

УДК 539.3

ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН ОТ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ПОРИСТО-УПРУГОГО НАСЫЩЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 23.12.2002*

На основе теории Био, которая предсказывает существование трех типов волн в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде, проведен анализ отражения объемных волн от свободной границы. Найдено распределение энергии падающей волны между отраженными волнами. Обнаружены качественные различия между коэффициентами отражения медленной продольной волны от проницаемой и непроницаемой свободных границ. Для вертикальной компоненты среднего за период вектора потока мощности справедлив принцип суперпозиции по энергии, который заключается в том, что энергия, приносимая на границу падающей волной, равна энергии, переносимой в глубину отраженными волнами. Неоднородная волна энергию в глубину не переносит. Вдоль границы полупространства принцип суперпозиции по энергии не выполняется.

На базі теорії Біо, яка передбачає існування трьох типів хвиль у пористо-пружному насиченому рідиною середовищі, проведено аналіз процесу відбиття хвиль від вільної границі. Знайдено розподіл енергії падаючої хвилі між відбитими хвилями. Виявлені якісні відмінності між коефіцієнтами відбиття повільної поздовжньої хвилі для проникної та непроникної вільних границь. Для вертикальної компоненти середнього за період потоку потужності працює принцип суперпозиції по енергії, який полягає в тому, що енергія, яка приноситься падаючою хвилею на границю, дорівнює енергії, яку переносять відбиті хвилі. Неоднорідні хвилі енергію в глибину не переносять. Вдвож границі принцип суперпозиції не виконується.

On the basis of the Biot theory, predicting the existence of three types of bulk waves in a porous-elastic fluid-saturated medium, the analysis of reflection of bulk waves from free boundary is conducted. The energy distribution of an incident wave between the reflected waves is found. Qualitative distinctions between the energy reflection coefficients for slow longitudinal wave from free boundaries with open and close pores are discovered. For the vertical components of a period-averaged power flow vector, the principle of superposition on energy is valid. This last states that the energy of the incident wave is equal to the energy of the reflected waves. There exists not energy transfer deep into the media by evanescent waves. The principle of superposition on energy is not valid along the boundary.

ВВЕДЕНИЕ

Количественные данные, описывающие отражение волн от свободной границы, необходимы как для анализа и трактовки экспериментальных результатов, так и для более глубокого понимания особенностей волновых процессов на границе. Эти процессы достаточно полно изучены для бесконечных границ изотропных однофазных сред. Для изотропного упругого тела, в котором могут распространяться два типа волн – продольные и поперечные, коэффициенты отражения для них (а, следовательно, и распределение энергии падающей волны между отраженными волнами) определяются только коэффициентом Пуассона материала и углом падения волны. В этом случае имеет место регулярное отражение, при котором коэффициенты отражения не зависят от частоты.

Однако во многих реальных ситуациях при описании волновых процессов модель однофазной среды может считаться лишь первым приближением. Зачастую, особенно в задачах сейсмологии, необходимо учитывать многокомпонентный состав и пористое строение среды. В настоящее время для

макроскопического описания волновых процессов в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде (именно так в большинстве случаев представляют поверхностные слои земной коры) наиболее широкое распространение получили два направления. Одно из них основано на исследованиях М. Био, а второе – на теории смесей.

Теория, развитая М. Био [1], является обобщением теории упругости на случай двухфазных сред с учетом дополнительных параметров, учитывающих взаимодействие фаз. В ее рамках было предсказано существование трех типов волн: быстрой и медленной продольных, а также поперечной. Быстрая продольная и поперечная волны аналогичны волнам в упругом теле, в то время как медленная продольная волна – это, так называемая, “диффузионная волна”, существование которой нашло экспериментальное подтверждение только в 1980-е годы [2]. В силу своей простоты и наглядности, а также благодаря экспериментальному подтверждению основных положений, теория Био стала основополагающей при решении многих практических задач.

Статья [3] – одна из первых работ, в которых

теория Био использовалась для описания процесса отражения волн от свободной границы. В ней сформулированы виды граничных условий для свободной поверхности:

- 1) проницаемая граница (поры на границе открыты);
- 2) непроницаемая граница (поры на границе закрыты).

В работе [4] на основе теории Био проведен анализ процесса отражения волны, падающей из жидкости на границу раздела “жидкость – пористо-упругое полупространство” с учетом как потерь в скелете, так и вязкости поровой жидкости. Однако при этом рассмотрен только случай отражения от проницаемой границы. Кроме того, в [4] не приведены коэффициенты прохождения для волн всех типов. В статьях [5, 6] показано существование трех типов поверхностных волн на границе жидкости и пористо-упругого полупространства. Анализ проводился для открытых и закрытых пор на границе. Авторы [7], основываясь на результатах исследования [5, 6], провели анализ отражения волн на границе “жидкость – пористо-упругое полупространство” для общего типа граничных условий. При этом рассматривалось падение волны как из жидкости, так и из пористо-упругого полупространства. Отметим, что в [5–7] диссипативные эффекты в средах не учитывались. Анализ распределения вертикальной составляющей потока мощности падающей волны между отраженными и прошедшими волнами в зависимости от угла падения показал, что существуют принципиальные различия в распределении энергии падающей волны между отраженными и прошедшими волнами для случаев открытых и закрытых пор на границе. Количественно и качественно меняется зависимость энергии, которую переносит отраженная медленная продольная волна, от угла падающей волны. В частности, при падении быстрой продольной волны энергия, которую переносит отраженная медленная волна, имеет максимум при определенном угле падения и стремится к нулю при нормальном падении для случая открытых на границе пор. Для непроницаемой границы (поры на границе закрыты) при изменении угла падения от скользящего падения до нормального энергия, переносимая медленной продольной волной, вначале увеличивается, достигая определенной величины (порядка 15 % энергии падающей волны), и при дальнейшем увеличении угла падения остается постоянной. При падении на свободную границу поперечной волны при изменении угла па-

дения энергия медленной отраженной продольной волны для проницаемой границы имеет два локальных максимума, а для непроницаемой границы – только один.

