

УДК 532.516

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ЭОЛОВЫХ ТОНОВ

И. В. ВОВК, В. С. МАЛЮГА

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 07.07.2010

Исследована проблема генерации эоловых тонов при ламинарном обтекании цилиндра для чисел Рейнольдса $Re \leq 400$. В предположении об отсутствии обратного влияния звукового поля на поток развит двухэтапный метод, позволяющий оценить акустические характеристики эоловых тонов. На первом этапе численно решалась гидродинамическая задача в приближении вязкой несжимаемой жидкости. Это позволило определить параметры, при которых возникает режим автоколебаний с периодическим изменением во времени распределения давлений на поверхности цилиндра. На втором этапе найденное распределение давлений использовалось в качестве граничного условия при решении задачи линейной акустики. Полученные гидродинамические и акустические характеристики хорошо согласуются с экспериментальными и теоретическими данными других исследователей. Показано, что известные приближенные оценки силы звука эоловых тонов и амплитуды колебаний подъемной силы на цилиндре в виде степенных зависимостей от скорости набегающего потока неточны, а показатель степени существенно зависит от числа Рейнольдса. Анализ вкладов различных мод эоловых тонов в общий звуковой сигнал показал доминирование первой (дипольной) составляющей. При этом с увеличением Re наблюдается заметный рост следующей (квадрупольной) составляющей.

Досліджено проблему генерації еолових тонів при ламинарному обтіканні циліндра для чисел Рейнольдса $Re \leq 400$. У припущенні про відсутність зворотного впливу звукового поля на потік розвинуто двоетапний метод, який дозволяє оцінити акустичні характеристики еолових тонів. На першому етапі чисельно розв'язувалась гідродинамічна задача у наближенні в'язкої нестисливої рідини. Це дозволило визначити параметри, при яких виникає режим автоколивань з періодичною зміною в часі розподілу тисків на поверхні циліндра. На другому етапі знайдений розподіл тисків використовувався як гранична умова при розв'язанні задачі лінійної акустики. Одержані гідродинамічні й акустичні характеристики добре узгоджуються з експериментальними й теоретичними даними інших дослідників. Показано, що відомі наближені оцінки сили звуку еолових тонів й амплітуди коливань підйомної сили на циліндрі у вигляді степеневих залежностей від швидкості набігаючого потоку неточні, а показник степеня істотно залежить від числа Рейнольдса. Аналіз внесків різних мод еолових тонів у загальний звуковий сигнал показав домінування першої (дипольної) складової. При цьому зі збільшенням Re спостерігається помітне зростання наступної (квадрупольної) складової.

The paper deals with studying of the problem on generation of the Aeolian tones at laminar flow past the cylinder for the Reynolds numbers of $Re \leq 400$. A two-stage technique for evaluating of acoustical characteristics of the Aeolian tones has been developed in the assumption of absent inverse effect of the sound field on the flow. On the first stage, the hydrodynamical problem was solved in the approach of viscous incompressible fluid. In doing so, the parameters have been determined for the occurrence of self-oscillation regime with time-periodic pressure distribution over the cylinder's surface. The found pressure distribution has been used on the second stage for a boundary condition when solving the problem of linear acoustics. The obtained hydrodynamic and acoustical characteristics are in good agreement with the experimental and theoretical data from other researchers. The known approximate estimates of the Aeolian tones sound intensity and lift oscillation amplitude in form of power dependences from incident flow velocity are shown to be inaccurate and the power index significantly depends on Re . The analysis of contributions of different modes of the Aeolian tones in overall sound signal demonstrates the predomination of the first (dipole) component. However, notable increase of the next (quadruple) component with Re is observed.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, эоловы тона – это звуки, возникающие при обтекании потоком удлиненных тел. Однако чаще всего эоловы тона связывают с обтеканием удлиненных тел, имеющих сечение в виде круга – струн, тросов, длинных стержней, высоких труб и т. п. История их изучения подробно изложена в работах [1, 2]. В этом исследовании нас будут интересовать прежде всего полевые и энергетические характеристики эоловых тонов и зависимость их от скорости потока или числа Рейнольдса.

Судя по всему, первую попытку оценить интенсивность эоловых тонов предпринял В. Холле в 1938 году [3]. На основании своих наблюдений

он эмпирическим путем установил, что интенсивность эоловых тонов (сила звука) в направлениях, перпендикулярных направлению движения потока (здесь наблюдается максимальная интенсивность излучения [1, 2]), составляет

$$I \approx \alpha \frac{ldV^q}{r^2}, \quad (1)$$

где l , d – длина и диаметр цилиндрического стержня; V – скорость набегающего потока; r – расстояние от стержня до точки наблюдения. Согласно опытам В. Холле, $6 \leq q \leq 8$.

В 1946 г. Д. И. Блохинцев [3] несколько уточнил формулу (1). Исходя из соображений размерности,

он показал, что

$$I \approx \alpha(\text{Re}) \frac{ld\rho V^6}{r^2 c^3}. \quad (2)$$

Здесь ρ , c – плотность среды и скорость распространения звука в ней; $\alpha(\text{Re})$ – некоторый зависящий от числа Рейнольдса коэффициент, который не может быть определен из соображений размерности.

В 1956 г. О. М. Филлипс [4] предположил, что действующую на цилиндрический стержень в потоке подъемную силу $F(t)$ можно приближенно представить как некоторую гармоническую силу, действующую на единицу длины стержня:

$$F(t) \approx \frac{1}{2} \beta d \rho V^2 \exp(-i[\omega t + \varphi]), \quad (3)$$

Здесь ω – круговая частота эолового тона; $0.5 \leq \beta \leq 2$ – константа, связанная с зависимостью подъемной силы от степени турбулентности потока и с зависимостью фазы φ от длины стержня. Необходимость учета последнего определяется тем, что синфазный срыв вихрей наблюдается только на относительно коротком участке, протяженность которого составляет три – четыре диаметра стержня.

Используя приближение (3), в 1976 г. М. Е. Голдстейн [5] предложил уточненную формулу для оценки интенсивности эоловых тонов на единицу длины стержня:

$$I \approx \beta^2 \text{St}^2 \frac{17d\rho V^6}{32r^2 c^3}. \quad (4)$$

Здесь St – число Струхала. Хотя формула (4) нашла применение на практике, вполне очевидно, что она носит сугубо оценочный характер, поскольку получена на основе ряда упрощающих предположений. Кроме того, чтобы ее использовать, необходимо заранее знать число Струхала для конкретной скорости потока, набегающего на цилиндрический стержень, и эмпирический коэффициент β , о котором известно только то, что он может изменяться в довольно широких пределах.

Исходя из сказанного, цель данной работы – более строго оценить акустические характеристики эоловых тонов (в том числе и энергетические) на основе численного решения уравнения Навье – Стокса и последующего использования полученных данных о скорости и давлении на поверхности стержня при решении уравнения Гельмгольца.

1. ИДЕЯ МЕТОДА

В основу предлагаемого метода оценки акустических характеристик эоловых тонов легли два

принципиальных предположения, которые в целом подтверждаются экспериментами:

- мощность звука, порожденного потоком, набегающим на препятствие, существенно меньше общей мощности той части потока, которая набегаем на препятствие;
- порожденный потоком звук не влияет на характер самого потока.

Кроме того, будем полагать, что цилиндрический стержень имеет бесконечную длину, причем по всей его длине происходит одновременный синфазный срыв вихрей. Это существенно упрощает задачу, поскольку теперь ее можно рассматривать как зависящую только от двух координат (плоскую задачу).

Теперь процедуру определения акустических характеристик эоловых тонов можно разделить на два этапа.

На первом из них рассматривается гидродинамическая задача, которую в силу малости размеров источника звука (диаметра цилиндра) по сравнению с длиной звуковой волны можно рассматривать в рамках модели вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости. Проводится численное решение нестационарной системы уравнений Навье – Стокса. На основе полученного решения определяется частота процесса периодического срыва вихрей с поверхности стержня, число Струхала и характер изменения давления на поверхности в течение одного периода.

После этого можно перейти ко второму этапу и рассмотреть акустическую задачу, заключающуюся в определении звукового поля эоловых тонов. Полученную ранее зависимость изменения давления на поверхности стержня в течение одного периода при постановке акустической задачи можно трактовать как граничное условие. Тогда проблема определения поля эоловых тонов сводится к решению хорошо известной плоской задачи об определении поля излучения цилиндра, на поверхности которого задано некоторое периодически изменяющееся распределение давления [6]. При этом, если числа Маха малы, то движением потока можно пренебречь и считать, что звук распространяется так же, как в неподвижной среде. После этого определяются все акустические характеристики эолового тона, в том числе пространственное распределение звукового давления (диаграмма направленности), давление и сила звука на оси диаграммы направленности, а также полная излучаемая мощность.

2. ПОСТАНОВКА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Задачу нестационарного обтекания твердого кругового цилиндра сформулируем в рамках модели вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости. Такое течение описывается нестационарной системой уравнений Навье–Стокса, которые в безразмерных физических переменных можно представить в тензорной форме следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} - \nabla p, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (6)$$

где p – скалярное поле давления; \mathbf{U} – векторное поле скорости; $\mathbf{U}\mathbf{U}$ – тензор второго ранга, определенный как внешнее произведение векторов. Покомпонентное представление этих уравнений можно найти в учебной литературе [10].

