НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАТЕМАТИЧНИХ МАШИН ТА СИСТЕМ

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису

Терлецька Катерина Валеріївна

УДК 532.5.517

ДИСЕРТАЦІЯ

ДИНАМІКА ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ ВЕЛИКОЇ АМПЛІТУДИ

01.02.05 - механіка рідини, газу та плазми

На здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_______________ К.В.Терлецька

Науковий консультант: **Мадерич Володимир Станіславович**, д.ф.-м.н., проф., зав. відділом математичного моделювання морських та річкових систем ІПММС НАН України

Київ 2019

АНОТАЦІЯ

Терлецька К. В. Динаміка внутрішніх хвиль великої амплітуди.– Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.05 «механіка рідини, газу та плазми» . – Інститут Гідромеханіки НАН України, Київ, 2019.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню динаміки внутрішніх хвиль, які є невід'ємною частиною всіх природних водойм (озер, морів, океанів). Внутрішні хвилі виникають внаслідок вертикальної стратифікації рідини по температурі або солоності. В океанах та морях розповсюджені так звані усамітнені внутрішні хвилі, вони приймають форму усамітнених збурень, які можуть проходити великі відстані без зміни своєї форми. Існування внутрішніх усамітнених хвиль у деяких районах Світового океану із амплітудами до 200 м є мотивацією для дослідження можливих катастрофічних явищ, які можуть супроводжувати розповсюдження внутрішніх хвиль великої амплітуди. Внутрішні хвилі впливають на розповсюдження акустичних сигналів, на рух підводних апаратів, на розмив шельфу під нафтовими і газовими платформами в прибережних зонах. У шельфових зонах вплив внутрішніх хвиль підсилюється в порівнянні з відкритим морем. На глибинах 100-150 м їх вплив на вертикальний перенос поживних речовин з придонного шару в поверхневий набагато більший, ніж в океані. Ерозія, що спричинена дією внутрішніх хвиль на шельфі є причиною формування геологічних структур. Внутрішні

хвилі великих амплітуд впливають також та на процеси вертикального перемішування в океані, що у свою чергу пов'язано із змінами клімату.

Метою роботи є дослідження механізмів динаміки внутрішніх хвиль великих амплітуд, їх роль у процесах перемішування у різноманітних водоймах, зокрема в замкнених водоймах (озерах). Для опису слабонелінійних хвиль, що розповсюджуються при певних типах стратифікацій, застосовуються асимптотичні моделі, які можуть описувати усамітнені хвилі в океанах та озерах. Але, такі моделі не можуть акуратно описати динаміку внутрішніх хвиль у випадку великих амплітуд, для випадку неперервної та неоднорідної стратифікації, сильної взаємодії або різких змін рельєфу дона. Для вивчення динаміки внутрішніх хвиль великих амплітуд в роботі застосовано чисельну гідродинамічну модель стратифікованих течій. Чисельне моделювання дає можливість значно розширити спектр досліджень та розглянути динаміку внутрішніх хвиль великих амплітуд в прибережних зонах, а саме, їх трансформацію над неоднорідностями дна, дисипацію при поширенні, взаємодію однієї хвилі з іншою та, нарешті, обвалення на шельфі. В роботі досліджуються фізичні механізми динаміки внутрішніх усамітнених хвиль великих амплітуд, їх розповсюдження, затухання, взаємодія між хвилями, руйнування на шельфових зонах та їх роль у процесах перемішування в різноманітних водоймах, зокрема, в озерах. Вивчається взаємодія поодиноких хвиль великих амплітуд із неоднорідним дном та підводними перешкодами. Дослідження різноманітних типів водойм, яким притаманні розмаїття типів стратифікації призводить до необхідності вивчення не тільки звичайних хвиль першої бароклінної моди, які можуть приймати форму хвиль-пониження або хвиль-підвищення, а і більш рідких форм внутрішніх хвиль, таких, як хвилі другої бароклінної моди, які виникають при тришаровій (або більш складній стратифікації) та можуть приймати форму як опуклих, так і вгнутих хвиль в середньому шарі.

Новизною роботи є визначення основних параметрів, які характеризують динаміку внутрішніх усамітнених хвиль як першої так і другої бароклінної моди. Встановлено вплив таких параметрів, як амплітуда хвилі, стратифікація рідини та геометрія рельєфу дна (кут нахилу схилу, довжина та форма підводних перешкод) на трансформацію хвиль та дисипацію енергії. В роботі запропоновано параметр блокування B для опису режимів трансформації внутрішніх усамітнених хвиль над перешкодами та різкими змінами дна. Були побудовані нові класифікації режимів трансформації внутрішніх усамітнених хвиль над перешкодами та різкими змінами дна, як для двошарової так і для тришарової стратифікації. Отримано автомодельні залежності втрат енергії при трансформації внутрішніх хвиль над підводною сходинкою від параметру блокування. Отримано автомодельні залежності нормованих амплітуд та швидкостей хвиль від параметру блокування B, при трансформації внутрішньої хвилі другої бароклінної моди над підводною сходинкою. Вперше продемонстровано механізм генерації брізерів внутрішніх хвиль та механізм генерації хвиль першої моди при трансформації хвиль другої моди з підводною сходинкою. Описано новий сценарій неадіабатичної трансформації внутрішніх хвиль на похилому дні. На першому етапі трансформації виникає нестійкість Кельвіна-Гельмгольца, що призводить до зменшення амплітуди хвилі, після чого хвиля трансформується на схилі без перекидання. В такому сценарії зсувна нестійкість є домінуючим механізмом перетворення хвиль. Вперше побудовано нову класифікацію режимів взаємодії внутрішніх хвиль із ідеалізованим трапеціїдальним шельфом. Встановлена відповідність запропонованої класифікації результатам лабораторних та натурних експериментів. Побудовано зональні карти режимів трансформації внутрішніх усамітнених хвиль для шельфу Південнокитайського моря із зонами інтенсивного перемішування на шельфі.

За допомогою чисельного моделювання було встановлено закономірності руху хвиль другої бароклінної моди. Визначені основні параметри, які характеризують динаміку хвиль другої бароклінної моди. Зокрема, показано, що важливою характеристикою, що впливає на динаміку внутрішніх хвиль другої бароклінної моди є мінімальне число Річардсона Ri_{min} та локальне максимальне число Фруда Fr_{max}. У нестійких хвилях мінімальне число Річардсона Ri_{min} падає до значень менших ніж 0.1, а при $Fr_{max} > 1$ в хвилях формуються зони із замкненими лініями току (ядра), що можуть переносити в цих областях масу. Виходячи з цього запропоновано нову класифікацію хвиль другої моди відносно параметрів Ri_{min} та Fr_{max}. Побудовано нову класифікацію хвиль другої моди відносно мінімального числа Річардсона $Ri_{min} > 1$ та локального числа Фруда Fr_{max}: (i) слабонелінійні хвилі при $Fr_{max} < 1$, (ii) стійкі сильно нелінійні хвилі, що переносять масу при $Ri_{min} > 0.15$ та $Fr_{max} \approx 1.2$, (iii) нестійкі сильно нелінійні хвилі при $Ri_{min} < 0.1$. Досліджено закономірності затухання хвиль другої бароклінної від типу хвилі. Виявлено неповну автомодельність динаміки хвиль другої моди по числу Рейнольдса, що виражається у залежності параметра Річардсона від нього при великих значеннях чисел Рейнольдса Re_{eff}. Показано, що еволюція хвиль другої бароклінної моди великих амплітуд із захопленими ядрами відбувається таким чином, що число Річардсона зростає з часом по автомодельній залежності. Показано, що хвилі другої моди затухають порізному в залежності від типу хвилі, так як кожному класу притаманний свій механізм затухання. Слабонелінійні хвилі затухають завдяки в'язкості, хвилі з стійкими ядрами затухають завдяки ерозії ядер зовнішнім потоком та за рахунок слабкої внутрішньої циркуляції, та клас нестійкі хвилі із захопленими ядрами характеризується втратою маси за рахунок розвитку нестійкості Кельвіна-Гельмгольца, що спричиняє перемішування.

Показано, що взаємодія усамітнених хвиль великих амплітуд першої та другої моди значно відрізняється від прогнозів слабонелінійні теорії. На відміну від хвиль малих і помірних амплітуд зіткнення хвиль великої амплітуди супроводжувалося утворенням нестійкості Кельвіна-Гельмгольца. Для хвиль першої моди рівних амплітуд, близьких до критичного значення для стійкості, зсувна нестійкість виникає навіть до зіткнення і виникає знову, коли хвилі розбігаються після зіткнення. Для хвиль першої моди меншої амплітуди нестійкість розвивається лише за хвилями після зіткнення. Взаємодія внутрішніх хвиль другої моди відбувається по-різному в залежності від типу хвиль. Причина цього у різних механізмах, що керують динамікою хвиль різних типів: нелінійна взаємодія, колапс захоплених ядер, нестійкість та ефекти в'язкості. Таким чином взаємодія внутрішніх усамітнених хвиль не є еластичною, та хвилі, що утворилися після взаємодії відрізняються від початкових хвиль.

Досліджено вплив рельєфу дна (похилого дна та підводних пагорбів) на трансформацію стоячих внутрішніх хвиль (сейш). Наявність похилого дна, на відміну від прямокутного басейну, є причиною затухання коротких внутрішніх хвиль. При трансформації сейш у басейні із пагорбом та вузькістю продемонстровано різноманітні гідродинамічні ефекти: зафіксована так звана "зворотна"нестійкість та руйнування хвиль на похилому дні із формуванням нестійкості Кельвіна-Гельмгольца. Продемонстровано можливість формування надкритичного внутрішнього струміня при трансформації внутрішніх хвиль масштабу басейну в озері з "ложкоподібним"рельєфом дна. Вперше виявлено, що при взаємодії внутрішніх сейш з рельєфом дна подовженого озера може відбуватися фокусування потоків у сейшах і виникнення надкритичного внутрішнього струменя. Він формує вихрові пари з вертикальними осями, що викликають збурення в термокліні і на поверхні. За допомогою чисельного моделювання для озера Лох-Несс було продемонстровано можливість формування вихрових пар, що рухаються з швидкістю 0.9 м/с та хвильового сліду за ними, що дає можливість пояснити цим феноменом свідчення очевидців та легенди про "озерних монстрів".

Ключові слова: Внутрішні усамітнені хвилі великих амплітуд, стратифіковані потоки, стоячі внутрішні хвилі, дисипація енергії, обвалення хвиль, обчислювальна гідродинаміка, перемішування в океані, класифікація режимів трансформації внутрішніх хвиль.

Список публікацій здобувача за темою дисертації:

глава в монографії:

1. Maderich V., Brovchenko I., Terletska K., Hutter K. Numerical simulations of the nonhydrostatic transformation of basin-scale internal gravity waves and wave-enhanced meromixis in lakes. *Ch. 4 in Hutter K. (Ed.) Nonlinear internal waves in lakes* . Springer. Series: Advances in Geophysical and Environmental Mechanics. 2012.P. 193–276. (здобувачу належить участь в постановках задач, проведення чисельних розрахунків, аналіз та співставлення результатів лабораторних та чисельних експериментів).

Статті в періодичних виданнях:

1. Бровченко И., Терлецкая К., Городецкая Н., Мадерич В., Никишов В. Взаимодействие внутренних уединенных волн большой амплитуды с препятствием. *Прикладна гідромеханіка.* 2007. № **(81)**. С. 3-7. (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків, аналіз та співставлення результатів лабораторних та чисельних експериментів)

2. Бровченко И.А, Мадерич В.С.,Терлецкая К.В. Численное моделирование трехмерной структуры течений в районе глубоководных каньонов восточного побережья Черного моря. *International Journal of Civil and Structural Engineering.* 2011. № **7(2)**. С. 47–53. (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків циркуляції Чорного моря)

3. Бровченко И., Мадерич В., Семин С., Степанянц Ю., Терлецкая Е. Моделирование трансформации волновых пакетов поверхностных волн в водоеме с резким изменением глубины. *Прикладна гідромеханіка.* 2015. № **17(89)**. С. 3–9. (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків співставлен-

ня результатів чисельних експериментів MIT и NH-POM)

4. Мадерич В.С., Терлецкая Е.В., Бровченко И.А. Фронтальное столкновение внутренних волн большой амплитуды. *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* 2015. № **8(3)**. С. 44–53. (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

5. Мадерич В.С, Терлецкая Е.В., Бровченко И. Структура и динамика гравитационных течений на склоне: поток трансформированных под ледником Ронне-Фильхнера вод в море Уэддела . *Український Антарктичний Журнал.* 2010. № **9**. С. 263-270. (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків та аналіз результатів)

6. Мадерич В.С, Терлецкая Е.В., Бровченко И. Моделювання різномасштабних процесів формування придонних і шельфових вод у південній частині моря Ведделла . *Український Антарктичний Журнал.* 2017. № **16**. С. 3. 45-51 (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків та аналіз результатів)

7. Талипова Т.Г. Куркина О.Е. Куркин А.А. Рувинская Е.А. Терлецкая Е.В. Моделирование внутренних волн в прибрежной зоне Баренцева моря. *Экологические системы и приборы.* 2014. № **3**. С. 26-39. (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків)

8. Терлецкая К.В. Взаимодействие внутренних уединенных волн второй моды с подводной ступенькой. *Прикладна гідромеханіка.* 2014. № **88**. С. 55-61.

9. Терлецкая К.В. Классификация режимов наката внутренних уединенных волн на трапецеидальный шельф. *Прикладна гідромеханіка.* 2016. № **18(90)**. С. 1. 69-78

10. Терлецька К.В. Дисипація енергії внутрішніх хвиль над підводними перешкодами. *Гідромеханіка та акустика.* 2018. № 1. С. 85-98.

11. Терлецкая Е.В., Мадерич В.С., Бровченко И.А. Трансформация уединенных внутренних волн большой амплитуды над ступенькой на дне. *Прикладна гідромеханіка.* 2009. № **11(83)**. С. 65–76. (здобувачу належить постановка задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

12. Терлецкая Е.В., Мадерич В.С. Бровченко И.А. Взаимодействие уединенных внутренних волн при их фронтальном столкновении. *Прикладна гідромеханіка.* 2011. № **13(85)**. С. 68–77. (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

13. Терлецкая К.В., Мадерич В.С., Бровченко И.А. Сильно нелинейные внутренние сейши в удлинненных стратифицированных озерах и феномен «озерных монстров». *Прикладна гідромеханіка.* 2011. № **13(85), 1**. С. 51–55. (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

14. Терлецкая Е.В.,Мадерич В.С., Бровченко И.А., Талипова Т.Г. Неполная автомодельность внутренних волн второй моды в слое раздела. *Прикладна гідромеханіка.* 2013. № **15**. С. 68-77. (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

15. Терлецкая Е.В., Мадерич В.С, Бровченко И. Численное исследование взаимодействия внутренних уединенных волн второй бароклинной моды при их фронтальном столкновении . *Прикладна гідромеханіка.* 2015. № **17(89)**. С. 3. 44-54 (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

16. Терлецкая Е.В., Семин С.С., Степанянц Ю.А., Бровченко И.А. Мадерич В.С. Моделирование трансформации волновых пакетов поверхностных волн в водоеме с резким изменением глубины. *Прикладна гідромеханіка.* 2015. № **17(89), 1**. С. 3–9. (здобувачу належить участь у постановці задачі, прове-

дення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

17. Терлецкая Е.В., Семин В., Талипова Т., Смирнов Д., Бровченко И. Трансформация внутренних уединенных волн понижения над донной ступенькой в трехслойной стратифицированной жидкости. *Прикладна гідромеханіка.* 2015. № **17(89), 2**. С. 56–63. (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

18. Brovchenko I., J. Kanarska, V. Maderich, K. Terletska 3D non-hydrostatic modeling of bottom stability under impact of the turbulent ship propeller jet . *Acta Geophysica.* 2007. № **55(1)**. С. 47–55. (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків співставлення результатів чисельних експериментів та даних лабораторних експериментів)

19. Maderich V., Heling R., Bezhenar R., Brovchenko I., Jenner H., Koshebutskyy A., Kuschan A., Terletska K. Development and application of 3D numerical model THREETOX to the prediction of cooling water transport and mixing in the inland and coastal waters. *Hydrological Processes.* 2008. **22**.P. 1000–1013. (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків негідростатичною моделлю плавучих струменевих течій та співставлення результатів із розрахунками інших моделей)

20. Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Pelinovsky E., Choi B. H., Brovchenko I., Terletska K., and D. C. Kim The transformation of an interfacial solitary wave of elevation at a bottom step. *Nonlinear Processes in Geophysics* . 2009. **16**.P. 33-42. (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

21. Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Terletska K., Brovchenko I., Pelinovsky E., Choi B.H. Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a bottom step. *Physics of Fluids.* 2010. **22**.P. doi: 10.1063 / 1.3455984. (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків, обгово-

рення та аналіз результатів)

22. Maderich V., Jung K.T., Terletska K., Talipova T., Brovchenko I. Incomplete similarity of internal solitary waves with trapped core. *Fluid Dynamics Research.* 2015. **47**.P. 035511. (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

23. Maderich V., Jung K.T., Terletska K., K.O. Kim Head-on collision of internal waves with trapped core. *Nonlinear Processes in Geophysics.* 2017. **24**.P. 751-762. (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

24. Talipova T., Terletska K., Maderich V., Brovchenko I., Pelinovsky E., Jung K.T., Grimshaw R. Internal solitary wave transformation over a bottom step: loss of energy. *Phys. Fluids.* 2013. **25**.P. 032110; doi: 10.1063 /1.4797455. (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

25. Terletska K, Kyung Tae J., Talipova T., Maderich V, Brovchenko I. and Roger Grimshaw Internal breather-like wave generation by the second mode solitary wave interaction with a step. *Physics of fluids.* 2016. **28**.P. https:doi.org /10.1063/1.4967203. (здобувачу належить постановка задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

26. Terletska K., Jung K.T., Maderich V., Kim K.O. Frontal collision of internal solitary waves of first mode. *Wave motion.* 2018. **77**.P. 229-242. (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, обговорення та аналіз результатів)

27. Rushchitsky J.J., Cattani C., Terletskaya E.V. Symchuk Y. Elastic wavelets and their application to problems of solitary wave propagation AAPP. *AAPP: Physical, Mathematical, and Natural Sciences.* 2008. **(86)1**.P. DOI:10.1478 / C1A0801004. (здобувачу належить проведення розрахунків та аналіз результатів)

Тези доповідей:

1. Бровченко И.А., Мадерич В.С., Терлецкая К.В. Трансформация уединенной внутренней волны при двуслойной стратификации при ступенчастом изменении рельефа дна. Тези доповідей Третьої науково-практичної конференції з міжнародною участю “Математичне та імітаційне моделювання систем МОДС.2008.С.21 - 23

2. Бровченко И.А., Городецкая Н.С., Мадерич В.С., Никишов В.И,. Терлецкая Е.В Сильно нелинейные внутренние уединенные волны: генерация и взаимодействие с границами. Сборник материалов медународной научной школы-конференции «Тараповские чтения», 21-25 апреля 2008, Харьков, Украина.2008.С.7 - 9

3. Бровченко И.А., Мадерич В.С., Никишов В.И., Терлецкая Е.В. Численное моделирование взаимодействия внутренних волн с подводным прямоугольным препятствием . збірник наукових праць “Моделювання 2010”, Т.3. – Київ.: Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Е. Пухова НАН України.2010.С.222 - 229

4. Талипова Т., Терлецкая Е., Мадерич В., Бровченко И., Пелиновский Е. Нелинейное взаимодействие солитонов внутренних волн второй моды с уступом дна как механизм генерации внутренних бризеров . XXII Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН,23-24 декабря.2013.С.20

5. Терлецкая Е.В., И.А. Бровченко, В.С. Мадерич В.С. Моделирование трансформации уединенных волн понижения большой амплитуды над ступенькой на дне. Пр. конф. “Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2009.2009.С.54-56

6. Терлецкая Е.В., И.А. Бровченко, В.С. Мадерич В.С. Моделирование формирования вторичного солитона при взаимодействии внутренней волны с прямоугольным препятствием. Пр. конф. “Математичне та імітаційне моде-

лювання систем. МОДС 2010.2010.С.15-16

7. Терлецкая Е.В., И.А. Бровченко, В.С. Мадерич В.С. Взаимодействие внутренних волн второй моды при их фронтальном столкновении. Пр. конф. “Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2013.2013.С.72-75

8. Терлецкая К, В. Мадерич, І. Бровченко, Т. Таліпова, Ю. Пеліновський Трансформація відокремленої внутрішньої хвилі на сходинці в рельєфі дна: втрата енергії. Пр. конф. “Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2013.2013.С.75-77

9. Терлецкая К, Мадерич В., Бровченко І. Класифікація типів взаємодії внутрішніх поодиноких хвиль хвиль із трапеціїдальним шельфом.. «Комп'ютерна Гідромеханіка. Київ. Інститут Гіромеханіки НАН України».2016.С.58-59

10. Терлецкая К, Мадерич В., Бровченко І. Особливості динаміки придонних і шельфових вод під льодовиком Ронне-Фільхнера . «Компьютерна Гідромеханіка. Київ. Інститут Гіромеханіки НАН України».2018.С.38-40

11. Maderich V., Talipova T., Terletska K., Brovchenko I., Pelinovsky E. Choi B.H Transformation of large amplitude interfacial solitary wave at the steps.. Ocean Sciences Meeting 2010 AGU 22-26 February 2010..2010.С.11

12. Maderich, V., Fenical, S., Brovchenko, I., Terletska, K., Shepsis, V 3D modelling system of bottom and bank erosion. Proceedings of the 9th International Conference on the Mediterranean Coastal Environment MEDCOAST.2009.С.899-905

13. Maderich, V., Kanarska, Y., Fenical, S., Terletska, K., Tirindelli, M 3D non-hydrostatic modeling of bottom and bank stability subjected by ship propeller jets. Proceedings of the 30th Coastal Engineering Conference.2007.С.1222-1233

14. Choi B.H., Maderich V., Brovchenko I., Terletska K. Non-hydrostatic models and their applications to the coastal ocean . Book of abstracts of Annual Meeting 2008 of Korean Association of Ocean Science and Technology Societies

29-30 May 2008.2008.P.584

15. Choi B.H., Maderich V., Brovchenko I., Terletska K. Transformation of internal solitary waves on the step . Book of abstracts of Annual Meeting 2008 of Korean Association of Ocean Science and Technology Societies 29-30 May 2008.2008.P.585

16. Talipova T., Terletska E, V. Maderich,. I Brovchenko , R. Grimshaw and E. Pelinovsky Loss of energy in transition of internal solitary wave over the bottom step. Europian Geoscience Union, General Assembly 2012, Vienna, Austria, 22-27 April.2012.P.259

17. Talipova T., Terletska E, V. Maderich,. I Brovchenko , R. Grimshaw and E. Pelinovsky Internal solitary wave transformation over a bottom step: Loss of energy. Europian Geoscience Union, General Assembly 2013, Vienna, Austria, 6-15 April.2012.P.4559

18. Talipova T., Kurkina O., Terletska K. and Ekaterina Rouvinskaya Synchronism of nonlinear internal waves in a three-layer fluid. Europian Geoscience Union, General Assembly 2017, Vienna, 23 -28 April .2017.P.12487

19. Talipova T., Semin S., Terletska K., Smirnov D., Pelinovsky E., and Andrey Kurkin Transformation of a first mode internal solitary wave on a step in a three-layer flow. Europian Geoscience Union, General Assembly 2017, Vienna, 23-28 April.2017.P.1891

20. Talipova T., Terletska K., Pelinovsky E. Breathers of the Internal Waves. Wave interaction WIN 2014, J. Kepler University Linz, Austria, 22-26 April.2014.P.64

21. Terletska K., Maderich V., Brovchenko I., Jung K.T. Internal seiches of large amplitude in the elongated lakes and phenomenon of "Loch Ness monster" XXIII ICTAM, 19-24 August 2012, Beijing, China. 2012.1025.P.

22. Terletska K., Maderich V., Brovchenko I., Jung K.T. 3D modelling of interaction of strongly nonlinear internal seiches with a concave lake topography and a phenomenon of the"Loch Ness monster". Europian Geoscience Union, General

Assembly 2013, Vienna, Austria, 6-15 April.2013.P.5897

23. Terletska K., Talipova T., Maderich V., Brovchenko I., Jung K., Pelinovsky E. and Roger Grimsow Interaction of the strongly nonlinear internal solitary wave of second mode with the bottom step: breather formation. Europian Geoscience Union, General Assembly 2014, Vienna, Austria,28 April - 2 May .2014.P.1257

24. Terletska K., Talipova T., Maderich V., Brovchenko I., Jung K., Pelinovsky E. and Roger Grimsow Loss of energy of internal solitary wave over underwater obstacle. Europian Geoscience Union, General Assembly 2014, Vienna, Austria,28 April - 2 May .2014.P.4650

25. Terletska K., Maderich V., and Jung K. T. Head-on collision of the second mode internal solitary waves . Europian Geoscience Union, General Assembly 2017, Vienna, 23 -28 April.2017.P.3871

26. Terletska K., Talipova T., and Semin S. Transformation of the first mode internal solitary wave over an underwater step in a three-layer flow. Europian Geoscience Union, General Assembly 2019, Vienna, 7-12 April.2019.P.931

ANNOTATION

Terletska K. V. Dynamics of large amplitude internal waves. – Qualification scientific work with the manuscript copyright. The thesis for a doctor degree of physical and mathematical sciences in speciality 01.02.05 «Mechanics of fluid, gas and plasma». – Institute of Hydromechanics, National Academy of sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis focuses on the dynamics of internal waves, which are an usual phenomenon of all natural basins (lakes, seas, oceans). The internal waves results from the vertical stratification due to temperature or salinity. So-called solitary internal waves are common event in the ocean and in the seas, they take the form of isolated perturbations that can propagate long distances without changing their shape. Formation of internal solitary waves with an amplitude up to 200 m in some parts of the oceans is a motivation for the investigation of possible hazard that may accompany the propagation of large amplitude internal waves. The internal waves may affect the propagation of acoustic signals, the movement of underwater vehicles, the erosion of the shelf under oil and gas platforms in coastal zones. Influence of internal waves increases as its propagates from the open sea to the shelf zones. At depths of 100 - 150 meters internal waves can produce the vertical transfer of nutrients from the bottom layer to the surface. Internal waves of large amplitudes also influence the processes of vertical mixing in the ocean and may be responsible with climate change.

The major objective of this thesis is to study the dynamics of internal waves of

large amplitudes, their role in the processes of mixing in various stratified water bodies, in particular in closed basins (lakes). To describe solitary waves in oceans and lakes asymptotic models are used for weakly nonlinear waves propagating with certain types of stratification. However, such models can not accurately describe the dynamics of internal waves in the case of large amplitudes, for the case of continuous and heterogeneous stratification, strong wave interaction or sharp changes in of the topography. In order to study the dynamics of internal waves of large amplitudes a numerical hydrodynamic model stratified flow was used. Numerical simulation gives the possibility of significantly extension the spectrum of research and consider the dynamics of the internal waves of large amplitudes in the coastal zones, namely, their transformation over the rapidly changing bottom, dissipation during propagation, the interaction between the waves and finally, wave breaking on the shelf. In the thesis dynamics of internal solitary waves of large amplitudes, namely, their propagation, damping, interaction between waves, destruction on the shelf zones and their role in mixing processes in various basins, in particular, in lakes, are investigated. The interaction solitary internal waves of large amplitudes with inhomogeneous bottom and underwater obstacles is studied. Investigations of the various types of reservoirs with different stratification types lead to study no only waves of the first baroclinic mode, which can take the form of wave of elevation or wave of depression, but also more seldom forms of internal waves, such as the solitary waves of the second baroclinic mode, which can take the form as convex and concave waves.

The novel in this work is to determine the basic parameters that characterize the dynamics of internal solitary waves of both the first and second baroclinic modes. Influence of such parameters as wave amplitude, fluid stratification and geometry of bottom topography (slope angle, length and shape of underwater obstacle) on wave transformation and energy dissipation are established. The blocking parameter B is proposed for describing the regime of transformation of internal solitary waves over obstacles and sharp changes of the bottom. New classification of the transformation regimes of internal solitary waves over obstacles and sharp changes of the bottom, both for two-layered and for three-layer stratification, were constructed. The self-similar dependence of energy losses during the transformation of internal waves over the underwater step from the blocking parameter are estimated. The self-similar dependencies of the normalized amplitudes and velocities of waves from the blocking parameter B are obtained, while the wave of the second mode is transformed over the underwater step. For the first time, the mechanism of generation of breathers of internal waves and the mechanism of generation of waves of the first mode during the transformation of waves of the second mode with an underwater step are demonstrated.

New scenario of non-adiabatic transformation of internal waves over a sloping bottom was described. During the first stage of this scenario, the Kelvin-Helmholtz instability occurs, which leads to a decrease in the amplitude of the solitary internal wave, after which the wave is transformed over a sloping bottom without overturning. In this scenario, shear instability is the dominant mechanism of wave transformation. For the first time a new classification of modes of interaction of internal waves with an idealized trapezoidal shelf was constructed. The correspondence of the proposed classification to the results of laboratory and field experiments is established. The maps of transformation regime of internal solitary waves for the shelf of the South China Sea with intensive mixing zones on the shelf have been constructed.

The modelling results were applied to the mode-2 waves for symmetric two-layer stratification with an interface layer. It was found that the most important characteristics governing the dynamics of these waves are the local Froude number Fr_{max}, calculated as the ratio of the maximum local velocity to the phase velocity of the waves, the minimum Richardson number Ri_{min} and the effective Reynolds number Re_{eff}, defined as the ratio of the product of the phase velocity of the waves and the wave amplitude a to the viscosity. In unstable waves, the minimum Richardson number Ri_{min} falls to 0.1, and for $Fr_{max} > 1$, waves form zones with closed streamlines (cores) that can carry mass inside its. Based on this new classification of second mode internal waves with respect to the parameters Ri_{min} and Fr_{max} was proposed. It was shown that the waves of the second baroclinic mode attenuate differently depending on the type of wave, since each class has its own mechanism of attenuation. Weakly nonlinear waves fade due to viscosity, waves with stable cores fade due to erosion of the cores by external flow and due to weak internal circulation, and the class of unstable waves with trapped cores is characterized by mass loss due to the development of the Kelvin-Helmholtz instability, which causes mixing.

The incomplete self-similarity of the mode-2 internal wave dynamics on the Reynolds number, which is expressed in dependence of the Richardson parameter for large Reynolds numbers Re_{eff} was revealed. It is shown that the evolution of the mode-2 internal wave of large amplitudes with trapped cores takes place in such a way that the Richardson number increases with time over the self-similar dependence. It is shown that the interaction of solitary waves of large amplitudes of the first and second modes differs considerably from the predictions of weakly nonlinear theory. Unlike the waves of small and moderate amplitudes, collisions of waves of great amplitude were accompanied by the formation of the Kelvin-Helmholtz instability. For waves of the first mode of equal amplitudes close to the critical stability value, shear instability occurs even before the collision and arises again after the collision. For waves of moderate amplitude, the instability develops only after the collision. The interaction of the internal waves of the second mode occurs differently, depending on the type of waves. The reason for this is in various mechanisms that control the dynamics of waves of different types: nonlinear interaction, collapse of trapped cored, instability and viscosity effects. Thus, the interaction of internal solitary waves is not elastic, and the waves formed

after the interaction differ from the initial waves.

The influence of bottom topography (inclined bottom and underwater hills) on the transformation of standing waves is investigated. An inclined bottom, unlike a rectangular pool, is cause damping of short internal waves. In the transformation of a seiches in a pool with a hill and narrowing demonstrated a variety of hydrodynamic effects: "back"instability and the breaking of waves on a sloping day with the formation of Kelvin-Helmholtz instability. The possibility of forming a supercritical internal jet in the transformation of internal basin scale waves in a lake with a special topography was demonstrated. It was shown that with the interaction of internal seiches with topography of an elongated lake, the focusing of flows occurs and the supercritical internal jet is formed. The inner supercritical jet forms vortex pairs, which may cause perturbation both in the thermocline and on the surface. For the first time theoretically, the formation of a supercritical internal jet, which occurs during interaction of the standing internal seiches with the northern end of the Loch Ness lake was shown theoretically. The simulation showed that vortex pairs resulting from the internal jet cause disturbances on the surface of the lake. We can assume that some eyewitness evidence and the legend of "lake monsters"can be attributed to such phenomena.

Keywords: internal solitary waves of large amplitude,stratified currents, standing internal waves, energy dissipation, wave breaking, computational fluid dynamics, mixing in ocean, regimes classification of internal wave's transformation.

Зміст

ВСТУП

Так само як і поверхневі хвилі, під поверхнею існують невидимі оку внутрішні хвилі, амплітуди яких можуть сягати сотні метрів. Своїм існуванням ці хвилі зобов'язані вертикальній стратифікації густини. Ці хвилі є предметом дослідження дисертації. Стратифікація виникає у водоймах за рахунок змінних у просторі вертикальних профілів солоності та температури. Схема, що демонструє різноманітність вертикального розподілу температури та солоності в залежності від кліматичних зон в світовому океані, зображена на рисунку 1.

Явище, що з давніх часів було відоме морякам під назвою "мертвої води" , — це також прояв внутрішніх хвиль. Опис цього явища є в "Природничій історії" у Плінія Старшого. Дві тисячі років назад він описував ситуацію, коли

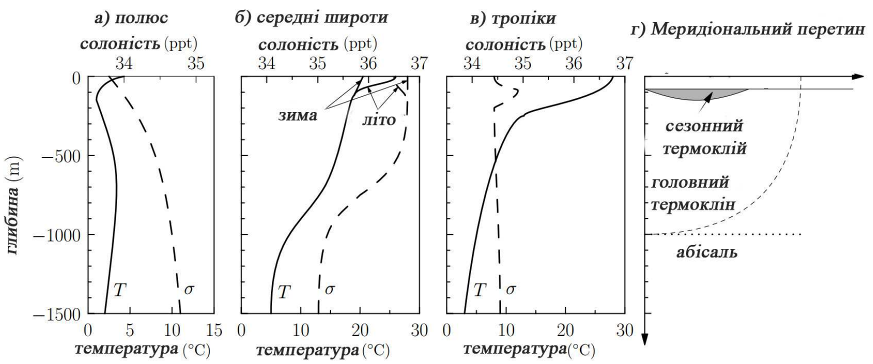

Рисунок 1: Схема, яка демонструє вертикальну температуру та солоність біля (а) полюсу, (б) у середніх широтах, (в) біля екватору та (г) - вертикальна меридіональна структура сезонного та головного термокліну. На всіх графіках глибина в метрах як на рисунку (а)

корабель, що рухався повільно, раптово зупинявся, наче чиясь рука тримала його знизу. "Мертва вода" виникає на пікнокліні, якщо він розташований приблизно на глибині кіля судна. Тоді при русі судна з невеликою швидкістю створюються не лише корабельні хвилі на поверхні, але і внутрішня хвиля на межі розділу шарів води. Вітрильні судна під дією "мертвої води" збивалися з курсу й переставали слухатися керма. Перше задокументоване спостереження лабораторного дослідження внутрішніх хвиль — це лист Бенджаміна Франкліна від 1 грудня 1762 року. В цьому листі він писав [11]: "На Мадейрі ми дістали олію для освітлювання і за допомогою звичайного скляного бокала або склянки, обв'язаної дротом і підвішеної до стелі каюти... я зробив італійську лампу... Склянка на дні містила воду приблизно на одну третину своєї висоти; інша третина була заповнена олією... За вечерею, дивлячись на лампу, я помітив, що поверхня олії була повністю спокійною та зберігала своє положення відносно краю склянки, вода ж під олією була у великому хвилюванні, підіймаючись та падаючи безладними хвилями" . Перше наукове дослідження ефекту "мертвої води" почалося після знаменитої полярної експедиції 1893-1896 рр., де Фрітьоф Нансен виразно описав картину збурень на поверхні води при потраплянні судна в "мертву воду" в норвезьких фіордах та біля берегів Таймиру, коли швидкість "Фрама" падала з 6 до 1.5 вузлів. Він ініціював постановку циклу експериментальних досліджень внутрішніх хвиль, що забирають енергію руху судна, які виконав океанолог Вагн Вальфрід Екман на початку минулого століття. Екман писав: "Якщо шар прісної води лежить над солоною, то корабель спричиняє не тільки звичайні видимі хвилі на межі між водою та повітрям, але буде породжувати невидимі хвилі на межі солоної та несолоної води; я припускаю, що величезний опір, що відчуває корабель, зумовлений роботою, що витрачається на утворення цих невидимих хвиль." Перше вимірювання цих хвиль наведено в роботі [117], де під час спостережень було виявлено, що температурні профілі можуть суттє-

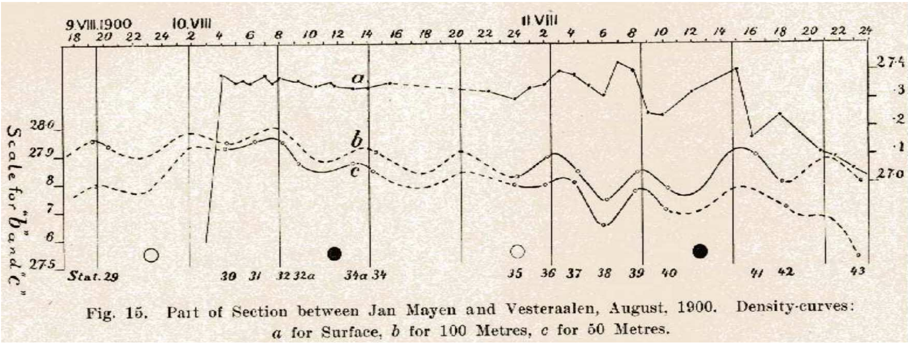

Рисунок 2: Одне із перших спостережень внутрішніх хвиль під час експедиції Фрітьофа Нансена [117]. Зміна ізопікн у часі. Головний період - половина півдобового припливного періоду

во змінюватися протягом декількох годин; це явище пояснювалося присутністю під поверхнею "загадкових хвиль" , приклад яких показано на рисунку 2.

Спостереження внутрішніх хвиль в океанах та морях

Початок сучасних досліджень внутрішніх хвиль у прибережній зоні океанів припадає на середину 1950 х рр. Це явище стало об'єктом пильної уваги дослідників відразу декількох розділів науки: дистанційного зондування, прикладної математики, теоретичної та експериментальної гідромеханіки, а останні двадцять років і обчислювальної гідромеханіки. При натурних дослідженнях для визначення амплітуд і періодів внутрішніх хвиль використовуються одночасно декілька приладів, розміщених по горизонталі, багатоелементні датчики фіксують температуру, її вертикальний градієнт та хімічний склад на певній глибині. Під час вимірювань було відмічено, що внутрішні хвилі можуть проявлятися на поверхні. Оскільки поверхневі хвилі сильно впливають на коефіцієнт відбиття електромагнітних, зокрема світлових хвиль, внутрішні хвилі добре виявляються дистанційними методами, наприклад, їх можна спостерігати з космосу. На радіолокаційному зображенні можна побачити картину (рисунок 3.) у вигляді майже паралельних періодичних світлих (збурена поверхня — сулої) та темних (згладжена поверхня —

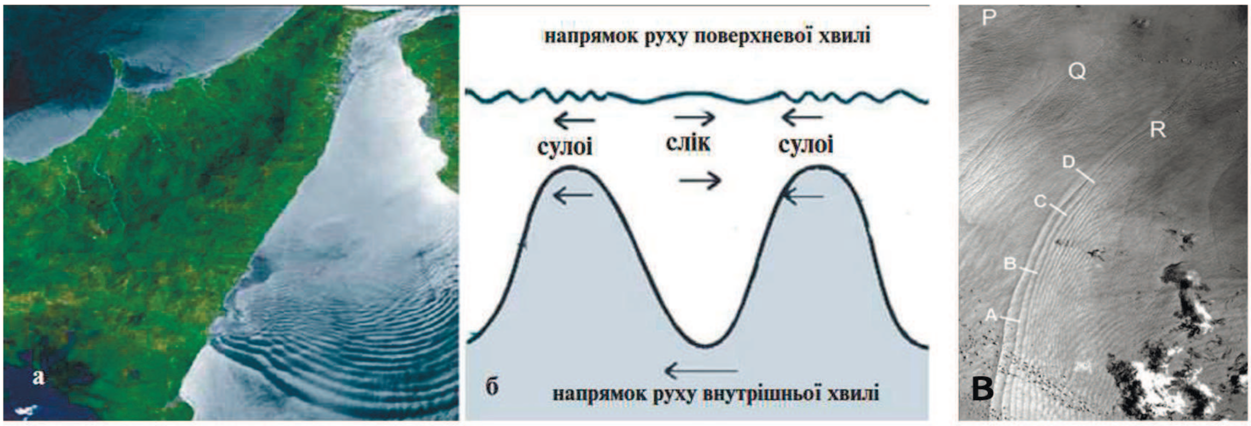

Рисунок 3: (а)- Внутрішні хвилі, що проявляються на поверхні в Мессінській протоці http://earthobservatory.nasa.gov/IOTD/view.php?id=7630; (б) — вплив внутрішніх хвиль на течії на поверхні, (в) - радіолокаційні зображення внутрішніх хвиль, що змінюють полярність з хвиль пониження на хвилі-підвищення (24.07 1996). (21.8N, 116.6 E). Південнокитайське море [288]. Три пакети внутрішніх хвиль P, Q та R, відповідно.

сліки) смуг, вони утворюються при модуляції внутрішніми хвилями поверхневих хвиль (див. рисунок 3 б).

За допомогою радіолокаційних зображень можна вивчати феномени, які відбуваються під водою, наприклад фіксувати феномен зміни полярності хвиль (рисунок 3 в) [288]. На цьому рисунку можна побачити, що прояви внутрішніх хвиль в пакетах P та Q складаються зі світлих смуг, що передують темним смугам, а в пакеті R - темні смужки, що передують світлим смугам. У пакеті R ще одне яскраве явище – це відстань між провідною темною смугою та наступною світлою смугою, що збільшується вздовж хвилевого гребеня. Довжина хвиль вздовж ділянок A, B, C і D приблизно дорівнює 480 м, 500 м, 980 м, 1800 м, відповідно.

В океані та морях поширені так звані **усамітнені** або **відокремлені** внутрішні хвилі. Вони проходять великі відстані без зміни своєї форми. Спостереження таких усамітнених хвиль в океані, отримані за допомогою супутника ERTS (Earth Resources Technology Satellite) дозволили побудувати карту їх місцезнаходження. На рисунку 4 показано розташування місць в океані, де спостерігаються внутрішні усамітнені хвилі.

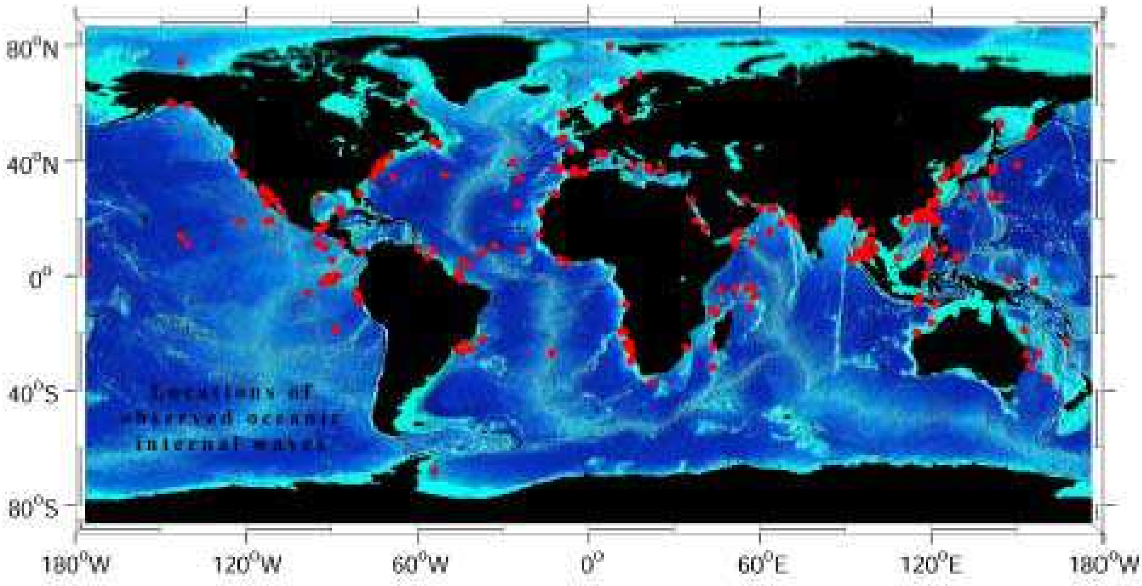

Рисунок 4: Спостереження внутрішніх усамітнених хвиль в світовому океані (джерело www.internalwaveatlas.com/)

Одним із ефективних засобів дистанційного зондування, що використовуються для вивчення внутрішніх хвиль, є радіолокатори з синтезованою апертурою SAR (англ. synthetic aperture radar) — цей спосіб дозволяє отримувати радіолокаційні зображення незалежно від метеорологічних умов та рівня природної освітленості. Як видно з рисунку 4, географія спостережень таких внутрішніх усамітнених хвиль досить широка: вони трапляються скрізь у прибережних ділянках океану, в зонах із сильними змінами рельєфу дна. Внутрішні хвилі також трапляються поблизу гирл великих річок: Амазонки, Оріноко, Міссісіпі, Колумбії, Єнісею, Лени тощо, де прісна легка вода змішується з важкою солоною водою. Є багато спостережень у норвезьких фіордах, в арктичних та антарктичних морях, наприклад, у Баренцевому морі [38] та морі Ведделла [25]. Тут внутрішні хвилі утворюються внаслідок танення льоду в спокійну погоду, коли відносно тонкий шар майже прісної

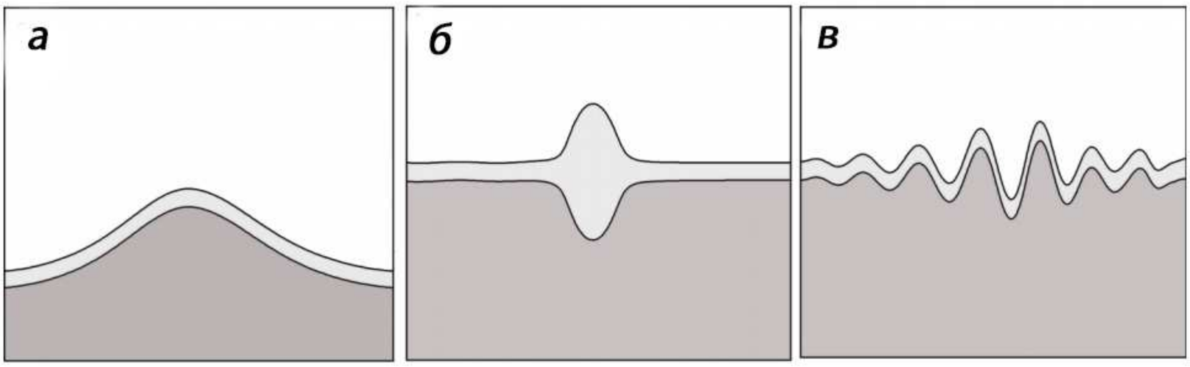

Рисунок 5: Схематичне зображення внутрішніх усамітнених хвиль першої бароклінної моди (хвиля-підвищення) (а), другої бароклінної моди (б), брізероподібного хвильового пакету першої моди (в), що розповсюджуються у тришаровій стратифікації.

води розташовується над солоною морською водою. Внутрішні хвилі порівняно невеликих амплітуд генеруються і у Чорному морі [9], [20], за рахунок проходження атмосферних фронтів.

Більша частина енергії внутрішніх усамітнених хвиль зосереджена в хвилях першої бароклінної моди (рисунок 5 (а)) (про модову структуру внутрішніх хвиль буде йтися в розділі 1.2), які можуть поширюватися або у вигляді хвиль-пониження, коли товщина верхнього шару менше глибини океану, або у вигляді хвиль-підвищення в протилежному випадку. Хвилі першої бароклінної моди поширені у Світовому океані. Хвилі ж другої бароклінної моди (рисунок 5 (б)) не настільки часто зустрічаються в океані. Усамітнені хвилі другої бароклінної моди розповсюджуються в середньому шарі, що міститься між двома іншими шарами постійної густини. Такі хвилі характеризуються асиметричним зміщенням верхніх та нижніх ізопікн в середньому стратифікованому шарі. На рисунку 5 (б) зображено хвилю другої бароклінної моди "опуклого"типу. Окрім внутрішніх усамітнених хвиль, чиє існування теоретично було підтверджено в роботі [92] в рамках рівнянь Ейлера існує інший клас квазі-стаціонарних внутрішніх хвиль, а саме брізероподібних хвильових пакетів, що мають незмінні у часі обвідні (рис.5 (в)). Існування брізерів довгих хвиль в рамках слабкої нелінійності та слабкої дисперсії було показано в рамках асимптотичної теорії [224] для спеціальної стратифікації. Це було підтверджено чисельним моделюванням в рамках рівнянь Ейлера в роботі [152]. Приклади таких пакетів в природі представлені в роботі [271] (Кельтске море) в Андаманському морі [271] та на шельфі Орегону [156]. Припливні потоки в океані часто генерують усамітнені внутрішні хвилі великої амплітуди першої та другої моди над зламом шельфу або над ізольованими підводними пагорбами [270], [287]. Ці усамітнені хвилі поширюються до мілководних областей шельфу, де вони взаємодіють одна з одною та руйнуються на схилах [69], [209]. Внутрішні хвилі, що руйнуються на неоднорідностях рельєфу дна, грають важливу роль в глобальній дисипації приливної енергії і перемішуванні [210]. В мілководних областях проходження цих хвиль супроводжується інтенсивними течіями. Швидкість цих течій може перевищувати 1 м/с в районах з екстремально великими внутрішніми хвилями, такими як регіон Південнокитайського моря [219]. Це призводить до турбулізації придонного прикордонного шару і ерозії дна (наприклад [68]). Внутрішні хвилі великих амплітуд потенційно небезпечні для підводного судноплавства, бурових платформ на шельфі [216], газо- і нафтопроводів та інших підводних інженерних споруд. У шельфових зонах вплив внутрішніх хвиль підсилюється в порівнянні з відкритим морем. На глибинах 100-150 м їх вплив на вертикальний перенос поживних речовин з придонного шару в поверхневий набагато більше, ніж в океані. Заплiск внутрішніх хвиль в зону відсутності термокліну, їх руйнування, що генерує горизонтальну тривимірну турбулентність, призводять до інтенсивного перемішування та формування шару води, насиченого поживними речовинами. Такім чином, оскільки первинна продукція фітопланктону є початковою ланкою продукції всієї біомаси в океані, можна зробити висновок, що локальні процеси посилення нелінійності внутрішніх хвиль і їх руйнування при виході термокліну на мілководдя роблять значний вплив

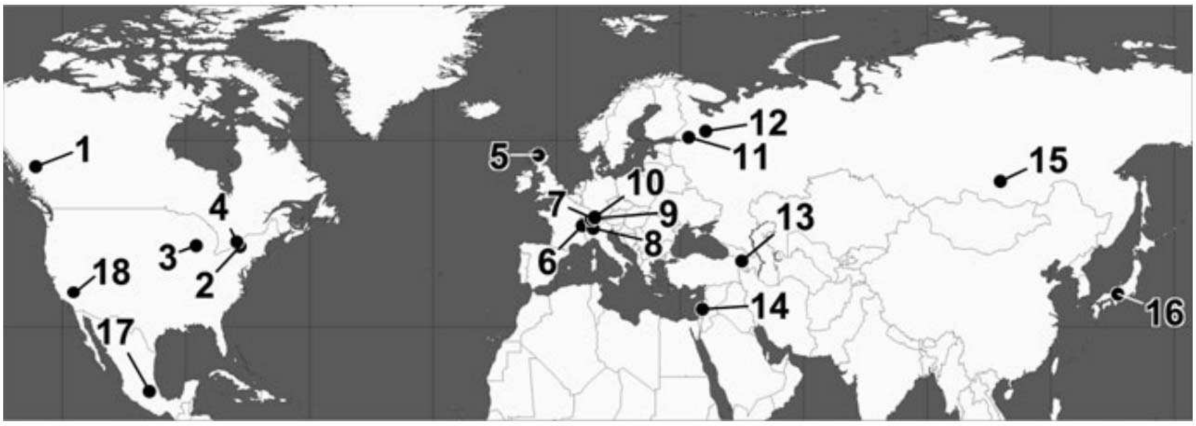

Рисунок 6: Озера, в яких досліджувались внутрішні хвилі [132] : 1 – Бабін, 2 -– Озеро Онтаріо, 3 — Мічиган, 4 — Сенека, 5 — Лох-Несс, 6 — Женева, 7 — Цюріх, 8 — Лугано, 9 -– Бальдеггер, 10 — Констанц, 11 — Ладожське , 12 -– Онєжське, 13 — Сєван, 14 — Тіверіадське озеро , 15 -– Байкал, 16 — Біва, 17 — Чапала, 18 — Моно.

на продуктивність і стан екосистем шельфової зони моря. Ерозія, що спричинена дією внутрішніх хвиль на шельфі є причиною формування геологічних структур, таких як, наприклад, грязьовий поклад (sandy-gravel deposit) на глибинах 40-90 м на шельфі поблизу Португалії [228].

Спостереження внутрішніх хвиль в озерах

Історія спостережень внутрішніх хвиль в озерах триває вже більш ніж 100 років. Перші публікації, з описом натурних вимірювань внутрішніх хвиль в озері Лох-Несс були опубліковані [274] та [275]. Перші дослідження внутрішніх хвиль в озерах використовують довгі ряди вимірювань ланцюгових термісторів, що були запропоновані [206] та використані для вимірювань в озері Віндермер. При цьому було виявлено, що внутрішні стоячі хвилі (внутрішні сейші)виникають як реакція на епізодичну дію вітру, а головний ефект дії вітру на стратифіковані озера – формування стоячих, низькочастотних хвиль, що мають масштаб - довжину озера, та що для великих озер, де дія обертання Землі є суттєвою генеруються хвилі Кельвіна та Пуанкаре. На рисунку 6 зображені озера, в яких вивчались внутрішні хвилі.

Джерела походження внутрішніх хвиль

Внутрішні хвилі характеризуються такими ж елементами, що і поверхневі хвилі. Але їх висота може перевищувати висоту поверхневих хвиль у десятки разів. Швидкість внутрішніх хвиль значно менша за швидкість поширення поверхневих хвиль. Відмінністю внутрішніх хвиль від поверхневих є також те, що внутрішні хвилі розповсюджуються у трьох напрямках на відміну від поверхневих хвиль, що розповсюджуються на поверхні рідини. В стратифікованій рідині під дією певної зовнішньої сили порушується природна рівновага шарів, при цьому частинки води будуть занурюватися на глибину, що залежатиме від перепаду густини та прикладеного зусилля. Досягнувши певної глибини, де густина навколишньої рідини і частинок стане рівною, вони не зупиняться, а за інерцією занурюватимуться у шари з ще більшою густиною. Занурення триватиме до того часу, поки сили інерції не урівноважаться силами плавучості. Потім частинки почнуть підніматися. Коливання будуть тривати доти, доки діє зовнішня сила, що їх викликала із частотою плавучості, що називається частотою Брента-Вяйсяля (див. формулу (1.28)).

Існує декілька основних джерел походження внутрішніх хвиль. Одне з яких - це атмосферне збурення верхнього перемішаного шару океану за рахунок дії вітру. Коли дія вітру припиняється, нижня межа перемішаного шару повільно рухається до положення рівноваги, такий процес називається геострофічною адаптацією. Під час цього процесу випромінюються внутрішні хвилі на частотах близьких до інерційної частоти. Такі хвилі називаються інерційними, в роботі такі хвилі розглядатися не будуть. Ситуація дуже відрізняється для іншого джерела внутрішніх хвиль, які також характеризуються низькими частотами: внутрішні припливи.

Походження внутрішніх припливів полягає в дії астрономічної приливоутворюючої сили: гравітаційний вплив Місяця і, меншою мірою, сонця. Ці сили разом із добовим обертанням Землі, створюють баротропні припливи, які проходять через океани як поверхневі хвилі. При терті припливної хвилі о береги материків кутова швидкість Місяця сповільнюється. Збереження кутового моменту означає, що Місяць повинен віддалятися від Землі. Це підтверджено спостереженнями: відстань між Місяцем і Землею збільшуються на 3.8 см на рік. З цього можна визначити, скільки енергії іде в баротропні припливи в океані: 3.5 ТВ для всіх приливних компонентів разом (1 ТераВатт = 10^{12} Вт). Баротропний приплив, в свою чергу, втрачає свою енергію в основному за рахунок тертя в мілких морях, але також значну частину, близько 30 відсотків (1 ТераВатт) [103], над хребтами у "відкритому" океані: саме тут енергія переходить у внутрішні припливи. Розміри й швидкість переміщення внутрішніх хвиль багато в чому визначаються їхньою природою, походженням і розвитком.

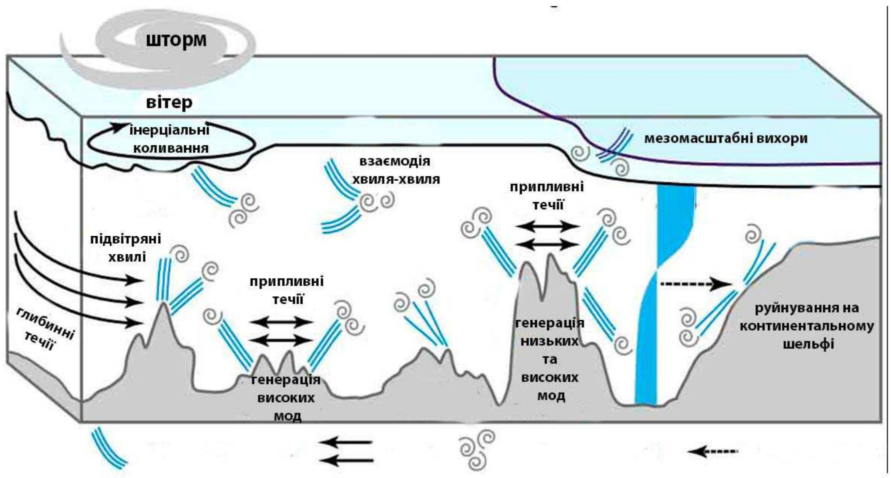

Рисунок 7: Схема процесів, що викликають перемішування внутрішніми хвилями у відкритому океані [273]

Найбільш вивченими експериментально та теоретично є внутрішні хвилі в океані, що генеруються припливними течіями. В океані хвилі розповсюджуються на відстані декілька сотень кілометрів та переносять масу й імпульс, при цьому страшними є непередбачено великі навантаження, що такі хвилі чинять на підводні бурові платформи та підводні човни. При поширенні на

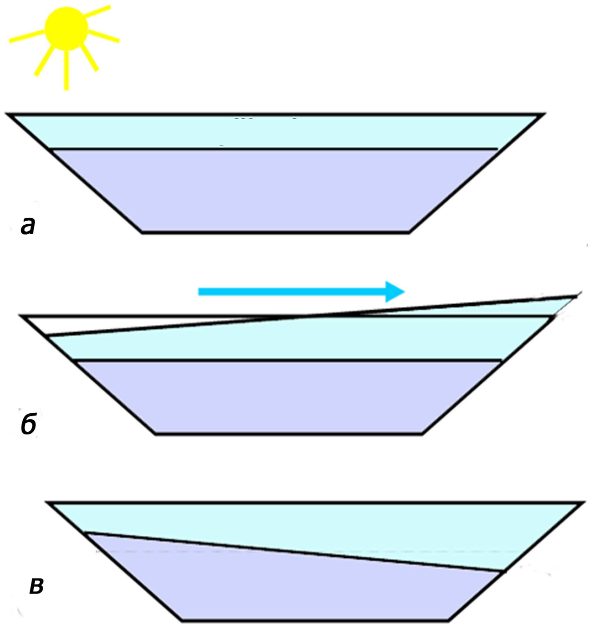

Рисунок 8: Схема утворення внутрішніх хвиль в прісних озерах

шельфі внутрішні хвилі відчувають вплив дна, стають динамічно нестійкими і руйнуються та перетворюються у придонні течії та вихори. Таким чином, поживні речовини із придонних шарів переміщуються у верхні.

Схема процесів, що викликають перемішування внутрішніми хвилями у відкритому океані, зображена на рисунку 7. Припливні течії взаємодіють з неоднорідностями дна та генерують внутрішні хвилі як першої бароклінної моди, так і більш високих бароклінних мод (наприклад, генерація внутрішніх хвиль другої бароклінної моди в околі океанічних хребтів) і внутрішні хвилі низьких мод (наприклад, на високих крутих хребтах, таких, як Гавайський хребет). Глибоководні течії проходять над підводними хребтами та можуть генерувати підвітряні хвилі(наприклад, у Південному океані). Шторми викликають інерційні коливання в перемішаному шарі, де можуть генеруватися як внутрішні хвилі як низьких так і високих мод. В океані ці внутрішні хвилі можуть взаємодіяти з мезомасштабними фронтами.

Внутрішні хвилі утворюються в прісних озерах в помірних широтах в результаті сезонного нагрівання верхнього шару води утворюється стійка стратифікація: верхній прогрітий шар води (епілімніон) та нижній більш холодний шар (гіполімніон). В результаті дії вітру виникають довгі (розмірів озера) низькочастотні стоячі внутрішні хвилі (внутрішні сейші), про них буде іти мова в розділі 6.9. Нелінійність призводить до асиметрії стоячих внутрішніх хвиль, які далі за рахунок дисперсії та нелінійності розпадаються на цуги внутрішніх усамітнених. Механізм переносу енергії від масштабів басейну до дрібномасштабних рухів [126] включає:

1. нелінійне укручення довгих хвиль;
2. зсувну нестійкість течій;
3. запліск і відбиття від схилів;
4. взаємодію з рельєфом дна.

Роль внутрішніх хвиль в процесах перемішування в океані та у глобальному кліматі

На рисунку 9 а, показано поле температури у вертикальному перетині у меридіональному напрямку вздовж Атлантичного океану. Середня температура океану 3.5 С. Але температура суттєво змінюється з глибиною - на глибинах нижче 1000 метрів температура нижча за 5 градусів, а у верхньому 200 метровому шарі, особливо у тропіках вона сягає 30 градусів (див. рис. 1). Разом із змінами солоності по вертикалі це визначає зміни густини по вертикалі, яка є функцією від солоності та температури. В роботах [210], [280] вважається, що діапікнічне перемішування (рис. 9 б) є важливим механізмом, який контролює перемішуванні між верхнім та нижнім шарами в океані. Процесами, що призводять до перемішування є: 1) руйнування внутрішніх хвиль, взаємодією абісальних припливних потоків із рельєфом дна [280]; 2) подвійна дифузія [49].

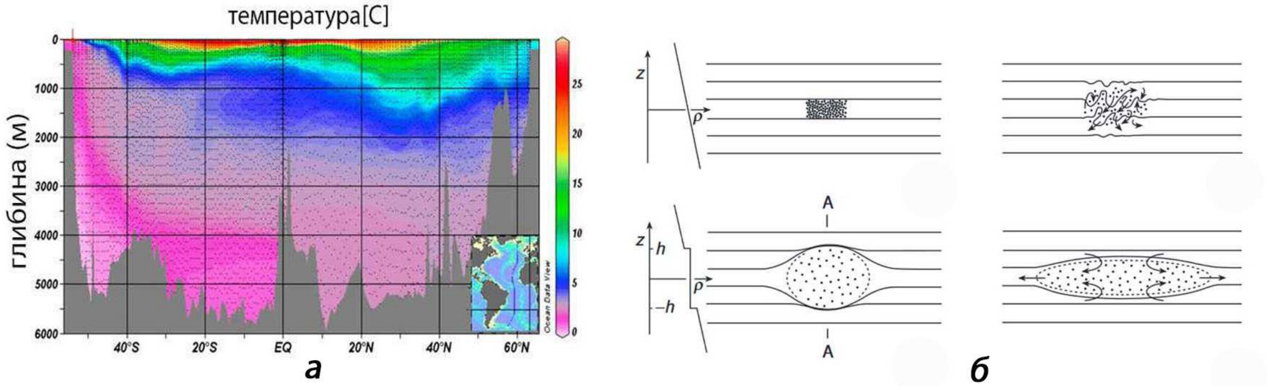

Рисунок 9: а - поле температури у вертикальному перетині у меридіональному напрямку вздовж Атлантичного океану (побудовано за допомогою Ocean Data View https://odv.awi.de/), б - діапікнічне перемішування: початковий профіль густин, зона в якій відбувається турбулентне перемішування, зона колапсує під дією гравітаційних сил та розповсюджується горизонтально у оточуючому середовищі, формуючи інтрузії [261]

Останнім часом увага зосереджена на суттєвій просторовій мінливості коефіцієнту перемішування, який має діапазон змін у декілька порядків, як у верхньому шарі так і у глибинних шарах океану. Розуміння яким чином коефіцієнт діапікнічного перемішування розподілений у просторі та пов'язаний із рухом водних мас, переносом тепла через поверхню океану, накопиченню парникових газів - це новий горизонт у інтерпретації діапікнічного перемішування в океані.

Багато прикладів такого розподілу може бути пояснено за допомогою географії генерації, розповсюдження та дисипації внутрішніх хвиль. Внутрішні хвилі є також важливим джерелом вертикального перемішування океану. Відповідно до сучасних уявлень [210] стік приливної енергії в турбулентність відбувається не по всій акваторії Світового океану, а в так званих "гарячих точках"("hot spots"), районах, прив'язаних, як правило, до великомасштабних хребтів на дні океану і материкового схилу. Розташування таких зон з високими значеннями коефіцієнту діапікнічного перемішування показано на (рис. 10) [147], [225], [277].

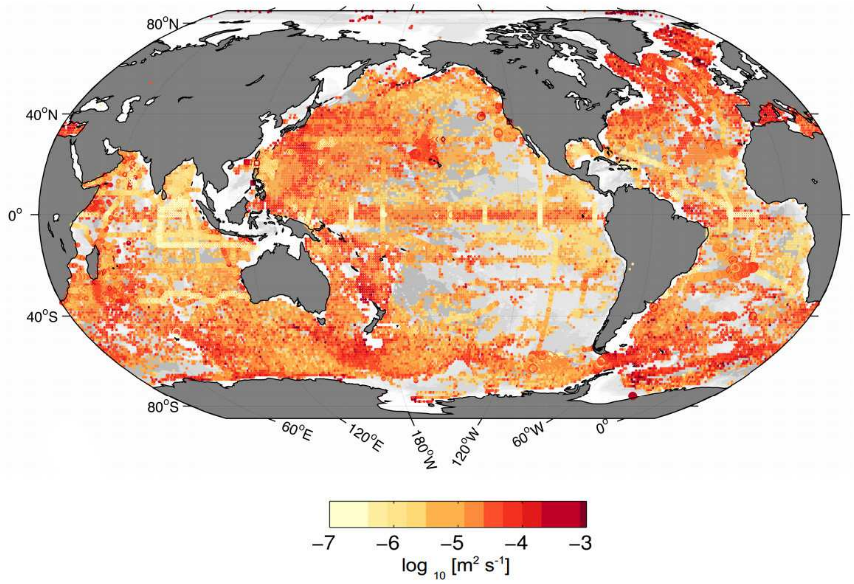

Рисунок 10: Усереднений по глибині коефіцієнт дифузії κ у верхньому шарі 1000 м [273]

В таких районах відбувається передача енергії баротропного припливу у внутрішні хвилі і турбулентність, тоді як в решті океану коефіцієнт вертикальної турбулентної в'язкості залишається близьким до молекулярної кінематичної в'язкості. В роботі [22] наведено результати теоретичних та експериментальних досліджень процесів внутрішнього перемішування та пов'язаних з ними механізмів формування тонкої структури в стійко статифікованому середовищі. Внутрішні хвилі, що генеруються в цих районах, відрізняються великими висотами, що досягають амплітуд 100 м і більше.

Іншою областю постійної присутності нелінійних внутрішніх хвиль є континентальний шельф, який представляє собою мілку область підводної окраїни з невеликим ухилом, що знаходиться між берегом моря або океану і, так званою, бровкою, різким перегином поверхні морського дна (глибина якої зазвичай становить 100 - 200 метрів). Специфічні особливості шельфу (мілка вода, близькість термокліну до поверхні моря або до дна, присутність досить сильних зсувних течій і ін.) роблять цю область дуже цікавою для спостереження та дослідження різноманітних трансформацій нелінійних внутрішніх хвиль, які можуть служити, з одного боку, яскравим ілюстративним матеріалом для теорії нелінійних хвиль в диспергуючих середовищах, а з іншого - бути стимулюючим фактором її розвитку.

Для того, щоб описати процеси дисипації внутрішніх хвиль в рамках чисельних моделей гідродинаміки явно, необхідно, щоб роздільна здатність розрахункової сітки була не менше ніж 1 метр по вертикалі та в межах 1-10 км по горизонталі. Це дуже висока роздільна здатність, яка робить обрахунки надзвичайно громіздкими для глобальних кліматичних моделей навіть при сучасному рівні обчислювальних потужностей. Таким чином, перемішування, що спричиняться внутрішніми хвилями, має бути параметризовано. Діапікнічне перемішування прямо впливає на поглинання та розподіл тепла в океані (наприклад, [115], [146]). Результати цих робіт вказують на те, що використання різноманітних параметризацій розсіювання внутрішнього припливу істотно впливає на моделювання поглинання тепла та рівня моря в світовому океані [146]. Результати моделювання показують необхідність розвитку параметризації втрат енергії та перемішування, що спричиняється внутрішніми хвилями, яка б адекватно відображала фізичні процеси в океані. Саме це і буде однією з задач дисертації.

Теоретичні дослідження внутрішніх хвиль

Результати натурних спостережень показали, що внутрішні хвилі мають форму, далеку від синусоїдальної, а іноді і просто форму окремого імпульсу або усамітненої хвилі. Виявилося, що теорія слабонелінійних внутрішніх хвиль у двошаровій рідині, що заснована на рівнянні Кортевега - де Вріза (КдВ), непогано описує такі усамітнені внутрішні хвилі. Рівняння КдВ було отримано внутрішніх хвиль в наближенні слабкої нелінійності і дисперсії у 1966 році [63]. Підкреслимо, що рівняння КдВ є одновимірним за формою, і описує двовимірні хвильові рухи рідини (одна з горизонтальних і вертикальна координати). Моделі цього класу, на відміну від повних нелінійних моделей, легко узагальнюються для горизонтально неоднорідної рідини (коли стратифікація і профіль швидкості зсувної течії змінюються в просторі) та призводять до рівняння того ж виду, але зі змінними вздовж горизонтальної координати коефіцієнтами. Більшість теоретичних робіт [62], [63], [88], [218] були пов'язані з аналізом хвильових рухів в системах, де внутрішні хвилі є слабонелінійними і довгими по відношенню до повної товщини рідини. Подібні процедури спрощення задачі, як вже зазначалося, приводять до рівняння КдВ, що описують еволюцію хвильових рухів та баланс між нелінійністю і дисперсією. Рівняння КдВ для внутрішніх хвиль буде детально розглянуто в розділі 1.3. Це рівняння було досить добре вивчено і були знайдені методи, що дають точні розв'язки для довільно визначених початкових умов [247]. Були прикладені зусилля для аналізу нелінійних внутрішніх хвиль в рідинах нескінченої товщини ([62], [218]). Хвилі, що описуються рівняннями Бенджаміна-Оно будуть розглянуті в розділі 1.3.5. Тут довгі хвилі були віднесені до верхнього шару термокліну, а не до повної глибини рідини. В роботі [145] було отримано еволюційне рівняння, яке інтерполює ситуацію між мілкою та глибокою водою. Нелінійність та дисперсія є двома фундаментальними механізмами при розповсюджені гравітаційних хвиль у рідинах. Перше узагальнення рівняння КдВ для рідини змінної глибини зроблено в 1978 році [91] і розвивалося в роботах [31], [287]. Тривимірність хвильових рухів призводить до модифікації рівняння КдВ, до так званого рівняння Кадомцева-Петвіашвілі, вперше отриманому для внутрішніх хвиль в роботі [**?**]. Потім до розгляду було додано коріолісові сили, обумовленої обертанням водного басейну [29].

Однак, на відміну від поверхневих хвиль,застосування теорії КдВ для внутрішніх хвиль виявилася більш складною. Так, ще в 1975 році в роботі [137] для випадку внутрішніх хвиль у двошаровій рідині було отримано, що коефіцієнт квадратичної нелінійності обертається в нуль, якщо товщини шарів виявляються близькими. В цьому випадку необхідно вийти за перше наближення в асимптотичній процедурі і виводити модифіковане рівняння КдВ (МКдВ), що буде розглянуто в розділі 1.3.2. Такі узагальнення були зроблені тільки для двошарової рідини. З огляду на те, що в природних водоймах стратифікація не зводиться до двошарової, виникає необхідність отримання розширених рівнянь КдВ для рідини з довільною неперервною і/або багатошаровою стратифікацією. Такі роботи почали виконуватися за останні 20 років [153], [32]. Ця теорія заснована на припущені слабкої нелінійності, і вона не описує хвилі дуже великих амплітуд. Тому важливим напрямком у математичній теорії внутрішніх хвиль є дослідження стаціонарних усамітнених хвиль довільної амплітуди без використання наближення слабкої нелінійності. Треба також відзначити, що в природних умовах стратифікація не зводиться до двошарової, і в теоретичних моделях є необхідність отримання розв'язків для рідини з багатошаровими та довільними стратифікаціями. Тому, за останні десятиріччя були побудовані складніші аналітичні розв'язки, що ігнорують обмеження, які існують в простіших моделях. Але, на жаль, аналітичні розв'язки хвильових задач механіки стратифікованої рідини в рамках вихідних рівнянь гідродинаміки Ейлера або Нав'є - Стокса існують тільки в декількох ідеалізованих випадках. Важливим напрямком в теорії внутрішніх хвиль є дослідження стаціонарних усамітнених хвиль - солітонів довільної амплітуди без використання наближення слабкої нелінійності. Детально асимптотичні теорії хвиль, що описують слабонелінійні солітони будуть представлені в розділі 1.2.4, ці результати будуть необхідними для використання в роботі.

Перша робота, заснована на нелінійній крайовій задачі для функції струму, була зроблена ще у 1932 році [92] і ця ідея потім була розвинена в роботах [167] У разі рідини з майже експоненціальною стратификацією нелінійна хвиля може містити замкнений вихор [90]. Аналітичні розв'язки були отримані для сильнонелінійних внутрішніх хвиль у роботах А. Тер-Крікорова [12], В. Чоя та Р. Камасси [81], Дж. Гру [114] та ін. Аналітичні розв'язки були знайдені для сильно нелінійних внутрішніх хвиль у двошаровій рідині [81], зокрема було доведено існування «товстих» солітонів граничних амплітуд (в наближенні Бусінеска вершина солітону знаходиться на половині повної глибини). Слід, однак, сказати, що у всіх перерахованих роботах розглядаються лише усталені рухи. Теорія сильно-нелінійних хвиль буде представлена в розділі 1.3.6.

Існує велика кількість як теоретичних, так і лабораторних робіт по дослідженню процесів генерації та трансформації внутрішніх хвиль. Лабораторні дослідження по трансформації внутрішніх усамітнених хвиль над перешкодами вивчалась в роботах: [78], [105], [276] накат на похиле дно: [69], [79], [105], [120], [122], [141], [197], [198] стоячі коливання в замкнених басейнах вивчались в роботах [66], [126] генерація та трансформація хвиль першої та другої бароклінної моди [69], [99],[125], [178], [217]. Слід відмітити значний внесок в лабораторні та теоретичні дослідження внутрішніх хвиль співробітників Інституту Гідромеханіки НАН України. Роботи по генерації внутрішніх хвиль рухомими об'єктами представлено в роботах О.Г. Стеценка та В.І. Нікішова [22], в роботах В.І. Нікішова розв'язувалися задачі по генерації внутрішніх хвиль локальними збуреннями [22], [28]. Задачі генерації внутрішніх хвиль при колапсі в стійко стратифікованій рідині були розглянуті В.С. Мадеричем [22], [36], [178]. Результати численних лабораторних експериментів з моделювання взаємодії внутрішніх хвиль з підводними перешкодами та похилим дном представлено в роботах В.І. Нікішова [27] [4] та Н.С. Городецької [105]. Великий цикл робіт було проведено в Морському гідрофізичному Інституті НАН України під керівництвом Л.В. Черкесова [48] та його учнями [2].

Дослідження в океані продемонстрували існування хвиль надзвичайно великих амплітуд [219], [285], які не описуються відомими аналітичними моделями. Основним засобом вивчення динаміки таких хвиль є чисельні моделі, що почали розвиватися наприкінці XX сторіччя [114], [157], [178]. В середині 90х років були розвинені двовимірні чисельні моделі океану, які були започатковані ще раніше в метеорології. Такі моделі базуються на розв'язанні двовимірних у вертикальній площині рівнянь Ейлера [157], і Нав'є – Стокса [268], за допомогою яких вдалося описати важливі процеси еволюції сильнонелінійних хвиль. Обчислювальні труднощі і вимоги до комп'ютерних ресурсів перешкоджали розвитку тривимірних моделей заснованих на рівняннях Нав'є-Стокса. Проте, в 1996-1998 роках були розвинені так звані "негідростатичні" моделі [75], [182], [185]. Останніми роками було розроблено цілий ряд негідростатичних моделей [140], [184], [270]. Вони дають можливість вивчати динаміку хвиль великих амплітуд, їх взаємодію, трансформацію з перешкодами та похилим дном.

Актуальність та цілі роботи

Внутрішні хвилі є невід'ємною частиною динаміки всіх природних водойм (озер, морів, океанів) внаслідок стійкої вертикальної стратифікації по температурі або солоності. Вони впливають на розповсюдження акустичних сигналів [222], на рух підводних апаратів, на розмив шельфу під нафтовими і газовими платформами в прибережних зонах [93] та на процеси вертикального перемішування в океані [280], що пов'язані із змінами клімату. Вже зареєстровані інциденти, коли інтенсивні внутрішні хвилі впливають на бурові установки та призводять до розмиву дна при прокладанні підводних труб [97]. Оцінки, що були зроблені на основі чисельного моделювання в Південнокитайському морі [242] показали, що навантаження від внутрішніх хвиль, які діють на підводні частини платформи, перевершують навантаження від вітрових хвиль. Дія внутрішніх хвиль призводить до транспорту донних намулів і розмиву дна. У деяких місцях на шельфі ерозія, що спричинена дією внутрішніх хвиль, є причиною формування геологічних структур [228]. У шельфових зонах вплив внутрішніх хвиль підсилюється у порівнянні з відкритим морем. Запліск внутрішніх хвиль в зону відсутності термокліну, їх руйнування у шельфових зонах призводять до інтенсивного перемішування та формування шару води, насиченого поживними речовинами. Оскільки первинна продукція фітопланктону є початковою ланкою продукції всієї біомаси в океані, то локальні процеси посилення нелінійності внутрішніх хвиль і їх руйнування при виході термокліну на мілководдя мають значний вплив на продуктивність шельфової зони моря. Актуальність теми дисертації визначається широким спектром прикладних задач, спричинених дедалі активнішим видобутком енергоносіїв на морському та океанічному шельфі, впливом внутрішніх хвиль на акустичні сигнали від підводних рухомих об'єктів та необхідністю параметризації процесів перемішування в глобальних кліматичних моделях, що в цілому викликає необхідність глибокого розуміння закономірностей динаміки внутрішніх хвиль великих амплітуд.

Актуальність теми дисертації визначається широким спектром прикладних задач, спричинених дедалі активнішим видобутком енергоносіїв на морському та океанічному шельфі, впливом внутрішніх хвиль на акустичні сигнали від підводних рухомих об'єктів та необхідністю параметризації процесів перемішування в глобальних кліматичних моделях, що в цілому викликає необхідність глибокого розуміння закономірностей динаміки внутрішніх хвиль великих амплітуд.

Актуальність роботи полягає в необхідності дослідження динаміки внутрішніх хвиль великих амплітуд методами чисельного моделювання.

Метою роботи є дослідження динаміки процесів трансформації внутрішніх усамітнених хвиль першої і другої бароклінної моди над особливостями рельєфу дна, та при їх фронтальній взаємодії. Розробка та вдосконалення чисельної гідродинамічної моделі. Створення класифікації внутрішніх усамітнених хвиль та режимів їх взаємодії з особливостями рельєфу дна. Знаходження втрат енергії усамітнених хвиль на шельфі та при трансформації стоячих хвиль у замкнених водоймах, зокрема, в озерах.

Основною **метою роботи** є дослідження та класифікація процесів трансформації внутрішніх усамітнених хвиль першої і другої бароклінної моди над особливостями рельєфу дна, та при їх фронтальній взаємодії. Поставлена мета передбачає такі основні задачі, що підлягають вирішенню в рамках дисертаційної роботи

- Вдосконалення та застосування чисельної гідродинамічної моделі із вільною поверхнею для дослідження динаміки усамітнених внутрішніх хвиль великих амплітуд.

- Перевірка моделі на результатах натурних і лабораторних експериментів та порівняння з результатами моделювання іншими чисельними гідродинамічними моделями.

- Дослідження трансформації внутрішніх хвиль великої амплітуди першої та другої бароклінної моди над особливостями рельєфу дна.

- Дослідження динаміки фронтальної взаємодії внутрішніх хвиль великої амплітуди першої та другої бароклінної моди.

- Класифікація режимів взаємодії внутрішніх хвиль у двошаровій стратифікації із ідеалізованим трапеціїдальним шельфом.

- Оцінка втрат енергії при перемішуванні, що спричиняється внутрішніми хвилями при їх накаті на континентальний схил та знаходженням місць, де відбувається інтенсивне перемішування на континентальному шельфі.

- Дослідження процесу розпаду довгих хвиль на цуги нелінійних коротких хвиль та обвалення цих хвиль у замкнених водоймах.

- Дослідження нелінійної трансформації внутрішніх сейш (стоячих хвиль масштабів водойм) та їх взаємодії з тривимірним рельєфом дна у вузьких стратифікованих озерах.

Об'єктом наукового дослідження є внутрішні хвилі великих амплітуд, зокрема усамітнені внутрішні хвилі першої та другої бароклінної моди, та стоячі внутрішні хвилі (сейші) в замкнених водоймах.

Предметом наукового дослідження є методи моделювання внутрішніх хвиль великих амплітуд.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в:

- Визначенні меж застосовності асимптотичних слабонелінійних моделей для опису динаміки внутрішніх усамітнених хвиль першої та другої моди.

- У вдосконаленні, з урахуванням нової узагальненої системи координат та паралелізації коду, чисельної гідродинамічної моделі NH-POM для задач динаміки внутрішніх хвиль великих амплітуд.

- Визначенні основних параметрів, що характеризують динаміку хвиль першої і другої бароклінних мод. Показано, що важливими характеристиками, які впливають на динаміку хвиль другої моди є локальне число Фруда Fr та мінімальне число Річардсона Ri_{min}. Виходячи з цього, запропоновано нову класифікацію хвиль другої моди відносно цих параметрів. Показано, що хвилі другої моди затухають по-різному в залежності від типу хвилі і кожному класу хвиль притаманний свій механізм затухання.

- Запровадженні параметру блокування B, який дорівнює відношенню глибини нижнього шару над шельфом до амплітуди хвилі. Він є ефективним для опису трансформації внутрішніх усамітнених хвиль над особливостями рельєфу дна. За допомогою цього параметру було виділено різні типи взаємодії хвиль першої моди із підводними перешкодами і різкими змінами глибин дна та отримано автомодельні залежності втрат енергії при трансформації внутрішніх усамітнених хвиль.

- Виявленні залежності втрат енергії внутрішніх усамітнених хвиль при трансформації над перешкодами різної форми від довжини перешкод та форми.

- У відкритті механізму генерації брізероподібних пакетів внутрішніх хвиль при взаємодії хвиль другої бароклінної моди з підводною сходинкою.

- Виявленні неповної автомодельності динаміки внутрішніх бароклінних хвиль другої моди за числом Рейнольдса, що виражається у залежності мінімального числа Річардсона Ri_{min} від нього при великих значеннях чисел Рейнольдса Re_{eff}.

- Виявленні нового режиму при фронтальній взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль великих амплітуд з утвореннями нестійкості Кельвіна-Гельмгольца, яка виникає як до, так і після зіткнень.

- Виявленні немонотонного характеру залежності втрат енергії від нормованої амплітуди при зіткненні хвиль із замкненими ядрами.

- Виявленні нового режиму трансформації внутрішніх усамітнених хвиль над похилим дном, у якому зсувна нестійкість є домінуючим механізмом трансформації хвиль.

- Класифікації режимів взаємодії внутрішніх хвиль із ідеалізованим трапеціїдальним шельфом, яка основана на параметрі блокування B, куті нахилу дна γ та безрозмірній амплітуді хвилі. Встановлено відповідність запропонованої класифікації з результатами лабораторних та натурних експериментів. Проведено оцінки втрати енергії хвиль на шельфі та та побудовано залежність втрат енергії від характеристик хвиль і рельєфу.

- Побудові карти зон, що відповідають різним режимам трансформації внутрішніх хвиль (як приклад, наведено карту для Південнокитайського моря), із місцями інтенсивного перемішування на шельфі.
- Відкритті нових ефектів, що виникають при взаємодії внутрішньої сейші із неоднорідностями рельєфу дна у вузькому озері, а саме формування донних надкритичних струменів, що породжують вихрові пари з вертикальною віссю, які при русі створюють слідоподібне збурення в термокліні і на поверхні.

Практичне значення одержаних результатів полягає:

1. у створенні чисельної моделі NH-POM, що дозволяє виконувати моделювання динаміки внутрішніх хвиль великих амплітуд у басейнах з довільною стратифікацією та довільними змінами рельєфу дна.
2. у проведені оцінки втрат енергії хвиль на шельфі та побудові залежності втрат енергії від характеристик внутрішніх хвиль, стратифікації та рельєфу. Як приклад, побудована карта зон режимів трансформації внутрішніх хвиль для Південнокитайського моря із областями інтенсивного перемішування на шельфі.

Достовірність наукових положень дисертації забезпечується: використанням загальноприйнятих моделей рідин; коректною постановкою граничних задач; застосуванням надійних аналітичних методів для розв'язку задач; контрольованою точністю чисельних обчислень; узгодженістю між собою чисельних, аналітичних та експериментальних результатів, отриманих в роботі; несуперечливістю одержаних результатів відповідним опублікованим результатам інших авторів

Особистий внесок здобувача

Розробка підходів, параметризацій та реалізація чисельного моделювання, що представлені в роботі належить автору.

В роботах [173], [174], [175], [176], [181], автору належить участь у постановці задач, проведення розрахунків та інтерпретація чисельних результатів разом з міжнародною групою співавторів та обговорення формулювання висновків. В роботах [24] та [25] автору належить проведення чисельних розрахунків, та співставлення з результатами натурних вимірювань.

В роботі [5] здобувачу належить проведення чисельних розрахунків співставлення результатів чисельних експериментів моделями MIT и NH-POM та аналітичними розв'язками. В роботах [9] та [8] здобувачу належить проведення чисельних розрахунків циркуляції Чорного моря.

В роботах [4], [7] автор виконував розрахунки, брав участь в обговоренні постановки задач та висновків разом з групою чл.-кор. НАНУ В.І. Нікішова, якій належить проведення лабораторного експерименту.

В роботах [3], [71], [177] автору належить чисельна реалізація розрахунків. В роботах [23] автору належить участь в постановці задач, розробка та вдосконалення чисельних алгоритмів. В роботах [39], [26], [41], [40], [43], [45], [179], [260], [44] автору належить постановка задачі, співставлення результатів чисельних експериментів з аналітичними розв'язками та даними лабораторних експериментів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами Робота виконувалась в рамках:

- бюджетних тем та фундаментальних досліджень Інституту проблем математичних машин та систем НАН України: "Розробка теоретичних основ побудови нових моделей, алгоритмів і розподілених інформаційних технологій підтримки прийняття рішень в системах електронного урядування (Е-СИСТЕМА)”; “Методи та моделі створення та інтеграції новітніх інформаційних технологій в системах підтримки прийняття рішень різного призначення (ІНТЕГРАЦІЯ)”;

- проекту INTAS №03-51-4620 “Сильно нелінійні внутрішні хвилі в озерах: виникнення, трансформація та перемішування”(2004-2007)

- проекту INTAS №03-51-3728 “Північні моря в глобальній кліматичній системі” (2004-2007)

- спільного проекту РФФД (Росія) - ДФФД (Україна) № Ф28.6/010 “Внутрішні хвилі великої амплітуди в океані із змінною глибиною: аналітичні розв’язки та чисельне моделювання” (2009-2010)

- спільного проекту РФФД (Росія) - ДФФД (Україна) № Ф53.6/009 “Інтенсивні внутрішні хвилі в океані і їх вплив на підводні споруди та платформи”(2013-2014)

- проекту Державного Фонду Фундаментальних Досліджень Ф64/22 “Моделювання змін рівня, температури, солоності у Чорному та Азовському морях та їх впливу на навколишнє природне морське середовище згідно сценаріїв змін клімату в XXI столітті”;

- науково-дослідних роботах молодих вчених НАН України: “Інтелектуальна інформаційна система стану прибережної зони моря” (2005 - 2006); “Моделювання плавучих струменевих течій та прогнозування їх впливу на оточуюче середовище” (2007-2008); “Тривимірне моделювання взаємодії хвиль та течій в задачах прибережної гідродинаміки” (2009-2010)

- грантів Президента України “Чисельне негідростатичне моделювання струменів та гравітаційних течій та його застосування до проблем прибережної гідродинаміки”(2008,2014)

Апробація роботи Матеріали різних розділів дисертації доповідались та обговорювались на міжнародних та вітчизняних наукових конференціях, зокрема на: 7-ти конференціях Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Е. Пухова НАН України (2006, 2010, 2012, 2013, 2014, 2016, 2018); 11-ти конференціях «Математичне та імітаційне моделювання систем» (МОДС) (2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2013, 2014, 2016, 2017, 2018); 10-ти конференціях Європейської Геофізичної Спілки (EGU), Відень (2005, 2007, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019); на конференції Американської Геофізичної Спілки (AGU) Сан-Франциско (2010), на щорічному з'їзді Корейської Асоціації наук та технологій про океан (KAOST) (2008); на IV Міжнародній Антарктичній конференції, Київ (2009); на V Міжнародній Антарктичній конференції, Київ (2011); на XXIII конференції ICTAM, Пекін (2012); на XXII Науковій Сесії Ради РАН з нелінійної динаміки, Москва (2013); на конференції Wave interaction WIN 2014, J. Kepler University Linz, Austria (2014) та на двох конференціях «Комп'ютерна Гідромеханіка», Київ (2016, 2018). Робота в цілому доповідалась на семінарі в Інституті проблем математичних машин та систем НАНУ (2017-2018), на серії з трьох семінарів в Інституті Гідромеханіки НАНУ (2018), на семінарі кафедри механіки суцільних середовищ механіко-математичного факультету Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка (2019). Окремі розділи роботи доповідались на засіданні Президії НАНУ за темою «Чисельне негідростатичне моделювання у задачах прибережної гідродинаміки» (травень 2009), на семінарах Першого Океанографічного Інституту (FIO), Циндао, Китай (2012-2018); семінарах Корейского Інституту Наук про Океан (KIOST), Ансан, Південна Корея (2011-2018); семінарах Національного Університету Сеулу (2014, 2016), університету INHA, Інчон, Південна Корея (2015), Інституту Океанографії Китайської Академії Наук IOCAS, Циндао (2017, 2018) та на семінарі бюро відділення наук про Землю президії НАНУ (2018) та на семінарах Ради молодих вчених ІПММС НАНУ (2017-2018).

