

УДК 534.22

ПОШИРЕННЯ ПУЛЬСОВИХ ХВИЛЬ У ВЕЛИКИХ КРОВОНОСНИХ СУДИНАХ З ДОВІЛЬНОЮ ТОВЩИНОЮ СТІНКИ

Д. В. ЛУКОМСЬКИЙ

Національний медичний університет ім. О. О. Богомольця, Київ

Одержано 10.09.2008

Представлені рівняння руху порожнистого пружно-деформівного циліндра скінченної товщини, заповненого нестиислою нев'язкою рідиною. Розглянуто випадок осесиметричних деформацій при поширенні пульсових хвиль тиску в кровеносній судині. Рух циліндра описується лінійною теорією пружності, а рух рідини – потенціальною теорією. Розмірність задачі понижено за рахунок розкладу пружного поля в степеневі ряди. Аналітично отримано закон дисперсії в довільному наближенні. Уточнено значення швидкості поширення пульсових хвиль Моенса – Кортевега.

Представлены уравнения движения полого упруго-деформируемого цилиндра конечной толщины, заполненного несжимаемой невязкой жидкостью. Рассмотрен случай осесимметричных деформаций при распространении пульсовых волн давления в кровеносном сосуде. Движение цилиндра описывается линейной теорией упругости, а движение жидкости – потенциальной теорией. Размерность задачи понижена за счет разложения упругого поля в степенные ряды. Аналитически получен закон дисперсии в произвольном приближении. Уточнено значение скорости распространения пульсовых волн Моенса – Кортевега.

The paper presents the motion equations for a hollow elastically deformed cylinder of finite thickness filled with an incompressible inviscid fluid. We consider the case of axisymmetric deformations at pressure pulse wave propagation in the blood vessel. The cylinder's motion is described by the linear theory of elasticity and fluid motion – by the potential theory. The problem dimensions have been deflated through the power series expansion of the elastic field. The dispersion law in the arbitrary approximation has been analytically obtained. Quantitative estimation of the Moens – Korteweg wave propagation velocity has been improved.

ВСТУП

Відомо, що характерна особливість руху крові у великих кровеносних судинах полягає у порівняно слабкому впливі реологічних властивостей рідини разом з дуже сильним впливом механічних властивостей стінок [1–3]. Проте, зазвичай навіть для товстостінних судин за основу береться теорія оболонок, одержана з використанням гіпотези Кірхгофа – Лява [4, 5]. Епштейн у 1942 році застосував для виведення уточнених рівнянь динаміки циліндричної оболонки метод степеневих рядів [6]. У 1953 році ці дослідження були продовжені Кеннардом [7]. Техніку побудови гіперболічної системи рівнянь динаміки циліндричної оболонки на основі методу степеневих рядів у першій половині 1960-х розвинув Селезов [8]. Тоді ж на основі цих рівнянь було досліджено дисперсію хвиль [9, 10] і задачу про гідравлічний удар [11]. Аналіз точного розв'язку з урахуванням скінченної товщини стінки проведено Грінченком і Комісаровою в 1984 році [12].

У цьому дослідженні замість гіпотези Кірхгофа – Лява використовується розклад по степенях радіальної змінної, що дозволяє отримати в аналітичному вигляді закон дисперсії з довільною точністю навіть для товстостінних судин. При цьому

кров розглядається як ідеальна нестислива рідина, а матеріал стінки циліндричної судини – як ізотропне гіперпружне тіло.

1. РІВНЯННЯ РУХУ ІЗОТРОПНОГО ПРУЖНОГО КОНТИНУУМУ В ЛІНІЙНОМУ НАБЛИЖЕННІ ПРИ МАЛИХ ДЕФОРМАЦІЯХ

Розглянемо гіперпружне ізотропне циліндричне тіло нескінченної довжини, яке деформується з часом під впливом певних зовнішніх напружень за відсутності об'ємних сил. Обмежимося розглядом осесиметричної задачі, в якій у початковий момент часу $t=0$ кожна фізично мала частинка тіла описується лагранжевими циліндричними координатами r та z . Тоді все тіло займає область $R < r < R+d$, $-\infty < z < +\infty$ (рис. 1). У момент часу t зміщення кожної частинки описуватиметься вектором деформації $\vec{u}(r, z, t) = \{u_1(r, z, t), u_3(r, z, t)\}$, де u_1 та u_3 – компоненти зміщення по осях r та z відповідно.