В данной работе модель Био использована для описания процессов отражения волн от свободной границы пористо-упругого полупространства (без учета диссипативных эффектов в среде). Рассмотрены как проницаемая, так и непроницаемая свободные границы. Исследован важный случай отражения от границы объемных плоских двухмерных волн. Несмотря на относительную простоту рассматриваемой задачи, анализ ее решения позволяет наглядно оценить влияние различных факторов (углов падения, проницаемости или непроницаемости границы) на процесс отражения объемных волн. Найдено распределение энергии падающей волны между отраженными волнами в вертикальном и в горизонтальном направлениях. Показано, что вдоль свободной границы бездиссипативного пористо-упругого полупространства (при условии, что скорость медленной продольной волны является наименьшей) распространяется квази-поверхностная волна, образованная в результате взаимодействия неоднородных быстрой продольной и поперечной волн, а также распространяющейся медленной продольной волной.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пористо-упругое полупространство $-\infty < x < \infty, z \geq 0$ со свободной поверхностью $z = 0$. Векторы смещений упругого скелета \mathbf{u} и жидкости \mathbf{v} удовлетворяют уравнению движения для упругой и жидкой фаз с учетом их взаимодействия [1]:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u} + (H - \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - C \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} = \\ = \rho \partial_t^2 \mathbf{u} - \rho_f \partial_t^2 \mathbf{w}, \\ C \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - M \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} = \\ = \rho_f \partial_t^2 \mathbf{u} - \frac{\alpha \rho_f}{m} \partial_t^2 \mathbf{w} - F \partial_t \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ – средняя плотность, связанная с плотностями упругого скелета ρ_s и жидкости ρ_f соотношением

$$\rho = (1 - m)\rho_s + m\rho_f;$$

m – пористость; $\mathbf{w} = m(\mathbf{u} - \mathbf{v})$; H, C, M – комплексные коэффициенты, определяемые через характе-

ристики среды [9]:

$$H = \frac{(K_s - K_b)^2}{D - K_b} + K_b + 4\mu/3,$$

$$C = \frac{K_s(K_s - K_b)}{D - K_b}, \quad M = \frac{K_s^2}{D - K_b}, \quad (2)$$

$$D = K_s[1 + m(K_s/K_f - 1)];$$

K_s – модуль всестороннего сжатия упругого скелета; K_f – модуль всестороннего сжатия жидкости; K_b – модуль всестороннего сжатия пористой среды; μ – модуль сдвига пористой среды; α – извилистость. Посредством величины α определяется коэффициент динамической связи упругого скелета и жидкости $\rho_{12} < 0$:

$$\rho_{12} = (1 - \alpha)\rho_f m.$$

Кроме того, в правой части второго уравнения (1)

$$F = f(\omega)(\rho_f \nu_f)/K_{pr},$$

где ν_f – кинематическая вязкость; K_{pr} – проницаемость; $f(\omega)$ – частотно-зависимая функция, определяемая характером движения жидкости по порам упругого скелета.

Компоненты тензора напряжений в пористо-упругой среде имеют вид [3]

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + [(H - 2\mu - Cm)e - (C - mM)\zeta]\delta_{ij},$$

$$\sigma^f = (Cme - mM\zeta), \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma^f, \quad (3)$$

$$\zeta = \text{div} \mathbf{w}, \quad e = \text{div} \mathbf{u},$$

где e_{ij} – тензор деформаций; δ_{ij} – символ Кронекера.

В случае отсутствия напряжений на поверхности пористо-упругого полупространства возможны два типа граничных условий:

- свободная поверхность с открытыми порами;
- свободная поверхность с закрытыми порами.

Для случая открытых пор (проницаемая граница) граничные условия можно представить в виде [3]

$$\sigma_{zz}^s(x, 0) = 0, \quad \sigma_{xz}^s(x, 0) = 0,$$

$$\sigma^f(x, 0) = 0. \quad (4)$$

Если поры закрыты (непроницаемая граница), граничные условия изменяются:

$$\tau_{zz}(x, 0) = 0, \quad \tau_{xz}(x, 0) = 0,$$

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma^f \delta_{ij}, \quad u_z(x, 0) = v_z(x, 0). \quad (5)$$

В соотношениях (4), (5) τ_{ij} – тензор напряжений, приложенных к пористо-упругой среде; σ_{ij}^s – тензор напряжений, приложенных к упругому скелету; $\sigma^f = -mp_0$ – сила, действующая на жидкость, отнесенная к единице поперечного сечения пористой среды; p_0 – давление в жидкости.

В насыщенной пористой среде при постоянном отношении расхода жидкости к градиенту давления (течение Пуазейля) частотную зависимость вязкого сопротивления потоку жидкости можно не учитывать и считать $f \approx 1$ вплоть до частот, при которых вязкие и инерционные силы имеют одинаковый порядок [1, 9]. В работе [1] М. Био предположил, что характер изменения отношения силы трения на межфазовых поверхностях к относительному расходу жидкости в зависимости от частоты в пористо-упругой среде будет таким же, как и при течении вязкой жидкости в цилиндрической трубке постоянного сечения. Такое предположение позволило ему ввести корректирующую частотно-зависимую функцию f в виде

$$f = \frac{kT(k)}{4(1 - 2T(k)/ik)}, \quad k = a_2 \sqrt{\omega/\nu_f}, \quad (6)$$

$$T(k) = \frac{\text{ber}'(k) + i \text{bei}'(k)}{\text{ber}(k) + i \text{bei}(k)}.$$

Здесь $\text{ber}(k)$, $\text{bei}(k)$ – действительная и мнимая части функций Кельвина; ω – круговая частота; a_2 – структурный коэффициент, имеющий размерность длины, он зависит от размера и формы пор и определяется экспериментально. В работе [1] для a_2 принято

$$a_2 = \eta \sqrt{\frac{K_{pr}}{m}}, \quad (7)$$

где η – коэффициент, учитывающий геометрию пор. Согласно последним экспериментам, проведенным на ансамбле сфер, получено $\eta = 3.2$ [10].