Публікації Результати дисертації опубліковано у 54 роботах: у главі монографії (у співавторстві), 27 статтях, в тому числі у фахових вітчизняних та зарубіжних виданнях 23 (з них 3 одноосібні), 26 робіт в збірниках праць та тез міжнародних конференцій. З опублікованих по дисертації робіт налічується 12 публікацій у виданнях, включених до наукометричних баз Scopus та Web of Science.

Структура дисертації

Робота складається зі вступу, семи розділів, висновків, додатків та списку використаних джерел з 288 найменувань. Робота включає 330 сторінок основного тексту, 181 рисунок, 24 таблиці, усього 390 сторінок.

В *вступі* розкрито сутність і стан наукової проблеми, обґрунтовано важливість і актуальність теми дисертації, викладено мету роботи та сформульовано основні положення, що виносяться на захист, її практичне значення та наукова новизна.

В *першому розділі* представлено постановку задачі та короткий огляд деяких асимптотичних моделей внутрішніх хвиль. Розглянуто моделі, що описують як слабонелінійні внутрішні хвилі малих амплітуд, так і хвилі скінчених амплітуд, як довгі внутрішні хвилі так і короткі хвилі при різних типах стійких стратифікації. Розглянуто межі застосовності тих чи інших моделей, продемонстровано зіставлення аналітичних розв'язків з результатами лабораторних, чисельних та натурних експериментів.

В *другому розділі* представлено короткий огляд гідродинамічних негідростатичних чисельних моделей та детально описана модель NH-POM, яка застосовувалася для моделювання внутрішніх хвиль в даній роботі. В цьому ж розділі представлені деякі приклади порівняння результатів моделювання та результатів лабораторних експериментів і аналітичних розв'язків.

В *третьому розділі* розглядається динаміка внутрішніх хвиль великих амплітуд першої бароклінної моди в прибережних зонах, а саме їх трансформація над неоднорідностями дна, дисипація при розповсюджені, та обвалення на шельфі. В цьому розділі розглядаються як двошарова так і тришарові стратифікації.

В *четвертому розділі* розглядається динаміка внутрішніх хвиль великих амплітуд другої бароклінної моди в прибережних зонах, еволюція хвиль другої моди із захопленими ядрами, та їх затухання при розповсюдженні. В розділі представлено їх класифікацію, особливості трансформації таких хвиль над підводною сходинкою.

В *п'ятому розділі* розглядається взаємодія хвиль першої та другої бароклінної моди. Розглянуті випадки фронтальної взаємодії таких хвиль як однакових так і різних амплітуд. З'ясовується питання: чи є фронтальна взаємодія між внутрішніми усамітненими хвилями еластичною та робляться оцінки втрат енергії при зіткненні.

В *шостому розділі* проводиться класифікація режимів взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль із трапеціїдальним дном. Розглянуто випадки трансформації внутрішніх усамітнених хвиль із похилим дном та підводною сходинкою, що розглядались в третьому розділі, є граничними випадками такої класифікації. За допомогою класифікації було виділено типи взаємодії в залежності від кута нахилу шельфу, амплітуди хвилі, стратифікації і глибини шельфу. В результаті проводиться оцінка втрат енергії при накаті внутрішніх хвиль на континентальний шельф. З урахуванням такої класифікації складено зональну карту шельфової зони Південнокитайського моря, та виділені області, де дисипація енергії на континентальному шельфі буде значною.

Сьомий розділ присвячений трансформації стоячих внутрішніх хвиль в замкнених водоймах, зокрема в озерах. В цьому розділі вивчаються механізми трансформації стоячих внутрішніх хвиль в цуги усамітнених хвиль, та переносу енергії від великих масштабів до малих. Проведено ряд чисельних експериментів, що мають на меті описати процеси переносу енергії від масштабів басейну до мілкомасштабних рухів спочатку для ідеалізованого прямокутного басейну, потім для ідеалізованого тривимірного озера, та для реального озера Лох-Несс.

Автор висловлює щиру вдячність науковому консультантові доктору фізико-математичних наук, професору Володимиру Станіславовичу Мадеричу за постійну увагу до роботи та корисні дискусії

Розділ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. МОДЕЛІ ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ

1.1 Постановка задачі

Основні рівняння стратифікованої рідини

Дослідження нелінійної динаміки стратифікованої рідини з вільною поверхнею є складною задачею. Аналітичні розв'язки хвильових задач в рамках вихідних рівнянь Нав'є - Стокса можливі тільки при істотній ідеалізації проблеми. Наведемо необхідну для подальшого аналізу систему рівнянь для рідини, стратифікованої за температурою та солоністю в наближенні Бусінеска [148]. Це наближення добре працює для природних стратифікованих водойм: морів, океанів та озер.

Рівняння Нав'є-Стокса описують рух рідини, в декартовій системі координат вони мають вигляд:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\rho}{\rho_0}\vec{g} + \nu\Delta\vec{U}. \tag{1.1}$$

Зліва в рівняння входить повна похідна по часу, а справа градієнт тиску, сила тяжіння та сили тертя. Рівняння нерозривності в наближені Бусінеска має вигляд:

$$\nabla\vec{U} = 0. \tag{1.2}$$

Рівняння переносу температури T та солоності S, що описують дифузію та адвекцію, мають вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla T = \chi_T \Delta T, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla S = \chi_S \Delta S, \tag{1.4}$$

Вони доповнені рівнянням стану:

$$\rho = \rho(S, T, p). \tag{1.5}$$

В рівняннях (1.1)-(1.5) $\vec{U} = (u, v, w)$ – вектор швидкості, ρ – густина, ρ_0 – середнє значення густини, p – тиск, ν - молекулярна в'язкість, χ_S та χ_T – коефіцієнти дифузії солі та тепла, відповідно. $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ градієнт, Δ – векторний оператор Лапласа, $\vec{g} = (0, 0, -g)$ – вектор прискорення сили тяжіння. З рівнянь (1.1) – (1.5) треба знайти три компоненти швидкості $\vec{U}$, тиск p, температуру T, солоність S та густину ρ. Аналітичного розв'язку цієї системи в загальному вигляді не існує. При розгляді процесів, що пов'язані з розповсюдженням внутрішніх хвиль будемо використовувати деякі спрощення, для конкретних задач і нехтувати деякими явищами. Загальні наближення та їх обмеження при описі хвильових явищ наведено в таблиці 1.1. В розділі 1.1 будуть розглядатися лінеарізовані рівняння, які не описують нелінійну взаємодію хвиль, але дають можливості отримати аналітичні розв'язки, та спрощення у вигляді гідростатичного наближення, коли нехтуються членами з вертикальним прискоренням, що дає змогу в чисельних розрахунках суттєво спростити розрахунки. Порівняння динаміки внутрішніх хвиль для повного розв'язку та у гідростатичному наближенні буде представлена в 7.1.1. Ефекти впливу на динаміку внутрішніх хвиль вільної поверхні, та порівняння динаміки внутрішніх хвиль із вільною поверхнею та із твердою кришкою наведено в розділах 5.1.1 та 7.1.1. Наближення Бусінеска та нестисливості використовується для всіх задач, які розглядаються в роботі.

Табл. 1.1: Апроксимації, що використовуються для спрощення системи рівнянь

спрощення	*ознака*	*обмеження*
Лінеаризація	нехтують адвективними членами	не враховується нелінійна взаємодія хвиль
Наближення гідростатики	нехтують вертикальним прискоренням	не описується дисперсія хвиль
Наближення Бусінеска	нехтують змінами густини, окрім гравітаційних членів	не описується динаміка для випадку великих змін густини
Наближення твердої кришки	$\xi = 0$	не описуються поверхневі хвилі

Граничні умови

Граничні умови на поверхні. Кінематичні умови на вільній поверхні води $z = \xi\left(x, y, t\right)$ мають вигляд

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y}, \tag{1.6}$$

і тиск на вільній поверхні $p = p_a$, де p_a - це атмосферний тиск. Потоки імпульсу, тепла і солі на вільній поверхні мають задаються як:

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_x}{\rho_0}; \tag{1.7}$$

$$\nu \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_y}{\rho_0}; \tag{1.8}$$

$$\chi_T \frac{\partial T}{\partial z} = F_T, \tag{1.9}$$

$$\chi_S \frac{\partial S}{\partial z} = F_S, \tag{1.10}$$

де F_T F_S - потоки тепла та солоності на поверхні, τ_x, τ_y – дотичні напруження на вільній поверхні в напрямках осей x та y відповідно. У більшості задач використовувалися умови відсутності потоків тепла і солі $F_T = 0$ $F_S = 0$ та відсутності дотичних напружень τ_x, τ_y.

В деяких задачах (в розділі 5.1.1 та 7.1.1) використовувалося наближення "твердої кришки". В цьому випадку використовується умова:

$$w = 0. \tag{1.11}$$

Граничні умови на дні при $z = -H$:
умови ковзання на дні:

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{1.12}$$

$$\nu \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \tag{1.13}$$

та умови непротікання

$$w = 0. \tag{1.14}$$

Потоки тепла та солоності дорівнюють нулеві:

$$\chi_T \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \tag{1.15}$$

$$\chi_T \frac{\partial S}{\partial z} = 0. \tag{1.16}$$

Граничні умови на твердих бічних стінках

Умови ковзання на бічних стінках

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{n}} = 0. \tag{1.17}$$

Потоки скалярів (температури та солоності) відсутні

$$\chi_T \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0, \tag{1.18}$$

$$\chi_S \frac{\partial S}{\partial \vec{n}} = 0, \tag{1.19}$$

де $\vec{n}$ – вектор нормалі до бічних стінок;

Початкові умови будуть описані і розділі 2.4.

1.2 Лінійні моделі внутрішніх хвиль

1.2.1 Лінійні біжучі внутрішні хвилі в неперервно стратифікованій ідеальній рідині

Для випадку, коли в'язкими ефектами можна знехтувати рівняння (1.1) зводяться до рівнянь Ейлера, що описує потік ідеальної рідини.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\rho}{\rho_0}\vec{g}. \tag{1.20}$$

Будемо розглядати внутрішні гравітаційні хвилі, що розповсюджуються в нестисливій ідеальній рідині. Їх виникнення пов'язано з спричиненою полем тяжіння неоднорідністтю рідини. Тиск буде змінюватися з висотою, тому переміщення будь-якої об'єму рідини по висоті призведе до порушення механічної рівноваги, а потім до коливального руху. Припустимо, що рівняння стану (1.5) можна лінеаризувати:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha_T(T - T_0) + \beta_S(S - S_0)). \tag{1.21}$$

Тоді рівняння переносу скалярів (1.3)-(1.4) зведуться до одного рівняння

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \rho = \chi \Delta \rho, \tag{1.22}$$

де χ- коефіцієнти дифузії. Таким чином маємо п'ять невідомих ρ, p, u, v, w, та п'ять рівнянь (1.1) – (1.4) та (1.22). Будемо позначати значення величин в стані механічної рівноваги зірочкою, а малі відхилення в хвилі – штрихом. Таким чином

$$p = p_* + p', \tag{1.23}$$

$$\rho = \rho_* + \rho'. \tag{1.24}$$

Величини тиску та густини в стані механічної рівноваги p_0 та ρ_0 будуть знаходитись у стані гідростатичного балансу

$$\frac{dp_*}{dz} = -\rho_* g. \tag{1.25}$$

Для випадку лінійного наближення можна знехтувати нелінійними доданками в (1.1) – (1.4) та (1.22). Тоді рівняння (1.22) буде переписано як:

$$\frac{\partial(\rho_* + \rho')}{\partial t} + u\frac{\partial(\rho_* + \rho')}{\partial x} + v\frac{\partial(\rho_* + \rho')}{\partial y} + w\frac{\partial(\rho_* + \rho')}{\partial z} = 0. \tag{1.26}$$

Таким чином лінеаризоване рівняння (1.22) має вигляд:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w\frac{\partial \rho_*}{\partial z} = 0, \tag{1.27}$$

яке означає, що збурення густини в точці створюється тільки за рахунок вертикальної адвекції збурення фонової густини.Введемо величину, що називається частотою Брента—Вяйсяля:

$$N = \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial z}, \tag{1.28}$$

та плавучість

$$b = \frac{g(\rho - \rho_0)}{\rho_0}. \tag{1.29}$$

Лінеаризуємо вихідні рівняння (1.1) – (1.4) для випадку нев'язкої рідини. Це означає, що маємо знехтувати членами, що містять добуток невідомих $(\vec{U}\nabla)\vec{U}$. Ці члени відповідають за взаємодію між хвилями. Коли ми нехтуємо такими члени, ми суттєво спрощуємо задачу, в цьому випадку суперпозиція розв'язків також буде розв'язком вихідної системи. Нелінійні члени можна 'пропустити', якщо амплітуди хвиль, що розглядаються, будуть 'малими'. Розглянемо повну похідну

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}} + \underbrace{w\frac{\partial u}{\partial z}} + ... \tag{1.30}$$

$$\frac{U}{T} \qquad \frac{U^2}{L} \qquad \frac{U^2}{L} \qquad \frac{UW}{H} \tag{1.31}$$

Таким чином, відношення кожного нелінійного члена к члену з похідною по часу це $\frac{U}{C}$, де $C = \frac{L}{T}$ - це фазова швидкість розповсюдження внутрішніх хвиль. Нелінійні члени можуть бути знехтувані, якщо $U << C$, тобто коли локальна швидкість хвиль набагато менша за фазову швидкість. Характерна фазова швидкість хвиль 1 м/с, таким чином локальна швидкість має становити не більше 10 см/с так, щоб до них можна було застосовувати лінійне наближення. Тоді рівняння (1.1) – (1.4) у лінійному наближенні будуть мати вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p^{'}}{\partial x}, \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p^{'}}{\partial y}, \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p^{'}}{\partial z} + b, \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + N^2 w = 0. \tag{1.35}$$

Цю систему рівнянь можна звести до одного рівняння з однією невідомою w:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 w + N^2 \nabla_h^2 w = 0, \tag{1.36}$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Можна показати, що інші змінні $p^{'}, u, v, b$ задовольняють аналогічне рівняння. Те, що змінна w була обраною для цього рівняння пояснює факт, що граничні умови для вертикальної швидкості найбільш легко задаються саме для цієї змінної. Рівняння (1.36) – це відправна точка для подальшого розуміння проблеми. Розглянемо розповсюдження хвиль вздовж вісі x. Будемо шукати розв’язок у вигляді

$$w = W(z) exp(i(kx - \omega t)). \tag{1.37}$$

Підставимо (1.37) у (1.36) та отримаємо звичайне диференціальне рівняння для W:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + k^2 \frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2} W = 0. \tag{1.38}$$

До рівняння додаються граничні умови на поверхні та на дні

$$W = 0(z = 0, -H). \tag{1.39}$$

Разом (1.38) та (1.39) утворюють задачу Штурма-Ліувілля, яка для фіксованого значення ω має нескінчену кількість зв'язків W_n (власні функції, вертикальні моди) із відповідним значеннями власних значень k_n. Інші змінні p, u, v, b можуть бути аналогічно виражені через W:

$$u = \frac{i}{k}W', v = \frac{1}{\omega k}W', p = ip_*\frac{\omega^2}{\omega k^2}W', b = \frac{iN^2}{\omega}W. \tag{1.40}$$

Слід відмітити, що з (1.39) та (1.40) випливає, що проінтегровані по вертикалі швидкості дорівнюють нулю:

$$\int_{-H}^{0} udz = 0, \int_{-H}^{0} vdz = 0. \tag{1.41}$$

Розв'язок w складається з суперпозиції

$$w = \sum W_n(z)(a_n^{\pm} exp(i(k_n^{\pm} x - \omega t))). \tag{1.42}$$

Знак $+$ вказує на хвилі,що розповсюджуються вправо, а знак $-$ відповідно на хвилі, що розповсюджуються наліво. Для зручності позначимо

$$m^2(z) = k^2\frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2}. \tag{1.43}$$

Тоді розв'язки рівняння (1.38) можуть бути двох типів в залежності від знаку m^2. Зазвичай, в океані та атмосфері $m^2 < 0$, але іноді може бути $m^2 > 0$ при дуже слабкій стратифікації. У випадку ж коли $m^2 < 0$ розв'язки існують у вигляді експоненціально затухаючих хвиль. Для низькочастотних хвиль

$N \gg \omega$ (1.43), якими є, наприклад, внутрішні припливи, зазвичай можна застосувати гідростатичне наближення, коли можна знехтувати прискоренням вертикальної швидкості $\frac{\partial w}{\partial t}$. Тому рівняння (1.38) можна записати у вигляді

$$\frac{d^2W_n(z)}{dz^2} + \frac{N^2}{c^{2_n}}W_n(z) = 0, \tag{1.44}$$

де $W_n(z)$ – власна функція для n-ї моди, c_n - власне значення (або модальна фазова швидкість лінійних хвиль), $N(z)$ – плавучість. Таким чином вертикальна структура мод W_n не залежить від частоти ω.Якщо ж додати до розгляду дію стаціонарного зсувного потоку зі швидкістю $U(z)$, то рівняння (1.38) буде мати вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(U(z)-c\right)^2\frac{\partial W}{\partial z} + \left(N^2(z) - \frac{\omega^2}{c^2}(U(z)-c)^2\right)W = 0, \tag{1.45}$$

з граничними умови на поверхні та на дні (1.39). Це рівняння має особливість при $U(z) = c$. Ця задача була досліджена в роботі [199] та [127]. В цій роботі було отримано критерій стійкості при

$$N^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 < 0. \tag{1.46}$$

З цієї умови можна визначити локальне число Річардсона

$$Ri = N^2/\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2, \tag{1.47}$$

де N - визначається за формулою (1.28) та критерій стійкості буде мати вигляд:

$$Ri > 0.25. \tag{1.48}$$

1.2.2 Лінійні біжучі хвилі в двошаровій стратифікації

Розглянемо двошарову стратифікацію, зображену на рис. 1.1 а. Функція структури вертикальної швидкості W_n знаходиться з рівняння без тертя та без набігаючого потоку у наближенні Бусінеска (1.44).

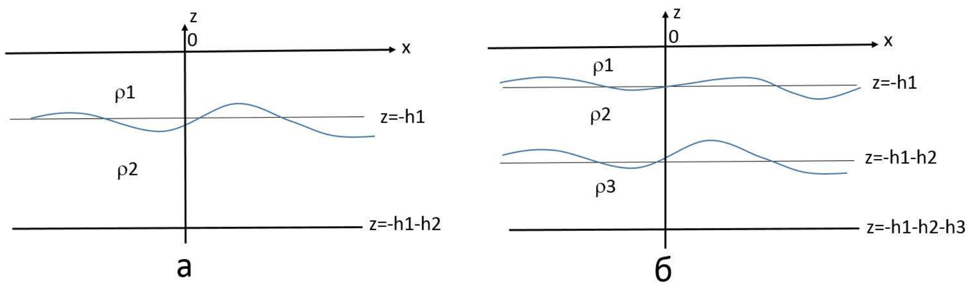

Рисунок 1.1: Двошарова (а) та тришарова стратифікації (б)

Для випадку двошарової стратифікації з глибинами шарів h_1, h_2, відповідно та умовою "твердої кришки"на поверхні $W_n(0) = 0$. Та $W_1(-h_1 - h_2) = 0$. Тоді функція W_n з (1.42) має вигляд:

$$W_1(z) = \begin{cases} -\frac{z}{h_1}, h_1 \le z \le 0 \\ \frac{1-\gamma_n}{h_2}(z + h_1 + h_2) + \gamma_n, -h_1 - h_2 \le z \le -h_1, \end{cases} \tag{1.49}$$

$$U_1(z) = \begin{cases} -\frac{1}{h_1}, h_1 \le z \le 0 \\ \frac{1-\gamma_n}{h_2}, -h_1 - h_2 \le z \le -h_1, \end{cases} \tag{1.50}$$

де γ_n – це відношення вертикальної компоненти швидкості в нижньому шарі розділу до швидкості на верхньому шарі $W_1(-h_1 - h_2)/W_1(-h_1)$. Якщо проінтегруємо рівняння від $-h_1 - z/2$ до $-h_1 - h_2 + z/2$ отримаємо

$$\gamma_n = -(\frac{h_2 g_1'}{c^{2_n}} - \frac{h_2}{h_1} - 1). \tag{1.51}$$

Фазова швидкість довгих внутрішніх хвиль першої бароклінної моди має вигляд:

$$c_0^2 = \frac{h_1 h_2 g \frac{\triangle\rho}{\rho}}{(h_1 + h_2)}, \tag{1.52}$$

де $\triangle\rho/\rho$ – стрибок густини між верхнім та нижнім шаром. З формул (1.49) та (1.50) знаходимо W_1 та U_1. Профілі горизонтальної та вертикальної швидкості у випадку двошарової стратифікації можна побачити на рисунку 1.2 а.

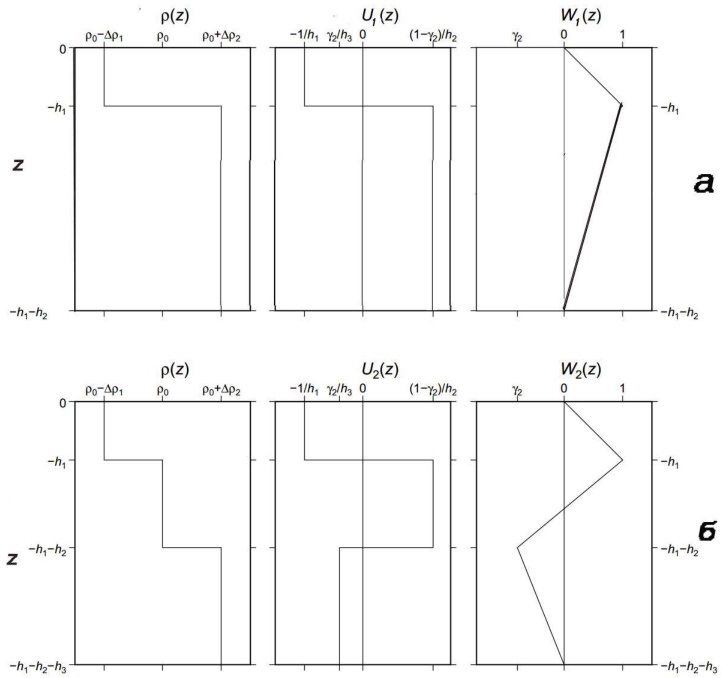

Рисунок 1.2: (а)-Перша бароклінна мода: профіль густини,профіль горизонтальної швидкості, вертикальна компонента швидкості для випадку двошарової стратифікації. (б) - Друга бароклінна мода: профіль густини, профіль горизонтальної швидкості, вертикальна компонента швидкості для випадку тришарової стратифікації.

1.2.3 Лінійні біжучі хвилі в тришаровій стратифікації

Розглянемо тришарову стратифікацію, в якій можуть існувати хвилі другої моди і покажемо аналітичні розв'язки у випадку слабонелінійної теорії. Для випадку тришарової стратифікації так само, як і вище, розглянемо тришарову рідину з глибинами шарів h_1, h_2, та h_3, відповідно. В цьому випадку $W_n(-h_1-h_2-h_3)=0$. Тоді аналітичний розв'язок має вигляд:

$$W_2(z)=\begin{cases} -\frac{z}{h_1}, h_1 \le z \le 0 \\ \frac{1-\gamma_{n1}}{h_2}(z+h_1+h_2)+\gamma_n, -h_1-h_2 \le z \le -h_1 \\ \frac{\gamma_{n2}}{h_3}(z+h_1+h_2+h_3), -h_1-h_2-h_3 \le z \le -h_1-h_2, \end{cases} \tag{1.53}$$

$$U_2(z)=\begin{cases} -\frac{1}{h_1}, h_1 \le z \le 0 \\ \frac{1-\gamma_{n1}}{h_2}, -h_1-h_2 \le z \le -h_1 \\ \frac{\gamma_{n2}}{h_3}, -h_1-h_2-h_3 \le z \le -h_1-h_2, \end{cases} \tag{1.54}$$

де γ_n це відношення вертикальної компоненти швидкості в нижньому шарі розділу до швидкості на верхньому шарі $W_2(-h_1-h_2)/W_2(-h_1)$. Якщо проінтегруємо рівняння від $-h_1-z/2$ до $-h_1-h_2+z/2$ отримаємо

$$\gamma_{n1}=-(\frac{h_2 g_1'}{c^{2_n}}-\frac{h_2}{h_1}-1), \tag{1.55}$$

$$\gamma_{n2}=-(\frac{h_2 g_2'}{c^{2_n}}-\frac{h_2}{h_3}-1)^{-1}. \tag{1.56}$$

Якщо підставимо рівняння (1.56) у вираз (1.55), то отримаємо рівняння для швидкості:

$$(h_1+h_2+h_3)c_n^4-((h_1(h_2+h_3)g_1'+(h_1+h_2)h_3g_2'))c_n^2+h_1h_2h_3g_1'g_2'=0. \tag{1.57}$$

Таким чином, лінійні швидкості c_1 та c_2 дорівнюють:

$$\begin{gathered} c_1^2=\frac{h_1(h_2+h_3)g_1'+(h_1+h_2)h_3g_2'}{2(h_1+h_2+h_3)}, \\ +\frac{\sqrt{(h_1(h_2+h_3)g_1'+(h_1+h_2)h_3g_2')^2-4(h_1+h_2+h_3)h_1h_2h_3g_1'g_2'}}{2(h_1+h_2+h_3)}, \end{gathered} \tag{1.58}$$

$$\begin{gathered} c_2^2=\frac{h_1(h_2+h_3)g_1'+(h_1+h_2)h_3g_2'}{2(h_1+h_2+h_3)}, \\ -\frac{\sqrt{(h_1(h_2+h_3)g_1'+(h_1+h_2)h_3g_2')^2-4(h_1+h_2+h_3)h_1h_2h_3g_1'g_2'}}{2(h_1+h_2+h_3)}. \end{gathered} \tag{1.59}$$

Профілі горизонтальної та вертикальної швидкості у випадку тришарової стратифікації можна побачити на рисунку 1.2 б. В тришаровій стратифікації можуть існувати як хвилі першої так і другої бароклінної моди. В роботі ми будемо розглядати обидва типи хвиль. В розділі 2.5 будуть досліджуватися біжучі хвилі першої бароклінної моди, а в розділі 3.8 хвилі другої бароклінної моди.

1.2.4 Лінійна теорія внутрішніх стоячих хвиль у замкнених водоймах

Окрім прогресивних, біжучих хвиль, розглянутих вище, в роботі будуть вивчатися стоячі хвилі. Це хвилі, які при будь-якій фазі коливань не поширюються в просторі. Розглянемо ідеалізовану задачу про стоячі коливання (сейші) в прямокутному басейні. Задача про поверхневі сейші в прямокутному басейні скінченої глибини в наближені мілкої води може правильно описувати розповсюдження хвиль, так як воно є наближенням довгих недиспергуючих хвиль. Рух рідини викликається початковим відхиленням рівня вільної поверхні від положення рівноваги. Лінійна задача про стоячі хвилі в басейні довжини a ширини b та глибини H має простий аналітичний роз'вязок [17], [37]:

$$\xi(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} \cos\sigma_{mn} t \cos(\frac{\pi x n}{a}) \cos(\frac{\pi y n}{b}), \tag{1.60}$$

де

$$\sigma_{mn} = \sqrt{g s_{mn} \tanh(H s_{mn})}, \tag{1.61}$$

$$s_{mn}^2 = (\frac{\pi n}{a})^2 + (\frac{\pi m}{b})^2, \tag{1.62}$$

коефіцієнт b_{mn} знаходиться з початкових умов для відхилення вільної поверхні. Далі розглянемо задачу про внутрішні сейші в басейні глибини H, довжини L та товщини B. $B \ll H$ причому $L \ll H$, що заповнений рідиною, що складається з нижнього шару глибини h_2 з густиною ρ_2 та верхнього шару глибини h_1 з густиною ρ_1, де $\rho_2 > \rho_1$. Ці шари поділяються проміжним шаром з товщиною δ_ρ. Рух в басейні виникають завдяки початковому нахилу поверхні розділу двох шарів η_{0i} з амплітудою та нахилом вільної поверхні з амплітудою ξ_0 рисунок 1.3. Якщо відхилити басейн на певний кут від горизонтального положення, а потім повернути його до початкового стану, відхилення поверхні розділу між шарами різної рідини та вільної поверхні спричинить появу довгої стоячої внутрішньої хвилі.

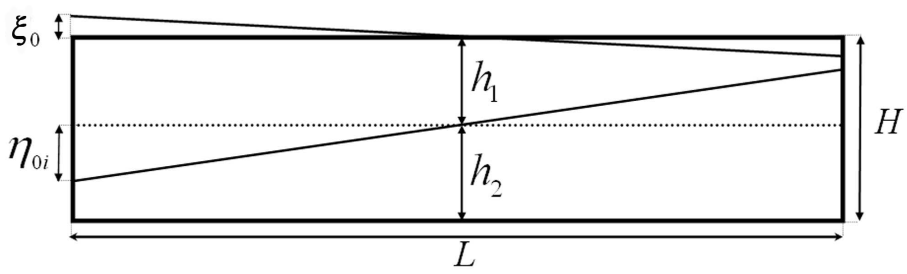

Рисунок 1.3: Схема прямокутного басейну із двошаровою статифікацією

Таким чином в наближенні Бусінеска та гідростатики для малих збурень η_{i0} система рівнянь збереження імпульсу та нерозривності у верхньому та нижньому шарах буде мати вигляд:

$$\frac{\partial(\xi - \eta_i)}{\partial t} + h_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0, \tag{1.63}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \tag{1.64}$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + h_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \tag{1.65}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} + g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2 \frac{\partial \eta_i}{\partial x} = 0, \tag{1.66}$$

де U_1 та U_2 - швидкості у верхньому та нижньому шарах. Якщо поєднати рівняння (1.63) та (1.65) та (1.64) та (1.66) отримаємо рівняння для баротропної моди:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} = 0, \tag{1.67}$$

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + gH\frac{\partial \eta}{\partial x} + gH(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2 \frac{\partial \eta_i}{\partial x} = 0, \tag{1.68}$$

тут незалежна від глибини баротропна компонента швидкості $\overline{U} = (h_1 U_1 + h_2 U_2)/H$. В наближенні Бусінеска рівняння (1.67) можна переписати як

$$\frac{\partial^2 (\eta)}{\partial t^2} + c_{surf}^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \tag{1.69}$$

де $c_{surf} = \sqrt{gH}$ – швидкість довгих поверхневих хвиль. Розв'язок (1.69) з граничними умовами $\overline{U} = 0$ на стінках при $x = 0, L$ описує довгі стоячі хвилі (поверхневі сейші) з періодом $T^m = 2L/mc_{surf}$, $m = 1, 2, \ldots$. Рівняння для бароклінної моди для $\triangle U = U_2 - U_1$ у наближенні "твердої кришки" $\xi \ll \eta_i$ будуть мати вигляд:

$$-\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{h_1 h_2}{H}\frac{\partial \Delta U}{\partial x} = 0, \tag{1.70}$$

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial t} + g'\frac{\partial \eta_i}{\partial x} = 0, \tag{1.71}$$

зведемо два рівняння в одне:

$$\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} = c_{0i}^2 \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x^2}, \tag{1.72}$$

де c_{0i} - лінійна швидкість довгих внутрішніх хвиль (1.52). Граничні умови $(U_1 = U_2 = 0)$ на стінках при $x = 0, L$ можуть бути записані як $\frac{\partial \eta_i}{\partial x} = 0$. Розв'язок рівняння (1.72) з граничними умовами описують внутрішні стоячі хвилі(сейші) з періодом $T^m = 2L/mc_{0i}, m = 1, 2, 3 \ldots$

$$\eta_i(x,0) = (\frac{2}{L}x - 1)\eta_{i0}, \tag{1.73}$$

$$\frac{\partial \eta_i(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{1.74}$$

$$\eta_i = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\eta_{0i}}{(n\pi)^2} \cos(\frac{n\pi x}{L}) \cos(\frac{c_{0i}\pi n x}{L} t). \tag{1.75}$$

Лінійний розв'язок показує, що в просторово-часових змінах поверхні розділу домінують хвилі, довжини яких дорівнюють довжинам басейну. Проте, лінійні розв'язки не можуть описувати утворення внутрішніх нелінійних борів та їх подальшого трансформування в пакети внутрішніх одиночних хвиль, які спостерігаються в озерах.

1.3 Слабонелінійна теорія внутрішніх хвиль

Нелінійність має тенденцію до укручення профілю хвилі, в той час, як дисперсія має протилежний ефект і має тенденцію згладжувати круті градієнти вільної поверхні. Кількісно оцінити нелінійність та дисперсію у випадку двошарової стратифікації можна за допомогою двох параметрів: 1. нелінійності

$$\epsilon = \frac{a}{H}. \tag{1.76}$$

де a - амплітуда хвилі, H - глибина басейну.

2. Та коефіцієнт, що характеризує співвідношення характерних розмірів:

$$\mu = \frac{h_1}{\lambda}, \tag{1.77}$$

де λ – характерна довжина хвилі, h_1 - глибина верхнього шару. Тоді баланс, що відповідальний за створення усамітненої хвилі, зазвичай приймається як співвідношення між ϵ та μ у вигляді степеневих розкладів по малим параметрам $\epsilon \ll 1$ та $\mu \ll 1$. Інший параметр, такий як відношення шарів з різною густиною $\gamma_{ratio} = h_2/h_1$. Навіть для слабонелінійних довгих хвиль при $\epsilon \ll 1$ та $\mu \ll 1$ баланс між величинами ϵ та μ буде змінюватися в залежності від значення γ_{ratio}. В залежності від співвідношення глибин γ_{ratio} можуть реалізуватися різноманітні режими, граничним з яких є ситуація тонкого одного шару по відношенню до другого, коли можна вважати що хвилі розповсюджуються у нескінченно глибокому басейні.

1.3.1 Рівняння Кортевега – де Вріза в теорії хвильових рухів для стратифікованої рідини

Добре відомо, що слабонелінійні довгі внутрішні хвилі можуть бути описані в першому наближенні рівнянням Кортевега - де Вріза. Рівняння Кортевега - де Вріза (КдВ) у теорії внутрішніх хвиль, було отримано в роботі [63], а потім уточнювалося багатьма авторами. В цих роботах була застосована асимптотична процедура отримання нелінійних еволюційних рівнянь. Запишемо вихідні рівняння Ейлера (1.20) в термінах функції току ψ та b:

$$\frac{\partial \triangle \psi}{\partial t} - \frac{\partial b}{\partial x} = J(\psi, \triangle \psi), \tag{1.78}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + N^2(z)\frac{\partial \psi}{\partial x} = J(\psi, b), \tag{1.79}$$

де $u = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ - горизонтальна и $w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ - вертикальна компоненти поля швидкості, $J(A, B)$ - якобіан.

На горизонтальних поверхнях виконуються умови непротікання:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \mid_{z=0} = 0. \tag{1.80}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \mid_{z=H} = 0. \tag{1.81}$$

Замість вертикальної координати z будемо використовувати Лагранжеву змінну:

$$y = z - \zeta(x, z, t), \tag{1.82}$$

де $\zeta(x, z, t)$ – вертикальне зміщення ізопікни (лінії рівної густини), що проходить через точку простору (x, z) в момент часу t, від її незбуренного значення. В наближенні довгих хвиль малої амплітуди $(\alpha << 1, \epsilon^2 << 1)$ розв'язок вихідних рівнянь Ейлера можна шукати в вигляді ряду по ступеням α, ϵ

$$\zeta = \zeta_{00} + \epsilon\zeta_{10} + \mu\zeta_{01} + \epsilon\mu\epsilon\zeta_{11} + ... \tag{1.83}$$

$$\psi = \psi_{00} + \epsilon\psi_{10} + \mu\psi_{01} + \epsilon\mu\psi_{11} + ... \tag{1.84}$$

В нульовому порядку теорії збурень ($i = j = 0$), що описує внутрішні хвилі без дисперсії можна розділити змінні:

$$\zeta_{00}(x, y, z, t) = \eta(x, y, t)\Phi(z), \tag{1.85}$$

де $\Phi(z)$ знаходиться з розв'язку крайової задачі :

$$\Phi(z)''_{zz} + \frac{N^2}{c}\Phi(z) = 0. \tag{1.86}$$

Крайова задача дозволяє знайти як структуру моди довгої хвилі (функція $\Phi(z)$), так і швидкість її розповсюдження c. Члени ряду для зміщення ізопікн на різних горизонтах повністю визначаються через одну невідому функцію

$\eta(x,t)$, відповідно, функція $\eta(x,t)$, що описує еволюцію хвилі по горизонталі, находиться з

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+c\frac{\partial\eta}{\partial x}+\alpha\varepsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\mu\beta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\varepsilon^2\alpha_1\eta^2\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\mu^2\beta_1\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5}-\varepsilon\mu(\gamma_1\eta\frac{\partial^3\eta}{\partial}x^3+\gamma_2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2})+.... \tag{1.87}$$

У першому наближенні по μ та ϵ рівняння (1.87) є відомим рівнянням КдВ, яке широко використовується для аналізу нелінійних хвильових процесів в стратифікованій рідини.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+c\frac{\partial\eta}{\partial x}+\alpha\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0. \tag{1.88}$$

Рівняння КдВ є повністю інтегрованим. Параметри α β є відповідними коефіцієнтами нелінійності та дисперсії, а c - фазова швидкість довгих хвиль у стратифікованій рідині (1.52). Параметри нα β визначаються з фонових вертикальних розподілів густини та горизонтальної швидкості як (в наближенні Бусінеска)

$$\alpha=\frac{3}{2}\frac{\int_0^H c^2(\partial\Phi/\partial z)^3dz}{\int_0^H c(\partial\Phi/\partial z)^2dz}, \tag{1.89}$$

$$\beta=\frac{1}{2}\frac{\int_0^H c^2(\Phi)^2dz}{\int_0^H c(\partial\Phi/\partial z)^2dz}, \tag{1.90}$$

у випадку двошарової стратифікації коефіцієнти рівняння знаходяться:

$$\alpha=\frac{3}{2}\frac{h_1-h_2}{h_1h_2}, \tag{1.91}$$

$$\beta=\frac{ch_1h_2}{6}, \tag{1.92}$$

та фазова швидкість c (1.52). В цьому випадку стаціонарні розв'язки рівняння КдВ мають вигляд

$$\eta = Asech^2\sqrt{\frac{3A}{4}\frac{(h_1-h_2)}{h_1^2h_2^2}}(x-(c+\alpha A/3)t). \tag{1.93}$$

Іншим важливим випадком, для якого коефіцієнти рівняння КдВ також знаходяться аналітично, є випадок експоненційної стратифікації $\rho(z) = \rho_0 e^{z/d}$ $(N(z) = const)$ [204].

$$c = \frac{NH}{\pi},\ \alpha = 0,\ \beta = \frac{NH^3}{2\pi^3}. \tag{1.94}$$

Треба зауважити, що малість нелінійності і дисперсії визначається не просто величиною відношення амплітуди до повної глибині рідини a/H (для нелінійності) (1.76) і глибини до довжини хвилі λ/H (для дисперсії) (1.76), як це передбачалося при формальному застосуванні асимптотичного методу. Фактично, малість нелінійності і дисперсії виводиться вже з рівняння КдВ

$$a\alpha \ll c, \frac{\beta}{\lambda} \ll c, \tag{1.95}$$

а ці параметри визначаються функціоналами від параметрів середовища, а не тільки від глибини басейну. Рівняння КдВ є найпростішою моделлю нелінійних хвильових рухів в стратифікованій рідини. Як можна бачити з (1.89), існують стратифікації, для яких коефіцієнт квадратичної нелінійності α обертається в нуль (відзначимо, що для експоненційної стратифікації коефіцієнти нелінійності будь-якого порядку дорівнюють нулю). У двошарової рідині (до речі, тут існує тільки одна мода внутрішньої хвилі) коефіцієнт α змінює свій знак в залежності від положення пікноклину. Якщо пікноклин знаходиться рівно посередині, то коефіцієнт квадратичної нелінійності α наближається до нуля (див. розділ 1.3.2). Він є позитивним, якщо пікноклин притиснутий до дна, і негативним, якщо пікноклин зміщений до поверхні. Коли пікноклин розташований близько до середини водної товщі, коректний опис нелінійних ефектів можливий тільки в наступних наближеннях.

1.3.2 Рівняння Гарднера (розширене рівняння Кортевега – де Вріза)

Отже, рівняння КдВ виводиться за допомогою асимптотичних рядів в припущенні значущості членів тільки першого порядку малості. Природно вважати, що врахування членів вищого порядку збільшить точність розрахунків характеристик хвильових рухів. Обмежуючись лише членами другого порядку, вважаючи $\varepsilon = \mu$ і переходячи в систему координат, що рухається з лінійною швидкістю c, рівняння (1.87) перепишемо в формі

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+c\frac{\partial\eta}{\partial x}+\alpha\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\varepsilon(\alpha_1\eta^2\frac{\partial\eta}{\partial x}+\gamma_1\eta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\gamma_2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\beta_1\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5}) = 0. \quad (1.96)$$

В першому наближенні ми можемо утримати тільки член з кубічною нелінійністю. Рівняння, що отримаємо при цьому має вигляд:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + (c + \alpha\eta + \alpha_1\eta^2)\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0, \quad (1.97)$$

і носить назву рівняння Гарднера (іноді його також називають розширеним рівнянням Кортевега - де Вріза). Рівняння Гарднера, так само як і рівняння КдВ, є повністю інтегрованою моделлю. Воно має солітонний розв'язок, причому взаємодія солітонів відбувається еластично, тобто без зміни їх форми. Точні двосолітонні розв'язки рівняння Гарднера для будь-яких знаків його коефіцієнтів, знайдені в роботах [34],[35]. Відзначимо також статті [200] [106], де отримано розв'язок задачі Коші для рівняння Гарднера з негативною кубічною нелінійністю. Як буде видно з подальшого, нелінійна динаміка хвиль істотно залежить від знака кубічного коефіцієнта. Він уже обчислювався для хвиль на межі розділу двох рідин [137]

$$\alpha_1 = \frac{3c}{8h_1^2h_2^2}(h_1^2 + h_2^2 + 6h_1h_2). \quad (1.98)$$

Стаціонарний солітонний розв'язок буде мати вигляд:

$$\eta(x,t) = \frac{D}{1 + B_0 \cosh(\gamma_{sol}(x - Vt))}, \tag{1.99}$$

$$D = \frac{6\beta\gamma_{sol}^2}{\alpha}, \tag{1.100}$$

$$B_0^2 = 1 + \frac{6\alpha_1\beta\gamma_{sol}^2}{\alpha^2}, \tag{1.101}$$

$$V = \beta\gamma_{sol}^2, \tag{1.102}$$

де γ_{sol} – параметр, що характеризує величину обернену довжині хвилі солітону. Амплітуда солітону

$$A = \frac{D}{1 + B_0}, \tag{1.103}$$

і її знак співпадає зі знаком квадратичної нелінійності α. Для випадку $\alpha_1 < 0, 0 < B_0 < 1$. Амплітуда солітону змінюється від значення $(B \approx 1)$, коли солітон Гарднера співпадає з солітоном КдВ, до величини $(B_0 \approx 0)$. Тому амплітуда солітону Гарднера має обмеження:

$$A_{lim} = \frac{\alpha}{\alpha_1}, \tag{1.104}$$

коли солітон має 'столоподібний' профіль (товстий солітон).

1.3.3 Модифіковане рівняння Кортевега – де Вріза

Як можна побачити з (1.94), існують стратифікації, для яких коефіцієнт квадратичної нелінійності α (1.76) обертається в нуль. Для таких стратифікації рівняння Гарднера зводиться до модифікованого рівняння КдВ (МКдВ):

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+(c+\alpha_1\eta^2)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0. \tag{1.105}$$

У двошарової рідини (до речі, тут існує тільки одна мода внутрішньої хвилі) α змінює свій знак в залежності від положення пікноклину. Якщо пікноклин знаходиться рівно посередині, то коефіцієнт квадратичної нелінійності обертається в нуль. Або він є додатнім, якщо пікноклин притиснутий до дна, або негативним, якщо пікноклин зміщений до поверхні. Зважаючи на малість квадратичної нелінійності для випадку, коли пікноклин розташований близько до середини водної товщі, врахування нелінійних ефектів можливе тільки в такому наближенні. Така ситуація реалізується в лабораторних експериментах [198].

В даній роботі в подальших розділах також буде продемонстровано застосовність теорії КдВ (1.93) та Гарднера (1.99).

1.3.4 Слабонелінійні брізери у стратифікованому середовищі

В загальному випадку коефіцієнти квадратичної, кубічної нелінійності та дисперсії в рівнянні (1.97) залежать від стратифікації та загальної глибини. Нелінійні коефіцієнти можуть бути обох знаків, тоді як коефіцієнт дисперсії (1.92) завжди додатній. У випадку коли коефіцієнт кубічної нелінійності від'-ємний рівняння (1.97) має солітоний розв'язок однієї полярності. Коли $\alpha_1 > 0$ існує солітон обох полярностей (підвищення та пониження). Розглядається тришарова стратифікація з рівними глибинами верхнього та нижнього шару h та однаковим стрибком густини Δh на кожній границі розділу. Загальна глибина басейну H. Для симетричної стратифікації коефіцієнт квадратичної нелінійності дорівнює нулеві $\alpha = 0$ рівняння Гарднера (1.97) зводиться до модифікованого рівняння КдВ з коефіцієнтами

$$c = \sqrt{\bar{g}h}, \tag{1.106}$$

$$\beta = \frac{ch}{4}(H - \frac{4h}{3}), \alpha_1 = -\frac{3c}{4h^2}(13 - \frac{9H}{2h}), \tag{1.107}$$

де $\bar{g} = g\Delta\rho/\rho$. У випадку коли обидва шари розділу близькі один до одного член кубічної нелінійності α_1 від'ємний, як і у випадку двошарової стратифікації. Будемо розглядати випадок, коли член кубічної нелінійності α_1 – додатній, це можливо у випадку коли $h/H < 9/26$, тобто коли границі розділу розташовані подалі одна від одної. Коли α_1 додатній існує два типи розв'язків: усамітнені хвилі

$$\eta(x,t) = asech[\sqrt{\frac{\alpha_1 a^2}{6\beta}}(x - \frac{\alpha_1 a^2 t}{6})], \tag{1.108}$$

та брізери (осцилюючі хвильові пакети)

$$\eta(x,t) = \frac{4qH}{cosh\theta}[\frac{cos\phi - (q/l)sin\phi th\theta}{1 + (q/p)^2 sin^2\phi sech^2\theta}], \tag{1.109}$$

де параметри ϕ та θ знаходяться як

$$\theta = 2q\frac{x}{L} + 8q(3p^2 - q^2)\frac{t}{T} + \theta_0, \phi = 2p\frac{x}{L} + 8p(p^2 - 3q^2)\frac{t}{T} + \varphi_0, \tag{1.110}$$

$L = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{6\beta}{\alpha_1}}$ і $T = \frac{6}{\alpha_1 H^3}\sqrt{\frac{6\beta}{\alpha_1}}$, де p та q - спектральні параметри, що характеризують амплітуду брізеру та кількість окремих хвиль у брізери, θ_0 та φ_0 - початкові фази, та часовий і просторовий масштаби. На рис. 1.4 показано характерні форми брізерів для різних значень параметрів q та p. З графіків на рисунку 1.4 видно, що однаковим значення параметра q відповідають однакові обвідні профілі але із різною кількістю несучих хвиль за рахунок параметра р. Кількість несучих хвиль у хвильовому пакеті залежить

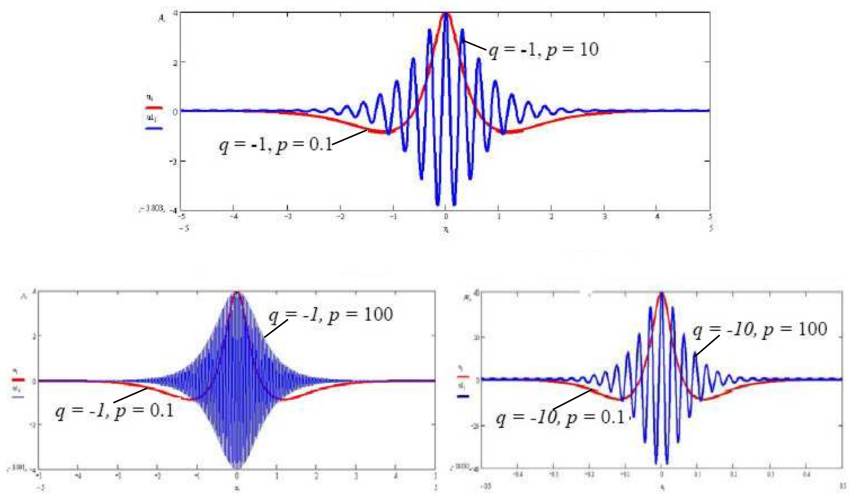

Рисунок 1.4: Характерні форми брізерів для різних значень параметрів q та p.

від відношення q/p. Обидва параметра p та q описують “фазову” та “групову” швидкості брізеру. Групова швидкість:

$$V_{phase} = 4(3q^2 - p^2), \tag{1.111}$$

фазова швидкість:

$$V_{gr} = 4(q^2 - 3p^2). \tag{1.112}$$

1.3.5 Трансформація внутрішніх слабонелінійних хвиль над підводною сходинкою в рамках рівнянь Кортевега-де Вріза та Гарднера

У деяких районах Світового океану зустрічаються зони шельфу з різкими змінами рельєфу дна, наприклад, на шельфі між островами Тайвань і Донгша, де нахил дна досягає 0.25, тоді як довжина усамітнених внутрішніх хвиль в цьому районі співрозмірна з горизонтальними масштабами неоднорідностей дна. В наступних розділах дисертації ми будемо вивчати задачі взаємодії внутрішніх хвиль великих амплітуд з різкими змінами глибини. В

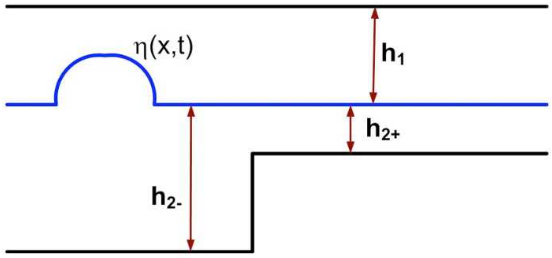

Рисунок 1.5: Конфігурація задачі

цьому розділі розглянемо трансформацію внутрішніх слабонелінійних хвиль над підводною сходинкою в рамках рівнянь КдВ та Гарднера. Конфігурація задачі показана на рис. 1.5, де верхній та нижній шар шар мають густину ρ_1 та ρ_2. Усамітнена хвиля підходить до сходинки справа. Довжина усамітненої хвилі завжди вважається більшою, ніж глибина води, тобто це хвиля на мілкій воді, але для зручності ми скажемо, що хвиля підходить від глибокої води до мілкої води. Якщо усамітнена хвиля має малу амплітуду, то процес її перетворення в околиці сходинки можна описати за допомогою лінійної довгохвильової теорії. Це припущення було використано роботі [108], в якій отримано наступні співвідношення для коефіцієнтів хвильового відбиття $\mathbf{R}$ та коефіцієнт проходження $\mathbf{T}$ на сходинці:

$$R = \frac{1 - \frac{c_+}{c_-}}{1 + \frac{c_+}{c_-}}, \tag{1.113}$$

$$T = \frac{2}{1 + \frac{c_+}{c_-}}, \tag{1.114}$$

де $c_\pm$ швидкість лінійних довгих хвиль у глибокій (-) та мілкій частині басейну (+). Ці формули були перевірені в чисельних та експериментальних роботах [77], [165], [235] і в результаті було зроблено висновок, що вони гарно описують трансформацію для хвиль помірної амплітуди ($a/H < 0.4$). В околі сходинки хвиля малої амплітуди має профіль, що описується розв'язком рівняння КдВ, але його параметри дещо відрізняються від (1.93), а саме

$$\begin{aligned}
&\eta_{ref} = A_{ref}\sec^{\mathbf{2}}(\sqrt{\tfrac{3A}{4}\tfrac{(h_1-h_-)}{h_1^2h_-^2}}x),\\
&A_{ref} = RA,\\
&\eta_{tr} = A_{tr}\sec^2(\sqrt{\tfrac{3A}{4}\tfrac{(h_1-h_-)}{h_1^2h_-^2}\tfrac{c_-}{c_+}}x),\\
&A_{tr} = TA.
\end{aligned} \tag{1.115}$$

При поширенні далі від сходинки усамітнена хвиля, як правило, трансформується у цуг солітонів. Параметри цих вторинних солітонів розраховані у роботі [108] з використанням рівняння КдВ. Зокрема, при відбитті хвилі формується один солітон з амплітудою

$$\frac{A_s r}{A} = [\sqrt{2R+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}]^2. \tag{1.116}$$

Динаміка хвилі, що пройшла, залежить від знаку квадратичного нелінійного члену після сходинки. Якщо коефіцієнт нелінійного члену змінює свій знак після сходинки, початкове солітоноподібне збурення повністю руйнується і перетворюється на випромінювання. Тут ми розглянемо ситуацію, коли ознака нелінійності не змінюється (це вимагає, щоб $h_2 < h_1$ крізь), і тому хвиля, що пройшла, перетворюється на вторинні солітони і їх амплітуди є

$$\frac{A_s r^m}{A} = (\frac{c_-}{c_+})^2(\frac{\alpha_-}{\alpha_+})(\frac{\beta_+}{\beta_-})[\sqrt{2T+(\frac{c_-}{c_+})^2(\frac{\alpha_-}{\alpha_+})(\frac{\beta_+}{\beta_-})+\frac{1}{4}}-(m+\frac{1}{2})]^2, \tag{1.117}$$

де $m = 0, 1, 2, ...N-1$ та N – це кількість солітонів, що пройшла на сходинку.

$$N = [\sqrt{2T+(\frac{c_-}{c_+})^2(\frac{\alpha_-}{\alpha_+})(\frac{\beta_+}{\beta_-})+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}]. \tag{1.118}$$

Значення $\pm\alpha$ of $\pm\beta$ – це нелінійні дисперсійні коефіцієнти з різних сторін сходинки. Аналіз вторинних солітонів, що утворюються після взаємодії описаний в роботі [108].

Можна знайти число та амплітуди вторинних солітонів в рамках рівняння Гарднера використовуючи метод зворотного розсіювання. У рівнянні Гарднера нелінійність може бути описана параметром

$$\varepsilon = \varepsilon_q + \varepsilon_c = \frac{\alpha A}{c} + \frac{\alpha_1 A^2}{c}. \tag{1.119}$$

1.3.6 Рівняння слабонелінійних хвиль на глибокій воді (рівняння Бенджаміна-Оно)

Важлива модифікація слабонелінійних рівнянь внутрішніх хвиль має місце, якщо довжина внутрішньої хвилі велика в порівнянні з одним шаром скажімо, верхнім, але мала у порівнянні з іншим (нижнім) шаром океану. Ці хвилі можна описати, використовуючи диференціально-інтегральне рівняння Бенджаміна-Оно [218]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_{bo}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha\eta\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\beta}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{\infty}^{\infty}\frac{\eta(x',t)}{x-x'}dx' = 0, \tag{1.120}$$

де коефіцієнти знаходяться з

$$c_{bo} = \sqrt{\frac{gh_1(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}}, \tag{1.121}$$

$$\alpha = -\frac{3c}{2h_1}, \tag{1.122}$$

$$\beta = \frac{ch_1\rho_2}{2\rho_1}, \tag{1.123}$$

а стаціонарний розв'язок має вигляд

$$\eta(x,t) = \frac{\eta_0}{1 + (Vt)^2/\Delta^2}. \tag{1.124}$$

Як і у випадку рівнянь КдВ та рівнянь Гарднера рівняння Бенджаміна-Оно – інтегроване, та солітони Бенджаміна-Оно відновлюють свої параметри після зіткнення. Різниця полягає в тому, що для випадку солітонів Бенджаміна-Оно вони не набувають фазового зсуву після зіткнення.

1.4 Сильно нелінійні моделі внутрішніх хвиль

Як було показано в роботах [123], [124], [236] теорія Кортевега - де Вріза успішно застосована для опису еволюції хвиль навіть за межами формального діапазону застосовності, але для хвиль великих амплітуд слабонелінійні теорії не працюють. На даний момент існують розв'зки рівнянь Ейлера для двошарової нев'язкої рідини ([205], [81]), які описують усамітнені хвилі великої амплітуди. У той же час, наявність розриву швидкості між шарами призводить до утворення нестійкості Кельвіна-Гельмгольца в цих хвилях [134]. Формування вихорів Кельвіна-Гельмгольца в хвилях великої амплітуди було відмічено як в лабораторних експериментах [99], [114], так і в натурних дослідженнях [209], [219]. Нестійкість призводить до генерації турбулентності, перемішування в шарі розділу і затухання усамітених хвиль [68]. Пряме чисельне моделювання хвиль великої амплітуди в рамках рівнянь Ейлера, Нав'є-Стокса і Рейнольдса проведено в кількох дослідженнях (наприклад, [270], [69], [157]) для випадку гладкого рельєфу дна. Розглянемо більш детально дві моделі, які будуть використовуватися в дослідженнях в наступних розділах. Це модель довгих хвиль Міяти-Чоя-Камасси та теорія Дюбрей-Жакотен-Лонга.

1.4.1 Рівняння довгих внутрішніх хвиль Міяти-Чоя-Камасси

Обмеження слабонелінійних та/або слабодисперсійних умов можна уникнути за допомогою розв'язку рівнянь Ейлера для стаціонарних одиночних хвиль. Двошарові системи детально розглянуті в багатьох дослідженнях (наприклад, [94], [102], [114], [227]). Потенційний потік всередині кожного шару дозволяє спростити повні рівняння до інтегральних рівнянь. Роз'вязки у вигляді усамітнених хвиль стають більш широкими із зростанням амплітуди і досягають максимально допустимої висоти.

Розширення теорії слабонелінійної двошарової моделі Гарднера було запропоновано Міятою [205], Чоем та Камассою [81]. Вони вивели еквівалентні двошарові моделі з повною нелінійністю $\alpha = O(1)$, зберігаючи лише слабодисперсійні ефекти першого порядку $\beta \ll 1$. В результаті було отримано зв'язаний набір хвильових рівнянь, який в граничному випадку $\beta \longrightarrow 0$ зводиться до рівнянь мілкої води для двошарової стратифікації:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + b_1 \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + (b_2 + b_3 \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = b_4 \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial x^2 \partial t} + O(\alpha \varepsilon^4, \alpha^2 \varepsilon^2), \tag{1.125}$$

$$\vartheta = (\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1 + h_2}{h_1} (\frac{\eta}{h_2}) + O(\alpha^2)), \tag{1.126}$$

$$b_1 = \frac{\rho_1 h_2^2 - \rho_2 h_1 h_2 - 2\rho_2 h_1}{\rho_1 h_2^2 + \rho_2 h_1 h_2}, \tag{1.127}$$

$$b_2 = \frac{g h_2 (\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 h_2^2 + \rho_2 h_1}, \tag{1.128}$$

$$b_3 = \frac{g \rho_2 (\rho_1 - \rho_2)(h_1^2 - h_1 h_2)}{(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)^2}, \tag{1.129}$$

$$b_4 = \frac{1}{3} \frac{\rho_1 h_1^2 h_2 + \rho_2 h_1 h_2^2}{(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)}. \tag{1.130}$$

Розв'язки Міяти-Чоя-Камаси (МЧК) можна розрахувати з нелінійного диференціального рівняння:

$$(\frac{\partial \eta}{\partial X})^2 = [\frac{3g(\rho_2 - \rho_1)}{c_{0i}^2 (\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2)}] \frac{\eta^2 (\eta - b_1)(\eta - b_2)}{(\eta - b_*)}, \tag{1.131}$$

Та b_* занаходиться з

$$b_* = \frac{h_1 h_2(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2}, \tag{1.132}$$

а змінні b_1 та b_2 корені квадратного рівняння

$$b^2 + q_1 b + q_2 = 0. \tag{1.133}$$

$$q_1 = -\frac{c^2}{g} - h_1 + h_2, q_2 = h_1 h_2(\frac{c^2}{c_{oi}^2} - 1), \tag{1.134}$$

де $X = x - ct$,

$$c = c_0 + \frac{ac_0}{2}\frac{\rho_1 h_2^2 + \rho_2 h_1^2}{\rho_1 h_2^2 h_1 + \rho_2 h_1^2 h_2}, \tag{1.135}$$

$$c_0 = \frac{g h_2 h_1(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}. \tag{1.136}$$

Тут c_o - швидкість лінійних внутрішніх хвиль (1.52). В наближенні Бусінеска розв'язки (МЧК) диференціального рівняння (1.131) будуть мати вигляд:

$$(\frac{\eta}{dx})^2 = [\frac{3g\triangle\rho}{c_{0i}^2\rho(h_1^2 - h_2^2)}]\frac{\eta^2(\eta - b_1)(\eta - b_2)}{(\eta - b_*)}, \tag{1.137}$$

та

$$b_* = \frac{h_1 h_2}{h_2 - h_1}, \tag{1.138}$$

$$c = c_{0i}\sqrt{\frac{(h_1 - a)(h_2 + a)}{h_1 h_2}}. \tag{1.139}$$

Розв'язки для поодиноких хвиль рівняння МЧК для випадку великих амплітуд мають профілі більш широкі, аніж солітони КдВ та Гарднера, та швидкість поширення їх більш повільна у порівнянні із ними. Теорія МЧК передбачає максимальну амплітуду хвилі:

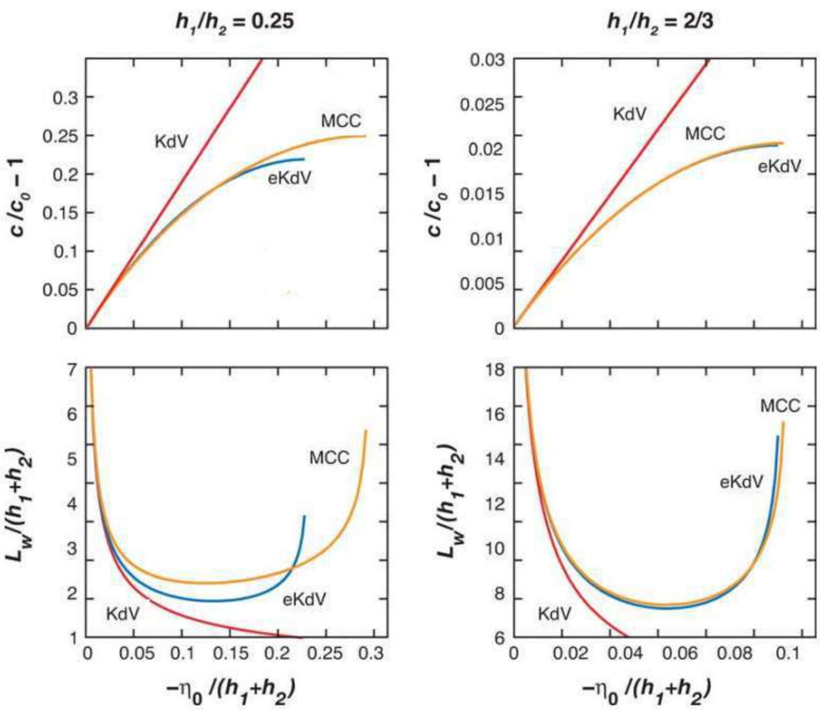

Рисунок 1.6: Порівняння властивостей усамітнених хвиль у двошаровій стратифікації для рівнянь КдВ (KdV), Гарднера (eKdV) та МЧК (MCC). У верхньому ряду показана швидкість хвилі c амплітудою η_0, а нижній ряд показує залежність довжини хвилі L_w від η_0. Порівняння проводиться для двох стратифікацій $h_1/h_2 = 1/4$ (ліва колонка) і $h_1/h_2 = 2/3$ (права колонка). З роботи [119]

$$A_{lim} = \frac{h_2 - h_1}{2}. \tag{1.140}$$

В наближенні Бусінеска та твердої кришки (дивись розділ 1) максимальна амплітуда сягає половини глибини басейну. Порівняння профілів хвиль та їх властивостей (рис. 1.6) показує, що теорія Гарднера та МЧК співвідносилися для значень $0.4 < h_1/(h_1 + h_2) < 0.6$. Однак різниця суттєво зростає за межами цього діапазону, як видно з рисунку 1.6. Однак, різниця стає суттєвою при великих амплітудах, як видно з рисунку 1.7. Розв'язок МЧК добре описує результати лабораторних експериментів [198].

Додатковий критерій стійкості для довгих нелінійних хвиль у двошаровій рідині був запропонований в [80]. У наближенні Бусінеска рівняння

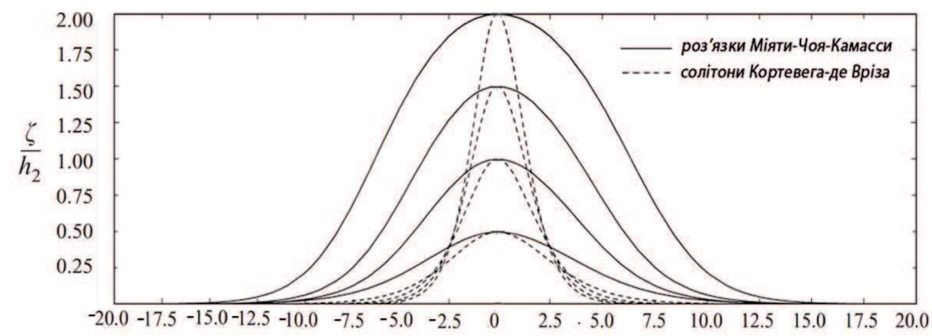

Рисунок 1.7: Порівняння розв'язків Міяти-Чоя-Камаси та КдВ. Суцільна лінія - розв'язок у вигляді усамітненої хвилі (1.131) для $\rho_1/\rho_2 = 0.63$ $h_1/h_2 = 5.09$ та $/h_2 = (0.5, 1, 1.5, 2)$ у порівнянні із солітоном КдВ $(- - -)$ для тих самих амплітуд (1.93)

$$4a_{cr}^2 - a_{cr}(h_1 - h_2) - h_1 h_2 = 0, \tag{1.141}$$

дозволяє визначити критичне значення a_{cr} амплітуди хвилі. Усамітнена хвиля стає нестійкою при $|a| > |a_{cr}|$. Порівняння аналітичних розв'язків (1.131) з профілями хвиль, що спостерігалися в лабораторних експериментах та з чисельними розрахунками буде представлено в наступних розділах.

На рис. 1.8 зображено результати натурних спостережень внутрішніх хвиль на шельфі Орегону з роботи [236]. На цьому рисунку зображено хвильовий пакет внутрішніх хвиль із амплітудами 20-25 метрів при верхньому шарі 7 м. Відношення амплітуди хвиль до верхнього шару становить приблизно 3, що лежить далеко за межами застосовності слабонелінійної теорії для якої вимагається малість амплітуди у порівнянні із глибиною верхнього шару (для хвиль-пониження).

1.4.2 Рівняння внутрішніх хвиль Дюбрей-Жакотен-Лонга

Одиночні хвилі в рідині з неперервною стратифікацією досліджуються за допомогою чисельних розв'язків рівняння Дюбрей-Жакотен-Лонга (ДЖЛ)

[92] [167]. Цей підхід виник в роботах [61], [88] та [253], в яких обговорювалися властивості усамітнених внутрішніх хвиль другої моди в басейні нескінченої глибини. В роботах [252] і [72] були знайдені аналогічні розв'язки хвиль першої моди. Якщо градієнт густини дорівнює нулю на границі мілкого шару, а пікноклін відносно широкий і не дуже близький до границі області, тоді амплітуда хвилі обмежена суміжним потоком. Якщо є пікноклін більш різкий або розташований ближче до границі, то можна знайти розв'язок для хвилі з більшою амплітудою, аж поки число Річардсона (1.47) не перевищить критичне значення 0.25 в певному місці в межах потоку згідно (1.48). В роботі [155]. Цей критерій був визначений як критерій стійкості, хоча при невиконанні цього критерію хвиля не обов'язково є нестійкою. Граничний випадок виникає, коли градієнт густини ненульовий на границі розділу під гребенем; хвиля може розвивати вертикальні швидкості, що мають величини порядку фазової швидкості хвилі, що передбачає сильно нелінійні ефекти, такі як укручення та обвалення хвилі [100], [155]. Повнонелінійну теорію мо-

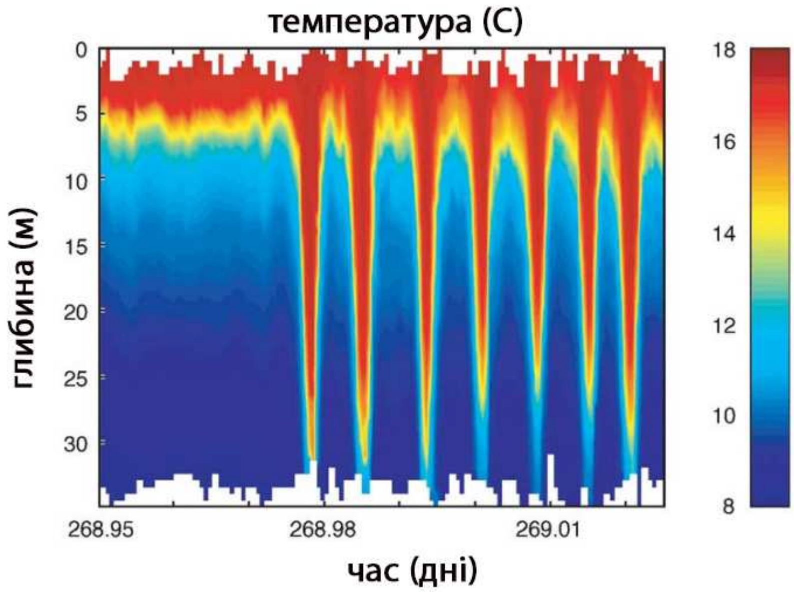

Рисунок 1.8: Результати натурних спостережень внутрішніх хвиль на шельфі Орегону [236]. Хвильовий пакет із амплітудами 20-25 метрів при верхньому шарі 7 м.

жна отримати з рівнянь Нав'є-Стокса, якщо знехтувати ефектами в'язкості та дифузії, а також припускаючи, що система координат рухається разом із хвилею зі швидкістю c. Тоді інтегруючи рівняння імпульсу вздовж ліній току у незбуреному стані, отримаємо рівняння Дюбрей-Жакотен-Лонга (ДЖЛ) [155]:

$$\nabla^2\eta + \frac{N^2(z-\eta)}{c^2}\eta = 0, \tag{1.142}$$

з граничними умовами $\eta = 0$ при $z = 0, H$ при $\eta \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Де N – безрозмірна частота Брента-Вяйсяля (1.28). Це задача знаходження власних чисел c та функцій $\eta(x, y)$ для усамітнених хвиль з центром в $x = 0$. У граничному випадку нескінченої довжини розв'язки (1.142) стають подібними на нелінійний (сходинкоподібній) бор. Для деяких профілів густини, в розв'язку (1.142) при великих амплітудах, при яких профіль стає столоподібним та розвивається рециркуляція в ядрі. При збільшенні амплітуди хвилі починає розвиватись нестійкість, а коли значення швидкості біля дна наближаються до швидкості розповсюдження хвиль - умовою, що визначає границю руйнування хвиль, то такі хвилі вважаються не фізичними. Гранична амплітуда, при якій відбувається руйнування досягається лише для таких профілів густини, які містять скінчений градієнт біля дна (для хвиль підвищення) [160]. В роботі [90] було показано існування роз'вязків (1.142) у вигляді слабонелінійних усамітнених хвиль з захопленими ядрами із постійною густиною та завихоренністю для випадку майже лінійної стратифікації. В роботі для знаходження розв'язків рівняння (1.142) використовувався пакет DJLES, що базується на методі [252], який було реалізовано в середовищі MATLAB (https://github.com/mdunphy/DJLES/).

1.5 Енергетика внутрішніх хвиль. Потік енергії. Псєвдоенергія.

В цьому розділі розглянемо трансформацію енергії, які відбуваються при проходженні хвиль на шельф та при проходженні хвилями неоднорідностей рельєфу. Побудуємо еволюційні рівняння для густини механічної енергії. Для цього помножимо рівняння (1.1) на U_α і лінеаризоване рівняння (1.22) на gz, а потім складемо ці рівняння, та отримаємо еволюційне рівняння для густини повної механічної енергії

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial f_E}{\partial x} = \mathrm{Diff} + \mathrm{Dissip}, \tag{1.143}$$

де E є сумою кінетичної $KE = U_\alpha^2$ та потенціальної енергії $PE = \rho g z$ на одиницю об'єму, тоді як

$$f_E = U_\alpha (P + KE + PE) \tag{1.144}$$

є потоком енергії. Права частина рівняння (1.143) описує дифузію і в'язку дисипацію [249]. Потенціальна енергія PE скінченого об'єму рідини V може бути розділена на складову, доступну для переходу в кінетичну енергію APE, і недоступну для такого переходу (фонову) потенціальна енергію BPE, яка визначена як мінімум потенціальної енергії в замкненій системі, який досягається при адіабатичній перебудові поля густини в даному об'ємі рідини [249], [279] див. рисунок 1.9. Доступна потенціальна енергія APE являє собою різницю між потенціальною енергією PE і доступною потенціальною енергії BPE. Сума APE доступної потенціальної енергії та кінетичної KE називається псевдоенергією:

$$PSE = APE + KE. \tag{1.145}$$

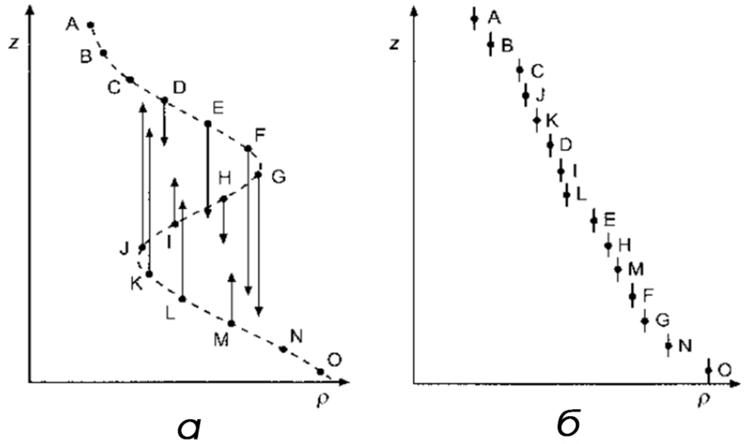

Рисунок 1.9: Обчислення $\bar{\rho}(z,t)$ горизонтально однорідного профілю фонової густини (б) шляхом адіабатичної перебудови фактичного профілю густини (а) [261].

$$APE = g\int_V z\rho dV - g\int_V z\bar{\rho}dV, \tag{1.146}$$

де $\bar{\rho}(z,t)$ – горизонтально однорідний профіль фонової густини, що отриманий адіабатичною перебудовою поля густини об'ємі V. Щільність доступної потенціальної енергії APE визначається як

$$APE(x,z,t) = g\int_z^{z^*} (\bar{\rho}(z') - \rho)dz. \tag{1.147}$$

Горизонтально однорідний фоновий профіль густини передбачається оберненим зі зворотним значенням $z^*(\rho,x,z,t)$. Практично цей профіль в замкненому просторі виходить сортуванням поля густини [279] рис. 1.9. Відповідне значення гідростатичного тиску дорівнює $P\bar{(}z)$. Значення E_A відповідає роботі переміщення одиничного об'єму рідини з висоти z^* на висоту z проти сил плавучості в рідині з фоновим профілем $\bar{\rho}(z,t)$ [159]. Сума $KE + APE = E_{PSE}$ називається щільністю псевдоенергії [249]. Рівняння (1.143) можна переписати в термінах псевдоенергії як

$$\frac{\partial E_{PSE}}{\partial t} + \frac{\partial f_{E\alpha}}{\partial x_\alpha} = g\int_z^{z^*} \frac{\partial \bar{\rho}(z',t)}{\partial t} dz + \\ + \mathrm{Diff} + \mathrm{Dissip}, \tag{1.148}$$

Потік енергії (1.144) можна переписати у вигляді

$$f_{E\alpha} = U_\alpha(p + KE + APE), \tag{1.149}$$

де $p = P - \bar{P(z)}$ різниця між атмосферним та гідростатичним тиском, що відповідає розподілу густини $\bar{\rho}(z')$.

Проінтегроване по глибині значення псевдоенергії PE знаходиться інтегруванням за часом потоку псевдоенергії F в інтервалі часу проходження хвиль $t_2 - t_1$:

$$PE = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt, \tag{1.150}$$

Проінтегрований по глибині потік псевдоенергії [159] складається з трьох компонент: PWF - потоку енергії за рахунок роботи збурень сил тиску, потоку кінетичної енергії KEF і потоку доступної потенціальної енергії $APEF$:

$$F = PWF + KEF + APEF, \tag{1.151}$$

Потік енергії за рахунок роботи збурень сил тиску має вигляд:

$$PWF = \int_0^{-H} Up dz, \tag{1.152}$$

Потік кінетичної енергії KEF дорівнює

$$KEF = \int_0^{-H} UE_k dz, \tag{1.153}$$

а потік доступною потенційної енергії $APEF$ дорівнює

$$APEF = \int_0^{-H} UE_a dz. \tag{1.154}$$

Інтегруючи рівняння (1.148) по об'єму

$$\frac{DE_{PSE}}{Dt} = F^n \mid_{\sum} + \int (g \int_z^{z^*} \frac{\partial \bar{\rho}(z', t)}{\partial t} dz + \text{Diff} + \text{Dissip})\text{dV}, \qquad (1.155)$$

$$KE = \int_V E_K dV', \qquad (1.156)$$

F^n – це повний потік псевдоенергії нормальний до горизонтальної границі $\sum$ об'єму. Псевдоенергія хвиль, що проходять через певний поперечний переріз обчислювального потоку на часовому інтервалі задається як:

$$PSE = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{y=0}^{y=B} F dy dt, \qquad (1.157)$$

А для слабонелінійних хвиль у двошаровій рідині дорівнює

$$PSE = c_{0i} g \Delta\rho B \int_{t=t_1}^{t=t_2} \eta_i^2 dt, \qquad (1.158)$$

при припущенні, що доступна потенціальна енергія дорівнює кінетичній енергії $APEF = KEF$ [69].

$$F_x = \int_H^0 (Up + \rho U^2) dz. \qquad (1.159)$$

Для слабонелінійних хвиль при розрахунках F вважалось, що $E_k \simeq E_a$ (напр. в роботі [120]) і тому проінтегрований по глибині потік псевдоенергії розрахований із співвідношення

$$F = PWF + 2KEF. \qquad (1.160)$$

Оцінка енергії усамітнених хвиль TE в слабонелінійній теорії [68] має вигляд

$$TE = c_0 g \Delta\rho \int_{t_2}^{t_2} \eta^2(t) dt. \qquad (1.161)$$

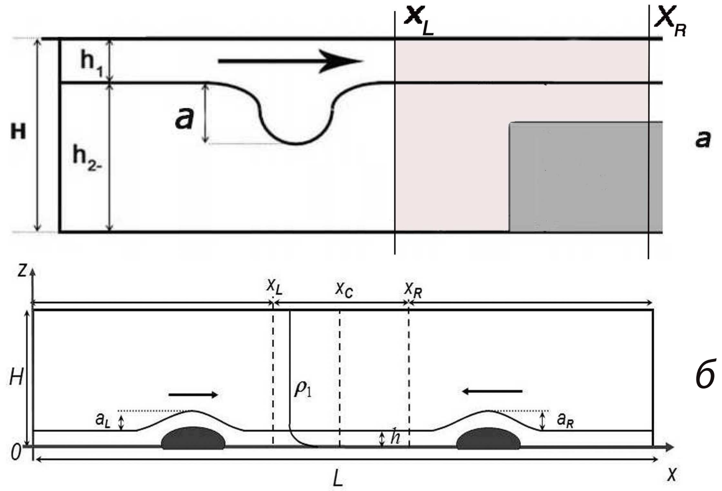

Рисунок 1.10: Обчислення втрат енергії в області між X_L та X_R. (а) - випадок трансформації над сходинкою. (б) - випадок фронтального зіткнення хвиль

Розглянемо бюджет енергії для випадку проходження усамітненої внутрішньої хвилі сходинки. Втрати енергії за рахунок перемішування, переходу в недоступну фонову потенційну енергію і дисипації можуть бути оцінені виходячи з бюджету енергії хвиль до і після трансформації в області між перетинами x_l, x_r див. рис. 1.10. Позначимо псевдоенергію хвиль, що переміщаються зліва направо в перетинах x_l, x_r і справа наліво в перетинах x_r, x_l як PSE_l^-, PSE_r^+, PSE_r^-, PSE_l^+, відповідно. Тоді втрати псевдоенергії на перемішування за рахунок нестійкості і в'язкості і дифузії можна оцінити як

$$\Delta E_{transf} = \Delta E_{tot} - \Delta E_{vis}, \tag{1.162}$$

для випадку трансформації над особливостями тпографії усамітнених хвиль рис. 1.10 (а)

$$\Delta E_{tot} = \frac{PSE_R^- - PSE_L^+ - PSE_R^-}{PSE_R^+}, \tag{1.163}$$

$$\Delta E_{vis} = PSE_R^+ - PSE_L^+. \tag{1.164}$$

для випадку фронтального зіткнення усамітнених хвиль рис. 1.10 (б):

$$\Delta E_{tot} = \frac{PSE_l^- + PSE_r^- - PSE_l^+ - PSE_r^+}{PSE_l^- + PSE_r^-}, \tag{1.165}$$

$$\Delta E_{vis} = \frac{PSE_l^- + PSE_r^- - \widetilde{PSE}_l^+ - \widetilde{PSE}_r^+}{PSE_l^- + PSE_r^-}. \tag{1.166}$$

де PSE_l^- PSE_r^- - псевдоенергії набігаючих хвиль у відповідних перетинах x_L and x_R, відповідно, PSE_l^+ PSE_r^+ псевдоенергії хвиль, що пройшли у відповідних перетинах x_L and x_R, відповідно, а $\widetilde{PSE}_l^+$, $\widetilde{PSE}_r^+$ - псевдоенергії хвиль, що пройшли між перетинами x_L and x_R без трансформації.

1.6 Висновки до розділу 1

В розділі сформульовано постановку задачі про розповсюдження внутрішніх хвиль в стратифікованій рідині, приведено основні апроксимації, які приводять до спрощених асимптотичних рівнянь внутрішніх хвиль, таких як, рівняння Кортевега-де Вріза, Гарднера, Бенджаміна-Оно, Міяти-Чоя-Камаси. Наведено огляд аналітичних розв'язків для випадку біжучих та стоячих внутрішніх хвиль, слабонелінійних хвиль малих та скінчених амплітуд. Розглянуто моделі довгих та коротких хвиль по відношенню до глибини басейну при різних типах стратифікації. Наведено межі застосовності для розв'язків спрощених рівнянь, та показано, що динаміка внутрішніх хвиль великих амплітуд, що розповсюджуються в неперервній стратифікації у реальних водоймах не може бути в повній мірі описана за допомогою цих спрощених моделей. Дослідження динаміки внутрішніх хвиль великих амплітуд має проводитися в рамках повної системи рівнянь Нав'є-Стокса. Чисельне моделювання надає нові можливості для вивчення динаміки внутрішніх хвиль великих амплітуд в прибережних зонах, а саме, дослідження їх трансформації над неоднорідностями дна, дисипації при розповсюдженні, взаємодії однієї хвилі з іншою та, нарешті, обвалення внутрішніх хвиль на шельфі. В наступному розділі будуть розглянуто чисельні моделі, що базуються на розв'язанні повної системи рівнянь гідродинаміки, усереднених по Рейнольдсу, та верифікацію розв'язків чисельних моделей на аналітичних розв'язках, представлених в цьому розділі.

Розділ 2

ЧИСЕЛЬНЕ НЕГІДРОСТАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТРАТИФІКОВАНИХ ТЕЧІЙ

Як було показано в попередньому розділі, аналітичні розв'язки хвильових задач механіки стратифікованої рідини в рамках вихідних рівнянь Нав'є Стокса існують лише в декількох ідеалізованих випадках. Завдяки зростаючим можливостям обчислювальної техніки в останні тридцять років почали розвиватися чисельні моделі, засновані на прямому розв'язку вихідних рівнянь гідродинаміки. По суті, створені віртуальні чисельні лабораторні басейни, в яких можна досліджувати такі процеси як утворення та поширення внутрішніх хвиль у басейнах з довільною стратифікацією та довільними змінами рельєфу дна. В цьому розділі буде представлено короткий огляд гідродинамічних негідростатичних чисельних моделей, які мають за основу рівняння Рейнольдса та буде дано опис моделі, яка застосовувалася для моделювання внутрішніх хвиль в подальших главах та представлені деякі приклади порівняння результатів моделювання та результатів лабораторних експериментів і аналітичних розв'язків.

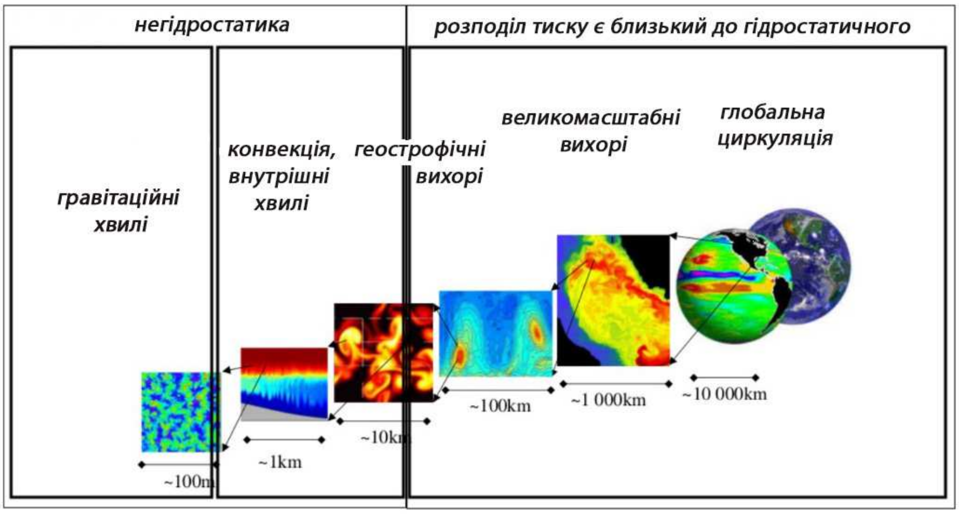

Рисунок 2.1: Масштаби застосовності гідростатичного наближення [185].

2.1 Огляд існуючих негідростатичних моделей

В останні кілька десятиліть великий прогрес був досягнутий у розробці методів розв'язку нестаціонарних тривимірних рівнянь Нав'є-Стокса для нестисливої рідини, починаючи з робіт [82] та [116]. Ці методи (див. огляд [96]) були впроваджені в обчислювальну гідродинаміку CFD (computational fluid dynamics), розроблені переважно для промислових застосувань. Проте багато рухів у океані та озерах характеризуються важливими особливостями:

1. відношення вертикального і горизонтального масштабів є дуже малим;

2. рух вільної поверхні;

3. потоки в океані є стратифікованими.

В більшості випадків та на великих масштабах розподіл тиску є близьким до гідростатичного тиску (рис. 2.1), і гідростатична компонента може бути легко розрахована як функція атмосферного тиску, висоти вільної поверхні, глибини і широти. У наближенні «твердої кришки» (див. розділ 1, таблиця 1.1) відшукання баротропної швидкості і тиску зводяться до розв'язання рівнянь для функції струму або рівня.

У стійко стратифікованих басейнах співіснують швидкі поверхневі хвилі та повільні внутрішні хвилі і якщо ж наближення твердої кришки не використовується, то виникає питання про вибір ефективного кроку за часом. Так як довгі гравітаційні поверхневі хвилі (баротропна компонента) має швидкість багато більше довгих внутрішніх хвиль (бароклінної компоненти). Тому, поля течій та тиску розділяють на постійну по глибині (баротропну) та змінну по глибині (бароклінну) компоненти.

У моделях, де використовується розділення на баротропну та бароклінну компоненти (за винятком моделей із розривом вільної поверхні) положення вільної поверхні розраховується з інтегрованих по вертикалі рівнянь нерозривності. Тому ці моделі не можуть описувати розриви вільної поверхні, а саме, обвалення поверхневих хвиль, в той час коли моделі, що базуються на прямому розв'язанні рівнянь Нав'є-Стокса та використовують MAC методи дають можливість описувати обвалення поверхневих хвиль.