Для обезразмеривания приведенных уравнений движения за масштаб длины принимался диаметр цилиндра d , а за масштаб скорости – скорость равномерного потока V на достаточно большом удалении от цилиндра. Тогда масштабом времени будет величина d/V , а масштабом давления – удвоенный скоростной напор ρV^2 . Основным параметром такой задачи, входящим в уравнения движения, является число Рейнольдса $\text{Re} = Vd/\nu$, где ν – кинематическая вязкость среды.

Граничные условия формулировались следующим образом. Для скорости на границе цилиндра ставилось условие прилипания $U=0$, для давления – равенство нулю нормального градиента [12]. В качестве расчетной области был выбран квадрат со стороной $40d$, в центре которого располагался цилиндр. На входе в расчетную область (левая граница) задавался равномерный поток. На верхней и нижней ее границах формулировалось условие плоскости симметрии, т.е. нулевые значения для вертикальной компоненты, $U_y=0$, и отсутствие нормального градиента для горизонтальной, $\partial U_x/\partial y=0$. Это условие предполагает, что уже на расстоянии $20d$ от центра цилиндра поток становится практически невозмущенным. На выходе из расчетной области (правая граница) ставились “мягкие” граничные условия типа линейной экстраполяции, соответствующие равенству нулю нормального градиента скорости. Для давления нормальный градиент полагался равным нулю по всей границе расчетной области, включая выход [12].

Алгоритм численного решения сформулированной задачи детально описан в [7] и использован в работах [8, 9] для численного моделирования течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Он основан на использовании метода конечных объемов [11–13], который в настоящее время можно считать наиболее популярным численным подходом в задачах механики жидкостей.

Для дискретизации расчетной области использовалась неортогональная сетка со сгущением узлов вблизи поверхности цилиндра. При этом в круговой области диаметром $6d$, расположенной вокруг цилиндра, задавалась сетка типа O. С целью верификации полученных результатов расчеты выполнялись при разном количестве контрольных объемов и различных значениях коэффициентов сгущения узлов сетки. Представленные в данном исследовании результаты получены на сетке с 230400 контрольных объемов с минимальным шагом около $0.002d$ вблизи поверхности цилиндра.

При расчетах использовались библиотеки инструментария с открытым кодом *OpenFOAM* [14, 15]. Для вычисления объемных интегралов по контрольному объему использовалась общая процедура Гаусса, согласно которой интеграл по объему представляется через интеграл по поверхности ячейки, а значение функции на поверхности ячейки интерполируется из значений функции в центроидах соседних ячеек. Для интерполяции конвективных членов использовалась TVD схема, примененная в *limitedLinearV* [14]. Согласно классификации, данной в [16], она соответствует обобщенной кусочно-линейной схеме Чакраварти–Опера [17]. На ортогональных участках сетки нормальные градиенты скорости на поверхности ячейки, необходимые при вычислении диффузионных членов по теореме Гаусса, находились из значений скорости в центроидах соседних ячеек по схеме второго порядка. На неортогональных участках использовалась итерационная процедура коррекции погрешности, вызванной неортогональностью сетки [18]. Для дискретизации производной по времени использовалась неявная трехточечная несимметричная схема второго порядка с разностями назад (*backward differencing*).

Для связанного расчета поля скорости и давления использовалась предложенная Исса [19] процедура *PISO* (*pressure implicit with splitting of operators*) с числом корректоров 4. Детальное описание этой процедуры может быть также найдено в учебной литературе по вычислительной гидромеханике [10, 13]. Для решения полученной сис-

темы линейных алгебраических уравнений применялись итерационные солверы *PCG* и *PBiCG*, использующие методы сопряженных и бисопряженных градиентов с предобусловливанием для симметричных и асимметричных матриц соответственно. В качестве предобусловливателя были выбраны процедуры *DIC* (предобусловливатель, основанный на упрощенной схеме неполной факторизации Холецкого) и *DILU* (предобусловливатель, основанный на упрощенной неполной LU факторизации) для симметричных и асимметричных матриц соответственно [20].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ И ИХ ВЕРИФИКАЦИЯ

Обтекание кругового цилиндра потоком жидкости рассматривалось в большом числе экспериментальных и расчетных работ (см. статью [21] и обширную библиографию, приведенную ней). Картина обтекания цилиндра набегающим потоком существенно зависит от числа Рейнольдса, определяемого по диаметру цилиндра, ламинарное течение за которым, в зависимости от Re может иметь три режима – безотрывное стационарное течение, стационарный отрыв и периодическое отрывное течение.

Безотрывный режим реализуется при числах Рейнольдса, не превышающих некоторого относительно небольшого порогового значения. При увеличении числа Рейнольдса под действием градиента давления и вязких сил ламинарный пограничный слой отрывается от поверхности цилиндра, за которым образуется пара рециркуляционных вихрей. Эксперименты указывают на возможность отрыва при $Re \approx (4 \dots 5)$, тогда как большинство численных расчетов дает $Re \approx (5 \dots 7)$ [22, 23].

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса размеры симметричной вихревой пары, образовавшейся за цилиндром, растут и вихри вытягиваются вдоль направления потока. При этом течение остается стационарным до достижения числом Рейнольдса следующего критического значения, равного примерно 40. Далее течение становится неустойчивым по отношению к малым возму-

щениям, нарушающим симметрию в следе за цилиндром, и приобретает асимметричный характер. При $Re \sim 50$ в следе за цилиндром возникают колебания, усиливающиеся с ростом числа Рейнольдса. Начиная с $Re \sim 60$, происходит периодический отрыв вихрей, которые сносятся течением. Поочередно отрываясь то с одной, то с другой стороны от кормовой точки цилиндра, вихри дрейфуют вниз по потоку, образуя регулярную структуру, известную как вихревая дорожка Кармана. Физика этого процесса подробно изложена в [2].

Такая картина продолжает сохраняться при увеличении числа Рейнольдса примерно до 10^4 , однако здесь необходимо выделить два режима периодического вихревого движения. В диапазоне $40 < Re < 300$ реализуется устойчивое ламинарное течение, при котором нет необходимости учитывать влияние турбулентных пульсаций. В данном исследовании метод прямого численного моделирования использован вплоть до $Re = 400$ и показано, что точность полученных результатов приемлема для данной задачи. При более высоких числах Рейнольдса возникает турбулизация течения и, следовательно, необходимо использовать методы моделирования турбулентности. Процесс срыва вихрей становится менее организованным, причем несколько нарушается регулярность срыва крупномасштабных вихрей, вызывая широкополосные пульсации подъемной силы. Однако даже при больших числах Рейнольдса в следе за цилиндром существуют отчетливо различимые крупномасштабные вихревые структуры, несущие примерно половину энергии турбулентности [4, 5]. Известно, что нерегулярные пульсации подъемной силы генерируют широкополосный шум. Поскольку здесь нас интересуют эоловы тона, в дальнейшем сконцентрируем внимание на ламинарных режимах течения.

Для верификации используемых численных методов в табл. 1 приведены рассчитанные параметры стационарного течения – коэффициент лобового сопротивления C_x и длина отрывной зоны L_{sep} , измеряемая от задней критической точки, т. е. расстояние от кормовой точки цилиндра до точки пересечения линий тока за вихрями (см. рис. 1, а, б). Следует отметить хорошее (в пределах одного процента) совпадение этих результатов с данными, приведенными в работе [21].

На рис. 1 показаны линии тока для различных значений числа Рейнольдса (графики для безотрывного течения при $Re < 5$ не приведены). При стационарном обтекании цилиндра потоком линии тока совпадают с траекториями движущихся частиц среды. Для случая же периодического про-