Векторы смещения в жидкости и в упругом скелете могут быть представлены через скалярный и векторный потенциалы:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi_s + \text{rot} \psi_s, \quad \text{div} \psi_s = 0,$$

$$\mathbf{v} = \nabla \phi_f + \text{rot} \psi_f, \quad \text{div} \psi_f = 0. \quad (8)$$

При этом скалярный потенциал допускает представление [1]

$$\phi_s = \phi_0 + \phi_1. \quad (9)$$

Функции ϕ_j определяются как решения уравнений Гельмгольца

$$\Delta \phi_j + k_j^2 \phi_j = 0, \quad k_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2} s_j, \quad j = 0, 1. \quad (10)$$

Здесь s_j – корень квадратного уравнения

$$A_1 s_j^2 - B_1 s_j + C_1 = 0, \quad j = 0, 1 \quad (11)$$

с коэффициентами

$$A_1 = q_{22}q_{11} - q_{12}^2, \quad C_1 = \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2 + i\Gamma,$$

$$B_1 = q_{11}\Gamma_{22} + q_{22}\Gamma_{11} - 2q_{12}\Gamma_{12} + i\Gamma.$$

В последних соотношениях введены обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} &= \frac{\rho_{ij}}{\rho}, \quad \Gamma = \frac{m^2 \rho_f \nu_f}{K_{pr} \rho \omega}, \\ \rho_{11} &= (1 - m)\rho_s - \rho_{12}, \quad \rho_{22} = m\rho_f - \rho_{12}, \\ q_{11} &= \frac{H - 2Cm + Mm^2}{H}, \quad q_{22} = \frac{Mm^2}{H}, \\ q_{12} &= \frac{Cm - Mm^2}{H}, \quad c^2 = \frac{H}{\rho}. \end{aligned}$$

Для потенциала ϕ_f справедливо уравнение

$$\phi_f = M_0 \phi_0 + M_1 \phi_1$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} M_j &= \frac{\Gamma_{11}q_{22} - \Gamma_{12}q_{12} - A_1 s_j + (q_{22} + q_{12})i\Gamma}{\Gamma_{22}q_{12} - \Gamma_{12}q_{22} + (q_{22} + q_{12})i\Gamma}, \\ j &= 0, 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Векторный потенциал ψ_s удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta \psi_s + k_2^2 \psi_s &= 0, \\ k_2^2 &= \frac{\omega^2 \rho}{\mu} [\Gamma_{11} + M_2 \Gamma_{12} + (1 - M_2)i\Gamma] \end{aligned} \quad (13)$$

и соотношению

$$\begin{aligned} \psi_f &= M_2 \psi_s, \\ M_2 &= \frac{-\Gamma_{12} + i\Gamma}{\Gamma_{22} + i\Gamma}. \end{aligned} \quad (14)$$

2. ОТРАЖЕНИЕ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН БЕЗ УЧЕТА ДИССИПАЦИИ

Рассмотрим отражения объемных волн от свободной границы пористо-упругого полупространства без учета затухания в среде. Если диссипация в пористо-упругом полупространстве не учитывается, то $\nu_f = 0$, а H , μ , C , M действительны.

Между процессами отражения быстрой продольной, медленной продольной и поперечной

волн существуют качественные различия, на которых мы остановимся ниже.

Пусть на границу полупространства падает быстрая продольная волна, которая описывается потенциалом

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \tilde{A}_1 e^{i(\tilde{\xi}x + \tilde{\alpha}_1 z)} e^{-i\omega t}, \\ \tilde{\alpha}_1 &= \sqrt{k_1^2 - \tilde{\xi}^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\tilde{\xi} = k_1 \cos \theta$ – волновое число поверхностной волны; θ – угол падения.

В соответствии с возможностью существования трех типов волн в пористо-упругой среде, отраженное поле может быть представлено в виде суммы быстрой и медленной продольных, а также поперечной волн, которые описываются потенциалами

$$\begin{aligned} \phi_0 &= A_0 e^{i(\xi_0 x - \alpha_0 z)} e^{-i\omega t}, \\ \phi_1 &= A_1 e^{i(\xi_1 x - \alpha_1 z)} e^{-i\omega t}, \\ \psi_1 &= B e^{i(\xi_2 x - \alpha_2 z)} e^{-i\omega t}, \\ \alpha_i &= \sqrt{k_i^2 - \xi_i^2}, \quad i = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\xi_0 = k_0 \cos \theta_0, \quad \xi_1 = k_1 \cos \theta_0,$$

$$\xi_2 = k_2 \cos \gamma_2.$$

Выполнение граничных условий для проницаемой границы (4) позволяет определить коэффициенты отраженных волн A_0 , A_1 и B через амплитуду падающей волны \tilde{A}_1 . Кроме того, выполнение граничных условий дает связь между углами отражения (закон Снеллиуса):

$$k_1 \cos \theta = k_0 \cos \theta_0 = k_1 \cos \theta_1 = k_2 \cos \gamma_2, \quad (17)$$

$$\tilde{\xi} = \xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = \xi.$$

Из приведенных соотношений следует, что угол отражения быстрой продольной волны равен углу падения, а углы отражения медленной продольной и поперечных волн, определяемые соотношениями (17), всегда больше угла падения. Амплитуды