На даний момент існує ціла сім'я так званих "проекційних методів". У оригінальній роботі [82] розв'язок задачі був розділений на два етапи. На першому кроці поле швидкості розраховується за часом, використовуючи рівняння імпульсу, не беручи до уваги градієнти тиску. Поле повного тиску і кінцева швидкість знаходяться на другому (проекційному) кроці. Для підвищення ефективності цього методу в негідростатичних моделях тиск розкладається на гідростатичну та негідростатичну частини [182], [75]. На першому етапі градієнти гідростатичного тиску зберігаються в рівняннях для імпульсу, нехтуючи внеском негідростатичного тиску. Рівень поверхні та тимчасове поле швидкості одержуються одночасно неявними методами. На другому кроці тимчасова швидкість коректується за рахунок включення негідростатичних членів тиску таким чином, що отримане поле швидкості не розходяться. Подальші удосконалення включають негідростатичні корекції поверхні поверхні [75] і використання методу "корекції тиску"[98] та [140], в якому на першому етапі також зберігається негідростатичний тиск з попереднього етапу часу, тоді як на другому кроці вираховується корекція тиску. Основні характеристики негідростатичних барокліних моделей з розкладом тиску приведені в таблиці 2.1. В деяких моделях використовуються метод розбиття на моди, географічні координати та узагальнені вертикальні координати (σ або z координати)(наприклад, POM [65], [193] BOM: [64], ROMS: [234], THREETOX: [174] див. таблицю 2.1). У цих моделях вертикально проінтегровані рівняння нерозривності та імпульсу (зовнішня мода) відокремлені від розрахунку рівня та вертикальної структури потоку (внутрішня мода). Двовимірні рівняння для змінних зовнішньої моди розв'язуються явно, використовуючи короткий зовнішній крок по часу, тоді як тривимірні швидкості та скалярні поля обчислюються за допомогою напівнеявних схем з більшим внутрішнім кроком. Більшість з цих моделей використовують вертикальні координати, які дозволяють точно описувати складний рельєф дна прибережних морів чи озер. Кілька негідростатичних алгоритмів з розщепленням на моди для POM [139], BOM [65] та ROMS [140] з гідростатичних були доповнені негідростатичними підмоделями. У цьому розділі буде описано модифіковану модель [139], яка була розроблена Мадеричем В.С. та Канарською Ю.В. [139], [14], а потім модифікована та вдосконалена автором для моделювання внутрішніх хвиль. Для того, щоб перевірити модифіковану модель NH-POM [139] для деяких задач було проведено моделювання ще і моделлю MITgcm, а результати розрахунків порівнювалися.

2.2 Тривимірна чисельна негідростатична модель гідродинаміки стратифікованих течій NH-POM

Негідростатична модель основана на методі розщеплення тривимірних полів швидкостей та тиску на гідростатичну та негідростатичну компоненти.

Табл. 2.1: Негідростатичні моделі

джерело	верт. коорд.	гориз. коорд.	моди	гідр. част.
Mahadevan et al. (1996a,b)	змішана ς/z	орт. крив.	Ні	
Marshall et al. (1997)	z	орт. крив.	ні	
Casulli and Stelling (1998)	z	декартова	ні	
Jankowski (1999)	ς	неструкт.	ні	TELEMAC
Casulli and Zanolli (2002)	z	неструкт.	ні	
Kanarska and Maderich (2003)	ς	орт. крив.	так	POM [65]
Wadzuk and Hodges (2004)	z	декарт.	ні	ELCOM
Fringer et al. (2006)	z	неструкт.	ні	
Heggelund et al. (2004)	ς	декарт.	так	BOM [64]
Kanarska et al. (2007)	s	орт. крив.	так	ROMS [234]
Jang etal. (2015)	s	неструкт.	ні	SELFE
дана модель	змішана ς/z	орт. крив.	так	POM [65]

Цей метод є більш швидким ніж розв'язання повних рівнянь Нав'є-Стокса, але значно повільніший ніж гідростатична версія моделі. Особливостями цієї моделі [139] є:

- вільна поверхня;
- використання вертикальної узагальненої системи координат;
- в моделі використовуються криволінійні горизонтальні координати та “Arakawa C” горизонтальну сітку;
- в моделі використовується метод розщеплення задачі на внутрішню та

зовнішні моди. При цьому підході середня швидкість та рівень розраховуються за явною схемою з малим кроком; зовнішньої моди, що визначається з умови Куранта та швидкості поверхневих хвиль. Повна швидкість та скаляри розраховуються з великим кроком по часу внутрішньої моди, що визначається з умови Куранта та швидкості внутрішніх хвиль;

- для опису вертикального перемішування в моделі для усереднених за Рейнольдсом характеристик використовувалась модель підсіткової в'язкості.

2.2.1 Рівняння моделі

В розділі 1 була описана постановка задачі в рамках рівнянь Нав'є-Стокса при постійній молекулярній в'язкості. Однак, течії у реальних водоймах є турбулентними та характеризуються великими числами Рейнольдса. Для опису таких течій використовуються рівняння Рейнольдса. Таким чином, вихідні рівняння задачі, одержані з рівнянь Нав'є-Стокса (1.1), рівняння нерозривності (1.2), рівняння переносу скалярів (1.3) (1.4) усередненням по Рейнольдсу мають вигляд:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} - g_i \frac{\rho}{\rho_0}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{\phi u_j}}{\partial x_i} - \chi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{2.3}$$

де $x_i = (x, y, z)$ – декартові координати, вісь z направлена вертикально вгору; $u_i = (u, v, w)$ – складові середніх швидкостей; p - тиск; $g_i = (0, 0, g)$ – прискорення сили тяжіння; ρ_0 – постійна густина води в наближенні Бусінеска, ϕ – скалярна величина (солоність, температура). Тензори підсіткових напружень $\overline{u_i u_j}$ та потоки скалярів $\overline{\phi u_j}$ визначаються згідно гіпотези Бусінеска:

$$\overline{u_i u_j} = -K_M(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\overline{u_i u_i}, \tag{2.4}$$

$$\overline{\phi u_j} = -Pr_T^{-1} K_M \frac{\partial \phi}{\partial x_j}. \tag{2.5}$$

де K_M - коефіцієнт підсіткової в'язкості (див. розділ 2.2.3), δ_{ij} - символ кронекера, $Pr_T = 1$ - турбулентне число Прандтля.

2.2.2 Модель турбулентності

Як правило, течії у реальних озерах, морях та океанах характеризуються великими числами Рейнольдса і ці течії - турбулентні. Для опису таких течій використовуються моделі турбулентності. Варіант моделі мілкомасштабної турбулентності для стратифікованих середовищ заснований на підході, що був запропонований Смагоринським [251] для моделі загальної циркуляції атмосфери та модифікований для стратифікованих потоків в роботі [245]. В цій моделі [245] K_M параметризується як:

$$K_M = (C_S \Delta_s)^2 \sqrt{S'^2(1 - Ri_t/Ri_{cr})}, \tag{2.6}$$

де $Ri_t = N'^2/S'^2$ - це число Річардсона,

$$S'^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2, \tag{2.7}$$

$$N'^2 = -\frac{g}{\rho_0 \mathrm{Pr}_t}\frac{\partial \rho}{\partial z}. \tag{2.8}$$

де, $Ri_{cr} = 0.25$ - критичне число Річарсона. Константа Смагоринського $C_s = 0.15$.

масштаб довжини $\Delta_s = \min(l, l_\Delta)$; l – відстань до твердої границі; підсітковий масштаб

$$l_\Delta = \frac{3\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y + \Delta x \Delta z + \Delta y \Delta z}, \tag{2.9}$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ –горизонтальний і вертикальний розміри обчислювальної комірки, відповідно. При $\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z$ значення l_Δ співпадають з відомою формулою для підсіткових масштабів, при $\Delta x \approx \Delta y \gg \Delta z$ значення $l_\Delta \approx \Delta z$.

2.2.3 Граничні умови

Вертикальні граничні умови на вільній поверхні $z = \xi$ мають вигляд

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y}, \tag{2.10}$$

і тиск на вільній поверхні $p = p_a$, де p_a - це атмосферний тиск.

Потоки імпульсу та скалярів (температури та солоності) на вільній поверхні задаються як:

$$K_M \frac{\partial(u, v)}{\partial z} = \frac{(\tau_{0x}, \tau_{0y})}{\rho_0} \tag{2.11}$$

$$K_H \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_\phi \tag{2.12}$$

на твердих границях задавалися умови ковзання та нульових потоків скалярів.

2.2.4 Початкові умови

Для формування внутрішніх хвиль початковий розподіл поля густини та швидкостей задавався за допомогою двох опцій:

- Початкове поле густини, відтворює один із механізмів генерації внутрішніх хвиль в лабораторних басейнах - механізм колапсу [141], коли в басейні виділяється частина об'єму, заповнена водою відмінної густини. Для того, щоб сформувати усамітену хвилю-пониження, початкова товщина верхнього шару у виділеному об'ємі повинна бути більшою, ніж в решті басейну, у протилежному випадку формуються хвилі підвищення. Детально про цей метод в розділі 2.4. Поле швидкості в початковий момент - нульове.

- Завдання початкових умов за допомогою розв'язків рівняння (1.142), які описані в розділі 1.4.1. Для розрахунку початкових полів густини та швидкості використовувався пакет DJLES, що базується на методі [252], який було реалізовано в середовищі MATLAB (https: //github.com /mdunphy /DJLES/).

2.2.5 Узагальнена вертикальна система координат

В негідростатичній моделі використовується нова узагальнена вертикальна система координат [195], яка має своїми частинними випадками як z систему координат так і σ - систему координат. Перехід від декартової системи до узагальненої має вигляд [193]:

$$\begin{cases} x = x^* \\ y = y^* \\ t = t^* z = \eta(x^*, y^*, t^*) + s(x^*, y^*, k, t^*) \end{cases}$$

де k – вертикальна змінна, $k = 1$ - рівень чисельної розрахункової сітки, який відповідає водній поверхні ($s = 0$ при $k = 1$), ($s = -(H_{+\eta})$ при $k = k_b$) – нижчий чисельний рівень, який повторює дно. Граничні випадки: σ - система $s = \sigma(k)(H(x, y) + \eta(x, y, t))$ і квазі-z-система $s = \sigma(k)(H_{max} + \eta(x, y, t))$, де H_{max} - максимальна глибина (рис. 2.2). В квазі-z системі s -

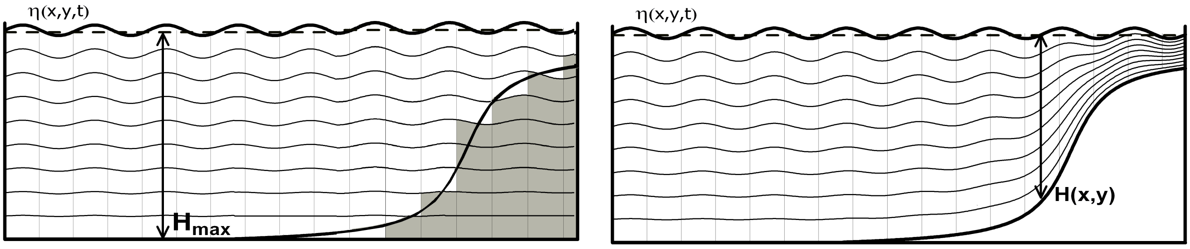

Рисунок 2.2: Вертикальна сітка. Квазі- z (зліва), та σ-система (справа)

рівні є функціями часу, і z-рівні змінюються у часі у відповідності зі змінами вільної поверхні. z-рівні представляють собою насправді квазі z-рівні, так як залежить від часу, а самі рівні змінюються за рахунок зміни рівня вільної поверхні. Але такі z-рівні не описують плавно особливості дна, як це можна зробити за рахунок σ - системи координат. Квазі z-система застосовується задля того, щоб уникнути обчислювальних помилок у розрахунках градієнту тиску, що існують у σ-системі координат.

2.2.6 Рівняння моделі в узагальненій вертикальній системі координат

Перетворення рівнянь (2.1)-(2.3) з декартової системи координат в s - вертикальну систему координат мають вигляд:

$$\frac{\partial U s_k}{\partial x} + \frac{\partial V s_k}{\partial y} + \frac{\partial U A_1}{\partial k} + \frac{\partial V A_2}{\partial k} + \frac{\partial W}{\partial k} = 0, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U s_k}{\partial t} + \frac{\partial U^2 s_k}{\partial x} + \frac{\partial U V s_k}{\partial y} + \frac{\partial U \omega}{\partial k} - f V s_k = -g s_k \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &-g \frac{s_k}{\rho_0} \int\limits_k^1 \left[s_k \frac{\partial \rho}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \rho}{\partial k'} \right] dk' - \left(\frac{\partial s_k Q}{\partial x} + \frac{\partial Q A_1}{\partial k} \right) \\ &+\frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{(K_M + \nu)}{s_k} \frac{\partial U}{\partial k} \right] + Dif(U), \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial V s_k}{\partial t} + \frac{\partial U V s_k}{\partial x} + \frac{\partial V^2 s_k}{\partial y} + \frac{\partial V \omega}{\partial k} + fU s_k = -g s_k \frac{\partial \eta}{\partial y}$$
$$-g\frac{s_k}{\rho_0}\int\limits_k^1 \left[s_k\frac{\partial \rho}{\partial y} + A_2\frac{\partial \rho}{\partial k'}\right]dk' - \left(\frac{\partial s_k Q}{\partial y} + \frac{\partial Q A_2}{\partial k}\right) \tag{2.15}$$
$$+\frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{(K_M+\nu)}{s_k}\frac{\partial V}{\partial k}\right] + Dif(V),$$

$$\frac{\partial W s_k}{\partial t} + \frac{\partial W U s_k}{\partial x} + \frac{\partial W V s_k}{\partial y} + \frac{\partial W \omega}{\partial k} = -\frac{\partial Q}{\partial k} + \frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{K_M}{s_k}\frac{\partial W}{\partial k}\right] + Dif(W), \tag{2.16}$$

де $s_k = \delta s$ – відстань між s-рівнями

$$A_1 = -\left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \ \ A_2 = -\left(\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right), \ \ A_3 = -\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)$$

.

Відмітимо, що в рівняннях (2.14), (2.15) сили Коріоліса враховуються в так званому "традиційному наближенні" та $f = 2\Omega_z$ де Ω_z – вертикальна компонента кутової швидкості обертання Землі. Перетворена вертикальна швидкість ω має вигляд

$$\omega = W + A_1 U + A_2 V + A_3.$$

Рівняння для скалярів ϕ буде мати вигляд:

$$\frac{\partial \phi s_k}{\partial t} + \frac{\partial U \phi s_k}{\partial x} + \frac{\partial V \phi s_k}{\partial y} + \frac{\partial W \phi}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{(K_H + \chi_\phi)}{s_k}\frac{\partial \phi}{\partial k}\right] + Dif(\phi). \tag{2.17}$$

Члени, що описують горизонтальну дифузію мають вигляд [131]:

$$Dif(U) = \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial k}\frac{A_1}{s_k}\hat{\tau}_{xx} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial k}\frac{A_2}{s_k}\hat{\tau}_{xy},$$
$$Dif(V) = \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial k}\frac{A_2}{s_k}\hat{\tau}_{yy} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial k}\frac{A_1}{s_k}\hat{\tau}_{xy},$$
$$Dif(W) = \frac{\partial \hat{\tau}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial k}\frac{A_2}{s_k}\hat{\tau}_{zx} + \frac{\partial \hat{\tau}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial k}\frac{A_1}{s_k}\hat{\tau}_{zy},$$
$$Dif(\phi) = \frac{\partial \hat{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial k}\frac{A_1}{s_k}\hat{q}_x + \frac{\partial \hat{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial k}\frac{A_2}{s_k}\hat{q}_y,$$

де

$$\hat{\tau}_{xx} = 2K_M\left(s_k\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial k}A_1U\right),$$

$$\hat{\tau}_{xy} = \hat{\tau}_{yx} = K_M\left(s_k\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial k}A_2U + s_k\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial k}A_1V\right),$$

$$\hat{\tau}_{yy} = 2K_M\left(s_k\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial k}A_2V\right),$$

$$\hat{\tau}_{xz} = 2K_M\left(s_k\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial k}A_1W\right),$$

$$\hat{\tau}_{yz} = 2K_M\left(s_k\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial k}A_2W\right),$$

$$\hat{q}_x = K_H\left(s_k\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial k}A_1\phi\right), \quad \hat{q}_y = K_H\left(s_k\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial k}A_2\phi\right)$$

В багатьох моделях (POM, BOM, ROMS, THREETOX) вертикально проінтегровані рівняння руху та нерозривності (зовнішня мода) відокремлені від рівнянь з вертикальною структурою (внутрішня мода). Рівняння зовнішньої моди розв'язуються явно з коротким кроком по часу Δt_E для того, щоб задовольнити умови Куранта для баротропних довгих хвиль. Тривимірні рівняння зовнішньої моди розв'язуються за напів-неявними схемами з великим кроком по часу Δt_I (див. рис. 2.3). Усереднені по вертикалі баротропні швидкості та негідростатичний тиск:

$$\bar{U} \equiv \int_{kb}^{1} U dk \qquad \bar{V} \equiv \int_{kb}^{1} V dk, \qquad \bar{Q} \equiv \int_{kb}^{1} Q dk.$$

Враховуючи це, рівняння для рівня буде переписано наступним чином

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U} s_k}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V} s_k}{\partial y} = 0.$$

Посередині по глибині рівняння для горизонтальних швидкостей мають вигляд

$$\frac{\partial \bar{U} s_k}{\partial t}+\frac{\partial \bar{U}^2 s_k}{\partial x}+\frac{\partial \bar{U}\bar{V} s_k}{\partial y}-f\bar{V}s_k+gs_k\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\tau_{0x}+\tau_{bx}+Dif(\bar{U})$$

,

$$-g\frac{s_k}{\rho_0}\int\limits_{kb}^{1}\int\limits_{k}^{1}\left[s_k\frac{\partial \rho}{\partial x}+A_1\frac{\partial \rho}{\partial k'}\right]dk'dk-\left(s_k\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x}+A_1\frac{\partial \bar{Q}}{\partial k}\right)+G_x,$$

$$\frac{\partial \overline{V} s_k}{\partial t}+\frac{\partial \bar{U}\bar{V} s_k}{\partial x}+\frac{\partial \bar{V}^2 s_k}{\partial y}+f\bar{U}s_k+gs_k\frac{\partial \eta}{\partial y}=-\tau_{0y}+\tau_{by}+Dif(\bar{V})$$

,

$$-g\frac{s_k}{\rho_0}\int\limits_{kb}^{1}\int\limits_{k}^{1}\left[s_k\frac{\partial \rho}{\partial y}+A_2\frac{\partial \rho}{\partial k'}\right]dk'dk-\left(s_k\frac{\partial \bar{Q}}{\partial y}+A_2\frac{\partial \bar{Q}}{\partial k}\right)+G_y,$$

де G_x, G_y так звані дисперсійні члени ([65]), τ_{bx}, τ_{by} – придонні зсувні напруження, які можуть бути визначені з розв'язків для внутрішньої моди.

2.2.7 Просторова дискретизація рівнянь моделі

Для апроксимації рівнянь моделі використовуються метод центральних різниць за часом та по простору.

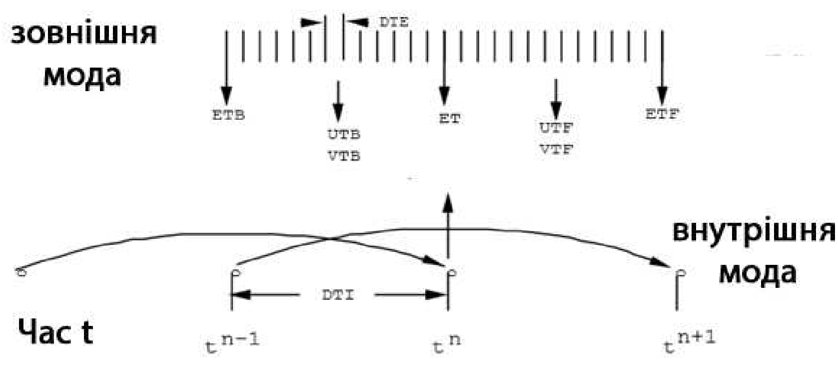

Рисунок 2.3: Дискретизація за часом. Метод розщеплення на зовнішню та внутрішню моди [193]

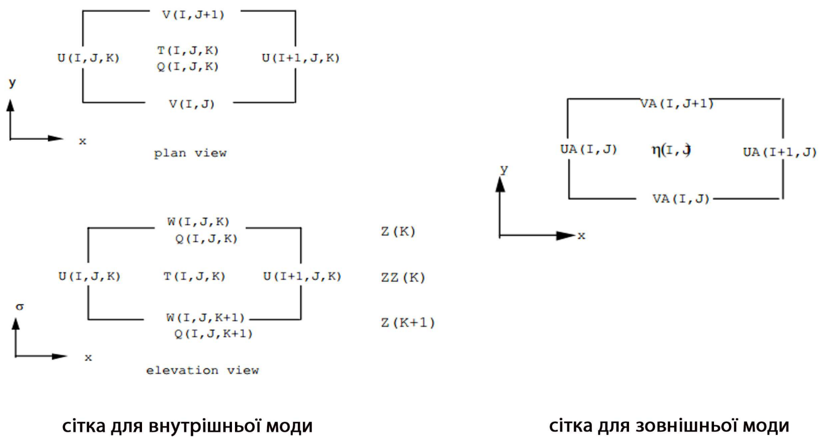

Рисунок 2.4: Дискретизація в просторі. Сітка для зовнішньої та внутрішньої моди [193]

2.2.8 Чисельний алгоритм тривимірної гідродинамічної моделі із вільною поверхнею

Особливістю цієї моделі є розщеплення поля швидкості на баротропну та бароклінну складові. Баротропна складова знаходиться шляхом розв'язання з малим кроком по часу (зовнішній крок) проінтегрованих по глибині рівнянь руху та нерозривності, а бароклінна компонента - шляхом розв'язку з більшим кроком по часу тривимірних вихідних рівнянь Нав'є-Стокса. Алгоритм включає чотири етапи рис. 2.5.

1 етап	Зовнішня мода	Рівень, осереднені по глибині швидкості	Явна схема
2 етап	внутрішня мода	Поле швидкості у гідростатичному наближені	Напівнеявна схема
3 етап	внутрішня мода	Негідростатичне поле швидкості	Напівнеявна схема
4 етап	внутрішня мода	Поле скалярів	Напів неявна схема

Рисунок 2.5: Алгоритм моделі

1 етап: розрахунок вільної поверхні. Обчислення вільної поверхні проводиться з проінтегрованих по глибині рівнянь руху з малим кроком по часу

$\Delta t_E = \Delta t_I / M$ за допомогою явної схеми. Початкове двовимірне поле швидкості на кожному етапі визначається інтегруванням по глибині знайденого на попередньому кроці тривимірного поля швидкості.

$$\frac{\eta^{m+1} - \eta^{m-1}}{2\Delta t_E} + \frac{\partial \left(\bar{U} s_k\right)^m}{\partial x} + \frac{\partial \left(\bar{V} s_k\right)^m}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\left(\bar{U} s_k\right)^{m+1} - \left(\bar{U} s_k\right)^{m-1}}{2\Delta t_E} + \frac{\partial \left(\bar{U}^2 s_k\right)^m}{\partial x} + \frac{\partial \left(\bar{U}\bar{V} s_k\right)^m}{\partial y}$$

$$-Dif\left(\bar{U}^{m-1}\right) + g s_k \frac{\partial \eta^m}{\partial x} - f\left(\bar{V} s_k\right)^m = -\left(s_k \frac{\partial \bar{Q}^n}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \bar{Q}^n}{\partial k}\right)$$

$$-\frac{g {s_k}^n}{\rho_0} \int\limits_{kb}^{1} \int\limits_{k}^{1} \left({s_k}^n \frac{\partial \rho^n}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \rho^n}{\partial k'}\right) dk' dk + G_x^n - \frac{\tau^{(x)}}{\rho_0} + \tau_{bx}^n,$$

$$\frac{\left(\bar{V} s_k\right)^{m+1} - \left(\bar{V} s_k\right)^{m-1}}{2\Delta t_E} + \frac{\partial \left(\bar{V}\bar{U} s_k\right)^m}{\partial x} + \frac{\partial \left(\bar{V}^2 s_k\right)^m}{\partial y} -$$

$$Dif\left(\bar{V}^{m-1}\right) + g s_k \frac{\partial \eta^m}{\partial y} + f\left(\bar{U} s_k\right)^m = -\left(s_k \frac{\partial \bar{Q}^n}{\partial y} + A_2 \frac{\partial \bar{Q}^n}{\partial k}\right)$$

$$-\frac{g {s_k}^n}{\rho_0} \int\limits_{kb}^{1} \int\limits_{k}^{1} \left({s_k}^n \frac{\partial \rho^n}{\partial y} + A_2 \frac{\partial \rho^n}{\partial k'}\right) dk' dk + G_y^n - \frac{\tau^{(y)}}{\rho_0} + \tau_{by}^n.$$

.

Індексом $m = 1, ..., M$ позначається зовнішній часовий крок, тоді як індекс n відноситься до внутрішнього кроку. Умови Куранта чисельної стійкості накладають обмеження на зовнішній часовий крок Δt_E. Всі члени в правій частині рівняння розраховуються з внутрішнім кроком по часу та залишаються константами під час розрахунків з зовнішнім кроком по часу.

2 етап: гідростатичні компоненти поля швидкості та тиску. На цьому етапі тривимірні рівняння гідродинаміки розв'язуються за допомогою напівнеявної схеми з внутрішнім кроком по часу. Таким чином знаходиться проміжне поле швидкості.

$$\frac{\left(\tilde{U}s_k\right)^{n+1}-(Us_k)^{n-1}}{2\Delta t_I}+\frac{\partial\left(U^2 s_k\right)^n}{\partial x}+\frac{\partial(UVs_k)^n}{\partial y}+\frac{\partial(U\omega s_k)^n}{\partial k}$$

$$=-gs_k\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x}-g\frac{{s_k}^n}{\rho_0}\int\limits_k^1\left[{s_k}^n\frac{\partial\rho^n}{\partial x}+A_1\frac{\partial\rho^n}{\partial k'}\right]dk'$$

$$+\frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{(K_M+\nu)}{{s_k}^{n+1}}\frac{\partial\tilde{U}^{n+1}}{\partial k}\right]+Dif\left(U^{n-1}\right)+f(Vs_k)^n,$$

$$\frac{\left(\tilde{V}s_k\right)^{n+1}-(Vs_k)^{n-1}}{2\Delta t_I}+\frac{\partial(UVs_k)^n}{\partial x}+\frac{\partial\left(V^2 s_k\right)^n}{\partial y}+\frac{\partial(V\omega)^n}{\partial k}$$

$$=-gs_k\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial y}-g\frac{{s_k}^n}{\rho_0}\int\limits_k^1\left[{s_k}^n\frac{\partial\rho^n}{\partial y}+A_2\frac{\partial\rho^n}{\partial k'}\right]dk'$$

$$+\frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{(K_M+\nu)}{{s_k}^{n+1}}\frac{\partial\tilde{V}^{n+1}}{\partial k}\right]+Dif\left(V^{n-1}\right)-f(Us_k)^n,$$

$$\frac{\left(\tilde{W}s_k\right)^{n+1}-(Ws_k)^{n-1}}{2\Delta t_I}+\frac{\partial(UWs_k)^n}{\partial x}+\frac{\partial(VWs_k)^n}{\partial y}+\frac{\partial(W\omega s_k)^n}{\partial k}$$

$$=\frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{(K_M+\nu)}{{s_k}^{n+1}}\frac{\partial\tilde{W}^{n+1}}{\partial k}\right]+Dif\left(W^{n-1}\right)$$

.

На цьому етапі задовольняються всі граничні умови для поля швидкості.

3 етап: *негідростатичне поле швидкості та тиску.* Знайдене на попередньому етапі проміжне поле швидкості доповнюється негідростатичною компонентою поля швидкості за рахунок градієнту негідростатичного тиску

$$\frac{(Us_k)^{n+1}-\left(\tilde{U}s_k\right)^{n+1}}{2\Delta t_I}=-\left(\frac{\partial(s_kQ)^{n+1}}{\partial x}+\frac{\partial(QA_1)^{n+1}}{\partial k}\right), \tag{2.18}$$

$$\frac{(Vs_k)^{n+1} - \left(\tilde{V}s_k\right)^{n+1}}{2\Delta t_I} = -\left(\frac{\partial(s_kQ)^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial(QA_2)^{n+1}}{\partial k}\right), \tag{2.19}$$

$$\frac{(Ws_k)^{n+1} - \left(\tilde{W}s_k\right)^{n+1}}{2\Delta t_I} = -\frac{\partial Q^{n+1}}{\partial k}, \tag{2.20}$$

таким чином, щоб задовольнити рівнянню нерозривності.

$$\frac{\partial(Us_k)^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial(Vs_k)^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial(UA_1)^{n+1}}{\partial k} + \frac{\partial(VA_2)^{n+1}}{\partial k} + \frac{\partial W^{n+1}}{\partial k} = 0.$$

.

В результаті задача зводиться до розв'язання рівняння Пуассона для негідростатичної компоненти тиску:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(s_k\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(A_1\frac{\partial Q}{\partial k}\right) + \frac{\partial}{\partial k}\left(A_1\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right.$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(s_k\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_2\frac{\partial Q}{\partial k}\right) + \frac{\partial}{\partial k}\left(A_2\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{s_k}\frac{\partial Q}{\partial k}\right) + \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{{A_1}^2}{s_k}\frac{\partial Q}{\partial k}\right) + \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{{A_2}^2}{s_k}\frac{\partial Q}{\partial k}\right)\right]^{n+1}$$
$$= \frac{1}{2\Delta t_I}\left[\frac{\partial\left(\tilde{U}s_k\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\tilde{V}s_k\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\tilde{U}A_1\right)}{\partial k} + \frac{\partial\left(\tilde{V}A_2\right)}{\partial k} + \frac{\partial\tilde{W}}{\partial k}\right]^{n+1}$$

.

Дискретизоване рівняння представляє собою систему лінійних рівнянь, матриця якої є несиметричною, п'ятнадцяти діагональною.

$$a_1Q_{i+1,j,k} + a_2Q_{i-1,j,k} + a_3Q_{i+1,j,k+1} + a_4Q_{i-1,j,k+1} + a_5Q_{i,j+1,k}$$
$$+a_6Q_{i,j-1,k} + a_7Q_{i,j+1,k+1} + a_8Q_{i,j-1,k+1} + a_9Q_{i+1,j,k-1} + a_{10}Q_{i-1,j,k-1}$$
$$+a_{11}Q_{i,j+1,k-1} + a_{12}Q_{i,j-1,k-1} + a_{13}Q_{i,j,k+1} + a_{14}Q_{i,j,k-1} + a_{15}Q_{i,j,k} = R_Q$$

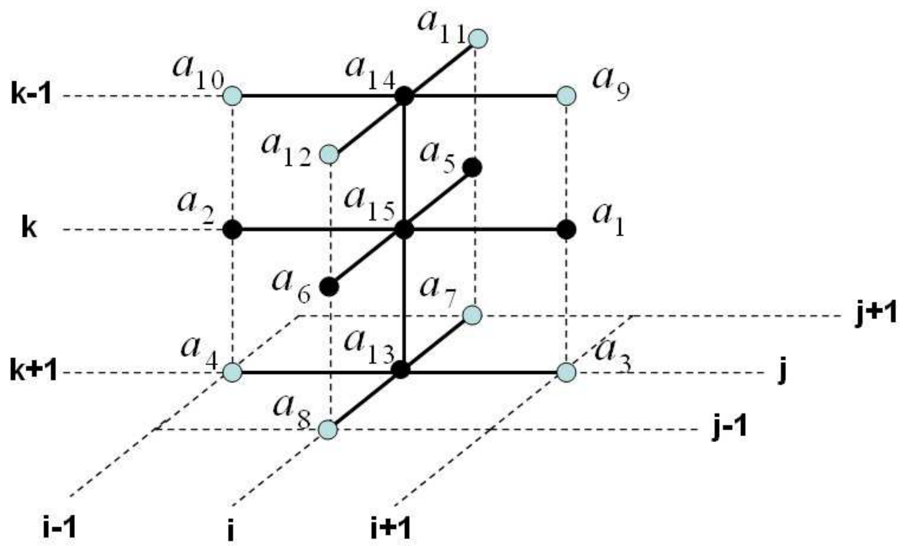

Рисунок 2.6: Просторова схема кінцево-різницевого представлення рівняння Пуассона для негідростатичної компоненти тиску в узагальнених вертикальних координатах. Чорні вузли відповідають вузлам, що використовуються в z-системі координат

де

$$a_1 = \frac{dz_{ijk}(s_k)_{i+1/2,j}}{dx_{ij}ddx_{ij}}, \quad a_2 = \frac{dz_{ijk}(s_k)_{i-1/2,j}}{dx_{ij}ddx_{i-1,j}}$$

$$a_3 = -\frac{dz_{ijk}}{dx_{ij}}\left(\frac{A_1^{i+1,j,k}}{dz_{i+1,j}} + \frac{A_1^{i,j,k+1}}{dz_{i,j}}\right), \quad a_4 = \frac{dz_{ijk}}{dx_{ij}}\left(\frac{A_1^{i-1,j,k}}{dz_{i-1,j}} + \frac{A_1^{i,j,k+1}}{dz_{i,j}}\right),$$

$$a_5 = \frac{dz_{ijk}(s_k)_{i,j-1/2}}{dy_{ij}dyy_{ij}}, \quad a_6 = \frac{dz_{ijk}(s_k)_{i,j-1/2}}{dy_{ij}dyy_{i,j-1}},$$

$$a_7 = -\frac{dz_{ijk}}{dy_{ij}}\left(\frac{A_2^{i,j+1,k}}{dz_{i,j+1}} + \frac{A_2^{i,j,k+1}}{dz_{i,j}}\right), \quad a_8 = \frac{dz_{ijk}}{dy_{ij}}\left(\frac{A_2^{i,j-1,k}}{dz_{i,j-1}} + \frac{A_2^{i,j,k+1}}{dz_{i,j}}\right),$$

$$a_9 = \frac{dz_{ijk}}{dx_{ij}}\left(\frac{A_1^{i+1,j,k}}{dz_{i+1,j}} + \frac{A_1^{i,j,k-1}}{dz_{i,j}}\right), \quad a_{10} = -\frac{dz_{ijk}}{dx_{ij}}\left(\frac{A_1^{i-1,j,k}}{dz_{i-1,j}} + \frac{A_1^{i,j,k-1}}{dz_{i,j}}\right),$$

$$a_{11} = \frac{dz_{ijk}}{dy_{ij}} \left(\frac{A_2^{i,j+1,k}}{dz_{i,j+1}} + \frac{A_2^{i,j,k-1}}{dz_{i,j}} \right), \quad a_{12} = -\frac{dz_{ijk}}{dy_{ij}} \left(\frac{A_2^{i,j-1,k}}{dz_{i,j-1}} + \frac{A_2^{i,j,k-1}}{dz_{i,j}} \right),$$

$$a_{13} = -\frac{1 + \left(A_1{}^{i,j,k+1/2}\right)^2 + \left(A_2{}^{i,j,k+1/2}\right)^2}{(s_k)_{ij} \cdot dzz_{ijk}}, \; a_{14} = \frac{1 + \left(A_1{}^{i,j,k-1/2}\right)^2 + \left(A_2{}^{i,j,k-1/2}\right)^2}{(s_k)_{ij} \cdot dzz_{ij,k-1}},$$

$$a_{15} = -\frac{dz_{ijk}(s_k)_{i+1/2,j}}{dx_{ij}dxx_{ij}} - \frac{dz_{ijk}(s_k)_{i-1/2,j}}{dx_{ij}dxx_{i-1,j}} - \frac{1}{(s_k)_{ij}} \left(\frac{1 + \left(A_1{}^{i,j,k-1/2}\right)^2 + \left(A_2{}^{i,j,k-1/2}\right)^2}{dzz_{ijk-1}} \right.$$

$$\left. + \frac{1 + \left(A_1{}^{i,j,k+1/2}\right)^2 + \left(A_2{}^{i,j,k+1/2}\right)^2}{dzz_{ijk}} \right) - \frac{dz_{ijk}(s_k)_{i,j+1/2}}{dy_{ij}dyy_{ij}} - \frac{dz_{ijk}(s_k)_{i,j-1/2}}{dy_{ij}dyy_{i,j-1}}$$

$$R_Q = \frac{1}{2\Delta t_I} \left[\frac{\tilde{U}_{i+1,j,k}(s_k)_{i+1/2,j} - \tilde{U}_{i,j,k}(s_k)_{i-1/2,j}}{dx_{i,j}} \right.$$

,

$$+ \frac{\tilde{V}_{i+1,j,k}(s_k)_{i+1/2,j} - \tilde{V}_{i,j,k}(s_k)_{i-1/2,j}}{dy_{i,j}} + \left(\tilde{U}_{i,j,k-1} A_1^{i,j,k-1} - \tilde{U}_{i,j,k+1} A_1^{i,j,k+1} \right)$$

$$\left. + \left(\tilde{V}_{i,j,k-1} A_2^{i,j,k-1} - \tilde{V}_{i,j,k+1} A_2^{i,j,k+1} \right) + \left(\tilde{W}_{i,j,k} - \tilde{W}_{i,j,k+1} \right) \right]^{n+1},$$

де

$$dxx_{i,j} = \frac{dx_{i,j} + dx_{i+1,j}}{2},$$
$$dyy_{i,j} = \frac{dy_{i,j} + dy_{i,j+1}}{2},$$
$$dz_{i,j,k} = z_{i,j,k} - z_{i,j,k+1},$$
$$dzz_{i,j,k} = zz_{i,j,k} - zz_{i,j,k+1}.$$

Система розв'язується за допомогою методу спряжених градієнтів. Після того як знайдено розподіл тиску, знаходиться залишкове негідростатичне поле швидкості. На твердих границях задаються умови нульових потоків. На вільній поверхні та на відкритих границях $Q = 0$. Після того, як знайдено поле негідростатичного тиску, обчислюється відповідне поле швидкості $\left(U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1}\right)$ з рівнянь (2.18) – (2.20).

4 етап: *розрахунок скалярів.* На цьому етапі розв'язуються рівняння для скалярів (температура, солоність, а також характеристики турбулентності).

$$\frac{(\phi_i s_k)^{n+1} - (\phi_i s_k)^{n-1}}{2\Delta t_i} + \frac{\partial (U\phi_i s_k)^n}{\partial x} + \frac{\partial (V\phi_i s_k)^n}{\partial y} + \frac{\partial (W\phi_i s_k)^n}{\partial k}$$
$$= \frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{(K_H + \chi_\phi)}{s_k}\frac{\partial {\phi_i}^{n+1}}{\partial k}\right] + Dif\left(\bar{\phi}_i^{n-1}\right).$$

Для розрахунків застосовувалася напівнеявна схема з неявним представленням складових вертикальної дифузії. Для обчислення адвективних складових використовувалися різницеві схеми другого порядку, що належать до так званих TVD схем. Запропонований алгоритм поєднує у собі найбільш ефективні компоненти гідростатичних моделей, що дозволяє розглядати модель як узагальнення та розширення існуючих гідростатичних моделей.

2.2.9 Паралелізація коду

Для підвищення чисельної ефективності для гідродинамічної моделі NH-POM було створено паралельну версію, яка використовує MPI бібліотеки. В моделі NH-POM було реалізовано найбільш розповсюджений підхід до чисельного розв'язку задач механіки рідини та газу, заснований на геометричній декомпозиції розрахункової області на підобласті (рисунок 2.7), кількість яких дорівнює числу процесорів. Під час розрахунку, кожним процесором виконується обчислення в рамках своєї підобласті та обміні даними між ними на кожному кроці за часом. Зв'язок підобластей виконується за допомогою фіктивних комірок (їхня кількість залежить від шаблону різницевої схеми), які знаходяться за границями підобластей і не обробляються кодом.

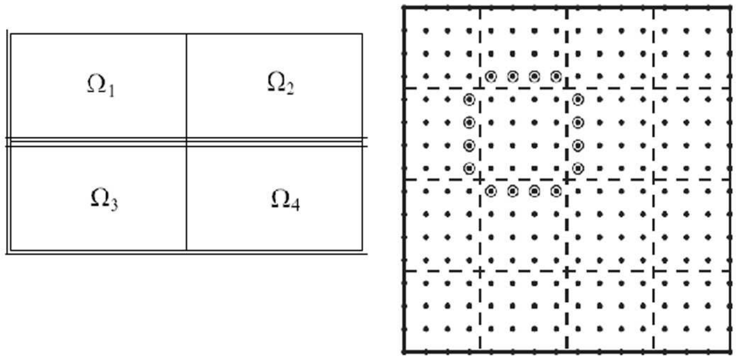

Рисунок 2.7: Геометрична декомпозиція розрахункової області в гідродинамічній моделі NH-POM

Показник продуктивності залежить від методу декомпозиції, засобу розподілення даних за процесорами та реалізації чисельних методів, які залучені для розв'язку підзадач. Методологічний підхід до розв'язку задачі за допомогою засобів паралельної обробки даних полягає в реалізації наступних етапів:

- Декомпозиція. Розбиття задачі обчислення і обробки даних на мінімальні незалежні підзадачі.

- Комунікації. Визначення структури підзадач та встановлення необхідних зв'язків між ними.

- Кластерізація. Оцінка структури під задач та їх об'єднання з метою мінімізації комунікацій і підвищення продуктивності.

- Розподілення. Призначення підзадач конкретним процесорам та забезпечення їх рівномірного навантаження.

На кроках 1 і 2 виділяються паралельні гілки обчислювального алгоритму та закладається його масштабованість. Реалізація кроків 3 і 4 потребує врахування архітектури багатопроцесорної системи для забезпечення мобільності та локальності алгоритму. Для паралелізації коду моделі для випадку задач з нерухомими границями використовувався метод геометричної декомпозиції з введенням внутрішніх граничних умов. Розрахункова область розділяється на декілька підобластей за кількістю процесорів. Підобласті мають ряд фіктивних комірок (ghost cell), які перекриваються з комірками сусідніх підобластей та зберігають граничні значення сусідніх блоків (рисунок 2.7). Кожна підобласть обробляється одним процесором, а їхня взаємодія потрібна тільки при переході до наступного часового шару. Зв'язок підобластей відбувається за допомогою копіювання значень шуканих функцій в фіктивні комірки.

Для отримання розв'язку в момент часу в кожній з підобластей проводяться обчислення у відповідності з розробленою схемою. Для розв'язку великих систем, що виникають в результаті дискретизації еліптичних рівнянь в частинних похідних другого порядку використовувався програмний код AGMG http://agmg.eu/ [214].

2.3 Чисельна модель MITgcm

Чисельна модель MITgcm [184, 185] - одна з перших негідростатичних моделей, що розробляється в Массачусетському технологічному інституті протягом 15 років. Вона широко застосовується для моделювання процесів різних масштабів: від глобальної циркуляції атмосфери і океану до короткохвильових збурень в лабораторних лотках. Система дозволяє моделювати як океанічні, так і атмосферні процеси, з використанням одного гідродинамічного ядра. Модель основана на повнонелінійних рівняннях гідродинаміки тривимірної нестисливої рідини в наближенні Бусінеска, що доповнені рівнянням стану 1.1-1.4. У MITgcm система рівнянь 1.1-1.4, представляється в одній з трьох форм: гідростатична HPE , квазігидростатична QH і негідростатична NH. Кожна з них відрізняється набором процесів, які можливо врахувати в моделі. Для всіх опцій для розв'язання повної системи рівнянь на першому

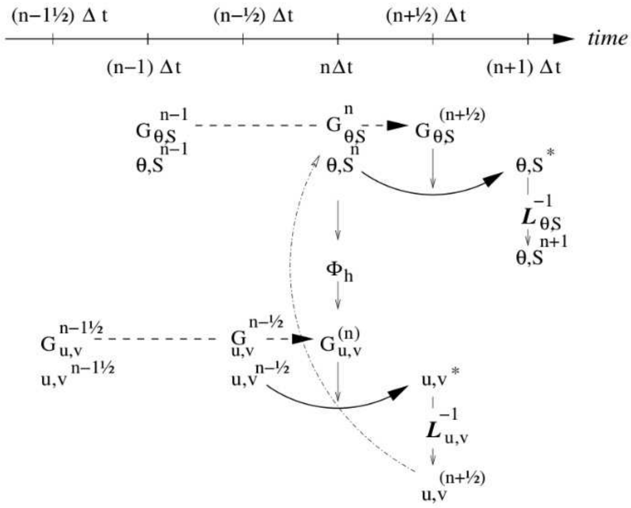

Рисунок 2.8: Схема явного методу Адамса з фазою неявного кроку по часу

етапі розв'язуться двовимірне еліптичне рівняння для визначення поверхневого тиску та гідростатичного тиску на будь-якому рівні. Потім для гідростатики і квазігідростатики чисельно розв'язуться рівняння для горизонтальної складової закону збереження імпульсу, а вертикальна складова обчислюється з рівняння нерозривності. Для квазі негідростатичної QH та негідростатичної версії NH рівняння горизонтального імпульсу розраховуються з часовим кроком вперед, а компоненти вертикальної швидкості знаходять з рівняння неперервності. В цій опції спочатку повинно бути розв'язано тривимірне еліптичне рівняння для негідростатичного тиску а потім рівняння для горизонтальних компонент швидкості. Для обчислення значення змінних на наступному кроці по часу в ній використовується проекційний метод [82] (метод Чоріна або метод тиску).

Просторова дискретизація проводиться з використанням методу скінчених об'ємів або так званий метод центральних кінцевих різниць другого порядку, він надає можливість більш якісного опису границь, так як дозволяє регулярної сітці перетинати. Для розв'язання системи рівнянь в різних опціях може бути застосований напів-неявний метод тиску для гідростатичних рівнянь з вільною поверхнею, із використанням методу Адамса-Бешфорта (рис. 2.8) та використанням змінних з різних часових кроків.

2.4 Порівняння результатів чисельного моделювання моделями NH-POM та MITgcm та з результатами лабораторних експериментів

2.4.1 Генерація внутрішніх усамітнених хвиль першої бароклінної моди

В цьому параграфі розглянемо порівняння розрахунків моделлю NH-POM (розділ 2.1), що базується на рівняннях Нав'є-Стокса (1.1 розділ 1), при постійному значенні молекулярної в'язкості ν, з результатами лабораторних експериментів по генерації внутрішніх хвиль. Починаючи з роботи [141] в лабораторних експериментах усамітені хвилі часто генеруються за допомогою механізму колапсу, коли в басейні виділяється частина об'єму, заповненої водою відмінної густини (напр. [4], [78], [114]). Для того, щоб утворити усамітнену хвилю-пониження, початкова товщина верхнього шару у виділеному об'ємі повинна бути більшою, ніж в решті басейну, у протилежному випадку формуються хвилі підвищення. У наших подальших численних експериментах цей же метод використовувався для генерації внутрішніх загальних хвиль. Після того як головна хвиля трансформувалась в усамітнену хвилю.

Експерименти проводилися в лабораторному басейні, довжиною 12 м [78], з прямокутним поперечним перерізом висотою 0.7 м і шириною 0.5 м. Басейн був заповнений рідиною з двошаровою стратифікацією, що складається з верхнього шару прісної води з густиною ρ_1 над шаром солоної води з густиною ρ_2 , глибина басейну дорівнює 40 см. Як видно з рис.2.9, з правого боку басейну на відстані L від стіни встановлені вертикальні ворота для генерації

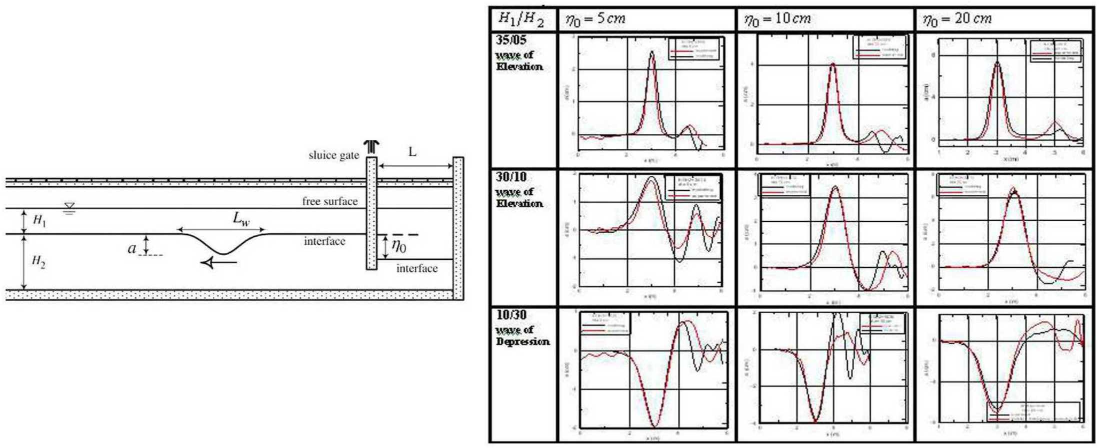

Рисунок 2.9: Схема лабораторного експерименту [78] та результати порівняння чисельних і лабораторних експериментів

внутрішніх хвиль. Внутрішні хвилі створювалися за допомогою механізму колапсу від різниці в потенціальній енергії від рівнів поверхні розділу по обидві сторони від вертикальних воріт.

Було проведено порівняння чисельного моделювання з результатами лабораторних експериментів. Обчислювальна область 9 м $\times$ 0.05 м $\times$ 0.4 м дискретизується з роздільною здатністю $1000 \times 6 \times 200$ вузлів. На бічних границях було використано граничні умови ковзання. (Таким чином, задача розглядалась у квазідвовимірний постановці). Результати порівняння дев'яти чисельних та лабораторних тестів для різних співвідношень верхнього та нижнього шарів та різниці рівнів поверхні розділу за воротами наведено на рис. 2.9 б.

Як видно з рис. 2.9 модель відтворює форму усамітнених хвиль для різних початкових умов. Процеси утворення усамітненої хвилі внаслідок колапсу об'єму рідини в двох симетричних випадках наведено на рис. 2.10, де зображено еволюція поля солоності, що візуалізувалася барвниками та поле завихоренності. Цей процес можна номінально розділити на три етапи: перший етап - формування голови гравітаційної течії, другий етап - перетворення в сильно нелінійну хвилю, третій етап - розповсюдження усамітеної хвилі. Також були відтворені експерименти по генерації внутрішніх хвиль, що проводилися в Інституті гідромеханіки НАН України. Представлені результати порівняння експериментального дослідження та чисельного моделювання, що стосуються внутрішньої усамітненої хвилі-пониження в двошаровій рідині. Генерація усамітених хвиль проводилася за допомогою механізму колапсу об'єму рідини [141]. Експериментальний басейн має розміри - довжина 5.7 м; ширина 0.40 м; висота 1.5 м. Схему експериментальної установки та схему генерації хвиль показано на рис. 2.11.

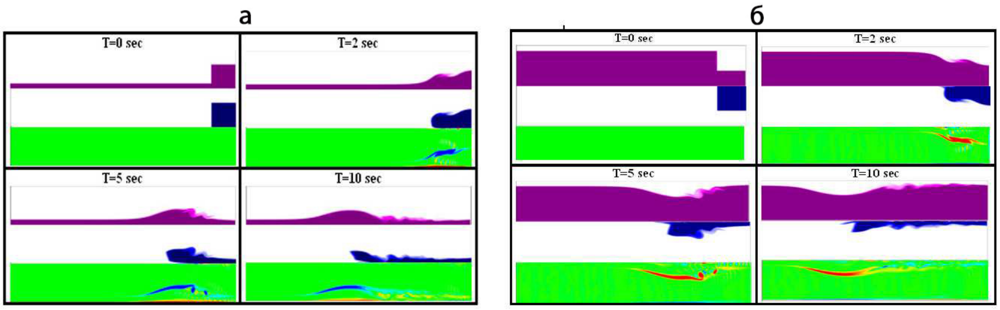

Рисунок 2.10: Генерація хвиль-підвищення (а) та хвиль-пониження (б). Еволюція солоності (верхній слайд), захопленої рідини (яка візуалізована барвниками) (середній слайд), та поле завихоренності (нижній слайд).

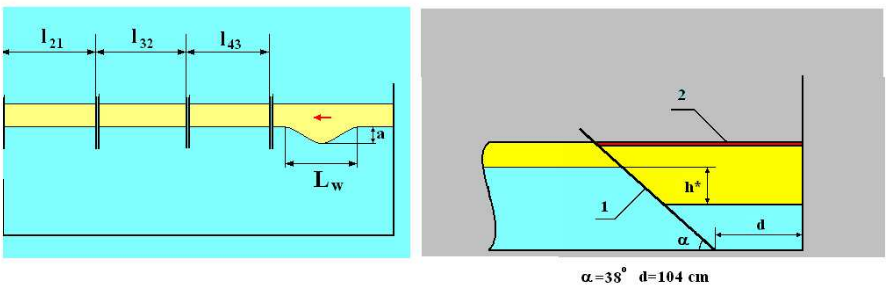

Рисунок 2.11: Схема експериментальної установки та схеми генерації хвиль

Вимірювання параметрів внутрішніх хвиль були виконані за допомогою серії мікро-датчиків. Обчислення проводились на розрахунковій сітці з роз-

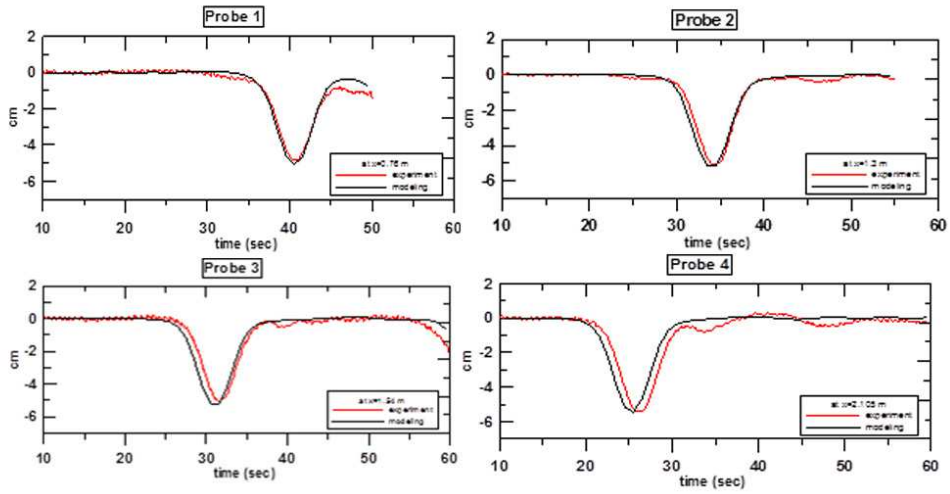

Рисунок 2.12: Результати порівняння чисельних і лабораторних експериментів

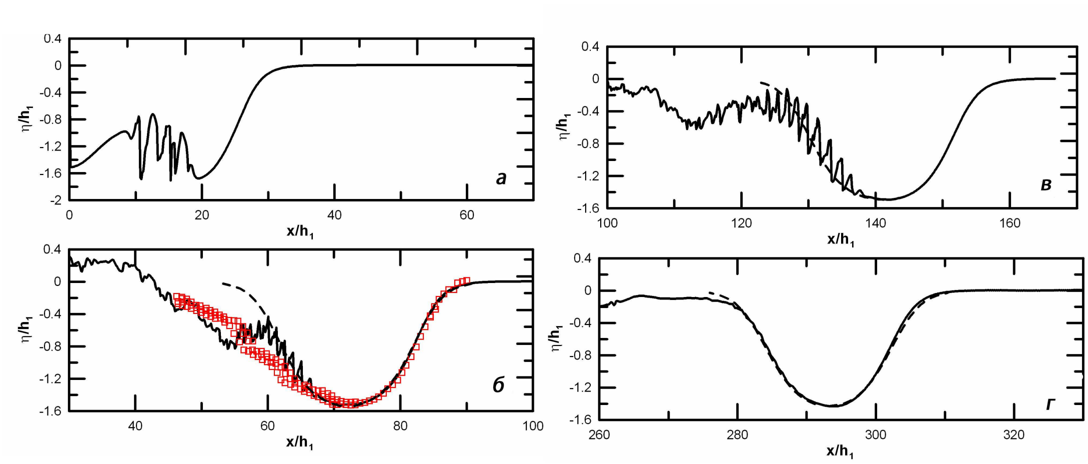

Рисунок 2.13: Формування внутрішньої хвилі-пониження шляхом механізму колапсу, порівняння профілю з лабораторного експерименту [114] з результатом чисельного моделювання та аналітичним розв'язком 1.131

дільною здатністю $1001 \times 6 \times 200$. Басейн становив 5.7 м довжини і ширину 0.05 м.

2.4.2 Верифікація результатів чисельного моделювання NH-POM

На рис. 2.13 показано послідовно процес формування внутрішньої хвилі-пониження, що була сформована методом колапсу [141]. На рис. 2.13 б зо-

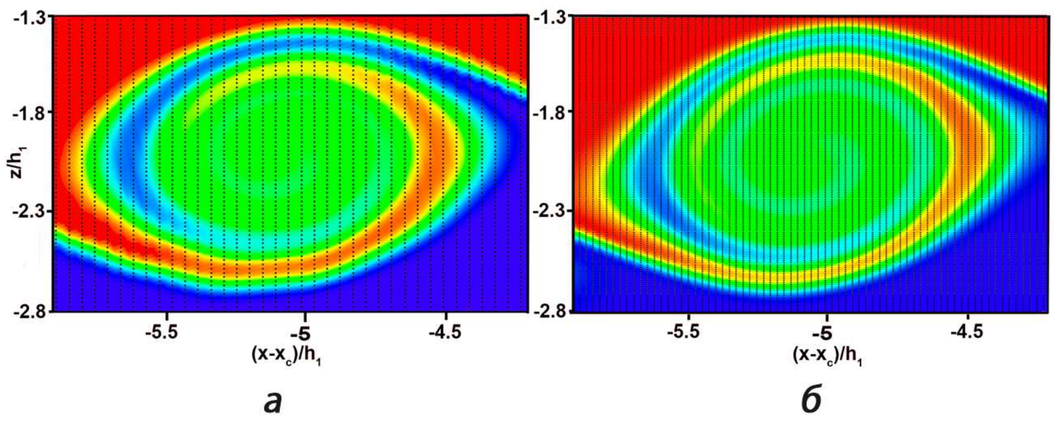

Рисунок 2.14: Поле густини у вихорах Кельвіна-Гельмгольца для випадку (D13; D13) (див. таблицю 7.7 в додатку) з 5.10 при $\tau = 75$. (а) роздільна здатність сітки 3000×500 (б) 6000×1000. Точки відображають вузли сітки.

бражено профіль хвилі, отриманий з лабораторного експерименту [114], результати чисельного моделювання та аналітичний розв'язок 1.131. Як видно результати моделювання співпадають з результатами лабораторного експерименту і аналітичним розв'язком. Більш детально про даний експеримент та аналіз даного експерименту буде представлено в розділі 3.5. На рис. 5.11 приведено порівняння поля густини у вихорах Кельвіна - Гельмгольця, що утворились при фронтальному зіткненні для варіантів моделювання з різною роздільною здатністю розрахункової сітки (а) - 3000 x 500 (б) 6000 x 1000, що показує стійкість розв'язку щодо різних розрахункових сіток. Більш детально даний експеримент буде розглянуто в розділі 5.

На рис. Результати порівняння чисельних і лабораторних експериментів демонструють гарну відповідність як і по амплітуді так і по довжині хвилі. Негідростатична модель (див. розділ 2.1), відтворює процеси генерації внутрішніх усамітнених хвиль, що генеруються методом колапсу в лабораторних експериментах.

2.4.3 Моделювання трансформації поверхневих хвильових пакетів у басейні з різкими змінами глибини

В цьому параграфі розглянемо порівняння розрахунків моделі з аналітичними розв'язками для трансформації пакетів поверхневих хвиль над різкими змінами рельєфу дна. Тут будуть приведені чисельні розрахунки трансформації поверхневих хвильових пакетів над донним уступом. Та порівнянні результати моделювання з даними, отриманими раніше в роботах [104, 18], як на основі чисельного моделювання, так і за допомогою наближеного теоретичного підходу. При взаємодії поверхневих збурень з різкими варіаціями рельєфу дна відбувається перерозподіл хвильової енергії між хвилями, що набігають, хвилями, що пройшли за сходинку та відбитими хвилями. В залежності від параметрів хвилі, що пройшла, хвильовий пакет може зберігати значну частину початкової енергії і впливати на прибережні споруди, узбережну лінію, морські платформи, кораблі, трубопроводи та інші гідротехнічні споруди. Багато теоретичних робіт були присвячені визначенню коефіцієнтів трансформації хвиль, однак, прості формули, що дозволяють відносно легко і швидко розрахувати основні характеристики (висоти і довжини) трансформованих хвиль, були отримані або в наближенні нескінченно довгих хвиль [158], або на підставі напівемпіричного підходу [18, 104]. Строгий підхід був запропонований в роботі [58] та узагальнений в роботах [186, 199, 259], на жаль, не дозволяє виразити коефіцієнти трансформації в аналітичній формі; їх можна одержати лише чисельно, розв'язуючи інтегральне рівняння або нескінченну систему алгебраїчних рівнянь. Для подолання цієї незручності в роботах [18, 104] були запропоновані наближені формули, які, як було показано, з хорошою точністю узгоджуються з результатами теорії. Разом з тим, до недавнього часу докладного порівняння теоретичних результатів з чисельними розрахунками або лабораторними експериментами виконано не було,

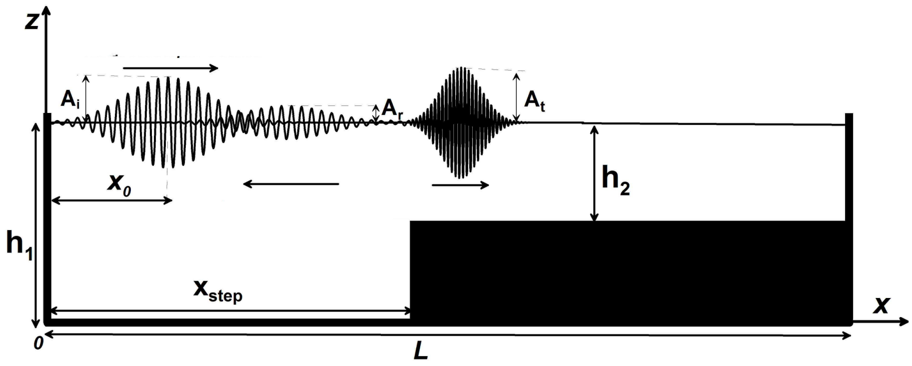

Рисунок 2.15: Конфігурація чисельного експерименту по трансформації поверхневих хвильових пакетів у басейні з підводною сходинкою

хоча деякі дані, далеко неповні, представлені в роботах [212, 186] (Відзначимо також чисельні дослідження з трансформації солітонів на донному уступі [250, 168, 30, 223, 260]). Дослідження трансформації квазі-монохроматичних хвильових пакетів на донному уступі було виконано в роботах [104, 18] шляхом чисельного моделювання цього процесу за допомогою моделі MITgcm [184, 185] (див. розділ 2.2.9).

Конфігурація чисельного експерименту показана на рисунку 2.15. Розглядається чисельний лоток довжиною L і фіксованої глибини $h_1 = 0.5$ м з вертикальним підводним уступом, висота якого змінюється в розрахунках. Край уступу було фіксовано на відстані x_{st} від лівого торця лотка. В початковий момент часу на вільної поверхні задавався лінійний хвильової пакет у вигляді функції:

$$\eta(x,t) = \eta_0(x)\cos k_0 x, \tag{2.21}$$

де $\eta_0(x)$ – функція, що задає обвідну хвильового пакету:

$$\eta_0(x) = A_i \exp\left[\frac{-(x-x_0)^2}{D^2}\right]. \tag{2.22}$$

Початкові горизонтальна і вертикальна компоненти швидкості обчислювалися на основі лінійної теорії потенційних рухів ідеальної рідини [158]:

$$u(x,z,t) = \frac{gk_0\eta_0(x)}{\omega_0}\frac{\cosh k_0(z-h_1)}{\cosh k_0 h_1}\cos k_0 x, \tag{2.23}$$

$$v(x,z,t) = -\frac{gk_0\eta_0(x)}{\omega_0}\frac{\sinh k_0(z-h_1)}{\cosh k_0 h_1}\cos k_0 x, \tag{2.24}$$

де ω_0 – частота, k_0 – хвильове число початкового збурення, A_i – максимальна амплітуда хвильового пакету, що набігє на сходинку далеко від неї, x_0 координата початкового положення центру хвильового пакету, D – характерна ширина пакету. Хвильове число вихідного збурення k_0 варіювалося, при цьому характерна ширина пакета задавалася $D = 6\lambda_0$ (де $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ – довжина несучої хвилі). Амплітуда хвильового пакету вибиралася таким чином, щоб з плином часу нелінійними ефектами можна було знехтувати. Це досягалося шляхом завдання несучої хвилі $A_i = min(h_1, h_2)/500$. Моделювання проводилося для трьох значень безрозмірного хвильового числа $\kappa = k_0 h_1$, вихідного збурення - $\kappa = 0.1$, 1 і 10, та дев'яти значень відношень глибин за уступом та перед ним: $h_2/h_1 = 0.026, 0.043, 0.07, 0.113, 0.183, 0.298, 0.483, 0.788, 1$. Положення сходинки x_{st} для кожної серії чисельних експериментів теж варіювалося, з тим щоб центр початкового збурення знаходився досить далеко від краю уступу. Моделювання, яке проводилось за допомогою моделі NH-POM (розділ 2.1), що базується на рівняннях Нав'є-Стокса (1.1 розділ 1), при постійному значенні молекулярної в'язкості ν. Молекулярна в'язкість рідини задавалася рівною типовим значенням для води $\mu = 1.1 \cdot 10^{-6}\,\text{м}^2\,\text{с}^{-1}$. Розміри лотка і параметри хвильових пакетів в наведеній нижче серії чисельних експериментів дані в таблиці 2.2.

Як в роботі Лемба [158], визначимо коефіцієнти трансформації поверхневої хвилі в залежності від відношення глибин за уступом h_2 і перед ним h_1: коефіцієнт трансформації T - це відношення амплітуд хвилі, що пройшла, до хвилі, що набігає, а коефіцієнт відображення R - відношення амплітуди

Табл. 2.2: Розміри лотка і параметри хвильових пакетів

N	κ	λ_0(м)	γ	L_{max}(м)	x_{st}(м)	К-сть вузлів стіки
1	10	0.314	1.6	25	11.3	3000×500
2	1	3.14	0.16	250	113	3000×300
3	0.1	31.4	0.016	2500	1130	3000×100

відбитої хвилі до амплітуди хвилі, що набігає:

$$T = \frac{A_t}{A_i}, \qquad R = \frac{A_r}{A_i}, \tag{2.25}$$

де A_t та A_r - це максимальні амплітуди хвиль, що пройшла та відбитої хвилі, відповідно. У лінійному наближенні для цих величин з умов безперервності маси і тиску Лембом були отримані наведені нижче вирази для нескінченно довгих хвиль в каналі з різкою зміною глибини [158]:

$$T = \frac{2c_i}{c_i + c_t} = \frac{2}{1 + \sqrt{h_2/h_1}}, \tag{2.26}$$

$$|R| = \frac{|c_i - c_t|}{c_i + c_t} = \frac{1 + \sqrt{h_2/h_1}}{1 + \sqrt{h_2/h_1}}. \tag{2.27}$$

В цих формулах $c_i = \sqrt{gh_1}$, $c_t = \sqrt{gh_2}$ - це швидкості розповсюдження довгих хвиль ($\gamma \equiv h_{1,2}/\lambda \ll 1$) в областях з глибинами h_1 и h_2, відповідно. В роботах [104, 18] були запропоновані наближені залежності для коефіцієнтів трансформації T и R для загального випадку хвиль довільної довжини. При цьому для обчислення хвильового числа хвилі, що трансформувалась, використовувалися дисперсійне рівняння поверхневих хвиль і умова сталості частоти, параметри якої не залежать від часу:

$$\omega = \sqrt{gk_0 \tanh k_0 h_1} = \sqrt{gk_t \tanh k_t h_2}, \tag{2.28}$$

де k_0 и k_t – хвильові числа хвилі, що набігає, та хвилі, що пройшла. У зазначених роботах [104, 18] було запропоновано замість лінійних швидкостей c_i, c_t в формулі (2.26) для T використовувати групові швидкості хвиль, а в формулі (2.27) для R - фазові швидкості. В результаті для коефіцієнтів трансформації були отримані наступні формули:

$$T = \frac{2(V_g)_i}{(V_g)_i + (V_g)_t}, \quad |R| = \frac{|(V_p)_i - (V_p)_t|}{(V_p)_i + (V_p)_t}, \tag{2.29}$$

де

$$V_g = \frac{V_p}{2}\left(1 + kh\frac{\mathrm{sech}^2 kh}{\tanh kh}\right), \quad V_p = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}. \tag{2.30}$$

На малюнку 2.16 представлені результати трансформації хвильового пакета для трьох значень безрозмірного хвильового числа падаючої хвилі $\kappa = 10$, $\kappa = 1$, $\kappa = 0.1$. Амплітуда вихідного хвильового пакету для всіх випадків задавалась однаковою $A_i = 1.13 \cdot 10^{-4}$ м, а довжина хвилі варіювалась та складала $\lambda_0 = 0.314$ м, 3.14 м, и 31.4 м. Глибина над сходинкою в цих розрахунках становила $h_2 = 0.0564$ м. На малюнку 2.16 зліва схематично (не в масштабі) показано збурення вільної поверхні в початковий момент часу, а праворуч - в моменти часу, що відповідають повному проходженню пакета за уступ: $t = 30$ с у випадку $\lambda_0 = 0.314$ м ($\kappa = 10$); $t = 65$ с у випадку $\lambda_0 = 3.14$ м ($\kappa = 1$); и $t = 420$ с у випадку $\lambda_0 = 31.4$ м ($\kappa = 0.1$).

Як видно з цього малюнка, характеристики хвилі, що пройшла, та відбилася (амплітуда і довжина хвилі) істотно залежать від безрозмірного хвильового числа падаючої хвилі. При досить малих значеннях безрозмірного хвильового числа, коли справедливо наближення довгих хвиль, амплітуда хвилі, що пройшла за сходинку, росте, а довжина, навпаки, зменшується. Як було показано шляхом чисельного моделювання в роботах [104, 18], навіть при не

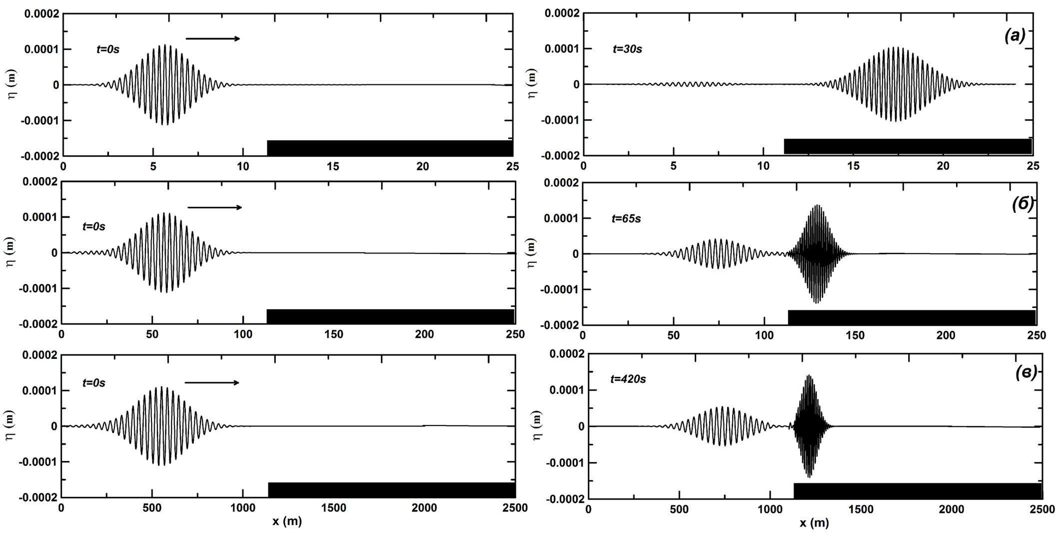

Рисунок 2.16: Трансформація хвильового пакета над донним уступом для випадку $h_2/h_1 = 0.113$ для трьох значень безрозмірного хвильового числа $\kappa = 10$ – (а) , $\kappa = 1$ – (б), $\kappa = 0.1$ - (в). Графік праворуч наведено для початкового моменту часу, а зліва для часів $t = 30$ с (а), $t = 65$ с (б) и $t = 420$ с (в). Донний уступ зображено схематично (зі статті автора [5]).

надто малих значеннях $\kappa = 0.1$ коефіцієнти проходження T і відображення R досить добре описуються аналітичними залежностями Лемба (2.26) і (2.27).

На рисунку 2.17 показано коефіцієнти трансформації поверхневих хвиль в залежності від відношення глибин за уступом і перед ним h_2/h_1, отримані на основі проведеного допомогою моделі POM [139]. При цьому моделювання здійснювалося з використанням негідростатичної (NH-model) і гідростатичної (H-model) версій моделі POM розділ 2.1. Отримані дані порівнюються з даними, отриманими в роботах [104, 18] за допомогою моделі MITgcm, і з наближеними аналітичними формулами (2.29), (2.30). Коли $h_2 = h_1$ (при відсутності уступу) відбиття хвилі, природно, не спостерігалося, а хвиля проходила з області з глибиною h_1 в область з глибиною h_2 без змін ($T = 1$). Коли ж $h_2/h_1 \to 0$ набігаюча хвиля майже повністю відбивається та $R \to 1$, $T \to 2$.

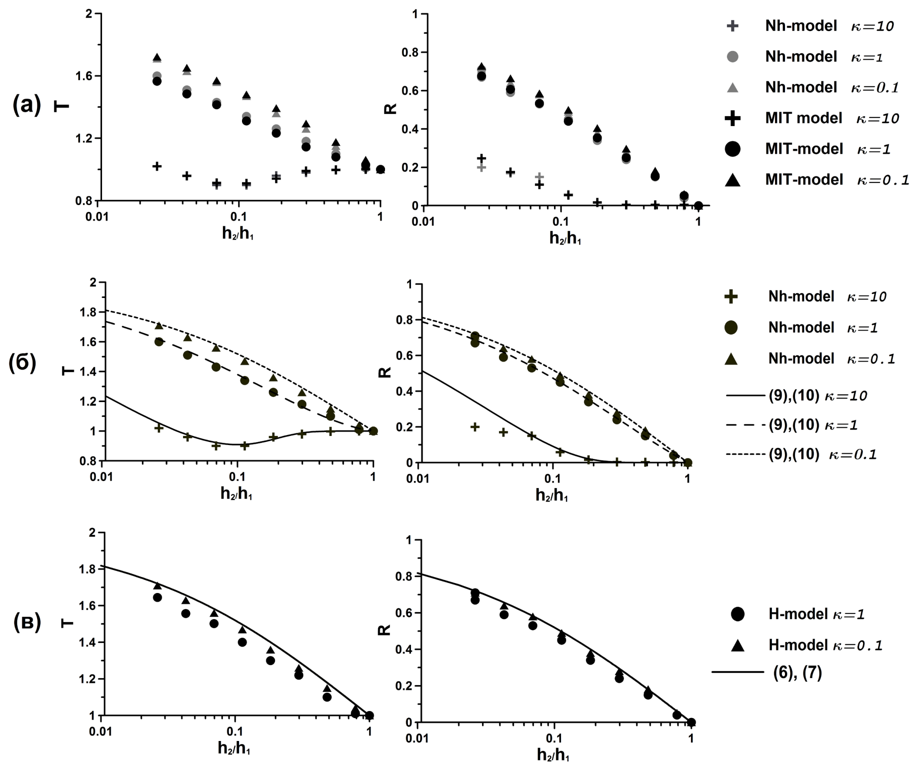

Рисунок 2.17: Порівняння коефіцієнтів трансформації (зліва - коефіцієнт проходження T, праворуч - коефіцієнт відбиття R) в залежності від ставлення глибин: (а) отриманих внаслідок чисельного моделювання за допомогою моделей NH-model (POM)(розділ 2.1) і MITgcm (розділ 2.2.9) ; (б) отриманих в результаті чисельного моделювання NH-model (POM) і наближених аналітичних залежностей (2.29) і (2.30); (в) отриманих в результаті чисельного моделювання на основі гідростатичного режиму H-model (POM) і аналітичних залежностей (2.26) і (2.27) з роботи [5]

На рисунку 2.17 (а) показано порівняння результатів моделювання NH-model з результатами моделювання MITgcm. Видно, що результати, отримані з використанням різних алгоритмів, узгоджуються один з одним.

На рисунку 2.17 (б) показано результати моделювання в рамках моделі NH-model (POM) в порівнянні з наближеними аналітичними залежностями (2.29), (2.30). Аналіз показав відповідність результатів чисельного моделювання з наближеними залежностями коефіцієнтів трансформації (2.29), (2.30) практично для всіх довжин хвиль.

Помітні розбіжності спостерігаються лише для коефіцієнта відбиття при малих довжинах хвиль $\kappa = 10$ і малих перепадах глибин $h_2/h_1 < 0.05$. На малюнку 2.17в показано результати моделювання з використанням спрощеної гідростатичної версії моделі H-model (POM). Результати наведено як для довгих хвиль з $\kappa = 0.1$, так і для хвиль помірної довжини з $\kappa = 1$. Застосування гідростатичної моделі для моделювання трансформації коротких поверхневих хвиль з $\kappa = 10$ призводить до суттєвого спотворення форми хвильового пакета, тому при таких довжинах хвиль використання гідростатичної моделі недоцільно. Як видно з малюнка 2.17в, коефіцієнти трансформації, одержані з використанням гідростатичної моделі, добре узгоджуються з аналітичними залежностями (2.29), (2.30) при $\kappa = 0.1$. Однак, навіть при $\kappa = 1$ різниця в коефіцієнтах трансформації, одержаних за допомогою гідростатичної і негідростатичної моделей, склала не більше 5 %

В результаті показано, що коефіцієнти трансформації (коефіцієнт проходження T і коефіцієнт відбиття R) залежать як від довжини несучої хвилі, так і від перепаду глибин на уступі H_2/h_1. Чисельно одержані залежності цих коефіцієнтів від перепаду глибин для трьох значень безрозмірного хвильового числа хвилі, що набігає $\kappa \equiv k_0 h_1 = 0.1, 1, 10$. Показано, що для розрахунку коефіцієнтів трансформації довгих хвиль і хвиль помірної довжини до $\kappa = 1$ можна користуватися спрощеною чисельної моделлю, заснованою на гідростатичному наближенні. Результати моделювання в цьому випадку добре узгоджуються з відомими аналітичними залежностями [18, 104, 158] та результатами теорії ([58, 186, 199, 212, 259]).

2.5 Висновки до розділу 2

В результаті вдосконалення чисельної гідродинамічної моделі NH-POM для стратифікованих середовищ з вільною поверхнею були розширені її можливості за рахунок нової узагальненої вертикальної системи координат, модифікованої підсіткової моделі турбулентності та паралелізації коду моделі. Це дозволило проводити чисельні розрахунки трансформації внутрішніх хвиль великих амплітуд із високою роздільною здатністю у реальних водоймах складної форми з турбулентними течіями. Результати чисельної моделі були перевірені на даних лабораторних експериментів та відомих аналітичних розв'язках. Показано незалежність розв'язку від роздільної здатності сітки. Окрім моделі NH-POM було представлено короткий опис відомої чисельної гідродинамічної моделі MITgcm та представлено порівняння результатів моделювання обома моделями та відомими аналітичними ров'язками. Відповідність результатів, отриманих в рамках двох незалежних чисельних моделей є, з одного боку, підтвердженням достовірності результатів моделювання, а з іншого боку, надає впевненості в придатності використаних програм для розрахунку подібного роду задач.

Розділ 3

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА УСАМІТНЕНИХ ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ ПЕРШОЇ БАРОКЛІННОЇ МОДИ В ПРИБЕРЕЖНИХ ЗОНАХ

В цьому розділі будуть розглядатися внутрішні усамітнені хвилі великих амплітуд першої бароклінної моди в прибережних зонах, а саме їх трансформація над неоднорідностями дна та їх руйнування на шельфі. Більша частина енергії внутрішніх хвиль зосереджена в хвилях першої бароклінної моди (рис. 3.1 а). В океані внутрішні усамітнені хвилі поширюються до мілководних областей шельфу, де вони руйнуються на схилах ([69],[209]). Внутрішні хвилі, що руйнуються на неоднорідностях рельєфу дна, грають важливу роль в глобальній дисипації приливної енергії і перемішуванні [210]. В мілководних областях проходження цих хвиль супроводжується інтенсивними течіями, що призводить до турбулізації придонного прикордонного шару і ерозії дна (наприклад [68]). Спостереження показують, що трансформація нелінійних хвиль в шельфовій зоні визначається характером змін глибин, фоновою стратифікацією і течіями. Теоретично такі процеси добре вивчені для внутрішніх хвиль малої амплітуди на плавно мінливому схилі дна, коли можуть бути застосовані рівняння Кортевега-де Вріза (КдВ) (1.88) [91], [120] і його модифікація (рівняння Гарднера) (1.97) ([107], [124]). Однак, для хвиль великої амплітуди, які часто зустрічаються на шельфі, слабонелінійна теорія не може бути застосована. Розв'язки рівнянь Ейлера для двошарової нев'язкої рідини [81], [205], описують усамітнені хвилі великої амплітуди. У той же час, наявність розриву швидкості між шарами призводить до нестійкості Кельвіна-Гельмгольца в цих хвилях [134]. Формування вихорів Кельвіна-Гельмгольца в хвилях великої амплітуди було відмічено як в лабораторних експериментах [114],[99], так і в натурних дослідженнях [209], [219]. Нестійкість призводить до генерації турбулентності, перемішування в шарі розділу і затухання відокремлених хвиль [68]. Пряме чисельне моделювання хвиль великої амплітуди в рамках рівнянь Ейлера, Нав'є-Стокса було проведено в кількох дослідженнях (наприклад, [69], [157], [270])для гладкого дна. Взаємодія внутрішніх хвиль з перешкодами різної форми досліджувалася в роботах [4] і [78] та представлена в розділі 3.6. Теоретично трансформація відокремлених хвиль у двошаровій рідині над сходинкою досліджувалася в рамках рівнянь КдВ і Гарднера в [108] і з використанням рівняння Бусінеска в [284]. Ряд робіт присвячений трансформації хвиль над дном, що швидко змінюється. Така ситуація зустрічається в деяких районах Світового океану, наприклад, на шельфі між островами Тайвань і Донгша, де нахил дна сягає 0.1, тоді як довжина відокремлених внутрішніх хвиль в цьому районі порівнянна з горизонтальними масштабами неоднорідностей дна [229]. Найбільш повно хвильова динаміка вивчена для випадку двошарової рідини. Дана спрощена модель добре описує стратифікацію в більшості водойм, для яких характерна наявність приповерхневого шару легкої прогрітої рідини і нижнього шару важчий холодної води. Дослідження накату внутрішніх усамітнених хвиль на похилий шельф в стратифікованій двошаровій рідині вивчалась в роботах [121], [198]. У статті [121] було проведено теоретичне дослідження накату дов-

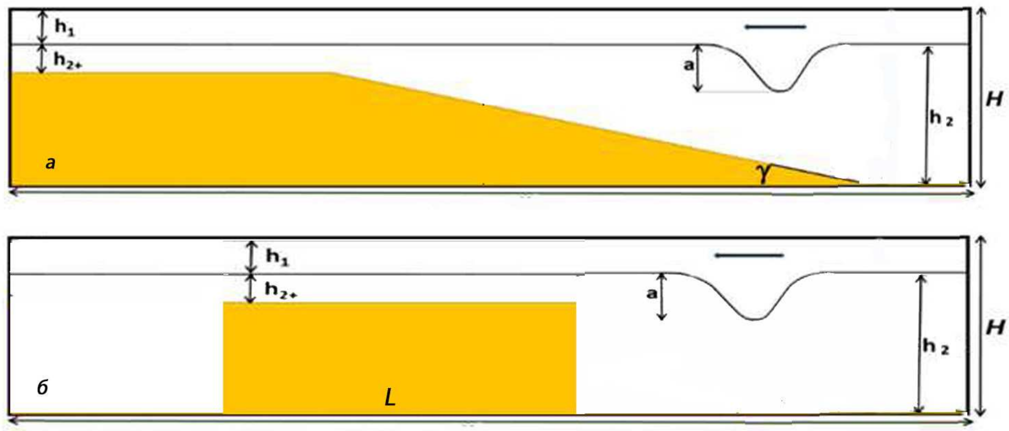

Рисунок 3.1: Схема ідеалізованого шельфу (а) та підводної перешкоди (б).

гих внутрішніх хвиль в двошаровій рідини на похиле дно. Було показано, що при цьому може виникати більш ніж одна хвиля протилежної полярності при проходженні хвилею так званої 'точки перевороту'. В роботі [122] були проведені як теоретичні дослідження, так і лабораторні експерименти з накату внутрішніх хвиль на похилий берег. У лабораторних експериментах спостерігалося сильне обвалення, що залежать від амплітуди хвилі, що набігає. У деяких випадках генерувалася друга моди. Обвалення хвиль великої амплітуди над похилим дном вивчалося в [120], де було показано, що при взаємодії хвиль-пониження на схилі можуть виникати цуги хвиль-підвищення і болуси (захоплена рідина, що рухається вздовж дна), що поширюються вгору по схилу. У всіх цих роботах розглядалися схили з невеликими кутами. В [198] дослідження було розширено для більш широкого діапазону амплітуд і кутів схилів. У роботах [131], [269] для вивчення процесу трансформації внутрішніх хвиль на шельфі і над підводними перешкодами [276] застосовувалося чисельне моделювання. Було показано, що відношення висоти перешкоди до товщини нижнього шару є параметром, який контролює кількість енергії, що відбилася та пройшла.

Розглянемо ідеалізований континентальний шельф (рис. 3.1 а) - який представляє собою ділянку з невеликим нахилом, що простягається від континенту. Континентальний схил значно крутіший ніж шельфова зона; середній кут схилу 3^o, в той час коли кут нахилу шельфової зони менше ніж 1^o. Для того, щоб зрозуміти особливості трансформації внутрішніх хвиль над шельфом та схилом будемо розглядати таку ідеалізовану конфігурацію та двошарову стратифікацію.

Основними характеристиками, що найбільш суттєво впливають на взаємодію хвиль з континентальним схилом в разі такої спрощеної (двошарової) стратифікації і ідеалізованого шельфу це:

1. нормована на глибину верхнього шару амплітуда внутрішньої хвилі $\alpha = a/h_1$;

2. параметр блокування, який дорівнює відношенню глибини нижнього шару над шельфом до амплітуди хвилі $\alpha = a/h_1$;

3. кут нахилу континентального схилу γ.

Основними характеристиками, що найбільш суттєво впливають на взаємодію хвиль з підводними перешкодами (рис. 3.1 б):

1. нормована на глибину верхнього шару амплітуда внутрішньої хвилі $\alpha = a/h_1$;

2. параметр блокування, який дорівнює відношенню глибини нижнього шару над шельфом до амплітуди хвилі $\alpha = a/h_1$;

3. довжина перешкоди L та її форма.

Розглянемо вплив на трансформацію хвиль всіх цих параметрів.

3.1 Параметр блокування внутрішніх усамітнених хвиль над підводними перешкодами та трапеціїдальним шельфом

Параметр, що визначає ступінь взаємодії усамітнених хвиль з перешкодами, було введено в роботах [122] та [276]

$$k_{int} = \frac{a_{in}}{H - H_{obst} - h_1}, \tag{3.1}$$

тут H - глибина заповнення басейну; H_{obst} - висота перешкоди; h_1 - товщина верхнього шару; a - амплітуда хвилі. Режим обвалення хвилі характеризується нерівністю $k_{int} > 0.4$, і обвалення відсутнє, коли цей параметр менше, ніж 0.3. В даній роботі запропоновано ввести параметр блокування B, що є оберненим до k_{int} - параметр блокування. Він представляє собою відношення висоти нижнього шару над перешкодою до амплітуди хвилі.

$$B = \frac{h_2 - H_{obst}}{a_{in}}. \tag{3.2}$$

Він дорівнює нулеві, у випадку, коли поверхня розділу торкається перешкоди, і стає від'ємним, коли стратифікація така, що частина перешкоди знаходиться у верхньому шарі (рис. 3.2).

3.2 Трансформація внутрішніх усамітнених хвиль першої бароклінної моди в двошаровій стратифікації над підводною сходинкою

Розглянемо взаємодію внутрішніх усамітнених хвиль із підводною сходинкою, що відповідає граничному випадку, коли кут нахилу континентального схилу $\gamma = 90^\circ$. В такому випадку можна виділити вплив параметру блоку-

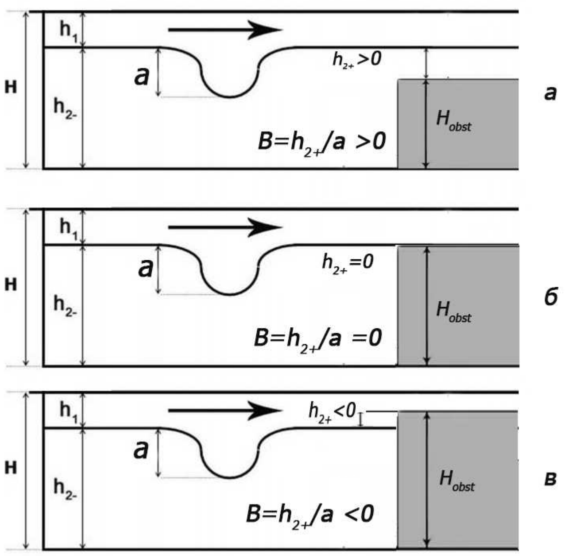

Рисунок 3.2: Параметр блокування для трьох варіантів параметру блокування а) B>0, б) B=0, в) B<0

вання B на процеси трансформації та втрати енергії.