Табл. 1. Параметры стационарного течения

Re	10	20	40
L_{sep}	0.251	0.929	2.29
C_x	2.84	2.049	1.53

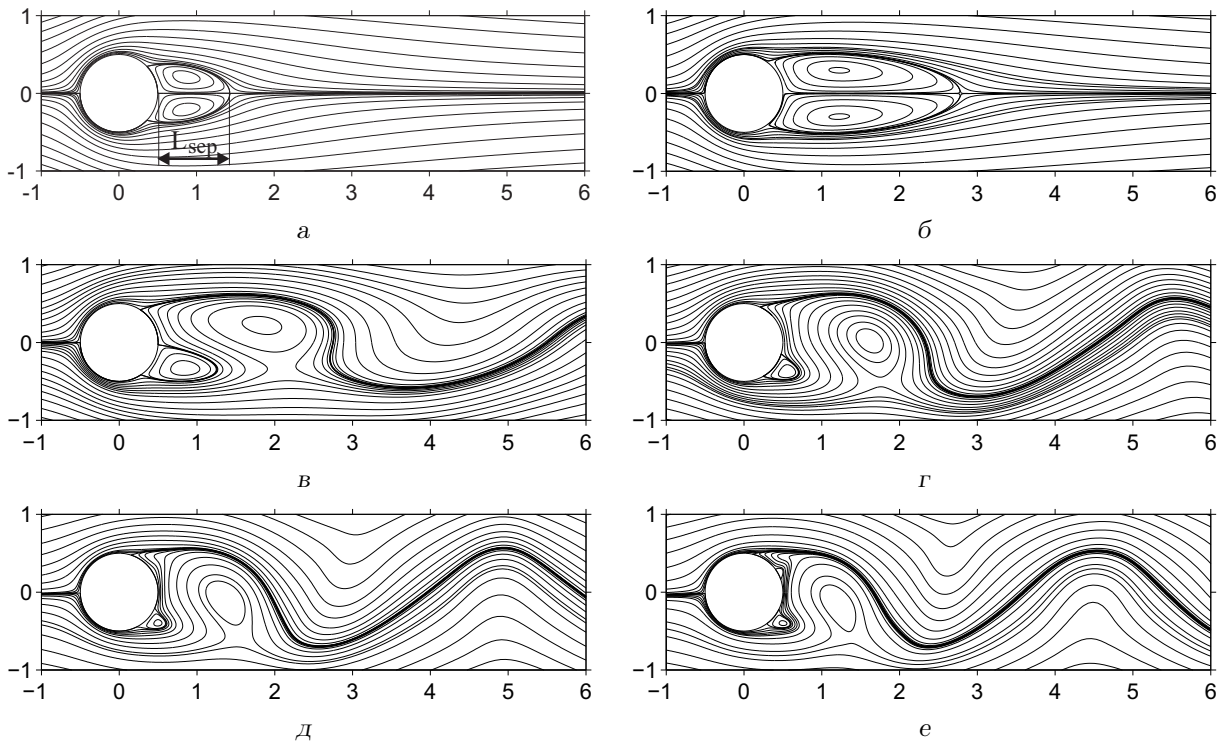


Рис. 1. Мгновенные линии тока:

а – $Re=20$, б – $Re=40$, в – $Re=50$, г – $Re=100$, д – $Re=200$, е – $Re=400$

песса ($Re > 40$) на рисунке изображены мгновенные линии тока в тот момент, когда коэффициент подъемной силы $C_y = 0$ и меняет знак с положительного на отрицательный.

Обтекание цилиндра при закритических числах Рейнольдса ($Re > 40$) становится периодическим по времени, характеризуется отрывом вихрей и их сносом вниз по потоку. На рис. 2 показано течение на протяжении одного периода при $Re=50$. В левой колонке представлено распределение давления p по поверхности цилиндра, а в правой – поле завихренности в четыре момента времени с интервалом в четверть периода¹. Полярная угловая координата отсчитывается от положительного направления оси X , т.е. от кормовой точки цилиндра. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса (рис. 3–5) уменьшается размер отрывающихся вихрей и расстояние между вихрями в следе за цилиндром. Видно, что давление на поверхности цилиндра периодически изменяется во времени, причем распределения давления в мо-

менты времени t_1 и t_2 , отличающиеся на полпериода ($t_2 = t_1 + T/2$), симметричны относительно горизонтальной оси $y=0$. Следует также отметить, что, хотя при $Re=50$ течение в следе за цилиндром будет периодическим, колебания давления на поверхности цилиндра здесь заметны слабо. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса амплитуда осцилляций давления растет, так же как и диапазон перепадов давления, под которыми понимается разница между максимумом и минимумом давления на поверхности цилиндра.

Периодический характер течения в следе приводит к тому, что приложенные к цилиндру силы также периодически изменяются во времени, причем взаимодействие вихрей практически не оказывает влияния на переднюю критическую точку в силу ее удаления от области отрыва вихрей. Это демонстрирует рис. 6, на котором показано изменение во времени коэффициентов лобового сопротивления C_x и подъемной силы C_y соответственно. При этом период изменения лобового сопротивления вдвое меньше, чем период изменения подъемной силы. Иными словами, частота колебания действующей на цилиндр силы в горизонтальном направлении вдвое выше частоты колебания этой силы по вертикали. Это приводит к тому, что ко-

¹В электронной версии статьи, доступной на веб-сайте Института гидромеханики НАН Украины [режим доступа: <http://www.hydromech.kiev.ua>], рис. 2–5 представлены в цвете. Для них красный цвет соответствует положительной завихренности, а синий – отрицательной.

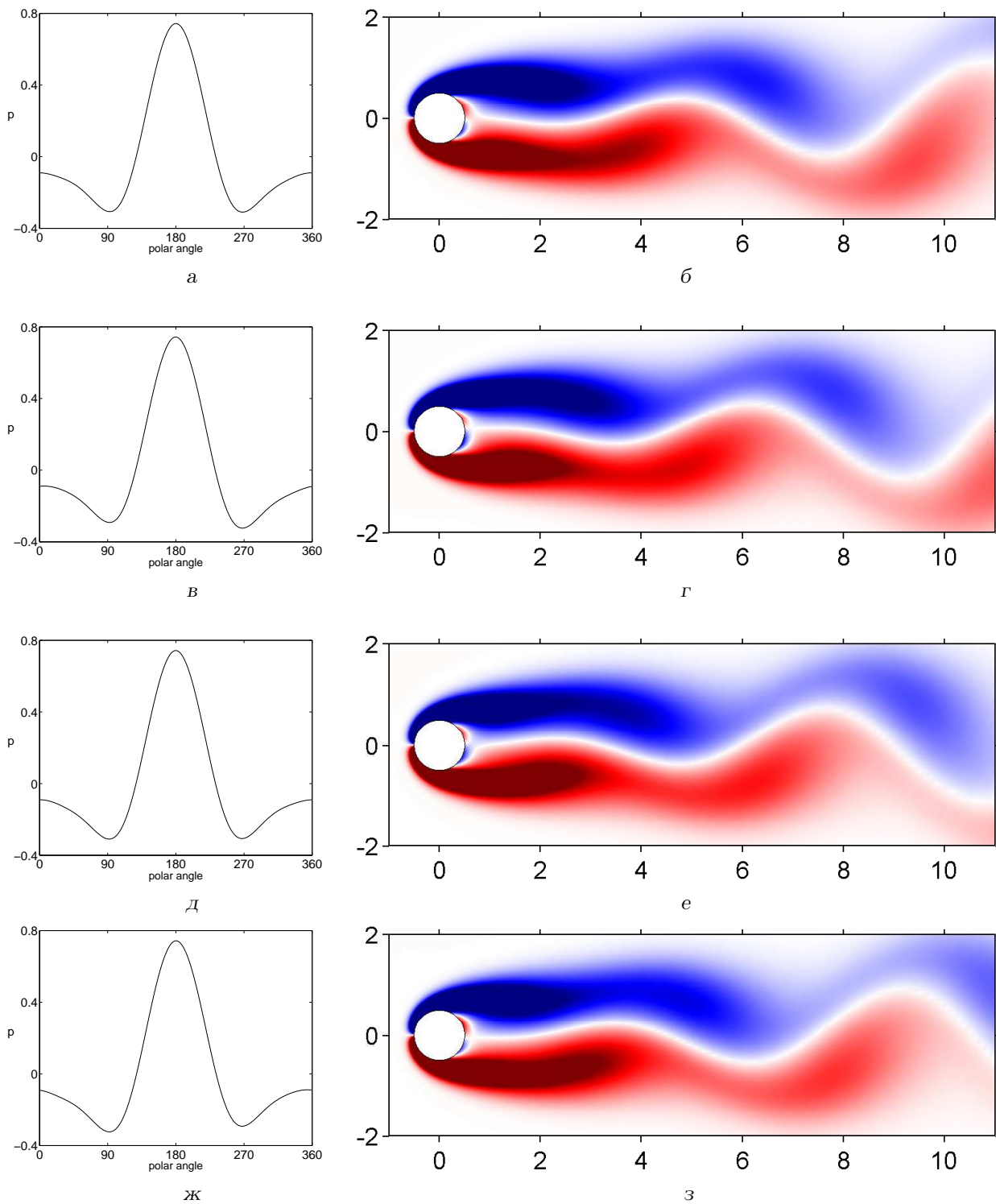


Рис. 2. Течение при $Re=50$ в различные моменты времени
 (в левой колонке – распределение давления на поверхности цилиндра,
 в правой – поле завихренности):
 а, б - $t=0$, в, г - $t=T/4$, д, е - $t=T/2$, ж, з - $t=3T/4$