отраженных волн принимают значения

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{2\xi^2\alpha_1\alpha_2}{\delta} \left(\frac{k_2^2}{2} - \frac{1-\nu}{1-2\nu}k_1^2 \right), \\
 A_1 &= \frac{1}{\delta} \left[\beta^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} (k_1^2 - k_0^2) - 2\xi^2\alpha_2 \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{k_2^2}{2}(\alpha_0 + \alpha_1) - \frac{1-\nu}{1-2\nu}(k_0^2\alpha_0 + k_1^2\alpha_1) \right) \right], \\
 B &= \frac{\xi\alpha_1}{\delta} \left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2} \right) \frac{1-\nu}{1-2\nu} (k_1^2 - k_0^2),
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \delta &= 2\xi^2\alpha_2 \left(\frac{k_2^2}{2}(\alpha_0 - \alpha_1) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1-\nu}{1-2\nu}(k_0^2\alpha_0 - k_1^2\alpha_1) \right) - \\
 &\quad - \beta^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} (k_1^2 - k_0^2), \\
 \beta &= \frac{k_2^2}{2} - \xi^2.
 \end{aligned}$$

Анализ соотношений (18) позволяет установить некоторые особенности процесса отражения. Амплитуда медленной продольной волны равна нулю ($A_0=0$) при $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\xi=0$ и

$$\frac{k_2^2}{2} - \frac{1-\nu}{1-2\nu}k_1^2 = 0. \tag{19}$$

Равенство $\alpha_1=0$ соответствует скользящему падению ($\theta=0$), а $\xi=0$ – нормальному падению ($\theta=\pi/2$). Условие $\alpha_2=0$ никогда не выполняется, так как c_1 всегда больше c_2 . Соотношение (19), связывающее скорости быстрой продольной и поперечной волн, для пористо-упругой среды не выполняется. Оно справедливо только для идеальной упругой среды.

Для определенных углов падения в отраженном поле может отсутствовать быстрая продольная волна ($A_1=0$). Это соответствует уравнению

$$\begin{aligned}
 2\xi^2\alpha_2 \left(\frac{k_2^2}{2}(\alpha_0 + \alpha_1) - \frac{1-\nu}{1-2\nu}(k_0^2\alpha_0 + k_1^2\alpha_1) \right) - \\
 - \beta^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} (k_1^2 - k_0^2) = 0,
 \end{aligned}$$

которое выполняется только при определенных соотношениях параметров среды. В отличие от упругого полупространства (продольная волна исчезает при $\nu < 0.26$ для определенных углов θ), в данном случае невозможно выделить только один

определяющий параметр. Для углов падения, при которых $\cos \theta = \sqrt{c_1/2c_2}$, в отраженном поле отсутствует поперечная волна. В отличие от отражения волн от свободной границы в идеально упругой среде, в данном случае явления полного превращения типа движения или полного сохранения типа движения наблюдаются только при нормальном падении. Для других углов в отраженном поле всегда существует медленная продольная волна.

Выполнение граничных условий для непроницаемой границы (5) дает следующие выражения для коэффициентов отраженных волн A_0 , A_1 , B через амплитуду падающей волны \tilde{A}_1 :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{2\tau_1\alpha_1}{\delta_1} (m_2\xi^2 + m_1\beta), \\
 A_1 &= -\frac{1}{\delta_1} [\beta(\alpha_0 m_0 \tau_1 + \alpha_1 m_1 \tau_0) - \\
 &\quad - \xi^1 \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 (m_0 - m_1) + \xi^2 m_2 (\tau_1 \alpha_0 + \tau_0 \alpha_1)], \\
 B &= \frac{2\tau_1\alpha_1\alpha_0\xi}{\delta_1} (m_0 - m_1),
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \beta(\alpha_0 m_0 \tau_1 - \alpha_1 m_1 \tau_0) + \\
 &\quad + \xi^2 \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 (m_0 - m_1) + \xi^2 m_2 (\tau_1 \alpha_0 - \tau_0 \alpha_1),
 \end{aligned}$$

$$\tau_j = \frac{H}{2\nu} [(q_{11} + q_{12} + M_j(q_{12} + q_{22}))k_j^2 - \xi^2],$$

$$m_i = 1 - M_i, \quad i=0, 1, 2, \quad j=0, 1.$$

При падении на свободную поверхность медленной продольной или поперечной волны ситуация существенно меняется. Рассмотрим процесс отражения поперечной волны ($\Psi e^{i(\xi x + \gamma z)} e^{-i\omega t}$) от свободной проницаемой границы. При выполнении граничных условий (4) соотношение (17) преобразуются к виду

$$\gamma = \gamma_2,$$

$$k_2 \cos \gamma = k_0 \cos \theta_0 = k_1 \cos \theta_1.$$

Коэффициенты отраженных волн имеют вид

$$\begin{aligned}
 A_0 &= -\frac{2\xi\alpha_2\beta}{\delta} \left(\frac{k_2^2}{2} - \frac{1-\nu}{1-2\nu} k_1^2 \right), \\
 A_1 &= \frac{2\xi\alpha_2\beta}{\delta} \left(\frac{k_2^2}{2} - \frac{1-\nu}{1-2\nu} k_0^2 \right), \\
 B &= \frac{1}{\delta} \left[\beta^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} (k_1^2 - k_0^2) + \xi^2 \alpha_2 \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{k_2^2}{2} (\alpha_0 - \alpha_1) - \frac{1-\nu}{1-2\nu} (k_0^2 \alpha_0 - k_1^2 \alpha_1) \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Отметим, что в отличие от падения быстрой продольной волны, процесс отражения поперечных волн невозможно истолковать в рамках лучевых представлений для всех углов падения. При определенных углах падения поперечной волны γ углы для отраженных продольных волн θ_1 и θ_0 могут становиться чисто мнимыми.