Обчислювальний басейн лабораторних масштабів має геометрію, що зображена на рис. 3.3. Загальна довжина басейну L. Висота сходинки h_s, довжина сходинки L_s. Початкова стратифікація в басейні моделювалася у вигляді поверхневого і придонного однорідних шарів з солоністю $S_1 = 2$ і $S_2 = 15$ та глибинами h_1 і h_{2-} при постійній температурі 20 ^{o} C, розділених тонким перехідним шаром:

$$S(z) = \frac{S_{up} + S_{bot}}{2} - \frac{S_{up} - S_{up}}{2} \tanh(\frac{z - h_1}{dh}), \tag{3.3}$$

де $dh = 0.2$ см. В результатах чисельних експериментів візуалізувалася ізохаліна рівна 8.5. Чисельні експерименти проводилися за допомогою моделі NH-POM (розділ 2.1), що базується на рівняннях Нав'є-Стокса (1.1 розділ 1), при постійному значенні молекулярної в'язкості $\nu = 1.14 \cdot 10^{-6}$ м^{2}с$^{-1}$ и молекулярної дифузії солі $\chi = 10^{-9}$м^{2}с$^{-1}$. Тут, h_{2-} - це глибина нижнього шару перед сходинкою, а h_{2+} це глибина нижнього шару за сходинкою. $h_{2+} =$

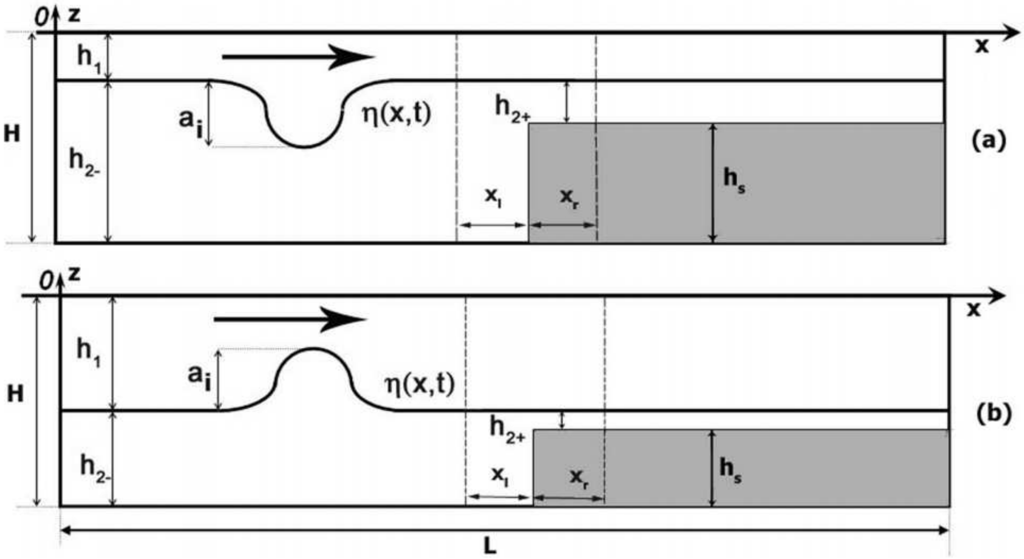

Рисунок 3.3: Геометрія чисельних експериментів.

$h_{2-} - h_s$. Перетини x_l та x_r - це перетини, в яких обчислювалась енергія хвиль, що пройшли та відбилися від сходинки. Задача розв'язувалась в квазідвовимірній постановці, коли рівняння дискретизувались у декількох вузлах поперек басейну за умови ковзання на бічних стінках басейну.

3.2.1 Трансформація внутрішніх усамітнених хвиль-підвищення над сходинкою на дні

Розглянемо спочатку динаміку внутрішніх хвиль-підвищення над сходинкою на дні. Такі хвилі в лабораторних експериментах генеруються методом колапсу, що було розглянуто в розділі 2.4 (див. рис. 2.10 а). Трансформація усамітнених хвиль-підвищення над сходинкою була детально вивчена в рамках рівнянь КдВ та Гарднера. В рамках аналітичних моделей передбачається, що і відбита хвиля і хвиля, що пройшла, мають форму солітонів, але їх параметри не задовольняють співвідношенням для хвиль, що стаціонарно рухаються. Відбиті хвилі еволюціонують в солітони і диспергуючі хвилі. Динаміка хвиль, що пройшли на сходинку залежить від знака коефіцієнта нелінійності

α (1.91). Якщо коефіцієнт нелінійності змінює знак, то хвиля розпадається на диспергуючі хвилі. Також було встановлено, що трансформація усамітненої хвилі-пониження при двошаровій стратифікації над сходинкою залежить від ряду безрозмірних параметрів, таких як параметр ϵ_{bl}

$$\epsilon_{bl} = 1 - h_{2+}/h_{2-}. \tag{3.4}$$

Цей параметр ϵ_{bl} характеризує відбиття та проходження хвиль в теорії [108]. Параметр обвалення [4], що характеризує ефект скінченої амплітуди на потік в околі сходинки

$$\epsilon_{br} = 1 - (h_{2+} - |a|)/h_{2-}. \tag{3.5}$$

Значення $\epsilon_{bl} = \epsilon_{br}$ для лінійних хвиль, тоді як $\epsilon_{br} = 1$, коли амплітуда хвилі рівна товщині нижнього шару h_{2+}. Нелінійність в рівнянні Гарднера може бути описана як

$$\epsilon_{nl} = \alpha a/c + |\alpha_1| a^2/c, \tag{3.6}$$

що представляє суму квадратичних і кубічних нелінійних членів в рівнянні Гарднера. При малих значеннях ϵ_{nl} рівняння Гарднера описує хвилі помірної амплітуди, тоді як при ϵ_{nl} порядку одиниці хвилі є сильно-нелінійними [175], і тоді формально рівняння Гарднера не може бути застосовано для опису хвиль.

Розглянемо чисельний експеримент в якому $h_1 = 0.2$ м $h_{2-} = 0.08$ м $h_{2+} = 0.04$ м. Початкові амплітуди дорівнюють відповідно 1 см та 8.8 см. Для цих умов розрахункові коефіцієнти рівняння Гарднера наведено в табл. 3.2. Також в таблиці представлені амплітуди максимальних усамітнених хвиль, знайдені в рамках рівнянь Гарднера та Нав'є-Стокса. В експериментах різниця глибин поверхневого та донного шарів значно відрізняється ($h_2/h_1 = 0.2 - 0.4$) і фор-

Табл. 3.1: Параметри розрахунків для хвиль-підвищення.

a_i (м)	h_1 (м)	h_2 (м)	h_{2+} (м)	x_l (м)	x_r (м)
0.01	0.2	0.08	$-0.11 + 0.06$	0.85	0.85
0.025	0.2	0.08	$-0.11 + 0.06$	0.85	0.85
0.042	0.2	0.08	$-0.11 + 0.06$	0.9	0.9
0.052	0.2	0.08	$-0.11 + 0.06$	1.1	1.1
0.088	0.28	0.04	$-0.22 + 0.037$	0.6	0.6

мально максимально можлива хвиля є сильно нелінійною хвилею. Фактично, максимально можлива хвиля є більш нелінійною після сходинки, аніж до неї, і це виявляється в різниці між значеннями граничної амплітуди в таблиці 3.2. Отже, у наших експериментах формально ми не могли використовувати рівняння Гарднера для опису максимальних усамітнених хвиль. Для початкової хвилі з амплітудою 1 см член кубічної нелінійності невеликий, а нелінійний параметр $\varepsilon \sim \varepsilon_n = 0.1$, але $A/A_{lim} > 0.1$. Тому початкова усамітнена хвиля є помірною нелінійною хвилею, яку можна описати за допомогою рівняння Гарднера. Солітон з початковою амплітудою 4 см сильно нелінійний, оскільки $\varepsilon = 0.12$ а $\varepsilon_n = 0.78$. Формально рівняння Гарднера не застосовується для цього випадку. Аналіз динаміки хвиль в обох випадках, використовуючи повно нелінійну теорію та рівняння Гарднера, можуть прояснити застосовність цих моделей для опису усамітнених хвиль різної амплітуди.

Слабонелінійні хвилі

Розглянемо спочатку випадок, коли початкова хвиля має амплітуду 1 см. Відповідно до лінійної теорії згідно рівняння (1.120) відбита хвиля має амплітуду 0.1 см і така хвиля є слабонелінійною. Амплітуда хвилі, що пройшла за сходинку, становить приблизно 1.3 см, що має такий же порядок, що і

Табл. 3.2: Параметри в рівнянні Гарднера для випадку $h_1 = 0.2\,, h_{2-} = 0.08\,, h_{2+} = 0.04\,.$

параметр	справа від сходинки	зліва від сходинки
C см/с	7.48	5.71
α, $1/c$ (1.91)	0.842	1.751
α_1 (1.98)	-0.156	-0.3
β, см ^{3} /с (1.92)	199.55	76.21
A_{lim}, см (1.104)	5.4	5.7
$\hat{A}_{lim}$, см (1.140)	6	8

глибина нижнього шару за сходинкою (4 см). Отже, нелінійні ефекти в хвилі, що пройшла за сходинку мають бути суттєвими. Згідно з теорією КдВ (1.119) за сходинкою мають сформуватися три солітони. Як ми вже зазначали, хвиля має помірну амплітуду, для її опису ми маємо застосовувати рівняння Гарднера. Початковий імпульс, сформований при колапсі [141] приведено на рисунку 3.4. Також представлені типові форми солітонів КдВ(червоний) та Гарднера (блакитні). Профіль хвилі добре узгоджується з профілем солітону Гарднера, але солітон КдВ є більш вузьким, ніж спостережуваний солітон. Він підходить до підводної сходинки (з правого боку наліво) і зберігає форму рис. (3.4).

Відбита хвиля має малу амплітуду (близько 1.3 мм), і рухається із повільними змінами форми і амплітуди. Цей процес нестабільний, і форма хвилі не описується належним чином розв'язками солітонів КдВ або Гарднера (див. рис. 3.4 б). Трансформація такої хвилі над сходинкою показана на рис. 3.4 б. Видно, що амплітуда хвилі, яка пройшла за сходинку збільшилася до 1.1 см і продовжує розповсюджуватися на мілководдя. Від сходинки відбивається слабка хвиля із амплітудою 0.13 см. Амплітуди хвиль в околицях сходинки добре узгоджуються з передбаченнями лінійної теорії (1.120). Далеко від схо-

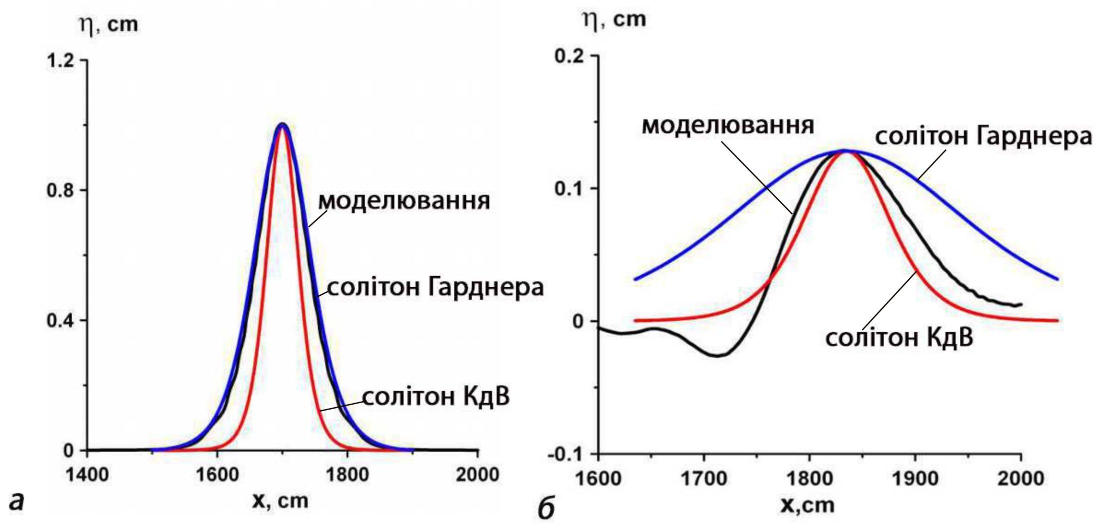

Рисунок 3.4: (а) імпульс та його наближення солітоном КдВ(1.93) і солітоном Гарднера (1.99) з [175], (б) відбита хвиля біля стінки лабораторного басейну і порівняння з розв'язком КдВ (1.93) і розв'язком Гарднера (1.99) [175].

динки ($t = 225$ с після початку формування хвилі), хвиля, що пройшла за сходинку перетворюється на дві солітоноподібні хвилі. Форма першої з цих хвиль досить добре описується як рівняннями КдВ так і Гарднера (рис. 3.5 в), оскільки її амплітуда 1.4 см є меншою за максимальне значення для граничної амплітуди солітону (6-8 см). Але процес розщеплення солітону в цей момент ще не завершено. Відповідно до теорії КдВ, амплітуда першого солітону на останній стадії повинна бути 1.5 см. Порівняння роз'вязку Гарднера (синього) та розв'язку повного нелінійних рівнянь Нав'є-Стокса (чорного) представлено на рис. 3.5.Різниця амплітуд становить 10%. Форми хвиль одразу після сходинки майже однакові як у випадку розв'язку рівняння Гарднера, так і Нав'є-Стокса (рис. 3.5 а), а різниця в амплітудах - 0.09 см або 8%. На відносно великій відстані від сходинки різниця в амплітудах вже стає суттєвою: амплітуда хвилі, знайдена за допомогою моделі Гарднера становить 1.5 см, а для повно нелінійної моделі рівнянь - 1.35 см, і різниця складає близько 10%. Велика різниця в положенні хвиль (рис. 3.5). Вона складає 34 см. Це

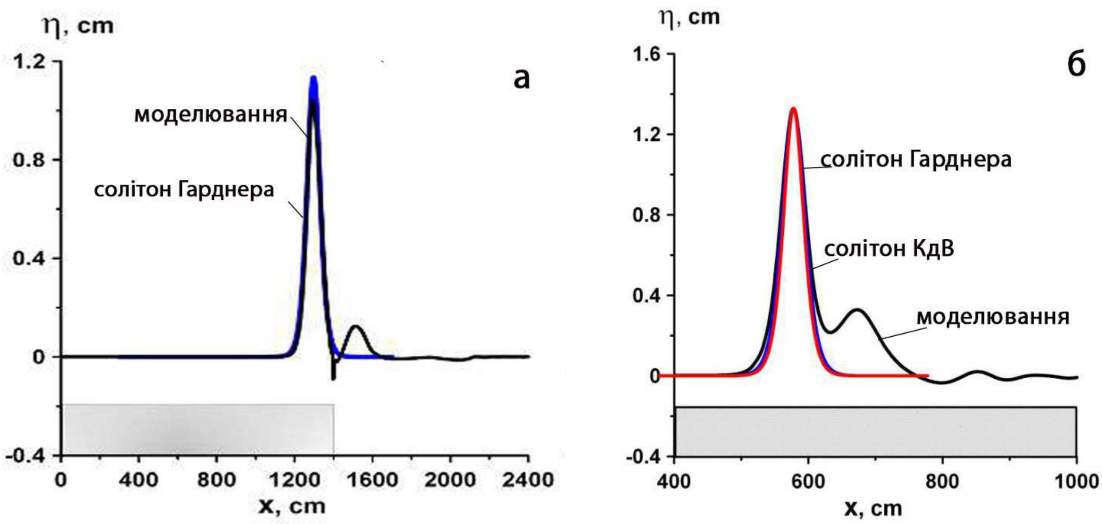

Рисунок 3.5: Трансформація хвилі над сходинкою та її розповсюдження за сходинкою. Результати моделювання та порівняння їх з розв'язком КДВ та розв'язком Гарднера [175].

пояснюється різницею в швидкості хвиль 0.26 см/с, що складає 5% від середньої нелінійної швидкості. Цей приклад ілюструє взаємодію хвилі з помірною амплітудою зі сходинкою на дні, та показує придатність слабонелінійної теорії для опису хвиль, їх форми, кількості та характеристик (амплітуди та швидкості).

Чисельне моделювання в рамках рівнянь Нав'є-Стокса [175] підтвердило передбачення теорії [108] про характер трансформації внутрішніх усамітнених хвиль-підвищення над сходинкою у двошаровій рідини. Несподівано гарним виявився збіг результатів моделювання в рамках рівняння Гарднера і рівнянь Нав'є-Стокса навіть для сильно нелінійних хвиль.

Сильнонелінійні хвилі

Наступне моделювання було проведено для початкової усамітненої хвилі амплітуда якої 4 см. Як вже зазначалося, в цьому випадку усамітнена хвиля вже є сильно нелінійною. Хвиля перед сходинкою показана на рис. 3.6. Як видно з рисунку розв'язок рівняння Гарднера і результати моделю-

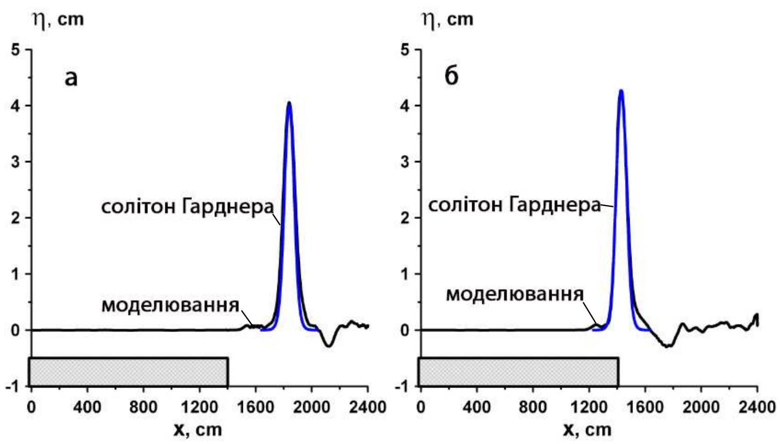

Рисунок 3.6: Трансформація хвилі за сходинкою з амплітудою 4.27 см. Результати моделювання в порівняння з розв'язком Гарднера [175].

вання Нав'є-Стокса збігаються. Через сильну нелінійність хвиля, що набігає "відчуває"сходинку і при проходженні сходинки хвиля випромінює дисперсійний хвильовий 'хвіст'. За хвилею, утворюється "полиця"протилежного знаку (рис. 3.6б). Загальна амплітуда хвиль збільшується від 4 см до 4.27 см. завдяки взаємодії з відбитою хвилею.

Перетворення хвилі після проходження за сходинку ілюструється на рисунку 3.7. Зазначимо, що розділення імпульсу на хвилю, що пройшла та відбилась відбувається в той час, коли пік знаходиться на самому початку сходинки (рис. 3.8 а), що вже відзначалося для слабонелінійного випадку. Амплітуда хвилі тут дорівнює 4.61 см і починає зменшуватися, коли хвиля перетинає сходинку. При $t = 80$ с (рис. 3.8 б), коли хвильовий пік тільки перетнув сходинку його амплітуда 3.93 см, а розділення на хвилю, що відбилась та пройшла завершується при $t = 89$ с (рис.3.8 с). Амплітуда першої хвилі, що пройшла на сходинку, зросла до 4.33 см, в основному за рахунок початку генерації вторинних хвиль.

Генерація вторинних усамітнених хвиль починається з переднього фронту хвилі одразу після проходження сходинки. Амплітуда хвилі зростає (рис. 3.6

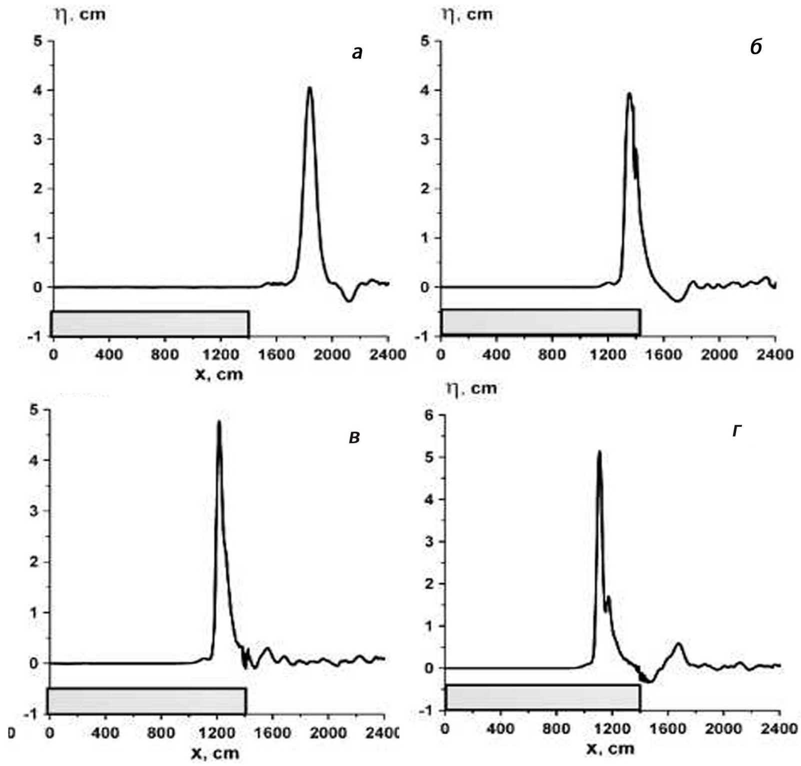

Рисунок 3.7: Трансформація хвилі з амплітудою 4.27 см перед та за сходинкою в часі [175].

б) і хвиля перетворюється на цуг усамітнених хвиль (рис.3.8). Перша хвиля має амплітуду 5.4 см. Це трохи менше амплітуди, що передбачається теорією Гарднера 5.7 см. Друга хвиля має амплітуду 1.8 см, а третя 0.54 см. На (рис. 3.8) показано порівняння моделювання нелінійною моделлю та моделлю Гарднера. Різниця амплітуд одиничних хвиль становить 0.2 см, (близько 4%). Другий солітон (розв'язок рівняння Гарднера) має амплітуду 0.96 см і становить близько половини амплітуди хвилі 1.8 см, що отримана з повно нелінійного моделювання. Третій солітон Гарднера має амплітуду 0.21 см, і також становить більше половини амплітуди одиночної хвилі, що одержана з повнонелінійного моделювання.

Відбита хвиля має амплітуду близько 0.56 см, близьку до передбачень лінійної теорії - 0.54 см. Різниця в амплітудах солітонів у повністю нелінійній моделі та моделі Гарднера становить близько 4%, а різниця швидкості

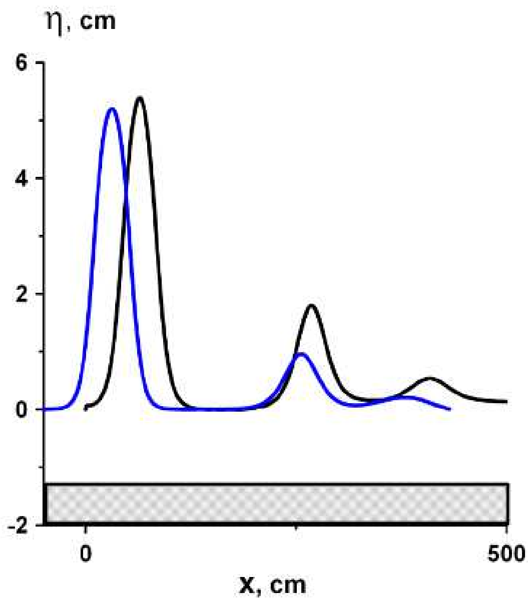

Рисунок 3.8: Трансформація хвилі в цуг солітонів за сходинкою та порівняння моделювання з моделлю Гарднера.

- близько 2%. Різниця в амплітудах вторинних усамітнених хвиль в обох моделях є більш значною, і вона складає 50%.

Таким чином було досліджено трансформацію хвилі-підвищення над підводною сходинкою в рамках повністю нелінійних рівнянь. Перетворення хвилі в околі сходинки досить добре описується лінійною теорією довгих хвиль (різниця в прогнозах оцінки амплітуд хвилі, що пройшла та відбилась, менше ніж 10 %) для помірних нелінійних хвиль і для сильно нелінійних хвиль. Процес трансформації хвиль над сходинкою розглядався, як за допомогою моделювання прямолінійною моделлю Нав'є-Стокса, так і в рамках слабонелінійної моделі Гарднера. Це останнє рівняння включає додатковий кубічний нелінійний член в звичайному рівнянні КдВ і може застосовуватися для внутрішніх хвиль малих і помірних амплітуд.

Результати дослідження показали, що різниця амплітуд сильнонелінійних хвиль при моделюванні за допомогою повністю нелінійній моделі та моделі Гарднера становить близько 4%, у порівнянні з 10% для випадку помірних

Табл. 3.3: Параметри розрахунків для хвиль-пониження

a_i (м)	h_1 (м)	h_{2-} (м)	h_{2+} (м)	x_l (м)	x_r (м)
0.028	0.04	0.28	$-0.035 + 0.24$	0.37	0.37
0.045	0.04	0.28	$-0.035 + 0.2$	0.4	0.4
0.067	0.04	0.28	$-0.035 + 0.2$	0.45	0.45
0.088	0.04	0.28	$-0.035 + 0.2$	0.6	0.6

амплітуд. Різниця у швидкостях розповсюдження хвилі становить близько 2% для сильно нелінійних хвилі, але для хвиль помірних амплітуд ця різниця становить 5%. Різниця в амплітудах вторинних хвиль між моделями сягає 50% у нелінійному випадку. Тим не менш, результати моделювання показують, що модель Гарднера може краще описати сильно нелінійний випадок ніж помірний нелінійний випадок, принаймні, для першої хвилі. І хоча повно нелінійне чисельне моделювання проводилося для типової лабораторної конфігурації, результати можна легко екстраполювати на океанічну ситуацію, просто масштабувавши характерні просторові масштаби і час.

3.3 Трансформація внутрішніх усамітнених хвиль - пониження над сходинкою на дні

Тут ми будемо розглядати тільки хвилі-пониження для випадку, коли знак нелінійності не змінюється ($h_1 < h_2$). В цьому випадку солітони, що пройшли за сходинку трансформуються в головний і вторинні солітони. Обчислювальний басейн лабораторних масштабів має геометрію, показану на рис. 3.3 б. Загальна довжина басейну дорівнює 27 м, з протяжністю більш глибокої частини 13 м. Параметри численних експериментів та значення амплітуд хвиль наведені в табл. 3.3.

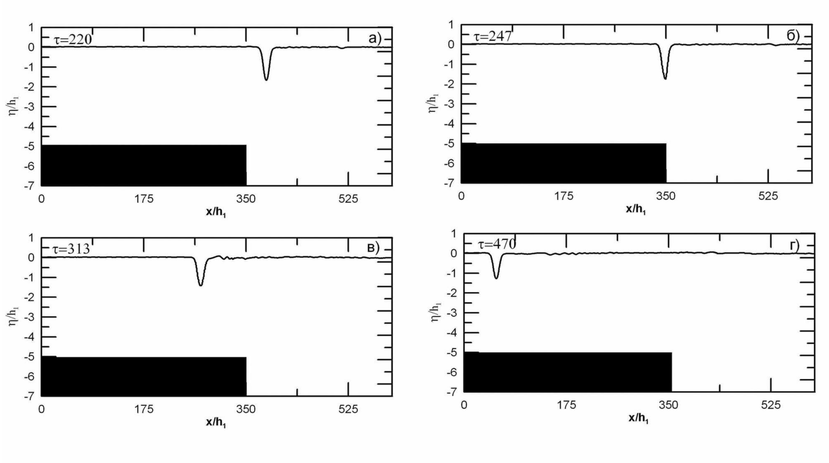

Рисунок 3.9: Трансформація хвилі на сходинці в експерименті з початковою амплітудою $a_i = 0.067$ м та $h_{2+} = 0.2$ м. Чорний прямокутник вказує положення сходинки [176].

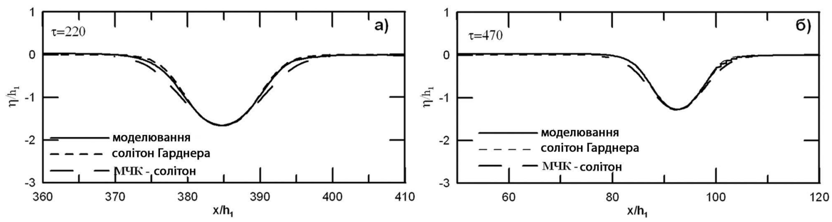

Рисунок 3.10: Профіль поверхні розділу в хвилі, що наближається до сходинки справа в експерименті з початковою амплітудою $a_i = 0.067$ м та $h_{2+} = 0.2$ і профілі солітонів Гарднера і МЧК (а); профіль поверхні розділу хвилі, трансформованої на сходинці і профілі солітонів Гарднера (1.99) і МЧК (1.131) (б) [176].

Розглянемо детально експерименти з амплітудами хвиль до сходинки $a_i = 0.067$ м , $a_i = 0.088$ м з $h_{2+} = 0.2$ параметри яких наведено в табл. 3.3. На цих експериментах проаналізуємо трансформацію усамітнених хвиль великої амплітуди. На рис. 3.9 зображено трансформацію усамітнених хвиль в експерименті $a_i = 0.067$ м з $h_{2+} = 0.2$ для різних значень безрозмірного часу $\tau = t/\sqrt{\rho_0 h_1/(\Delta\rho g)}$. Амплітуда хвилі, що набігає, менше максимальної амплітуди солітону Гарднера ($a_-/a_{lim}^- = 0.95$), але значення параметра нелінійності $\epsilon_{nl}^- = 4.12$ характеризує хвилю, як сильно нелінійну, тому формально рівняння Гарднера не може використовуватися. Однак, на рис. 3.12

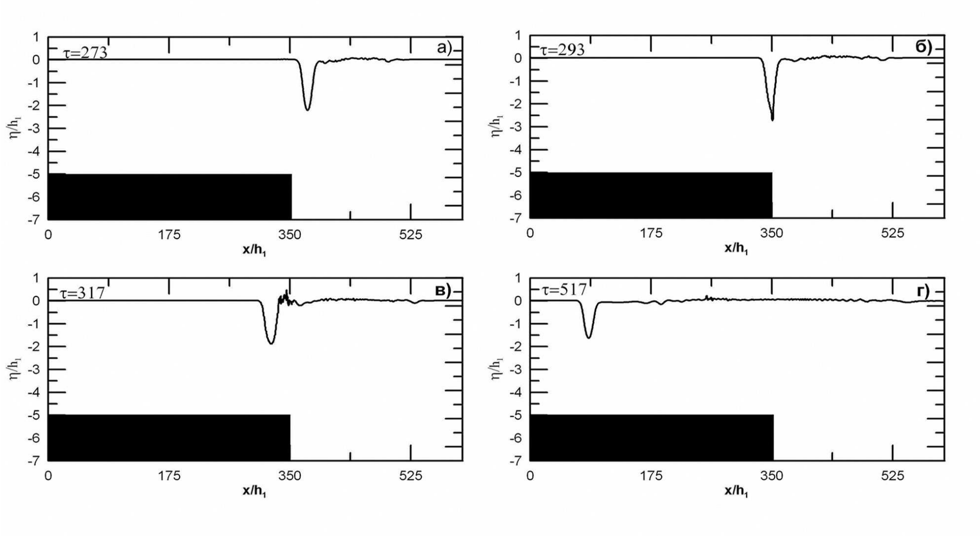

Рисунок 3.11: Трансформація хвилі на сходинці в експерименті з початковою амплітудою $a_i = 0.088$ м та $h_{2+} = 0.2$ м. Чорний прямокутник показує положення сходинки.

профіль поверхні розділу до і після сходинки добре описується розв'язком для солітону Гарднера (1.99) і, дещо гірше, роз'вязком для сильно нелінійного солітону МЧК (1.131). Цей результат узгоджується з розрахунками для усамітнених хвиль-підвищення [175]. Амплітуда відбитого солітону є малою (≈ 0.25 см), і він описується розв'язком рівняння КдВ. Взаємодія зі сходинкою сильно-нелінійної усамітненої хвилі ($\epsilon_{nl}^{-} = 6.23$), в якої амплітуда по модулю більше ніж амплітуда солітону Гарднера ($a_{-}/a_{lim}^{-} = 1.22$), але менше, ніж гранична амплітуда солітону МЧК ($a_{-}/\tilde{a}_{lim}^{-} = 0.73$), представлена на рис. 3.12. Усамітнена хвиля перед сходинкою (рис. 3.12 а) не описується розв'язком Гарднера 1.99, але добре описується роз'вязком рівняння МЧК (1.131). Хоча амплітуда хвилі, що набігає, в експерименті з $a_i = 0.088$ м з $h_{2+} = 0.2$ більше амплітуди в експерименті з $a_i = 0.067$ тільки у 1.35 рази, трансформація усамітненої хвилі якісно відрізняється, не дивлячись на те що геометрія завдання в цих експериментах однакова.

Як видно на рис. 3.15, хвиля сильно спотворюється сходинкою, і процес трансформації хвилі в більш мілкій частині басейну супроводжується

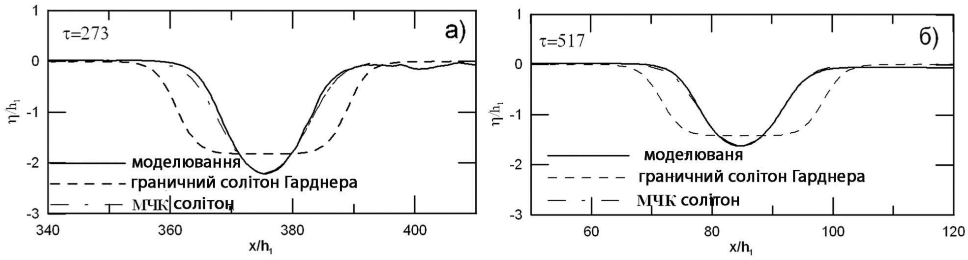

Рисунок 3.12: Профіль поверхні розділу в хвилі, що наближається до сходинки справа в експерименті $a_i = 0.088$ м з $h_{2+} = 0.2$ і профілі граничного солітону Гарднера (1.99) і солітону МЧК (1.131) (а); профіль поверхні розділу в хвилі, трансформованої на сходинці і профілі граничного солітону Гарднера і солітону МЧК з [176].

виникненням нестійкості Кельвіна-Гельмгольца, яка починається на гребені хвилі рис. 3.13. В цей момент число Річардсона (1.47) падає до значень $0.25 - 0.5$ в задній частині хвилі. Нестійкість призводить до формування вихорів Кельвіна-Гельмгольца та подальшого перемішування. Товщина проміжного шару в момент проходження хвилі над сходинкою $h = 1.1$ см. Характерний масштаб вихорів Кельвіна-Гельмгольца $H_{KH} = 8.6$ см. Вертикальна структура солоності, горизонтальної швидкості та числа Річардсона представлена на рис. 3.14. Відношення масштабу вихорів КГ до товщини проміжного шару $H_{KH}/h = 7.8$ що узгоджується з оцінками з роботи [99] $H_{KH}/h = 7.5$ що базуються на стандартній теорії для паралельних потоків [199].

В експерименті з $a_i = 0.088$ м з $h_{2+} = 0.12$ моделювалася взаємодія сильно-нелінійної окремої хвилі з такими ж параметрами як в попередньому експерименті, але з більш високою сходинкою. Параметри блокування і обвалення були досить великі ($\epsilon_{bl} = 0.57$ і $\epsilon_{br} = 0.73$), тому процеси трансформації хвилі в околиці сходинки супроводжувалися інтенсивним перемішуванням і відбиттям хвиль (рис. 3.13).

Генерація відбитих хвиль великої амплітуди призвела до суттєвого зменшення амплітуди хвилі, що пройшла. Так що усамітнена хвиля після про-

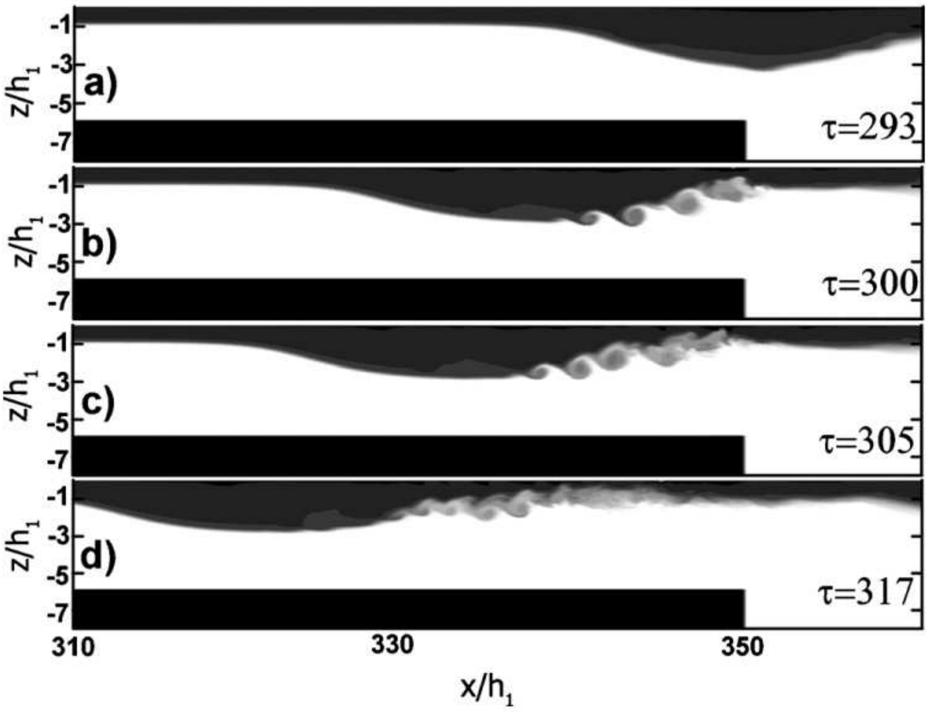

Рисунок 3.13: Формування нестійкості Кельвіна-Гельмгольца на хвилі за сходинкою в експерименті $a_i = 0.088$ м з $h_{2+} = 0.2$ з [176].

ходження сходинки може бути описана як гранична усамітнена хвиля Гарднера, для якої $\epsilon_{nl+} = 1.69$. Подальша еволюція цієї хвилі, на відміну від експ. 2, відбувається без виникнення нестійкості Кельвіна-Гельмгольца. Хвиля затухає під дією в'язкості і поширюється як усамітнена хвиля Гарднера, за якою формується подовжений хвіст, який може при подальшій еволюції трансформуватися у вторинний солітон (рис. 3.15 г). Процес взаємодії хвилі зі сходинкою (рис. 3.15) може бути розділений на декілька стадій. На першій стадії фронт хвилі, що набігає, деформується компенсаційним потоком, що розвивається в нижньому шарі. На другій стадії, надкритичний, в сенсі внутрішньої гідравліки, потік залучає гребінь хвилі, формуючи сильний вихор перед сходинкою і слабкий вихор протилежного знаку на гребені хвилі. На третій стадії ця вихрова пара залучає рідину з верхнього шару в нижній. Нарешті, на четвертій стадії, вихрова пара, відбивається від сходинки

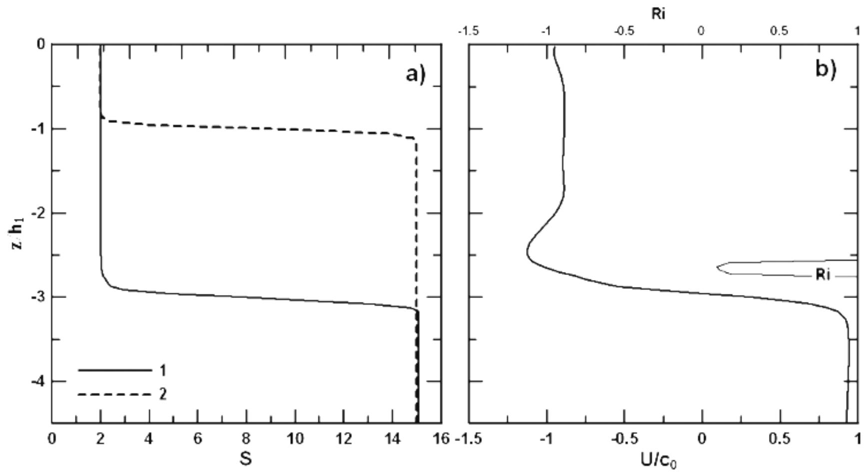

Рисунок 3.14: (а) Порівняння початкового профілю солоності (1) та при проходженні повз сходинку (2) та (б) - швидкість та число Річардсона для експерименту $a_i = 0.088$ м з $h_{2+} = 0.2$ з [176].

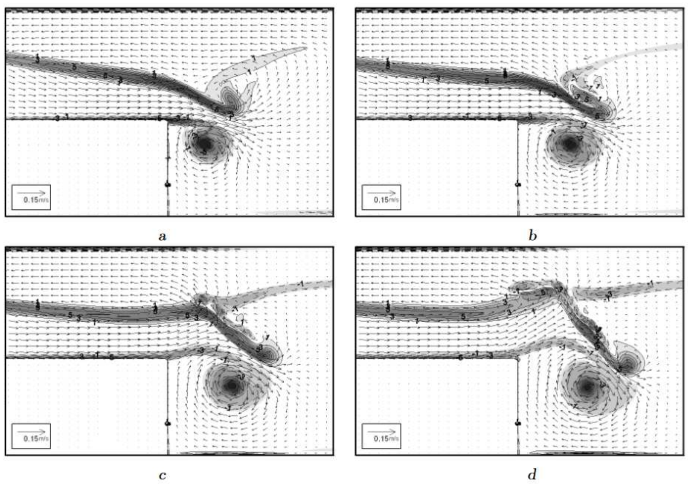

Рисунок 3.15: Нормалізований вектор швидкості U/c_0 та завихоренності біля сходинки для експерименту $a_i = 0.088$ м з $h_{2+} = 0.12$ з [176].

та викликає інтенсивне перемішування. Лабораторний експеримент і чисельні розрахунки, в яких моделювалася взаємодія усамітненої внутрішньої хвилі з прямокутною перешкодою [4] якісно узгоджуються з описаним вище процесом сильної взаємодії хвилі-пониження зі сходинкою.

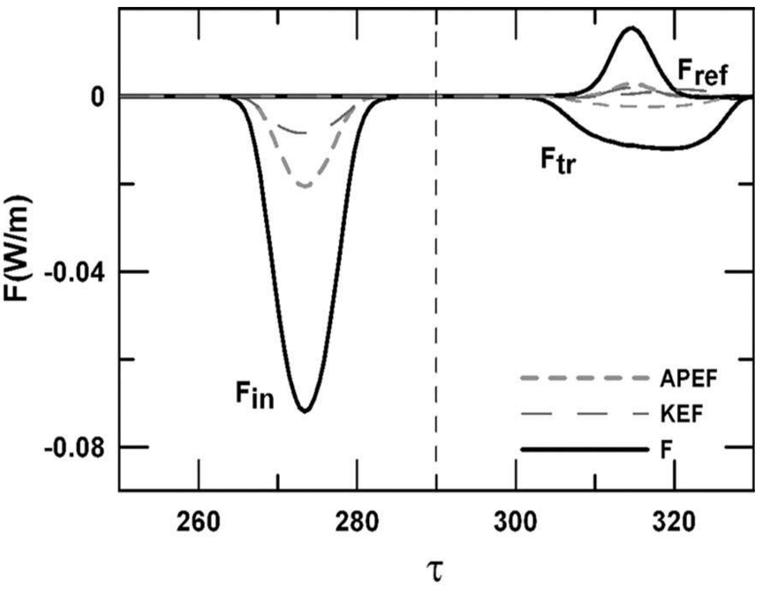

Рисунок 3.16: Потік псевдоенергії F (1.151) та його складові KEF та $APEF$ в експ. $a_i = 0.088$ м з $h_{2+} = 0.12$. Пунктирна пряма показує час перетину сходинки вершиною хвилі [260].

3.4 Втрати енергії при взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль першої бароклінної моди зі сходинкою на дні

На рис. 3.16 наведено складові потоку псевдоенергії F (1.151) KEF (1.153) та $APEF$ (1.154) для хвилі, що набігає, відбитої, та тієї, що пройшла в експ. $a_i = 0.088$ м з $h_{2+} = 0.12$. Як випливає з рис. 3.16, домінуючим є квадратичний член - потік енергії за рахунок роботи збурень сил тиску. Потік доступної потенціальної енергії $APEF$ приблизно вдвічі більше потоку кінетичної енергії KEF, що узгоджується з оцінками [159]. У той же час розрахунки показали, що проінтегровані по глибині значення кінетичної енергії в даному перетині приблизно дорівнюють відповідному значенню доступною потенційної енергії, що підтверджується вимірами в океані [208] і розрахунками [159].

На рис. 3.17 та 3.18 зображені залежності втрати енергії δE при проходженні за сходинку внутрішніх хвиль пониження та підвищення. Втрати

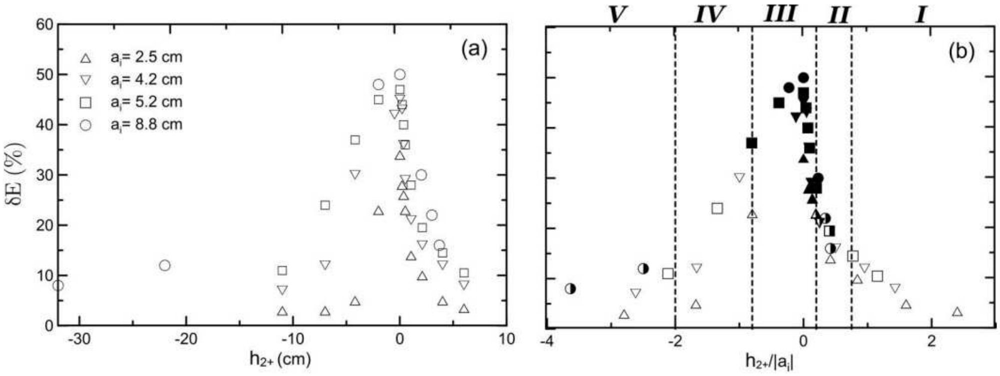

Рисунок 3.17: Залежність втрат енергії δE (3.7) для хвиль-підвищення від висоти нижнього шару після сходинки h_{2+} (а) та залежність E від співвідношення $h_{2+}/|a_i|$ (б) для різних амплітуд набігаючої хвилі. Режими взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль зі сходинкою (I-V) показано на правій панелі та розділені пунктирними лініями Символи із напівзатемненям вказують на взаємодію, коли $Ri_{min} < 0.25$. Наповнені символи вказують на наявність надкритичного потоку зі складеним числом Фруда $Fr > 1$ з [260].

енергії δE визначалися як:

$$\delta E = \frac{PSE_{in} - PSE_{tr} - PSE_{ref}}{PSE_{in}}, \tag{3.7}$$

де, PSE_{in} , PSE_{tr} , and PSE_{ref} - це псевдоенергії хвиль, перед сходинкою, що пройшла на сходинку та відбилась, відповідно. Псевдоенергія хвиль визначалась за формулою 1.157. З графіків праворуч для внутрішніх усамітнених хвиль як підвищення так і пониження на рис. 3.17 та 3.18, можна відмітити автомодельність залежностей для всіх додатних глибин нижнього шару після сходинки $h_{2+}/|a_i| > 0.2$ для хвиль-підвищення та $h_{2+}/|a_i| > 1.5$ для хвиль-пониження.

Розглянемо бюджет трансформованої енергії над сходинкою згідно розділу 1.4.2. Різниця енергії хвиль, що пройшла та відбилась, нормалізована на PSE_{in} має вигляд

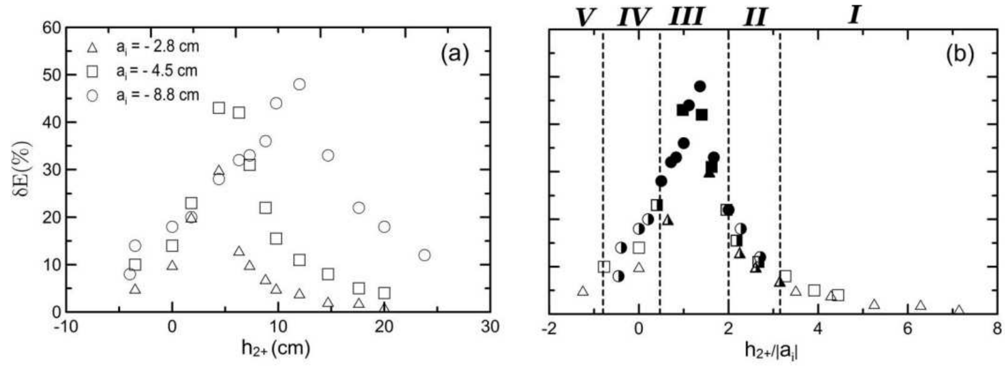

Рисунок 3.18: Залежність втрат енергії δE (3.7) для хвиль-пониження від висоти нижнього шару після сходинки h_{2+} (а) та залежність E від співвідношення $h_{2+}/|a_i|$ (б) для різних амплітуд набігаючої хвилі. Режими взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль зі сходинкою (I-V) показано на правій панелі та розділені пунктирними лініями Символи із напівзатемненям вказують на взаємодію, коли мінімальне число Річардсона $Ri_{min} < 0.25$. Наповнені символи вказують на наявність надкритичного потоку зі складеним числом Фруда $Fr > 1$ з [260].

$$\Delta E = \frac{PSE_{tr} - PSE_{ref}}{PSE_{in}}. \tag{3.8}$$

Як видно з рис. 3.19 ΔE демонструє автомодельну поведінку для додатних та від'ємних значень $h_{2+}/|a_i|$ і для хвиль обох полярностей (рис. 3.19). Для великих додатних значень $h_{2+}/|a_i|$, втрата енергії відносно невелика. Енергія хвилі, що набігає на сходинку майже повністю передається за сходинку, а різниця енергії ΔPE , близька до 1. При зменшенні глибини нижнього шару зростає енергія відбитої від сходинки хвилі та зростає дисипація (рис. 3.17 та 3.18). Максимальне значення енергії, що втрачається на сходинці, складає приблизно 50% ,що має місце при $h_{2+}/|a_i| = 0$ для хвиль-підвищення та $h2+/|a_i| = 1$ для хвиль пониження.

Характер втрат енергії та співвідношення між енергією хвиль, що пройшли та відбилися дозволяє виділити п'ять режимів взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль зі сходинкою: слабка взаємодія (I), помірна взаємодія (II), сильна

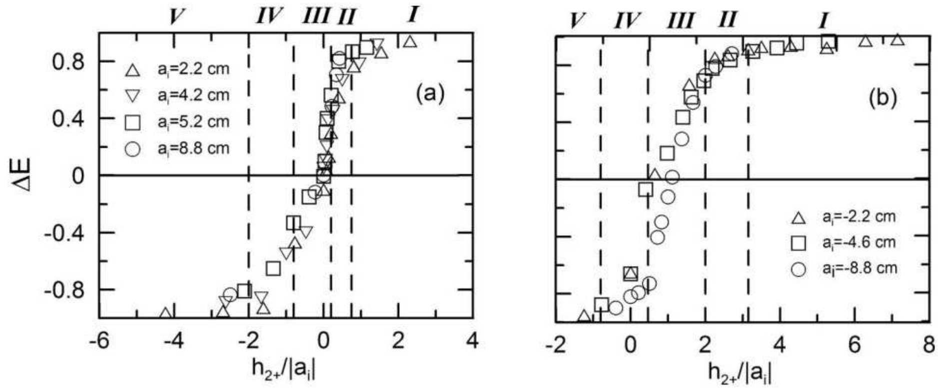

Рисунок 3.19: Відносна різниця енергії ΔE для хвиль-підвищення (a) і хвиль-пониження (b) від $h_{2+}/|a_i|$. режими взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль зі сходинкою розділені пунктирними лініями і позначені римськими числами [260].

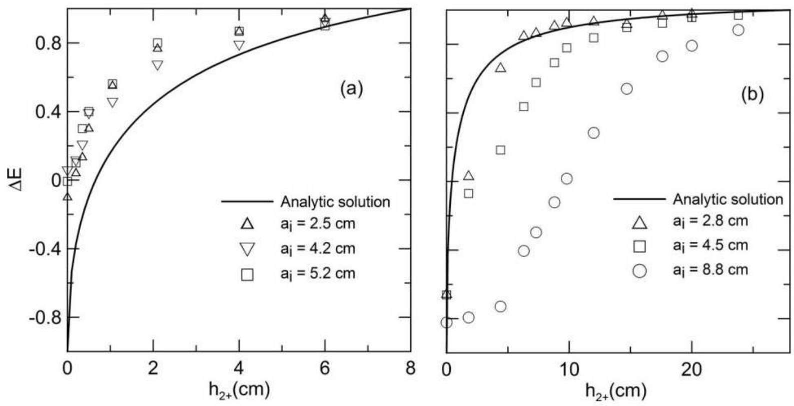

Рисунок 3.20: Відносна різниця енергії ΔE від h_{2+} (a) для хвиль-підвищення при $h_2/h_1 = 0.4$ і (b) для хвиль-пониження при $h_2/h_1 = 7$. Суцільна лінія є аналітичною оцінкою (2.4.2) для ΔE з [260].

взаємодія (III), перехідний режим (IV), і режим відбиття (V). Розглянемо ці режими детальніше.

Слабка взаємодія (I) характеризується тим, що хвилі перетворюється на сходинці без будь-якої нестійкості; втрати енергії зумовлені, в основному, за рахунок в'язкого розсіювання та донного тертя. Цей режим відповідає значенням $h_{2+}/a_i > 0.75$ для хвилі-підвищення, а також $h_{2+}/|a_i| > 3.1$ для хвилі-пониження. Втрати енергії в цьому режимі менші 10%. Відносна різниця

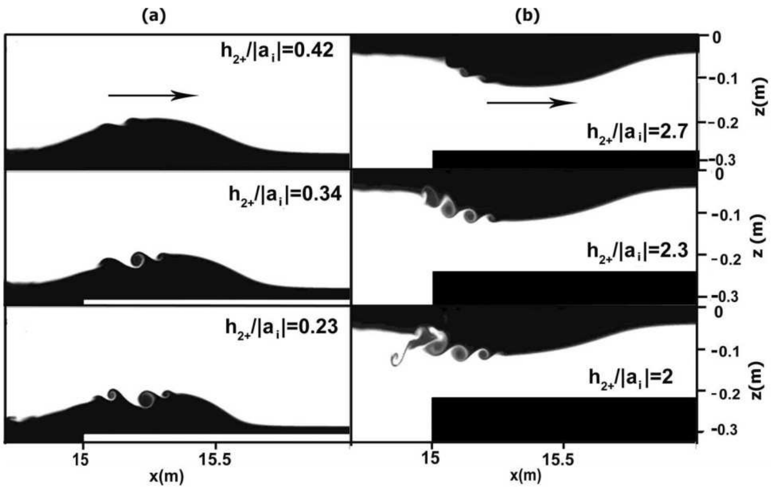

Рисунок 3.21: Поле солоності поблизу сходинки демонструє нестійкість КГ для хвилі, що проходить на сходинку (a) -хвиля пониження, (b) - хвиля підвищення амплітудою 8.8 см з [260].

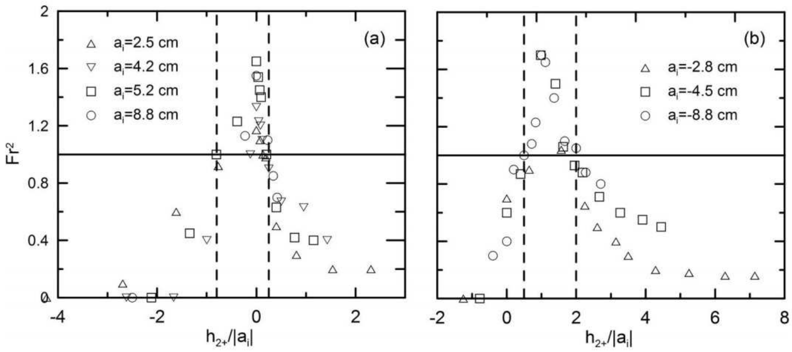

Рисунок 3.22: Максимальні значення складеного числа Фруда (3.9), на сходинці від $h_{2+}/|a_i|$ для хвиль-пониження (a) та хвиль підвищення (b) з [260].

енергії E між хвилями, що пройшли, та що відбилися, може бути оцінена за допомогою коефіцієнтів ($T = A_t/A_i$) і ($R = A_r/A_i$) (2.25), що отримані з лінійної теорії (див. параграф 2.4.2), де A_i, A_t, A_r - амплітуди хвиль для що набігають, проходять на сходинку, та відбиваються від сходинки.

Помірна взаємодія (II) відбувається, коли хвилі стають нестійкими на сходинці. Втрати енергії лежать тут в діапазоні від 10% до 20%. Цей режим визначається тим, що мінімальне число Річардсона 1.47 тут падає менше кри-

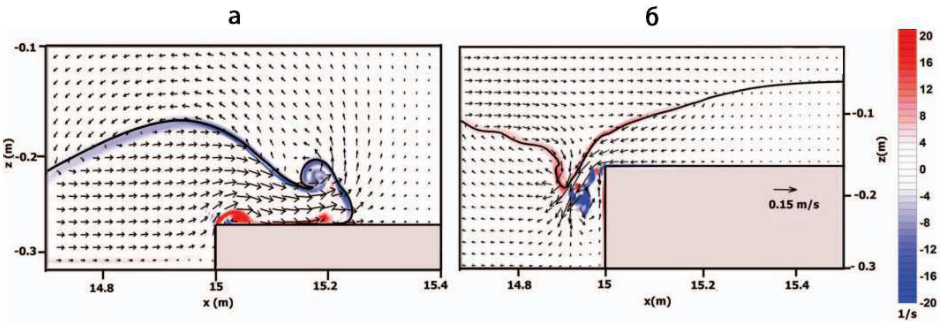

Рисунок 3.23: Вектори швидкості та на поле завихоренності в околицях сходинки, що демонструють утворення струменя і вихорів у хвилі-підвищення (а) і в хвилі-пониження (б) з амплітудою 8.8 см з [260].

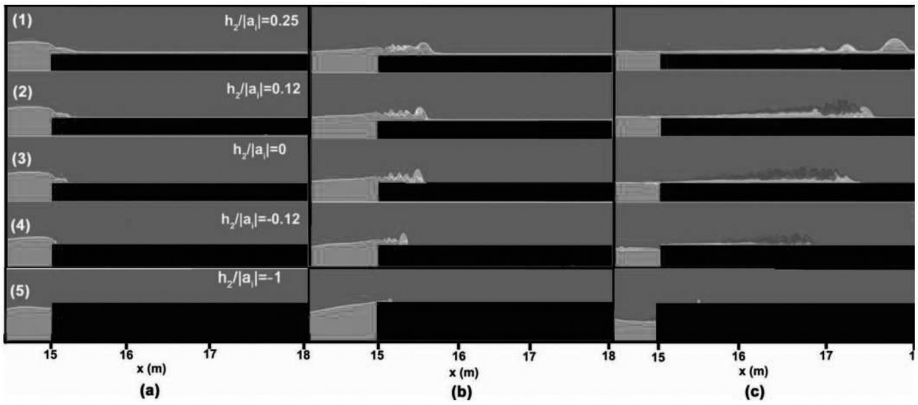

Рисунок 3.24: Еволюція поля солоності, що показує взаємодію хвиль з сходинкою із різною висотою для амплітуди падаючої хвилі 4.2 см (1) $h_{2+}/|a_i| = 0.25$; (2) $h_{2+}/|a_i| = 0.12$; (3) $h_{2+}/|ai| = 0$; (4) $_{2+}/|a_i| = 0.12$; (5) $_{2+}/|a_i| = 1$ у відповідні моменти часу (a) $t = 0$, (b) $t = 13c$, (c) $t = 38c$.

тичних значень $Ri_{min} < 0.25$, що відповідає критерію (1.48). Границі цього режиму визначаються $h_{2+}/a_i = 0.75$ для хвиль-підвищення, та $h_{2+}/a_i = 3.1$ для хвиль-пониження. Хвиля, що трансформується над сходинкою стає нестійкою і на її фронті розвивається нестійкість Кельвіна-Гельмгольца рис. 3.21. Сильна взаємодія (III) внутрішньої хвилі зі сходинкою - це режим, коли потік стає надкритичним. Важливою характеристикою потоку є складене число Фруда:

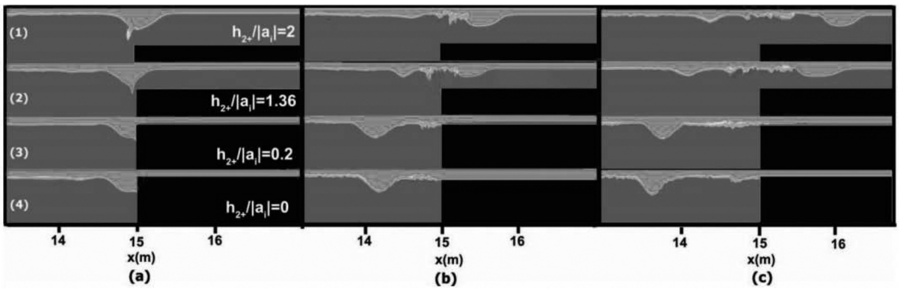

Рисунок 3.25: Еволюція поля солоності, що показує взаємодію хвиль з сходинкою із різною висотою для амплітуди падаючої хвилі 8.8 $h_{2+}/|a_i| = 2$; (2) $h_{2+}/|a_i| = 1.36$; (3) $h_{2+}/|a_i| = 0.2$; (4) $h_{2+}/|a_i| = 0$ у відповідні моменти часу (a) $t = 0$; (b) $t = 10$ s;(c) t = 22 с.

$$Fr^2 = \frac{U_1^2}{g\prime(h_1 - \eta)} + \frac{U_2^2}{g\prime(h_2(x) + \eta)}, \tag{3.9}$$

де $g\prime = g\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\rho_0 = \frac{\rho_2+\rho_1}{2}$, а U_1 та U_2 - усереднені по глибині швидкості у верхньому та нижньому шарі, відповідно, $h_2(x)$ - глибина нижнього шару. Потік може бути надкритичним ($Fr > 1$) або докритичним ($Fr < 1$). В роботах [260] та [42] було показано, що сильна взаємодія внутрішніх хвиль зі сходинкою характеризується значеннями Fr^2_{max} >1.

Надкритичні потоки спричиняють струмені для хвиль-пониження (рис. 3.23 б). Формування таких струменів і вихорів є причиною інтенсивного перемішування і для випадку хвиль-пониження було детально вивчено в роботі [175]. Для падаючої хвилі-підвищення надкритичний потік спрямований вперед. Це призводить до утворення вихору більш густої рідини (болусу), що поширюється на сходинці (рис. 3.23 а). Цей режим відповідає значенням $-0.8 < h_{2+}/|a_i| < 0.2$ для хвиль-підвищення і $0.47 < h_{2+}/|a_i| < 2$ для хвиль-пониження. Втрати енергії для цього режиму - максимальні і сягають 50%.

Формування болусу на сходинці має місце, коли глибина нижнього шару над сходинкою h_{2+} прямує до нуля для обох типів хвиль. Цей процес детально зображено на рис. 3.24 та рис. 3.25 для різних значень h_{2+}. Амплітуда падаючої хвилі тут становить 4.2 см. Випадок 1 з $h_{2+}/|a_i| = 0.25$ є проміжним між помірною (II) і сильною (III) взаємодією усамітненої хвилі зі сходинкою. Це демонструє перетворення одиночної хвилі, що набігає на сходинку, в групу з п'яти вторинних одиничних хвиль тієї ж полярності, з втратами енергії через нестійкість Кельвіна-Гельмгольца безпосередньо після сходинки. Кількість вторинних одиночних хвиль відповідно до асимптотичної теорії дорівнюють 6 [108]. Прогнозована [108] амплітуда першої, найбільшої вторинної одиничної хвилі становить 6 см, тоді як результат експерименту становить близько 5.7 см. Тим не менш, значення граничного солітону Гарднера після сходинки у цьому випадку становить 2.9 см, а амплітуда першої хвилі в експерименті виходить за межі застосовності теорії Гарднера. Внутрішня усамітнена хвиля після сходинки добре описується солітоном Міяти-Чоя-Камаси (1.131).

Режим III при $h_{2+}/|a_i| = 0.12$ (режим III) показує, що процес трансформації відрізняється від випадку 1 - появою надкритичного потоку ($Fr^2 > 1$) на сходинці. При розповсюджені болусів над сходинкою чітко сформовані два окремі вихори. Випадок 3 відповідає значенням $h_{2+}/|a_i| = 0$. У цьому випадку болус менше, ніж у попередньому випадку. Тим не менш, вихор поширюється протягом тривалого часу, що призводить до сильного перемішування. Втрати енергії для цього випадку максимальні. У випадку 4 сходинка знаходиться над поверхнею лінії розділу шарів, а h_{2+} приймає від'ємні значення $(h_{2+}/|a_i| = -0.12)$. У цьому випадку потік все ще є надкритичним (режим III), але болус стає меншим, вихор зникає через деякий час і залишається лише вихровий слід. Втрати енергії зменшуються через збільшення амплітуди у відбитій хвилі. Процеси взаємодії усамітненої хвилі-пониження зі сходинкою, коли амплітуда падаючої хвилі становить $-8,8$ см і висота нижнього шару змінюється, представлені на рисунку 3.25.

Перехідний режим (IV) визначається як взаємодія внутрішньої усамітненої хвилі зі сходинкою, коли висота сходинки є достатньо великою, щоб запобігти утворенню надкритичного струменя і болусу, але обвалення відбувається біля

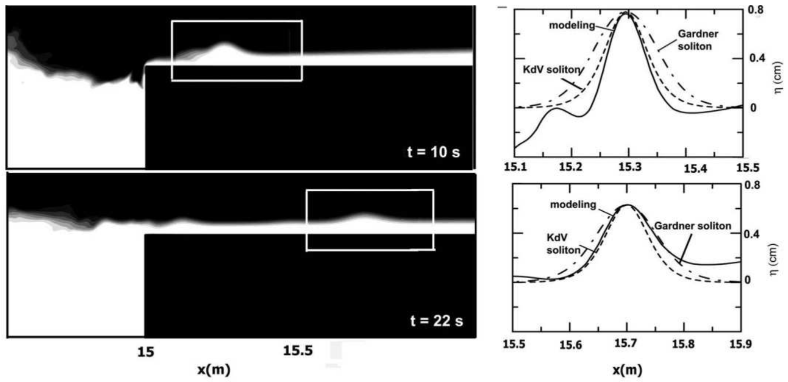

Рисунок 3.26: Хвиля-підвищення над сходинкою для випадку 3 (ліва панель) і порівняння профілю хвилі після сходинки з солітонами КдВ і Гарднера (права панель), що відповідає моделюванню на лівій панелі [260].

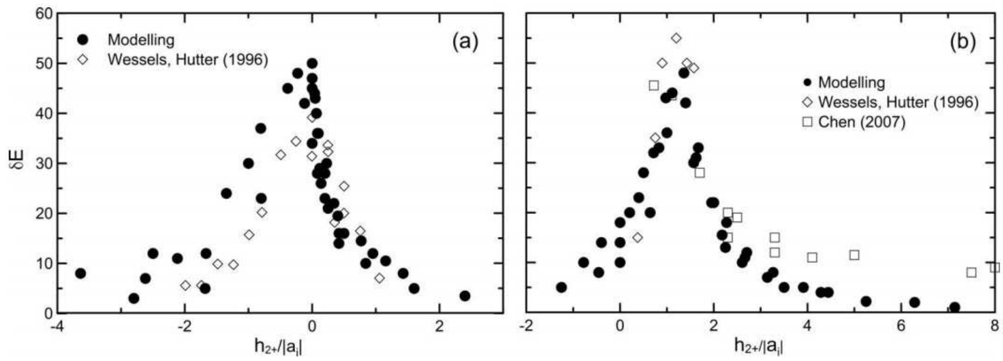

Рисунок 3.27: Втрата енергії δE при проходженні хвиль над сходинкою від $h_{2+}/|ai|$ для падаючої хвилі-підвищення (a) та для падаючої хвилі-пониження (б), у порівнянні з лабораторними експериментами для двошарового потоку [78], [276]. З роботи [260].

сходинки, що призводить до перемішування та розсіювання. Нижня границя цього режиму $h_{2+}/a_i > -2$ для типів хвиль-підвищення, а $h_{2+}/|a_i| > -0.75$ для хвиль-пониження, втрати енергії для цього режиму близько 10 %. На відміну від режимів I-III автомодельність втрати енергії тут не досягається.

Були порівняні результати чисельного моделювання з результатами лабораторних експериментів. Втрати енергії внутрішніх хвиль при взаємодії з перешкодами в двошарових потоках. Такі дослідження були зроблені в в роботах [78], [276]. Ці порівняння представлено на рисунку 3.27. На лівій панелі рис. 3.27 показано втрату енергії, що оцінюється [276] для взаємодії хвиль-підвищення з трикутною перешкодою, а на правій панелі зображено втрату енергії для хвиль-пониження, які взаємодіють із перешкодами кругової та трикутної форми [78], а також результати нашого чисельного моделювання для хвилі-пониження. Порівняння показує відповідність між втратами енергії при взаємодії внутрішніх хвиль обох знаків (підвищення та пониження) сходинками та крутими перешкодами, незважаючи на різницю в геометрії. Важливі особливості хвильового перетворення для сильної взаємодії з перешкодою [78] схожі на взаємодію хвилі-підвищення зі сходинкою: формування болусу та для хвилі-пониження - струменів і вихорів. Зроблено висновок, що взаємодія внутрішньої хвилі зі сходинкою на дні описує характерні процеси хвильової трансформації для крутих перешкод в цілому.

В повному діапазоні $h_{2+}/|a_i|$ виявлено п'ять різних режимів взаємодії внутрішньої одиночної хвилі зі сходинкою на дні:

i. Слабка взаємодія, коли хвильова динаміка може бути повністю описана слабонелінійною теорією [111].

ii. Помірна взаємодія, коли механізм обвалення хвилі відбувається за рахунок зсувної нестійкості.

iii. Сильна взаємодія, коли виникає надкритичний потік у зоні сходинки та призводить до зворотного струменя або вихорів для хвиль-пониження, та болусів, що заходять на сходинку для випадку хвиль-підвищення.

iv. Перехідний режим - режим взаємодії між заплеском на сходинці та повним відбиттям.

v. Режим повного відбиття, коли майже вся енергія передається до відбитої хвилі.

Механізм нестійкості Кельвіна-Гельмгольца має місце для помірних амплітуд у хвилях пониження і підвищення і виникає під час взаємодії з підводною сходинкою для всіх режимів, крім режиму I. Втрати енергії при трансформації внутрішніх усамітнених хвиль при взаємодії з підводною сходинкою не перевищує 50% від енергії падаючої хвилі.

3.5 Трансформація внутрішніх усамітнених хвиль першої бароклінної моди в тришаровій стратифікації з підводною сходинкою

Тришарова стратифікація зустрічається в деяких природних акваторіях, наприклад, у Південнокитайському морі [282]. В шаруватій стратифікації можуть розповсюджуватися внутрішні хвилі вищих бароклінних мод. Хвилі другої бароклінної моди в стратифікованому океані характеризуються симетричними коливаннями в шарі розділу (рис. 5 б у ВСТУПІ) і можуть представляти як звуження пікноклину "увігнуті"хвилі другої моди так і розширення пікноклину "опуклі"хвилі другої моди (про такі хвилі буде йтися в розділі 4, (рисунок 4.1). Взаємодія хвиль другої моди з підводною сходинкою також вивчалась в роботі [42], де було показано, що при взаємодії другої бароклінної моди внутрішньої хвилі, що розповсюджується в тришарової стратифікації при взаємодії з різкою зміною дна генерується перша мода. В рамках даної роботи досліджуються умови при яких в тришарової стратифікації можливий зворотний механізм, коли перша мода генерує другу моду при взаємодії з донним уступом. Розглянемо задачу про трансформацію внутрішньої усамітненої хвилі в рідині з тришаровою стратифікацією над донним уступом. Розрахункова область передбачалася двомірною в площині $x0z$ (рисунок 3.28). Довжина чисельного лотку задавалася рівною $L = 14000$ м а

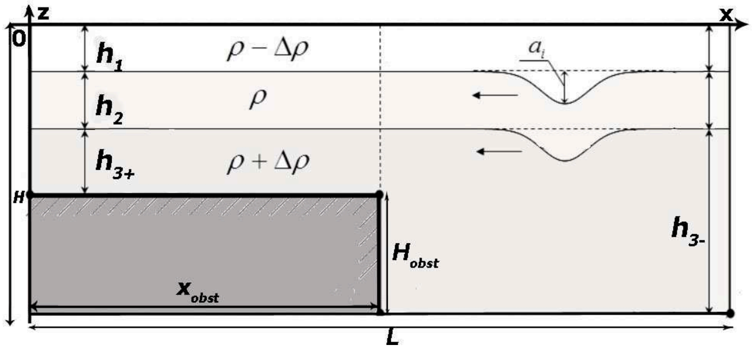

Рисунок 3.28: Ескіз модельної області.

глибина $H = 50$ м зі сходинкою висоти H_{obst}. Горизонтальний розмір сходинки - x_{obst}. В рамках даної роботи варіювалася стратифікація (положення пікноклину), висота сходинки і початкова амплітуда солітону a_i. Профіль вертикальної густини задавався у вигляді суперпозиції гіперболічних тангенсів:

$$\rho\,(z) = \rho - \Delta\rho \tanh\left(\frac{z - h_1}{2\Delta p}\right) - \Delta\rho \tanh\left(\frac{z - (h_1 + h_2)}{2\Delta p}\right), \qquad (3.10)$$

Чисельні експерименти, що проводилися за допомогою моделі NH-POM (розділ 2.1 з використанням рівнянь Нав'є-Стокса (1.1 розділ 1) при постійному значенні молекулярної в'язкості $\nu = 1.14 \cdot 10^{-6}$ м^{2}с$^{-1}$ и молекулярної дифузії солі $\chi = 10^{-9}$м^{2}с$^{-1}$.

де $\rho = 1020$ кг/м^3 – середня густина, $\Delta\rho = 2$кг/м^3 - стрибок густини на пікнокліні, $\Delta p = 0.4$м - характерна товщина пікнокліну, $h_2 = 3.35$м - товщина шару розділу, однакова для всіх численних експериментів. Різниця густини на даному етапі передбачається однаковою для верхнього і нижнього шарів і відповідає наближенню Бусінеска. Початковий розподіл густини в численних розрахунках задавалося по-різному для того, щоб порівняти згенеровані різними методами хвилі. Початкова хвиля в моделі MITgcm задавалася на основі слабонелінійної теорії у вигляді солітоних розв'язків рівняння Гарднера. Для цього розв'язувалась задача Штурма-Ліувілля з нульовими граничними умовами щодо вертикальної структури моди. На основі отриманого розв'язку визначалися коефіцієнти рівняння Гарднера ($c, \alpha, \alpha_1, \beta$) які використовувалися для обчислення поля швидкості і зміщення пікноклину. Солітоні розв'язки рівняння Гарднера мають вигляд (1.99) [106]. При цьому початкове поле горизонтальної швидкості задавалося формулою:

$$u(x, z) = c\eta(x)\frac{d\Phi(z)}{dz}. \tag{3.11}$$

Генерація хвиль першої моди в моделі NH-POM проводилася методом колапсу (див. розділ 2.4). Даний тип генерації дає можливість генерувати сильно нелінійні усамітнені хвилі. Порівняння хвиль, що були сформовані різними методами показало, що через певний час профілі хвиль співпадають, та не залежать від типу генерації. Було проведено 6 серій експериментів. Серії розрахунків 1^a і 1 проводилися для порівняння результатів розрахунків моделями MITgcm і NH-POM і мають однакову геометрію. У серіях 1^a і $1-3$ параметри розрахункової області мають однакову геометрію і стратифікацію $h_1 = 20$ м , $h_2 = 3.35$ м , $h_{3\_} = 26.65$ м і в рамках кожної серії фіксується глибина сходинки: серія 1 $H_{obst} = 20$ м , серія 2 $H_{obst} = 16.65$ м , серія 3 $H_{obst} = 6.65$ м і варіюється амплітуда хвилі, що набігає a_i. У серіях 4-5 стратифікація в має вигляд $h_1 = 10$ м , $h_2 = 3.35$ м , $h_{3\_} = 36.65$ м і в рамках кожної серії фіксується амплітуда хвилі, що набігає для серії 4 $a_i/h_1 = 5$, а для серії 5 $a_i/h_1 = 7$, а висота сходинки H_{obst} варіюється від 5 до 40 м. Хвилі, що розглядаються в серіях 1^a, $1-3$ є слабонелінійним $0.05 < a_d < 0.14$, а у серіях 4-5 сильно нелінійними $0.5 < a_d < 0.7$. Значення H_{obst}, x_{obst}, a_i, h_1 для різних серій чисельних експериментів наведені в таблиці 7.4.

Серія експериментів 1a була проведена за допомогою моделі MITgcm, а серія 1 за допомогою моделі NH-POM. Чисельні експерименти проводилися для хвиль зниження і можуть бути описані двома параметрами: 1. коефіцієнтом блокування

$$B = h_{3\_}/a_i, \tag{3.12}$$

рівним відношенню глибини нижнього шару над уступом до амплітуди хвилі, що набігає, безрозмірною амплітудою хвилі, що характеризує нелінійність

$$a_d = a_i/h_1, \tag{3.13}$$

рівній відношенню амплітуди падаючої хвилі до глибини верхнього шару. На рис. 3.29 представлені результати моделювання: амплітуда хвилі першої моди, що пройшла на сходинку a_{1_t}/a_i, амплітуда другої моди, що пройшла на сходинку a_{2_t}/a_i як в верхньому ($\rho_1 = 1019$ кг/м^3) так і в нижньому пікноклину ($\rho_2 = 1021$ кг/м^3) в залежності від параметра блокування B для серій експериментів 1^a і 1. Як видно з рисунка 3.29 обидві моделі дають близькі значення амплітуд хвиль.

Розглянемо три чисельних експерименти, що відрізняються характером взаємодії внутрішньої хвилі зі сходинкою. Результати моделювання показано на рисунку 3.30. На графіках представлена еволюція верхньої та нижньої ізопікн значеннями густини ρ_1 і ρ_2.

Чисельний експеримент А. Трансформація хвилі з амплітудою $a_i = -1$ м (див. Таблицю 7.4, серія 1), представлена на рис. 3.31 а-г. Коефіцієнт блокування при цьому дорівнює $B = 6.6$. Як видно з рисунку 3.30 (б) хвиля була сформована методом колапсу з початкового розподілу густини, показаного на рисунку 3.31 (а) описується аналітичними розв'язками рівняння Гарднера (1.99) (пунктир на рисунку 3.30 б). На рисунку 3.30 (в) показано, що за сходинкою генерується перша мода так як ($h_1 > h_{3_+}$) і хвиля змінює полярність та генерується цуг хвиль-підвищення. Як видно з рисунка, в про-

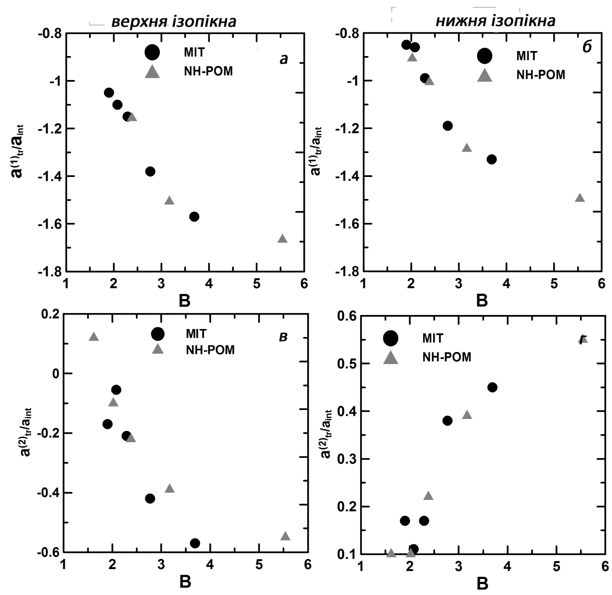

Рисунок 3.29: Залежності амплітуд першої і другої моди, що пройшли на сходинку, як у верхньому так і в нижньому пікноклині від параметра блокування B для серій експериментів 1а і 1 [45].

цесі трансформації руйнування хвилі не відбувається і хвилі вищих мод не формуються при такому типі взаємодії. Від уступу відбивається хвиля першої моди.

Чисельний експеримент Б. Еволюція хвилі першої моди в тришаровій стратифікації над підводною сходинкою для випадку з амплітудою початкової хвилі $a_i = 7$ м (Серія 5) представлена на рис. 6.3 д-з. Коефіцієнт блокування при цьому дорівнює $B = 3.6$. Як видно з рис. 6.3 хвиля, що утворилася при колапсі з початкового розподілу густини, що показано на рис. 3.31 описується розв'язком рівняння Гарднера (1.99), представленим на рис. 3.31 (е) пунктиром. В даному випадку відбувається порівняно сильна взаємодія зі сходинкою, в результаті якої, за сходинкою формується сильно нелінійна хвиля **солібор** і "опукла"хвиля другої моди. Генерація усамітненої хвилі другої моди в результаті взаємодії хвилі першої моди з особливостями рельєфу дна вивчено і описано в роботах [122] та [268].

Чисельний експеримент В. Еволюція хвилі першої моди в тришаровій

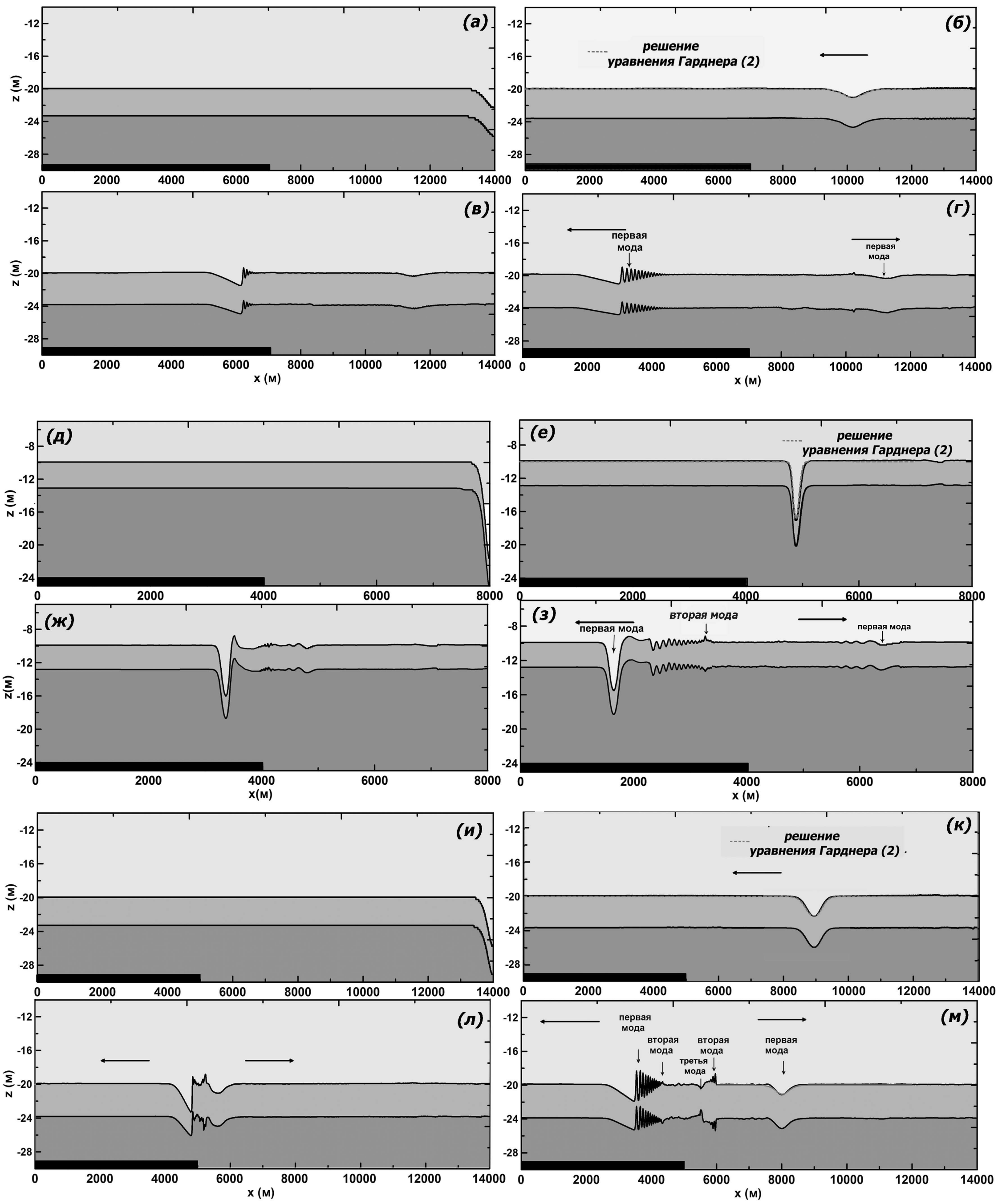

Рисунок 3.30: Еволюція поля солоності (а-д) експ. А (Серія 1, $a_i = -0.8\,(\text{м})$ и $B = 8.3$),(д-з) експ. Б (серія 4, $a_i = -7\,(\text{м})$ і $B = 3.6$),(и-м) експ. В (Серія 1 $a_i = -2.1\,(\text{м})$ і $B = 3.2$ з [45]

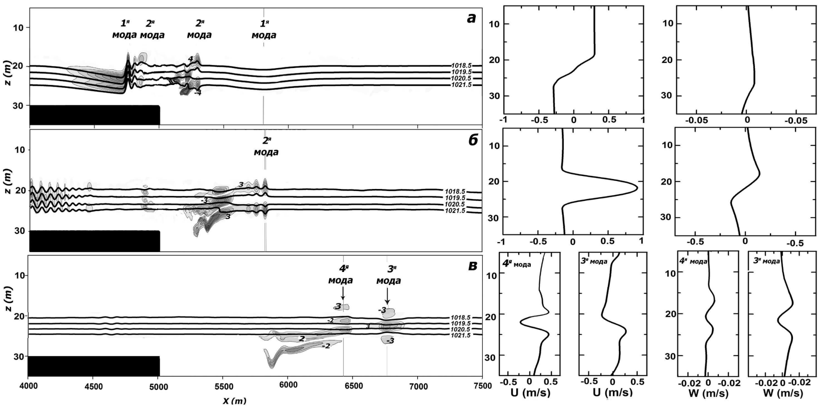

Рисунок 3.31: Взаємодія хвилі першої бароклінної моди зі сходинкою для експерименту В.(Серія 1 $a_i = -2.1\,(\text{м})$ і $B = 3.2$). Еволюція поля густини та завихоренності, профілі горизонтальної і вертикальної швидкості для трьох послідовних моментів часу: (а) - $t = 5$ годин, (б) - $t = 7$ годин, (в) - $t = 10$ годин [45].

статифікації над підводною сходинкою для випадку з амплітудою початкової хвилі $a_i = -2.1$ (м) (Таблиця 7.4, серія 1) представлена на рисунку 3.29 і-м. Коефіцієнт блокування $B = 3.2$. Як видно з рисунка 3.30 хвиля, створена колапсом з початкового розподілу густини показана на рисунку 3.30 і добре описується розв'язком рівняння Гарднера (1.99). При цій взаємодії окремої хвилі-пониження з різкою зміною дна виникають кілька типів хвиль. У зв'язку зі зміною знака квадратичної нелінійності (1.98) при проходженні на уступ хвиля першої моди змінює полярність, тому на уступі генерується послідовність хвиль підвищення. Також в області над уступом формується опукла хвиля другої моди. Крім відбитої від сходинки хвилі першої моди, відбувається генерація послідовності опуклих хвиль другої моди, а також увігнуті хвилі другої моди (рисунок 3.30 м)

Розглянемо більш детально подальший процес формування в результаті такої взаємодії (експеримент В) хвиль вищих мод. На рис. 3.31 показана еволюція ізопікн $\rho = 1018.5, 1019.5, 1020.5, 1021.5\,\text{кг}/\text{м}^3$, поле завихоренності, а також профілі горизонтальної і вертикальної швидкості в позначених на рисунку перетинах. На рисунку 3.31 (а) зображено формування хвилі-підвищення першої моди за сходинкою і відбитої хвилі першої моди хвилі-пониження від сходинки, а також друга бароклінна мода, що відбилася та пройшла. Справа на рисунку показано профілі горизонтальної і вертикальної швидкості хвилі першої моди в перерізі із максимальним зсувом відбитої хвилі. Слідом за першою модою формується друга мода. Послідовність хвиль другої моди показана на рисунку 3.31 (б). Профілі горизонтальної і вертикальної швидкості в перерізі хвилі з максимальною амплітудою приведено на рисунку 3.31 (б). Далі, як видно з графіка на рисунку 3.31 (в) за другий модою формуються стійкі структури, які поширюються з постійною швидкістю.

Ізопікни $\rho = 1019$ і 1021 кг/м^3 спрямовані всередину середнього шару. Структура горизонтальних і вертикальних швидкостей в центральному перерізі цієї структури дає підстави зробити висновок, що ця хвиля є внутрішньою хвилею третьої бароклінної моди. За нею йде так само стійка структура, що складається з чотирьох вихорів, і профілі швидкостей (горизонтальні і вертикальні) характеризують її як четверту бароклінну моду. Виникнення вищих бароклінних мод при взаємодії внутрішніх хвиль з різкими перепадами глибин дна характеризується сильним перемішуванням проміжного шару розділу. Наявність вищих бароклінних мод при безперервної стратифікації при взаємодії бароклінних припливів з різкими змінами рельєфу дна було показано в [109] для випадку лінійних хвиль.