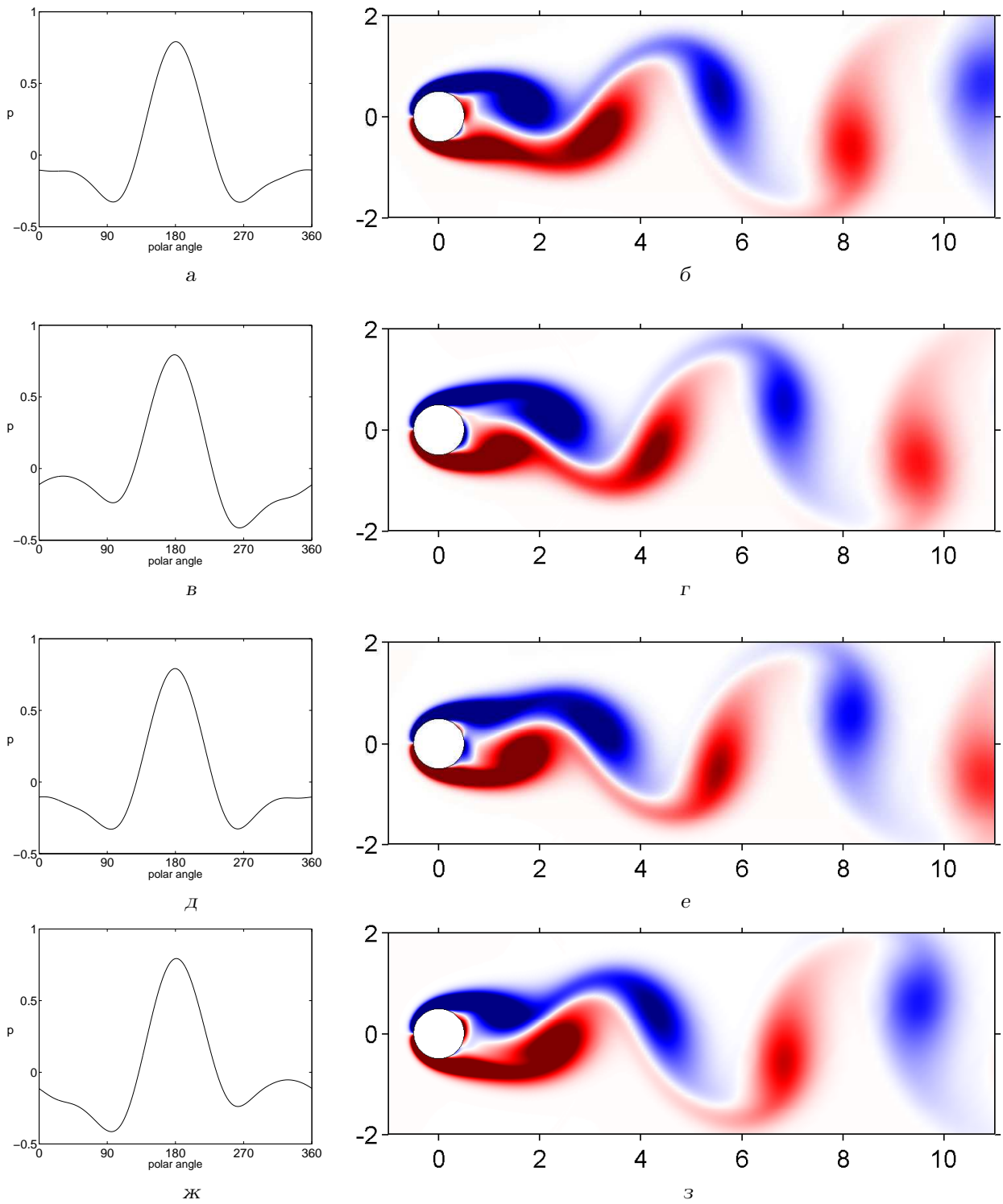


Рис. 3. Течення при $Re=100$ в різні моменти часу (в лівій колонці – розподіл тиску на поверхні циліндра, а в правій – поле завихреності):
 а, б - $t=0$, в, г - $t=T/4$, д, е - $t=T/2$, ж, з - $t=3T/4$

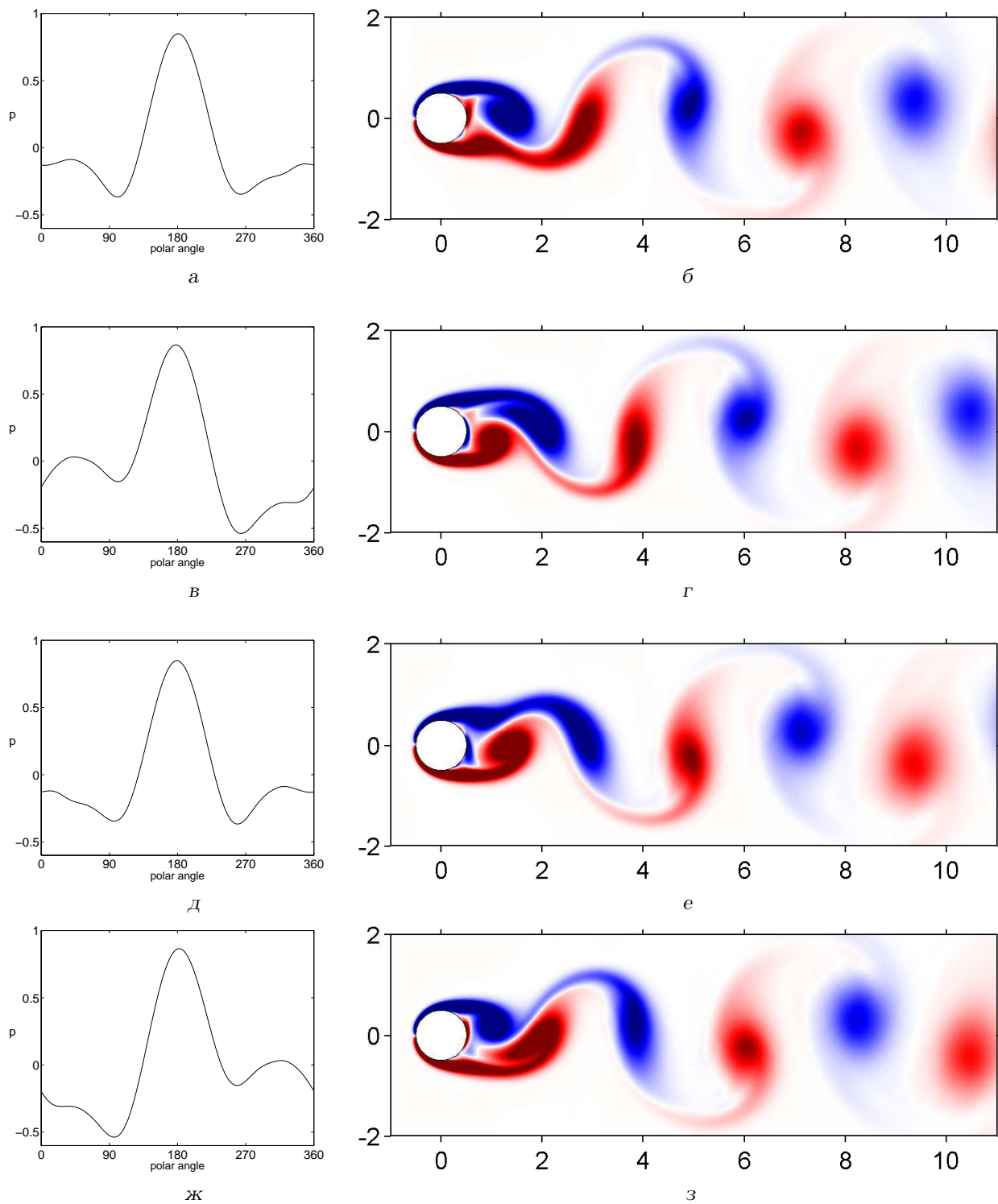


Рис. 4. Течение при $Re=200$ в различные моменты времени
 (в левой колонке – распределение давления на поверхности цилиндра,
 в правой – поле завихренности):
 а, б - $t=0$, в, г - $t=T/4$, д, е - $t=T/2$, ж, з - $t=3T/4$