Для быстрой продольной волны при докритических углах падения ($\cos \gamma = c_2/c_1$) отраженная быстрая продольная волна становится неоднородной. Для этих углов количественный анализ процесса отражения может быть выполнен на основании соотношений (21), если положить

$$\alpha_1 = \sqrt{k_2^2 \cos^2 \gamma - k_1^2}.$$

Для медленной продольной волны, в зависимости от параметров среды, возможны два случая:

- 1) ее скорость меньше скорости поперечной волны $-c_0 < c_2$ (тогда медленная продольная волна при всех углах падения остается распространяющейся);
- 1) ее скорость превышает скорость поперечной волны $-c_0 > c_2$ (тогда при определенных углах падения поперечной волны медленная продольная волна становится неоднородной).

В этом случае количественные оценки могут быть получены из соотношений (21), если положить

$$\alpha_0 = i\sqrt{k_2^2 \cos^2 \gamma - k_0^2}.$$

Отметим, что неравенство $c_1 > c_0$ справедливо всегда. Поэтому существует диапазон углов падения поперечной волны, при которых медленная продольная волна остается распространяющейся, а быстрая становится неоднородной. При падении поперечной волны под углом $\pi/4$ ($\beta=0$) в отраженном поле не существует продольных волн. Это

угол, при котором сохраняется тип движения. Заметим, что угол падения $\pi/4$ для быстрой продольной волны меньше критического, поэтому в его окрестности отраженная быстрая продольная волна будет неоднородной. Медленная же продольная волна вблизи данного угла может быть как распространяющейся, так и неоднородной, в зависимости от параметров среды.

При докритических углах падения поперечной волны амплитуды отраженных волн становятся комплексными, т. е. существует сдвиг фаз между силами, действующими на упругий скелет, и вектором перемещений упругого скелета \mathbf{u} , а также между силами, действующими на поровую жидкость, и вектором перемещения жидкости \mathbf{v} .

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Для анализа энергетических закономерностей исследуемых волновых процессов рассмотрим распределение потока мощности падающей волны между отраженными волнами. Вектор плотности потока мощности в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде определяется соотношением [7]

$$P_i = -\sigma_{ij}^s u_j - \sigma^f \delta_{ij} v_j.$$

Для гармонических процессов, как правило, рассматривают средний за период $T = 2\pi/\omega$ поток мощности:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_i &= \frac{1}{T} \int_0^T P_i dt = -\frac{i\omega}{4} (\sigma_{ij}^s u_j^* - \sigma_{ij}^{s*} u_j + \\
 &\quad + \sigma^f \delta_{ij} v_j^* - \sigma^{f*} \delta_{ij} v_j).
 \end{aligned}$$

Знак * означает комплексное сопряжение. Для рассматриваемого двумерного случая компоненты среднего потока мощности можно записать

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_x &= -\frac{i\omega}{4} (\sigma_{xx}^s u_x^* - \sigma_{xx}^{s*} u_x + \sigma_{xz}^s u_z^* - \\
 &\quad - \sigma_{xz}^{s*} u_z + \sigma^f v_x^* - \sigma^{f*} v_x),
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_z &= -\frac{i\omega}{4} (\sigma_{zz}^s u_z^* - \sigma_{zz}^{s*} u_z + \sigma_{xz}^s u_x^* - \\
 &\quad - \sigma_{xz}^{s*} u_x + \sigma^f v_z^* - \sigma^{f*} v_z).
 \end{aligned}$$

В случае падения на свободную границу (проницаемую или непроницаемую) быстрой продольной

волны получаем

$$\tilde{P}_z = \frac{\omega\mu}{2} \left\{ \frac{H}{\mu} [\Lambda_1 \alpha_1 (\Phi^2 - A_1^2) - \Lambda_0 \alpha_0 A_0^2] - \alpha_2 k_2^2 B^2 \right\}, \quad (23)$$

$$\Lambda_i = k_i^2 (q_{11} + 2q_{12} M_i + q_{22} M_i^2).$$

В направлении нормали к поверхности справедлив принцип суперпозиции средних потоков мощности, переносимых отдельными типами волн. Он заключается в том, что в выражение (23) не входят слагаемые с перекрестными произведениями Φ , A_0 , A_1 , B , а средний за период поток мощности в направлении нормали определяется суммой потоков мощности, переносимых отдельными волнами. Если в соотношения (23) подставить значения амплитуд при отражении от проницаемой и непроницаемой границ (формулы (20) и (21) соответственно), то $\tilde{P}_z = 0$. Это равенство выражает закон сохранения энергии: энергия, подводимая к границе падающей волной, равна энергии, которая уносится отраженными волнами.

Вдоль границы компонента среднего за период вектора потока мощности имеет иную структуру:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_x = & \frac{\omega\mu}{2} \left[-2\xi \left(\frac{H}{\mu} \Lambda_0 + k_0^2 - 2\xi^2 \right) A_0^2 - \right. \\ & - 2\xi \left(\frac{H}{\mu} \Lambda_0 + k_1^2 - 2\xi^2 \right) (A_1^2 + \Phi^2) + \\ & + \xi B^2 (2k_2^2 - \xi^2) + 2\xi A_1 \Phi (\Lambda_1 - k_1^2) \cos 2\lambda_1 z + \\ & + 2[A_0 B (\alpha_0 + \alpha_2) \cos (\alpha_2 - \alpha_0) z + \\ & + A_1 B (\alpha_1 + \alpha_2) \cos (\alpha_2 - \alpha_1) z + \\ & + \Phi B (\alpha_2 - \alpha_1) \cos (\alpha_2 + \alpha_1) z] \left(\frac{k_2^2}{2} - 2\xi^2 \right) - \\ & - 4\xi [(\xi^2 - \alpha_1 \alpha_0) A_0 A_1 \cos (\alpha_1 - \alpha_0) z + \\ & + (\xi^2 + \alpha_1 \alpha_0) A_0 \Phi \cos (\alpha_1 + \alpha_0) z]. \end{aligned} \quad (24)$$

Вдоль границы принцип суперпозиции по потоку мощности неприменим, поскольку в выражение (24) входят слагаемые с перекрестными произведениями Φ , A_0 , A_1 , B . Кроме того, компонента вектора потока мощности \tilde{P}_x зависит от z , т. е. является направленной величиной.