Для цього експерименту було проведено чисельний розрахунок на більш детальної сітці 4000×400 на відміну від даних в Таблиці 7.4. У результаті розрахунків на більш детальної сітці хвильова картина за сходинкою не відрізняється від зображеної на рисунку 3.31. При взаємодії внутрішніх хвиль із різкими змінами дна можливі два наступні сценарії: перший - обвалення хвилі, що призводить до інтенсивного перемішування і дисипації, та другий -

зміна полярності хвилі-зниження на хвилю підвищення. Залежність параметра блокування B від параметра $a_d = a_i/h_1$, при якому відбувається обвалення падаючої хвилі над підводною сходинкою, одержана за результатами чисельних експериментів. Аналіз результатів моделювання показав тенденцію зменшення значення параметра блокування B при яких відбувається обвалення при збільшенні параметра нелінійності a_d. Дана емпірична крива узгоджується з критеріями, отриманими за допомогою чисельного моделювання в роботах [51] і [268]. При цьому зміна полярності хвилі над сходинкою відбувається в разі, коли ($h_1 > h_{3+}$). Тоді умова зміни полярності в змінних B і a_d матиме вигляд:

$$B < \frac{1}{a_d}. \tag{3.14}$$

У площині (a_d, B) можна виділити кілька типів взаємодії хвиль зі сходинкою в тришарової стратифікації рис. 3.32.

Зона 1. Значення параметра блокування B і a_d лежать в області, де $B < \frac{1}{a_d}$ але вище кривої обвалення. В цьому випадку хвиля пониження змінює полярність і за сходинкою трансформується в хвилю-підвищення, і при цьому не обвалюється і в результаті взаємодії не генеруються хвилі вищих мод. До даного типу взаємодії відноситься експеримент А.

Зона 2. Значення параметра блокування B і a_d лежать в області де $B > \frac{1}{a_d}$ і вище кривої обвалення. В даному випадку падаюча хвиля не змінює полярність, а в результаті взаємодії хвилі вищих мод не генеруються.

Зона 3. Значення параметра блокування B і a_d лежать в області де $B > \frac{1}{a_d}$ і нижче кривої обвалення. Хвиля обвалюється, зміни полярності не відбувається. В результаті генерується хвиля другої моди, і можливе формування хвиль вищих мод. До даного типу взаємодії відноситься експеримент Б.

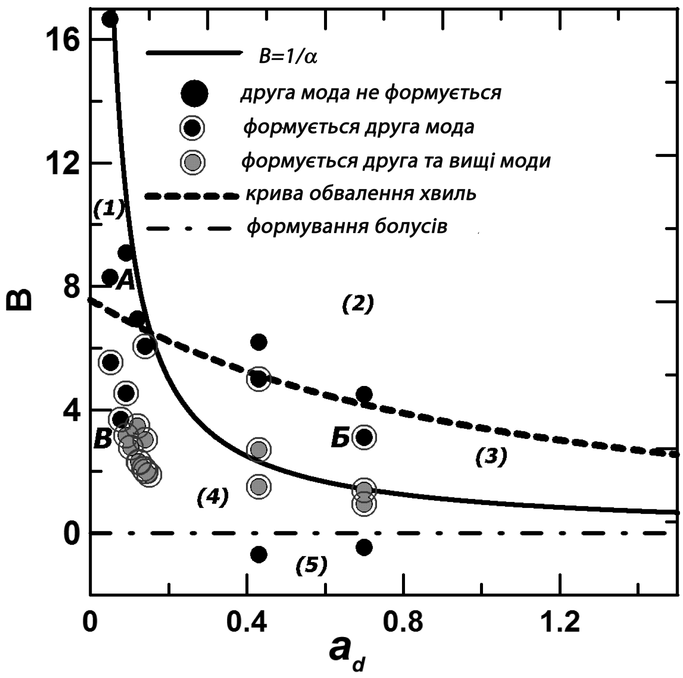

Рисунок 3.32: Схема режимів взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль-пониження першої моди в тришаровій стратифікації з підводного сходинкою в залежності від параметра нелінійності a_d і параметра блокування B.

Зона 4. Значення параметра блокування B і a_d лежать в області де $B < \frac{1}{a_d}$ і нижче кривої обвалення. Падаюча хвиля обвалюється, при цьому змінюючи полярність. В результаті цього генеруються хвилі другої моди і хвилі вищих мод. До даного типу взаємодії відноситься експеримент В.

Зона 5. При $B < 0$ відбувається відбиття хвиль, а за сходинку проходить невелика частина енергії хвилі у вигляді болусу.

Нова схема режимів взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль-пониження першої моди в рідині з тришаровою стратифікацією з підводною сходинкою в залежності від параметрів нелінійності a_d і блокування B зображена на 3.32. Виділена область значень B і a_d, де в результаті взаємодії першої бароклінної моди зі сходинкою формуються хвилі вищих бароклінних мод. Показано, що при взаємодії слабонелінійних хвиль ($a_d < 0.15$) зі сходинкою при значеннях параметра блокування $3.5 < B < 6$ відбувається генерація хвиль другої моди, а при $0 < B < 3.5$ формуються хвилі вищих мод. У разі сильно нелінійних хвиль $a_d > 0.4$ вищі моди формуються при $0 < B < 2$.

3.6 Моделювання трансформації усамітнених внутрішніх хвиль великої амплітуди на плавно неоднорідному дні

Розглянемо тепер особливості динаміки внутрішніх хвиль першої бароклінної моди при різних кутах нахилу континентального схилу. Обвалення внутрішніх усамітнених хвиль на плавно неоднорідному дні активно вивчається як теоретично, так і експериментально в контексті перемішування в океанах та озерах. Натурні дослідження показали широкий спектр процесів трансформації внутрішніх хвиль на мілкій воді, включаючи таке явище, як розпад хвиль-пониження та перехід хвиль-пониження у хвилі підвищення на похилому дні [69], [142], [219], [288] . Лабораторні експерименти, проведені в роботах [120], [198] також показали, що при малих кутах нахилу дна хвиля-пониження, що набігає, трансформується у хвилю-підвищення, формуючи болус. Серії лабораторних експериментів [78] були проведені для повного діапазону та хвиль пониження та підвищення. Обвалення на схилі чисельно вивчалося в роботах [69], [159] та [269]. Однак, теоретичних робіт, які б об'єднували результати чисельних, лабораторних та теоретичних досліджень динаміки та енергетики внутрішніх хвиль досі не багато. В цьому розділі розглядається динаміка руйнування хвиль великих амплітуд для широкого діапазону нахилів дна. Чисельне моделювання в деяких випадках повторює відповідні лабораторні експерименти різних авторів. Почнемо з порівняння результатів моделювання руйнування внутрішніх усамітнених хвиль на схилі, що повторюють експерименти [105] і [198]. У додаткових чисельних екс-

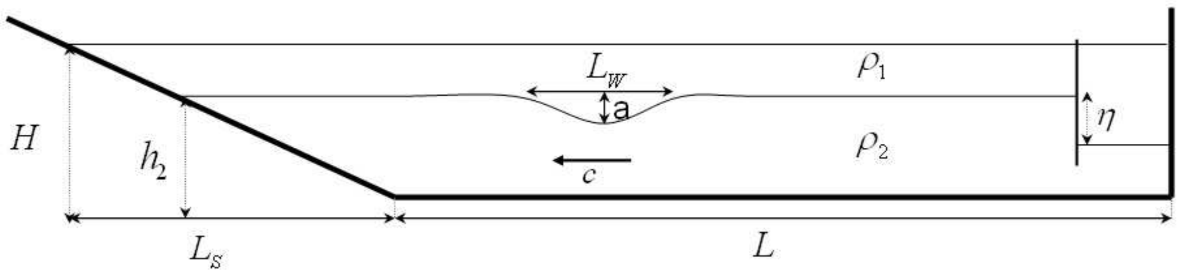

Рисунок 3.33: Схема чисельного експерименту.

периментах ми провели аналіз нових аспектів трансформації внутрішніх усамітнених хвиль. Схема лабораторного експерименту схематично зображена рисунку 3.33. Стратифікована рідина складається з двох шарів, розділених тонким проміжним шаром. Усамітнені внутрішні хвилі утворюються методом колапсу див. розділ 2.4.

Усамітнена внутрішня хвиля описується амплітудою та характерною довжиною хвилі, яка визначається [144]

$$L_W = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \eta_i dx. \tag{3.15}$$

Експерименти можуть бути описані наступними безрозмірними параметрами:

1. нормована різниця густин $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$,
2. відношення висоти шарів h_1/h_2 ,
3. параметром нелінійності a/L_w,
4. відношення висоти до довжини нахилу H/L_z,
5. числа Рейнольдса $Re_w = \frac{c_0 i W_B}{\nu}$, що базується на лінійному масштабі товщини басейну W_B.

Параметри експериментів дано у таблиці 7.5. Більшість чисельних експериментів було виконано у квазі-двомірний постановці з умовами ковзання на бокових стінках і вільною поверхнею, умови прилипання використовувалися на дні. Деякі експерименти у таблиці 7.5 представлені у тривимірній постановці, для того щоб оцінити вплив бічних стінок на трансформацію хвилі. Всі експерименти були виконані для молекулярної в'язкості та дифузії солі. В експерименті [114] розглядалося формування та розповсюдження хвилі великої амплітуди в басейні з довжиною $L = 21.4$, шириною $B = 0.5$ та загальної глибини $H = 0.77$ м. Висоти верхнього та нижнього шарів мали значення $h_1 = 0.15$ м і $h_2 = 0.$ відповідно. Різниця густини була $\triangle\rho = 0.023$ кг м^3, товщина проміжного шару 0.02 м. Роздільна здатність сітки для моделювання $1200 \times 500 \times 5$. На рисунку 2.13 показано процес утворення внутрішньої усамітненої хвилі методом колапсу, що був описаний в розділі 2.4, цей процес можна розділити на три етапи.

На першому етапі формується голова гравітаційного потоку, цей процес супроводжується інтенсивним перемішуванням. На другому етапі голова гравітаційного потоку трансформується у сильнонелінійну хвилю, яка не може переносити масу, на відміну від гравітаційних потоків (рис. 2.13 а і 2.13 б). Профіль хвилі і вертикальний профіль швидкості з лабораторних експериментів добре узгоджуються із чисельним моделюванням (див. рис. 2.13 б та 2.13 с). Однак, і моделювання і експеримент показують, що ця хвиля не є внутрішньою усамітненою хвилею, як це вважалося у статті [114]. Передня частина профілю є стабільною, і вона може бути описана солітоном Міяти-Чоя-Камасси (МЧК-солітоном) з амплітудою $a = 0.225$ м, що близько до значення критичного солітону $A_{lim} = 0.235$ м, що знаходиться з формули (1.140), але задня його частина трансформується у вторинну хвилю меншої амплітуди (див. рис 2.13 б). Сильний зсув спричиняє нестійкість Кельвіна-Гельмгольца на гребні хвилі, де число Річардсона (1.47), падає до критичних значень $Ri \sim 0.08$, що менше за критичне значення 0.25 (1.48) з [201].

Характерний масштаб вихорів Кельвіна-Гельмгольца дорівнює 20 см. І

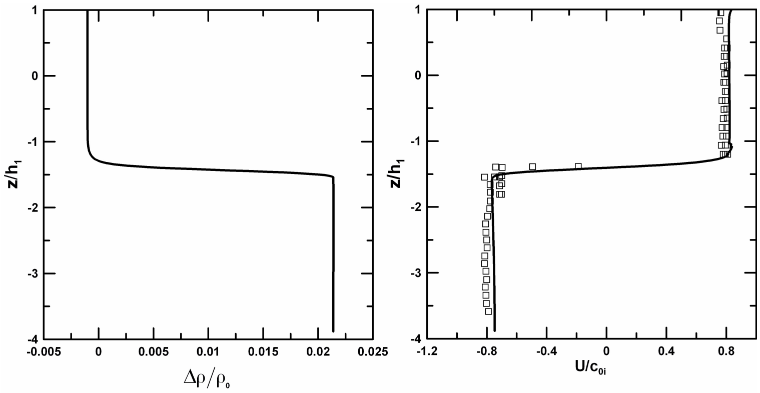

Рисунок 3.34: Вертикальні профілі (а) густини та (б) швидкості (порівняння з експериментом [114].

співвідношення розмірів вихорів до товщини шару розділу добре співвідносилися з теоретичними оцінками $K_h/\delta_\rho = 8$ та з величиною, отриманою з аналізу стійкості $K_h/\delta_\rho = 7.6$ та аналізу лабораторних експериментів з внутрішніми хвилями великих амплітуд [99] де $K_h/\delta_\rho = 7.9$. Проте нерівномірність потоків в усамітеній хвилі робить використання числа Річардсона, як показника нестійкості та аналізу стійкості паралельних стратифікованих потоків недостатньою. На рис. 3.35 показано потенційно нестійкі області або "кишені"[99], в яких $Ri_{min} < 0.25$ у процесі утворення одиночної хвилі (рис. 3.35 б) і в стійкій одиничній хвилі (рис. 3.35 б). Характерна горизонтальна довжина L_x кишені з $Ri_{min} < 0.25$ є корисним прогностичним критерієм нестійкості Кельвіна Гельмгольца [99], оскільки ця довжина характеризує горизонтальний масштаб, де може зростати нестійкість. Емпіричне відношення

$$L_x/\lambda_{0.5} = 0.86, \tag{3.16}$$

розділяє потенційно стійкі та нестійкі зони. Тут L_x - та λ -довжина хвилі усамітненої хвилі, яка визначається як довжина, на якій амплітуда зменшується в двічі. (див. 3.35 б). Значення дорівнюють $L_x/\lambda_{0.5} = 0.9$ та $L_x/\lambda_{0.5} = 0.78$ для моментів часу, зображених на рис. 3.35.

Вони підтверджують спостереження стану хвилі: хвиля нестійка на рис. 2.13 (б) і стійка на рис. 2.13 (в). В результаті перемішування амплітуда хвилі зменшується внаслідок втрати маси, викликаної нестійкістю Кельвіна- Гельмгольца, а число Річардсона зростає до 0.11 на рис. 2.13 (в). На третьому етапі амплітуда хвилі зменшується та зменшується зсув, і хвиля стає стійкою рисунок 2.13 (г). Число Річардсона в цьому випадку дорівнює $Ri = 0.14$. Ця хвиля добре описується розв'язком МЧК (1.131), і амплітуда хвилі повільно зменшується за рахунок в'язких ефектів. Розглянемо далі руйнування хвиль великих амплітуд на схилі. Кінематика та динаміка обвалення залежать від схилу, стратифікації, амплітуди та довжини хвилі. Спочатку розглянемо ефект помірного і великого схилу. Серед чисельних експериментів були відтворені лабораторні експерименти з роботи [105] (експеримент 1104 та 2906 у таблиці 7.5). Параметри відповідних експериментів наведені в таблиці 7.5.

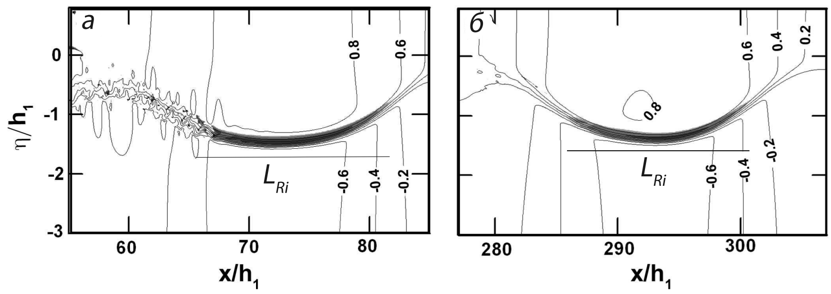

Рисунок 3.35: Нормалізована горизонтальна швидкість і потенційно нестійка область ($Ri_{min} < 0.25$), показана як темна зона (а) нестійкої хвилі (див. (2.13) d) та (b) в стійкій хвилі (2.13) b).

На рисунку 3.37 показана послідовність знімків з лабораторного експерименту 1104 та на рисунку 3.38 зображено обчислене поле солоності та завихоренності на різних етапах формування та трансформації хвилі на схилі для помірного нахилу $H/L_s = 0.22$ та $a/h_1 = 1.63$. На перших слайдах ($t = 0; 5$ с) видно, що вхідна хвиля деформується, оскільки задній фронт стає крутіший. На наступному рисунку $t = 10$ показано, що маса води в хвилях-пониження сповільнюється біля узбережжя, а вода в нижньому шарі виштовхує задній фронт компенсуючим потоком у нижній частині верхнього шару: цей процес добре видно на полі завихореності. Перекидання в задній частині хвилі викликає інтенсивне перемішування і формування болусу $t = 10$. Болус - це вихрова пара [120], що утворена імпульсом в задній частині хвилі. Болус захоплює воду з обох шарів і поширюється на узбережжя у вигляді хвилі $t = 12 - 28$. Цей процес є якісно таким же, як і в експерименті (MI 8) [198]. Такий сценарій було чисельно вивчено в роботі [269].

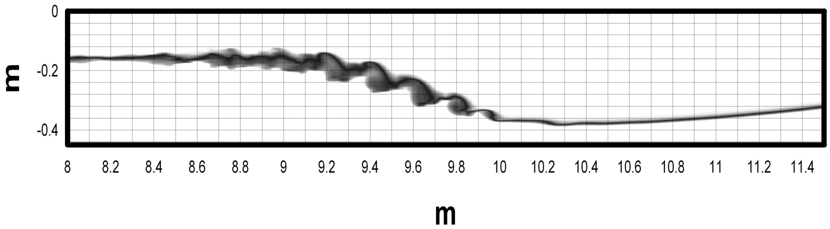

Рисунок 3.36: Солоність при t=50 с, після колапсу. Візуалізація вихорів Кельвіна-Гельмгольца [131].

На рисунку 3.39 показана послідовність знімків лабораторного експерименту 2906 та на рис. 3.40 обчислене поле солоності та завихореності на різних етапах формування та трансформації хвилі на схилі для великого нахилу $H/L_s = 1.73$ та $a/h_1 = 1.5$. В цьому випадку болус не утворився.

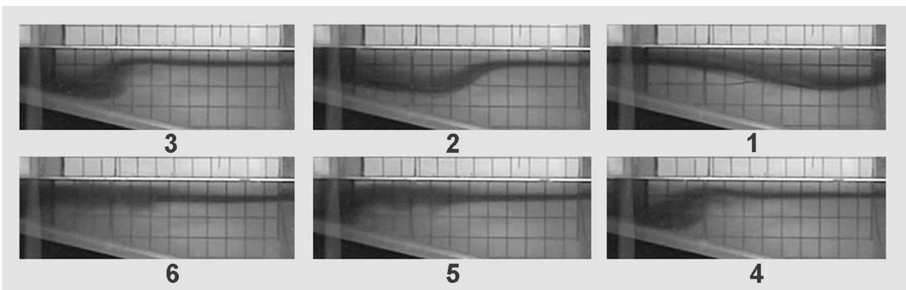

Рисунок 3.37: Фотографії процесу обвалення хвилі на помірному схилі в лабораторному експерименті 1104 [105].

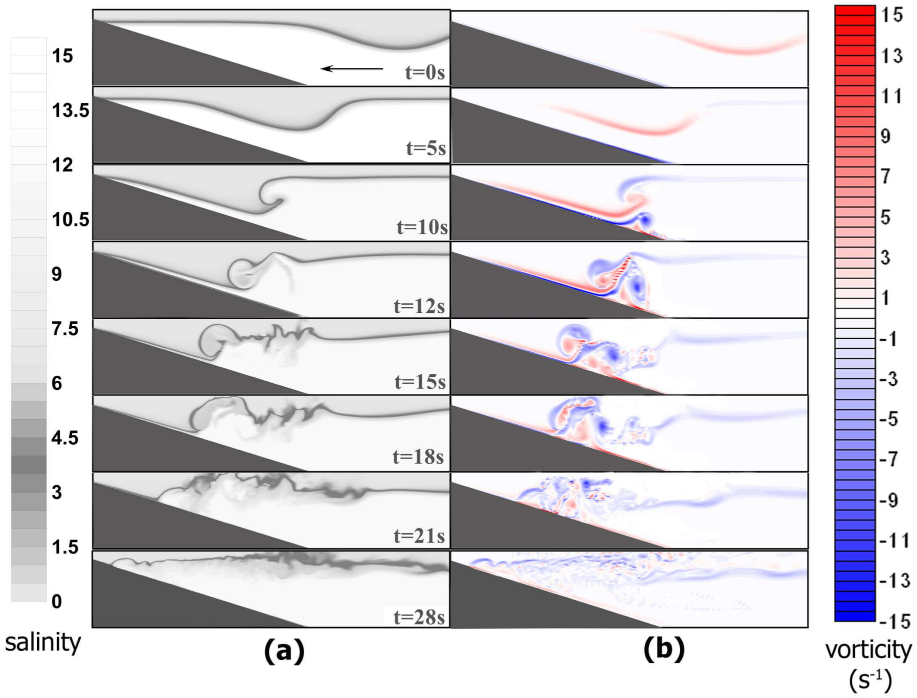

Рисунок 3.38: Моделювання обвалення хвилі на помірному схилі для експерименту 1104. Поле солоності та поле завихоренності [131].

Проте, подібно до відбиття внутрішніх хвиль від вертикальної стінки деяке перемішування призводить до перемішування проміжного шару. Як видно з рисунку 3.40 порівняння еволюції лінії розділу для лабораторного [105] та чисельного експериментів для датчика G2 в експерименті 2906 майже співпадають.

Обвалення внутрішніх хвиль на похилому дні потребує більш детального розгляду. В роботі [269] було показано, що для стратифікованого нижнього шару трансформація внутрішніх хвиль регулюється не тільки нелінійними ефектами, які домінують на плавному схилі та призводять до обвалення, але вони також включають дисперсійні ефекти. Над плавним дном утворюється послідовність вторинних солітонів за рахунок дисперсії. В роботі [270] зазначається, що можливі три сценарії поведінки хвиль великих амплітуд, коли в деякій точці вздовж нахиленого дна амплітуда хвилі наближається до критичної амплітуди A_{lim} (1.140). Якщо нахил схилу є помірним (як у Run 1104)

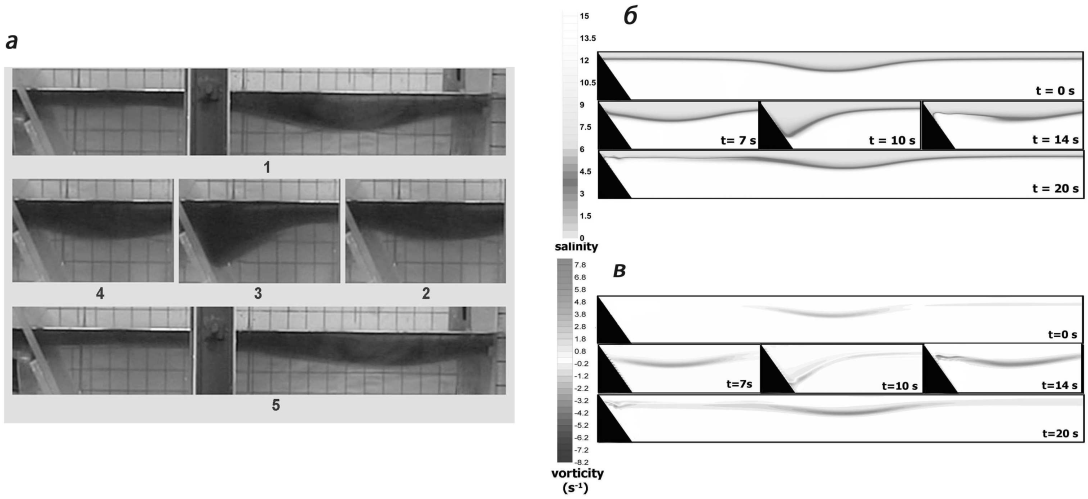

Рисунок 3.39: Фотографії (а) [105], та моделювання [131] (поле солоності (б) та поле завихоренності (в)) процесу обвалення хвилі на крутому схилі в лабораторному експерименті 2906 [105].

та відбувається перекидання хвилі, то реалізується перший сценарій. Другий сценарій - це адіабатичне перетворення, коли амплітуда внутрішньої хвилі близька до локального значення A_{lim}. Внутрішня хвиля пристосовується до майже критичної форми хвилі після зміни глибини. Третій сценарій - вищезгадана неадіабатична еволюція, коли хвиля випромінює вторинні хвилі при трансформації на схилі.

Проте, чисельні експерименти показали можливість ще одного неадіабатичного сценарію взаємодії хвилі великої амплітуди на плавному схилі. Ми детально розглянули процеси трансформації та провели три додаткових чисельних експерименти(A1-A3), параметри яких наведено в таблиці 7.5. Чисельні параметри потоку близькі до тих, що були в експериментах в роботі [114]. Для експерименту A1 $a/h_1 = 1.4$, схил невеликий $H/L_s = 0.04$. Трансформація цієї хвилі показана на рисунку 3.40. У цьому випадку, коли внутрішня хвиля наближається до критичної амплітуди нестійкість Кельвіна-Гельмгольца виникає на гребні хвилі. Нестійкість Кельвіна-Гельмгольца призводить до фор-

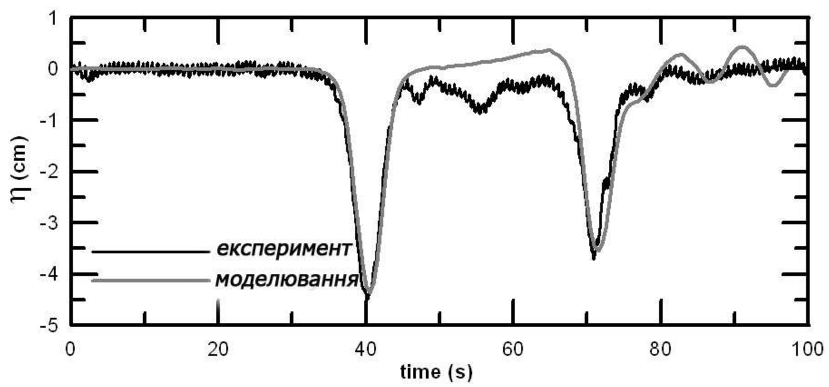

Рисунок 3.40: Порівняння еволюції лінії розділу для лабораторного [105] та чисельного [131] експериментів для датчика G2 в експерименті 2906.

мування великомасштабних вихорів, які ефективно перемішують шар розділу і це призводить до зменшення амплітуди хвилі. Потім хвиля рухається до берега, не перекидаючись, після чого утворюється слабкий болус. В цьому випадку зсувна нестійкість є домінуючим механізмом перетворення хвиль.

В експерименті А2 хвиля, що наближається до схилу, така ж, як і у експерименті А1, але в цьому випадку нахил дна більший $H/L_s = 0.15$. На рисунку 3.41 показано, що еволюція хвилі відбувається за проміжним сценарієм між випадками помірного схилу (експерименті 1104) і плавного нахилу (експеримент А1). Як і в експерименті А1, з'являється нестійкість Кельвіна-Гельмгольца, але на мілководді відбувається перекидання, як у експерименті 1104, хвиля перетворюється в послідовність хвиль підвищення з сильним перемішуванням в нижньому шарі.

Розглянемо тепер випадок А3, де схил є плавним ($H/L_s = 0.04$), такий як у експерименті А1, але амплітуда усамітненої хвилі $a/h_1 = 1.4$ менше, ніж в експерименті А1. На рис. 3.40 показано, що трансформація внутрішньої хвилі відбувається без зсуву нестабільності і без перекидання хвилі. За хвилею пониження виникає хвилеподібний горб, що виривається на мілководдя. Ми можемо зробити висновок, що на пологих схилах хвилі великих амплітуд пе-

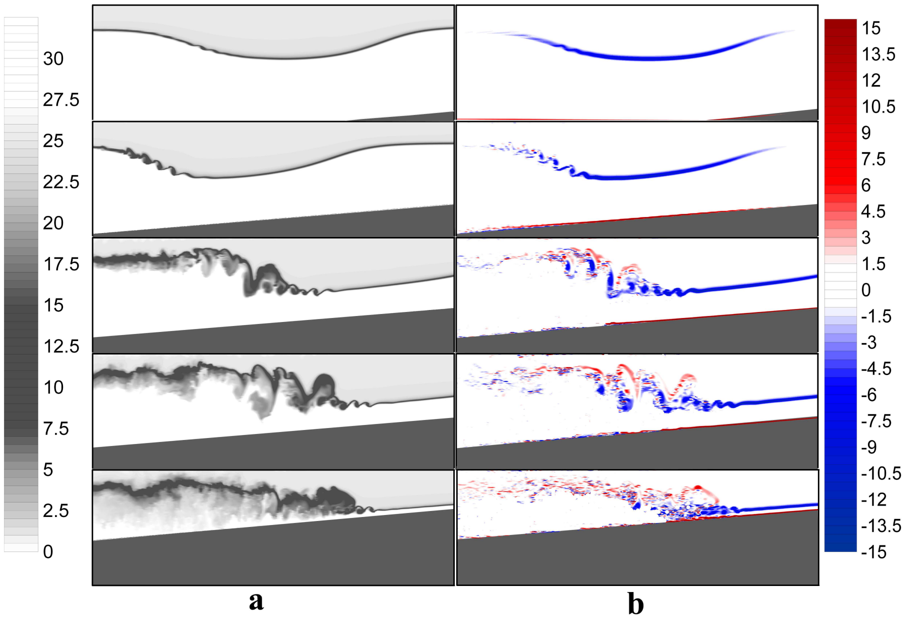

Рисунок 3.41: Процес обвалення внутрішньої хвилі в чисельному експерименті A1: (a) поле солоності та (б) поле завихоренності [131].

ретворюються відповідно до четвертого нового неадіабатичного сценарію, в якому спочатку переважають зсувна нестійкість, а потім хвиля змінює полярність без перекидання. Польові спостереження в Південнокитайському морі [219] підтверджують існування такого сценарію обвалення внутрішньої хвилі (порівняйте рисунок 3.43 та 3.44). У всіх випадках знак завихоренності змінюється при наближенні хвилі до схилу та відбувається зміна знаку хвилі з хвилі-пониження на хвилю-підвищення.

Розглянемо далі перетворення енергії при обваленні внутрішніх хвиль на схилі. Для порівняння енергетики обвалення при двовимірному моделюванні із натурними та лабораторними експериментами, важливо оцінити наслідки втрати енергії, що виникають при терті о бічні стіни в лабораторному басейні. В ряді теоретичних та експериментальних робіт [197] було проведено дослідження з цього питання. Вони показали, що енергія експоненціально зменшується з відстанню, яку проходить внутрішня хвиля. В роботі [69] параметризували ефекти бічної стінки при двовимірному моделюванні (2D) з

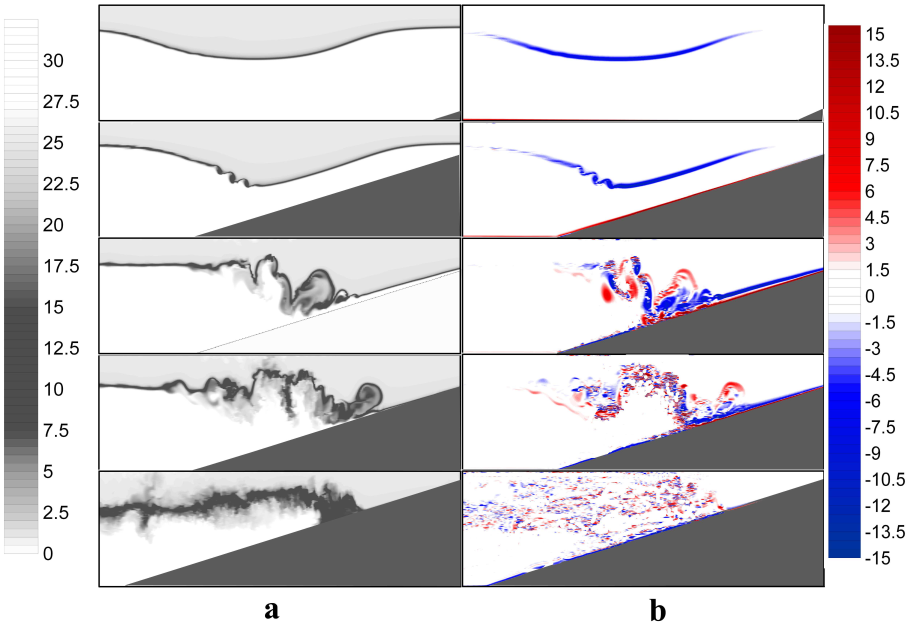

Рисунок 3.42: Процес обвалення внутрішньої хвилі в чисельному експерименті A2: (a) поле солоності та (б) поле завихоренності [131].

використанням квадратичного закону тертя і корегування коефіцієнту тертя при співставленні з даними вимірювань [197]. В цій роботі були порівняні характеристики відбиття [197] з результатами експериментів [120] і зроблений висновок, що тертя на бічних стінках в лабораторних експериментах є важливим чинником у перетворенні енергії при обваленні внутрішніх хвиль на схилі. Ми провели повне тривимірне моделювання і порівняли його з двовимірним для того, щоб оцінити затухання внутрішніх хвиль у лабораторному лотку [197] без укосу. На рис. 3.45 показана залежність розрахованої енергії від відстані, що пройшла хвиля. Для того, щоб зробити порівняння з результатами [197], використовувалася формула для розрахунку псевдоенергії для випадку слабкої нелінійності для двошарової рідини [68] по формулі (1.158) з розділу 1.4.2.

Як видно з рисунка 3.45 моделювання правильно описує затухання псевдоенергії. Суцільна лінія відповідає експериментам $MI2$ [197]. Проведене дво-

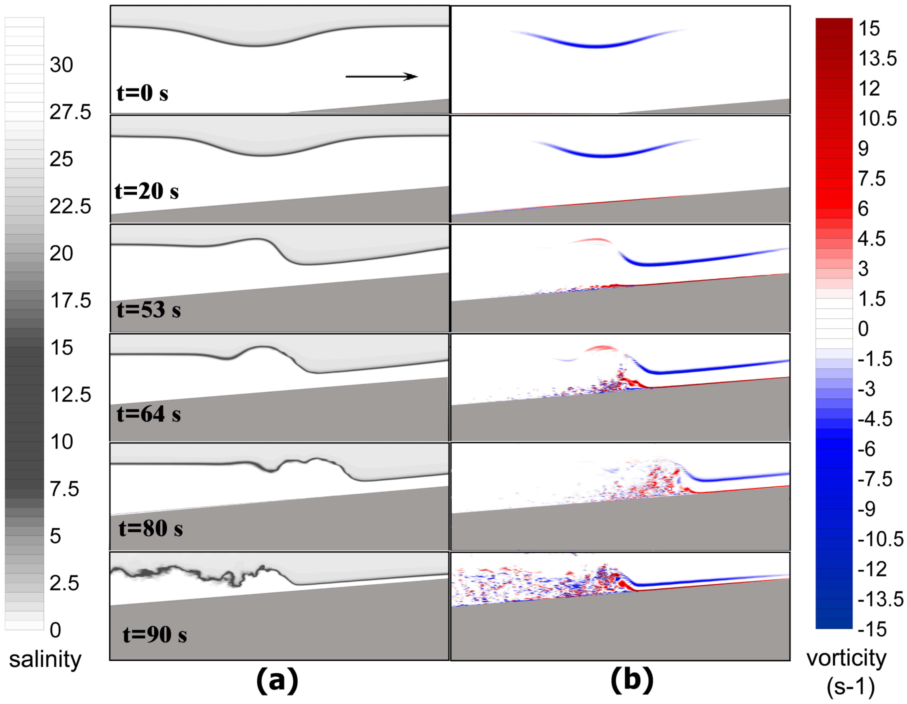

Рисунок 3.43: Процес обвалення внутрішньої хвилі в чисельному експерименті A3: (а) поле солоності та (б) поле завихореності [131].

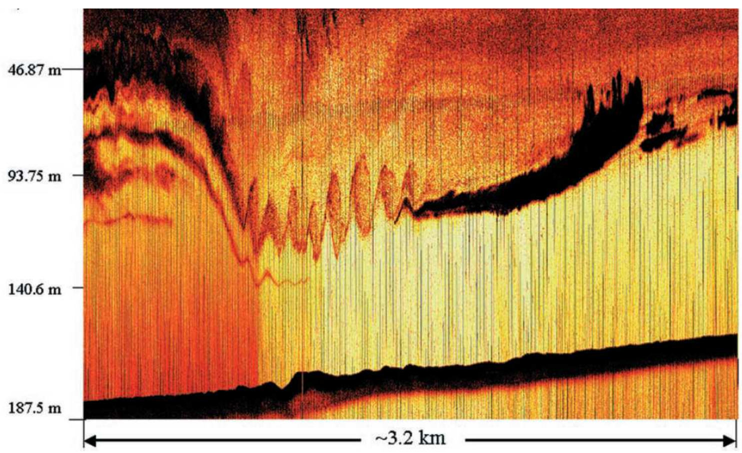

Рисунок 3.44: Трансформація внутрішньої хвилі на континентальному шельфі Південно-китайського моря [219].

вимірне моделювання добре узгоджується з результатами двовимірного моделювання з роботи [69]. Можна зробити висновок, що 3D-модель правильно описує динаміку внутрішніх хвиль в лабораторному басейні та показує важливість врахування тертя на бічних стінках над поверхнею перехідно-

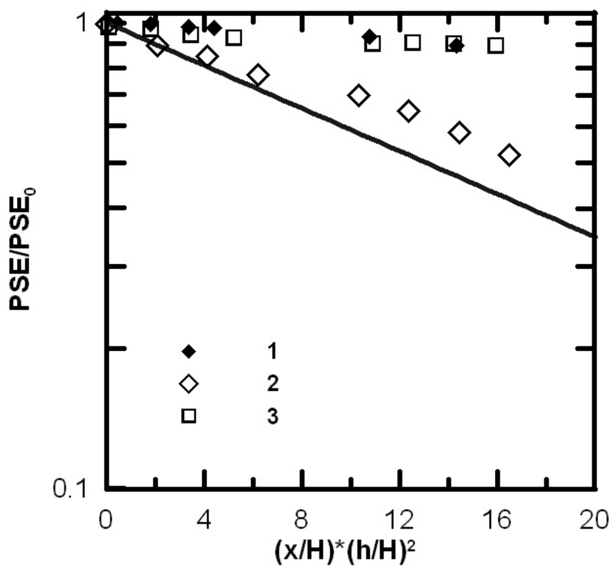

Рисунок 3.45: Результати розрахунків та вимірювання [197] затухання псевдоенергії. Суцільна лінія відповідає експериментам [197] . 1 -2D моделювання, 2 - 3D моделювання, 3 - 2D моделювання [69]).

го шару та донним тертям при затуханні енергії в лабораторному басейні з постійною шириною і глибиною. Розглянемо тепер бюджет енергії при обваленні внутрішніх хвиль на схилі. Псевдоенергія початкової внутрішньої хвилі PSE_i (див. розділ 1.4.2) перетворюється в енергію хвилі, що відбилася від схилу, та енергію, що розсіялася в нижньому пограничному шарі при терті об бічні стінки та трансформувалась у потенційну енергію шляхом перемішування, що було спричинено руйнуванням. Коефіцієнт відбиття $R = PSE_r/PSE_i$ (див. розділ 1.4.2.) залежить від параметра нелінійності a/L_w (відношення амплітуди хвилі до її довжини) та тангенсу куту схилу H/L_s (рис. 3.33). Ці параметри були запропоновані в роботі [69], та можуть бути об'єднані в один параметр, так зване число Ірібарена

$$\xi = \frac{H/L_s}{\sqrt{a/L_w}}. \tag{3.17}$$

На рис. 3.46 показано залежність коефіцієнту відбиття $\mathbf{R}$ від числа Ірібарена. Коефіцієнт відбиття $\mathbf{R}$ визначається як:

$$R = \frac{PSE_R^+ - PSE_R^-}{PSE_R^+}, \tag{3.18}$$

де PSE знаходяться з формули (1.145).

Суцільна крива на малюнку показує експоненціальну залежність з [69]

$$R = 1 - exp(-\xi/\xi_0), \tag{3.19}$$

де $\xi_0 = 0.78 \pm 0.02$. Як видно з цього графіка, двовимірне моделювання показує тенденцію, аналогічну експерименту, але моделювання переоцінює відбиття у порівнянні з експериментом. Це можна пояснити (i) дією бічних стін в лабораторному експерименті, і (ii) різницею в методах оцінки псевдоенергії. Розглянемо обидві можливості. На рисунку 3.46 (б) показано результати розрахунків коефіцієнтів відбиття з використанням тривимірного моделювання 3D (1) та двовимірного моделювання 2D (2) та використання повної формули для розрахунку псевдоенергії PSE (1.157). На цьому графіку наведені обчислені коефіцієнти відбиття, що отримані за результатами моделювання в конфігураціях 3D (3) та 2D (4) та використовують співвідношення (1.157) для розрахунку потоку псевдоенергії. Нарешті, на малюнку є коефіцієнти відбиття одержані з моделювання 3D (5) та 2D (6) моделей і використовуючи співвідношення (1.158) для PSE.

Спочатку порівняємо результати, одержані за допомогою тривимірного (3D) та двовимірного (2D) моделювання. Існують невеликі відмінності між 2D та 3D випадками,але для цих випадків різниця значно менше, ніж між лабораторним експериментом та чисельним моделюванням на рис. 3.46(а). Порівняємо наступні результати для коефіцієнта відбиття, використовуючи співвідношення (1.159) для потоку псевдоенергії та співвідношення (1.158) для PSE. Як видно з рисунку 3.46 (б), різниця між цими випадками майже така ж як на рисунку (а), для 2D, так і для 3D-моделювання. Можна зробити висновок,

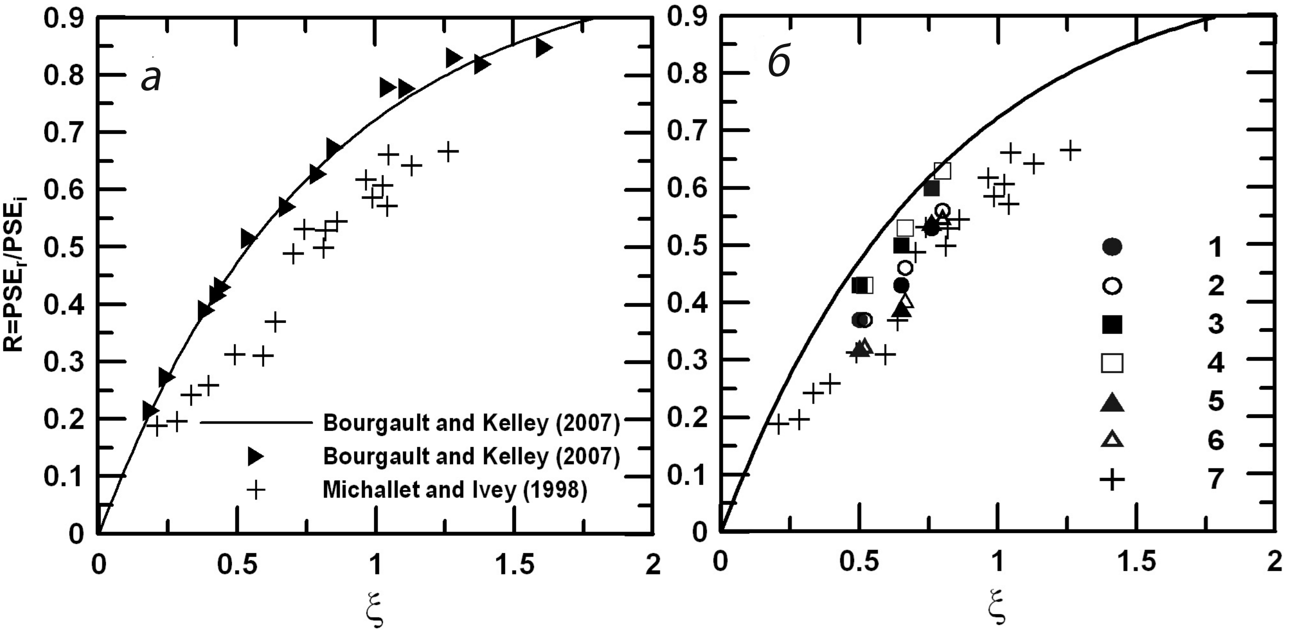

Рисунок 3.46: Залежність коефіцієнту відбиття внутрішніх усамітнених хвиль від похилого дна від числа Ірібарена. (а) - порівняння моделювання [69] з результатами лабораторних досліджень [197]; (б) - порівняння коефіцієнту відбиття R для тривимірних (чорні позначки) та двовимірних (білі позначки) чисельних експериментів

що невідповідність в розрахунках на рисунку (а) між чисельними розрахунками та лабораторним експериментом пояснюється різницею між методами обчислення псевдоенергії, а не тертям на бічних стінках лабораторного басейну. Таким чином, можна зробити такі висновки: (і) тертя на бічних стінках не сильно впливає на експериментальні дані з руйнування хвиль на схилі в лабораторних басейнах, на відміну від ситуації, коли хвилі довгий час розповсюджуються вздовж лабораторного басейну; (іі) приблизне співвідношення (1.159) для потоку псевдоенергії переоцінює коефіцієнт відбиття, тоді як відношення (1.158) дещо недооцінює його; (ііі) дані лабораторного експерименту можуть бути використані для порівняння полів швидкості та густини без корекції на тертя на стінках, оскільки основна частина розсіювання пов'язана з донним тертям та перемішуваннями на схилі.

3.7 Моделювання трансформації усамітнених внутрішніх хвиль першої моди над підводними перешкодами

У естуаріях зі складним рельєфом дна, таких як фіорди або в альпійських озерах, що сформовані під впливом льодовиків, басейни можуть бути розділені підводними хребтами. Наприклад, підводний перешийок, що відокремлює Верхнє Боденське озеро від озера Юберлінген, займає лише 1% загальної площі басейну, але саме він є причиною дисипації близько 40% енергії через взаємодію між внутрішніми хвилями, що утворились в озері з підводним пагорбом. Одним із місць на Землі, де проводиться багато спостережень генерації, розповсюдження та взаємодії внутрішніх хвиль із різкими змінами дна є Південнокитайське море. Тут спостерігаються внутрішні хвилі із найбільшими в світовому океані амплітудами. Генерація таких хвиль відбувається в зоні між островами Тайвань та Лусон. Баротропний припливний потік, що взаємодіє із двома підводними хребтами в районі Лусонської протоки, утворює бароклінний приплив. В результаті генеруються цуги внутрішніх хвиль великих амплітуд, що взаємодіють із підводними хребтами. Розуміння гідродинамічних процесів, пов'язаних із взаємодією внутрішніх хвиль з перешкодами, є важливим, а особливо важливою є оцінка втрат енергії при такій взаємодії. В роботі [267] за допомогою чисельного моделювання було показано, що східний хребет відповідає за генерацію хвиль першої бароклінної моди, яка прямує до західного хребта. І при взаємодії із ним генеруються хвилі вищих бароклінних мод. В роботі [238] описані результати польових спостережень поведінки внутрішніх хвиль над підводними перешкодами. Лабораторні експерименти з взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль в резервуарі із двошаровою стратифікацією та трикутними перешкодами описані в роботі [276].

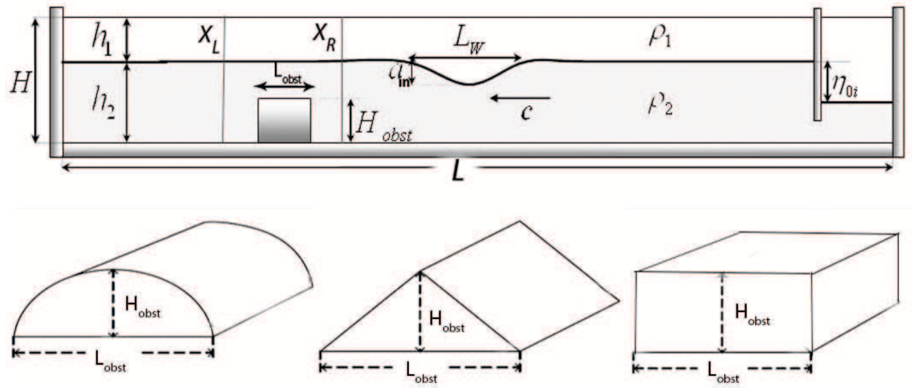

Рисунок 3.47: Схема чисельного експерименту

В роботі [268], де описані чисельні експерименти, було показано, що при наявності перехідного шару скінченої глибини при взаємодії внутрішньої хвилі першої бароклінної моди генеруються внутрішні хвилі вищих мод. Внутрішні хвилі-пониження та підвищення у двошаровій стратифікації при наявності трикутної перешкоди та перешкоди у вигляді півкола розглядались в роботі [78]. Руйнування на хребті періодичних прогресивних хвиль у двошаровій стратифікації досліджувалось за допомогою лабораторних експериментів в роботі [130]. В роботі [4] було проведено моделювання хвиль з прямокутними перешкодами та проводилось порівняння із результатами лабораторних спостережень.

Для проведення чисельних експериментів використовувалася чисельна модель, що базується на розв'язанні рівнянь Нав'є-Стокса для стратифікованої по солоності рідини в наближенні Бусінеска. Детально алгоритми цієї чисельної негідростатичної тривимірної моделі з вільною поверхнею описано в [139],[131]. Модель використовувалася для проведення серії чисельних експериментів, деякі з яких відтворюють відповідні лабораторні експерименти з робіт [78] та [105].

Конфігурація чисельного експерименту зображена на рис. 3.47. Чисельний прямокутний лоток довжини $L = 12\,\text{м}$ і висоти H заповнений двошаровою рідиною, з густиною верхнього шару ρ_1 та нижнього шару ρ_2 відповідно. Стратифікація в лотку задається формулою див. рівняння (3.3). Відношення шарів різної густини h_1/h_2 змінювалося для різних експериментів. Ці значення наведено в таблиці 7.3. Внутрішні хвилі генерувалися методом колапсу рідини [141], що знаходиться за вертикальною перешкодою (рис. 3.47). При усунені цієї перешкоди генерується хвиля підвищення (у випадку коли $h_1/h_2 > 1$) або хвиля хвиля пониження (у випадку коли $h_1/h_2 < 1$). Хвиля, що утворена таким чином, розповсюджується справа наліво, і її характеристики залежать від довжини відсіку за заслінкою та перепаду між положенням лінії розділу шарів з різною густиною за заслінкою та в основній області басейну η_{0i} . Внутрішня хвиля характеризується амплітудою a_{in}, яка визначається як максимальне відхилення ізопікни від незбуреного положення. Далі така хвиля проходить над підводною перешкодою з висотою H_{obst} та трансформується над нею. В роботі розглядаються перешкоди у вигляді півкіл, трикутників та прямокутників різної довжини. Для прямокутних форм перешкод розглядались три різних варіанти: пластина $L_{obst} = 1\,\text{см}$, проміжна довжина $L_{obst} = 17\,\text{см}$ та довгий прямокутник з довжиною $L_{obst} = 52\,\text{см}$. Граничний варіант, коли довжина перешкоди зростає і переходить в сходинку описано авторами раніше в роботах [176], [260]. Перешкода знаходиться на відстані $x_{step} = 6\,\text{м}$ від правого торця чисельного лотка. Характеристики хвиль до та після взаємодії з перешкодами фіксувалися в перетинах X_R і X_L відповідно, що знаходяться на відстані 0.3 м від торців перешкоди. Задача розв'язувалась в квазідвомірній постановці, коли рівняння дискретизувались в декількох вузлах поперек басейну за умови ковзання на бічних стінках. Роздільна здатність сітки по довжині, висоті та ширині становила $3000 \times 300 \times 5$ вузлів. В рамках кожної серії чисельних експериментів висота перешкоди H_{obst} змінювалась, а також змінювались характеристики хвиль та стратифікації. Глибина чисельного басейну H , амплітуда хвилі a_{in} , відношення висоти перешкоди до глибини нижнього шару $\frac{H_{obst}}{h_2}$, відношення шарів h_1/h_2 вказані в таблиці 7.3 (див. Додатки).

Якщо узагальнити результати проведених в роботах [42], [260] чисельних експериментів, то в залежності від параметра B (3.2) виділяються наступні типи взаємодії хвиль з підводною сходинкою: 1. Слабка взаємодія. При проходженні хвилі над сходинкою її характеристики (амплітуда та довжина) змінюються не суттєво. 2. Помірна взаємодія. Для цього типу взаємодії характерним є утворення нестійкості Кельвіна-Гельмгольца, а також при проходженні хвилі першої моди над сходинкою відбувається генерація внутрішньої хвилі другої бароклінної моди. 3. Сильна взаємодія. Для цього типу взаємодії характерний надкритичний режим (складене число Фруда (3.9) більше 1), що має наслідком утворення надкритичих струменів [260], вихрових пар та болусів. При цьому відбувається інтенсивне перемішування та втрати енергії при проходженні внутрішньої хвилі повз перешкоду для цього типу взаємодії максимальні.

Трансформація внутрішньої усамітненої хвилі-пониження над трикутною перешкодою

На рис. 3.48 представлено порівняння результатів чисельного моделювання та результатів лабораторного експерименту з роботи [78], в якому досліджувалася трансформація внутрішньої хвилі пониження над трикутною перешкодою (експеримент TD2). Еволюція поля густини зображена на рис. 3.48 (а-б), поле завихоренності на рис. 3.48 (в). Як видно з рисунку хвиля-пониження, що в перетині X_R має амплітуду $a = 7\,\text{см}$ починає деформуватися при підході до трикутної перешкоди. Передній фронт хвилі, що набігає, стає майже паралельним до сторони перешкоди. В момент часу $T = T_0 + 6\,\text{с}$ хвиля проходить через гідравлічний стрибок Fr_{max}>1 (де Fr – складене число Фруда, визначається за формулою 3.9). Далі генерується інтенсивний потік вздовж схилу, що є головною причиною утворення вихрової пари, яку чітко видно на полі завихоренності в момент часу $T = T_0 + 11\,\text{с}$. Вихрова пара спричиняє інтенсивне перемішування в пікнокліні. Параметр блокування в цьому випадку $B = 1.9$, а максимальне складене число Фруда $Fr_{max} = 1.14$, що означає утворення гідравлічного стрибка. Даний тип взаємодії ми можемо класифікувати як сильну взаємодію.

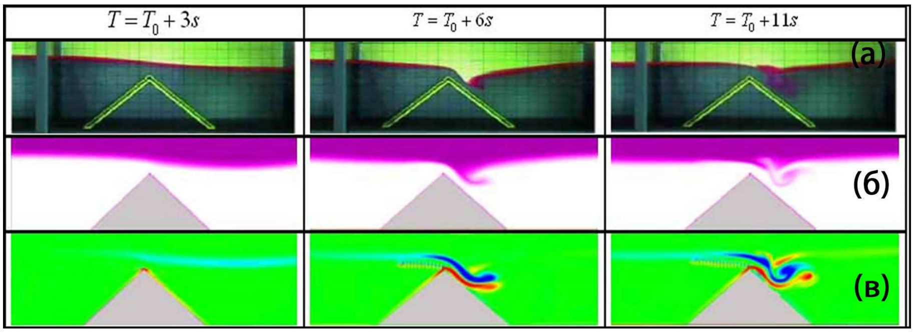

Рисунок 3.48: Трансформація внутрішньої хвилі-пониження над трикутною перешкодою експеримент TD2. (а) - фото з лабораторного експерименту [78], (б) та (в) - результати чисельних розрахунків, поле густини та поле завихоренності для відповідних моментів часу з експерименту [78].

Трансформація внутрішньої усамітненої хвилі-пониження над перешкодою у вигляді півкола

На рис. 3.49 відображено процес трансформації хвилі пониження над підводним хребтом у вигляді півкола (експеримент SD2). Процес трансформації хвилі з початковою амплітудою $a = 7\,\text{см}$ близький до трансформації над трикутним хребтом. І хоча коефіцієнт блокування саме такий, як і у експерименті TD2 $B = 1.9$, але максимальне складне число Фруда в цій ситуації $Fr = 1.23$ більше аніж у попередньому випадку. Внутрішня вихрова пара, що формується у випадку взаємодії хвилі з перешкодою у вигляді півкола (див. 3.49 $T = T_0 + 13\,\text{с}$), у 1.5-2 рази більші аніж при взаємодії з трикутною перешкодою.

Трансформація внутрішньої усамітненої хвилі-підвищення над

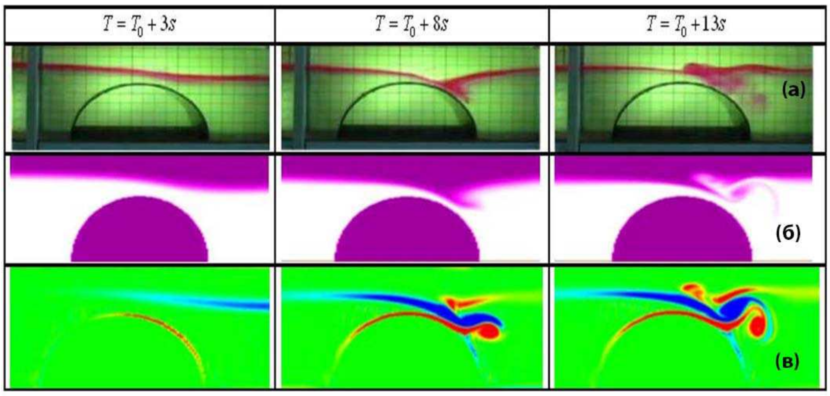

Рисунок 3.49: Трансформація внутрішньої хвилі-пониження над перешкодою у вигляді півкола (а) - фото з лабораторного експерименту [78], (б) та (в) - результати чисельних розрахунків, поле густини та поле завихореності для відповідних моментів часу з експерименту.

трикутною перешкодою

Чисельне моделювання та фото лабораторного експерименту [78] з трансформацію внутрішньої хвилі підвищення над трикутною перешкодою (експеримент TE3) показано на рис. 3.50. Еволюція поля густини зображена на рис. 3.50 (а-б), поле завихореності, що одержано моделюванням на рис. 3.50.(в). Хвиля-підвищення в перетині X_R має амплітуду $a = 7.3\,\text{см}$. Параметр блокування $B = 1.71$, а максимальне складне число Фруда 3.9 сягає значення $Fr = 1.08$, що має наслідком утворення надкритичного струміня, що виникає з підвітряної сторони трикутної перешкоди рис. 3.50 у момент часу $T = T_0 + 13\,\text{с}$. Таким чином, в даному випадку вихрова пара формується з іншої сторони перешкоди, аніж у випадку з хвилею пониження.

Трансформація внутрішньої усамітненої хвилі-пониження з прямокутною перешкодою

На рис. 3.51 зображена трансформація внутрішньої хвилі пониження над прямокутною перешкодою, експеримент 0203 [105]. В цьому експерименті хвиля-пониження, має амплітуду $a = 6.7\,\text{см}$ в перетині X_R, а параметр блокування в цьому випадку $B = 1.92$. Як видно чисельне моделювання добре

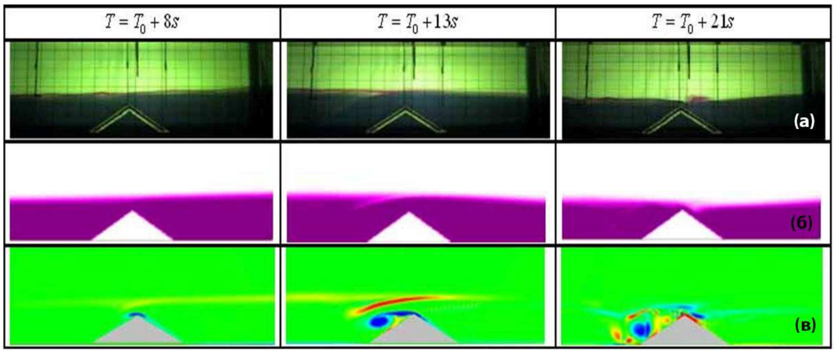

Рисунок 3.50: Трансформація внутрішньої хвилі-підвищення над трикутною перешкодою (експеримент TE3). (а) - фото з лабораторного експерименту [78], (б) та (в) - результати чисельних розрахунків, поле густини та поле завихореності для відповідних моментів часу з експерименту [78].

відтворює деталі лабораторного експерименту, а саме утворення надкритичного струменя та вихрової пари.

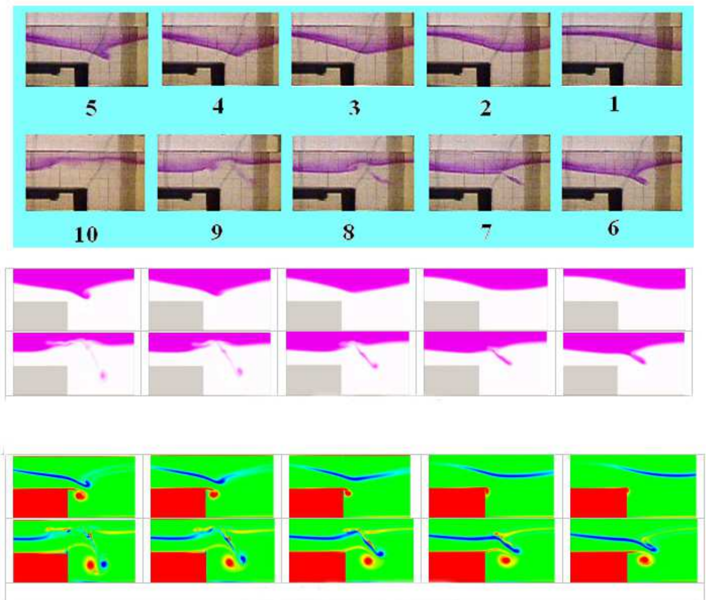

Рисунок 3.51: Трансформація внутрішньої хвилі-пониження над прямокутною перешкодою, (а) - фото з лабораторного експерименту [78], (б) та (в) - результати чисельних розрахунків, поле густини та поле завихореності для відповідних моментів часу з експерименту [4].

Для того, щоб дослідити вплив довжини перешкоди на трансформацію

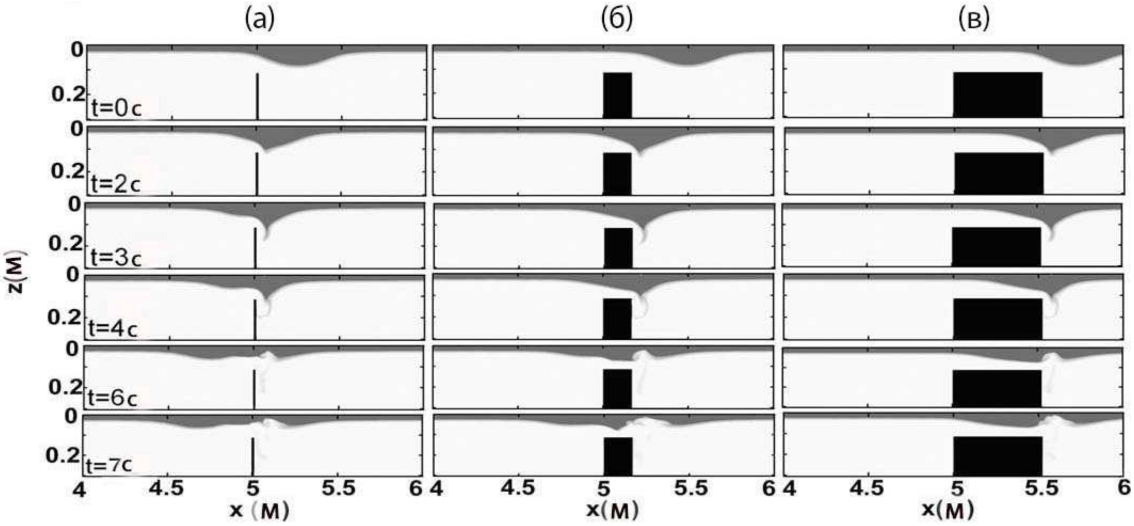

Рисунок 3.52: Вплив довжини перешкоди на трансформацію внутрішньої хвилі над прямокутною перешкодою. (а) - пластина (експеримент 1703c), (б) $L_{obst} = 0.17$ м (експеримент 1703a), (в) $L_{obst} = 0.52$ м (експеримент 1703b).

хвилі були проведені додаткові чисельні експерименти (0104a-b, 1703b-c), що частково відтворюють лабораторні експерименти з роботи [105]. На рис. 3.52 зображено еволюцію внутрішньої хвилі з амплітудою $a = 5.9$ см над перешкодами різної довжини: (a) - пластина (1703c), (b) $L_{obst} = 0.17$ м (1703a), (c) $L_{obst} = 0.52$ м (1703b). Як видно з рис.3.52 процес у фронтальній зоні перешкоди є подібним у всіх трьох випадках. Як видно, амплітуди відбитих від перешкоди хвиль мають майже однакові значення. Основним ефектом, що спричинений різною довжиною перешкоди, є різний характер трансформації хвилі, що проходить за перешкоду. Із збільшенням довжини перешкоди амплітуди хвиль, що пройшли, зменшуються та починають генеруватися вторинні хвилі. Ці результати якісно узгоджуються з аналітичною теорією [108] та з результатами чисельного моделювання [260], [176].

Для того, щоб оцінити баланс енергії після того, як внутрішня хвиля проходить повз перешкоду, була використана методика з розділу 1.4.2. Перетини X_R та X_L зображені на рисунку 3.47.

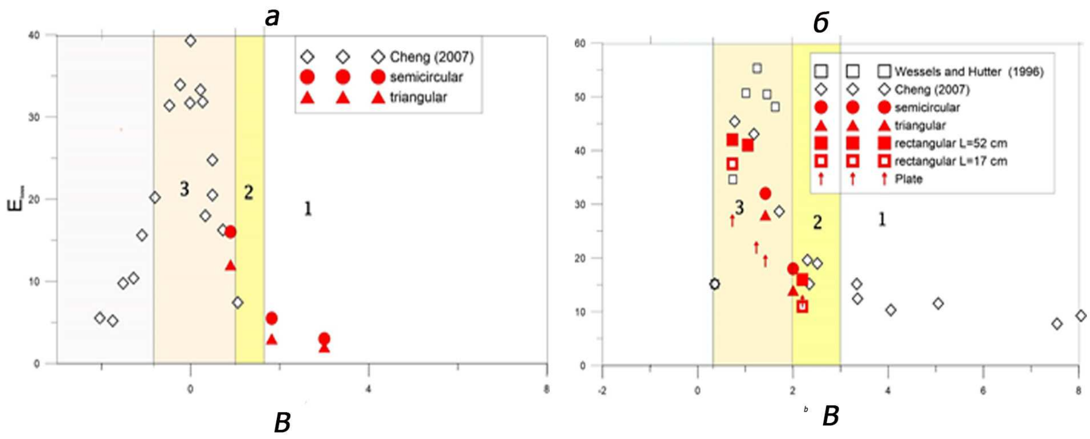

Рисунок 3.53: Залежність втрат енергії від параметра блокування B. (а)-для хвиль підвищення, а (б)-для хвиль пониження.

Таким чином дисипація енергії ΔE_{loss} визначається за формулою (3.19). Залежність втрат енергії за рахунок перемішування, турбулентності та дисипації від параметра блокування B (3.2) зображена на рисунку 3.53, для хвиль-підвищення на рисунку 3.53 (а), а для хвиль-пониження на рисунку 3.53 (б). Як видно з рисунка 3.53 втрати енергії для обох типів внутрішніх хвиль (хвиль-підвищення та хвиль пониження) над трикутною перешкодою відрізняються від відповідних втрат енергії із перешкодою у вигляді півкола. Дисипація енергії та відповідне перемішування, що втрачає хвиля, яка транспортується над перешкодою у вигляді півкола, є більшими аніж при трансформації над трикутною перешкодою.

3.8 Висновки до розділу 3

В розділі представлені задачі динаміки внутрішніх хвиль великої амплітуди першої бароклінної моди. Трансформація внутрішніх хвиль з континентальним схилом може бути характеризована наступними параметрами: амплітудою внутрішньої хвилі, параметром блокування B, який дорівнює відношенню глибини нижнього шару над шельфом і амплітуди хвилі, кутом нахилу континентального схилу. У випадку взаємодії хвиль з підводними перешкодами окрім зазначених параметрів важлива їх форма. Встановлено закономірності трансформації полів швидкості та густини хвиль в залежності від параметру блокування B для опису режимів трансформації внутрішніх усамітнених хвиль над перешкодами та різкими змінами дна. При взаємодії внутрішньої усамітненої хвилі у двошаровій стратифікації з підводною сходинкою в залежності від параметру B описано п'ять різних режимів : (i) слабка взаємодія; (ii) помірна взаємодія; (iii) сильна взаємодія; (iv) перехідний режим; (v) режим повного відбиття. Отримано автомодельні залежності втрат енергії при трансформації внутрішніх хвиль першої моди. Показано, що втрати енергії внутрішньої усамітненої хвилі (як пониження так і підвищення), що трансформується над сходинкою не досягають 50% від енергії падаючої хвилі.

За допомогою чисельного моделювання, яке було представлено в цьому розділі, визначені межі застосовності асимптотичних моделей для опису динаміки внутрішніх усамітнених хвиль першої бароклінної моди. Зокрема показано, що трансформація нелінійних усамітнених внутрішніх хвиль при різких змінах топографії може бути передбачена за допомогою нелінійної теорії Граднера. Аналіз результатів моделювання показав, що різниця амплітуд сильнонелінійних хвиль в разі моделювання за допомогою повністю нелінійній моделі та моделі Гарднера становить близько 4%. Різниця в швидкостях розповсюдження хвилі становить близько 2% для сильнонелінійних хвиль. Встановлено, що при трансформації внутрішніх хвиль на похилому дні залежність втрат енергії при відбитті внутрішньої хвилі від схилу, характеризується числом Ірібарена 3.17. За аналогією з поверхневими хвилями було проведено класифікацію трансформації внутрішніх хвильових режимів за числом Ірібарена. Хоча, повної аналогії між внутрішніми та поверхневими хвилями не має, оскільки повітря має густину в тисячі разів менше, ніж у воді, тоді як різниця густин між шарами води становить близько 10^{-2} кг/м^3 і тому динаміка потоків в обох шарах є суттєвою в процесі формування та трансформації внутрішніх хвиль, що не має відповідності у поверхневих хвиль.

Описано новий сценарій неадіабатичної трансформації внутрішніх хвиль на похилому дні. На першому етапі трансформації виникає нестійкість Кельвіна-Гельмгольца, що призводить до зменшення амплітуди хвилі, після чого хвиля трансформується на схилі без перекидання. В такому сценарії зсувна нестійкість є домінуючим механізмом перетворення хвиль.

Польові спостереження в Південнокитайському морі [219] підтверджують існування такого сценарію обвалення внутрішньої хвилі. У всіх випадках знак завихоренності змінюється при наближенні хвилі до схилу, та відбувається зміна знаку полярності хвилі з хвилі-пониження на хвилю-підвищення. В цьому випадку зсувна нестійкість є домінуючим механізмом перетворення хвиль.

За допомогою аналізу результатів чисельного моделювання та результатів лабораторних експериментів було показано, що вплив тертя на бічних стінках складає меньше 8% і дані лабораторних експериментів можуть бути використані для порівняння полів швидкості та густини без корекції на тертя на стінках, оскільки основна частина розсіювання пов'язана з донним тертям та перемішуваннями на схилі.

В рамках аналізу результатів чисельного моделювання трансформації хвиль над перешкодами та різкими змінами дна для різних типів хвиль, стратифікацій та форми перешкод були одержані автомодельні залежності втрат енергії при трансформації внутрішніх хвиль над цими перешкодами від параметра блокування B. Показано, що зміна довжини перешкоди сильно змінює форму хвилі, що проходить за перешкоду. Із збільшенням довжини перешкоди амплітуди хвиль, що пройшли, зменшуються та починають генеруватися вторинні хвилі. Ці результати якісно узгоджуються з висновками аналітичної теорії [108].

Розділ 4

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА УСАМІТНЕНИХ ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ ДРУГОЇ БАРОКЛІННОЇ МОДИ В ПРИБЕРЕЖНИХ ЗОНАХ

Усамітнені хвилі другої бароклінної моди розповсюджуються в середньому шарі, що міститься між двома іншими шарами постійної густини. Такі хвилі характеризуються асиметричним зміщенням верхніх та нижніх ізопікн в середньому стратифікованому шарі. Так в залежності від зміщення ізопікн в цьому проміжному шарі друга мода може бути як "вгнутою" так і "опуклою" . На рис. 4.1 (б) зображено хвилю другої бароклінної моди "опуклого" типу. Дані спостережень показали [282], [281], що обидва типи хвиль як "вгнуті"так і "опуклі"зустрічаються в океані. Причому хвилі другої бароклінної моди, наприклад, у Південнокитайському морі частіше фіксуються взимку, бо термоклін у цей період більш глибокий (рис.4.1 б). В проекті Variations Around the Northern South China Sea (VANS) [282] було зафіксовано 78 "опуклих"хвиль другої моди та 4 "вгнутих" , такі хвилі показано на (рис.4.1 в,г). Чисельне дослідження внутрішніх хвиль у Кельтському морі [271] довело можливості генерації внутрішніх хвиль вищих мод припливними течіями. Динаміка хвиль другої моди інтенсивно вивчається в лабораторних експериментах [10],[125],[171],[138], та чисельних лабораторних басейнах [241] [265] [248] [217]. Коли проміжний шар в стратифікованих водоймах тонкий, то можуть утворюватися так звані хвилі з захопленими ядрами, які можуть переносити масу на значні відстані. Слабонелінійна теорія усамітнених внутрішніх хвиль другої моди на глибокій воді була розвинена в роботах [62], [218]. Розв'язки рівняння Дюбрей-Жакотен [92] дозволяють описувати усамітнені хвилі великих амплітуд [88]. Особливістю цього розв'язку є можливість існування замкнених ліній току в рухомій системі координат та перенос маси такими хвилями. Спостереження в океані [150] , [229] і пограничному шарі атмосфери (явище " Morning Glory ") продемонстрували важливість цього типу хвиль в перенесені енергії в океані і атмосфері.

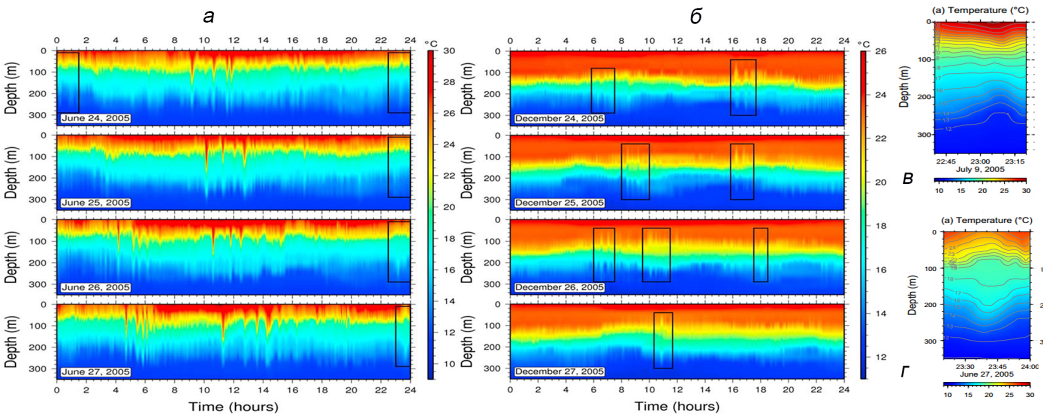

Рисунок 4.1: Спостереження внутрішніх хвиль другої бароклінної моди в Південнокитайському морі (а) - влітку (з 24 червня - 27 червня 2005) (б)- взимку (24–27 грудня 2005), (в) - "опукла"та (г)- "вгнута"внутрішні хвилі [282].

4.1 Механізми генерації внутрішніх усамітнених хвиль другої бароклінної моди

Виділяються кілька основних механізмів генерації хвиль другої моди [281]:

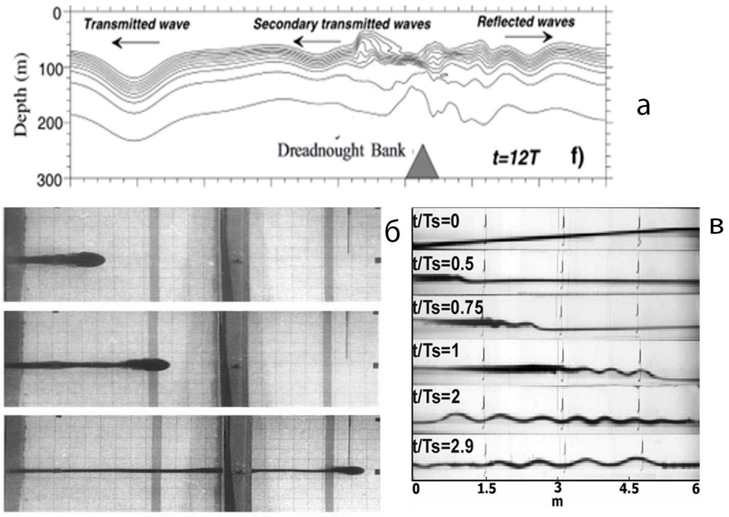

Рисунок 4.2: Приклади генерації внутрішніх хвиль другої бароклінної моди (а)- взаємодія хвиль першої моди з порогом ([268]), (б)- генерація внутрішніх хвиль другої моди інтрузійними потоками в шарі розділу ([178]); (в)- відбиття хвиль першої моди ([126]).

1. взаємодія хвиль першої моди з підводними порогами;
2. взаємодія хвиль першої моди з шельфом;
3. генерація внутрішніх хвиль другої моди інтрузійними потоками в шарі розділу;
4. відбиття хвиль першої моди;
5. генерація хвиль потоком в головному термоклині при обтіканні поглиблення дна.

Тобто поширення симетричного збурення постійної густини в середовищі із двошаровою стратифікацією [16]. У рухомій системі координат рідина в середині хвилі залишалася в спокої. Це явище було виявлено в лабораторних експериментах [88], а потім досліджено експериментально [138] та [191], теоретично [16] та [10] і чисельно [265], [217]. Результати експериментів і розрахунків, однак, продемонстрували ряд істотних особливостей динаміки внутрішніх хвиль другої моди, які потребують подальшого дослідження:

1. Слабонелінійна теорія непридатна для опису сильно нелінійних хвиль. Слабонелінійна теорія [62], [218] передбачає, що довжина хвилі зменшується зі збільшенням амплітуди, в той час, як експерименти показали, що для хвиль великої амплітуди довжина хвиль зростає з амплітудою

2. Навіть невелика асиметрія довгих хвиль другої моди, що поширюються в шарі розділу, призводить до виникнення коротких хвиль першої моди [191], [217], в які і переходить енергія хвиль другої моди [52];

3. Побудовані в рамках теорії ідеальної рідини теоретичні стаціонарні розв'язки для хвиль великої амплітуди із замкненими лініями струму в рухомій системі координат виявились нестійкими [16], [118]. У той же час, хвилі великої амплітуди, що спостерігаються в експериментах, які переносять масу, можуть бути стійкими і еволюціонувати повільно.

4. Внутрішня структура потоків всередині областей з замкненими лініями струму може бути різною: від їх відсутності в системі координат, що рухається з хвилею (" солідон " [16]), до формування вихрової пари [118]. Лабораторні експерименти і чисельні розрахунки продемонстрували складну, багато вихрову структуру цих потоків [138], [178], [265], [248].

Можна припустити, що на стійкість хвиль великої амплітуди і особливості внутрішньої структури цих хвиль впливає відносно мала в'язкість. В цьому розділі чисельно досліджується динаміка симетричних внутрішніх хвиль другої моди у відносно тонкому шарі розділу і структура областей захопленої рідини в них в залежності від амплітуди хвиль і товщини шару розділу.

4.2 Класифікація внутрішніх усамітнених хвиль другої бароклінної моди

Розглянемо динаміку внутрішніх усамітнених хвиль другої бароклінної моди в чисельному лотку. Конфігурація чисельного лотка лабораторних масштабів зображена на рисунку 4.3. Лоток довжиною L та висотою $2H$ заповнений водою, яка стратифікована за солоністю з густиною верхнього однорідного шару ρ_1 і нижнього - ρ_2, розділених тонким шаром розділу. Стратифікація в лотку симетрична щодо середини глибини лотка і описується функцією:

$$\rho\left(z\right) = \rho_0 \left(1 - \frac{\Delta\rho}{2}\tanh\left(\frac{z}{2h}\right)\right), \tag{4.1}$$

h - товщина пікнокліну в шарі розділу. $\Delta\rho = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_0$. Внутрішні хвилі генерувалися колапсом перемішаної області з густиною ρ_0. Створена таким чином хвиля поширюється в пікноклині зліва направо, і її характеристики залежать від об'єму перемішаної області та від товщини пікноклину h. Для того, щоб простежити за переносом маси, початковий об'єм перемішаної рідини з густиною ρ_0 фарбувався пасивною домішкою. Основні характеристики хвилі, які використовувалися при аналізі, наведені на рисунку 4.3. Хвиля характеризується амплітудою a, яка визначається як максимальне відхилення ізопікни, і довжиною хвилі λ, яка дорівнює половині відстані, на якій амплітуда хвилі зменшується вдвічі. Горизонтальний розмір інтрузії (області,яка переносить масу) l_0 визначений як половина максимальної горизонтальної відстані інтрузії. Висота інтрузії визначалася як відстань від осі симетрії до границі області (ядра), яке переносить масу. Фазова швидкість хвилі U_c обчислювалася як швидкість вершини хвилі, тоді як U_m - максимальна швидкість у вертикальному перерізі хвилі.

Згідно методології, що описана в роботі [265], оберемо в якості визначальних

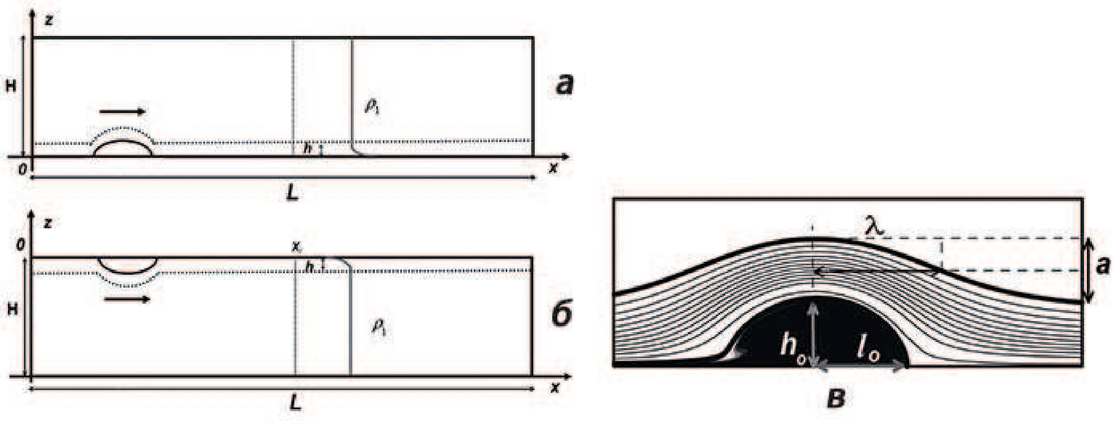

Рисунок 4.3: Схема чисельного експерименту (а)-(б), основні характеристики хвиль, що використовуються при аналізі (в).

масштабів швидкості та довжини фазову швидкість довгих лінійних хвиль другої моди C, яка визначається як:

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{gh\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho}}, \tag{4.2}$$

та товщину пікнокліну h. Тоді як характерний час визначається як $\tau_0 = \sqrt{\rho_0 h/\Delta\rho g}$. Рівняння (1.1)-(1.3) перепишуться у безрозмірному вигляді як:

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_j\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j} - 4, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_j\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{1}{\mathrm{Re\ Sc}}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_j^2}, \tag{4.5}$$

де число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = C_h/\nu. \tag{4.6}$$

число Шмідта

$$\mathrm{Sc} = \nu/\chi. \tag{4.7}$$

Ще один безрозмірний параметр з'являється в граничних умовах на нижній та верхній границях області:

$$\varepsilon = H/h. \tag{4.8}$$

Але, як випливає з (4.3)-(4.5) в ідеальній рідині ($\mathrm{Re} = \infty$) і у нескінченому шарі води ($\varepsilon = \infty$) в рівняннях не містяться безрозмірні параметри подібності та розв'язки рівнянь автомодельні у [1]. Однак, в загальному випадку можна очікувати, що залежність від безрозмірних параметрів збережеться при ($\mathrm{Re} \to \infty$) і $\varepsilon \to \infty$ і автомодельність цим параметрам буде неповною [1]. Можна визначити два безрозмірних параметра, які характеризують динаміку хвиль кінцевої амплітуди: число Фруда і ефективне число Рейнольдса. Число Фруда Fr_m визначається як відношення максимальної локальної швидкості U_m до фазової швидкості хвиль U_c

$$\mathrm{Fr}_m = \frac{U_m}{U_c}. \tag{4.9}$$

Ефективне число Рейнольдса Re_{eff} визначається як:

$$Re_{eff} = \frac{U_m}{\nu_{eff}}, \tag{4.10}$$

де для серії лабораторних експериментів $\nu_{eff} = \nu$, а для океанічних масштабів $\nu_{eff} = K_M$. K_M знаходиться з моделі, що описана в розділі 2.2.3. Важливим параметром, який характеризує стійкість хвиль є число Річардсона (1.47). Розрахунки проводились в чисельному лотку із довжиною $L = 3$ м та висотою $2H = 0.92$ м Солоність у верхньому та нижньому шарах задавалась $S_1 = 0$, $S_2 = 30$, відповідно, при постійній температурі $T = 20^o\ C$. Тоді $\rho_0 = (\rho_2 + \rho_1)/2 = 1009.5$ кг/м^3 и $\Delta\rho = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_0 = 0.022$, молекулярна в'язкість $\nu = 1.14 \cdot 10^{-6}$ м^{2}с$^{-1}$ та молекулярна дифузія солі $\chi = 10^{-9}$ м^{2}с$^{-1}$. Було проведено п'ять серій розрахунків із товщинами пікноклину h=0.005, 0.01, 0.02,10,20 м . В кожній серії розрахунків буди отримані різні набори хвиль різних амплітуд a, які характеризуються безрозмірною швидкістю U_c/C, числом Фруда Fr_m (4.9), Рейнольдса Re_{eff} (4.10) і мінімальним значенням числа Річардсона Ri_{min} (1.47). Задача розв'язувалась в квазідвовимірній постановці, коли рівняння дискретизувались в декількох вузлах поперек басейну за умови ковзання на бічних стінках басейну. На вільній поверхні дотичні напруження відсутні, а на дні використовуються умови прилипання. Роздільна здатність сітки за довжиною, висотою і шириною становила $3000 \times 600 \times 5$ вузлів або $0.12 \times 0.08 \times 0.12$ см.

Попередні розрахунки, проведені для різних значень h_0 і амплітуд хвиль показали, що відмінність між результатами розрахунків практично відсутні при $\varepsilon > 10$, що свідчить про повну автомодельність задачі за параметром $\varepsilon \to \infty$. Крім того, результати розрахунків для обраних параметрів обчислювального лотка і хвиль, що генеруються для всього лотка і для верхньої половини області (рис. 6.6 б) практично збігаються, тобто вплив дна і вільної поверхні малий. Тому наведені нижче результати одержані для симетричної постановки задачі,яка виключає можливість появи першої моди, що представляє собою осцилюючий цуг хвиль, який спостерігається в лабораторних експериментах (напр. [241], [178]).

На рис. 4.14 представлено порівняння розрахованих фазових швидкостей і довжин хвиль в залежності від амплітуди хвиль для перетину x_l з даними експериментів і теоретичними співвідношеннями. Згідно слабонелінійної теорії [62] для стратифікації, що описується співвідношенням (4.1), залежності для фазової швидкості і довжини хвиль мають вигляд:

$$\frac{U_c}{C} = \sqrt{1 + \frac{3a}{5h}}, \tag{4.11}$$

$$\frac{\lambda}{h} = \frac{5h}{2a}, \tag{4.12}$$

де a - амплітуда хвилі, λ - половина довжини хвилі (див. рис. 4.3). Профіль усамітнених хвиль описується алгебраїчним розв'язком Бенджаміна-Оно (1.124) [62].