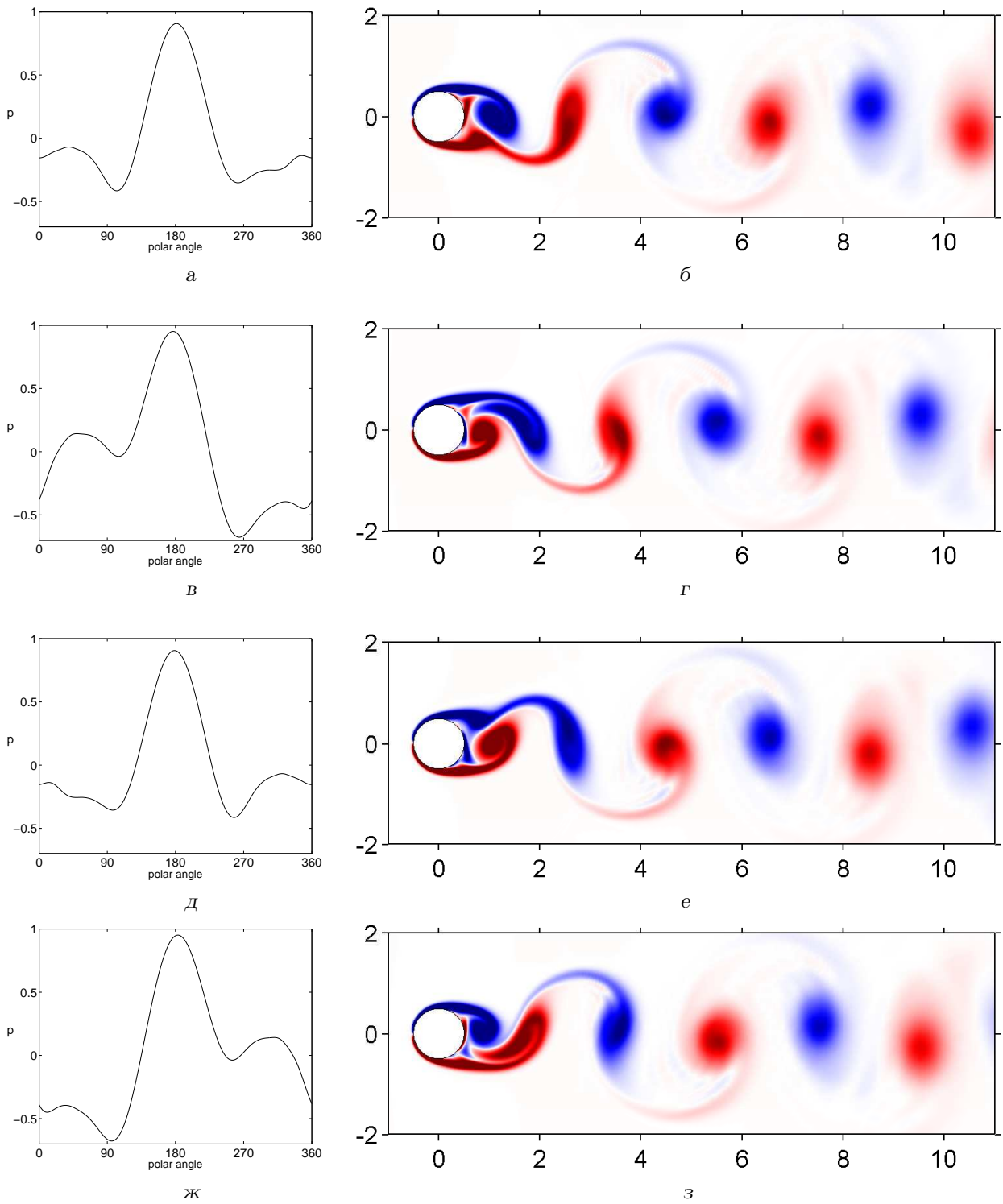


Рис. 5. Течение при $Re=400$ в различные моменты времени
 (в левой колонке – распределение давления на поверхности цилиндра,
 в правой – поле завихренности):
 а, б - $t=0$, в, г - $t=T/4$, д, е - $t=T/2$, ж, з - $t=3T/4$

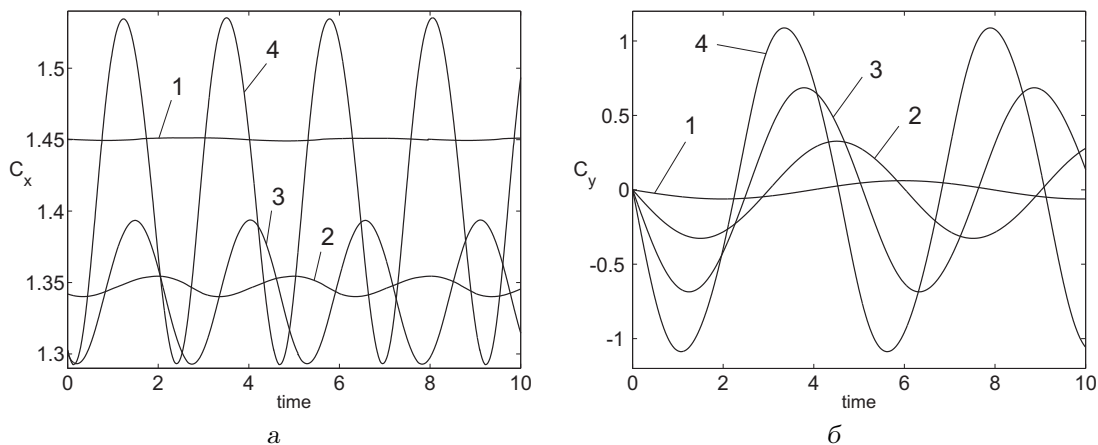


Рис. 6. Периодическое изменение во времени сил, приложенных к цилиндру:
 а – коэффициент лобового сопротивления, б – коэффициент подъемной силы;
 1 – $Re=50$, 2 – $Re=100$, 3 – $Re=200$, 4 – $Re=400$

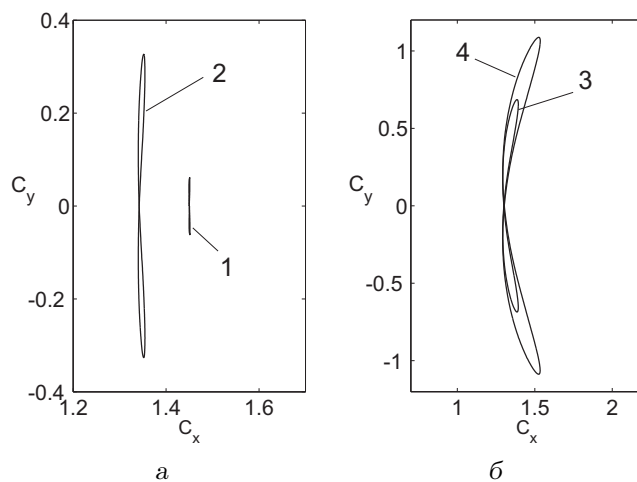


Рис. 7. Конец вектора результирующей силы описывает с течением времени замкнутую линию, похожую на восьмерку:
 1 – $Re=50$, 2 – $Re=100$, 3 – $Re=200$, 4 – $Re=400$

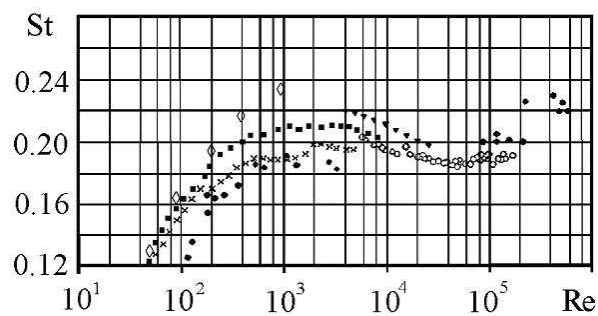


Рис. 8. Зависимость числа Струхалия от числа Рейнольдса.
 Сравнение наших расчетных результатов с экспериментальными данными других исследователей (см. [2, 24]):
 + – Strouhal (1878); Δ – Hiebtone (1919); \bullet – Rolf (1924);
 \square – Roshko (1924); \circ – УТИА (1955); \diamond – расчет для $Re=50, 100, 200, 400, 1000$

нец вектора результирующей силы $\mathbf{R} = C_x \mathbf{i}_x + C_y \mathbf{i}_y$ описывает с течением времени замкнутую кривую, похожую на узкую восьмерку, см. рис. 7. При достаточно больших значениях числа Рейнольдса ($Re=200$ или 400) петли этой восьмерки существенно деформированы и вытянуты в направлении движения потока.

Коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы формально могут быть представлены в виде суммы постоянной и осциллирующей частей:

$$C_x = \bar{C}_x + \tilde{C}_x, \quad C_y = \bar{C}_y + \tilde{C}_y, \quad (7)$$

где \bar{C}_x, \bar{C}_y – постоянные составляющие сил, приложенных к цилиндру (очевидно, что в рассматриваемой задаче $\bar{C}_y=0$); \tilde{C}_x, \tilde{C}_y – их осциллирующие составляющие. В табл. 2 приведены значения постоянной составляющей \bar{C}_x и амплитуды осциллирующих составляющих \tilde{C}_x, \tilde{C}_y , а также их отношение. Видно, что с ростом числа Рейнольдса амплитуда колебаний продольной составляющей \tilde{C}_x растет быстрее, чем амплитуда колебаний поперечной \tilde{C}_y . Однако даже при $Re=400$ величина $\max|\tilde{C}_x|$ остается на порядок меньше, чем $\max|\tilde{C}_y|$. Кроме того, в таблице даны значения числа Струхала $St=d/(VT)$. Прежде всего, отметим хорошее согласование наших результатов с данными, приведенными в работе [21] – для $Re=50, 100$ и 200 различие составляет не более 3 %.

На рис. 8 представлена зависимость числа Струхала от числа Рейнольдса. Для $Re=50, 100$ и 200 отмечается хорошее совпадение расчетных данных с экспериментальными результатами, полученными ранее разными авторами [2, 24], а при $Re=400$ наблюдается некоторое расхождение. Можно предположить, что здесь начинает сказываться турбулизация течения в пограничном слое у поверхности цилиндра, приводящая к сдвигу точки отрыва потока и уменьшению частоты срыва вихрей. Тем не менее, отклонение расчетных результатов от экспериментальных (Roshko, 1924) все еще не превышает 10 %. Следовательно, использование методов прямого численного моделирования на выбранной сетке можно считать приемлемым. При $Re=1000$ расхождение составляет уже порядка 20 %. Действительно, при таких числах Рейнольдса течение будет турбулентным и, следовательно, в этом случае для адекватного описания процесса необходимо применять методы моделирования турбулентности.

Подводя итог, можно сделать следующий вывод. Сравнительный анализ полученных нами расче-

Табл. 2. Безразмерные параметры периодического течения при различных числах Рейнольдса

Re	50	100	200	400
T	7.959	6.018	5.082	4.548
St	0.126	0.166	0.197	0.220
\bar{C}_x	1.450	1.347	1.343	1.414
$\max \tilde{C}_x $	0.001	0.007	0.050	0.121
$\max \tilde{C}_y $	0.062	0.326	0.686	1.088
$ \tilde{C}_x / \tilde{C}_y $	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$2.15 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$

тных гидродинамических параметров с теоретическими и экспериментальными данными других авторов показывает, что в диапазоне $Re \leq 400$ наблюдается достаточно хорошее их согласование. Это дает основание утверждать, что выбранный алгоритм численного решения задачи позволяет адекватно описать исследуемое течение в указанном диапазоне чисел Рейнольдса.