В случае падения поперечной волны средняя за период плотность потока мощности в глубину (P_z)

определяется соотношением

$$\tilde{P}_z = \frac{\omega\mu}{2} \left[\frac{H}{\mu} \left(-\Lambda_1 \frac{\alpha_1 + \alpha_1^*}{2} |A_1|^2 e^{(\alpha_1 - \alpha_1^*)z} - \Lambda_0 \frac{\alpha_0 + \alpha_0^*}{2} |A_0|^2 e^{(\alpha_0 - \alpha_0^*)z} - \alpha_2 k_2^2 |B|^2 \right) - \Psi^2 \right]. \quad (25)$$

Для докритических углов падения величины $\alpha_0^* = \alpha_0$ и $\alpha_1^* = \alpha_1$ являются вещественными. При закритических углах для быстрой продольной волны $\alpha_1^* = -\alpha_1$, и неоднородная быстрая продольная волна энергию в глубину не переносит. Аналогичная ситуация наблюдается для медленной продольной волны. Если параметры среды таковы, что медленная продольная волна также становится неоднородной, то справедливо $|B| = \Psi$ при докритических углах падения для обоих типов продольных волн.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем распределение энергии падающей волны между различными типами отраженных волн для конкретных параметров пористо-упругих сред, рассчитанное для пористо-упругой среды с характеристиками $m = 0.36$, $\alpha = 1.58$, $\rho_f = 10^3$ кг/м³, $K_f = 2.25 \cdot 10^9$ Н/м², $K_s = 4.99 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu = 3.26 \cdot 10^9$ Н/м², $\nu = 0.24$ [8]. На рис. 1, а представлено распределение P_z между отраженными волнами при различных углах падения θ при отражении от проницаемой границы в случае падающей быстрой продольной волны. Аналогичная картина представлена на рис. 1, б для непроницаемой границы (P_0 – энергия падающей волны, угол измеряется в радианах). Кривые 1 соответствуют медленной продольной, кривые 2 – быстрой продольной и кривые 3 – поперечной волнам. Из графиков видно, что распределение энергии между отраженными волнами существенно зависит от угла падения. При этом характер распределения энергии от угла для быстрой продольной и поперечных волн практически одинаков как для проницаемой, так и для непроницаемой свободной границы. Отметим, что для случая контакта пористо-упругого полупространства с жидкостью распределения энергии падающей волны между отраженными быстрой продольной и поперечной волнами качественно похожи на графики рис. 1, а, б [7].

Принципиально иная ситуация наблюдается для медленной продольной волны. В случае проницаемой границы эта волна имеет энергетический максимум для малых углов падения и практически