Вважаючи u_1 та u_3 малими порівняно з внутрішнім радіусом циліндра, за міру деформацій приймемо лінійну частину симетричного тензора деформацій Коші – Гріна:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

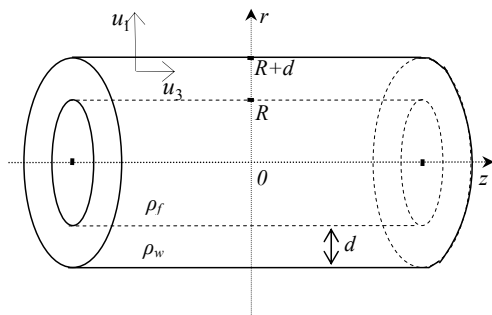


Рис. 1. Схема гіперпружного твердого тіла з рідиною у початковий момент часу

де індекс “1” відповідає координаті r , “2” – φ , а “3” – z . У випадку осесиметричної задачі тензор (1) має лише такі ненульові компоненти [13]:

$$u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad u_{22} = \frac{u_1}{r}, \quad u_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z},$$

$$u_{13} = u_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Система рівнянь лінійної теорії пружності у циліндричній системі координат для випадку осесиметричних деформацій для радіальних u_1 та осьових u_3 зміщень має вигляд

$$-\rho_w \ddot{u}_k + \frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{3k}}{\partial z} + \frac{1}{r} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})\delta_{1k} + \sigma_{13}\delta_{3k}] = 0, \quad (3)$$

$$k = 1, 3,$$

де вирази

$$\sigma_{ik} = \lambda(u_{11} + u_{22} + u_{33})\delta_{ik} + 2\mu u_{ik} \quad (4)$$

задають компоненти тензора напружень у твердому тілі; ρ_w – густина матеріалу; δ_{ik} – символ Кронекера; λ й μ – коефіцієнти Ламе матеріалу.

2. РІВНЯННЯ РУХУ РІДИНИ ВСЕРЕДИНІ ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА

У циліндричній системі координат поле швидкостей $\vec{v} = \nabla \varphi_f$ потенціальної осесиметричної течії нестисливої рідини задовольняє рівняння Лапласа $\Delta \varphi_f = 0$. В області течії $0 < r < R$ відомий його точний (і регулярний при $r=0$) розв’язок у вигляді пульсової хвилі:

$$\varphi_f(r, z, t) = \varphi(r) e^{i(kz - \omega t)} = DI_0(kr) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (5)$$

Тут D – довільна константа; $I_0(kr)$ – модифікована функція Бесселя нульового порядку.

Отже, тиск на стінку судини визначається інтегралом Бернуллі [14]:

$$P = P_{tr} - P_f(r, z, t) = P_{tr} - \left[\frac{\rho_f}{2} + v_0^2 + 2 \left(\frac{\partial \varphi_f}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \varphi_f}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_f}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_f}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (6)$$

де P_{tr} – трансмуральний тиск; P_f – тиск у рухомій рідині; v_0 – швидкість стаціонарної течії; ρ_f – густина рідини.

У лінійному наближенні за відсутності стаціонарної течії ($v_0=0$) та початкового напруження ($P_{tr}=0$) тиск (6) матиме вигляд

$$P = -\rho_f \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (7)$$

3. ГРАНИЧНІ УМОВИ КОНТАКТУ РІДИНИ Й ПРУЖНОГО ТІЛА

Загалом рівняння руху твердого тіла задаються в лагранжевих координатах, а рідини – у ейлерових, що спричиняє складність запису граничних умов на рухомій поверхні контакту. Проте, внаслідок малості зміщень твердого тіла u_1 і u_3 ці умови можуть бути поставлені на незбурених внутрішній ($r=R$) та зовнішній ($r=R+d$) поверхнях.