4. ПОСТАНОВКА АКУСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ И ЕЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

При рассмотрении задачи обтекания цилиндра возмущения потока можно условно разделить на две составляющие. Первая – это возмущения поля давления на поверхности цилиндра. Начиная с некоторого порогового значения числа Рейнольдса ($Re \approx 40$), они носят периодический характер и самоорганизуются в некоторую сложную автоколебательную систему, колебания которой и вызывают появление тонального звука [1, 2]. Вторая составляющая – это возмущения, развивающиеся в турбулентном следе за цилиндром и генерирующие широкополосный шум [2, 25]. Механизм возникновения шума принципиально отличается от механизма возникновения тонального звука и связан со специфическими беспорядочными колебаниями и взаимодействием частиц среды в турбулентном следе. Как показано во многочисленных исследованиях (см., например, монографию [25] и обширную библиографию в ней), мощность тонального звука существенно превосходит мощность широкополосного шума. Поэтому мы уделим основное внимание первой составляющей и сконцентрируем внимание на описании процессов генерации и распространения тонального звука. Следуя основным положениям акустической аналогии Лайтхилла [26, 27], а также ее обобщения на случай присутствия границ в потоке, сделанного Керлом [28], мы не будем учитывать обратную ре-

кцию звука на характер потока, распространение звука с переменной скоростью внутри потока (рефракцию звука) и его затухание.

Таким образом, следуя изложенной выше идее, из численного решения соответствующей задачи гидромеханики мы получили распределение давления на поверхности цилиндра, периодически изменяющееся во времени с периодом T . Естественно, что эти пульсации давления на поверхности цилиндра возбуждают звуковые колебания в окружающей среде [2]. При этом, если числа Маха относительно невелики, движением потока можно пренебречь и считать, что звук распространяется так же, как в неподвижной среде. Следует также отметить, что волновой размер источника весьма мал [2].

Звуковое поле вне цилиндра может быть найдено из соответствующей граничной задачи для волнового уравнения [6]. Граничное условие имеет вид

$$p(r, \phi, t) = \zeta(\phi, t), \quad \text{при } r = d/2, \quad (8)$$

где (r, ϕ) – полярные координаты с началом координат в центре цилиндра; $\zeta(\phi, t)$ – создаваемое потоком распределение давления на поверхности цилиндра, известное из представленного в предыдущем разделе численного решения соответствующей задачи гидродинамики.

Поскольку заданная на границе функция $\zeta(\phi, t)$ – периодическая с периодом T , решение сформулированной граничной задачи может быть представлено в виде ряда Фурье по временной координате:

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} p_n(r, \phi), \quad (9)$$

Здесь $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ – угловая частота; $f = StV/d$ – частота эоловых тонов; $p_n(r, \phi)$ – решение соответствующего уравнения Гельмгольца, которое может быть представлено в виде ряда Фурье по угловой координате [6]:

$$p_n = \sum_{m=0}^{\infty} [A_{nm} \cos m\phi + B_{nm} \sin m\phi] H_m^{(1)}(k_n r). \quad (10)$$

В последнем выражении $k_n = n\omega/c$ – волновое число; c – скорость звука в среде; $H_m^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода. Раскладывая правую часть граничного условия (8) в ряды Фурье по временной и угловой координатам и приравнявая коэффициенты при соответствующих членах, опреде-

ляем неизвестные коэффициенты решения (10):

$$\begin{aligned} A_{n0} &= \frac{1}{2\pi T} \int_0^T e^{in\omega t} \int_0^{2\pi} \zeta(\phi, t) d\phi dt, \\ A_{nm} &= \frac{1}{\pi T} \int_0^T e^{in\omega t} \int_0^{2\pi} \zeta(\phi, t) \cos m\phi d\phi dt, \\ B_{nm} &= \frac{1}{\pi T} \int_0^T e^{in\omega t} \int_0^{2\pi} \zeta(\phi, t) \sin m\phi d\phi dt. \end{aligned} \quad (11)$$

5. РАСЧЕТ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ

В предыдущих разделах расчет течения проводился для безразмерных величин. Для расчета же звукового поля необходимо перейти к размерным параметрам. Характеристики среды выбираем такими, как для воздуха при температуре 20°C : $\rho = 1.204 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 1.51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $c = 332 \text{ м/с}$. Диаметр цилиндра примем $d = 1 \text{ см}$. Напомним, что масштабные множители для скорости, времени и давления составляют V , d/V и ρV^2 соответственно. При этом скорость невозмущенного потока определяется из заданного значения числа Рейнольдса: $V = \text{Re} \nu / d$.

Размерные характеристики периодического течения и звука представлены в табл. 3. Из нее очевидно, что положенные в основу нашей модели гипотезы подтверждаются расчетами. В частности, число Маха и волновой размер цилиндра имеют порядок 10^{-4} . Это дает возможность считать эти параметры малыми и оправдывает допущение о том, что звук распространяется в таком потоке так же, как в неподвижной среде. Кроме того, малость числа Маха и волнового размера источника подтверждает правильность рассмотрения гидродинамической задачи в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости. Отношение полной акустической мощности эолового тона к мощности набегающего на цилиндр потока (иными словами, КПД излучателя), имеет порядок 10^{-8} , а интенсивность излучаемого звука (его сила) – от 10^{-14} до 10^{-12} . Это говорит о справедливости заложенных в основу модели основных положений акустической аналогии Лайтхилла о том, что обратным влиянием звука на характеристики потока среды можно пренебречь [26–28].

Следует отметить, что приближенная формула Филлипса (3) для вычисления амплитуды колебания подъемной силы $\max |\tilde{F}_y| \sim V^2$ не подтверждается при малых числах Рейнольдса и лишь при $\text{Re} = 400$ дает приемлемый результат. В то же вре-

Табл. 3. Размерные параметры периодического течения и звука

Re	50	100	200	400	Примечание
$V, \text{ м/с}$	0.0755	0.151	0.302	0.604	заданная скорость потока
M	$2.28 \cdot 10^{-4}$	$4.55 \cdot 10^{-4}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$18.2 \cdot 10^{-4}$	число Маха
$f, \text{ Гц}$	0.949	2.51	5.94	13.28	$f = VSt/d$
$\frac{d}{\lambda} = \frac{df}{c}$	$0.286 \cdot 10^{-4}$	$0.75 \cdot 10^{-4}$	$1.78 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	волновой размер источника звука
$\max \tilde{F}_y , \text{ Н}$	$0.02 \cdot 10^{-4}$	$0.437 \cdot 10^{-4}$	$3.66 \cdot 10^{-4}$	$23.6 \cdot 10^{-4}$	по нашим расчетным данным
$\max \tilde{F}_y , \text{ Н}$	$0.34 \cdot 10^{-4}$	$1.35 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$	$21.5 \cdot 10^{-4}$	по Филлипсу [4]: $\max \tilde{F}_y \sim V^2$
$\max p , \text{ Па}$	$1.128 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-6}$	$13.8 \cdot 10^{-6}$	$22.5 \cdot 10^{-6}$	давление на оси диаграммы направленности
$I = \frac{\max p^2}{\rho c}, \frac{\text{кг}}{\text{с}^3}$	$0.32 \cdot 10^{-14}$	$0.1 \cdot 10^{-12}$	$0.475 \cdot 10^{-12}$	$1.26 \cdot 10^{-12}$	интенсивность звука (сила звука), Вт/м ²
I	$0.3 \cdot 10^{-16}$	$0.2 \cdot 10^{-14}$	$0.12 \cdot 10^{-12}$	$7.7 \cdot 10^{-12}$	по Филлипсу [4] при $\beta = 2$
$W_{\text{ак}} = IS, \text{ Вт}$	$1.0 \cdot 10^{-14}$	$0.312 \cdot 10^{-12}$	$1.5 \cdot 10^{-12}$	$3.98 \cdot 10^{-12}$	полная акустическая мощность эолового тона
$W_{\text{гд}}, \text{ Вт}$	$0.259 \cdot 10^{-5}$	$2.07 \cdot 10^{-5}$	$16.6 \cdot 10^{-5}$	$133 \cdot 10^{-5}$	мощность потока, набегающего на цилиндр
$\frac{W_{\text{ак}}}{W_{\text{гд}}}$	$0.38 \cdot 10^{-8}$	$1.51 \cdot 10^{-8}$	$0.9 \cdot 10^{-8}$	$0.3 \cdot 10^{-8}$	КПД

 Табл. 4. Приближенные значения показателя степени q в предположении, что $\max |\tilde{F}_y| \sim V^q$