Згідно (4.11)-(4.12) фазова швидкість спадає із зростанням амплітуди, тоді як довжина хвилі спадає. З рис. 4.4 випливає, що результати моделювання та експерименти добре описуються слабонелінійною теорією при $a/h < 1$. Профіль усамітненої хвилі, яка описується алгебраїчним розв'язком Бенджаміна-Оно, узгоджується із чисельним розв'язком рівняння Нав'є- Стокса. Однак, як випливає із рис. 4.4 для $a/h > 1$, довжина хвилі зростає із збільшенням амплітуди, а фазові швидкості суттєво відхиляються від передбачених слабонелінійною теорією. Для усталених хвиль великих амплітуд чисельні розв'язки рівняння Дюбрейль-Жакотен [92] передбачають існування замкнених ліній струму в рухомій системі координат і перенос маси такими хвилями. У граничному випадку, такому як двошарова стратифікація, швидкість симетричного збурення постійної проміжної густини знаходиться зі співвідношення [16], перенормованому в [265] на параметри шару розділу:

$$\frac{U}{C} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha_{ratio}}}\sqrt{\frac{h_0}{h}}, \tag{4.13}$$

де α_{ratio} – відношення максимальної висоти інтрузії h_0 до її довжини $2l_0$

$$\alpha_{ratio} = \frac{h_0}{2l_0} = 0.232, \tag{4.14}$$

постійна β =0.622. Розв'язок [16] демонструє, що форма цих інтрузій подібна і співвідношення висоти h_0 до її довжини $2l_0$ є константою. Незважаючи на суттєву ідеалізацію механізмів динаміки, розв'язок [16] описує залежність швидкості розповсюдження довгих хвиль від амплітуди в діапазоні $1 < a/h < 5$. Не тільки інтрузії, але і самі хвилі з амплітудами $1 < a/h < 5$, подібні за формою. Така "подібна" поведінка хвиль також була відмічена в статтях ([227],[241]). В роботі [241] результати експериментів були апрокси-

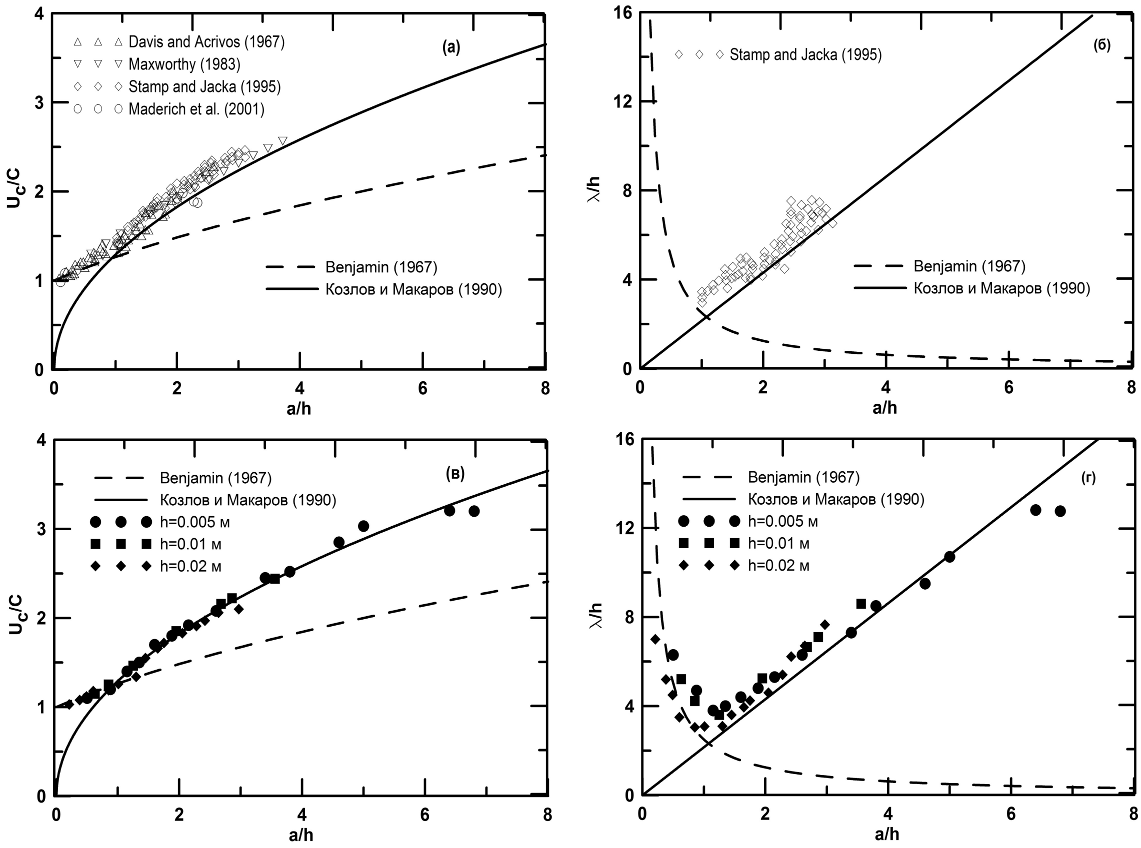

Рисунок 4.4: Експериментальна та обчислена залежність фазової швидкості (а),(в) і відповідно довжини хвилі (б)(г) від амплітуди.

мовані лінійною залежністю довжини хвилі від амплітуди:

$$\lambda = 0.95 + 2.1a, \tag{4.15}$$

з відношенням довжини хвилі до амплітуди 2.1, близьким до розв'язку (4.14).В той же час, при $a/h > 5$ теоретичні криві [16] відхиляються від результатів моделювання, згідно яких швидкість та довжина хвиль перестають залежати від амплітуди хвиль. Відзначимо, що результати експериментів та чисельних розрахунків фазової швидкості та довжини хвиль демонструють повну автомодельність по параметрам Re и ε.

Змінам в інтегральних характеристиках хвиль (швидкість і довжина хвилі) відповідають зміни у внутрішній структурі хвиль. На рис. 4.5 наведено розподіл у вертикальних перетинах вздовж хвиль поля солоності і пасив-

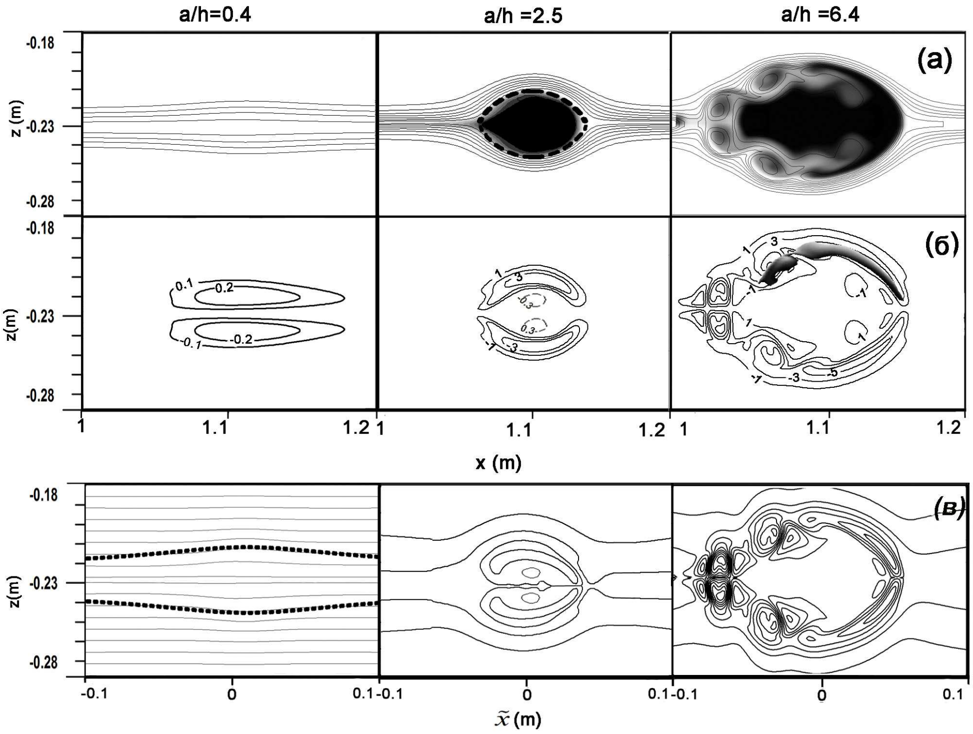

Рисунок 4.5: Розподіл поля солоності та пасивної домішки (у вертикальних перетинах вздовж хвилі)(а), завихоренності (б) і поля ліній струму в рухомій системі координат $\tilde{x} = x - U_c t$ (в), для характерних висот хвиль $a/h = 0.4; 2.5; 6.4$ в серії 1 (h_0 =0.5 см). Решта позначень в тексті.

ної домішки (а), завихоренності (б) та поля ліній струму в рухомій системі координат $\tilde{x} = x - U_c t$ (в), для трьох характерних висот хвиль $a/h = 0.4; 2.5; 6.4$ для серії 1 (h_0 =0.5см). Відповідні вертикальні профілі горизонтальної швидкості через центр хвилі наведені на рисунку 4.6. Хвилі малих амплітуд $a/h = 0.4$ рухаються без захвату рідини в ядрі. Лінії струму в рухомій системі координат розімкнені, та непогано описуються в рухомій системі координат алгебраїчним розв'язком рівняння Бенджаміна-Оно (1.124), зображений пунктирною лінією на рис.4.5в. Хвиля малої амплітуди на рисунку 4.5 (б) представляє собою пару областей завихоренності різного знаку. Вертикальний профіль швидкості на рисунку 4.6а демонструє наявність максимуму на вісі симетрії, який, однак, набагато менше швидкості руху хвиль. Поведінка хвиль змінюється коли максимум локальної швидкості перевищує

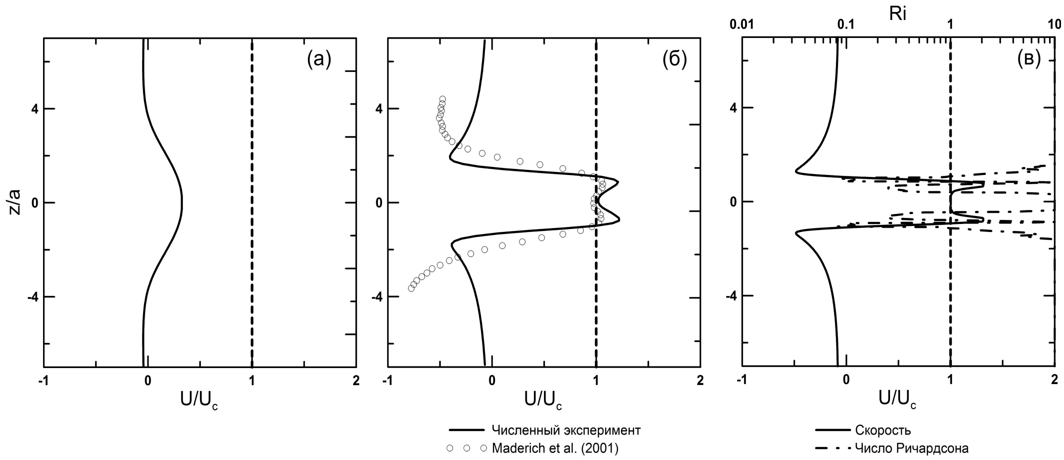

Рисунок 4.6: Розраховані вертикальні профілі горизонтальної швидкості по центру хвилі для амплітуд хвиль $a/h = 0.4$ (а), $a/h = 2.5$ (б) і $a/h = 6.4$ (в) в серії 1 ($h_0 = 0.5$ см). На (б) наведено порівняння з лабораторним експериментом [178]. На (в) наведено розподіл числа Річардсона Ri.

фазову швидкість хвиль ($\mathrm{Fr} > 1$), що досягається при $a/h > 1.5$. Як випливає з рис. 4.5 в хвилях великої амплітуди ($a/h = 2.5$) лінії струму утворюють замкнений контур (інтрузію), всередині якого переноситься рідина. На вертикальному профілі швидкості на рис. 4.6 (б) можна побачити область в якій швидкості більші, аніж швидкість руху хвиль, а відповідне число Фруда ($\mathrm{Fr} = 1.22$). На рисунку 4.5 а контур області з замкненими лініями струму порівняний із розв'язком [16],що зображений пунктиром. Як випливає з рисунка, обидва контури майже співпадають. Наявність відносно невеликої в'язкості в численних розрахунках ($\mathrm{Re}_{eff} = 850$) стабілізує розв'язок [16]. Однак, на відміну від цього розв'язку, рідина всередині замкненої області не перебуває в спокої і інтрузія не є "солідоном" [16]. Слабка циркуляція всередині інтрузії (рисунок 4.5 б) може мати структуру із двома вихрами або із чотирма [265], [178]. На рисунку 4.7 б із вертикальними профілями швидкості на наявність циркуляції вказує провал швидкості на осі симетрії. Результати розрахунків підтверджується даними вимірів швидкості в лабораторному експерименті [178]. Наявність циркуляції всередині інтрузії, обумовлена баро-

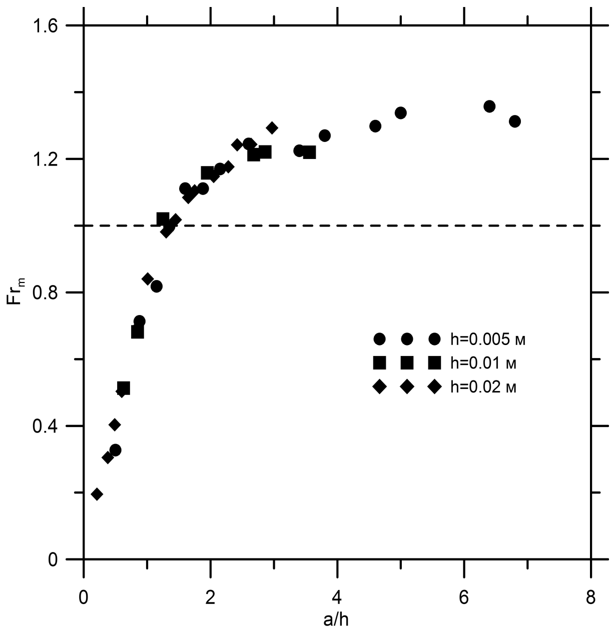

Рисунок 4.7: Залежність числа Фруда (4.9) від нормованої амплітуди a/h для різних значень h .

клінними силами, адвекцією завихоренності та в'язкістю [178], що призводить до поступового відтоку маси інтрузії та захопленню рідини з навколишнього потоку. У той же час мінімальне число Річардсона в хвилі становить близько 0.35.

При $a/h > 5$ хвиля стає нестійкою. На рисунку 4.5 представлено розподіл солоності, скаляра, ліній струму і завихоренності для хвилі з амплітудою $a/h = 6.4$. Мінімальне значення числа Річардсона Ri_{min} на границі інтрузії падає до значення 0.08 (рисунку 4.7 в), що значно менше критичного значення числа Річардсона для лінійної нестійкості, що передбачається теорією для паралельних стратифікованих потоків [127], [201]. Зсувна нестійкість призводить до формування вихорів Кельвіна-Гельмгольца (КГ). Порівняння масштабу вихорів КГ λ_{KH} до товщини шару розділу Δh становить $\lambda_{KH}/\Delta h \approx 8$, що узгоджується як з значенням 7.5 в теорії паралельних стратифікованих потоків [127], так і з значенням 7.9 з лабораторного експерименту [99] для хвиль великої амплітуди.

Нерівномірність потоку в усамітненій хвилі призводить до того, що використання класичного критерію нестійкості (1.48) як індикатора, може бути недостатнім. На рисунку 4.5 показано горизонтальний розподіл потенційно нестійких областей (“ кишень ” [99]), в яких $Ri < 0.25$. Горизонтальний розмір L_x кишені з $Ri < 0.25$ є корисним прогностичним показником нестійкості [99], так як він характеризує горизонтальну протяжність, де може розвиватися нестійкість. Запропоноване для хвиль першої моди [99] емпіричне співвідношення $L_x/\lambda = 0.86$ відокремлює потенційно стійкі ($L_x/\lambda < 0.86$) від нестійких областей. Обчислене для хвилі другої моди на рис 4.5 б значення L_x/λ дорівнює 0.76, що нижче критичного значення для хвиль першої моди. Це свідчить про відмінності в механізмах нестійкості: у випадку хвиль першої моди, шар розділу відокремлює два різноспрямовані потоки (рис.10 в роботі [176]), тоді як для хвиль другої моди, шар розділу відокремлює внутрішнє захоплене ядро зі слабкою циркуляцією від зовнішнього потоку (Рис. 4.7 в). Аналогічні оцінки ($L_x/\lambda = 0.37 \div 0.8$) були отримані [118] для хвиль із нестійкими ядрами.

Як показано на рис. 4.7 зі зростанням амплітуди хвилі число Фруда Fr_m (1.47) спочатку майже лінійно зростає, а при $a/h > 1.5$ швидкості в хвилі стають надкритичними $\mathrm{Fr}_m > 1$ (рис.4.7), що спричиняє формування захоплених ядер з наявними областями рециркуляції. В подальшому зростання числа Фруда сповільнюється, і у діапазоні $2 < a/h < 5$ воно стає майже константою зі середнім значенням 1.21, що дещо перевищує критичне значення $\mathrm{Fr}_m = 1$, тоді як число Рейнольдса Re_{eff} збільшується в цьому діапазоні майже в 4 рази. Це вказує на гідравлічний саморегулюючий механізм розповсюдження хвиль із захопленими ядрами. Зазначимо, що для “солідона” [16] значення числа Фруда для хвиль із захопленими ядрами $\mathrm{Fr}_m \equiv 1$. Як випливає з рис.4.7, параметр Fr_m також демонструє повну автомодельність по параметру Re.

4.3 Неповна автомодельність внутрішніх хвиль другої моди в шарі розділу

Як випливає з рис. 4.8а залежність мінімального числа Річардсона у хвилі Ri_{min} від амплітуди хвиль $a/h = 2$ не є автомодельною. Для більш широкого пікнокліну число Річардсона спадає швидше. Як випливає з рис. 4.8, в хвилях малої амплітуди Ri_{min} швидко спадає із ростом a/h. Потім, в діапазоні існування хвиль із стійкими ядрами значення Ri_{min} до 0.1 при $a/h = 5$, при якому виникає нестійкість. Ця оцінка початку нестійкості близька до оцінок, отриманих в лабораторних експериментах $\mathrm{Ri}_{min} = 0.075 \pm 0.035$ [264] и $\mathrm{Ri}_{min} = 0.092 \pm 0.016$ [99] та отриманими в лабораторних експериментах та $\mathrm{Ri}_{min} = 0.10$ в чисельних розрахунках [57] [176] для хвиль першої моди. Відмітимо, що границя між стійкими та нестійкими інтрузіями відповідає $a/h \approx 5$ для $h = 0.5$ см, $a/h \approx 5$ для $h = 1$ и $a/h \approx 5$ для $h = 2$, що відповідає режимам при різних числах Рейнольдса. Для хвиль скінченої амплітуди мінімальне число Річардсона $\mathrm{Ri}_{min} = \Psi(a/h)Re_{eff}$. Якщо припустити неповну автомодельність по параметру Re_{eff} отримаємо залежність

$$\mathrm{Ri}_{min} = Re_{eff}^{n}\Psi(a/h), \tag{4.16}$$

де n – показник степені. Як випливає з рисунка 4.8 (б) дані розрахунків можуть бути апроксимовані універсальною ступеневою залежністю

$$\mathrm{Ri}_{min} = A(a/h)^{m}Re_{eff}^{n}, \tag{4.17}$$

де $m = n = 1.25$, константа $A = 1.25$. Критичне значення $\mathrm{Ri}_{min} = 0.10$ на цій кривій досягається при $(a/h)Re_{eff} \approx 5000$. В подальшому число Ri_{min} зменшується, призводячи до підсилення нестійкості та інтенсивному розмиву інтрузії при майже постійному значенні числа Фруда Fr (рис. 4.7). Таким чином, в залежності від значень параметрів Fr и Ri_{min} можна виділити три

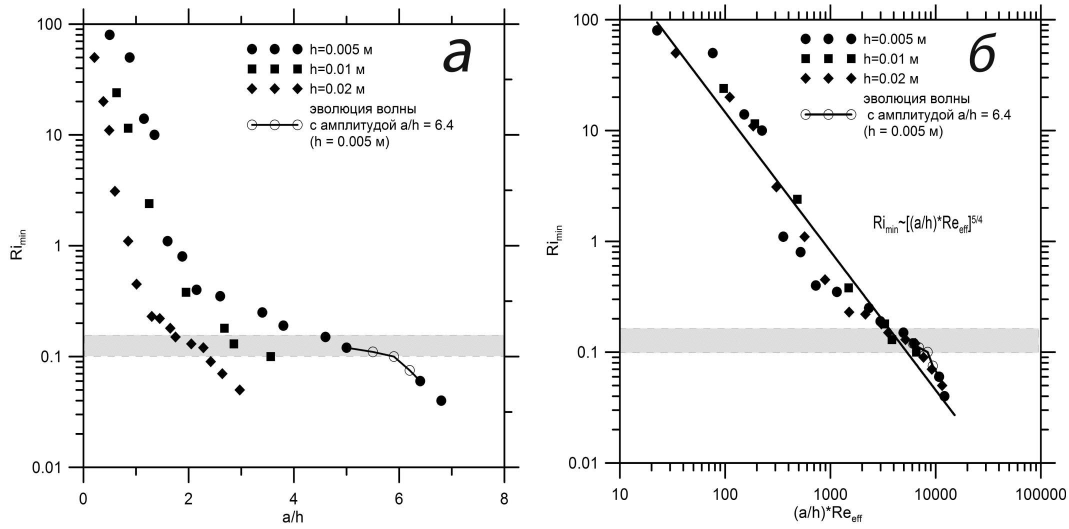

Рисунок 4.8: Залежність мінімального числа Річардсона Ri_{min} (1.47) від амплітуди хвиль (а) і ефективного числа Рейнольдса Re_{eff}. Штрихова лінія $\mathrm{Ri}_{min} = 0.1$ розділяє стійкі і нестійкі хвилі.

основних класи симетричних хвиль другої моди, що розповсюджуються в шарі розділу між двома однорідними за густиною шарами рідини: (а) слабонелінійні хвилі при $\mathrm{Fr} < 1$, (б) стійкі хвилі при $\mathrm{Ri}_{min} > 0.1$ и $\mathrm{Fr} \approx 1.2$ та (в) нестійкі хвилі при $\mathrm{Ri}_{min} \leq 0.1$.

Необхідно підкреслити, що хвилі в кожному з виділених класів еволюціонують з різною швидкістю під дією різних механізмів. На рисунку 4.9а приведена нормалізована безрозмірна швидкість затухання внутрішніх хвиль в залежності від безрозмірної амплітуди хвиль. Як видно з малюнка і в цьому випадку немає повної автомодельності, однак автомодельності немає і для перенормованної залежності, що показана на рисунку 4.9 а, це вказує на різні механізми дисипації для різних класів хвиль. В цілому, одержані за допомогою чисельного моделювання залежності узгоджуються з доступними даними експериментів [241] і чисельними розрахунками [248]. Для даної задачі максимальна швидкість затухання характерна для слабонелінейних хвиль, для яких число Рейнольдса невелике. Швидкість загасання для хвиль зі стійкими та нестійкими ядрами майже постійна і истотно менше, ніж для слабонелінiй-

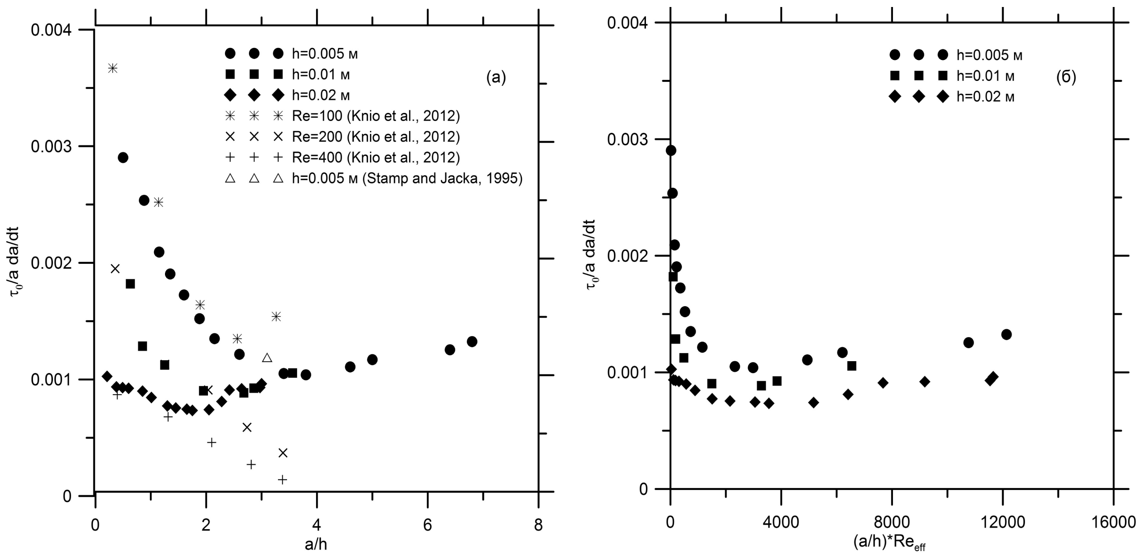

Рисунок 4.9: Відносна швидкість затухання амплітуди хвиль в залежності від амплітуди хвилі(а) та ефективне число Рейнольдса (б).

них хвиль, незважаючи на те, що головним механізмом дисипації енергії і перемішування у випадку хвиль з нестійкими ядрами є нестійкість Кельвіна-Гельмгольца. Для тривалих експериментів, для великих значень часу амплітуда слабонелінійних хвиль затухає за рахунок в'язкості, стійкі інтрузії повільно розмиваються потоком, що оточує ядра, та внутрішньою циркуляцією, що призводить до втрати маси яку переносять хвилі і в кінцевому підсумку це призводить до перетворення в хвилі, у якої значення числа Фруда стають докритичними. У свою чергу нестійкі хвилі також втрачають масу за рахунок перемішування вихрами Кельвіна- Гельмгольца і через деякий час стають стійкими хвилями, що переносять масу. Аналогічно еволюціонували хвилі із захопленими ядрами в лабораторних експериментах в роботі [178] та в чисельному експерименті [118], коли в початковий момент хвиля описувалася розв'язком рівняння Дюбрей-Жакотен [92].

Було проведено чисельний експеримент, щоб перевірити збіжність чисельних розв'язків. Порівняння розрахунків в тестових конфігураціях із роздільною здатністю 4000×1000 вузлів та 2000×600 вузлів, для випадку $a/h = 4$

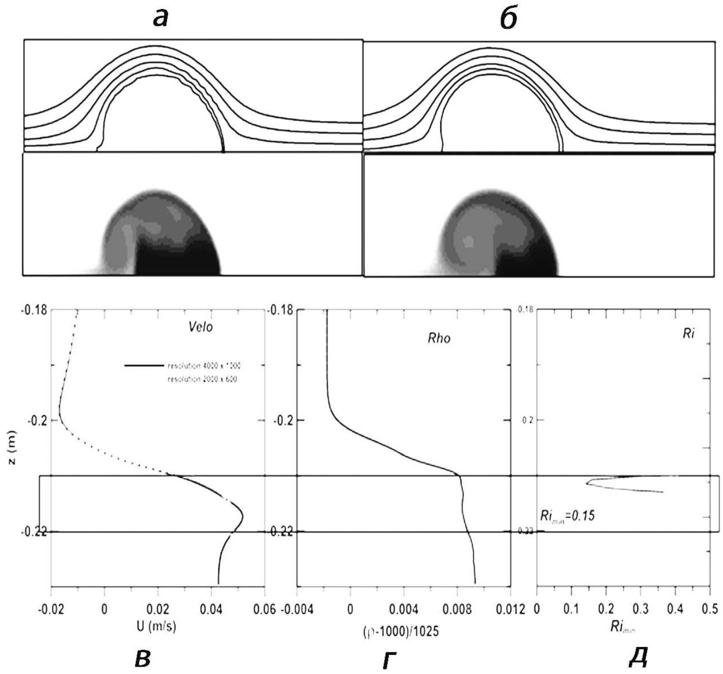

Рисунок 4.10: Порівняння розрахунків в тестових конфігураціях із роздільною здатністю 4000×1000 вузлів та 2000×600 вузлів, для випадку $a/h = 4$. (а) і (б) поле густини та пасивної домішки, (в) - порівняння профілю горизонтальної швидкості в перетині хвилі, (г) - порівняння профілю густини, (д) - порівняння чисел Річардсона.

показано на рисунку 4.10. Як видно з малюнку якісна різниця невелика, а кількісна різниця в максимальній швидкості складає 5%, а значення чисел Річардсона складають для випадку (3000×600) $Ri_{min} = 0.151$, (4000×1000) $Ri_{min} = 0.147$, тобто різниця складає 3%

4.4 Моделювання взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль другої моди зі сходинкою на дні. Новий механізм генерації брізероподібних усамітнених хвиль.

В розділі 3.1 вивчалась взаємодія усамітнених хвиль першої моди із дном, що різко змінюється (сходинкою на дні). Там розглядались як хвилі-пониження так і хвилі підвищення. В цьому розділі дослідження взаємодії хвиль зі сходинкою розширюється на випадок хвиль другої бароклінної моди, що розповсюджуються у тришаровій стратифікації. Як вже було описано, в тришаровій стратифікації окрім внутрішніх усамітнених хвиль першої та другої мод, існування яких підтверджується в рамках рівнянь Ейлера [92], існує інший тип квазістаціонарних внутрішніх хвиль, а саме внутрішніх брізероподібних хвиль, які є пакетами внутрішніх хвиль із стаціонарними обвідними див. розділ 1.3.3. Існування брізерів довгих хвиль було показано в рамках асимптотичної теорії для слабкої нелінійності та слабкої дисперсії в роботі [224] для специфічних типів стратифікацій. Це також було підтверджено для випадку повних рівнянь Ейлера в роботі чисельно. Приклади таких хвиль спостерігаються в Кельтському морі [271], [272], та в Андаманському морі [215]. Брізероподібні хвильові пакети спостерігаються також на шельфі Орегону [156]. Ці внутрішні брізери тісно пов'язані із модуляційною нестійкістю внутрішніх хвиль [109], [111],[112], [113], [256]. Перше доведення існування модуляційної нестійкості для короткохвильових груп хвиль було наведено в роботі [204]. Асимптотична теорія довгих, слабонелінійних хвиль, що основана на рівнянні Гарднера [124] та [123] також передбачає модуляційну нестійкість довгих внутрішніх хвиль [109], [111], [112] для окремих типів стратифікацій та можливість генерації внутрішніх довгих бізерів для цих стратифікацій. Умови, при яких виникає модуляційна нестійкість для довгих внутрішніх брізероподібних хвиль, були виведені в роботах [226], [256], [149], [164]. Існування брізероподібних хвиль було продемонстровано в чисельних експериментах з трансформації хвиль на шельфі Південнокитайського моря в роботах [111], [112], а в роботі [272] було продемонстровано появу брізероподібних хвиль при розповсюдження припливів на шельфі Кельтського моря. На жаль, на даний момент немає теорії, а також експериментальних даних, які б підтверджували існування модуляційної нестійкості та утворення брізероподібних хвиль в діапазоні проміжних хвиль, довжина яких порівняна з глибиною водойми. У літературі можна знайти лише спостереження хвильового пакету із проміжною довжиною хвиль, що поширюється у тонкому проміжному шарі [163] за хвилями першої моди (зазвичай швидкість брізероподібних пакетів менша за швидкість внутрішніх усамітнених хвиль першої моди). Довжина пакету становить близько 120 м, що приблизно вдвічі перевищує глибину моря в цьому місці, і це є проміжною довжиною хвилі між мілкою водою та глибоководним хвилями на глибині близько 70 м. Генерація брізероподібних пакетів внутрішніх хвиль у рамках моделі мКдВ може бути пов'язана з процесом нелінійного перетворення імпульсу зі змінними знаками, [84], або ж брізер може з'явитися внаслідок затухання хвиль, наприклад, [109]. Брізери для рівняння КДв мають інтеграл нульової маси. Брізер в рамках рівняння Гарднера, зазвичай, має позитивний чи негативний інтеграл; в рамках повних рівнянь Ейлера маса брізероподібного пакету також повинна бути відмінною від нуля.

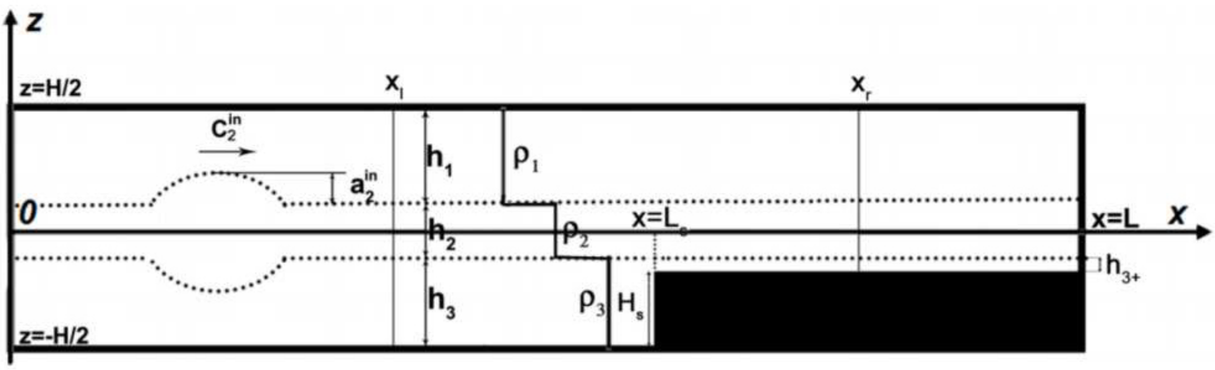

Рисунок 4.11: Схема чисельного експерименту.

Конфігурація численного лотка показана на рисунку 4.11. Лоток довжини L та висоти $H = 0.46$ м заповнено рідиною із тришарової стратифікацією з густиною верхнього шару ρ_1 та глибини h_1. При цьому густина нижнього шару дорівнює ρ_3 та глибина h_3. Ці шари розділені тонким шаром h_2 з густиною $\rho_2 = (\rho_1 + \rho_3)/2$. На відстані L_s від лівого торця стіни знаходиться підводна сходинка, висота якої H_s. Товщина нижнього шару над сходинкою h_{3+}. До підводної сходинки стратифікація симетрична $h_1 = h_3$. Характеристики хвиль до та після взаємодії фіксувались в перетинах x_l и x_r відповідно, ці перетини знаходяться на відстані 0.3 від сходинки. Було виконано дві серії чисельних експериментів, а саме із товщинами шарів розділу: $h_2 = 0.01$ м (серія 1), и $h_2 = 0.04$ м (серія 2) та різними амплітудами хвиль, що набігають на сходинку $a_{in} = 0.03$ м та $a_{in} = 0.05$ м відповідно. Амплітуда a_2^{in} визначається як максимальне відхилення верхньої та нижньої ізопікни $\rho_u = (\rho_2+\rho_1)/2$ та $\rho_l = (\rho_3+\rho_2)/2$, які рівні. Довжина хвилі λ_2^{in} визначається як половина відстані, на якій амплітуда хвилі зменшується вдвічі. Серії 1 і 2 містять 18 та 13 експериментів, відповідно, для різної висоти підводної сходинки H_s. Внутрішня усамітнена хвиль в експерименті генерувалась методом колапсу перемішаної області із густиною ρ_2 біля лівої стіни чисельного басейну, як в лабораторному експерименті [141]. Кожна серія містила 15 експериментів, в яких варіювалась висота сходинки H_s. Лінії струму та поле ізопікн для цих двох хвиль представлено на рисунку 4.12. Параметри чисельного басейну і характеристики хвиль, що генеруються, для двох серій експериментів наведено в таблиці 4.1.

Табл. 4.1: Характеристики чисельного басейну і характеристики хвиль, що генеруються для двох серій чисельних експериментів (значення дані в метрах)

N	L	L_s	h_2	a_{in}	λ_{in}	H_s
1	7	1.5	0.01	0.03	0.12	$0.1 - 0.23$
2	15	2	0.04	0.05	0.25	$0.1 - 0.23$

Фазова швидкість хвилі обчислюється як швидкість вершини хвилі. Швидкість хвилі, що набігає на сходинку позначається C_{in}. Значення фазової швидкості за сходинкою C_1 - першої моди, C_2 - другої моди. Молекуляр-

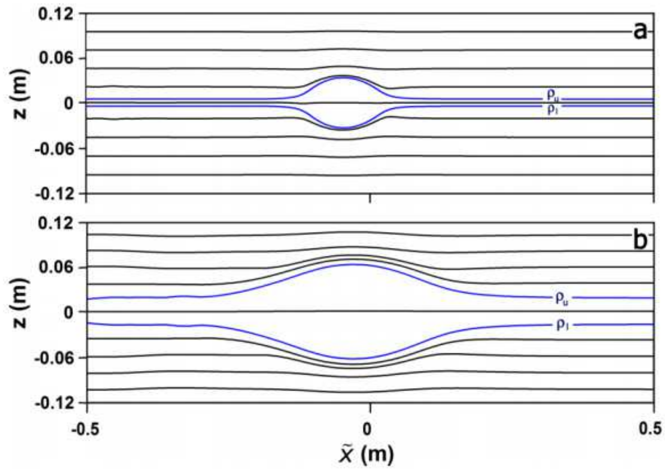

Рисунок 4.12: Лінії току хвилі перед сходинкою у рухомій системі координат для серії 1 (a) та 2 (b).

на в'язкість задавалася рівною $\nu = 1.14 \cdot 10^{-6}\,\text{м}^2\,\text{с}^{-1}$ і молекулярна дифузія солі $\chi = 10^{-9}\,\text{м}^2\,\text{с}^{-1}$. Задача розв'язувалася в квазідвовимірній постановці, коли рівняння дискретизувалися в декількох вузлах поперек басейну, а на бічних стінках задавалися умови ковзання. Роздільна здатність сітки по довжині, висоті і ширині становить $3000 \times 300 \times 5$ вузлів.

Лінії струму хвилі перед сходинкою у рухомій системі координат для серії $\hat{x} = xC_2^{in}$ зображено на рис. 4.12. Хвиля другої моди, що набігає на сходинку, - це хвиля великої амплітуди по відношенню до проміжного шару $(2a_2^{in}/h_2 = 6, 2\lambda_2^{in}/h_2 = 24)$ в басейні із проміжною глибиною. Усамітнені хвилі другої моди, що розповсюджуються у тонкому неперервно стратифікованому шарі можуть переносити масу при $2a_2^{in}/h_2 > 1$ (див. роботи [248], [70] та [173]). В рамках кожної серії чисельних експериментів варіювалась висота сходинки H_s. Важливий параметр, який характеризує динаміку взаємодії - параметр блокування (3.2), який було введено в розділі 3 для усамітнених внутрішніх хвиль першої моди. Залежність втрат енергії при взаємодії хвиль першої моди з сходинкою була описана за допомогою цього параметру. Було показано, що ця залежність є автомодельною і подібна як для хвиль-підвищення, так і для хвиль-підвищення. Для даної задачі, де стратифікація не двошарова, цей коефіцієнт має форму:

$$B = h_{3+}/a_{in}, \tag{4.18}$$

де h_{3+} - як і для визначення для хвиль першої бароклінної моди (3.2) - глибина нижнього шару над сходинкою. В таблиці 7.12 представлена швидкість розповсюдження хвиль після проходження сходинки в перетині x_r де C^1_{tr} та C^2_{tr} - швидкості хвиль першої та другої моди, відповідно, C^{br}_{tr} - швидкість розповсюдження брізероподібного пакету. Відповідні значення амплітуд a^1_{tr} a^2_{tr} a^{br}_{tr} та довжин хвиль λ^1_{tr} λ^2_{tr} λ^{br}_{tr} також представлено в таблиці 7.12. Діаграми Ховмюллера ($(x-t)$ - діаграми) - це зміщення ізопікни ρ_u в просторі і часі, зображені на рис. 4.13. Вони ілюструють процес трансформації другої моди над сходинкою на дні для різних висот сходинки та параметру B (чисельні експерименти 1.1-1.3, 1.5, 1.17, 1.18). Положення сходинки на рис. 4.13 відмічено пунктиром. Коли висота підводної сходинки мала у порівнянні з величиною H_s/h_3 (експерименти 1.1-1.6) усамітнена хвиля другої моди трансформується за сходинкою також у другу бароклінну моду, за якою формується брізероподібні пакети внутрішніх хвиль. Нелінійна групова швидкість розповсюдження брізероподібних хвильових пакетів C^{br}_{tr} для цих випадків менше, ніж нелінійна швидкість поширення одиночної хвилі другої моди C^2_{tr}. Із зростанням висоти сходинки за нею утворюється хвиля першої бароклінної моди з амплітудою 0.0002 м для експерименту 1.2 $(H_S = 0.06)$. Як видно з рис. 4.13 ці хвилі стають помітними при $H_s > 0.15$ м. При цьому нелінійна швидкість поширення брізероподібних пакетів і другої моди стають майже однаковими, демонструючи відносно стійкі особливості одиночних хвиль в діапазоні $0.1\,\text{м} < H_s < 0.2$ м.

Розглянемо результати розрахунків взаємодії другої моди зі сходинкою

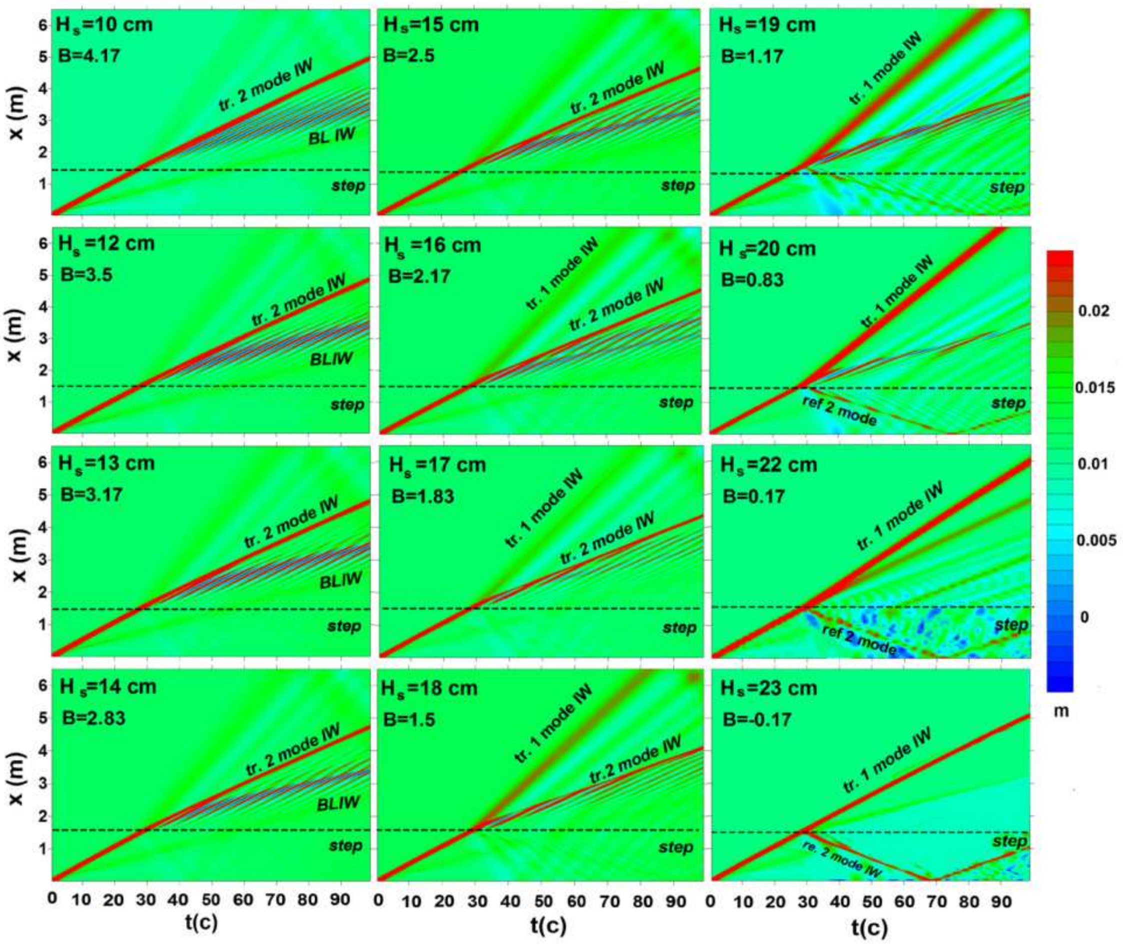

Рисунок 4.13: Діаграма Ховмюллера ($x-t$ діаграма) еволюції ізопікни $\rho_u = (\rho_1 + \rho_2)/2$ (серія 1). Положення сходинки відмічено пунктиром. Хвилі другої моди, першої моди, брізероподібні хвилі позначені як “2 mode IW,” “1 mode IW,” та “BLIW,” відповідно.

для різних значень параметра блокування B (4.18) на прикладі чисельних експериментів для випадку стратифікації з більш тонким проміжним шаром $h_2 = 0.01$ м і амплітудою хвилі, що набігає $A_{in} = 0.03$ м . Результати розрахунків ілюструють різноманітність хвильових форм за сходинкою. Розглянемо три чисельних експеримента з параметрами блокування $B = 3.2$, $B = 1.2$, $B = -0.2$, які характеризують три різних типи взаємодії.

Експеримент 1 Випадок, коли сходинка розташована досить глибоко і $H_s = 0.13$ м . Відповідний параметр блокування $B = 3.2$. Еволюція хвилі другої моди за сходинкою показана на рис. 4.14 а. Присутність сходинки слабо видозмінює хвилю, що набігає. Однак, стратифікація за сходинкою не симетрична, як це було до сходинки. Взаємодія хвилі з сходинкою призводить до того, що за хвилею другої моди, яка пройшла за сходинку, формується осцилюючий хвильовоі пакет, а амплітуда хвилі другої моди за сходинкою падає на 10% і в перетині X_r дорівнює $A_2 = 0.027\,\text{м}$. Розглянемо тепер окремо осцилюючий хвильовоі пакет з амплітудою $A_{br} = 0.013\,\text{м}$ і постійною обвідною, який сформувався за хвилею. Еволюція ізопікни з $\rho = 1003\,\text{кг м}^{-3}$ показано на рис. 4.15. Як видно, даний пакет являє собою локалізовану в просторі структуру, яка здійснює періодичні в часі коливання. Іноді брізери називають пульсуючими солітонам, оскільки вони поширюються як ізольовані збурення без втрат енергії.

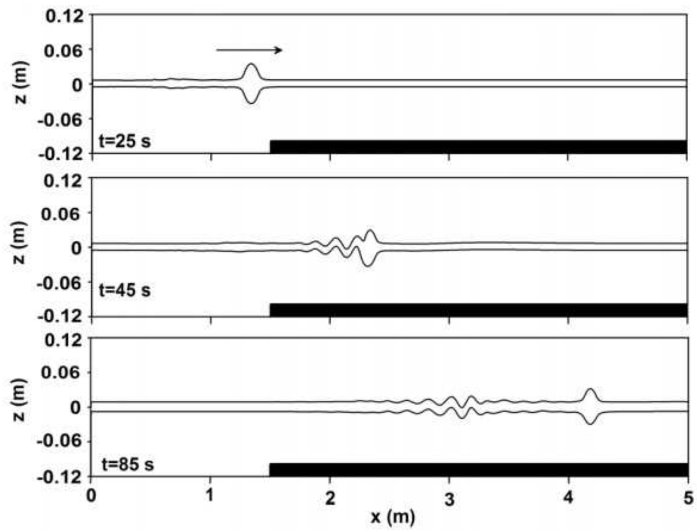

Рисунок 4.14: Еволюція ізопікни ρ_u та ρ_b для трьох моментів часу $t = 25, 45, 85$ (режим I) експеримент 1.7 ($H_s = 0.13m, B = 3.17$)

Швидкість усамітненої хвилі другої моди після проходження сходинки зменшується, тоді як амплітуда, швидкість одиночних хвиль першої моди збільшується з зростанням висоти сходинки $H_s = 0.1 - 0.17$; в той час як амплітуда брізероподібного хвильового пакету збільшується, довжина хвилі зменшується, що призводить до майже постійної швидкості поширення пакету, рис.

4.16.

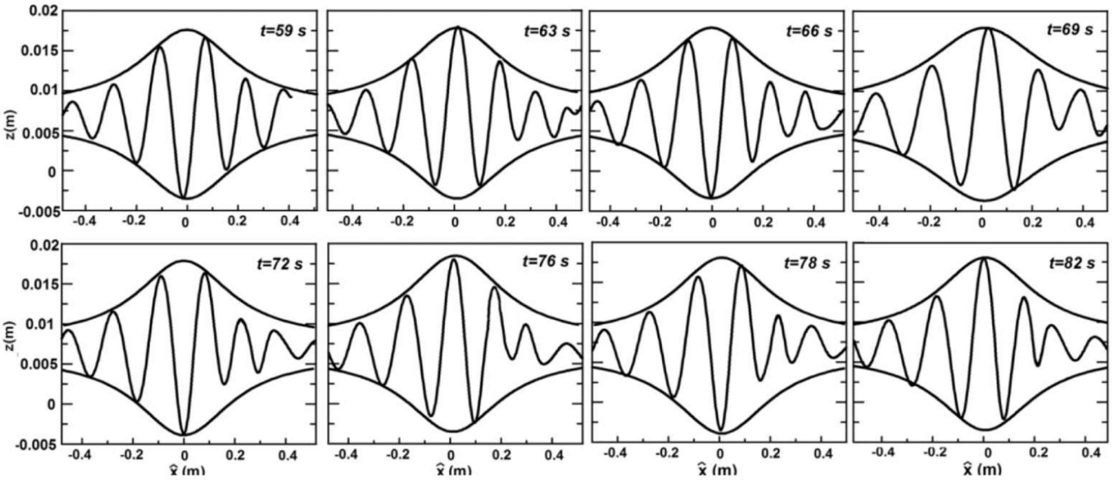

Рисунок 4.15: Вертикальне зміщення ізопікни ρ_{up} в рухомій системі координат $x = x - C_{tr}^{br} t$ для різних моментів часу для експерименту 1.7 ($H_s = 0.13$ м, $B = 3.17$), де C_{br} - швидкість брізероподібного пакету. Обвідна пакету отримана за допомогою перетворення Гільберта [188]. Період коливань брізероподібного пакету 7 секунд.

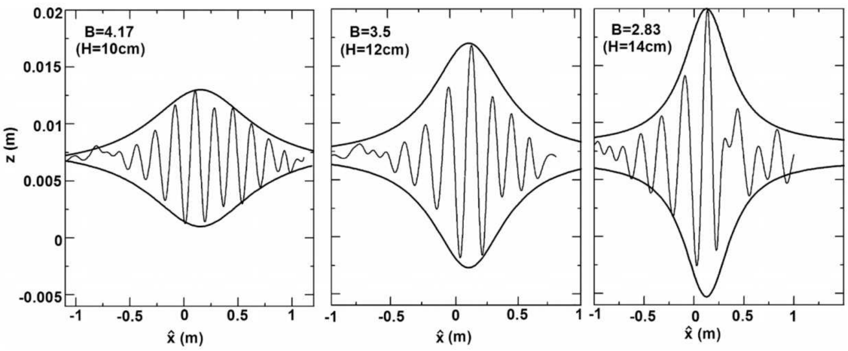

Рисунок 4.16: Збільшення амплітуди брізероподібного пакету із збільшенням висоти підводної сходинки для різних значень H_s . Обвідна пакету отримана, використовуючи перетворення Гільберта [188]

З подальшим зростанням висоти сходинки, декілька (дві або три) одиночні хвилі першої моди випромінюються попереду хвилі другої моди, в той час як амплітуда і швидкість одиночної хвилі другої моди зменьшується. Нова особливість з'являється для висот підводної сходинки H_s в діапазоні $0.15 - 0.17$

м. В цьому діапазоні формується другий брізероподібний хвильовий пакет першої бароклінної моди. Цей процес показано на рис. 4.17, де зображено зміщення ізопикн ρ_u і ρ_b для експерименту 1.10 і висоти сходинки $H_s = 0.16$ м.

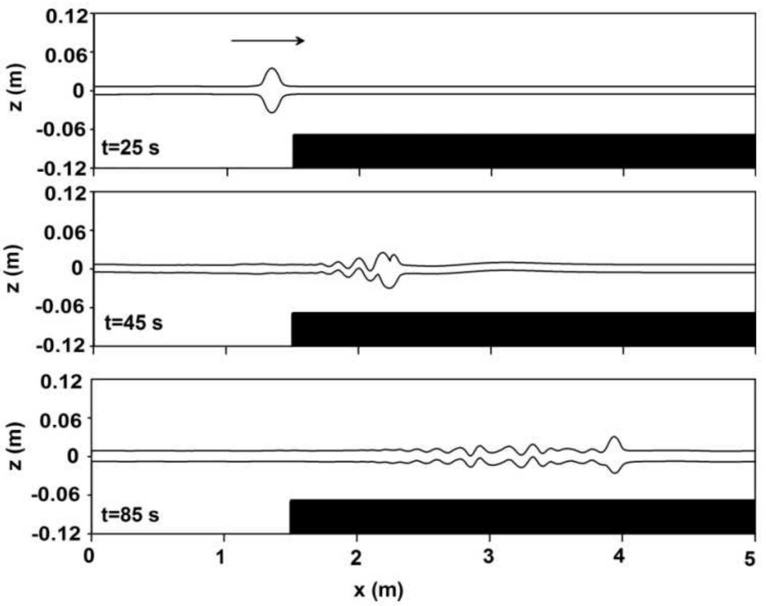

Рисунок 4.17: Вертикальне зміщення ізопікни ρ_u та ρ_l в рухомій системі координат $x = x - C_{tr}^{br} t$ для різних моментів часу для експерименту 1.10 (режим I) ($H_s = 0.16$ м, $B = 2.17$).

Експеримент 2. Випадок, коли висота сходинки помірна $H_s = 0.19$ м , а параметр блокування дорівнює $B = 1.2$. Еволюція хвилі другої моди за сходинкою для цього випадку представлена на рис. 4.18. Видно, що друга мода за сходинкою зазнає більш істотні зміни і амплітуда за нею падає на 43% і становить $A_2 = 0.017$ м . При проходженні хвилі другої моди над сходинкою формується струмінь, подібно до того, як це відбувається при проходження хвилі-пониження першої моди над сходинкою див. рис. 3.23 в розділі 3.3.

При цьому, несиметрична стратифікація за сходинкою ($h_{3+} < h_1$) призводить до формування хвилі-підвищення першої моди з амплітудою $A_1 = 0.007$ м і фазовою швидкістю $C_{tr}^1 = 0.09$ м/с . На рис. 4.17 (б) в моменти ча-

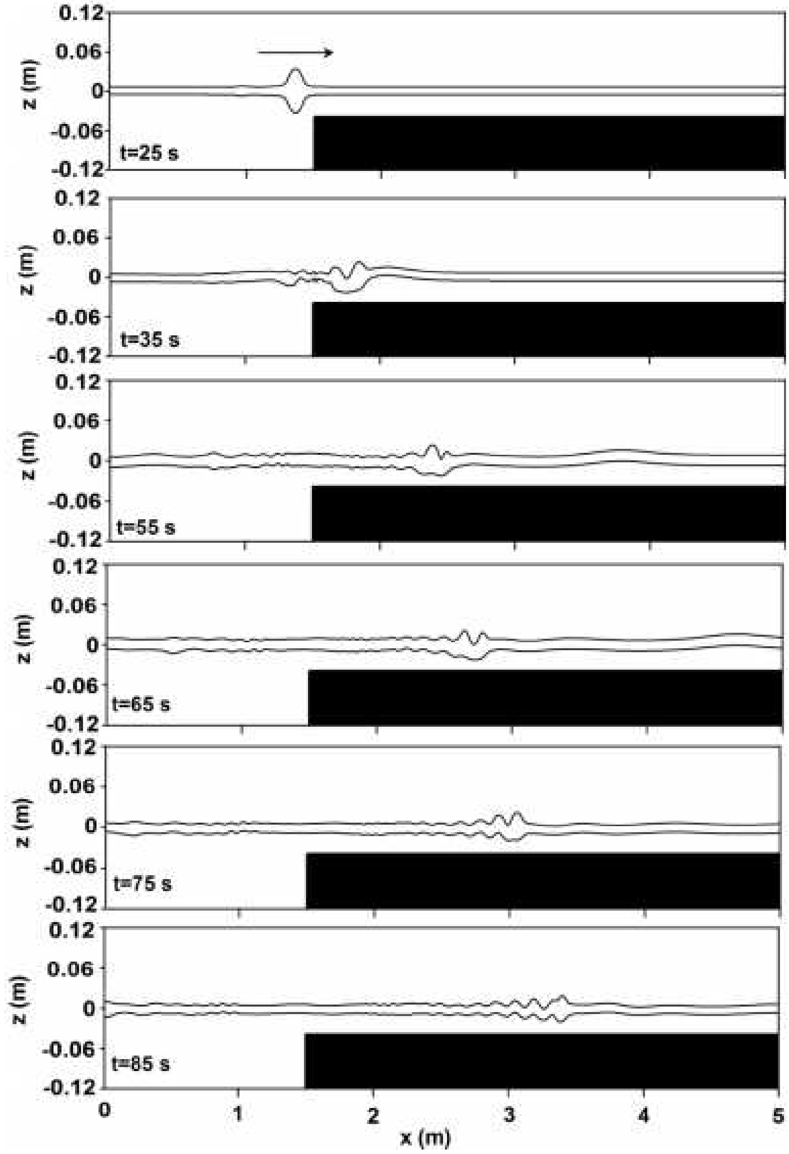

Рисунок 4.18: Вертикальне зміщення ізопікни ρ_u та ρ_b в рухомій системі координат $x = x - C_{tr}^{br} t$ для різних моментів часу для експерименту 1.13 (режим II) ($H_s = 0.19$ м, $B = 1.17$).

су $t = 45$ с і $t = 75$ с видно, що перед хвилею другої моди формується хвиля-підвищення першої моди.

Експеримент 3. Випадок, коли сходинка торкається проміжного шару $H_s = 0.23$ м . Параметр блокування дорівнює $B = -0.2$. Еволюція хвилі другої моди за сходинкою для цього випадку представлена на рис. 4.19.

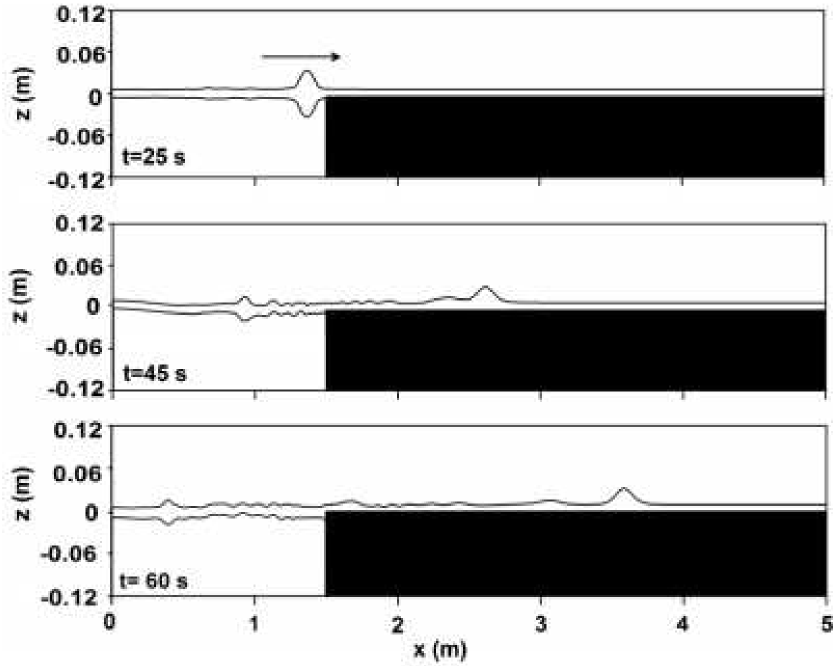

Рисунок 4.19: Вертикальне зміщення ізопікни ρ_u та ρ_b в рухомій системі координат $x = x - C_{tr}^{br} t$ для різних моментів часу для експерименту 1.16 (режим III)($H_s = 0.23$ м, $B = 0.17$)

За сходинку проходить тільки хвиля першої моди з амплітудою $A_1 = 0.023$ м . Як видно з малюнка рис. 4.19 в момент часу $t = 45$ с від сходинки відбивається хвиля другої моди.

На рис. 4.21 (а) наведені значення амплітуд хвиль, що пройшли, першої A_1 та другої моди A_2 і амплітуди брізеру A_{br} , нормовані на амплітуду хвилі, що набігає. А на рис. 4.21 б представлені значення фазової швидкості C_{tr}^1 та C_{tr}^2 , C_{tr}^{br} також нормованої на швидкість хвилі, що набігає в залежності від параметру блокування B . Як видно з графіка, незалежно від стратифікації та довжини хвиль залежності є близькими, що говорить про їх автомодельність від параметру блокування B .

Падаюча хвиля другої моди в серії 2 також є хвилею великої амплітуди по відношенню до проміжного шару ($2a_2^{in}/h_2 = 2.5$, $2\lambda_2^{in}/h_2 = 12.5$) але її довжина удвічі більше, аніж у хвилі із серії 1.

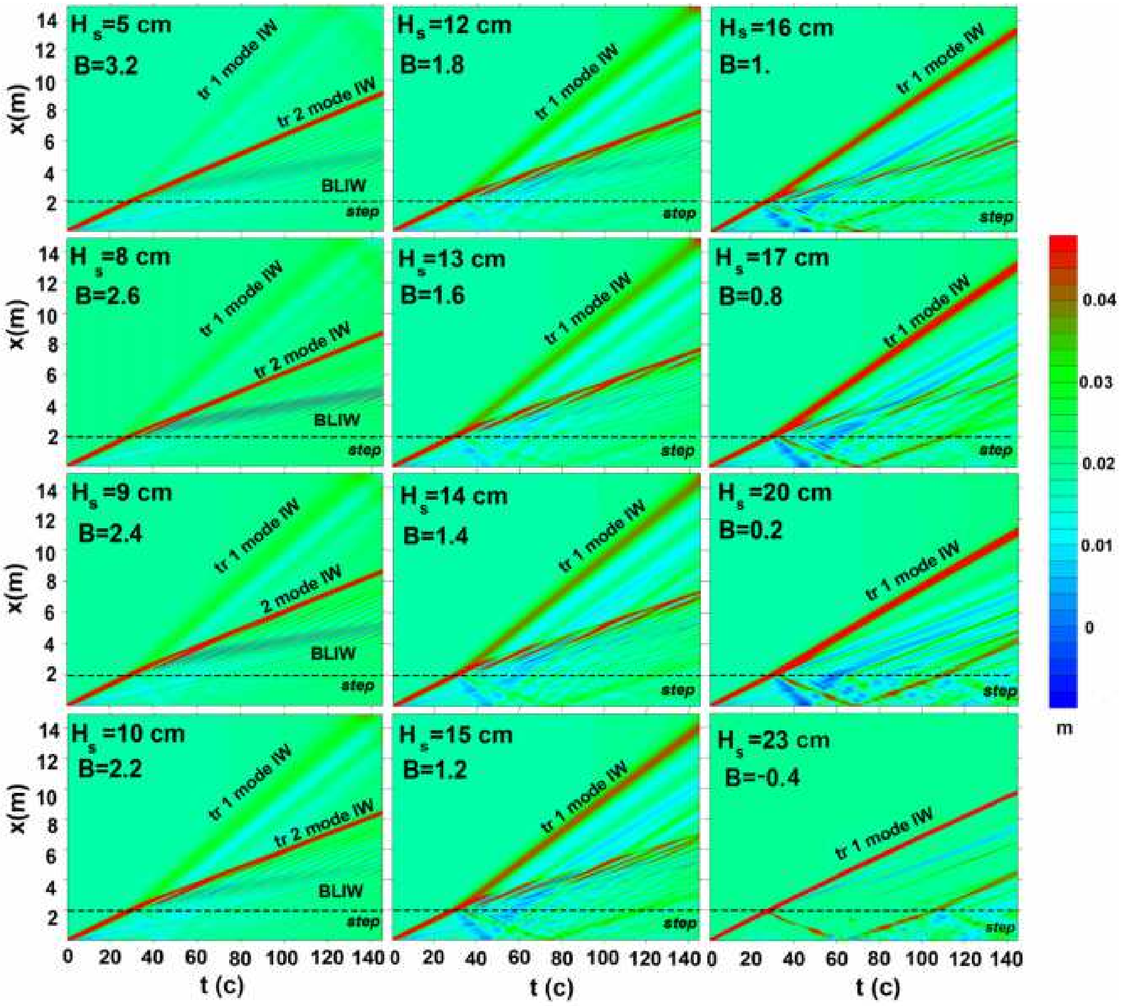

Рисунок 4.20: Діаграма Ховмюллера ($x-t$ діаграма), що демонструє еволюцію ізопікни $\rho_u = (\rho_1 + \rho_2)/2$ (серія 2). Положення сходинки відмічено пунктиром. Хвилі другої моди, першої моди, брізероподібні пакети хвиль позначені як “2 mode IW,” “1 mode IW,” та “BLIW,” відповідно

Одиночна хвиля, що поширюється в тришаровій стратифікації, також не має ядра, що захоплює рідину, як показано на рис. 4.12. В таблиці зазначена швидкість поширення, амплітуди та довжини хвиль, після сходинки в перетині x_r. Основними особливостями поширення хвилі для цієї серії є те, що при збільшенні параметра B довжина цих хвиль стає більшою, а амплітуди хвиль першої моди стають меншими, як видно на рис. 4.21. Тенденція до зникнення брізероподібних пакетів з зростанням довжини хвилі пояснюється тим, що

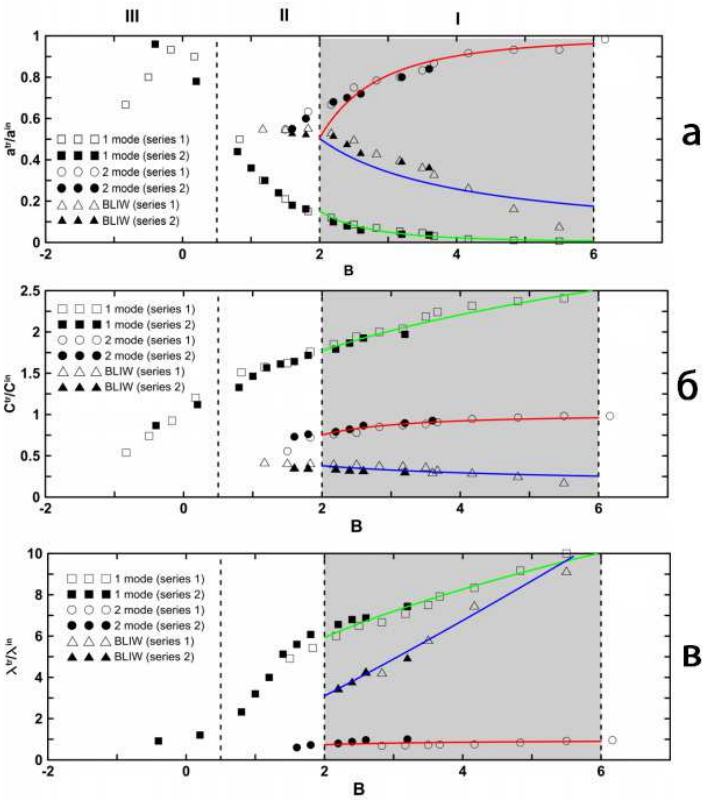

Рисунок 4.21: Залежність амплітуди (а), фазової швидкості (б), (в) - довжини хвиль, що пройшли за сходинку від параметру блокування B.

брізероподібні пакети для довгих хвиль не існують після сходинки для заданої стратифікації. Параметр B використовувався в попередніх главах для випадку взаємодії хвиль першої моди в двошаровій стратифікації (глава 3.1) та тришарової стратифікації (глава 3.4). Залежність нормалізованих значень амплітуди a_{tr} та фазової швидкості C_{tr} хвилі в перетині x_t від параметра блокування B показана на рис. 4.21. Амплітуди хвиль першої a^1_{tr} та другої моди a^2_{tr} та брізерів a^{br} хвиль нормалізовані на амплітуду хвиль другої моди a^2_{in}, що набігають на сходинку, а швидкості нормалізовані на швидкість другої моди C^2_{in}, довжини хвиль нормалізовані на довжину хвилі другої моди λ_{in}. Як видно з рис. 4.21 залежності для серій 1 та 2 є автомодельними за всіма параметрами, однак вони сильно змінюються від параметра блокування B, що спричинено різними механізмами взаємодії. Ми виділили три різних режими взаємодії другої моди над сходинкою, що можна фіксувати на рис. 4.21. В режимі I - внутрішні хвилі другої моди трансформуються в хвилі другої моди та брізероподібний пакет за хвилею другої моди. Залежність нормалізованих параметрів першої моди брізероподібного пакету від параметру блокування B може бути апроксимована наступними залежностями:

$$a^{tr}/a^{in} = m_a B_a^n, C^{tr}/C^{in} = m_c B^{n_c}, \lambda^{tr}/\lambda^{in} = m_\lambda B^{n\lambda}, \tag{4.19}$$

для другої моди залежності будуть мати вигляд:

$$a^{tr}/a^{in} = 1 - m_a B_a^n, C^{tr}/C^{in} = m_c B^{n_c}, \lambda^{tr}/\lambda^{in} = m_\lambda B^{n\lambda}. \tag{4.20}$$

Табл. 4.2: Значення параметрів в залежностях (4.19) та (4.20)

параметри	**перша мода**	**друга мода**	**брізероподібний пакет**
m_a	0.48	2.52	1.07
n_a	−2.09	−2.35	−0.09
m_c	1.42	1.43	0.61
n_c	0.32	−2.3	−0.55
m_λ	4.25	−2.3	1.12
n_λ	0.48	1.43	1.42

Значення параметрів наведено в таблиці 4.2. Усамітнена хвиля другої моди в режимі I зберігає симетрію за сходинкою і поширюється з амплітудою, швидкістю та довжиною, меншою, ніж у хвиль перед сходинкою. Зі зменшенням параметру B зменшується і амплітуда та швидкість хвилі другої моди, тоді як довжина хвилі залишається майже постійно. Амплітуда брізероподібного пакету зменшується зі збільшенням параметру B та довжини хвилі, тоді як швидкість хвилі залишається майже постійною.

Для глибокої підводної сходинки або малої амплітуди хвилі перед сходинкою $(B > 6)$ дисперсійний пакет формується за рахунок взаємодії зі сходинкою. Амплітуда хвилі першої моди збільшується зі зменшенням B, тоді як відповідна хвильова швидкість і довжина хвилі зменшується зі зменшенням B.

Треба звернути увагу на те, що амплітуди і групові швидкості двох брізероподібних хвильових пакетів, що формуються в діапазоні $1.8 < B < 2.2$ збігаються з автомодельними залежностями на рис. 4.21. Узагальнюючи результати моделювання двох серій чисельних експериментів, можна виділити наступні типи взаємодії:

1. Слабка взаємодія ($B > 2.5$). В цьому випадку амплітуда і швидкість хвилі другої моди, що пройшла за сходинку зменшуються на $10 - 15$ % при взаємодії з підводного сходинкою. При цьому форма хвилі другої бароклінної моди зберігається. І слідом за хвилею, що пройшла формується осцилюючий брізроподібний хвильовий пакет.

2. Помірна взаємодія ($0.5 < B < 2.5$). Для цього діапазону значень друга мода за сходинкою генерує хвилю підвищення першої моди, що поширюється зі швидкістю вдвічі більше, ніж швидкість хвилі перед сходинкою, хвилю другої моди і брізероподібний пакет внутрішніх хвиль. При цьому при зменшенні значення параметра блокування B до одиниці швидкості і амплітуди другої моди і брізероподібного пакету стають близькими за значеннями.

3. Сильна взаємодія ($-1 < B < 0.5$). В результаті взаємодії цього типу сходинку проходить усамітнена хвиля першої моди. При подальшому зменшенні B друга мода повністю відбивається від сходинки.

Конфігурація експерименту, коли брізероподібні хвилі утворюються при взаємодії хвилі другої моди зі сходинкою, не дозволяє утворення довгих брізерів внутрішніх хвиль, бо проміжний шар занадто тонкий і коефіцієнт кубічної нелінійності в рівняннях Гарднера від'ємний. Однак, ці експерименти продемонстрували можливість генерації брізерів внутрішніх хвиль у діапазоні проміжних довжин хвиль.

4.5 Висновки до розділу 4

В розділі представлені задачі динаміки внутрішніх хвиль великої амплітуди другої бароклінної моди. Показано, що важливою характеристикою, що впливає на динаміку внутрішніх хвиль другої моди є мінімальне число Річардсона Ri_{min} (1.47) та локальне число Фруда Fr_{max} (4.9). Хвилі із $Fr_{max} > 1$ формують зони із замкненими лініями струму (ядра), та можуть переносити в цих областях масу. За розвиток локальної нестійкості в хвилі як першої так і другої моди відповідає число Річардсона Ri_{min}. Необхідною умовою для формування нестійкої Кельвіна-Гельмгольца у хвилі другої моди є формування області ("кишені") в якій виконується умова $Ri_{min} < 0.25$, і розмір цієї області L_{RI} має задовольняти умові $\lambda/L_{RI} < 0.9$, що відрізняється від відповідних значень для хвиль першої бароклінної моди ($\lambda/L_{RI} < 0.76$). Це свідчить про відмінності в механізмах нестійкості: в разі хвиль першої моди шар розділу відокремлює два різноспрямовані потоки, тоді як для хвиль другої моди шар розділу відокремлює внутрішнє захоплене ядро зі слабкою циркуляцією від зовнішнього потоку. Мінімальне число Річардсона Ri_{min} в цих випадках падає до значень менших ніж 0.1. Виходячи з досліджених властивостей внутрішніх хвиль другої моди, було запропоновано нову класифікацію хвиль другої моди відносно параметрів Ri_{min} та Fr_{max}:

1. слабонелінійні хвилі при $Fr_{max} < 1$,

2. стійкі сильнонелінійні хвилі, що переносять масу при $Ri_{min} > 0.15$ та $Fr_{max} \approx 1.2$,

3. нестійкі сильнонелінійні хвилі при $Ri_{min} < 0.1$.

Кожен з класів еволюціонує з різною швидкістю затухання та завдяки різним механізмам

1. слабонелінійні хвилі затухають завдяки в'язкості,

2. стійкі сильнонелінійні хвилі, що переносять масу, затухають завдяки ерозії ядер зовнішнім потоком та за рахунок слабкої внутрішньої циркуляції,

3. еволюція нестійких сильно нелінійних хвиль, характеризується втратою маси за рахунок розвитку нестійкості Кельвіна-Гельмгольца, що спричиняє перемішування.

Виявлено неповну автомодельність динаміки хвиль другої моди за числом Рейнольдса, що виражається у залежності параметра Річардсона від нього при великих значеннях чисел Рейнольдса Re_{eff}.

Було продемонстровано три типи режимів трансформації хвилі другої бароклінної моди над сходинкою на дні в залежності від параметру блокування. При $B > 6$ при взаємодії другої моди зі сходинкою окрім трансформованої хвилі другої моди формується дисперсійний пакет, який не має незмінної обвідної. У режимі I $(2 < B < 6)$ амплітуда хвилі першої моди, що проходить за сходинку, збільшується зі зменшенням B, тоді як відповідна хвильова швидкість і довжина хвилі зменшуються зі зменшенням B, хвильовий осцилюючий пакет в цьому режимі має постійну обвідну. Хвилі другої моди за сходинкою відновлюють симетрію, але швидкість та амплітуда цих хвиль зменшується. Амплітуда осцилюючого хвильового пакету збільшується зі зменшенням B, а довжина хвилі зменшується зі зменшенням B, тоді як хвильова швидкість залишається майже незмінною. Режим II відповідає значенням параметру блокування $0.5 < B < 2.5$. Для цього діапазону значень друга мода за сходинкою генерує хвилю підвищення першої моди, що поширюється зі швидкістю вдвічі більшою, ніж швидкість хвилі перед сходинкою, хвилю другої моди і брізероподібний пакет внутрішніх хвиль. При цьому при зменшенні значення параметра блокування B до одиниці швидкості і амплітуди другої моди і брізеру стають близькими за значеннями. Хвиля другої моди в цьому режимі відновлює за сходинкою симетрію і поширюються з амплітудою, швидкістю, і довжиною, меншою ніж падаюча хвиля. У режимі III ($B < 0.5$) тільки хвилі-підвищення першої моди проникають за сходинку.

Вперше продемонстровано можливий сценарій генерації внутрішніх усамітнених хвиль першої бароклінної моди при трансформації хвиль другої бароклінної моди при значеннях параметра блокування $B < 0.5$.

Розділ 5

ФРОНТАЛЬНА ВЗАЄМОДІЯ ВНУТРІШНІХ УСАМІТНЕНИХ ХВИЛЬ

Взаємодія усамітнених внутрішніх хвиль великої амплітуди постійно відбувається у прибережних зонах (див. напр. [209], [219]) рис. 5.1 з [286]. В цьому розділі будуть розглянуті задачі взаємодії хвиль як першої так і другої бароклінних мод. Коли хвилі амплітуд малі, то динаміка таких хвиль - "лінійна"та хвилі не взаємодіють. Вони проходять одна крізь одну одного без змін амплітуди, довжини хвилі та напрямку поширення. Коли такі хвилі перетинаються, амплітуди накладаються. В таких випадках може існувати резонансна трансформація енергії між різними хвилями.

Це може бути важливим при визначенні поширення та розсіювання енергії внутрішніх хвиль, а також наслідків взаємодії внутрішніх хвиль із океанськими структурами та нафтовими платформами. Слід зауважити, що взаємодія усамітнених хвиль при **фронтальному зіткненні** (коли $\varphi = 90^o$ див. рис. 5.1) відрізняється від взаємодії хвиль поширюються в одному і тому ж напрямку **обгін** (коли $\varphi = 0^o$ див. рис. 5.1), рядом специфічних особливостей. Зокрема, при фронтальному взаємодії поверхневих хвиль однакової і

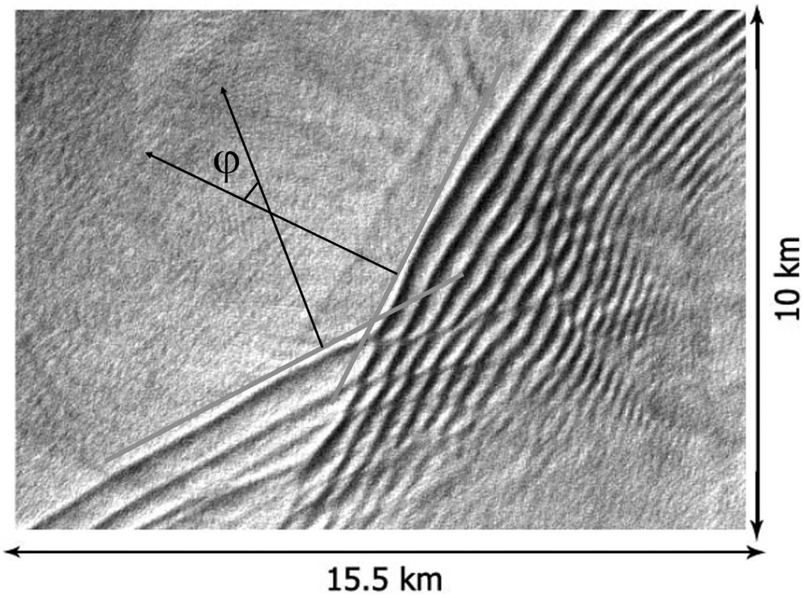

Рисунок 5.1: Супутниковий знімок прояву на поверхні взаємодії внутрішніх хвиль біля Середньо-атлантичної бухти (серпень 2006) [286]

досить великої амплітуди спостерігалося формування вертикального струменя, викликаного вертикальним прискоренням при злитті зустрічних хвиль [76], [190]. Аналітично та чисельно фронтальна взаємодія внутрішніх хвиль малої амплітуди в двошаровій рідині вивчалася в роботах [202], [213], де було показано, що фронтальне зіткнення призводить до утворення дисперсійних вторинних хвиль і малого фазового зсуву. Відомі стаціонарні розв'язки рівнянь Ейлера для двошарової нев'язкої рідини, які описують усамітнені хвилі великої амплітуди [205], [81]. Однак, наявність розриву швидкості між шарами призводить до нестійкості Кельвіна-Гельмгольца цих розв'язків [134]. Регуляризація розв'язків шляхом фільтрації короткохвильових збурень [135], врахуванню додаткових членів вищого порядку [80] або модифікації вихідної постановки [86] призводить до стійких розв'язків. Взаємодія усамітнених хвиль в рамках таких моделей є слабкою і також проявляється в генерації дисперсійних хвостів малої амплітуди. У той же час, формування вихорів Кельвіна-Гельмгольца в хвилях великої амплітуди спостерігалося, як в лабораторних експериментах [114], [99], так і в натурних дослідженнях [209], [219] і в численних розрахунках в рамках рівнянь Нав'є-Стокса [57], [176]. Ця нестійкість призводить до генерації турбулентності, перемішування в шарі розділу і затухання внутрішніх усамітнених хвиль. Тому слід очікувати, що взаємодія хвиль великої амплітуди буде супроводжуватися нестійкістю Кельвіна-Гельмгольца, на відміну від прогнозів регуляризованих моделей сильно-нелінійних хвиль. В даному розділі буде представлено дослідження в рамках рівнянь Нав'є-Стокса фронтального взаємодії сильно-нелінійних внутрішніх хвиль.

Задача про фронтальне зіткнення двох усамітнені хвиль є однією з центральних проблем теорії солітонів. Розв'язки цілого ряду рівнянь, в тому числі рівнянь КдВ, Гарднера, нелінійного рівняння Шредінгера мають властивість зберігати форму при фронтальній взаємодії [283]. Фронтальна взаємодія усамітнених хвиль в рамках рівнянь Ейлера і Нав'є-Стокса відрізняється від еластичного, хоча відхилення від еластичного зіткнення (яке відбувається без втрат кінетичної енергії) незначні (див. огляд в [154]). В роботі [190] були проведені експерименти, в яких було показано, що при зіткненні поверхневих усамітнених хвиль максимальна амплітуда в момент взаємодії більше, аніж сума амплітуд двох хвиль, що зіштовхуються. У статтях [237] та [85] були представлені результати аналітичних і чисельних досліджень з фронтальної взаємодії поверхневих усамітнених хвиль, де було показано фазовий зсув і нееластичість взаємодії. Взаємодія внутрішніх хвиль малої амплітуди в двошаровій рідини аналітично і чисельно вивчалося в роботах [202], [213], де було показано, при взаємодії генеруються вторинні хвилі та фазовий зсув.

5.1 Фронтальне зіткнення внутрішніх усамітнених хвиль першої бароклінної моди

Геометрія задачі показана на рис. 5.2 Дві внутрішні усамітнені хвилі рухаються назустріч одна одній в вертикально двовимірному обчислювальному басейні лабораторних масштабів, заповненому стратифікованою по солоності водою, в якій два однорідних шара розділені тонким шаром стрибка солоності. Незбурена поверхня розділу знаходиться на відстані h_1 від поверхні води, товщина нижнього шару $h_2 = H - h_1$. Густина верхнього і нижнього однорідних шарів позначені як ρ_1 і ρ_2, відповідно.

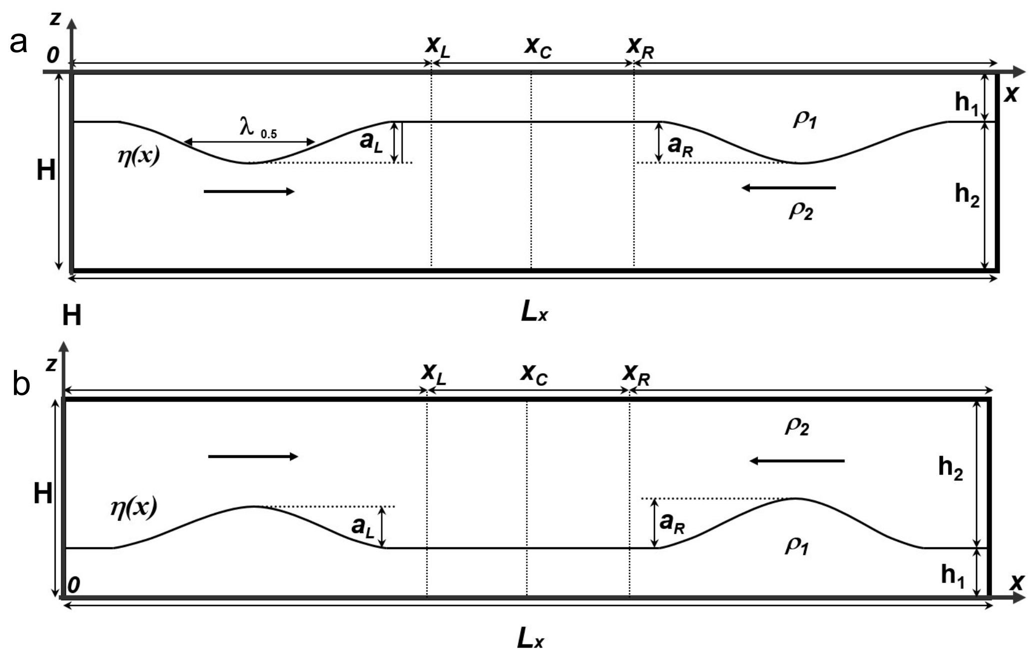

Рисунок 5.2: Схема чисельного експерименту. Пунктиром вказані перетини, де обчислювалися потоки енергії [258]

Зіткнення внутрішніх хвиль-пониження великої амплітуди було вивчено в роботах [40], [173], [258], де було показано, що окрім фазового зсуву і дисперсійних вторинних хвиль, взаємодія призводить до зсувної нестійкості і формування вихорів Кельвіна-Гельмгольца в шарі розділу.

5.1.1 Задача про фронтальне зіткнення внутрішніх усамітнених слабонелінійних хвиль

Відповідно до теорії [202] зіткнення слабонелінійних хвиль призводить до появи хвильових осциляцій за хвилями та фазового зсуву, див. рис. 5.3 (б).

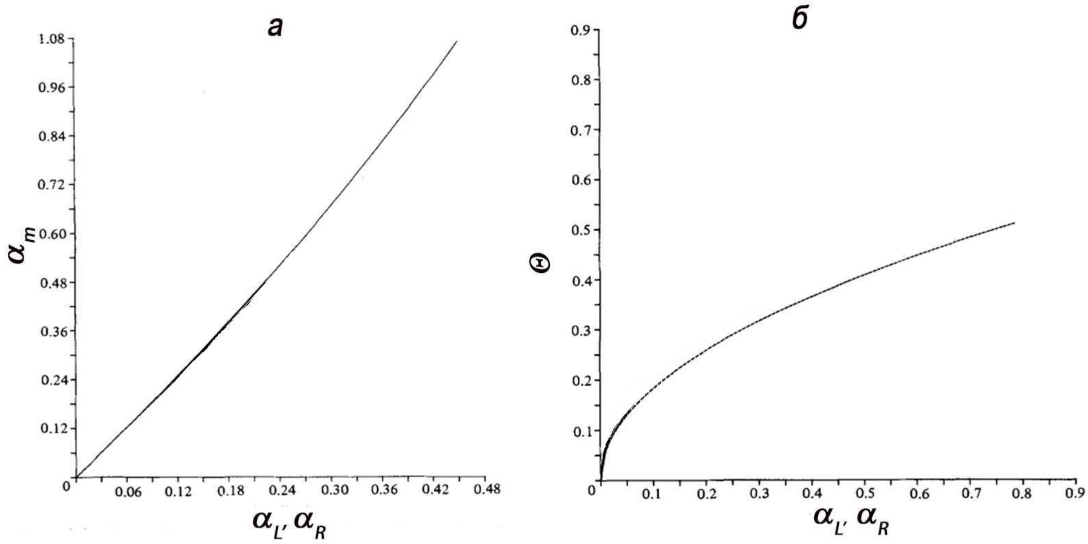

Рисунок 5.3: Максимальна амплітуда α_m (5.1)в момент взаємодії (а) та безрозмірний фазовий зсув Θ (5.2) (б) для слабонелінійної теорії

Як видно на рис. 5.3 (а), розрахункове відхилення поверхні розділу взаємодіючих хвиль під час взаємодії перевищує суму двох профілів солітонів КдВ. Максимальна безрозмірна амплітуда α_m під час фронтального зіткнення усамітнених хвиль з амплітудами α_R і α_L відповідно до слабонелінійної теорії [202] є

$$\alpha_m = \alpha_R + \alpha_L + \Lambda_1\alpha_R\alpha_L + 2\Lambda_1^2\alpha_R\alpha_L(\alpha_R+\alpha_L)[\frac{3}{4} + \Omega_1(\Phi + \frac{5}{4}R_2D_2)], \quad (5.1)$$

де $\Lambda_1 = 0.5D_2D_1^{-1}$, $D_1 = 1+\sigma\gamma$, $D_2 = 1-\sigma\gamma^2$, $R_1 = 1+\gamma^2$, $\Omega_1 = -\sigma\gamma R_1\Phi^-2D_2^-2$, $R_2 = \gamma^2(\gamma-1)$, $\Phi = 1+\sigma\gamma^-1$ Відповідно безрозмірний фазовий зсув Θ при взаємодії знаходиться як

$$\Theta = |2\Lambda_1|(\frac{\Phi\alpha_L}{3D_2})\{1 + 2\Lambda_1\alpha_L[\frac{1}{8} + \Omega_1\gamma_2(\frac{1}{8}; -\frac{1}{3}, \frac{1}{2})] + 2\Lambda_1\alpha_R[\frac{3}{4} + \Omega_1\gamma_2(0, 1, 0)]\}, \tag{5.2}$$

де $\gamma_2(m_1, m_2, m_3) = m_1 R_2^2 D_2^2 + m_2 R_2 D_2 \Phi + m_3 \Phi^3$, де m_1, m_2, m_3 – раціональні числа.

Залежності максимальної амплітуди α_m (5.1)в момент взаємодії слабонелінійних хвиль та безрозмірний фазовий зсув Θ (5.2) зображені на рис. 5.3 (а) та (б).

5.2 Моделювання фронтального зіткнення внутрішніх усамітнених хвиль великих амплітуд першої бароклінної моди

Обчислювальний басейн лабораторних масштабів мав довжину $L = 20$ м і глибину $H = 0.32$ м. Всі чисельні експерименти проводилися при товщині верхнього шару $h_1 = 4$ см. Задача розв'язувалася в квазідвумірній постановці, коли рівняння дискретизувались в декількох вузлах поперек басейну за умови ковзання на бічних стінках басейну. Розміри комірок сітки по довжині, висоті і ширині становило $2400 \times 260 \times 4$. Початкова стратифікація в басейні моделювалася у вигляді поверхневого і придонного однорідних шарів з солоністю $S_{up} = 0$ і $S_{bot} = 30$ при постійній температурі 20 ^{o} С, розділених тонким перехідним шаром. Профіль солоності апроксимувався формулою (3.3) де $dh = 0.2$ см. Поверхня розділу в розрахунках візуалізувалася ізохаліна 15. Чисельні експерименти проводилися при значеннях кінематичної в'язкості $\nu = 1.14 \cdot 10^{-6}$ м ^{2}с$^{-1}$ і молекулярної дифузії солі $\chi = 10^{-9}$м^{2}с$^{-1}$. Для генерації усамітнених хвиль великої амплітуди при чисельному моделюванні використовуються або розв'язок рівняння Дюбрей-Жакотен-Лонга [252] (детально описано в розділі 1.4.1) або, за аналогією з лабораторними експериментами (напр. [141]), механізм колапсу з розділу 2.4. Порівняння хвиль, що були сформовані різними методами показало, що через певний час профілі хвиль не залежать від типу генерації.