На зовнішній поверхні припускається відсутність напружень (немає рідини):

$$\sigma_{11}(R+d, z, t) = \sigma_{13}(R+d, z, t) = 0. \quad (8)$$

За відсутності стаціонарної течії динамічні й кінематичні умови на внутрішній поверхні $r=R$, де має місце контакт рідини та тіла стінки, мають вигляд

$$\sigma_{11}(r, z, t) = -P_f = \rho_f \frac{\partial \varphi_f}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\sigma_{13}(r, z, t) = 0;$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial \varphi_f}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (10)$$

Урахування виразу (5) і аналогічного вигляду для зміщень

$$u_1(r, z, t) = u_1(r) e^{i(kz - \omega t)}$$

дозволяє замість п’яти записати чотири граничні умови:

$$\sigma_{11}(R) + m_0 \rho_w R^2 \omega^2 u_1(R) = 0, \quad (11)$$

$$\sigma_{13}(R) = \sigma_{11}(R+d) = \sigma_{13}(R+d) = 0,$$

де $m_0 = \frac{\rho_f}{\rho_w} \frac{1}{kR} \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}$ – приєднана безрозмірна маса.

4. РОЗВ'ЯЗОК МЕТОДОМ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Розкладемо вектор зміщень у ряд по степенях змінної r в околі внутрішньої стінки $r = R$:

$$u_k(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_k)_n(z, t)(r - R)^n, \quad (12)$$

$$k = 1, 3, \quad R < r < R + d.$$

Підставляючи аналогічні розклади для тензорів u_{ik} та σ_{ik} (співвідношення (2) і (4)) в систему рівнянь (3), отримуємо рекурентні співвідношення для послідовного обчислення коефіцієнтів $(u_k)_n(z, t)$ розкладу (12) для $n = 2, 3, \dots$

Наприклад, у лінійній теорії для випадку гармонічної залежності від змінних z, t ($u_k \sim e^{i(kz - \omega t)}$) диференціальні рівняння (3) відносно змінної r перетворюються на алгебраїчні співвідношення для послідовного знаходження коефіцієнтів $(u_1)_{n+2}$ і $(u_3)_{n+2}$ при усіх $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} (n+2)(u_1)_{n+2} &= \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^{n+m} (u_1)_m + \\ &+ \frac{R^2}{n+1} \frac{c_T^2 k^2 - \omega^2}{c_L^2} (u_1)_n - ikR \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (u_3)_{n+1}, \\ (n+1)(n+2)(u_3)_{n+2} &= \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{n+m} m (u_3)_m + \\ &+ R^2 \frac{c_L^2 k^2 - \omega^2}{c_T^2} (u_3)_n - ikR \frac{\lambda + \mu}{\mu} \times \\ &\times \left(\sum_{m=0}^n (-1)^{n+m} (u_1)_m + (n+1)(u_1)_{n+1} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Тут $c_T = \sqrt{\mu/\rho_w}$; $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_w}$ – швидкості поширення поперечної та поздовжньої звукових хвиль у гіперпружному ізотропному середовищі відповідно.

Очевидно, що всі подальші коефіцієнти розкладу виражаються через чотири перших $(u_1)_0, (u_1)_1, (u_3)_0, (u_3)_1$, які можна знайти з чотирьох граничних умов (11), підставивши у них розклади σ_{11}, σ_{13} і u_1 по r . Отримана система чотирьох однорідних рівнянь має нетривіальний розв'язок за умови рівності детермінанта нулю. Підставивши останню в розклад частоти ω відносно малої від-