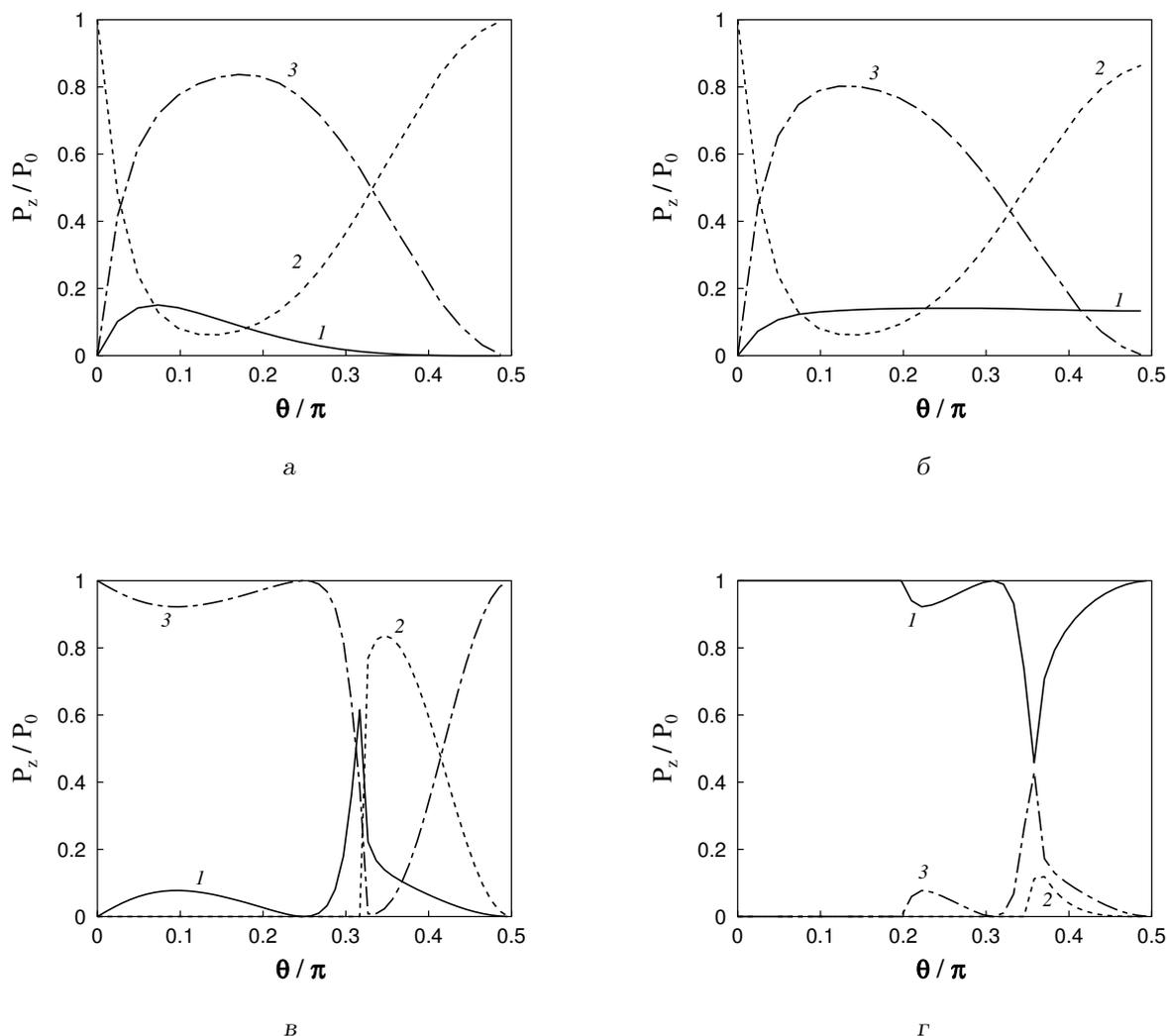


Рис. 1. Распределение энергии падающей волны между отраженными волнами:

- а – при падении быстрой продольной волны на проницаемую границу;
- б – при падении быстрой продольной волны на непроницаемую границу;
- в – при падении поперечной волны на проницаемую границу;
- г – при падении медленной продольной волны на проницаемую границу

исчезает при больших углах падения быстрой продольной волны (см. рис. 1, а). Для непроницаемой границы при малых углах падения нормированная энергия медленной продольной волны увеличивается, а при дальнейшем увеличении угла падения становится практически постоянной. Для обоих рассчитанных случаев медленная продольная волна переносит не более 16 % энергии падающей волны. Для границы “жидкость – пористо-упругое полупространство” медленная продольная волна при закрытых порах возбуждается очень слабо [7]. Заметим, что для среды с рассматриваемыми параметрами полного превращения типа движения не наблюдается.

На рис. 1, в представлена вертикальная компонента среднего за период потока мощности отраженных волн P_z/P_0 при падении на свободную проницаемую границу поперечной волны. Для рассматриваемого случая только быстрая продольная волна становится неоднородной для углов падения, меньших критического. Сравнивая рис. 1, а, в, отметим, что для докритических углов падения существует много общего в распределении энергии падающей волны между отраженными волнами. Так, для больших углов падения медленная продольная волна исчезает, при нормальном падении наблюдается полное сохранение типа волны, а при уменьшении угла падения наи-

более энергетически выраженной становится волна другого типа (при падении быстрой продольной волны – поперечная, при падении поперечной – быстрая продольная). Вблизи критического угла наблюдается резкий рост энергии медленной продольной волны, которая переносит более 60 % энергии падающей волны. Для углов падения, меньших критического, практически вся энергия переносится отраженной поперечной волной. Важной особенностью процесса отражения поперечной волны является проявление полного сохранения типа движения для двух углов падения: $\gamma = \pi/2$ и $\gamma = \pi/4$. Вблизи ($\gamma = \pi/4$) быстрая продольная волна является неоднородной, а медленная продольная волна – распространяющейся.

На рис. 1, г представлена вертикальная компонента потока мощности отраженных волн P_z/P_0 для случая падения на свободную проницаемую границу медленной продольной волны. При углах падения $\theta_0 < 0.66$ в отраженном поле распространяется только медленная продольная волна, а поперечная и быстрая продольная волны являются неоднородными. В диапазоне углов падения $0.66 < \theta < 1.12$ в отраженном поле распространяются медленная продольная волна и поперечная волна, а быстрая продольная волна остается неоднородной. Для $\theta > 1.12$ все волны в отраженном поле становятся распространяющимися. Таким образом, для выбранных параметров среды существуют два критических угла падения – для поперечной волны, которая становится неоднородной при углах падения, меньших критического, и для быстрой продольной волны.

Сравнение рис. 1, в, г показывает, что вблизи критических углов наблюдается сильная трансформация энергии падающей волны в объемные волны другого типа. При углах падения, меньших критического, для быстрой продольной волны существует угол падения (не равный $\pi/2$), при котором наблюдается полное сохранение типа движения. При падении медленной продольной волны на свободную проницаемую границу быстрая продольная волна возбуждается слабо (см. рис. 1, г) и для выбранных параметров среды ее энергия не превышает 12 % энергии падающей волны вблизи критического угла.

Общие решения задач об отражении объемных волн от свободной границы являются основой для описания особенностей распространения поверхностной волны. Существование такой волны можно рассматривать как некую резонансную ситуацию, когда при стремлении к бесконечности амплитуды падающей волны перемещения остаются

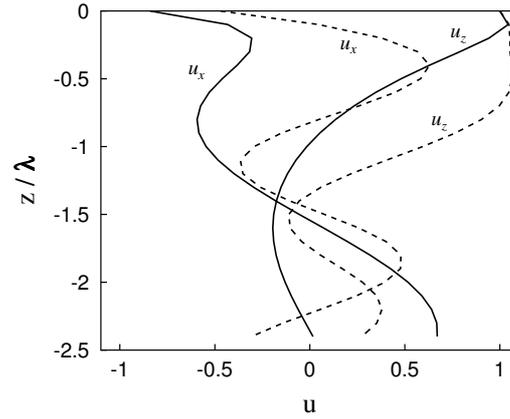


Рис. 2. Компоненты вектора смещений в упругом скелете при закритических углах падения медленной продольной волны

конечными. Формально такая ситуация возможна при обращении в нуль знаменателей коэффициентов отраженных волн. Для проницаемой границы это условие выглядит как равенство $\delta = 0$, а для непроницаемой – $\delta_1 = 0$ при некоторых мнимых углах отражения ($\theta_0 = i\tilde{\theta}_0$, $\theta_1 = i\tilde{\theta}_1$, $\gamma = i\tilde{\gamma}$).