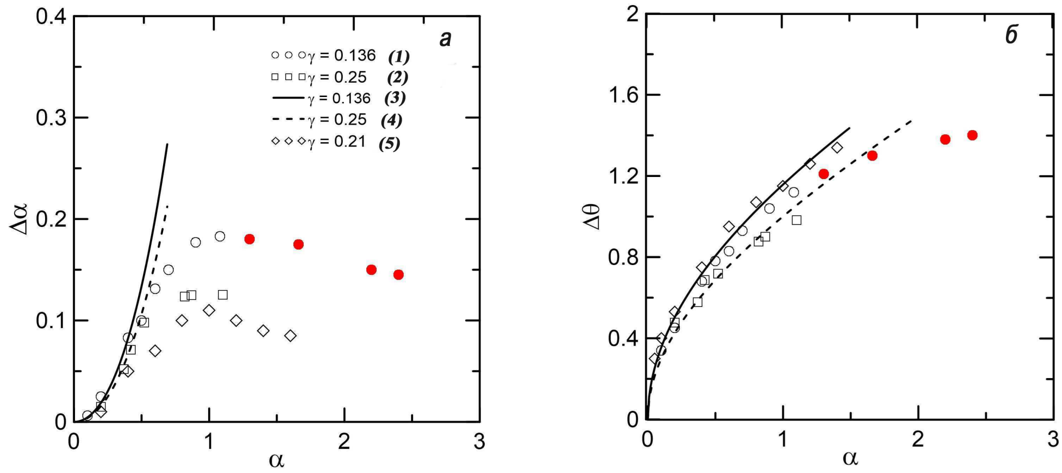

Рисунок 5.4: Залежність відхилення максимальної амплітуди хвилі, що утворилась при зіткненні (а) та зсув фази (б) взаємодіючих симетричних внутрішніх хвиль на нормовану амплітуду хвилі. (1) - $h_1/h_2 = 0.136$, (2) - $h_1/h_2 = 0.25$, (3) - $h_1/h_2 = 0.136$ [202], (4) - $h_1/h_2 = 0.25$ [202], (5) - $h_1/h_2 = 0.25$ [135]. Заповнені символи відповідають випадкам з нестійкістю Кельвіна-Гельмгольца.

На рис. 5.4 показано порівняння залежностей слабконелінійної теорії (5.1) та (5.2) з результатами чисельних розрахунків максимальної амплітуди хвилі, що утворилась при зіткненні $\Delta\alpha = \alpha_m - \alpha_L - \alpha_R$ (рис. 5.4 (а)) і фазового зсуву $\Delta\theta$ для випадку двох однакових хвиль $\alpha_L = \alpha_R = \alpha$ (рисунок 5.4 (б)). Як видно на рисунку 5.4, для малих $\alpha < 0.3$ слабко нелінійна теорія [202] узгоджується з результатами чисельних експериментів. Розбіжність у відхиленнях $\Delta\alpha$ та зсуву $\Delta\theta$ зростають зі збільшенням взаємодіючої амплітуди хвиль α. Вони збільшуються швидше для менших γ, тобто для більшої нелінійності хвиль $\alpha(1-\gamma)$.

Позначимо амплітуду хвиль, що рухаються зліва направо в перетинах x_l, x_r і справа наліво в сегментах x_r, x_l, як a_l^-, a_r^+, a_r^-, a_l^+, відповідно.

$$\tau = t/\sqrt{\rho_0 h_1/\Delta\rho g}, \tag{5.3}$$

де перепад густини $\delta\rho = \rho_2 - \rho_1$. Час відраховується з моменту першого перетину хвилями контрольних перетинів x_l і x_r. Швидкість нормується на фазову швидкість лінійних довгих хвиль (1.52).

5.2.1 Взаємодія внутрішніх усамітнених хвиль однакових малих амплітуд

Порівняння із слабонелінійною теорією результатів моделювання для усамітнених хвиль, що набігають та проходять, показано на рисунку 5.5. Хвилі однакової амплітуди (випадок (D1; D1)) описані в таблиці 7.7 (див. Додаток). Ці профілі свідчать про узгодженість з моделями КдВ з граничними умовами для випадку твердої кришки (RL) та вільної поверхні (FS). Відповідно до передбачень слабонелінійної теорії збурень [202] (див. розділ 5.1) зіткнення призводить до появи вторинних хвиль (рис. 5.5) та фазового зсуву.

5.2.2 Взаємодія внутрішніх усамітнених хвиль однакових помірних амплітуд

Порівняння результатів моделювання із лабораторним експериментом [129] в перетинах x_L, x_C, x_R, що відповідають положенням датчиків 1, 3, 5 в експерименті [129], відповідно показано на рисунку 5.6 для взаємодії хвиль помірної амплітуди з $\alpha_L = 0.41$ і $\alpha_R = 0.51$ (випадок (D18; D16)) описаний у таблиці 7.7 (див. Додаток). Відхилення інтерфейсу для хвилі в перетинах x_R та x_L добре узгоджуються з експериментом. Профілі хвилі, що набігає (а) і хвилі, що пройшла (б) в перетинах x_R та x_L показують гарне узгодження з лабораторним експериментом [129] та солітонами КдВ (1.93). Проте, довжина

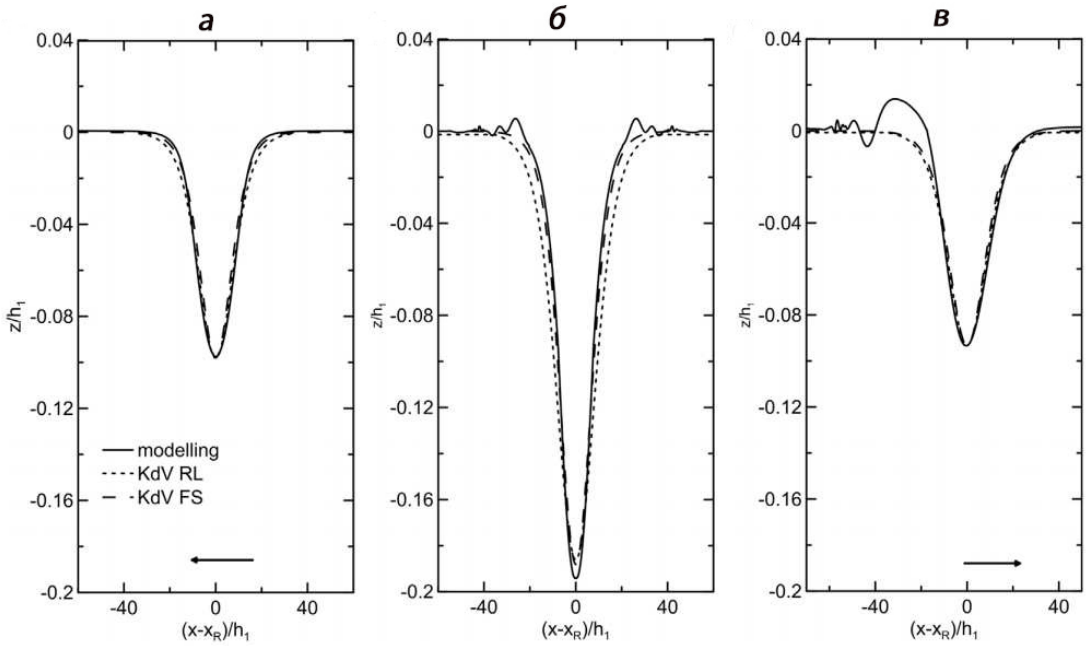

Рисунок 5.5: (Профілі хвиль, що набігає (а), під час взаємодії (б) і хвилі, що пройшла - (в). Для симетричного випадку (D1; D1). Розраховані профілі порівнюються з аналітичними моделями КдВ з граничними умовами твердої кришки (KdV RL) та вільної поверхні (KdV FS).

обчислювального резервуара недостатньо велика для перевірки передбачення слабконелінійної теорії [202]. Мінімальна величина числа Річардсона для правої хвилі зменшується від величина $Ri_{min} = 0.29$ в поперечному перетині x_L в $Ri_{min} = 0.26$ при $x/h_1 = 84$, а після зіткнення число Річардсона відновлює значення 0.3 у поперечному перетині x_L. Як видно з рисунку 5.4, для помірних хвильових амплітуд ($0.3 < \alpha < 1$) поведінка $\delta\alpha$ та $\delta\theta$ вже значно відрізняється від слабонелінійних прогнозів теорії. Параметр α має максимум при $\alpha < 1$, тоді як $\delta\theta$ продовжує збільшуватися, але повільніше.

5.2.3 Взаємодія внутрішніх усамітнених хвиль однакових великих амплітуд

Фронтальна взаємодія усамітнених хвиль великих амплітуд істотно відрізняється від хвиль великих і малих амплітуд. На рисунку 5.9 зображені

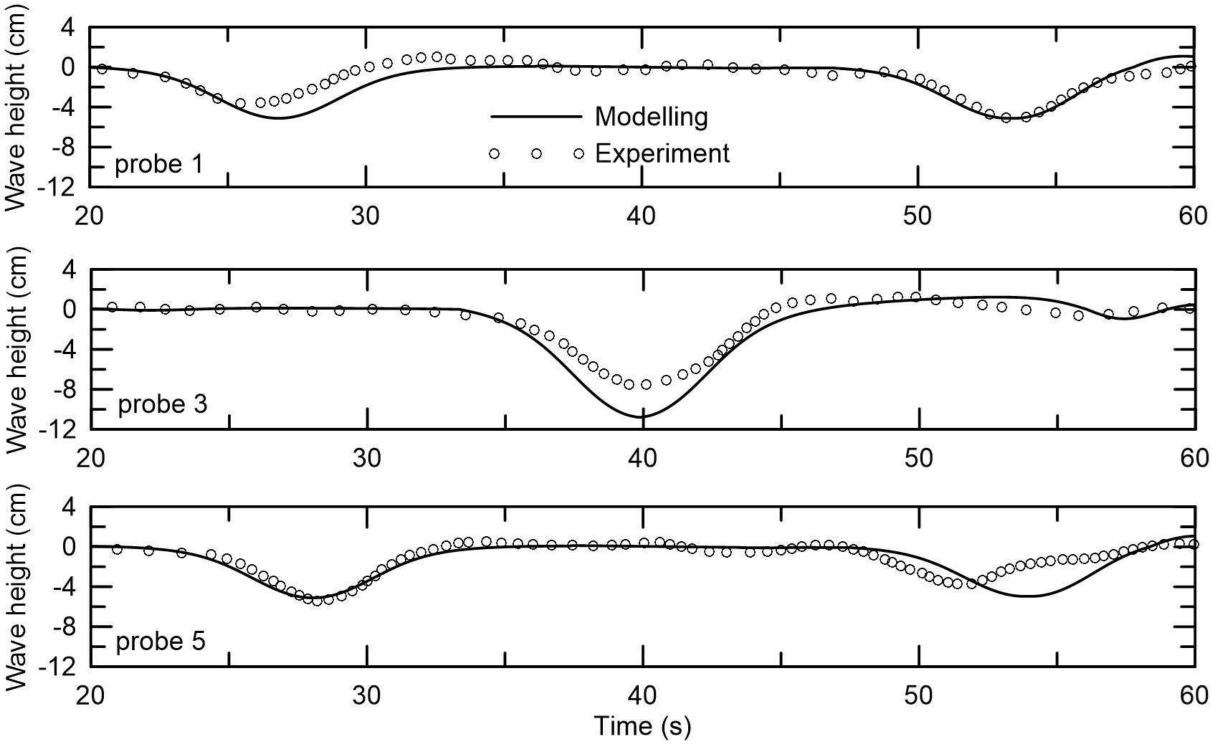

Рисунок 5.6: Профілі внутрішніх хвиль з лабораторних експериментів [129] та профілі в трьох датчиках, що розташовані вздовж резервуару: x_R (Probe 1 [129]), x_C (Probe 3 [129]) і x_L (Probe 5 [129])

профілі хвиль, що набігають, та профілі хвиль, що пройшли після зіткнення хвиль у перетині x_R для випадку симетричного взаємодії $(D13; D13)$ (див. таблицю 7.7 в додатку). Стійкі хвилі перед зіткненням однакових амплітуд ($\alpha = 2.26$) менші, ніж хвилі максимальної амплітуди $\alpha_{cr} = 3.16$ згідно формули (1.140). Хвильовий профіль на рисунку 5.9 (а) добре описується усамітненою хвилею Міяти-Чоя-Камаси 1.131. Амплітуда хвилі задовольняє критерію стійкості $\alpha < \alpha_{cr}$, але мінімальне число Річардсона $Ri_{min} = 0.11$ менше, ніж критичне значення 0.25 (1.48).

Мінімальна величина числа Річардсона Ri_{min} (1.47) досягається на максимумі амплітуди хвилі. Але неоднорідність потоку у хвилі може привести до того, що необхідна умова $Ri < 0.25$ (3.16) не буде достатньою для виникнення нестійкості Кельвіна-Гельмгольца (КГ). Для нестійких внутрішніх

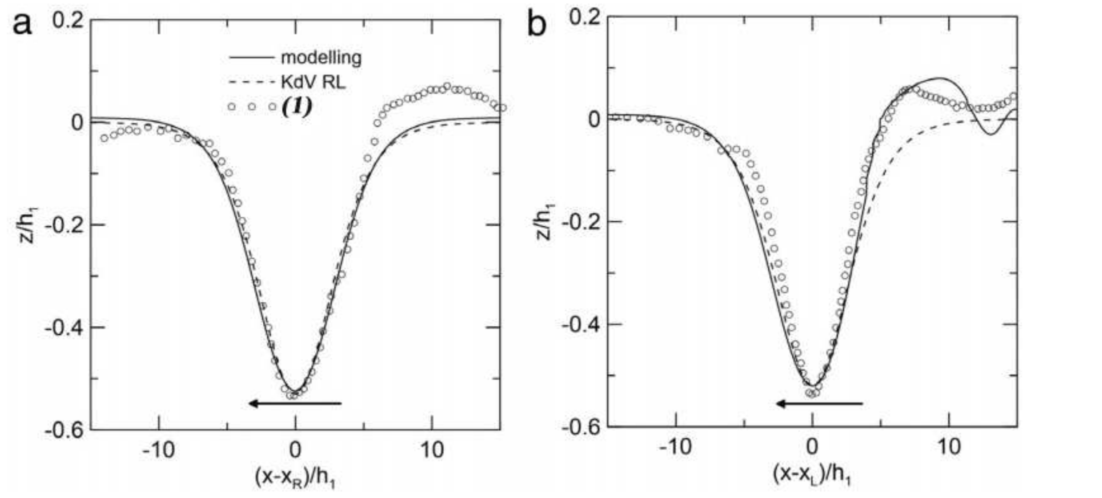

Рисунок 5.7: Профілі хвилі, що отримані чисельним моделюванням: (а) - хвиля, що набігає,(б) - хвиля, що пройшла в перетинах x_R та x_L для симетричного випадку (D18; D16) (див. таблицю 7.7 в додатку) у порівнянні з лабораторним експериментом [129] та розв'язком KdV RL

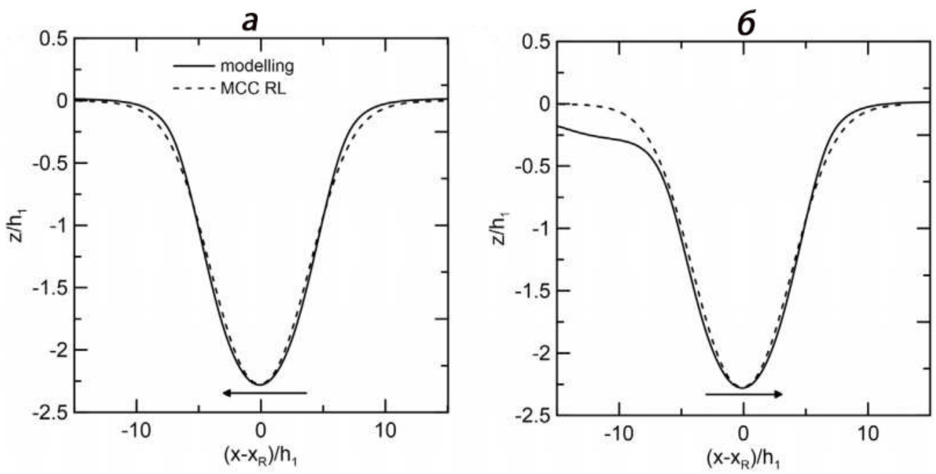

Рисунок 5.8: Профілі хвилі, що набігає (a) та хвилі, що пройшла (b) в перетині x_R для випадку симетричного взаємодії $(D13; D13)$ (див. таблицю 7.7 в додатку). Результати моделювання порівнянні з розв'язками 1.131.

хвиль, мінімальне значення Ri_{min}, при якому починається розвиток нестійкості внутрішніх хвиль $\mathrm{Ri} < 0.075 \pm 0.035$ і $\mathrm{Ri} < 0.092 \pm 0.016$ для лабораторних експериментів [264] і [99], відповідно, тоді як умова $\mathrm{Ri} < 0.10$ і

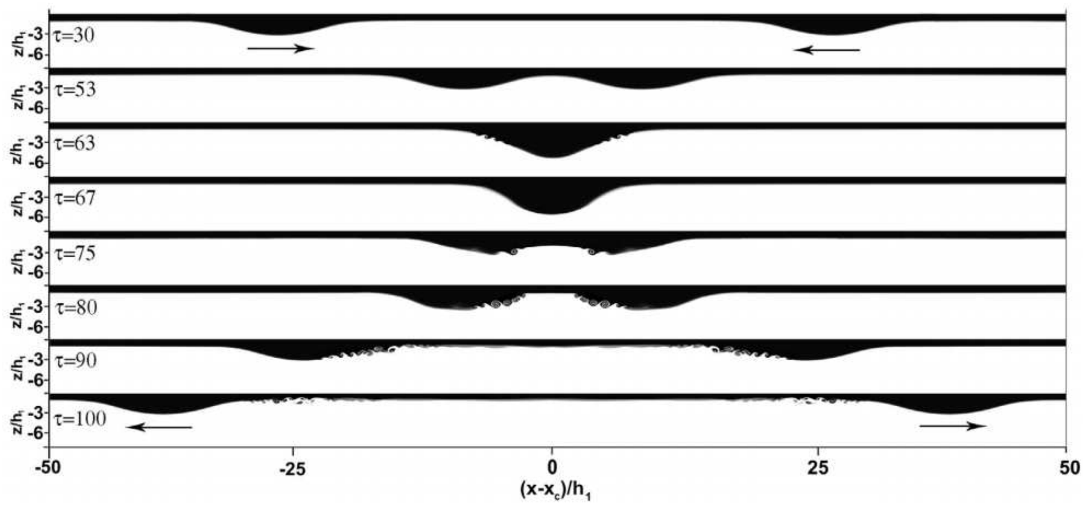

Рисунок 5.9: Еволюція поля густини під час зіткнення внутрішніх хвиль великих амплітуд для випадку (D13; D13) (див. таблицю 7.7 в додатку)

Ri < 0.13 виконується для експериментів з нелінійними хвилями [176] і [57], відповідно. Оскільки процес розвитку нестійкості КГ є нелокальним у хвилях, використання лише числа Річардсона 3.16, як критерію нестійкості може бути недостатнім. Як вже зазначалося в розділі 3.8 корисною характеристикою стану потоку є довжина потенційно нестійкої області, в якій виконується умова $Ri_{min} < 0.25$, що характеризує горизонтальну області, в якій може розвиватися нестійкість. Емпіричне співвідношення $L_x/\lambda_{0.5} = 0.86$, одержане в [99] відділяє стійки області $L_x > 0.86\lambda_{0.5}$ від потенційно нестійких. Тут $\lambda_{0.5}$ - довжина хвиль на половині модуля амплітуд хвиль. В початковий момент при $\tau = 30$ (див. рис. 5.9) x_l $L_x/\lambda_{0.5} = 0.65$ і хвиля також характеризується як стійка.

Співвідношення масштабу вихору КГ $\lambda_{KH} = 0.095$ м до товщини шару розділу $\Delta h = 0.012$ м становить 7.9 при $\tau = 75$. Це добре узгоджується з оцінкою $\lambda_{KH}/\Delta_h = 7.5$, що зроблена на основі теорії для паралельних стратифікованих течій [201] та $\lambda_{KH}/\Delta h = 7.9$ в лабораторному експерименті [99]. Вплив в'язкості на розвиток вихорів КГ можна оцінити за допомогою

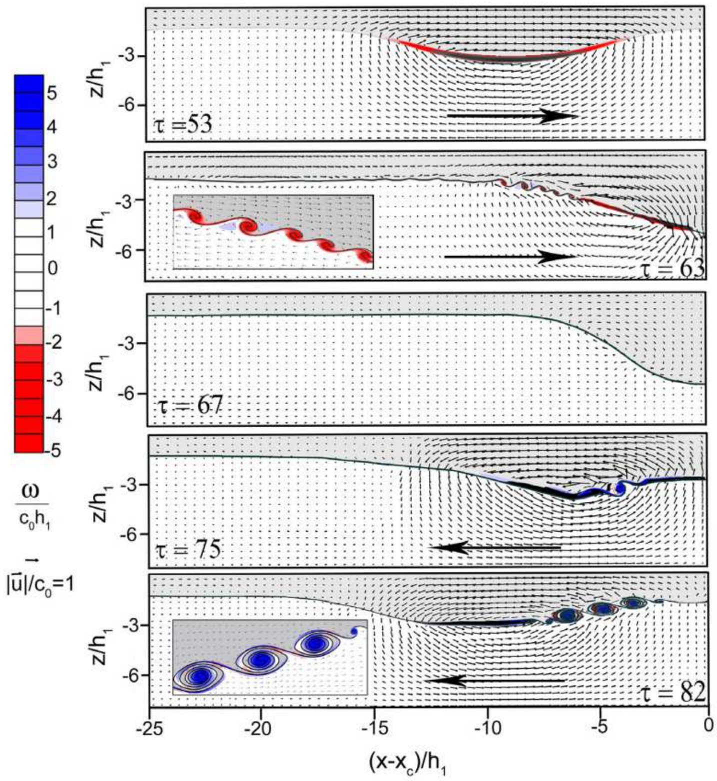

Рисунок 5.10: Нормалізовані вектори швидкості і завихоренності для лівої частини резервуара під час зіткнення хвиль для випадку (D13, D13) (див. таблицю 7.7 в додатку). Потенційно нестійкі області показано чорним кольором. Великі стрілки показують напрямки руху хвиль. Збільшене зображення в правому нижньому кутах при $\tau = 63$ і 82 показують структуру вихорів Кельвіна-Гельмгольца.

локального числа Рейнольдса $Re = \Delta U \Delta h/\nu$, де ΔU - стрибок швидкості в пікноклині з товщиною Δh. Значення числа Re на хвильовому гребені при $\tau = 75 - 186$. В'язкість зменшує швидкість росту вихорів Кельвіна-Гельмгольца при $Re = 100$, тому можна очікувати відносно слабкий вплив в'язкості на розвиток нестійкості Кельвіна-Гельмгольца. Особливістю фронтального зіткнення є відносно короткий час хвильової взаємодії і, як наслідок, короткий час можливої передачі хвильової енергії в енергію вихорів в шарі розділу. Як видно з рисунку 5.9 і 5.10, хвилі стабілізуються при $\tau = 100$. У поперечному перетині x_R хвиля рухається вправо на рисунку 5.9 і вона стійка і характеризується мінімальним числом $Ri_{min} = 0.13$, де $L_x/\lambda 0.5 = 0.85$

та $|a|/|a_{cr}| = 0.97$. Експерименти [190] та [76] показали, що при великій початковій амплітуді поверхневих хвиль при зіткненні виникає вертикальний струмінь. Цей ефект не спостерігався для внутрішніх хвиль великої амплітуди (див. рисунок 5.9 і 5.10) через невелику різницю густини між шарами, що призводить до сильної взаємодії полів течії і тиску. Нестійкість, що обумовлена фронтальним зіткнення внутрішніх хвиль відбувається за сценарієм розвитку локальної нестійкості, але глобально хвилі лишаються стійкими [53]. Хвилі втрачають масу через формування вихорів Кельвіна-Гельмгольца і через деякий час знов стають стійкими. Порівняння тонких структур всередині вихорів зображено на на рис. 5.10 при $\tau = 82$ для двох типів роздільної здатності сітки 3000×500 і 6000×1000.

На рисунку 2.14 показано поле густини у вихорах Кельвіна-Гельмгольца для випадку (D13; D13) (див. таблицю 7.7 в додатку. На цьому рисунку зображена тонка структура поля густини для різних роздільних здатностей сіток чисельної моделі. Це зроблено для перевірки того, що збільшена роздільна здатність 6000×1000 не змінює результати моделювання. Параметри хвиль при зіткненні для двох розрахункових сіток майже збігаються, що демонструє незалежність результатів моделювання моделлю NH-POM при зміні роздільної здатності. Було проведено моделювання зіткнення хвиль у стратифікованій по солі рідині з великим значенням числа Шмідта $Sc = 10$ та $Sc = 1000$. Було виявлено, що структура поля густини всередині вихорів Кельвіна-Гельмгольца на рисунку 5.11 дуже близька по структурі для $Sc = 10$ і $Sc = 1000$. Треба звернути увагу, на те, що дифузія може бути важливою при $Sc \gg 1$ лише для мілкомасштабних структур поля густини, що формуються далі в результаті нестійкості. Зокрема, параметри зіткнення (Ri_{min}, $\Delta\theta$ та $\Delta\alpha$) майже збігаються для $Sc = 10$ і $Sc = 1000$, тоді як моделювання для $Sc = 1$ показує зростання Ri_{min} і $\Delta\alpha$ за рахунок дифузії.

Вплив тривимірних ефектів, які можуть вплинути на процес взаємодії

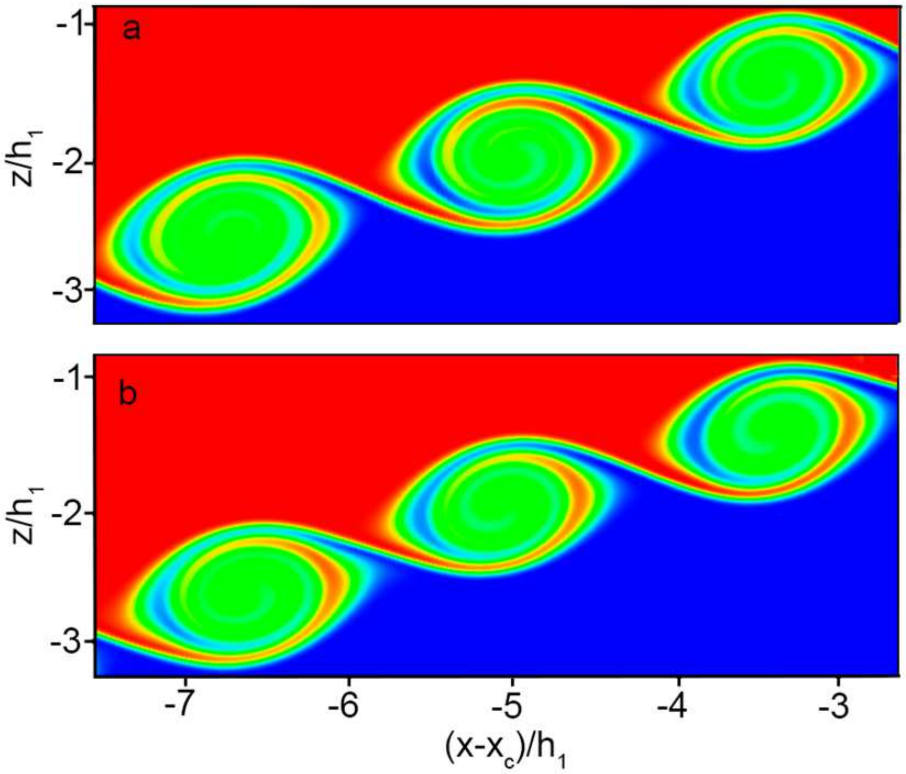

Рисунок 5.11: Поле густини у вихорах Кельвіна-Гельмгольца при зіткненні внутрішніх хвиль для випадку (D13; D13) (див. таблицю 7.7 в додатку) при (a) Sc = 10; (b) Sc = 1000.

хвиль для випадку (D13; D13) (див. таблицю 7.7 в додатку) показано на рисунку 5.12. Хвиля візуалізується ізоповерхнею із густиною $\rho = 1005$ кг м $^{-3}$ для різних моментів часу (рис. 5.12а-в). Результати порівняння розподілу густини для квазі-двовимірного експерименту та усереднений розподіл густини для тривимірного експерименту наведені на рисунках 5.12 г.

На рисунку 5.12 а-г показано, що тривимірні ефекти відносно слабкі, через короткочасну взаємодію та швидкий колапс двовимірних вихорів Кельвіна-Гельмгольца. Тому, як видно на рисунку 5.12 г, руйнування вихорів Кельвіна-Гельмгольца відбувається швидше, аніж розвивається поперечна нестійкість, що призводить до тривимірної турбулентності. Незважаючи на більш грубу роздільну здатність сітки для тривимірних обчислень, поперечна середня густина розподілу для тривимірного експерименту на рисунку 5.12 г та роз-

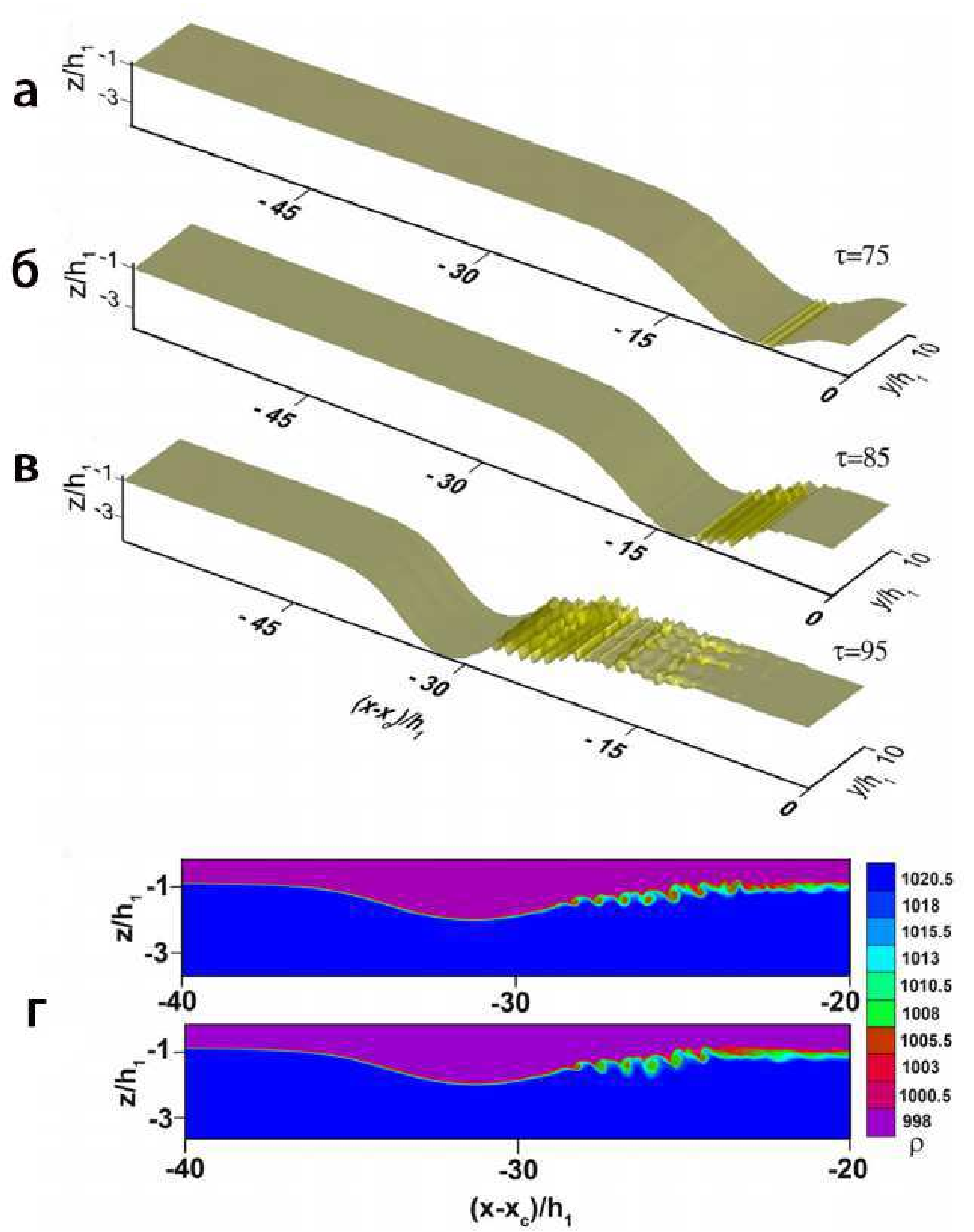

Рисунок 5.12: Тривимірна еволюція внутрішньої хвиль, яка поширюється ліворуч після зіткнення для випадку (D13; D13) (див. таблицю 7.7 в додатку) (a-b). Ця хвиля візуалізується поверхнею густини при $\rho = 1005$ кг м $^{-3}$. Розподіл густини для 2D експерименту (d) та поперечного перерізу усередненого розподілу густини для 3D-експерименту (e) при $\tau = 95$.

поділ для двовимірного експерименту досить близькі. Усереднене значення мінімального числа Річардсона (1.47) для $\tau = 75$ є 0.1, тоді як для двовимірного експерименту це 0.06. Усереднена максимальна амплітуда під час фронтального зіткнення у тривімірному випадку $\Delta\alpha = 0.153$ добре узгоджується зі значенням з двовимірного експерименту 0.15. Для подальшого аналізу будемо використовувати тільки двовимірне моделювання.

5.2.4 Взаємодія внутрішніх усамітнених хвиль різних амплітуди

Розглянемо взаємодію хвилі великої амплітуди з хвилею малої амплітуди (D12; D3) та (D12; D1) (рис. 5.13 та 5.14). Ці випадки подібні до чисельного моделювання, що було проведено в роботі [53], де нестійкість для хвилі першої моди великої амплітуд була спричинена малими збуреннями. Зіткнення хвиль великої амплітуди ($\alpha_L = 2.2$) з хвилею помірної амплітуди ($\alpha_R = 0.4$) супроводжується не тільки нестійкістю Кельвіна-Гельмгольца на більшій хвилі, але і нестійкістю меншої хвилі, як показано на рис. 5.13, де зображено зіткнення для випадку (D12; D3) (див. таблицю 7.7 в додатку). Велика хвиля після зіткнення зменшує свою амплітуду α_L на 2 %, а менша хвиля на 3%. Відхилення максимальної амплітуди при фронтальному зіткненні α_L від амплітуд хвиль α_L і α_R для $\gamma = 0.136$ показано на рис. 5.15. Чисельні експерименти в яких відбувається нестійкість Кельвіна-Гельмгольца, показана заповненими червоними колами на рис.5.15 а. Емпіричний критерій для виникнення нестійкості Кельвіна-Гельмгольца при зіткненні хвиль оцінюється з умови: $\alpha_L + \alpha_R > 2.3$. Відхилення від $\Delta\alpha$ до $\alpha_L\alpha_R$ показано на рис. 5.15 (б). Залежність $\Delta\alpha$ демонструє наявність автомодельності, яка узгоджується з слабонелінійною теорією [202] (5.1) у наближенні другого порядку.

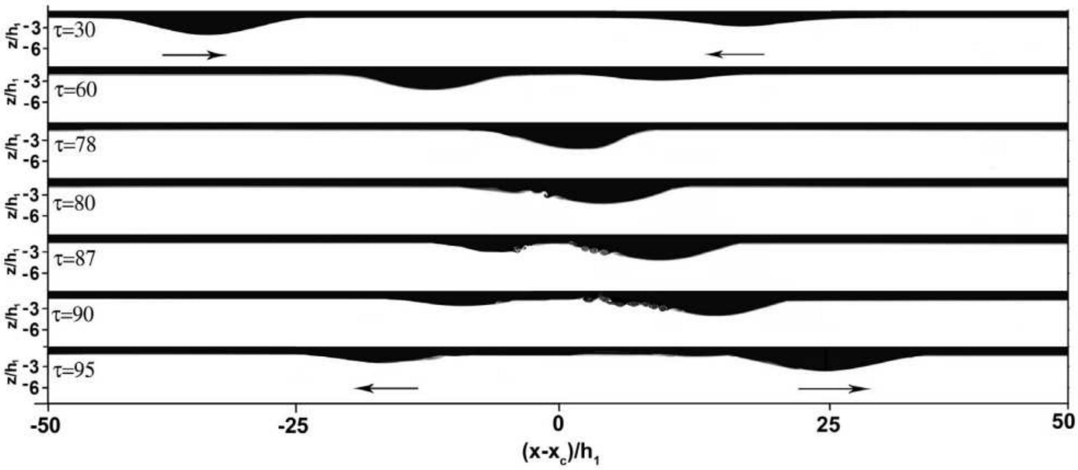

Рисунок 5.13: Асиметричне фронтальне зіткнення. Поле густини під час зіткнення хвиль великих та малих амплітуд для випадку (D12; D3)(див. таблицю 7.7 в додатку) з [258]

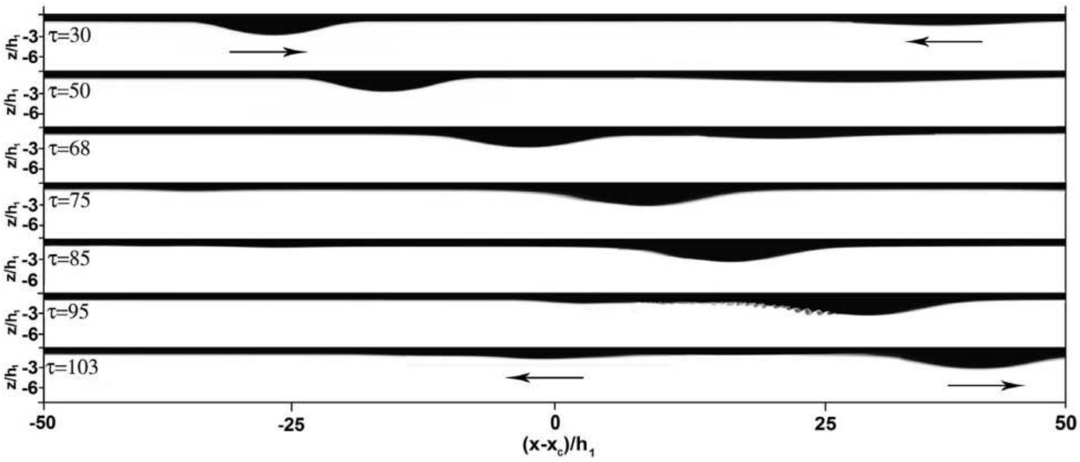

Рисунок 5.14: Асиметричне фронтальне зіткнення. Поле густини під час зіткнення хвиль великих та малих амплітуд для випадку (D12; D1) (див. таблицю 7.7 в додатку) з [258]

5.2.5 Оцінки втрат енергії при взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль першої моди

В'язке затухання енергії ΔE_{col} (1.164) для $\gamma = 0.136$ повільно зростає зі збільшенням амплітуди хвиль від 2% при $\alpha = 0.1$ до 2.2 для $\alpha = 1.3$ і до 3.5% для $\alpha = 2.26$. Втрати енергії при фронтальному зіткненні хвиль збільшується від 2 % для хвиль малих амплітуд до 6.7 % для хвиль великих

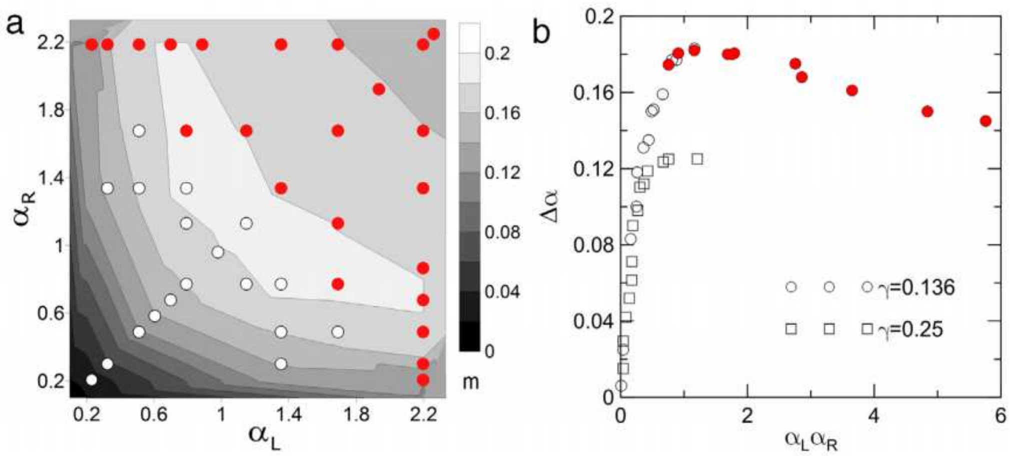

Рисунок 5.15: (а) - залежність максимальної безрозмірної амплітуди α_m від амплітуд хвиль α_R і α_L. Експерименти при яких спостерігалася нестійкість КГ відмічені заповненими колами [258]

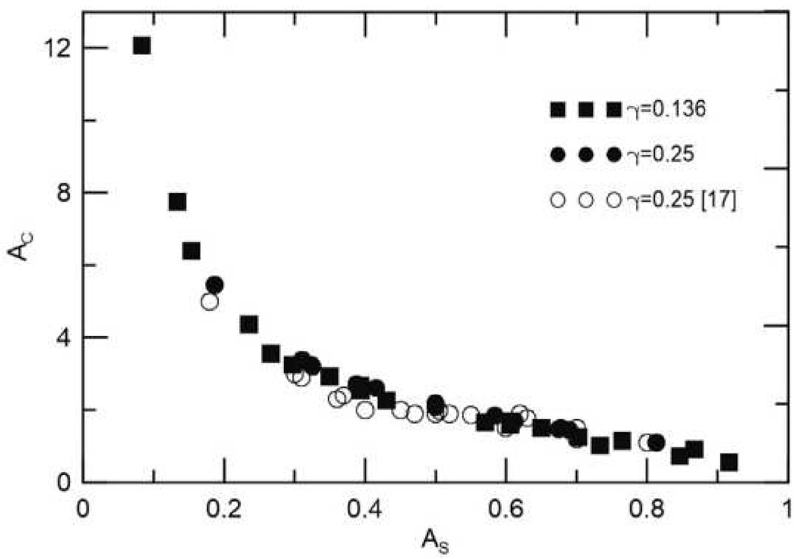

Рисунок 5.16: Порівняння амплітуди хвилі, що отримана з лабораторного експерименту [129] та за допомогою чисельного моделювання в центрі лабораторного лотка

амплітуд ($\alpha = 2.4$). Відповідні втрати енергії через зіткнення внутрішніх хвиль різних амплітуд для випадку (D12; D1) (див. таблицю 7.7 в додатку) становить 2 %, а для випадку (D12; D3) - 3.6 %. Залежність ΔE_{vis} (1.164) і ΔE_{col} від Re_w та Ri_{min} (1.47) наведені на рис. 5.17. Як видно на рис. 5.17 (а),(б), в'язке затухання повільно зростає з збільшенням Re_w, тоді як E_{col}

швидко зростає з збільшенням Re_w для хвиль малих та середніх амплітуд, а потім залишається майже постійним. Аналогічні залежності від амплітуди хвилі, відповідні значення ΔE_{vis} і ΔE_{col} меньші для $\gamma = 0.25$, ніж для $\gamma = 0.136$. Втрата енергії внаслідок в'язкої дисипації ΔE_{vis} не змінюються при $Ri_{min} > 0.15$, як показано на рис. 5.17 (в) на відміну від рис. 5.17(а), а ΔE_{vis} майже не залежить від параметру γ.

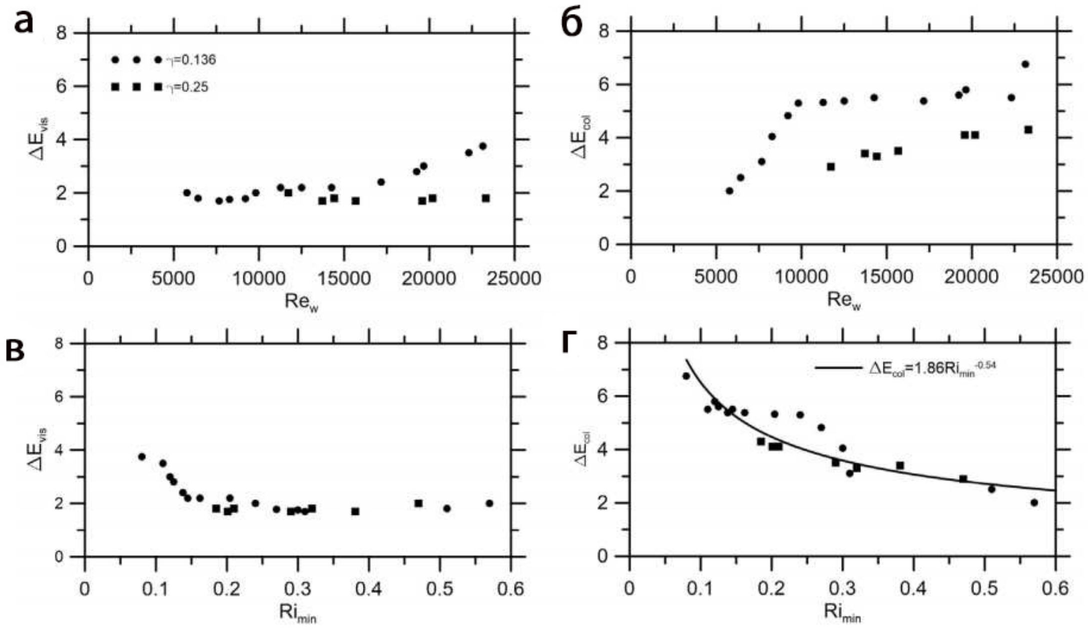

Рисунок 5.17: Втрати енергії за рахунок в'язкої дисипації ΔE_{vis} від числа Рейнольдса Re_w (a) та від мінімального числа Річардсона Ri_{min} (1.47)(c); втрати енергії внаслідок лобового зіткнення хвиль ΔE_{col} від числа Рейнольдса Re_w (b) від мінімального числа Річардсона Ri_{min} (d). Дані на ділянці (г) накладаються кривою $\Delta E_{col} = 1.8 Ri_{min}^{-0.54}$ [258]

Для хвиль першої бароклінної моди малих амплітуд $a/h_1 < 0.3$ фронтальне зіткнення призводить до формування малого фазового зсуву $\triangle\theta$ і до утворення вторинних хвиль. Фазовий зсув $\triangle\theta$ зростає при збільшенні амплітуд взаємодіючих хвиль. Перевищення максимальної амплітуди при фронтальній взаємодії над сумою амплітуд хвиль, що взаємодіють $\triangle\alpha$ також зростає, коли амплітуда збільшується, як і передбачається слабонелінійною теорією [202] (5.1). Хвилі помірних амплітуд $(0.3 < a/h_1 < 1)$ під час фронтальної взаємодії залишаються стійкими. Проте, поведінка $\triangle\alpha$ та $\triangle\theta$ вже значно відрізняється від прогнозів слабонелінійні теорії. $\triangle\alpha$ при $\alpha \simeq 1$, тоді як $\triangle\theta$ продовжує зростати, але повільніше. На відміну від хвиль малих і помірних амплітуд фронтальне зіткнення хвиль великої амплітуди супроводжувалося утворенням нестійкості Кельвіна Гельмгольца. Для хвиль рівних амплітуд, близьких до критичного значення для стійкості $\alpha_c r$ [81], зсувна нестійкість виникає навіть до зіткнення, а потім виникає знову, коли хвилі розходяться після зіткнення. Для хвиль меншої амплітуди нестійкість розвивається лише за хвилями, що розходяться після зіткнення. Тоді вихорі Кельвіна Гельмгольца, що виникли в результаті нестійкості, руйнуються, а хвилі продовжують поширюватися як стійкі усамітнені хвилі. У внутрішніх хвилях на відміну від поверхневих хвиль [190], [76] при взаємодії не виникає вертикальний струмінь.

Відхилення максимальної амплітуди $\triangle\alpha$ зменшується при $1 < a/h_1 < 2.3$, тоді як фазовий зсув $\triangle\theta$ повільно збільшується. Зроблено висновок, що зсувна нестійкість не є основним механізмом, що впливає на зменшення величини $\triangle\alpha$ для великих α, оскільки, за винятком внутрішніх хвиль дуже великих амплітуд, значення максимальної амплітуди при фронтальному зіткненні досягаються ще до розвитку стійкості. Взаємодія внутрішніх усамітнених хвиль різних амплітуд виявляє деякі нові особливості. Зокрема, взаємодія усамітнених хвиль великих амплітуд з хвилями малої амплітуди, коли амплітуди хвиль суттєво відрізняються (у 22 рази); при взаємодії може виникати нестійкість більшої хвилі та розвиток вихорів Кельвіна-Гельмгольца. Коли ж різниця в амплітудах взаємодіючих хвиль зменшується, то хвильова взаємодія супроводжується виникненням нестійкості в обох хвилях. Оцінка з усіх чисельних експериментів дає емпіричний критерій для утворення нестійкості Кельвіна-Гельмгольца при зіткненні : $a_L/h_1 + a_R/h_1 > 2.3$. Встановлено, що існування автомодельності в залежності $\triangle\alpha$ від $\alpha_R \alpha_L$ узгоджується із моделюванням [135].

Таким чином дослідження показало, що після фронтального зіткнення, навіть хвилі великих амплітудних практично відновлювали свої профілі. Втрата енергії через зсувну нестійкість не перевищує 5-6 % і хвилі залишаються глобально стійкими. Тому фронтальну взаємодію хвиль великих амплітуд першої бароклінної моди можна вважати слабкою [258].

5.3 Моделювання фронтального зіткнення внутрішніх усамітнених хвиль другої бароклінної моди

В цьому розділі буде вивчатися фронтальне зіткнення хвиль других бароклінних мод, в тому числі внутрішніх хвиль із захопленими ядрами. На даний момент динаміка фронтального зіткнення хвиль із захопленими ядрами вивчена недостатньо, але цей процес є цікавим, тому що у зіткнення залучаються і ядра, що несуть масу. Фронтальна взаємодія такого типу внутрішніх хвиль вивчалась як в лабораторних експериментах [241], [138] так і чисельно [265]. У природі дві гравітаційні течії можуть виникнути в невеликій області, де надалі вони можуть зіткнутися. В результаті чого виникає складна взаємодія. Як приклад - зіткнення фронтів морських бризів “morning glories” у північній Австралії [231], [84], або потоків важких газів [244].

Конфігурація чисельного експериментального басейна показана на рис. 5.18. Чисельний лоток довжини $L = 3\,\text{м}$ та висоти $h = 0.46\,\text{м}$, наповнений двошаровою рідиною із густиною верхнього шару ρ_1 та нижнього ρ_2 відповідно. Стратифікація в лотку симетрична відносно середини глибини лотку та описується функцією (4.1), а внутрішні хвилі генерувалися методом колапсу перемішаної рідини із густиною ρ_0. Створена таким чином хвиля розповсюджується в піконокліні зліва направо, її характеристики залежать від об’єму перемішаної рідини. Характеристики хвиль дано в таблицях 7.8 - 7.10 (див. додаток) .

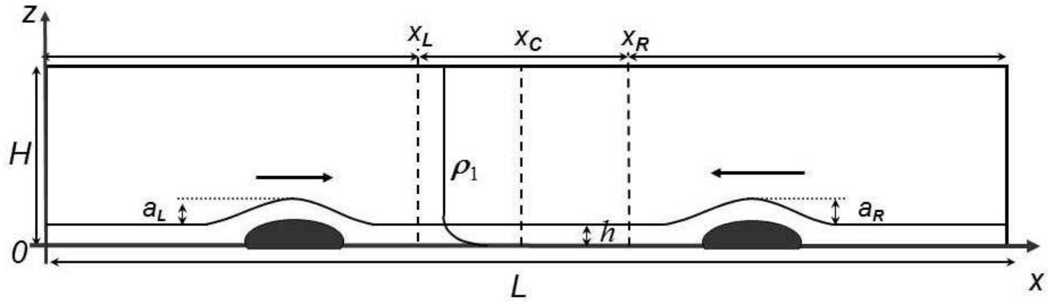

Рисунок 5.18: Схема численного експерименту

Розрахунки проводилися для верхньої половини області (половинна конфігурація). Задача розв'язувалась в квазідвумірній постановці, коли рівняння дискретизувались в декількох вузлах поперек басейну за умови ковзання на бічних стінках басейну. Роздільна здатність сітки по довжині, висоті і ширині становила 3000×300×5 вузлів для "половинних"конфігурацій і 3000×600×5 для моделювання повного лотка.

Чисельні експерименти проводилися для хвиль різних амплітуд. Результати численних експериментів з фронтального зіткнення хвиль, а також характеристики хвиль до зіткнення та такі величини як товщина пікнокліну h, амплітуда хвилі a, довжина хвилі $\lambda_{0.5}$, відношення ε, безрозмірна амплітуда α, числа Фруда Fr_{max} (4.9), мінімальне число Річардсона Ri_{min} (1.47), число Рейнольдса Re_m (4.6) та клас хвилі для серії експериментів A-D наведені в таблицях 7.8 - 7.10 (див. додаток).

5.3.1 Взаємодія слабонелінійних усамітнених хвиль без захоплених ядер однакових амплітуд

Розглянемо взаємодію слабонелінійних хвиль без захоплених ядер рівних амплітуд $\alpha = 0.81$ (експеримент (A2; A2) див. таблицю 7.8 в додатку). Вона зображена на рис 5.19a. Хвиля зберігає свій профіль, а амплітуда зменшується за рахунок в'язкого тертя (рис.5.19a). Присутній невеликий фазовий зсув (див. таблицю 7.8 в додатку), але в цілому при даному типі взаємодії відхилення від еластичної взаємодії мінімальні. У випадку двошарової стратифікації, в якій один з шарів вважається нескінчено глибоким, слабонелінійна теорія [189] передбачає величину надлишку $\Delta\alpha$ максимального заплiску хвиль при зіткненні α_m по відношенню до суми амплітуд як:

$$\Delta\alpha = \alpha^2. \tag{5.4}$$

У той же час нормалізований на характерний час фазовий часовий зсув $\Delta\Theta$:

$$\Delta\Theta \sim \alpha. \tag{5.5}$$

Наявність фазового зсуву при зіткненні хвиль із замкненими ядрами для значення $\alpha = 0.98$ було показано в лабораторних експериментах [125]. Зсув по часу був оцінений при порівнянні траєкторій вершин з та без зіткнення. Як видно з рис. 5.21 відносний максимальний заплiск $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ та $\Delta\Theta$ зростають при зростанні амплітуди для малих значень α, як і передбачається слабонелінійною теорією.

5.3.2 Взаємодія внутрішніх усамітнених хвиль із захопленими ядрами однакових помірних амплітуд

Даний тип взаємодії найбільш цікавий, тому що його особливістю є те, що до зіткнення хвилями є такими хвилями,що переносять масу, а після зіткнення вони трансформуються в слабонелінейні хвилі. На рис.5.19 (б) показано зіткнення хвиль у випадку, коли амплітуди та характеристики хвиль, що набігають $a/h = 1.6$ ($Fr_{max} = 1.11$, $Ri_{min} = 1.1$), (експеримент (A5;A5) (див. таблицю 7.7 в додатку)). При русі така хвиля повільно втрачає забарвлену рідину з ядра, як це і спостерігалося в лабораторних експериментах [70] та [178]. Розглянемо тепер, що відбувається з профілем хвилі при зіткненні. На рис.5.27 показано профілі хвилі - до зіткнення в перетині x_l : це профіль

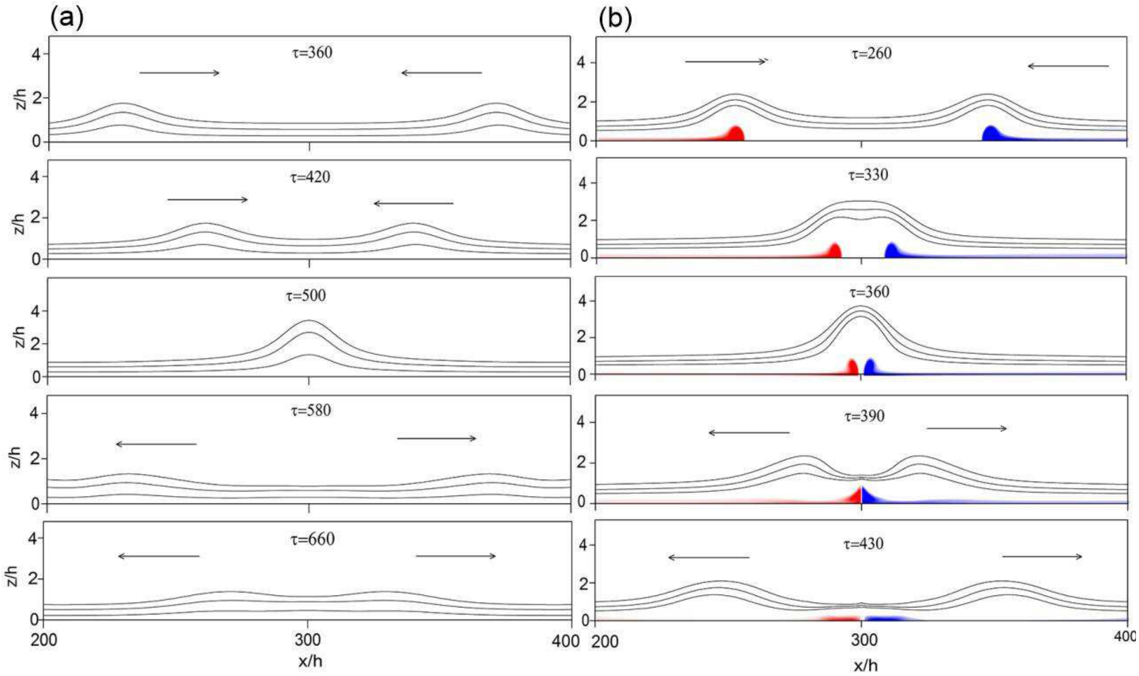

Рисунок 5.19: Взаємодія слабонелінійних усамітнених хвиль без захоплених ядер рівних амплітуд $a/h = 0.81$ (експеримент A2; A2) та $a/h = 1.6$ (експеримент A5; A5)(див. таблицю 7.8 в додатку) [181].

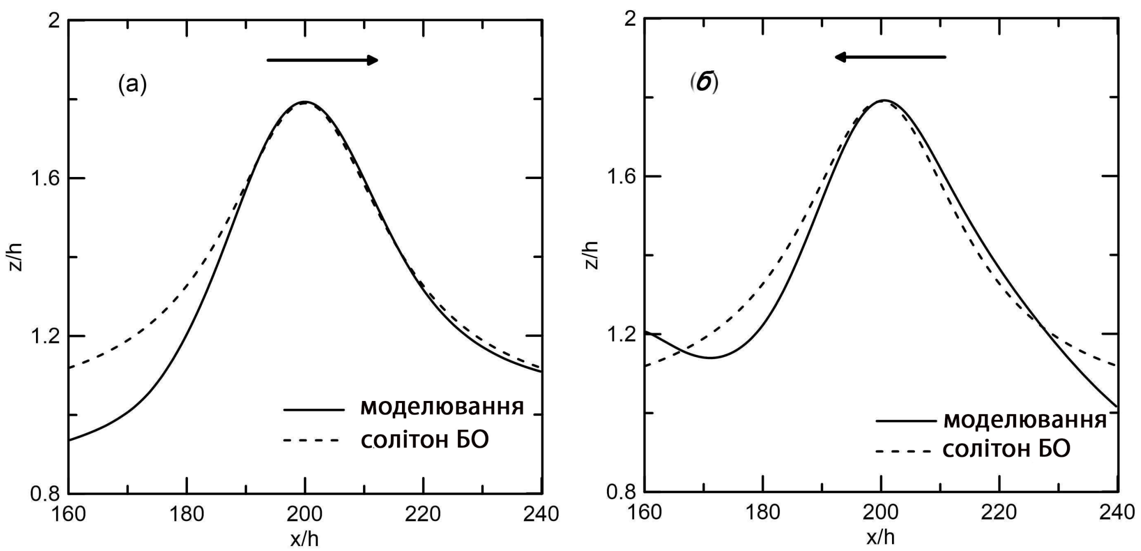

Рисунок 5.20: Профіль хвилі перед (а) і після (б) зіткнення в порівнянні з профілем солітону Бенджаміна-Оно (1.124) в перетині x_L (експеримент A2; A2)(див. таблицю 7.8 в додатку) [181].

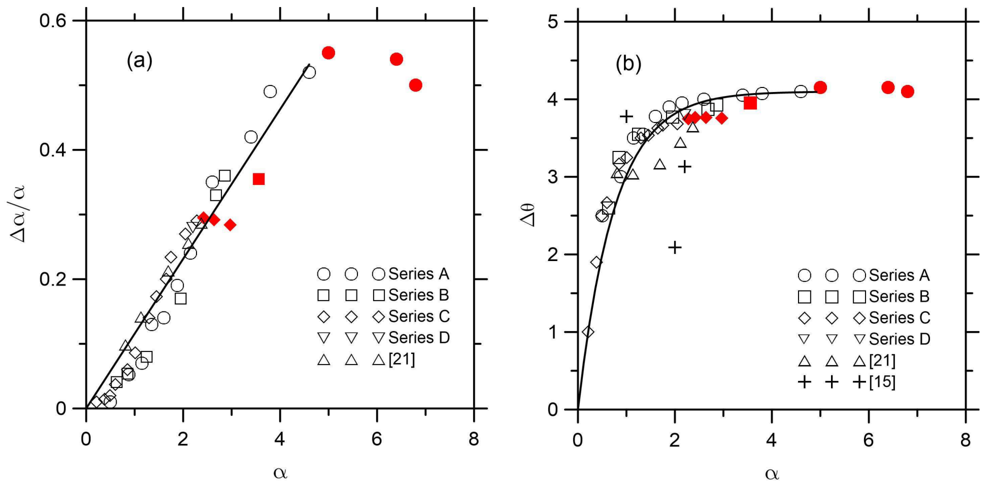

Рисунок 5.21: Відносний надлишок амплітуди хвиль при взаємодії (а) та фазовий зсув (б) для випадку симметричних хвиль. Заповненими символами позначені експерименти в яких спостерігалася нестійкість Кельвіна-Гельмгольца. [181].

хвилі, що переносить масу з амплітудою $a/h = 1.6$ та профіль хвилі після взаємодії з амплітудою $a/h = 1.1$ $(Fr_{max} = 1., Ri_{min} = 1.2)$. Видно, що відбита хвиля не схожа за формою профілю на хвилю, що набігає, а наближається до аналітичного солітону Бенжаміна-Оно, а амплітуда її падає на третину. Втрати енергії для цього чисельного експерименту максимальні і становлять близько 13%. Слід зазначити, що при поширенні хвилі з амплітудами трохи більше критичних хвиля також втрачає енергію при переході через критичне значення - її амплітуда різко падає, а от довжина відбитої хвилі деякий час залишається незмінною. При значеннях амплітуд близьких до критичної наявність "полички"з однаковим значенням довжини хвилі також було отримано в численних експериментах з роботи [248].

5.3.3 Взаємодія стійких хвиль із захопленими ядрами

Хвилі великих амплітуд із стійкими ядрами та зі значеннями числа Фруда в діапазоні $1.2 < Fr_{max} < 1.3$ та числа Річарсона $0.15 < Ri_{min} < 1$ характеризуються стійкими хвилями із замкненими ядрами, що довго збе-

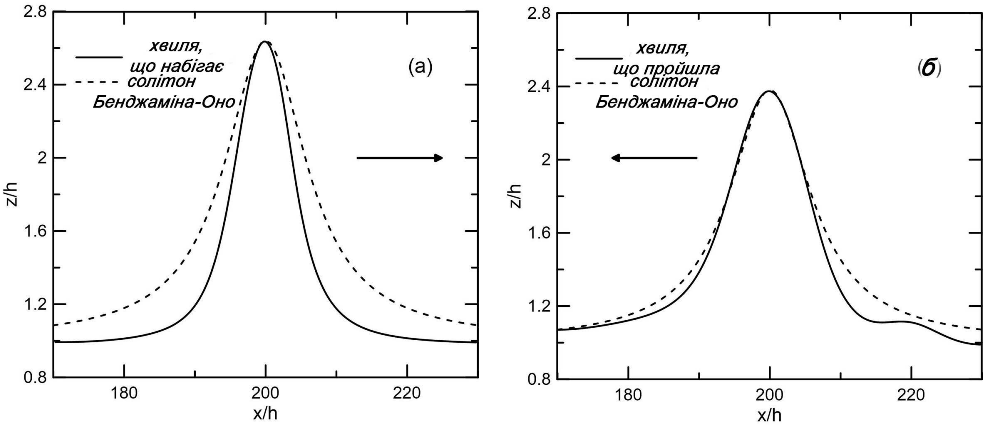

Рисунок 5.22: Профіль хвилі перед (а) і після (б) зіткнення в перетині x_L в експерименті A5; A5 (див. таблицю 7.7 в додатку). [181].

рігають свою форму. На рис. 5.23 (а) показано еволюцію хвилі із амплітудою $a/h = 3.3$ (експеримент (A9; A9)) з параметрами $Fr_{max} = 1.28$ and $Ri_{min} = 0.25$. Утворені хвилі є стійкими і досить довгий час після колапсу поводяться подібно твердим тілам солідонам - від слова solid [16], так як завихореність у ядрах цих хвиль є незначною в порівнянні із завихореністю за межами ядра. На рис. 5.23 (а) показано випадок зіткнення для хвиль з $a/h = 3.3$. Як видно з рисунку захоплені ядра взаємодіють при зіткненні разом із хвилями. Ядра не перемішуються під час зіткнення, що також спостерігалося в лабораторних експериментах [125]. Після фронтального зіткнення хвилі, що пройшли захоплюють ядра із забарвленою рідиною. Як видно з рисунка об'єми рідини взаємодіють разом з хвилями. При цьому мають місце малі втрати маси. На рис. 5.24 процес взаємодії показано у деталях. На рисунку зображена еволюція поля швидкості, завихоренності та трансформація ізопікни. Спочатку перед зіткненням захоплені ядра майже торкаються одне одного. Вони формують вихрову пару,що захоплює та підіймає рідину вгору. У момент зближення між захопленими ядрами утворюється вертикальний струмінь (рис. 5.24 б) з максимальною швидкістю $v = 3$, а потім рідина, що була виштовхнута струменем, розтікається та обтікає ядра, що злились.Цей момент відповідає максимуму потенційної енергії, та мінімуму кінетичної енергії. На відміну від хвиль малих амплітуд, що не переносять масу в цей момент кінетична енергія не обертається в нуль, так як потік, у ядрах змінює знак при взаємодії. Таким чином захоплені ядра не перемішуються при зіткненні, що також було відзначено в лабораторних експериментах [138].

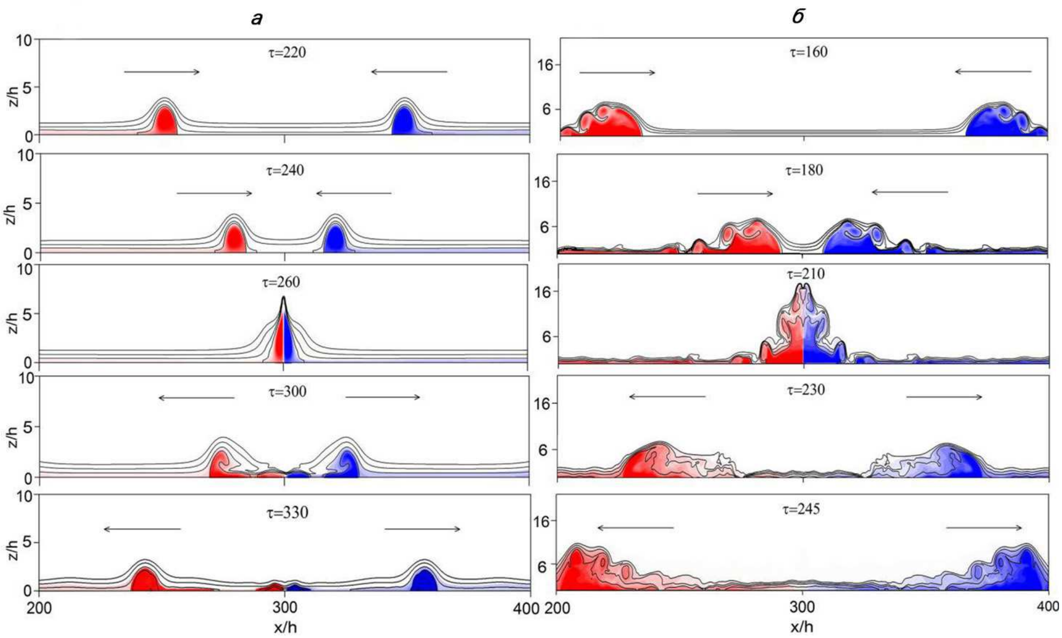

Рисунок 5.23: Еволюція ізопікн під час взаємодії для випадків (a) (A9; A9), (b) (A13; A13) (див. таблицю 7.7 в додатку) [181].

Потім формуються відбиті хвилі, які не можуть захопити забарвлену рідину, тому що вона відстає від захоплених ядер, які переносить масу. Таким чином відбувається скидання маси, а відбита хвиля трансформується в нову структуру. За абсолютним значенням максимальна швидкість впала на 8 %. При цьому густина в захопленому ядрі зменшується. Таким чином, сформувалася нова хвиля із захопленим ядром, у якій ядро та швидкість стали менше. Треба відзначити, що шар розділу після зіткнення хвиль збільшився, і фактична нормована амплітуда відбитої хвилі буде менше ніж вказано в таблиці 7.7 в додатку. На підставі проведеного аналізу, можна зробити висновок, що взаємодія між хвилями із захопленими ядрами не є еластичною, хоча втрати енергії при цьому відносно невеликі, і дорівнюють 7%.

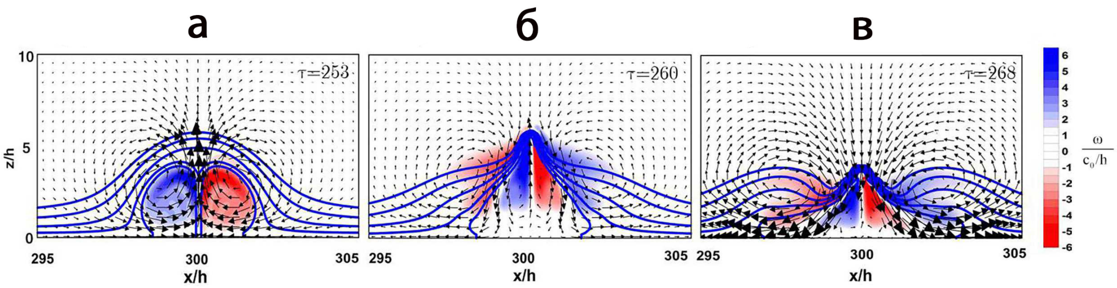

Рисунок 5.24: Деталі взаємодії хвиль з однаковими амплітудами $\alpha = 3.3$. (A9; A9) (див. таблицю 7.7 в додатку) [181]

Як видно з рис. 5.21, величина надлишку $\Delta\alpha$ максимального заплiску хвиль при фронтальному зіткненні для стійких хвиль із захопленими ядрам зростає майже за лінійним законом у діапазоні $2.3 < \alpha < 4.6$, в той час як зростання фазового зсуву θ поступово зменшується при $\alpha > 1$, а потім прямує до постійного значення при $\alpha > 4$. Зміни $\Delta\alpha$ та θ показано на рис. 5.21 для стійких хвиль апроксимуються лінійною та експоненційною залежністю відповідно, які мають в основі асимптотики зі слабонелінійної теорії $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \sim \alpha$ та $\Delta\theta \sim \alpha$ [189] для малих α, та отримана з чисельних експериментів залежність для $\Delta\theta$ для великих значень α

$$\Delta\alpha = 0.116\alpha, \tag{5.6}$$

$$\Delta\theta = 4.1(1 - exp(-1.33\alpha)). \tag{5.7}$$

Динаміка хвиль рівних амплітуд другої моди під час фронтального зіткнення подібна до відбиття хвилі від вертикальної стінки. Були проведені розрахунки, що повторюють лабораторні експерименти з роботи [241] про накат хвилі із захопленим ядром на вертикальну стінку (експеримент D1) .

В даному випадку характеристики хвилі такі $a/h = 2.2$, $\Delta\rho = 0.05$ $h = 0.0025$ та $Fr_{max} = 1.18$, $Ri_{min} = 1.05$. Хвиля належить до класу (ii), На рис.5.26 показано якісне порівняння результатів моделювання з експериментом. З рис. 5.26 видно, що відбиття від вертикальної стінки у випадку чисельних розрахунків та лабораторного експерименту схожі і видно, як об'єм рідини відбивається від стінки. Також траєкторії вершини хвилі у обох випадках співпадають (рис.5.26).

5.3.4 Взаємодія хвиль із захопленими ядрами з появою нестійкості Кельвіна-Гельмгольца

Хвилі із захопленими ядрами великих амплітуд $Fr_{max} \sim 1.3$ з $R_{min} = 0.1$ належать до класу (iii), який характеризується локальною зсувною нестійкістю, що викликає локальну нестійкість Кельвіна-Гельмгольца [173]. Глобально, однак, хвиля може бути стійкою, що було відмічено в [53]. На рис. 5.23 показана взаємодія хвиль із захопленими ядрами різних амплітуд $\alpha = \alpha_L = \alpha_R = 6.4$ (експеримент (A13; A13), з параметрами $Fr_{max} = 1.31$ і $Ri_{min} = 0.06$. Для випадку (A9; A9) зіткнення захоплений ядер відбувається із утворенням нестійкості та формуванням вихорів, що викликають перемішування. При поширені таких хвиль амплітуди поступово затухають за рахунок втрати маси із захоплених ядер. В океані та більшості лабораторних експериментів числа Шмідта мають значення $700 - 800$. Розміри розрахункової сітки, що використовується не дозволяють моделювати неоднорідності у полі солоності (густини). Тому важливо оцінити ефект молекулярної дифузії солоності на динаміку хвиль та перевірити можливість знехтувати дифузією при великих значеннях числа Шмідта Sc. Були розглянуті два експерименти (A9; A9) та (A13; A13) (див. таблицю 7.7 в додатку) для трьох значень числа Шмідта (4.7) $Sc = 1$, 10, та 1000. Для випадку зіткнення хвиль (A9; A9) динаміка хвиль однакова та різниця в значеннях $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ та ϑ для $Sc = 1$ та $Sc = 1000$ менша за 1%. Порівняння поля густини для випадку хвиль (A13; A13) для різних значень числа Шмідта показана на рис. 5.25.

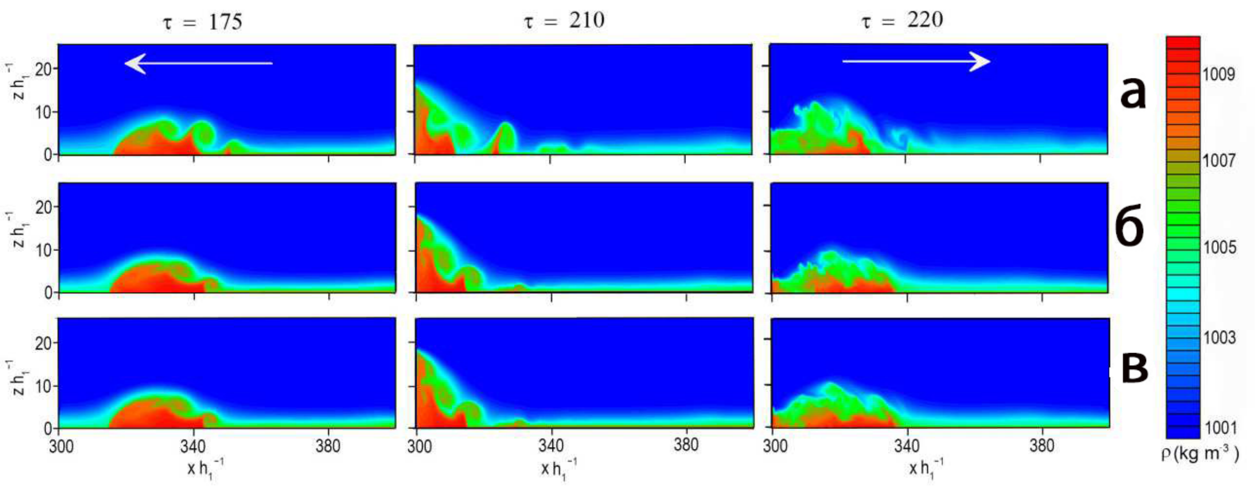

Рисунок 5.25: Порівняння еволюції поля густини (половина області) під час зіткнення внутрішніх хвиль із захопленими ядрами для випадку (A13; A13) (див. таблицю 7.7 в додатку) для різних значень числа Шмідта (4.7) (а) $Sc = 1$, (б) $Sc = 10.$, (в) $Sc = 1000$.

На рис. 5.25 можна побачити різницю в еволюції поля густини для випадків різних значень числа Шмідта $Sc = 1$ and $Sc = 10$. При цьому відповідні значення $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ та ϑ відрізняються на 5 та 0.6 % відповідно. Що знаходиться у відповідності з результатами з роботи [89] де показано, що значний ефект молекулярної дифузії на перенос маси хвилями другої моди відбувається в межах значень числа Шмідта $1 < Sc < 20$. Результати моделювання при значеннях $Sc = 10$ та $Sc = 1000$ на рисунку 5.25 майже співпадають, що показує що молекулярна дифузія може не враховуватися, коли вивчаються глобальні властивості хвиль, що взаємодіють. Цей висновок знаходиться у відповідності з результатами моделювання [89] відповідно до яких перенос маси не залежить від числа Шмідта при $Sc > 20$. Як видно з рис.5.24 хвилі із захопленими ядрами, що підходять до місця зіткнення стійкі, незважаючи на великі амплітуди. Мінімальне число Річардсона (1.47)падає до значень 0.18. Однак при зіткненні хвиль із захопленими ядрами, як і в попередньому випадку виникає інтенсивний струмінь, який обтікає об'єми рідини, які злилися, а потім цей потік спричиняє зсувну нестійкість, при якій числа Річардсона (1.47) падають до значень 0.08, що призводить до утворення нестійкості у хвилях, які формуються після зіткнення.

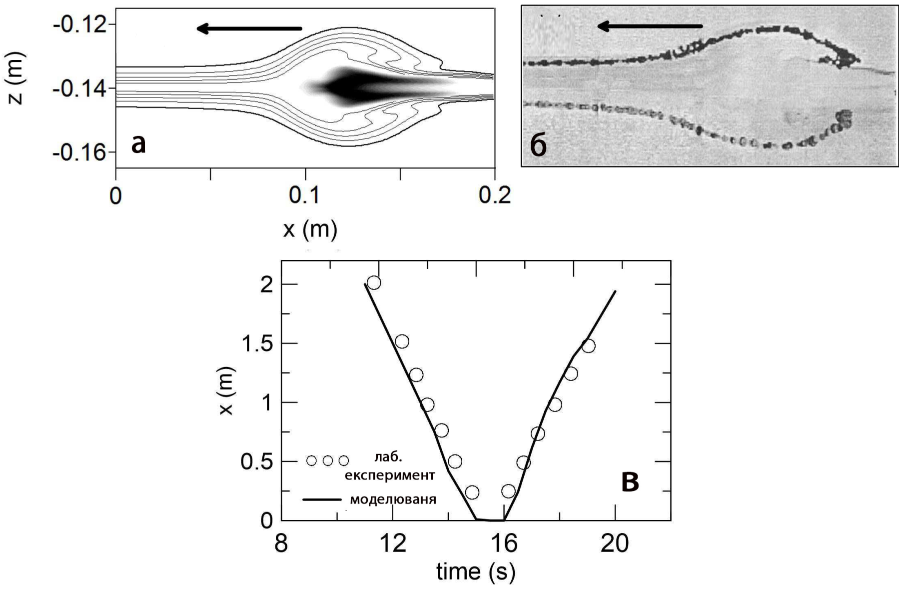

Рисунок 5.26: Порівняння результатів моделювання відбиття від вертикальної стінки (D1) з лабораторним експериментом [241].(а) та (б)- порівняння поля густини при t=16 s. (в) -просторово-часова діаграма відбиття від вертикальної стінки

5.3.5 Взаємодія хвиль із захопленими ядрами з різними амплітудами

Розглянемо фронтальне зіткнення хвиль різних амплітуд. В лабораторних експериментах даний тип взаємодії майже не досліджено. Така взаємодія розглядалась в роботі [241], однак там не були наведені характеристики хвиль, що взаємодіють. Характеристики хвиль, що взаємодіють (A9 та A7) та (A11 та A1) наведені в таблиці 7.8. На рис. 5.27 показана взаємодія для двох випадків. У першому варіанті (рис. 5.27 а) розглянемо дві стійки нелінійні хвилі із захопленими ядрами з амплітудою $\alpha_L = 3.3$ та з $Fr_{max} = 1.28$, $Ri_{min} = 0.25$ амплітудою $\alpha_R = 2.15$ з $Fr_{max} = 1.16$, $Ri_{min} = 0.4$) . Як видно з рисунку (рис. 5.27 а) частина захопленого ядра рідини від хвилі більшої амплітуди захоплюється із меншої хвилі та переноситься без суттєвого перемішування. Зіткнення іншого типу, а саме хвиль малих амплітуд з класу (і) з хвилям з захопленими ядрами великих амплітуд (іі). Розглянемо випадок взаємодії (A11; A1) (рис. 5.27 б) для того, щоб вивчити механізм "запуску"нестійкості в хвилі великої амплітуди через взаємодію із хвилею з маленькою амплітудою. Такий механізм спостерігався для хвиль першої моди в роботі [53] та для випадку фронтального зіткнення хвиль першої бароклінної моди у розділі 5.2.3. Результати моделювання представлено на рис.5.27 б. Як видно з рисунку хвиля маленької амплітуди з характеристиками $\alpha_L = 0.5$, $Fr_{max} = 0.33, Ri_{min} = 81$, запускає утворення нестійкості в хвилі, амплітуда якої у 10 разів більша $\alpha_L = 4.6$, $Fr_{max} = 1.3$, $Ri_{min} = 0.15$. Параметри великої хвилі близькі до критичних значень, при яких може розвиватися нестійкість. Амплітуда хвилі A1 зменьшується в процесі взаємодії за рахунок в'язкості при малих числах Рейнольдса ($Re_m = 45.1$). Траєкторії вершин взаємодіючих хвиль показано на рис. 5.28 так само для двох випадків (A9;A7) та (A1; A11). Як видно з рисунку рис.5.28 а, траєкторія хвилі більшої амплітуди, що поширювалася зліва направо, зазнала менших змін через зіткнення аніж менша хвиля, тоді як фазовий зсув та зменшення фазової швидкості для меншої хвилі, що поширювалася справа наліво, були значно більшими.

З графіків траєкторій вершин хвиль різних амплітуд видно, що траєкторія хвилі більшої амплітуди в меншій степені піддаються змінам при зіткненні. У першому експерименті найбільш стійка хвиля із захопленим ядром з амплітудою $a/h = 3.3$ - її амплітуда незначно зменшується, а траєкторія залишається майже незмінною. У другому експерименті $a/h = 4.5$ хвиля з амплітудою після зіткнення стає нестійкою при утворенні нестійкості Кельвіна-

Гельмгольца, внаслідок чого її швидкість при подальшому русі падає.

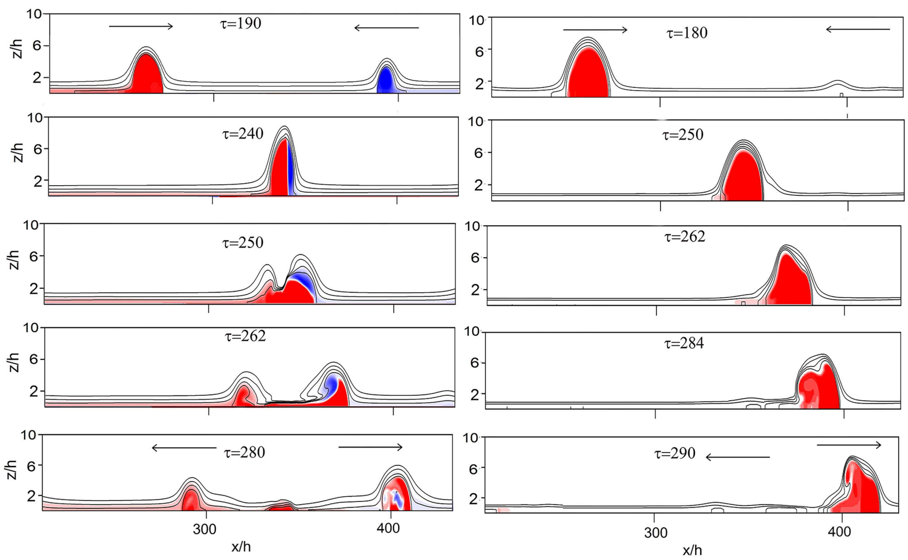

Рисунок 5.27: Еволюція ізопікн під час зіткнення внутрішніх хвиль з різними амплітудами (а) - випадок (A9; A7) та (б)- випадок (A11;A1) (b) (див. таблицю 7.7 в додатку).

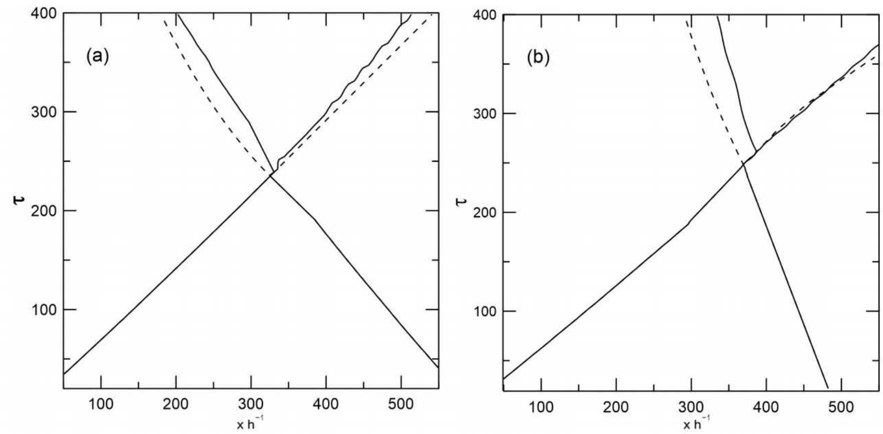

Рисунок 5.28: Просторово-часові діаграми для траєкторій двох внутрішніх хвиль різної амплітуди, при зіткненні. (а) випадок (A9; A7). (б) випадок (A11; A1) (див. таблицю 7.7 в додатку). Діаграми для хвиль без взаємодії показано пунктирними лініями.

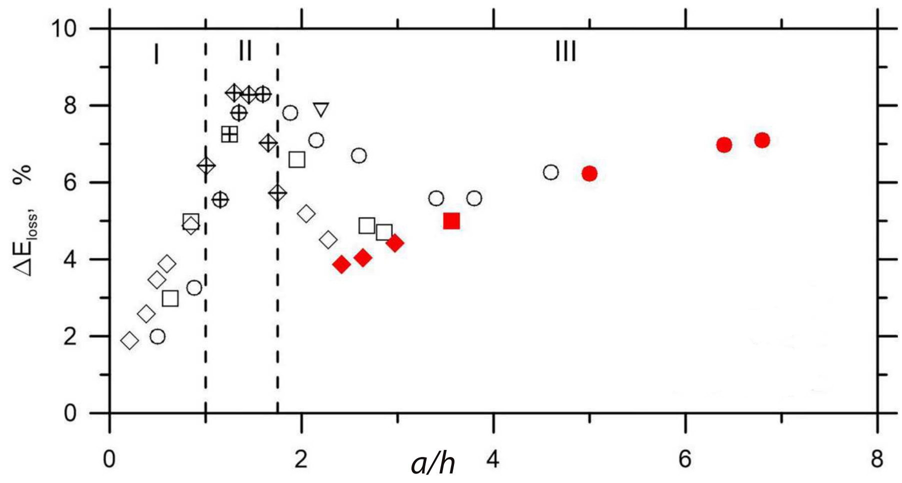

Рисунок 5.29: Втрати енергії порівняно з амплітудою рівного зіткнення хвиль. Заповнені символи відповідають випадкам з нестійкістю. Перекреслені символи відповідають випадкам, коли при зіткненні хвиль втрачається маса з захоплених ядер.

5.3.6 Оцінки втрат енергії при взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль другої моди

Важливою характеристикою взаємодії є оцінка втрат енергії при зіткненні хвиль. Втрати енергії за рахунок перемішування, переходу в недоступну фонову потенційну енергію і дисипації можуть бути оцінені, виходячи з бюджету енергії хвиль до і після взаємодії згідно підходу з розділу 1.4.2. Використавши аналіз розмірності $\Delta E_{loss} = \Phi(\alpha, Re_m, Sc)$, де Φ - функція трьох аргументів. Припустимо автомодельність по параметрам Re_m, Sc та залежність ΔE_{loss} від α. Графік втрат енергії при зіткненні показано на рис 5.21. Як видно з графіку, ця залежність для симетричного зіткнення $(\alpha = \alpha_L = \alpha_R)$ не є монотонною та універсальною, та змінюється від серій до серії експериментів. Залежність ΔE_{loss} може бути розділена на три різних режими. В діапазоні $0 \leq \alpha \leq 1$ (режим (i)), втрати енергії при взаємодії зростають з ростом амплітуди, що відповідає слабонелінійній теорії хвиль без захоплених ядер. У діапазоні $1 \leq \alpha \leq 1.75$ режим (ii) втрати енергії досягають свого максимуму, для цього режиму притаманний механізм втрати захоплених ядер при взаємодії. Цей факт пояснює максимум у втратах енергії під час взаємодії. У діапазоні (iii) $1 < \alpha < 1.75$ втрати енергії також немонотонні та залежність не є автомодельною. Діапазону $1.75 \leq \alpha \leq 4$ відповідають стійкі хвилі із захопленими ядрами, адже при збільшені амплітуди взаємодія супроводжується розвитком нестійкості і таким чином втрати енергії зростають. Відсутність повної автомодельності по числам Рейнольдса та Шмідта також означає, що рівняння Ейлера не описують процес взаємодії хвиль на глибокій воді навіть для діапазону стійких хвиль. Неповна автомодельність виходячи з [1] має бути у вигляді $\Delta E_{loss} = \Phi(\alpha) Re_m^m Sc^n$, але переформування не дає універсальної залежності. Причина цього у різних механізмах, що керують процесами при зіткненні хвиль у режимах (i)-(iii): нелінійна взаємодія, колапс захоплених ядер та нестійкість. Іншим фактором, що впливає на взаємодію, можуть бути ефекти в'язкості [89].