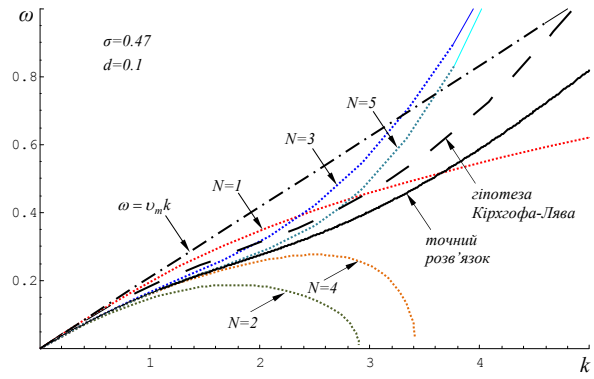


Рис. 2. Закон дисперсії, отриманий методом розкладу в степеневі ряди, у порівнянні з точним розв'язком та розв'язком теорії оболонок

носної товщини d/R ,

$$\omega^2 = \sum_{n=1}^N r_n(k) \left(\frac{d}{R} \right)^n, \quad (14)$$

можна знайти закон дисперсії $\omega = \omega(k)$ в аналітичному вигляді з довільною точністю N .

З рис. 2 видно, що зі зростанням кількості членів N розкладу (12) закон дисперсії наближається до закону, отриманого з точного розв'язку чисельними методами [12]. Це підтверджує адекватність запропонованої методики. Штриховою позначена частотна крива, отримана з використанням теорії оболонок на основі гіпотези Кірхгофа-Лява [4]. Очевидно, що вона дає завищені значення частоти у порівнянні з точним розв'язком. Отже, урахування скінченної товщини стінки знижує оцінку частоти її згинних коливань.

Наведемо явний вигляд $r_1(k)$ і $r_2(k)$ з розкладу (14):

$$\begin{aligned} r_1(k) &= \frac{E}{\rho_f R} \frac{I_1(kR)}{I_0(kR)} k > 0, \\ r_2(k) &= -\frac{E\rho_w}{2\rho_f^2 R^2} \frac{I_1^2(kR)}{I_0^2(kR)} \left[\frac{\lambda^2}{2(\lambda + \mu)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\rho_f}{\rho_w} \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} \frac{2\lambda + \mu}{\lambda + \mu} kR + 2(kR)^2 \right] < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут E – модуль Юнга твердого тіла.

Якщо розклад (14) проводити не лише за степенями малої товщини стінки d/R , а ще й у довгохвильовому наближенні (за малими kR) то, утримуючи доданки до певного порядку, можна одержати поправки до частоти з довільною точністю. Розглянемо деякі варіанти такого комбінованого розкладу.

$N = 1$, включно до kR :

$$\omega = v_m k,$$

де $v_m = \sqrt{Ed/(2\rho_f R)}$ – відома швидкість Моенса – Кортвега для довгохвильових згинних коливань. На рис. 2 також видно, що залежність $\omega = v_m k$ та крива для $N = 1$ збігаються при $kR \rightarrow 0$.

$N = 2$, включно до kR :

$$\omega = v^* k = v_m \sqrt{1 - \alpha_1 \frac{d}{R}} k, \quad (16)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)} \left[1 + \frac{\rho_w \lambda^2}{4\rho_f (\lambda + \mu)(2\lambda + \mu)} \right] > 0. \quad (17)$$

З (16) випливає, що швидкість Моенса – Кортвега v_m дає з певною похибкою значення, завищене у порівнянні зі швидкістю поширення згинних коливань $v^* = v_m \sqrt{1 - \alpha_1 d/R}$, отриманою з поправкою на скінченну товщину стінки.

Оцінимо цю похибку. Прийемо для матеріалу стінки коефіцієнт Пуассона $\sigma \approx 0.5$, а $\rho_f \approx \rho_w$. Тоді $\alpha_1 \approx 9/8$ і для малих d/R з виразу (16) маємо

$$v^* \approx v_m \left(1 - \frac{9}{16} \frac{d}{R} \right).$$

Це означає, що відносна похибка обчислення швидкості Моенса – Кортвега прямо пропорційна до товщини стінки й становить $\approx 9d/(16R)$.