Введя обозначение $x = c_r/c_2$, условие $\delta = 0$ представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{c_2}{c_0} \left(\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \sqrt{1-x} \sqrt{1 - \frac{c_2}{c_1} x} \right) - \\ & - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{c_2}{c_1} \left(\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \sqrt{1-x} \sqrt{1 - \frac{c_2}{c_0} x} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{1-x}}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{c_2}{c_1} x} - \sqrt{1 - \frac{c_2}{c_0} x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь c_r – фазовая скорость поверхностной волны.

Следует отметить, что для пористо-упругой среды с параметрами, выбранными при расчетах, в случаях проницаемой или непроницаемой границы не существует поверхностной волны, образованной тремя неоднородными волнами (быстрой продольной, медленной продольной и поперечной). Однако поскольку скорость распространения медленной продольной волны является наименьшей, то за счет взаимодействия неоднородных быстрой продольной и поперечной волн с распространяющейся медленной продольной волной может быть образована квази-поверхностная волна. Это наблюдается для углов падения, меньших критического угла для поперечной волны, при падении на границу раздела медленной продольной волны. Проанали-

зируем для этого случая вектор смещений в отраженном поле. На рис. 2 представлены компоненты вектора смещений в упругом скелете, нормированные на величину $u_z(z=0)$. Сплошные кривые соответствуют углу падения $\theta=2\pi/21$, а штриховые – $\theta=4\pi/21$. Из графика видно, что как вертикальная, так и горизонтальная компоненты смещений осциллируют, причем с увеличением угла падения медленной продольной волны период осцилляций уменьшается. С увеличением z амплитуды обеих компонент смещения уменьшаются, однако не стремятся монотонно к нулю, как в идеально упругой среде, а осциллируют за счет распространяющейся медленной продольной волны. Траектории движения частиц представляют собой эллипсы. Таким образом, формируется волна, переносящая энергию в глубину, за счет распространяющейся медленной продольной волны. Вдоль направления распространения средний за период поток мощности зависит от z .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ процесса отражения объемных волн от свободной границы пористо-упругого полупространства. Показано, что существуют значительные различия при отражении волн от проницаемой и непроницаемой свободной границы. Для отраженной медленной продольной волны эти различия носят не только количественный, но и качественный характер. При падении на границу поперечной или медленной продольной волн существуют критические углы, ниже которых отраженная волна становится неоднородной. Вблизи критических углов наблюдается сильная трансформация энергии падающей волны в отраженные волны другого типа.

Для вертикальной компоненты среднего за период вектора потока мощности справедлив принцип суперпозиции по энергии, который заключается в том, что энергия, приносимая на границу падающей волной, равна энергии, переносимой в глубину отраженными волнами. Неоднородная волна энергию в глубину не переносит. Вдоль границы полупространства принцип суперпозиции по энергии не выполняется.

Как и в случае упругого полупространства, при отражении поперечной волны, падающей под углом $\gamma=\pi/4$, наблюдается полное сохранение ти-

па движения. Для таких углов падения быстрая продольная волна всегда неоднородна. Медленная же продольная волна может быть как распространяющейся, так и неоднородной, в зависимости от параметров среды.

Если фазовая скорость медленной продольной волны является наименьшей, то при ее падении на свободную границу в области закритических углов падения для быстрой продольной и поперечной волн существует квази-поверхностная волна. В этой волне частицы движутся по эллипсу, а амплитуда смещений максимальна вблизи свободной поверхности. При этом за счет существования распространяющейся медленной продольной волны квази-поверхностная волна переносит энергию в глубину.

1. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– **28**, N 2.– P. 168–191.
2. Plona T. J. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies // Appl. Phys. Let.– 1980.– **36**.– P. 259–261.
3. Deresiewicz H., Rice J. T. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid. III. Reflection of plane waves at a free plane boundary (general case) // Bull. Seism. Soc. Amer.– 1962.– **52**, N 3.– С. 595–625.
4. Stoll R., Kan T.-K. Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface // J. Acoust. Soc. Amer.– 1981.– **70**, N 1.– P. 149–156.
5. Feng S., Johnson D. L. High-frequency acoustic properties of fluid/porous solid interface. I. New surface mode // J. Acoust. Soc. Amer.– 1983.– **74**, N 3.– P. 906–914.
6. Feng S., Johnson D. L. High-frequency acoustic properties of fluid/porous solid interface II. The 2D reflection Green's function // J. Acoust. Soc. Amer.– 1983.– **74**, N 3.– P. 915–924.
7. Wu K., Xue Q., Adler L. Reflection and transmission of elastic waves from a fluid-saturated porous solid boundary // J. Acoust. Soc. Amer.– 1990.– **87**, N 6.– P. 2349–2358.
8. Johnson D. L., Plona T., Kojima H. Probing porous media with first and second sound. II. Acoustic properties of water-saturated porous media // J. Appl. Phys.– 1994.– **76**, N 1.– P. 115–125.
9. Столл Р. Д. Акустические волны в водонасыщенных осадках // Акустика морских осадков.– М.: Мир, 1977.– С. 28–46.
10. Badley M., Cheng A.H.-D., Mu Y. From geology to geoaoustics Evaluation of Biot–Stoll sound speed and attenuation for shallow water acoustics // J. Acoust. Soc. Amer.– 1998.– **103**, N 1.– P. 309–320.