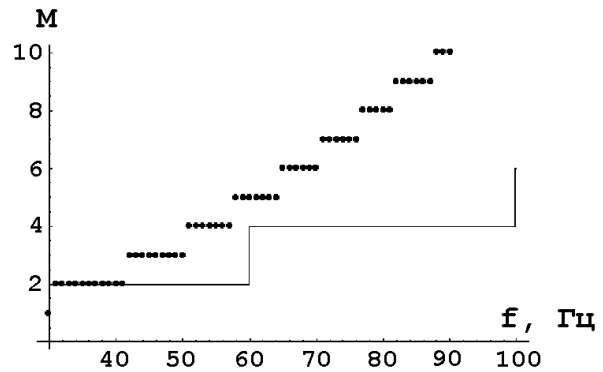


Рис. 5. Рост количества мод при увеличении частоты

модами для волновода Занга при низких частотах иллюстрирует рис. 5. Здесь сплошной линией указано количество захваченных мод, а пунктирной — общее количество мод M . О рис. 5 можно заметить, что с увеличением частоты при фиксированном ненулевом коэффициенте затухания $\gamma=0.0916171$ число M_0 нарастает гораздо медленнее, чем M . Следовательно, с ростом частоты f количество диссипативных мод M_1 , характеризующее разницей между верхней и нижней зависимостями, будет увеличиваться быстрее, чем количество захваченных мод.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено обобщение модели гидроакустического волновода на случай произвольного профиля скорости звука в водном слое и наличия затухания в жидком основании. Для профиля скорости звука, заданного системой опорных точек, построена функция Грина, в случае постоянной скорости звука совпадающая с известными формулами для волновода Пекериса.

На основе теории квазиполиномов получена асимптотическая формула, приближенно описывающая вертикальные и горизонтальные волновые числа задачи. Сравнение полученных асимптотических значений с точными показало удовлетворительное их совпадение уже для низших собственных чисел. С увеличением номера точность асимптотического приближения растет.

На примере волновода Занга представлены результаты численных исследований влияния коэффициента затухания на спектр задачи.

1. Толстой И., Клей К. С. Акустика океана.— М.: Мир, 1969.— 301 с.

2. *Pekeris C. L.* Theory of propagation of explosive sound in shallow water // Propagation of sound in the ocean.– New York: Geol. Soc. Amer., Mem. 27, 1948.– P. 1–117.
3. *Stickler D. C.* Normal-mode program with both the discrete and branch line contributions // J. Acoust. Soc. Amer.– 1975.– **57**.– P. 856–861.
4. *Buckingham M. J., Giddens E. M.* On the acoustic field in a Pekeris waveguide with attenuation in the bottom half space // J. Acoust. Soc. Amer.– 2006.– **119**.– P. 123–142.
5. *Папкова Ю. И., Папков С. О., Ярошенко А. А.* Energy characteristics of the hydroacoustic field in a nonuniform marine medium with a cylindrical body floating on the surface // Phys. Oceanogr.– 2006.– **16**, N 3.– P. 168–176.
6. *Бреховских Л. М., Годин О. А.* Акустика слоистых сред.– М.: Наука, 1989.– 416 с.
7. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения.– М.: Мир, 1967.– 548 с.
8. *Zhang Z. Y., Tindle C. T.* Complex effective depth of the ocean bottom // J. Acoust. Soc. Amer.– 1993.– **93**.– P. 205–213.