$N = 2$, включно до $(kR)^3$:

$$\omega = v_m \sqrt{1 - \alpha_1 \frac{d}{R}} k - \frac{v_m R^2}{16} \left[1 + \left(\beta_1 - \frac{\alpha_1}{2} \right) \frac{d}{R} \right] k^3, \quad (18)$$

де

$$\beta_1 = \frac{4\rho_w}{\rho_f} \left[1 - \frac{\lambda^2}{32(\lambda + \mu)^2} \right]. \quad (19)$$

Для матеріалу стінки судини, у якого $\sigma \approx 0.5$, вирази (17) і (19) значно спрощуються:

$$\alpha_1 \approx 1 + \frac{\rho_w}{8\rho_f},$$

$$\beta_1 \approx \frac{4\rho_w}{\rho_f}.$$

Відзначимо, що у праці [4] було отримано закон дисперсії у явному вигляді при використанні гіпотези Кірхгофа – Лява. Якщо розкласти відповідне значення ω з малим kR до третього степеня включно, то отримаємо вираз (18) за умов

$\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 4\rho_w/\rho_f$. Таким чином, гіпотеза Кірхгофа – Лява дійсно становить частковий випадок наведеної теорії з урахуванням скінченної товщини стінки.

ВИСНОВКИ

Розглянуто поширення пульсових хвиль у гіперпружному циліндричному тілі, заповненому нестисливою рідиною, зі скінченною товщиною стінки без урахування гіпотези Кірхгофа – Лява. На відміну від отриманого в дослідженні [12] точного закону дисперсії такої задачі, запропонований метод розкладу відносно малого параметра дає можливість отримання закону дисперсії не чисельним, а аналітичним способом з довільною точністю. Також виявлено, що відома з теорії оболонок швидкість поширення довгих пульсових хвиль Моенса – Кортвега дає завищені значення у порівнянні з уточненою швидкістю (16), яка враховує скінченну товщину оболонки. Наприклад, для $d/R = 1/5$ така похибка складає 10 % і може бути суттєвою, зважаючи на важливість точного визначення швидкості поширення пульсових хвиль у кровоносній системі.

1. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. – М.: Мир, 1981. – 372 с.
2. Green A. E., Adkins J. E. Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics. – Oxford: Clarendon Press, 1960. – 348 p.
3. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
4. Лукомський Д. В., Селезов І. Т. Виникнення нестійкості форми при поширенні гідропружних хвиль в еластичній трубці, заповненій рідиною // Наук. записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. – 2002. – N 3. – С. 132–145.
5. Lukomsky D., Selezov I. Arteria instability under heart pressure pulse propagation // Acta Bioeng. Biomech. – 2002. – 4, Suppl. 1 (Proc. 13-th Conf. Europ. Soc. Biomech., Wroclaw, 2002). – P. 524–525.
6. Epstein P. S. On the theory of elastic vibrations in plates and shells // J. Math. Phys. – 1942. – 21, N 3. – P. 198–209.
7. Kennard E. H. The new approach to shell theory: Circular cylinders // J. Appl. Mech. – 1953. – 20, N 1. – P. 33–40.
8. Селезов И. Т. О волнах в цилиндрической оболочке // Теория пластин и оболочек. Труды 2-ой все-союз. конф. (Львов, 1961). – К.: Изд-во АН УССР, 1962. – С. 249–253.
9. Селезов І. Т. Дослідження хвильових процесів в циліндричній оболонці на основі узагальненої теорії // Прикл. мех. – 1963. – 9, N 5. – С. 480–486.
10. Селезов И. Т. О распространении малых возмущений в упругой цилиндрической оболочке, наполненной жидкостью // Прикл. мех. – 1965. – 1, N 3. – С. 10–16.

11. Селезов И. Т., Никулинская С. Н. Обобщение задачи о гидравлическом ударе в упругом трубопроводе // Теория пластин и оболочек. Труды 4-ой все-союз. конф. (Ереван, 1962).– Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1964.– С. 871–876.
12. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью // Прикл. мех.– 1984.– **20**, N 1.– С. 21–26.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.– М.: Наука, 1965.– 204 с.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.– М.: Наука, 1988.– 736 с.