Re	q
50...100	4.35
100...200	3.1
200...400	2.7

Табл. 5. Амплитуды первых двух гармоник эолового звука

Re	$\max p_1 $	$\max p_2 $
50	$1.128 \cdot 10^{-6}$	$1.78 \cdot 10^{-8}$
100	$6.3 \cdot 10^{-6}$	$1.46 \cdot 10^{-7}$
200	$1.377 \cdot 10^{-5}$	$1.04 \cdot 10^{-6}$
400	$2.25 \cdot 10^{-5}$	$2.57 \cdot 10^{-6}$

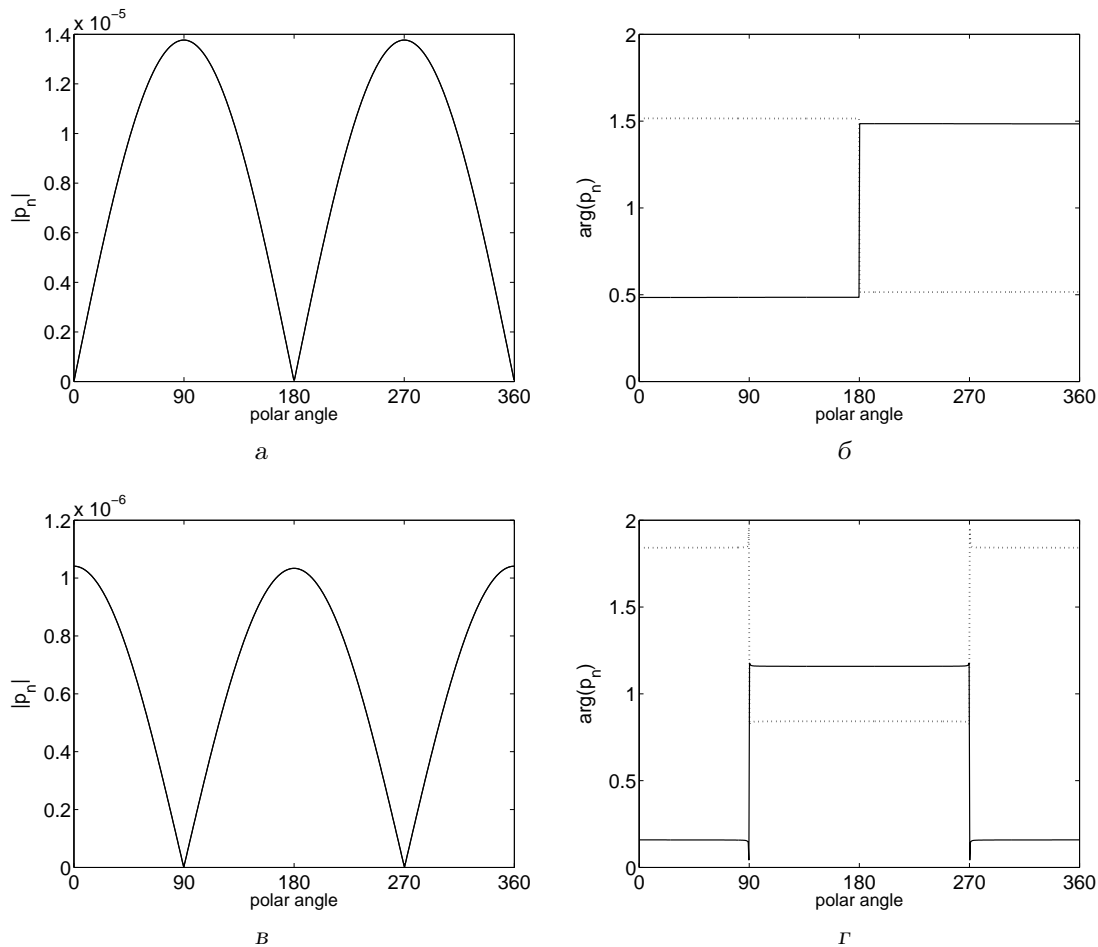


Рис. 9. Модули и фазы первых двух гармоник давления p_n на расстоянии 1 м от центра цилиндра ($Re=200$):
 а - $|p_n|$ при $n=\pm 1$, б - $\arg(p_n)$ при $n=\pm 1$, в - $|p_n|$ при $n=\pm 2$, г - $\arg(p_n)$ при $n=\pm 2$;
 б, г - сплошные - $n=1, 2$, штриховые - $n=-1, -2$ (единица по вертикальной оси соответствует π рад)

мя, при $Re=50$ она дает значения, отличающиеся от расчетных более чем на порядок. Вообще же видно, что при приближенном представлении амплитуды пульсирующей подъемной силы в виде степенной функции от скорости набегающего потока $\max|\tilde{F}_y| \sim V^q$ показатель степени зависит от числа Рейнольдса, причем q принимает значения, близкие к 2 лишь при достаточно больших Re (см. табл. 4). Аналогичный вывод можно сделать и по отношению к приближенной формуле для вычисления интенсивности звука в виде шестой степени скорости набегающего потока $I \sim V^6$, также предложенной Филлипсом. Она тоже дает неточные результаты, особенно при небольших числах Рейнольдса. Если же представить интенсивность звука в виде степенной функции от скорости потока, $I \sim V^s$, то показатель степени также будет функцией числа Рейнольдса.

Поле звукового давления, порождаемое периодическим срывом вихрей с поверхности цилиндра, описывается решением (9)–(11). На рис. 9 представлены модуль и фаза первых двух гармоник акустического давления p_1 и p_2 на расстоянии 1 м от центра цилиндра для случая $Re=200$. Из графика видно, что первая гармоника p_1 , имеющая период T , представляет собой колебания в вертикальном направлении. Вторая гармоника p_2 , имеющая период $T/2$, соответствует колебаниям в горизонтальном направлении. Такой результат представляется вполне естественным, если принять во внимание, что период колебания лобового сопротивления равен $T/2$, а период колебания подъемной силы – T (см. рис. 6). Следует также отметить, что фаза колебаний имеет антисимметричный характер относительно горизонтальной оси для p_1 (это связано с тем, что отрыв вихрей происходит

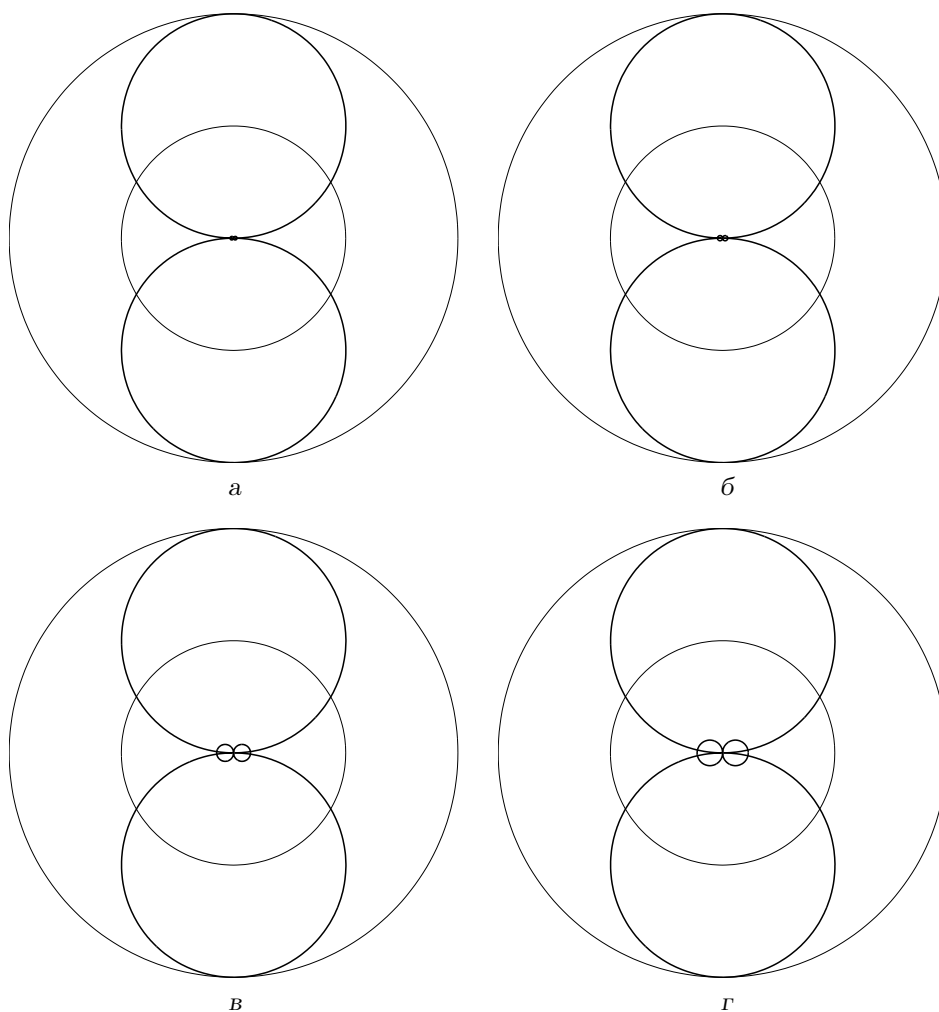


Рис. 10. Нормированная диаграмма направленности эоловых тонов, возникающих за счет осцилляций подъемной силы и силы сопротивления:
 а – $Re=50$, б – $Re=100$, в – $Re=200$, г – $Re=400$

не одновременно, а поочередно) и, наоборот, симметричный в случае p_2 .

В силу изложенного автоколебательный процесс, возникающий при обтекании цилиндра потоком, является акустическим источником дипольного типа. Для первой гармоники p_1 акустическая ось источника перпендикулярна направлению потока, а для второй p_2 – направлена вдоль потока. На рис. 10 изображена нормированная диаграмма направленности порождаемого потоком эолового звука. Ее характер полностью согласуется с экспериментальной диаграммой направленности, представленной в [29], а также подтверждаются результатами, полученными позже другими авторами [3, 30, 31]. Следует отметить, что с ростом числа Рейнольдса вклад гармоники p_2 , вызванной осцилляцией силы лобового сопротивления, возрастает.

В табл. 5 представлены амплитуды p_1 и p_2 для четырех значений числа Рейнольдса. Видно, что если при $Re=50$ отношение p_1/p_2 составляет 63.37, то при $Re=400$ – лишь 8.75.

Вернемся к выражению (10) и обратим внимание на тот факт, что сумма в нем, по сути, содержит бесконечный набор акустических источников различных типов – диполь ($m=1$), квадруполь ($m=2$), а также мультиполи более высоких порядков². Это позволяет, во-первых, определить, какие типы источников порождает набегающий на цилиндр поток, а, во-вторых, оценить вклад каждого источника в общее звуковое поле. В результате

²Источник монопольного типа ($m=0$) в нашем случае отсутствует, поскольку цилиндр принят абсолютно жестким и его поверхность не может совершать пульсирующие колебания под воздействием сил, создаваемых потоком

соответствующих расчетов выяснено, что доминирующим является источник дипольного типа. Например, при $Re=100$ давление, создаваемое источником квадрупольного типа, примерно на два порядка меньше, чем для дипольного. В свою очередь, вклады мультипольных источников высшего порядка на три порядка меньше вклада квадрупольного источника. Это также хорошо согласуется с данными, полученными другими авторами.

В заключение хотелось бы отметить следующее. В работах [1, 2] при анализе локальных особенностей обтекающего цилиндра потока утверждается, что в течение одного периода автоколебаний кормовых вихрей рост объема большего вихря происходит за счет перекачки (отсоса) среды, заключенной в меньшем вихре. Такой отсос обусловлен тем, что давление внутри большего вихря ниже, чем внутри меньшего. Сам факт понижения давления внутри вихря по сравнению с давлением в окружающей его среде хорошо известен [32]. Поскольку прямых доказательств справедливости этого утверждения в [2] не было приведено, мы провели численные оценки уровней давления внутри обоих вихрей в различные моменты времени в течение одного периода автоколебаний. Их анализ полностью подтвердил справедливость высказанного в [2] утверждения как по отношению к самому процессу перекачки среды от малого вихря к большому, так и относительно его физической причины – разнице давлений между внутренними областями большого и малого вихрей.

ВЫВОДЫ

Предложен двухэтапный метод, позволяющий оценить акустические характеристики эоловых тонов, возникающих при обтекании цилиндра потоком.

На первом этапе на основе численного решения уравнений Навье–Стокса методом конечных объемов получены основные гидродинамические характеристики (в том числе, коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы C_x и C_y) и установлено явление колебаний во времени приложенных к цилиндру сил. Описан процесс периодического изменения распределения давления на поверхности цилиндра. Получены значения числа Струхала St при различных значениях числа Рейнольдса Re . Проведено сравнение этих данных с теоретическими и экспериментальными результатами, полученными другими авторами. Установлено, что выбранный нами алгоритм численного решения задачи позволяет адекватно описать исследуемое течение в диапазоне $50 \leq Re \leq 400$, где

реализуется режим с периодическим отрывом вихрей за цилиндром.

Обнаружено, что приближенная формула Филлипса (3), согласно которой амплитуда колебания подъемной силы зависит от квадрата скорости набегающего потока, дает результаты с приемлемой точностью лишь при достаточно больших значениях числа Рейнольдса. Нами предложена более корректная приближенная формула, согласно которой амплитуда колебания подъемной силы зависит не от квадрата, а от некоторой дробной степени скорости набегающего потока ($\max |\tilde{F}_y| \sim V^q$). При этом показатель степени q зависит от числа Рейнольдса. С его ростом в диапазоне $50 \leq Re \leq 400$ величина q убывает примерно от 4.35 до 2.7.

На втором этапе с использованием данных о распределении давления на поверхности цилиндра в качестве граничного условия решена задача об излучении звука потоком, набегающим на цилиндр. Данные численных расчетов подтвердили правильность сделанных предположений. В частности, показано, что полная акустическая мощность эолового тона на восемь порядков меньше мощности набегающего потока. Обнаружено, что приближенная формула Филлипса для вычисления интенсивности звука как функции шестой степени скорости потока дает неточные результаты, особенно при небольших Re . Показано, что более корректно было бы приближенно оценивать интенсивность как степенную функцию от скорости потока $I \sim V^s$, где показатель степени s существенно зависит от числа Рейнольдса.

Получены пространственные распределения звукового поля (диаграммы направленности) при различных Re . Показано, что ось диаграммы направленности эолового тона p_1 , возбуждаемого колебаниями подъемной силы, расположена перпендикулярно потоку, а ось диаграммы направленности тона p_2 , возбуждаемого колебаниями силы лобового сопротивления, совпадает с направлением потока. Установлено, что $p_2/p_1 \ll 1$, однако с ростом числа Рейнольдса это отношение заметно возрастает.

1. Вовк И. В. Физический взгляд на природу эоловых тонов // Акуст. вісн.– 2007.– 10, № 2.– С. 22–32.
2. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Звук, рожденный потоком.– К.: Наук. думка, 2010.– 221 с.
3. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды.– М.: Наука, 1981.– 206 с.
4. Phillips O. M. The intensity of Aeolian tones // J. Fluid Mech.– 1956.– 1, Pt. 6.– P. 607–624.
5. Голдстейн М. Е. Аэроакустика.– М.: Машиностроение, 1981.– 294 с.

6. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука.– М.: Изд-во МГУ, 1960.– 335 с.
7. Малюга В. С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения // Прикл. гідромех.– 2010.– **12**, № 4.– С. 45–62.
8. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами // Прикл. гідромех.– 2009.– **11**, № 4.– С. 17–30.
9. Вовк И. В., Малюга В. С. Численное моделирование течения в канале с двумя последовательными сужениями (стенозами) // Доп. НАН України.– 2010.– № 4.– С. 53–58.
10. Ferziger J. H., Perić M. Computational methods for fluid dynamics.– Berlin: Springer, 2002.– 424 p.
11. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.– М.: Энергоатомиздат, 1984.– 152 с.
12. Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows.– Oxford: Butterworth-Heinemann, 2007.– 656 p.
13. Versteeg H. K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method.– New York: Longman, 1995.– 258 p.
14. OpenFOAM: open source CFD [электронный ресурс]. Режим доступа к сайту: <http://www.openfoam.co.uk/openfoam/>
15. Weller H. G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques // Comp. Phys.– 1998.– **12**.– P. 620–631.
16. Waterson N. P., Deconinck H. Design principles for bounded higher-order convection schemes – a unified approach // J. Comp. Phys.– 2007.– **224**.– P. 182–207.
17. Chakravarthy S.R., Osher S. High resolution application of the Osher upwind scheme for the Euler equation // Proc. AIAA Comp. Fluid Dyn. Conf.– Danvers, MA, 1983.– P. 363–372 [также доступно в AIAA Pap. 83-1943, 1983].
18. Jasak H. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows (PhD Thesis).– London: Imperial College, 1996.– 394 p.
19. Issa R. I. Solution of implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // J. Comp. Phys.– 1986.– **62**.– P. 40–65.
20. Barrett R., Berry M., Chan T. F., et al. Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods.– Philadelphia: SIAM, 1994.– 107 p.
21. Приходько А.А., Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье–Стокса // Прикл. гідромех.– 2005.– **7**, № 1.– С. 56–71.
22. Taneda S. Visualization of Separating Stokes Flows // J. Phys. Soc. Japan.– 1979.– **46**.– P. 1935–1942.
23. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа.– М.: Мир, 1986.– 184 с.
24. Etkin B., Korbacher G., Keefe R. Acoustic radiation from a stationary cylinder in a fluid stream (Aeolian tones) // J. Acoust. Soc. Amer.– 1957.– **29**.– P. 30–36.
25. Смольяков А. В. Шум турбулентных потоков.– СПб.: Изд-во ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 2005.– 312 с.
26. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. Roy. Soc.– 1952.– **211**.– P. 564–587.
27. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // Proc. Roy. Soc.– 1954.– **221**.– P. 1–32.
28. Curle N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // Proc. Roy. Soc.– 1955.– **231**.– P. 318–334.
29. Stowell E. Z., Doming A. F. Vertex noise from rotating cylindrical rods // J. Acoust. Soc. Amer.– 1936.– **7**.– P. 190–198.
30. Ричардсон Э. Динамика реальных жидкостей.– М.: Мир, 1965.– 328 с.
31. Харкевич А. А. Автоколебания.– М.: ГИТТЛ, 1954.– 170 с.
32. Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К. Математические модели сплошной среды.– К.: Наук. думка, 2010.– 551 с.