5.4 Висновки до розділу 5

Показано, що фронтальна взаємодія усамітнених хвиль великих амплітуд першої та другої бароклінних мод значно відрізняється від прогнозів слабонелінійні теорії. На відміну від хвиль малих і помірних амплітуд зіткнення хвиль великої амплітуди супроводжується утворенням нестійкості Кельвіна-Гельмгольца.

Вперше продемонстровано, що взаємодія внутрішніх хвиль другої моди відбувається по-різному в залежності від типу хвиль. Причина цього у різних механізмах, що керують динамікою хвиль різних типів: нелінійна взаємодія, колапс захоплених ядер, нестійкість та ефекти в'язкості.

Для хвиль першої моди малих амплітуд $a/h_1 < 0.3$ зіткнення призводить до формування малого зсуву фази $\triangle\theta$ і утворення вторинних хвиль. Фазовий зсув $\triangle\theta$ зростає при збільшенні амплітуд взаємодіючих хвиль. Перевищення максимальної амплітуди при фронтальній взаємодії над сумою амплітуд хвиль, що взаємодіють $\triangle\alpha$ зростає, коли амплітуда хвиль збільшується, як і передбачається слабонелінійною теорією [202]. Хвилі помірних амплітуд ($0.3 < a/h_1 < 1$) під час фронтальної взаємодії залишаються стійкими. Показано, що при зростанні амплітуд зіткнення хвиль супроводжується утворенням нестійкості Кельвіна-Гельмгольца. Вперше показано, що для хвиль однакових амплітуд, близьких до критичного значення стійкості α_{cr} [81], зсувна нестійкість виникає ще до зіткнення, а потім виникає знову, коли хвилі розбігаються. Вихорі Кельвіна-Гельмгольца, що виникли в результаті нестійкості, руйнуються і хвилі продовжують поширюватися як стійкі усамітнені хвилі. Показано, що у випадку внутрішніх хвиль, на відміну від поверхневих, при фронтальній взаємодії не виникає вертикальний струмінь [190]. Продемонстровано, що зсувна нестійкість не є основним механізмом, що зумовлює зменшення $\triangle\alpha$ при великих значеннях α. Було виявлено, що при взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль суттєво різних амплітуд (наприклад, при різниці у 22 рази) може виникати нестійкість КГ в більшій хвилі. Коли ж різниця між амплітудами зменшується, то фронтальна хвильова взаємодія супроводжується виникненням нестійкості КГ в обох хвилях. Отримано емпіричний критерій для утворення нестійкості КГ при зіткненні: $a_L/h_1 + a_R/h_1 > 2.3$. Встановлено, що існування автомодельної залежності $\triangle\alpha$ від $\alpha_R\alpha_L$ узгоджується із даними чисельних експериментів [135]. Показано, що після фронтального зіткнення, навіть хвилі великих амплітуд практично відновлюють свої профілі з деяким фазовим зсувом та появою вторинних дисперійних хвиль. Втрата енергії через зсувну нестійкість не перевищує 5 - 6 %, при цьому хвилі залишаються глобально стійкими. Втрати енергії внаслідок в'язкості та внаслідок взаємодії є відносно слабкими. Тому така взаємодія вважається слабкою [202].

Показано, що взаємодія внутрішніх хвиль другої моди відбувається по-різному в залежності від типу хвиль, які були описані в розділі 4.1. Це є наслідком різних механізмів, що керують динамікою хвиль другої бароклінної моди різних типів: нелінійна взаємодія, колапс захоплених ядер, нестійкість та ефекти в'язкості. Для випадку хвиль другої моди взаємодію при фронтальному зіткненні можна розділити на три типи, відповідно до класу хвиль: (i) слабонелінійні хвилі без замкнених ядер $(Fr < 1; Ri >> 1)$ (ii) стійкі сильнонелінійні хвилі із замкненими ядрами $Fr < 1.2; Ri > 0.15)$ (iii) нестійкі сильнонелінійні хвилі $(Fr = 1.3, Ri < 0.1)$.

Хвилі із класу (ii) із нормалізованими амплітудами у діапазоні $(1; 1.75)$ втрачають масу з захоплених ядер під час зіткнення. При взаємодії стійких хвиль із захопленими ядрами $(1; 3)$ великих амплітуд (ii) відбувається захоплення ядер хвилями, що пройшли із невеликими втратами енергії. При зіткненні хвиль класу (iii) виникає нестійкість Кельвіна-Гельмгольца, що призводить до інтенсивного перемішування та зменшення амплітуд після зіткнення. Залежність втрат енергії від амплітуди хвилі не є монотонною. Таким чином взаємодія внутрішніх усамітнених хвиль не є еластичною, та хвилі, що утворилися після взаємодії, відрізняються від початкових хвиль.

Розділ 6

КЛАСИФІКАЦІЯ РЕЖИМІВ НАКАТУ ВНУТРІШНІХ УСАМІТНЕНИХ ХВИЛЬ НА ТРАПЕЦІЇДАЛЬНИЙ ШЕЛЬФ

Внутрішні хвилі трансформуються і розсіюються, коли вони перетинають різкі зміни дна в прибережних океанах і в закритих водоймах. В роботі вже розглядалась взаємодія внутрішніх усамітнених хвиль першої моди з підводними перешкодами 3.6, обвалення та трансформація хвиль на плавно неоднорідному дні 3.5 та трансформація при проходженні над підводною сходинкою 3.1.

В цьому розділі проводиться класифікація типів взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль із трапеціїдальним дном. Випадки трансформації внутрішніх усамітнених хвиль із похилим дном 3.5 та підводною сходинкою 3.1 є граничними випадками такої класифікації. Під час трансформації внутрішніх хвиль у шельфових зонах важливі два механізми: (i) обвалення хвилі, що призводить до перемішування, і (ii) зміна полярності початкової хвилі-пониження на хвилю-підвищення на схилі. Критерії обвалення хвиль на схилах обговорюються в роботах [51],[66] [122], [269]. Розташування областей, де відбувається обвалення хвиль, які визначається як локалізована область, де перемішування істотно збільшуються порівняно з фоновими значеннями, знаходиться з емпіричних співвідношень, які знайдені в роботах [51], [66]. В даному дослідженні будемо розглядати хвилі-пониження другого типу з амплітудою a_i. Континентальний шельф (рис. 6.1 а, б) - це мілка область підводної окраїни з невеликим ухилом, що знаходиться між берегом моря або океану і, так званою, бровкою, різким перегином поверхні морського дна (глибина якої зазвичай становить 100 - 200 метрів). Далі материковий схил з кутом нахилу від 2 до 4 градусів переходить в ложе океану. Накат внутрішніх усамітнених хвиль на похилий шельф в двошаровій рідини розглядався в експериментальних роботах [121], [122]. У роботах [128], [269] обвалення хвиль вивчалося за допомогою чисельного моделювання.

Хвилі довільної амплітуди першої бароклінної моди за умови незбуреної вільної поверхні, виключаючи ефекти обертання Землі можуть бути описані розв'язком рівняння Дюбрей-Жакотен [92]. Однак, у більшості робіт для опису еволюції усамітнених хвиль малої амплітуди, що поширюються в двошаровий рідині використовується теорія Кортевега-де Вріза (КдВ), яка описана в розділі 1.3. В більш загальному випадку, коли на амплітуду не накладаються умови малості, хвилі описуються теорією Міяти-Чоя-Камаса ([81], [80], [205]), яка описана в розділі 1.4. Амплітуда цих усамітнених хвиль в наближенні Бусінеска обмежена значенням (1.140).

6.1 Постановка задачі про трансформацію хвиль над ідеалізованим шельфом

Стратифіковані океани та озера з верхнім перемішаним шаром з глибиною h_1, що є тонким відносно загальної глибини резервуара H, де h_1 - глибина верхнього шару з густиною ρ_1, над шаром глибини h_2 з густиною ρ_2, де

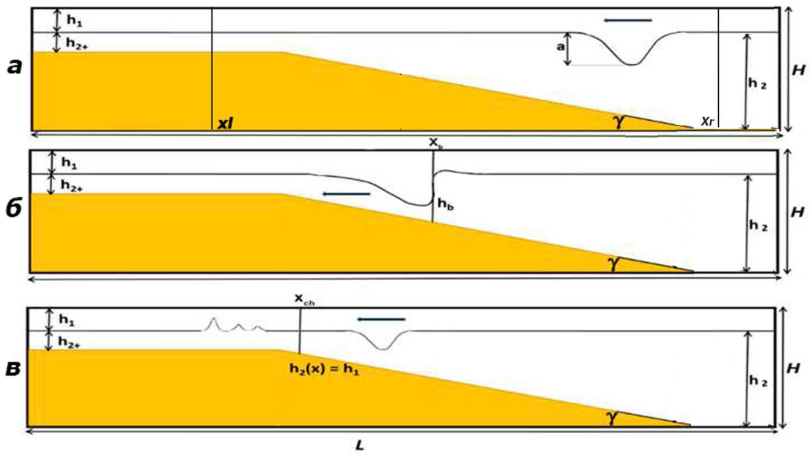

Рисунок 6.1: Внутрішні хвилі біля материкового схилу (схема). (а) - схема чисельного басейну, (б) - позначена точка зміни полярності, в якій $h_2(x) = h_1$, (в) - позначена глибина h_b, на якій відбувається обвалення хвилі.

$H = h_1 + h_2$ (рис. 6.1). У даному розділі розглянемо лише хвилі-пониження із амплітудою a_i. Будемо розглядати внутрішню хвилю-пониження із амплітудою, що взаємодіє з ідеалізованим нахилом шельфу з кутом γ та варіацією нижнього шару $h_2(x)$.

6.2 Критерій обвалення внутрішніх усамітнених хвиль над трапеціїдальним шельфом

Можливість обвалення внутрішніх хвиль залежить як від нахилу шельфу, так і від стратифікації та характеристик хвилі, що набігає. В роботі [269] проводилося чисельне моделювання накату внутрішніх хвиль на шельф зі силами $0.52^o < \gamma < 21.8^o$ для трьох різних типів стратифікації, аналогічної спостережуваним профілям густини в Андаманському морі. Було показано, що крім кута нахилу схилу на характер взаємодії впливає відношення амплітуди хвилі, що набігає a_i до різниці глибин $h_b - h_1$ [276] (рис. 6.2 б). Що при відповідає параметру блокування B (3.2), який був ведений в розділі

3.6. Як було показано, він керує втратами енергії при взаємодії внутрішніх хвиль з перешкодами та сходинкою на дні. В результаті моделювання трьох серій чисельних експериментів з різними стратифікаціями в роботі [269] був запропонований критерій обвалення:

$$\overline{a} = \frac{a_i}{h_b - h_1} = \frac{0.8}{\gamma} + 0.4, \tag{6.1}$$

де γ - кут нахилу дна, h_b - глибина, на якій відбувається обвалення (рис. 6.1 б). Критерій (6.1) розділяє області параметрів $\overline{a}$ и γ, де відбувається обвалення (над кривою) і де хвиля проходить на шельф без обвалення (рис. 6.2). Результати моделювання істотно не залежаливід кута нахилу γ. У зв'язку з цим, для випадку безперервної стратифікації, можна відзначити слабку залежність обвалення хвилі від кута нахилу дна для діапазону $\gamma > 5^o$ і сильну залежність при $\gamma < 5^o$ (в разі пологих схилів). Причина такої сильної залежності в дисперсії. Хвилі, що набігають, описуються в рамках рівняння КдВ (3.10) бо в них нелінійність компенсується дисперсією, і хвиля поширюється в водоймі постійної глибини як усамітнена хвиля постійної форми. Цей баланс порушується при поширенні хвилі вздовж схилу і профіль хвилі починає трансформуватися. Якщо ухил крутий і зона трансформації хвилі коротка, $\gamma > 5^o$, то переважають нелінійні ефекти і хвиля обвалюється. Якщо ж ухил пологий, то в цьому випадку домінує дисперсія, і хвиля розпадається на вторинні хвилі і генеруються дисперсійні хвости.

Критерію обвалення (6.1) задовольняють дані натурних вимірів на континентальному шельфі біля Хантінгтон-Біч (Каліфорнія) [211] і спостереження на шельфі Орегона [209]. Крива (6.1) з [269] разом із характеристиками хвиль, при яких відбувалось обвалення в натурних вимірюваннях на шельфі біля Хантингтон-Біч [211] та на шельфі Орегона [209], зображені на рис. 6.2. В роботі [122] розглядалися лабораторні експерименти по трансформації

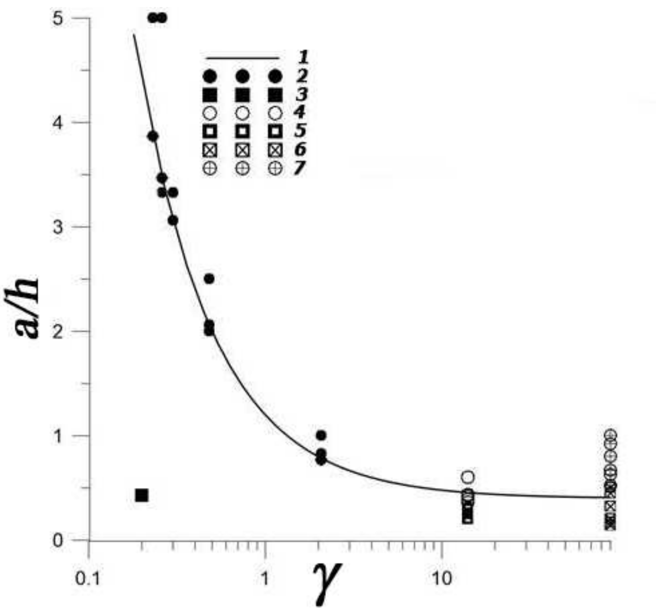

Рисунок 6.2: (1) - Критерій обвалення (6.1) з [269] та дані натурних вимірювань (наведені характеристики хвиль при яких відбувалося обвалення) (2),(3) [211], результати лабораторних [79] - (4),(5) [122] (6) та чисельних експериментів [128] (7)

хвиль-пониження, які проходять через точку зміни полярності в двошарової рідині. У даній роботі амплітуда хвилі, що набігає нормувалося не на величину $h_b - h_1$, як в (6.1), а на глибину нижнього шару над сходинкою h_{2+} (рис. 6.1) і $\tilde{a} = \dfrac{a_i}{h_{2+}}$. В [122] було показано, що для $\tilde{a} < 0.3$ хвиля, що набігає, приходить на шельф без руйнування, а для значень $\tilde{a} > 0.4$ відбувається руйнування. А в останніх роботах [79] та [128] проводилися серії чисельних експериментів, в яких вивчався вплив ухилів на еволюцію і зміни форми профілів при проходженні трапеціїдальной перешкоди.

6.3 Критерій зміни полярності внутрішніх усамітнених хвиль над трапеціїдальним шельфом

Зміна полярності одиноких хвиль вивчалась в роботах [101], [110], [166]. Вказано вище, що у випадку двошарової стратифікації полярність внутрішньої хвилі (пониження або підвищення) визначається глибинами верхнього та нижнього шарів. І хвильова полярність може бути змінена під час проходження над похилим дном, коли глибина верхнього і нижнього шарів рівна. У роботі [110] зміна полярності хвиль розглянута в рамках розширеного рівняння КдВ, де аналітично можна описати варіацію параметрів одиночної хвилі за допомогою асимптотичного підходу, коли усамітнена хвиля змінюється повільно. Якщо коефіцієнт квадратичної нелінійності (1.103) проходить через нуль, то хвиля руйнується в критичній точці, якщо кубічний нелінійний член є негативним. Вторинні поодинокі хвилі протилежної полярності можуть з'являтися з хвоста первинного солітону, але сам первинний солітон зникає. Проте на континентальному шельфі Південнокитайського моря спостерігалося перетворення внутрішніх одиничних хвиль-пониження до внутрішніх хвиль-підвищення [219]. У цій роботі було показано зміну полярності внутрішніх солітонів великої амплітуди (40-70 м) над схилом над ніжним нахилом (1^0) та на пласкій ділянці з глибиною 264 м до глибини води 110 м. У спостереженнях [101] було встановлено, що зміна полярності хвиль великих амплітуд також пов'язана з співвідношенням амплітуди хвилі до товщини нижнього шару під час процесу "перекидання коли $a_i/h_{2+} > 0.66$. У лабораторному дослідженні [79] було показано, що інтервал $0.56 < a_i/h_2 < 0.93$ є діапазоном, при якому вже спостерігається феномен "перекидання"хвиль. Таким чином, при двошаровій стратифікації внутрішні хвилі-пониження можуть трансформуватися в хвилі-підвищення при накаті на похиле дно в точці, в якій глибина верхнього шару дорівнює глибині нижнього шару (рис. 6.1 в). Коли внутрішня хвиля зниження поширюється уздовж материкового схилу з глибоководної області, де $h_2 > h_1$ в мілководну де $h_1 > h_2$ вона проходить положення "зміни полярності в якій:

$$h_2(x) = h_1, \tag{6.2}$$

і відповідно коефіцієнт нелінійності в рівнянні КдВ (1.119) $\alpha_{KdV} = 0$. Зміна полярності внутрішньої хвилі при накаті на шельф може проявлятися на супутникових знімках [288], на яких видно поверхневі прояви цугів внутрішніх хвиль. Внутрішні хвилі-пониження на супутникових знімках ідентифікуються як світлі смуги попереду темних смуг, і, навпаки, хвилі підвищення візуалізуються як темні смуги попереду світлих. Цей приклад розглядався у вступі див. рис 3 (в). Таким чином, зміна характеру проходження смуг від світлої попереду темної до темної попереду світлої демонструє явище зміни полярності в напрямку поширення хвилі з глибоководної частини океану на шельф. Такого роду явище було недавно зафіксовано в роботах [219], [281] в північній частині Південнокитайського моря. Топографія цієї області складається з двох хребтів на сході, на яких під дією припливів генеруються внутрішні хвилі великих амплітуд. А на заході Південнокитайське море має трапецеїдальний шельф, на якому і відбувається трансформація внутрішніх усамітнених хвиль.

6.4 Параметри, що характеризують процеси трансформації хвиль над підводними перешкодами

Вже були зазначені два механізми, які важливі під час накату хвилі на похиле дно: перекидання хвилі внаслідок нелінійного укручення профілю хвилі і зміна полярності хвилі-пониження при переході через точку $h_1 = h_2$. Грунтуючись на цьому, пропонується опис режимів взаємодії за допомогою трьох параметрів α, B, γ, де

1. α **- Безрозмірна амплітуда хвилі**. Вона є важливим безрозмірним параметром, що характеризує нелінійність хвилі:

$$\alpha = \frac{a_i}{h_1}. \tag{6.3}$$

У змінних $\dfrac{a_i}{h_1}$ и $\dfrac{h_1}{H}$ критерій максимальної амплітуди (1.140) має вигляд:

$$\alpha < \frac{0.5}{\frac{h_1}{H}} - 1. \tag{6.4}$$

Це співвідношення визначає геометричні параметри існування усамітнених внутрішніх хвиль. На рис. 6.3 показано співвідношення (6.4) і характеристики хвиль, одержані зі спостережень, зібраних в роботі [51]. Як видно з рис. 6.3, параметр α для більшості хвиль, які спостерігаються на шельфі, змінюється в межах $[0.2 - 3]$.

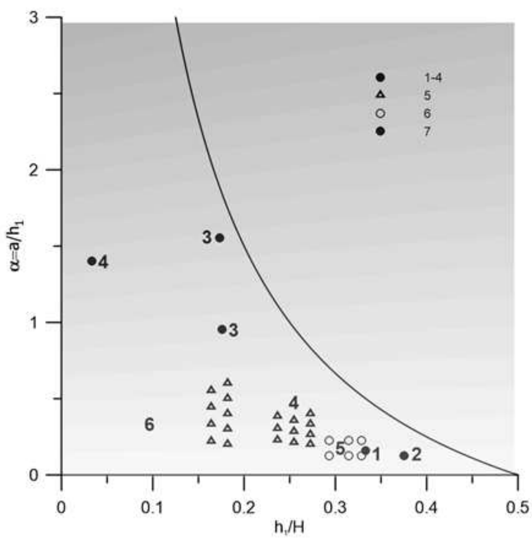

Рисунок 6.3: Крива (6.4), що відповідає критерію максимальної амплітуди та характеристики хвиль, отримані з спостережень: 1 – Андаманське море [54] 2 – затока Массачусетс [67] 3 – Південнокитайське море [101] 4 – Кельтське море [271] 5 - лабораторні експерименти [79] 6 – лабораторні експерименти [122], 7 - лабораторні експерименти [67].

2. B **- Параметр блокування**. Він визначає ступінь взаємодії хвиль з підводними перешкодами і дорівнює відношенню висоти нижнього шару над шельфом h_{2+} до амплітуди хвилі, що набігає a_i:

$$B = \frac{h_{2+}}{a_i}. \tag{6.5}$$

Даний параметр був представлений в роботі [260], де вивчалася взаємодія внутрішніх усамітнених хвиль як підвищення так і пониження з підводною сходинкою.

3. γ **- кут нахилу материкового схилу**.

6.5 Моделювання взаємодії трансформації усамітнених внутрішніх хвиль першої моди над трапецеїдальним шельфом

Перейдемо тепер до побудови тривимірних областей, що відповідають різним режимам взаємодії внутрішніх хвиль з трапецеїдальним шельфом.

- 1. Хвилі повинні руйнуватися на схилі, якщо $h_b > h_{2+}$,
- 2. хвилі не будуть руйнуватися на схилі, якщо $h_b < h_{2+}$,
- 3. хвиля повинна змінювати полярність при трансформації на схилі, якщо $h_1 > h_{2+}$,
- 4. хвиля не буде змінювати полярність при трансформації на схилі, якщо $h_1 < h_{2+}$.

У змінних α, B, γ критерій обвалення (6.1) буде мати вигляд

$$B = \frac{1}{0.8/\gamma + 0.4}. \tag{6.6}$$

Поверхня (6.6) розділяє простір значень α, B, γ на два простори (рис. 6.5). Простір параметрів, в якій виникає обвалення (нижче (6.6)) і простір над даною поверхнею, в якій обвалення не відбувається. Умова зміни полярності хвилі на шельфі $h_1 = h_{2+}$ в змінних α, B, γ, враховуючи співвідношення (6.5) трансформується в умову:

$$B = \frac{1}{\alpha}. \tag{6.7}$$

Для значень, що лежать вище поверхні (6.7), хвилі на шельфі змінюють полярність і трансформуються у хвилі-підвищення, а значення, які відповідають області під поверхнею (6.7) відповідають накату без зміни полярності. Побудуємо поверхні (6.6) і (6.7) в системі координат α, B, γ. Тривимірна діаграма режимів взаємодії внутрішніх хвиль з похилим дном показана на рис. 6.5. Дві поверхні (6.6) і (6.7) перетинаються і ділять простір на чотири області.

Область 1. Знаходиться вище обох поверхонь (6.6) і (6.7) і відповідає режиму взаємодії, коли хвилі не обвалюються і не змінюють полярність на шельфі.

Область 2. Вище поверхні обвалення (6.6), але нижче поверхні зміни полярності (6.7). В даному випадку відбувається обвалення, але без зміни полярності хвилі.

Область 3. Вище поверхні зміни полярності (6.6), але нижче поверхні обвалення (6.7). В даному випадку відбувається зміна полярності хвилі, і внутрішня хвиля- пониження трансформується в хвилю-підвищення на шельфі, і при цьому не обвалюється.

Область 4. Нижче поверхонь зміни полярності (6.6) і обвалення (6.7). В даному випадку відбувається зміна полярності хвилі, хвиля обвалюється.

Для моделювання взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль з трапеціїдальним рельєфом дна в рамках двошарової стратифікованої рідини використовуються гідродинамічна негідростатична чисельна модель з вільною поверхнею NH-POM [139]. Довжина лотка задавалася рівною $L = 46$ м , а глибина

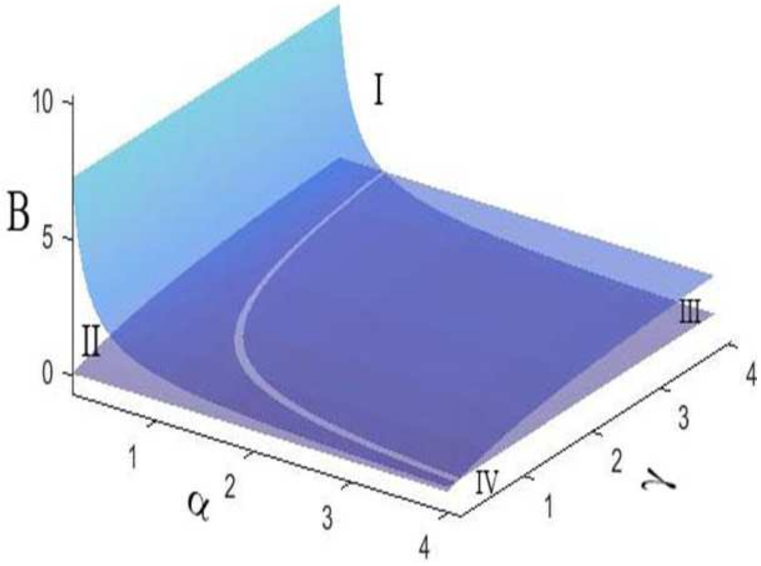

Рисунок 6.4: Поверхні (6.6) і (6.7), що розділяють простір на чотири області, які відповідають різним типам взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль в рідині з двошаровою стратифікацією з похилим дном

$H = 0.46$ м . В рамках даної роботи стратифікація для всіх експериментів залишалася однаковою, а висота сходинки, початкова амплітуда окремої хвилі a_i варіювалися. Значення амплітуд хвиль a_i і параметрів α, B, γ наведено в таблиці 6.1. В рамках моделювання було проведено 36 чисельних експериментів: три серії для різних амплітуд $\alpha=1.5$ - сильно нелінійні хвилі, $\alpha = 1$ - хвилі помірної амплітуди, $\alpha = 0.25$ - слабонелінійні хвилі. Профіль вертикальної густини задавався у вигляді двох шарів: верхнього $h_1 = 0.08$ м і нижнього $h_2 = 0.38$ м з густиною $\rho_1 = 1000\,\text{кг}/\text{м}^3$, $\rho_2 = 1020\,\text{кг}/\text{м}^3$ відповідно.

Розглянемо результати чисельного моделювання. На рис. 6.5 приведено фрейми еволюції поля густини для чотирьох численних експериментів, які відповідають чотирьом типам взаємодії. При взаємодії внутрішніх хвиль з шельфом в області 1, профіль хвилі, що набігає незначно трансформується. Приклад такої взаємодії для параметрів $\alpha = 1.5$, $B = 1.5$, $\gamma = 0.5^o$ наведено

Табл. 6.1: Параметри внутрішніх хвиль у чисельних експериментах

$\lvert a_i \rvert$(м)	α	B	γ
0.02	0.25	$0, 1, 2.5$	$0.5^o, 1.5^o, 60^o, 90^o$
0.08	1	$0.3, 1.1, 2.2$	$0.5^o, 1.5^o, 60^o, 90^o$
0.15	1.5	$0, 1.5, 2.5$	$0.5^o, 1.5^o, 60^o, 90^o$

на рис. 6.5 а. Область 2 існує тільки для внутрішніх хвиль з $\alpha > 0.3$, а параметр блокування для цієї області $B < 3.3$. Приклад такої взаємодії для параметрів $\alpha = 1.5$, $B = 1.5$, $\gamma = 0.5^o$ показано на рис. 6.5 б. В цьому випадку відбувається інтенсивне перемішування, і формування на шельфі хвилі другої бароклінної моди. Область 3 охоплює параметри, що відповідають слабонелінійним хвилям. Еволюція профілю хвилі в цьому випадку ілюструється значеннями $\alpha = 0.25$, $B = 1.5$, $\gamma = 0.5^o$. Як видно з рис. 6.5 в хвиля малої амплітуди змінює полярність на схилі і при цьому не обвалюється, перемішування в цьому випадку незначне. Приклад трансформації хвилі на шельфі для області 4 наведено на рис. 6.5 г для параметрів $\alpha = 1.5$, $B = 0$, $\gamma = 0.5^o$, де відбувається як обвалення, так і зміна полярності хвилі. При наближенні значення коефіцієнта B до нуля, на шельф проникають болуси, які поширюються вгору по схилу.

6.6 Дані вимірювань та лабораторні експерименти в класифікації режимів

Результати лабораторних експериментів, одержаних в роботах [79],[122],[276] були використані для аналізу механізму, що викликає "перевертання"хвилі та обвалення при поширенні усамітнених внутрішніх хвиль над шельфом. Як було зазначено вище, основними параметрами, що регулюють процес змі-

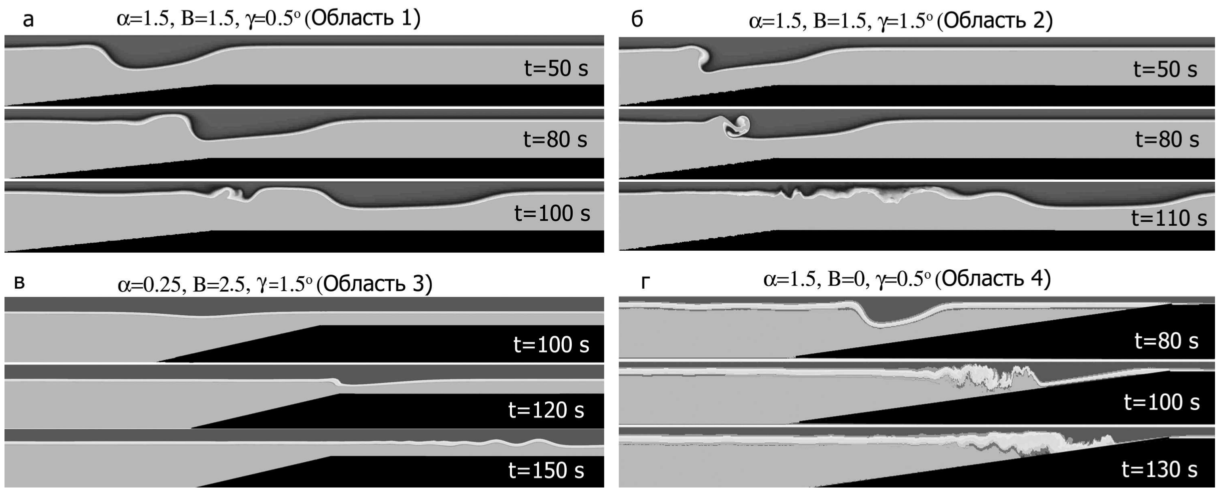

Рисунок 6.5: Еволюція поля густини для чотирьох різних типів взаємодії (а) - режим взаємодії, коли хвиля не обвалюється і не змінює полярності на шельфі (область 1), (б) - режим взаємодії, коли відбувається обвалення, але без зміни полярності хвилі (область 2) , (в) - режим взаємодії, коли відбувається зміна полярності хвилі без обвалення(область 3) та внутрішня хвиля-пониження трансформується у хвилю-підвищення на шельфі, і при цьому не обвалюється, (г) - режим, коли відбувається зміна полярності та обвалення хвиль (область 4).

ни полярності та розриву, є амплітуда хвилі a_i, глибина води над полицею h_{2+}, глибина верхнього перемішаного шару h_1 і кут нахилу γ. Розглянемо поперечні перетини 3D-діаграми з рис. 6.5 для фіксованих кутів нахилу щоб зрозуміти, які режими домінують для плавних або крутих схилів.

Поперечний перетин 3D-діаграми для куту нахилу $\gamma = 1^o$ показано на рис. 6.6 а. Як бачимо, сильно нелінійний режим III (обвалення, але без зміни полярності), відсутній для плавних схилів. Велика внутрішня одинична хвиля-пониження, що розповсюджується на схилі $\gamma = 1^o$ від глибини води 264 м до глибини води 110 м з натурних спостережень [219]. Хвиля великої амплітуди зі зсувною нестійкістю спостерігалися для амплітуд $= 70$ м, $h_1 = 45$, $\alpha = 1.55$, $B = 1.1$, точка 1 на рис. 6.6 а. Над шельфом з нахилом $\gamma = 3^o$ спостерігалися хвилі-пониження з великою амплітудою, які змінювали полярність у Південнокитайському морі [101]. На малюнку 6.6 б показано виміри

Табл. 6.2: Параметри внутрішніх хвиль у спостереженнях і лабораторних умовах

Локація	α	B	γ	**область**	**джерело**
Біскайська затока	$1-2$	$0. - 1.5$	4.5^o	3	[54]
шельф Андаманського моря	$0.75-1$	1.5	$0.33^o - 1.5^o$	$1-2$	[54]
Кельтске море	$0.8 - 3.3$	0.8	3^o	3	[271]
Півд-Кит. море, атол Донгша	1.25	0.2	3^o	4	
Півд-Кит. море	$0.8 - 1.4$	1.4	$1^o - 6^o$	$2, 4$	[219]
Півд-Кит. море	0.3	1.5	0.3^o	4	[219]
Хантінгтон-Біч, Каліфорнія	$0.06 - 0.83$	$0.26 - 1.28$	$0.23^o - 2.08^o$	$1, 3, 4$	[211]
Японське море	0.5	1.	0.1^o	2	[54]
шельф Орегону	0.67	4.3	0.3^o	1	[209]
лабораторні експерименти	$0.2 - 0.71$	$0.5 - 4.5$	14^o	$1-4$	[79]
лабораторні експерименти	$0.12 - 0.18$	$0.2 - 5.9$	$1.5^o - 4^o$	$1, 3, 4$	[122]
чисельні експерименти	$0.25 - 1.5$	$0-2.5$	$0.5^o - 90^o$	$1-4$	дана робота

внутрішніх хвиль. Ромби (2) на рис. 6.6 б відповідають режимові, коли хвилі не змінюють полярність під час накату, трикутники (3) відповідають режиму, коли хвилі-пониження змінюють полярність і перетворюються на хвилі-підвищення, а кола (4) відповідають перехідному режиму. У вимірах співвідношення амплітуди хвилі до товщини нижнього шару було визнано гарним показником при трансформації хвилі, щодо переходу хвилі-пониження до хвилі-підвищення, що відбувався при $a/h_{2+} = 0.66$. Це відповідає зна-

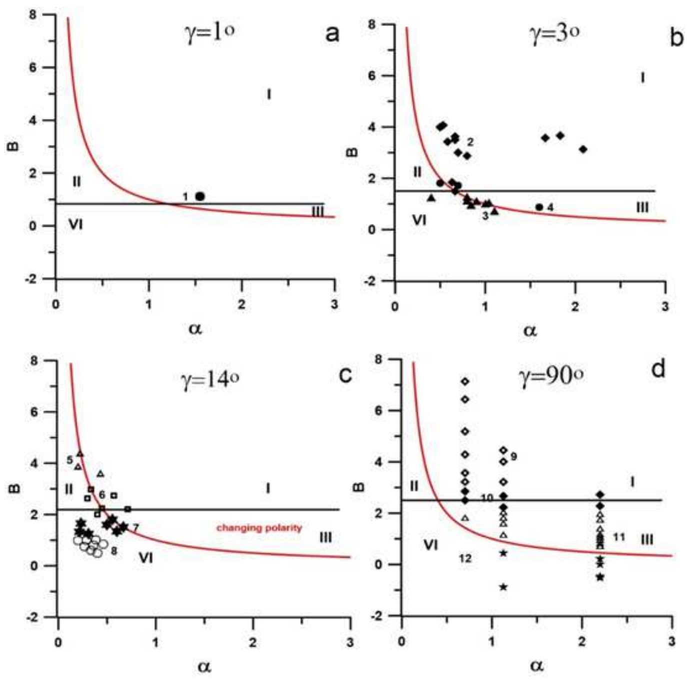

Рисунок 6.6: Двомірні перетини 3D-діаграми (α , B , γ) з рис. 6.5 для γ (а) $\gamma = 0.25$, (б) $\gamma = 1$, (в) $\gamma = 1.5$.

ченню $B = 1.5$. Лабораторні експерименти з класифікацією хвиль на схилі [79] проводились в роботі [122].В ній було виявлено такі типи взаємодії - (N) трансформація з нестійкістю; трансформація зі зсувним ефектом (S) і коли відбувається генерація хвилі другої моди (O) та "перевертання хвилі". Перший тип (N) зафіксований при $B > 3$, (S) зсувний ефект $2.5 < B < 3.3$; (O) "перевертання" $B < 2.5$.

В лабораторних експериментах розглядали перетворення хвиль над трапецієдальним рельєфом дна з кутом $\gamma = 14^o$. Поперечний перетин 3D-діаграми при $\gamma = 14^o$, показано на рис.6.6 с. Лабораторні експерименти показують, що значення $B = 1.8$ може бути попередньо прийнято для відокремлення режиму зміни полярності. Трикутники (5) - відповідають режиму без обвалення, але із зсувним ефектом; (6) - зміна полярності без обвалення хвиль; (7)- зміна полярності хвиль та (8) - обвалення зі зміною полярності. Для граничного випадку сходинки, який розглядався в розділі 3.1 виявлено п'ять різних режимів взаємодії внутрішньої усамітненої хвилі в межах повного діапазону відношень висоти нижнього шару після сходинки до амплітуди хвилі, що набігає на сходинку:

1. Слабка взаємодія, коли динаміку хвилі можна повністю описати слабонелінійною теорією [108] (9) на рис. 6.6 d;
2. Помірна взаємодія, коли механізм руйнування хвилі на етапі полягає переважно в нестійкості стрижня, чорні ромби (10) на рис. 6.6 ;
3. Сильна взаємодія, коли формується надкритичний потік в межах сходинки,що призводить до формування струменів і вихорів для хвиль-пониження, утворення другої моди та хвиль із захопленими ядрами, що переносять більш густу рідину за сходинку (11)
4. (IV-V) Перехідний режим та режим відбиття від вертикальної стінки ($B < 0.5$) (12).

6.7 Втрати енергії при трансформації хвиль на схилі

Важливою характеристикою взаємодії є втрата енергії при трансформації хвиль на схилі. Втрати енергії за рахунок дисипації і перемішування, що призводить до переходу в недоступну фонову потенційну енергію, можуть бути оцінені, виходячи з бюджету енергії хвилі до трансформації і після (див. розділ 1.4.2). Характеристики хвилі,що набігає фіксувалися в перетинах x_l, які розташовуються від підніжжя схилу на відстані $\Delta x_l = 1.1$, а хвилі, що пройшла на шельф, в перетині x_r на відстані $\Delta x_r = 1.9$ від бровки шельфу. Втрати енергії на перемішування при взаємодії хвилі з ухилом δE_{loss} від параметру блокування B показано на рис. 6.7. Режим взаємодії, що відноситься до області 4 є найбільш дисипативним. При такому типі взаємодії втрати енергії досягають 55 %.

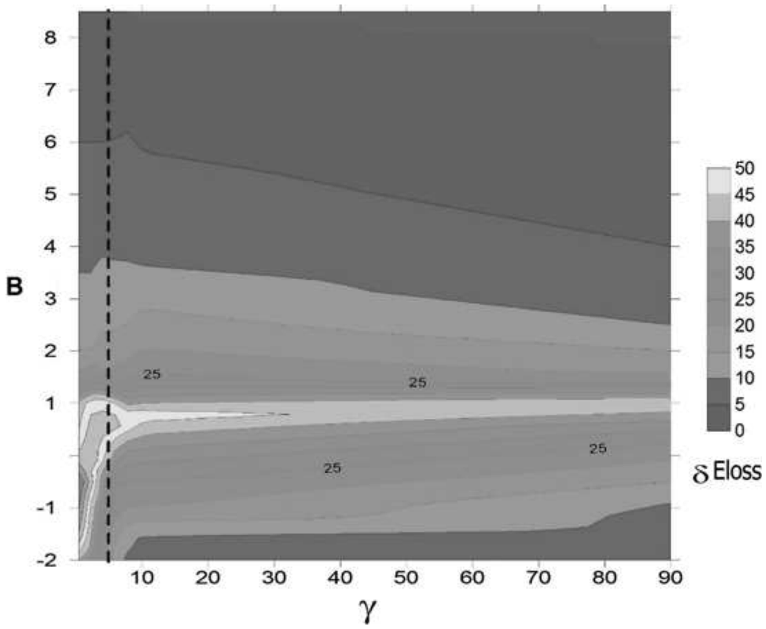

Рисунок 6.7: Залежність втрат енергії від параметра блокування та кута нахилу схилу

6.8 Зональна карта режимів накату внутрішніх хвиль на шельф для Південнокитайського моря

Для того, щоб побудувати карту зон для шельфової зони треба знати:

1. напрямок руху розповсюдження внутрішніх хвиль [136].

2. характерні амплітуди внутрішніх хвиль $a = 100$ м, 50 м, 20 м. [162]

3. глибину перемішаного шару $h_1 = 50$. На рис. 6.8 (а) зображено карту напрямків розповсюдження внутрішніх хвиль із використанням емпіричної моделі [136]. А на рис. 6.8 (б) показано приклад карти із виділеними областями, що відповідають типам взаємодії, які були описані вище. Ці карти побудовані для випадку хвиль із амплітудою 100 м та глибиною термокліну 50 м. На цій карті - лінія – ізобата 120 м (шельф), крива зміни полярності $h_1 = h_2$ та області – зони руйнування де, $h_1 + h_{br} > H$.

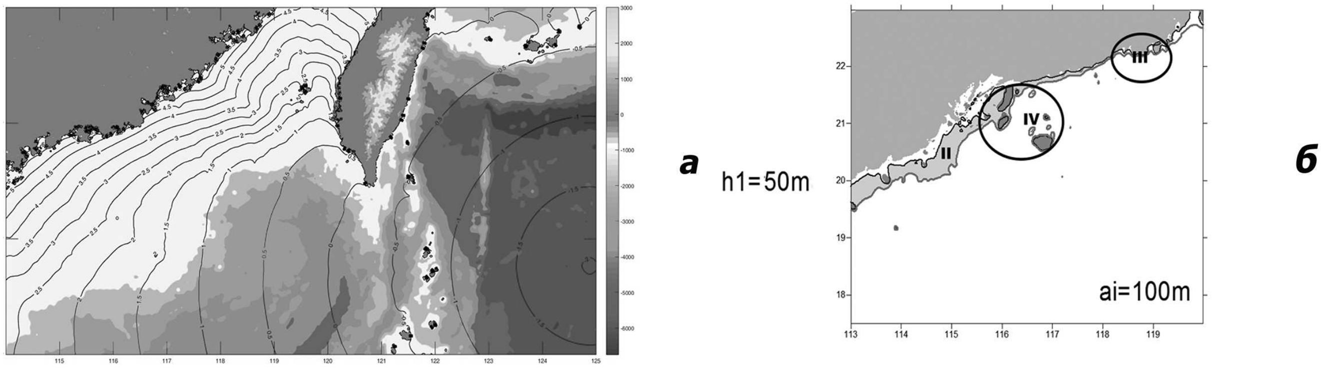

Рисунок 6.8: (а)- Напрямок руху розповсюдження внутрішніх хвиль [136]. (б)- карта для випадку хвиль із амплітудою 100 м та глибиною термокліну 50 м з виділеними зонами

6.9 Висновки до розділу 6

Вперше побудовано нову класифікацію режимів взаємодії внутрішніх усамітнених хвиль з трапеціїдальним рельєфом для двошарової стратифікованої рідини. На її основі проведено оцінки втрат енергії хвиль при їх трансформації. Класифікація представляє собою тривимірну діаграму в просторі трьох параметрів: (1) нормованої амплітуди хвилі α, (2) параметру блокування B та (3) куту схилу трапеціїдального шельфу γ. Ідея, покладена в основу класифікації полягає в тому, що при накаті хвиль на континентальний шельф два механізми є суттєвими: перший - перекидання хвиль, а другий - зміна полярності хвилі-пониження на хвилю-підвищення на схилі. Діапазон параметрів, при яких хвиля руйнується, визначені на основі критеріїв, одержаних експериментальним шляхом. У тривимірному просторі α, B, γ цей критерій представляється поверхнею (6.6), що відокремлює простір параметрів, де обвалення має місце, від простору, де обвалення не відбувається. Поверхня зміни полярності (6.7) одержана з умови рівності глибини h_1 верхнього шару і нижнього шару h_2. У двошарової стратифікації внутрішні хвилі-пониження можуть трансформуватися в хвилі-підвищення при проходженні точки "перевороту для якої $h_2 = h_1$. Поверхні (6.6) і (6.7), що перетинаються, поділяють тривимірну діаграму на чотири зони. Область 1 розташована вище двох поверхонь і відповідає режиму, коли хвилі не обвалюються і не змінюють полярність на шельфі. Область 2 лежить вище поверхні обвалення (6.6), але нижче поверхні зміни полярності (6.7). В даному випадку відбувається обвалення, але без зміни полярності хвилі. Область 3 розташовується вище поверхні зміни полярності (6.6), але нижче поверхні обвалення (6.7). В цьому випадку відбувається зміна полярності хвилі, і внутрішня хвиля-пониження трансформується в хвилю-підвищення на шельфі та не руйнується. Область 4 лежить нижче обох поверхонь і відповідає режиму руйнування зі зміною полярності. Встановлено відповідність даної класифікації з результатами лабораторних і натурних експериментів. Режими, передбачені схемою, узгоджуються з результатами чисельного моделювання і даних спостережень. На підставі виділених на діаграмі зон, були визначені області з високою дисипацією енергії. Як приклад побудовано карту зон режимів для Південнокитайського моря із областями інтенсивного перемішування на шельфі.

Розділ 7

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИЛЬНОНЕЛІНІЙНИХ ВНУТРІШНІХ СЕЙШ В ОЗЕРАХ

Історія спостережень внутрішніх хвиль в озерах триває вже більш ніж 100 років. Перші публікації, з описом натурних вимірювань внутрішніх хвиль в озері Лох-Несс були опубліковані [274] та [275]. Але, внутрішні хвилі в озерах вивчені менше, аніж внутрішні хвилі великих масштабів в океанах та морях. При вивченні нелінійних внутрішніх хвиль в озерах треба з'ясувати до якого типу належить досліджуване озеро. Озера можуть бути класифіковані за розміром: "великі"та "маленькі". Такі озера будуть суттєво відрізнятися типами генерації та дисипації внутрішніх хвиль та термодинамічними процесами. Головні параметри, що будуть характеризувати клас озера можуть бути отримані з аналізу розмірностей. Таким чином, для озер, що знаходяться на Землі, що обертається параметри будуть наступними: Радіус деформації Росбі:

$$R_R = \frac{c}{f}, \tag{7.1}$$

де c - фазова швидкість внутрішніх хвиль, f - параметр Коріоліса. Радіус деформації Росбі визначає чи є озеро "великим чи "малим для конкретного типу хвиль. Наприклад, озеро Мічіган є "малим"для баротропних хвиль Росбі, та є "великим"для внутрішніх хвиль Кельвіна та Пуанкаре [206]. В останньому випадку $R_R < L$, і такі озера вважаються великими. В таких озерах радіус деформації Росбі R_R становить декілька кілометрів, тобто набагато менше, ніж характерний масштаб озера L, і глибина верхнього шару h_1 набагато менша за глибину нижнього h_2. Та ефекти обертання Землі для таких озер - важливі. До таких озер належать великі Американські озера, озеро Байкал, Ладожське та Онежське озера. До іншого типу озер відносяться маленькі озера, для яких $R_R > L$ і характерний масштаб озера від декількох кілометрів до десятків кілометрів. До таких озер відноситься озеро Лох-Несс, озеро Сенека, озеро Лугано, Цюріхське озеро і ефекти обертання Землі для таких озер не суттєві. Вивчення власних коливань рідини у формі довгих стоячих поверхневих хвиль - сейш - в озерах, має велике значення для розв'язання ряду фундаментальних гідродинамічних і багатьох прикладних задач [1-4]. Основними характеристиками сейш є власні частоти і форми нижчих мод коливань, оцінки яких ускладнені із-за нерегулярності берегової лінії і складного рельєфу дна природних водойм.

Внутрішні хвилі утворюються у стратифікованих озерах зовнішніми збуреннями, такими, як поверхневий вітер. При дії вітру стратифікація в озері змінюється - термоклін відхиляється від положення рівноваги, це було описано в роботах [233] та [266]. Цей вплив зовнішніх сил, таких як вітер, може бути оцінений співвідношенням між силами дії вітру та бароклінних сил, спрямованих на повернення до рівноважного стану. В роботі [266] було запропоноване число Веддербурна (Wedderburn number), яке у випадку двошарової системи може бути представлено у вигляді [126]:

$$W^{-1} = \frac{\eta_0}{h_1}, \tag{7.2}$$

де η_0 - амплітуда початкового збурення (амплітуда початкового нахилу термокліну). В озерах при великих відхиленнях термокліну від положення рівноваги коливання бувають сильно нелінійними. Нелінійність призводить до асиметрії сейш, появи фронтів і розпаду цих хвиль на цуги внутрішніх хвиль великої амплітуди. Механізм переносу енергії від масштабів басейну до мілкомасштабних рухів [126] включає:

1. нелінійну трансформацію довгих хвиль;

2. зсувну нестійкість течій;

3. запліск і відбиття від берегів озера;

4. взаємодію з рельєфом дна.

Згодом такі усамітнені хвилі солітони, що мають набагато меншу довжину, взаємодіючи з топографією і похилим дном, можуть призводити до нестійкості і утворення турбулентності поблизу твердих границь. Нестійкість Кельвіна-Гельмгольца також може виникати при великомасштабних зсувних течіях. Важливо, що, за винятком великомасштабних коливань (сейш і внутрішніх нагонів), можуть генеруватися інші мілкомасштабні рухи, які являють собою або сильно нелінійні внутрішні гідравлічні стрибки, або диспергуючі нелінійні хвилі великої амплітуди. Теоретично внутрішні гідравлічні стрибки описуються в рамках внутрішньої гідравліки для шаруватої рідини, тоді як хвильові руху досліджуються в рамках рівнянь КдВ.

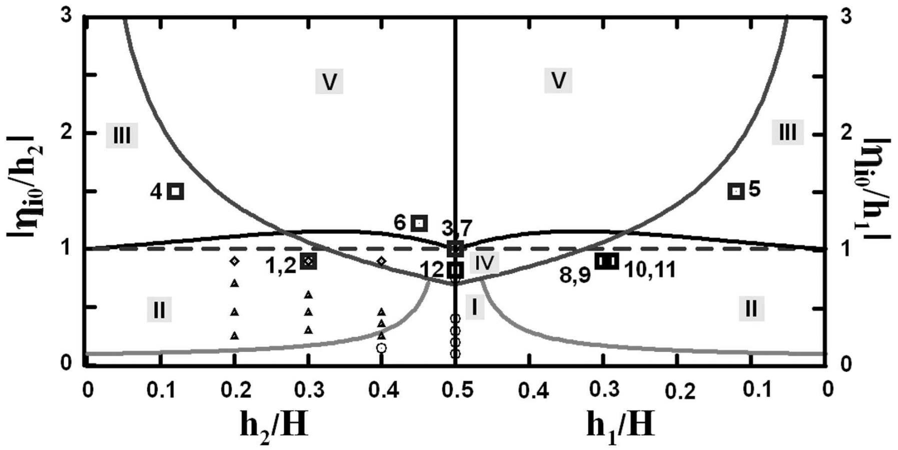

Рисунок 7.1: Діаграма режимів трансформації сейш у прямокутному озері [14]. Римські цифри визначають режими. Суцільні лінії показують межі режимів, де пунктирна лінія відокремлює режими з гравітаційними течіями. Кола та трикутники показують лабораторні експерименти [126], а нумерацією позначаються чисельні експерименті, наведені в таблиці 7.1

7.1 Класифікація трансформації внутрішніх сейш в прямокутному басейні

Розглянемо басейн довжиною L і висотою H, наповнений двома рідинами різної густини, з величиною плавучості g'. Рухи в такому басейні викликаються початковим відхиленням поверхні розділу на амплітуду η_{0i} (рис. 1.3) (розділ 1.2.3). Товщина нижнього шару h_1, а товщина верхнього h_2. Для класифікації різних режимів течій зручно визначити, відповідно до методології викладеної в роботі [126], а нумерацією позначаються чисельні експерименті, наведені в таблиці 7.1.

У найпростішому випадку для лінійних довгих хвиль на поверхні розділу між двома шарами рідини різної густини рівняння руху в нижньому шарі рідини мають вигляд (1.61). Період найнижчої моди визначається як $T_i = T_i^1$ - це перший характерний масштаб часу. Максимальні значення швидкостей в центрі басейну виникають, коли $t = T_i/4$ та $t = T_i/4; 3T_i/4; 5T_i/4; \ldots$, коли потоки змінюють напрям, тоді швидкості шарів в центрі прямокутного басейну знаходиться:

$$\hat{U}_1 = g' \frac{h_2}{H} \frac{2\eta_{i0}}{L} t, \quad \hat{U}_2 = -g' \frac{h_1}{H} \frac{2\eta_{i0}}{L} t. \tag{7.3}$$

Міжфазний зсув ΔU_i також періодичний і набуває максимуму одночасно із швидкістю $\Delta U = \hat{U}_1 - \hat{U}_2 = 2g'\eta_{i0}t/L$. Локальне число Річардсона (1.47) знаходиться тут як:

$$\mathrm{Ri} = \frac{g'\delta_\rho}{(\Delta U)^2}. \tag{7.4}$$

Цей потік є стійким до зсуву та утворенні нестійкості Кельвіна-Гельмгольца за умові (1.48). І тоді маємо

$$\Delta U = 2\left(g'\delta_\rho\right)^{1/2}. \tag{7.5}$$

Другий характерний масштаб часу T_{KH} можна оцінити з (7.4), використавши (7.3) з $t = T_{KH}$ та (7.5). З цього випливає

$$T_{KH} = \frac{L}{\eta_{i0}} \left(\frac{\Delta\rho}{g'}\right)^{1/2}. \tag{7.6}$$

Потік залишатиметься стійким, якщо $T_{KH} > T_i/4$.

Два типи нелінійних ефектів можуть бути суттєвими для слабонелінійного нахилу лінії розділу шарів. У такому випадку при русі збурення розвивається нелінійне укручення фронту хвилі, оскільки фазова швидкість довгих хвиль залежить від товщини верхнього шару. Балансування нестійкості та нелінійності при $\alpha_1 = 0$ призводить до збільшення масштабу часу [126].

$$T_s \approx \frac{L}{\alpha\eta_{i0}}. \tag{7.7}$$

Масштаб часу для ефектів дисперсії можна оцінити шляхом збалансування нестаціонарних та дисперсійних умов при $T_{disp} = L^3/\beta$. Нелінійне укручення домінує над дисперсією, коли $T_s/T_{disp} \ll 1$. Для малих значень нахилу дисперсійні ефекти запобігають утворенню фронтів. Інший нелінійний механізм перетворення хвиль проявляється як формування внутрішніх нелінійних борів, коли потоки у шарах досягають надкритичного стану. Критичне складене число Фруда визначається як (3.9), де $\hat{U}_1$ та $\hat{U}_2$ визначається з (7.4). Потік може бути надкритичним ($Fr > 1$) в центрі басейну, де виникають найбільші швидкості. Внутрішній бор з'єднує область з надкритичними потоками з областю, що розташована вниз по потоку (із відносно швидким тонким шаром), субкритичною областю. Характерний час формування внутрішнього бору T_b був оцінений за допомогою підстановки (7.4) в (7.7)

У в'язкій рідині початкове збурення може затухати за рахунок сил внутрішнього тертя в рідині. Час дисипації для вихідної стоячої хвилі в басейні можна визначити за допомогою часу формування внутрішнього бору, який можна отримати, підставивши вирази для $\hat{U}_1$ та $\hat{U}_2$ у вираз для числа Фруда (3.9). Тоді отримаємо

$$T_b = \frac{T_i h_1 h_2}{4\eta_{i0}} \left[\frac{H}{h_1^3 + h_2^3} \right]^{1/2}. \tag{7.8}$$

Дисипативний часовий масштаб T_d це масштаб часу для затухання амплітуди внутрішньої стоячої хвилі,

$$T_d = T_i/\gamma_d, \tag{7.9}$$

де $2\gamma_d = dE/E$, тоді як E - енергія сейші. В роботі [126] оцінюється дисипація хвиль у лабораторному басейні з урахуванням донного тертя, тертя на бічних стінках. Результуюче співвідношення є

$$\gamma_d = \frac{\pi \delta_b A_b}{2V} + \frac{\nu H T_i}{2\delta_\rho h_1 h_2}, \tag{7.10}$$

де $\delta_b = (\nu T_i/\pi)^{1/2}$ - товщина ламінарного пограничного шару, ν - кінематична в'язкість, A_b - загальна площа твердих границь, а V - загальний об'єм.

7.1.1 Режими течій

Співвідношення між масштабами часу (T_i, T_{KH}, T_s, T_b та T_d) визначає характерні режими формування хвиль у басейні. Для цього необхідно прирівняти часові масштаби [126] та розрахувати межі режимів у термінах η_{i0}/h_1 та h_1/H за заданими характеристиками басейну (L, g', δ_ρ). Межі режимів для сейш масштабу басейну показано на рис. 7.1повторюючи відповідну діаграму з [126] з тією різницею, що діаграма також включає режими з $0.5 \leq h_1/H \leq 1$, щоб підкреслити різницю між трансформацією хвиль поблизу дна та поблизу вільної поверхні.

I лінійні хвилі, що затухають,

II нелінійно-дисперсійний режим,

III режим гравітаційних течій,

IV режим нестійкості Кельвіна-Гельмгольца,

V режим гравітаційних течій та нестійкості Кельвіна-Гельмгольца.

Режим 1 буде здійснюватися за часів ($T_d < T_s$). Граничний режим при $T_d > T_s$ визначається кривою (1) на рис. 7.1. Якщо характерний час укручення менше часу дисипації $T_s < T_d$, початкова хвиля може перетворитися в цуг солітонів. При цьому енергія передається від початкового довгохвильового збурення до більш коротких усамітнених хвиль. Характерний час утворення надкритичних течій $T_b = T_i/4$, і тут розглядаються режими гравітаційних течій, для яких границя розділу може перетинати нижню і верхню границі басейну. Межа режиму буде задаватися кривою (3) на рис.7.1. Співвідношення $\eta_{i0}/h_1 > 1$ і $h_1/H < 0.5$ відповідають початковому розподілу густини, коли поверхня розділу перетинає дно, тоді як співвідношення $\eta_{i0}/h_1 > 1$ і $h/H > 0.5$ відповідають початковому розподілу густини, коли поверхня розділу перетинає вільну поверхню басейну. В обох випадках течія утворює гравітаційні течії, тому режим V можна назвати також режимом гравітаційних течій [15]. У межах $\eta_{i0}/h_1 \to \infty$ цей режим є режимом, що називається водообмін в шлюзі.

Таким чином, залежно від співвідношення між характерними часами різних процесів (період нижчої моди сейші, характерний час нелінійного укручення, характерний час формування нестійкості Кельвіна-Гельмгольца і характерний часу загасання лінійних хвиль) виділено п'ять основних режимів виродження довгих внутрішніх хвиль у прямокутному басейні [15], [126] режим згасаючих лінійних хвиль (I); нелінійно-дисперсійний режим (II); режим гравітаційних течій (III); режим нестійкості Кельвіна-Гельмгольца (IV) і режим гравітаційних течій і нестійкості Кельвіна-Гельмгольца (V).

7.1.2 Чисельне моделювання трансформації внутрішніх сейш в прямокутному басейні

Для того, щоб порівняти результати розрахунків і лабораторного експерименту [126], розглянемо басейн довжиною $L = 6$ м і висотою $H = 0.29$ м і шириною 0.3 м, наповнений двома шарами рідини різної густини з величиною плавучості $\Delta\rho = 20\,\text{кг м}^{-3}$. У такому басейні рухи спричиняються початковим відхиленням поверхні розділу на величину η_0 від горизонтального положення на відстані h_1 від дна. Товщина проміжного шару δ_ρ см дорівнювала 1-2 см. В роботі [126] була проведена систематизація різних режимів руху в двошарової рідині в прямокутному басейні. Дослідимо чисельно динаміку стратифікованої рідини в прямокутному басейні у залежності від амплітуди початкового нахилу та глибини нижнього шару. Параметри чисельних експериментів наведені в табл. 7.1

Положення поверхні розділу, розраховане з лінійного аналітичного розв'яз-

Табл. 7.1: Параметри чисельних експериментів

Експ.	h_2/H	η_{i0}/h_2	h_1/H	η_{i0}/h_1	**Режим**	**Розд. зданість**
1	0.3	0.9	-	-	Hydrostatic	$1000 \times 80 \times 5$
2	0.3	0.9	-	-	II	$1000 \times 80 \times 5$
3	0.5	1	0.5	1	IV-V	$1000 \times 80 \times 5$
4	0.12	1.5	-	-	III	$1000 \times 80 \times 5$
5	-	-	0.12	1.5	III	$1000 \times 80 \times 5$
6	0.45	1.22	-	-	V	$1000 \times 80 \times 5$
7	0.5	1	0.5	1	IV-V	$800 \times 80 \times 25$
8	-	-	0.3	0.9	II	$1000 \times 80 \times 5$
9	-	-	0.3	0.9	II	$1000 \times 80 \times 5$

ку (1.73), та розподіл густини у випадку експерименту 1 (гідростатична модель) в однакові моменти часу показана на рис. 7.2. На рисунку 7.3 показано розподіл знімків густини для тих самих безрозмірних моментів часу t/T_s у лабораторному експерименті та для чисельного негідростатичного моделювання (експеримент 2). Як видно на 7.2 (б), нелінійність у гідростатичній моделі викликає укручення хвиль та борів на відміну від лінійного гідростатичного розв'язку 7.2 (а). Проте, гідростатичне наближення не може передбачити розпад на послідовність усамітнених хвиль, що спостерігається в експерименті [126], як видно на рис. 7.3 а. На рис. 7.3 показано процес формування солітонів в розрахунках і експериментах. Спочатку рідина накопичується біля лівого торця басейну, а потім відбивається у вигляді нелінійного бору, який потім під дією дисперсії перетворюється в цуг солітонів. Цей процес був відтворений у чисельному експерименті. Модель добре прогнозує амплітуду та кількість згенерованих хвиль. Варто зазначити, що точка $\delta = 0.3$, $\gamma = 0.9$ знаходиться біля кордону режиму 2, який характеризується великими амплітудами.

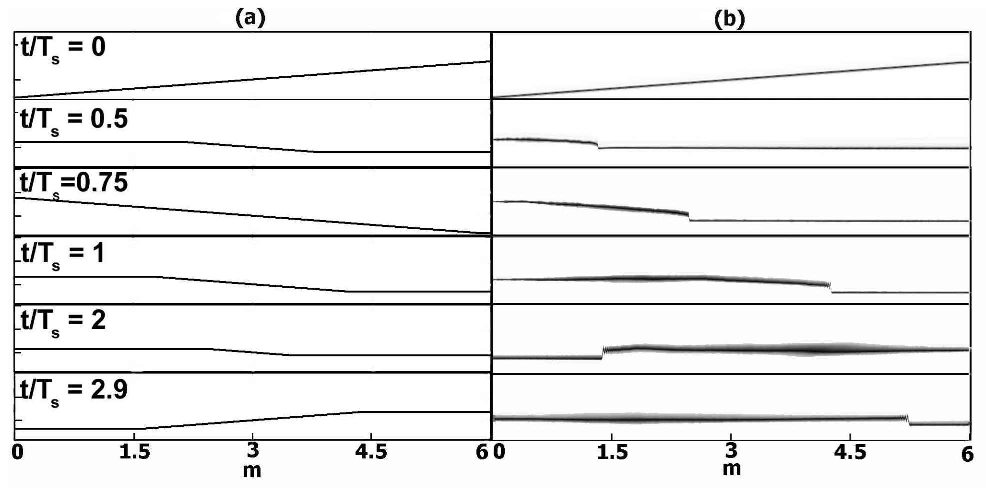

Рисунок 7.2: Послідовність положень поверхні розділу згідно з лінійним гідростатичним розв'язком (a) та моделювання лінійного гідростатичного випадку (b) для параметрів експерименту 1

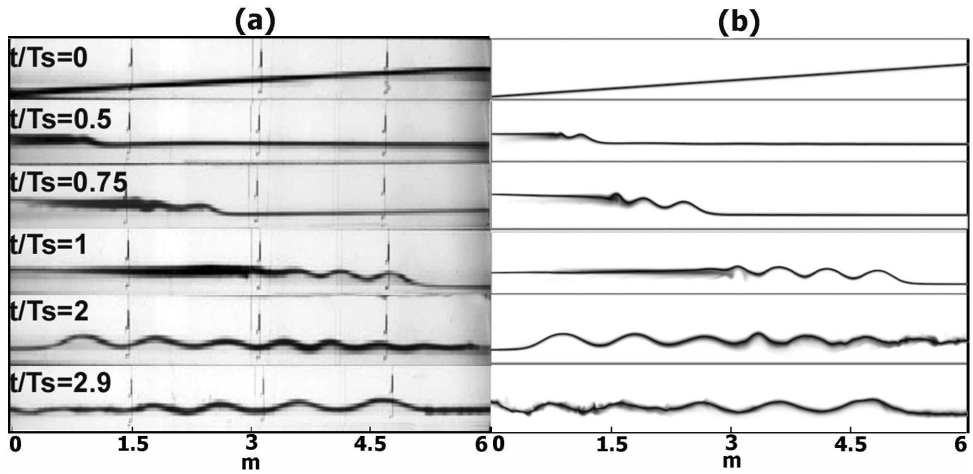

Рисунок 7.3: Послідовність серії фотографій експерименту [126] (a) та чисельне моделювання (б) для параметрів експерименту 2

Як наслідок, при трансформації проявляється дисипативний механізм, який виражається в збільшені товщини тилової частини бору рис. 7.3 (б).

Тому еволюцію та поширення пакету внутрішніх хвиль можна описати нелінійним рівнянням КдВ (1.88). В роботі [126] було показано, що енергія може бути переноситься від великомасштабних хвиль до усамітнених хвиль, що формуються в процесі. На рис. 7.1.2 зображено порівняння зміщення границі розділу в середині басейну в чисельному експерименті і лабораторному експерименті. Неперервне вейвлет-перетворення обчисленої зміни інтерфейсу в центрі резервуара проведено із застосуванням базисної функції Морле [33], [232], та зображено на рис. 7.6

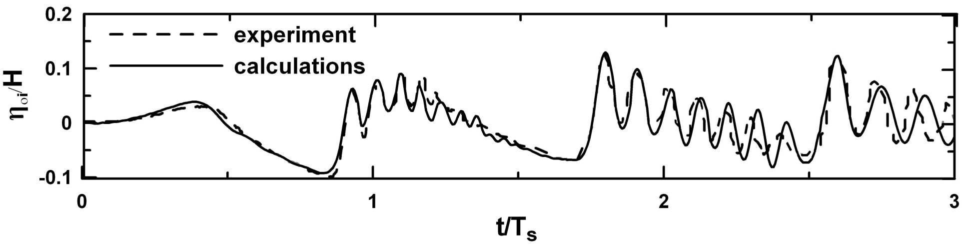

Рисунок 7.4: Порівняння зміщення границі розділу в середині басейну. В чисельному експерименті і лабораторному експерименті [126]

Спектральна щільність просторових змін лінії розділу для експерименту 1 (а) та експерименту 2 (б) показана на рис. 7.5. На рисунку можна побачити зсув спектрів до коротких хвиль ($\lambda/2L = 0.1 - 0.2$) з часом, що відповідає передачі енергії від хвиль із довжиною масштабу басейну до поодиноких хвиль. Для виключення великомасштабних непарних мод був застосований частотний аналіз до змін лінії розділу в центрі резервуару. Використовувалося неперервне вейвлет-перетворення з базисною функцією на основі вейвлету Морле [33], [232]. На рис. 7.6 видно, що основна частина енергії складається з нелінійних хвиль, що розповсюджуються з періодами в діапазоні $T/T_i = 1 \div 1.25$ $T/T_i = 0.25 - 1$. Вони розпадаються на короткохвильовий ланцюг солітонів з періодом ($T/T_i \approx 1/16$). Ці дані узгоджуються з частотним спектральним аналізом у центрі лабораторного резервуару.

На рисунку 7.7 показано моделювання розподілу густини в експерименті 3 у порівнянні з лабораторним експериментом. Параметри цього експерименту відповідають границі між режимом IV і V . У цьому експерименті спочатку поверхня розділу збігається з діагоналлю басейну. Як видно формуються два майже симетричні внутрішні бори, а потоки між ними пристроюються

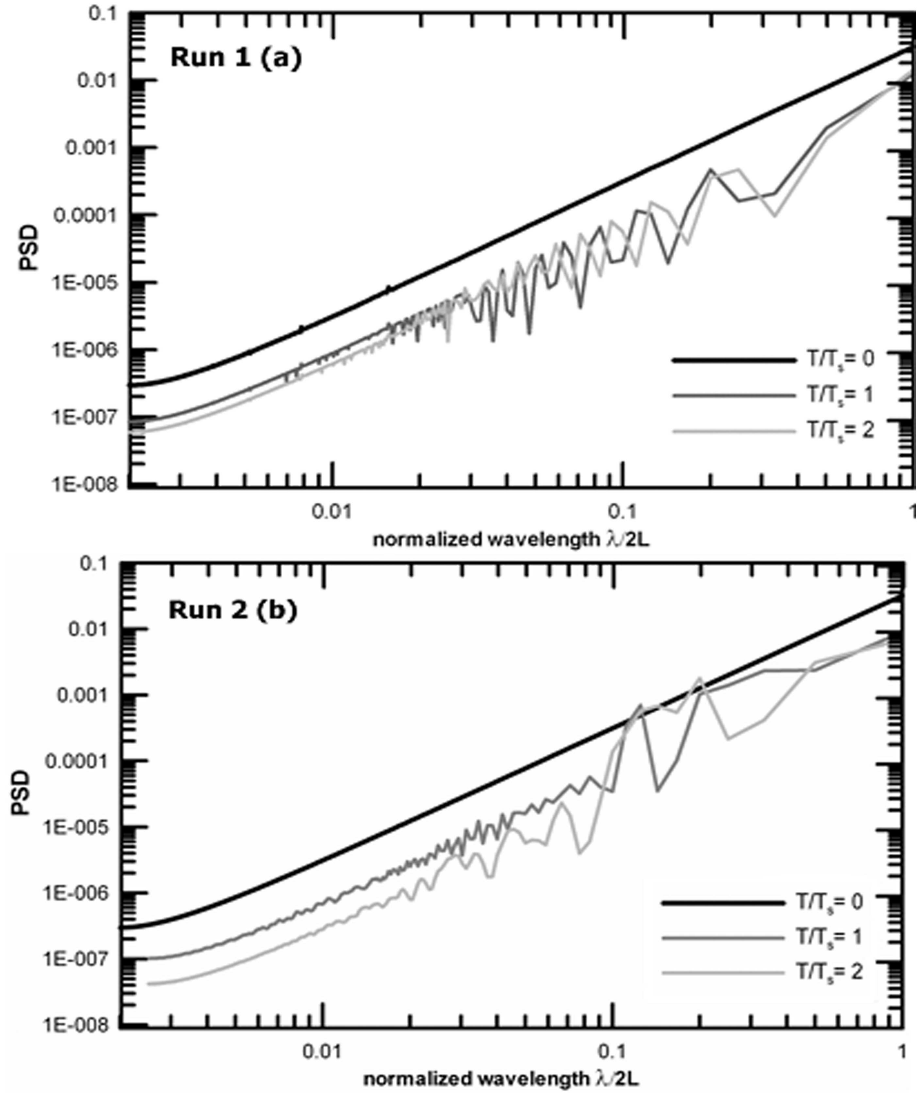

Рисунок 7.5: Спектральна щільність просторових змін лінії розділу для експерименту 1 (а) та експерименту 2 (б)

аж поки не утворюється нестійкість Кельвіна-Гельмгольца, що призводить до подальшого інтенсивного перемішування. На рис. 7.8 показано еволюцію поверхні розділу у тривимірному випадку експерименту 7. На ранніх стадіях нестійкості Кельвіна-Гельмгольца є двовимірними, тоді як на подальших етапах структура вихорів Кельвіна-Гельмгольца стає тривимірною

Два експерименти 4 та 5, які відповідають режиму III (режим гравітаційних течій), зображено на рис. 7.9. Спочатку поверхня розділу перетинає дно

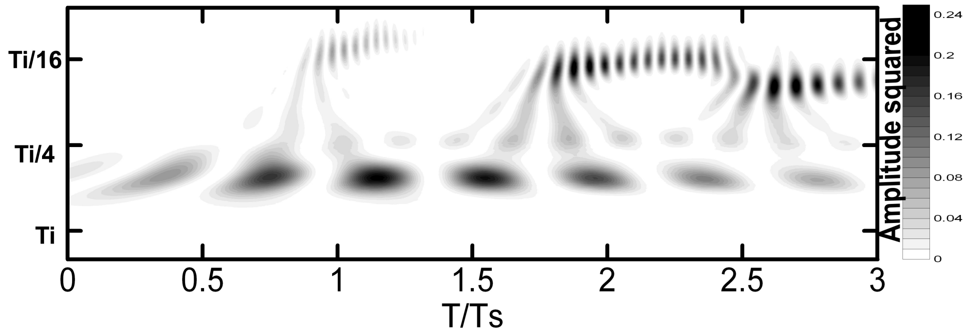

Рисунок 7.6: Неперервне вейвлет-перетворення змін лінії розділу в центрі резервуару з базисною функцією на основі вейвлету Морле [179]

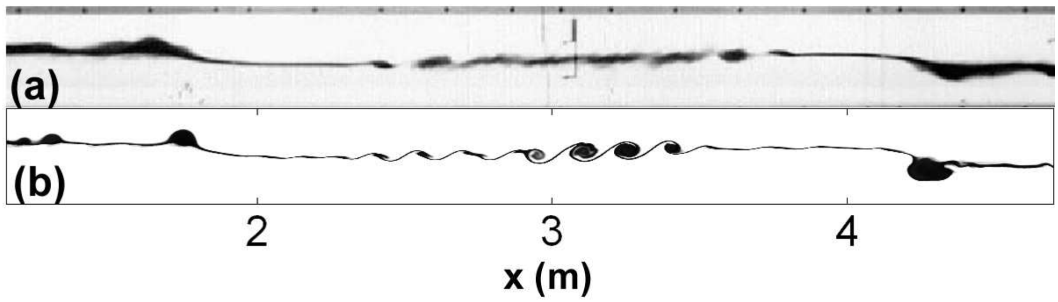

Рисунок 7.7: Фотографія з експерименту (3) [126] та відповідне чисельне моделювання [179]

(експеримент 4), та вільну поверхню (експеримент 5). В обох випадках формується гравітаційна течія, а потім солібор великої амплітуди трансформується у послідовність поодиноких солітонів. Однак, придонне тертя в експерименті 4 має суттєвий вплив, що призводить до сповільнення потоку та відносно раннього формування внутрішніх усамітнених хвиль. Тому слід бути обережним при поширенні результатів лабораторних експериментів з жорсткою кришкою на потоки у резервуарах з вільною поверхнею.

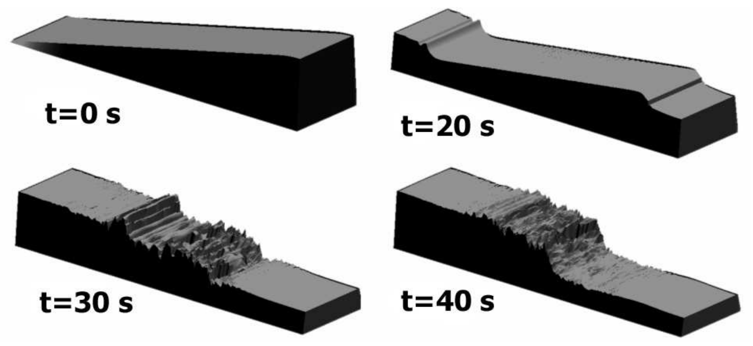

Рисунок 7.8: Чисельне моделювання поверхні розділу для експерименту 7 [179]

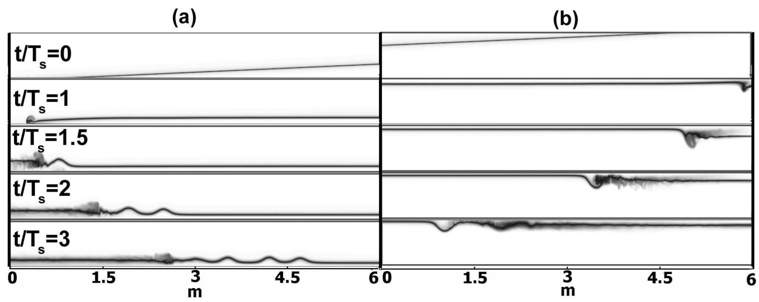

Рисунок 7.9: Чисельне моделювання поля густини для експериментів 4 та 5 [179]

7.2 Трансформація внутрішніх сейш в басейні з похилим дном

Як вже було зазначено, енергія в озері передається вітром на створення стоячих хвиль із масштабами басейну, а потім вона переноситься на мілкомасштабні рухи. Залежно від амплітуди початкового збурення та глибини шарів існує широкий спектр можливих режимів течій в басейні, які суттєво відрізняються від розв'язків лінійної задачі. Розглянемо прямокутний басейн, заповнений двома шарами рідини. Далі як і в роботі [126], ми визначаємо характерні часові шкали основних процесів, а потім основні режими, які характеризуються певними домінуючими механізмам. Проте, класифікація включає лише процеси перемішування, які пов'язані з появою зсувної нестійкості, утворенням борів або соліборів, тоді як в озері важливим процесом перемішування є також внутрішні хвилі, обвалюються на озерних схилах.

Табл. 7.2: Параметри чисельних експериментів з виродження внутрішніх хвиль в басейнах над схилами.

експ.	h_1/H	η_{0i}/h_1	**режим**	**нахил**	**сітка**
10 \ BO 6	0.29	-0.90	II	0.15	1100 ×350×5
11 \ BO 6A	0.29	-0.90	II	∞	1100×350×5
12 \ BO 18	0.50	+0.82	IV	0.15	1100×350×5

Тут ми розглянемо трансформацію внутрішніх хвиль у лабораторному басейні з похилим дном на одному з кінців басейну. Чисельні експерименти відтворюють деякі лабораторні експерименти з роботи [66]. Ці експерименти проводилися в прямокутному резервуарі (такий же, як і в попередніх розділах), на кінці якого був розміщений рівномірний схил. Басейн був заповнений двошаровою стратифікацією по солоності. Різниця густини шарів складала $\Delta\rho = 20$ кг м$^{-3}$. Басейн був накритий кришкою, що дозволяло нахилити поверхню розділу на необхідний кут. Швидке обертання резервуара та повернення до початкового горизонтального положення призводить до початкового нахилу поверхні розділу та подальших коливань. Параметри експериментів наведено в таблиці 7.2. Початкова конфігурація експериментів показана на рисунку 7.10. Відповідно до класифікації, наведеної в попередньому розділі, експеримент 10 відповідає режиму II (генерація усамітненої хвилі), тоді як експеримент 12 відповідає режиму IV (утворення нестійкості Кельвіна-Гельмгольца).

Розглянемо процеси формування високочастотної хвилі та її накату на шельф в експерименті 10 (апвелінг на схилі). На малюнку 7.11 показана послідовність позицій поверхні розділу між шарами. Спочатку формується внутрішній бор ($t = 30$ с). Потім нелінійний бор перетворюється в ланцюг внутрішніх усамітнених хвиль, що поширюються до кінця лабораторного басейну з похилим дном ($t = 70$ с), де хвилі взаємодіють зі схилом. Потім ці хвилі відбиваються, як у випадку з прямокутним резервуаром. Наявність донного нахилу в експерименті 10 суттєво змінює еволюцію внутрішніх хвиль. Амплітуда відбитих хвиль складає половину амплітуди падаючої хвилі. Зміщення границі розділу в середині басейну для експерименту 11 та 10 та відповідні неперервні вейвлет-перетворення наведено на рисунках 7.12 та 7.13, відповідно. Формування та трансформація ланцюга хвиль у прямокутному резервуарі (рис. 7.12) схожа з експериментом 2 (рис. 7.3). Вейвлет-аналіз на рисунку 7.12 (б) показує, що при $t/T > 1$ високочастотний ланцюг усамітених хвиль зберігає свою форму тривалий час і розкладається під впливом в'язкості. Проте, похиле дно спричиняє затухання коротких хвиль, як це видно на рис. 7.13

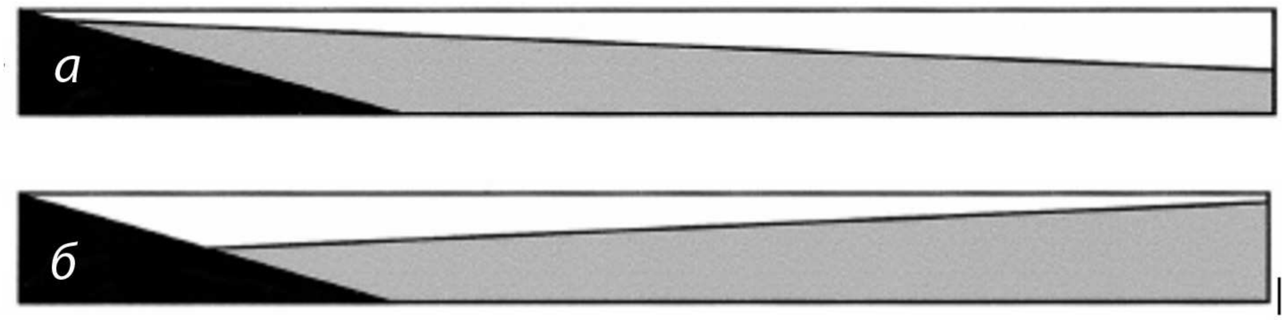

Рисунок 7.10: Початкові умови в експериментах [66]. (а) апвеллінг на схилі (експеримент 10, таблиця 7.2). (б) даунвеллінг на схилі (експеримент 12, таблиця 7.2).

Кінематика обвалення на укосі з нахилом 0.15 подібна до випадку лабораторних і чисельних експериментів (експерименти 1104 і A2). Співвідношення амплітуди першої хвилі в цузі хвиль до товщини верхнього шару $a/h_1 \approx 2$ в $t = 120$ с і це добре описується моделлю Міяти-Чоя-Камасси [205],[81]. Рисунок 7.14 показує, що в обох випадках: в експерименті та чисельному моделюванні задній фронт хвилі поступово стає крутішим, що призводить до перевертання хвилі та утворення болусу. В цих експериментах переважає механізм перевертання; також видно деякі прояви зсувної нестійкості при $t = 130$ с (рис 3.41).

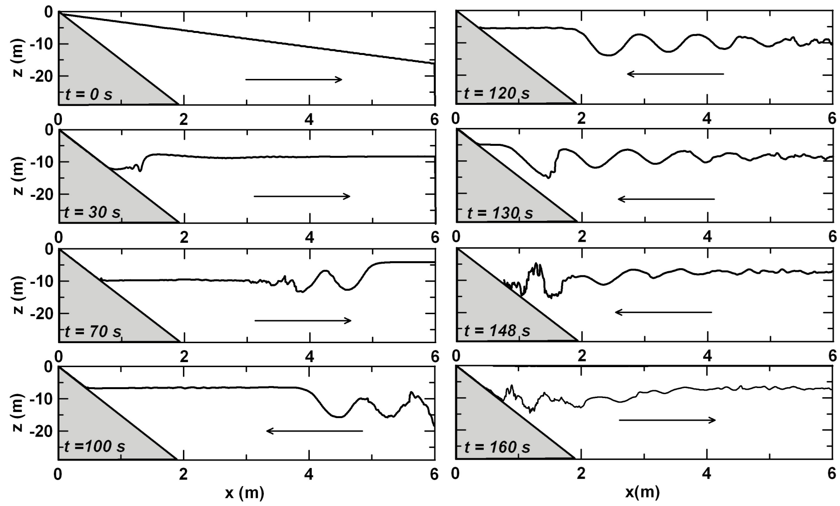

Рисунок 7.11: Варіація поверхні розділу у часі для експерименту 10 (таблиця 7.2)

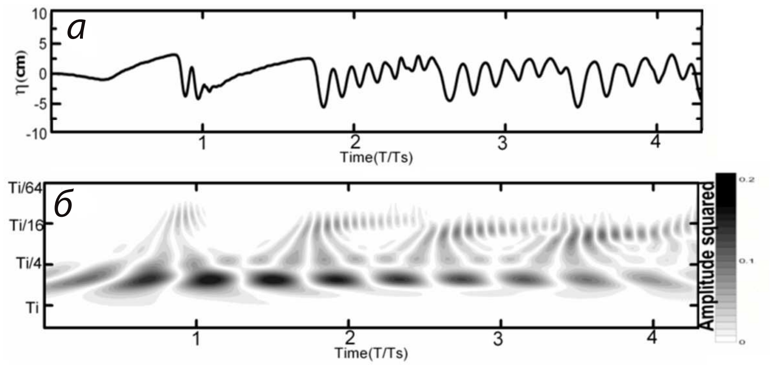

Рисунок 7.12: (а) - еволюція лінії розділу в центрі резервуару, (б) - неперервне вейвлет-перетворення змін лінії розділу в центрі резервуару з базисною функцією на основі вейвлету Морле для експерименту 10 (таблиця 7.2 [179])

Розглянемо випадок даунвеллінгу на схилі (експеримент 12). На малюнку 7.15 зображено еволюцію шару розділу для експерименту 12. Однак наявність схилу призводить до відмінностей для експерименту в прямокутному басейні та у басейні зі схилом вже на початкових стадіях трансформації. Замість формування двох борів, як в експерименті 3, тут (експеримент 12) виникає один бор $t = 30$ с. Цей бор поступово трансформується в цуг хвиль $t = 40{-}60$ с. Як і у експерименті 3 (рис. 7.7), сильний зсув на поверхні розділу стає

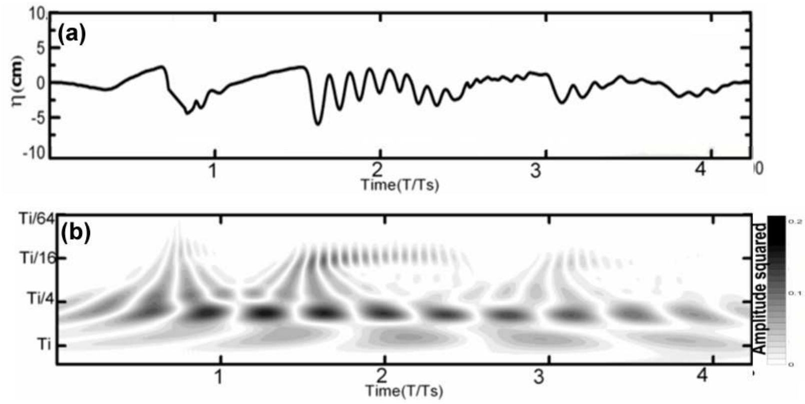

Рисунок 7.13: (a) - еволюція лінії розділу в центрі резервуару. (б) - неперервне вейвлет-перетворення змін лінії розділу в центрі резервуару з базисною функцією на основі вейвлету Морле для експерименту 11 (таблиця 7.2 [179])

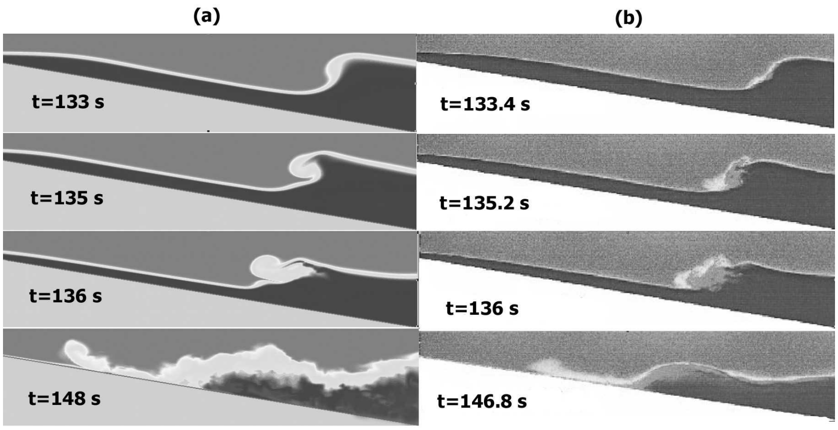

Рисунок 7.14: Порівняння моделювання обвалення хвиль на схилі 3/20 з лабораторним експериментом [66]. (a) - Розрахунки для експерименту 10 (таблиця 7.2), (b) - Лабораторний експеримент 6 (таблиця 7.2).

причиною зсувної нестійкості і формування вихорів Кельвіна-Гельмгольца $t = 30 - 40$ с.

Кінематика руйнування хвилі на схилі в експерименті 12 відрізняється від експерименту 10 (таблиця 7.2). Співвідношення амплітуди першої хвилі в соліборі до товщини верхнього шару $a/h_1 \approx 2$ при $t = 60$. На рис. 7.15 показано, що укручення задньої частини першої в послідовності хвилі відбувається з утворенням зсувної нестійкості при $t = 65$ s. Послідовність кадрів з руйнуванням хвиль у чисельному моделюванні та лабораторному експерименті наведена на рисунку 7.16. На рис. 7.17 показано формування нестійкості Кельвіна-Гельмгольца в момент $t = 30$ с. Результати чисельного моделювання та лабораторні експерименти показали, що при обваленні хвиль домінує механізм зсувної нестійкості, тоді як перевертання та формування болусів не спостерігалося. Цей механізм аналогічний тому, що спостерігається для трансформації усамітрнених хвиль над похилим дном у розділі 3.5 в експерименті A2 (деталі експерименту в таблиці 7.5).

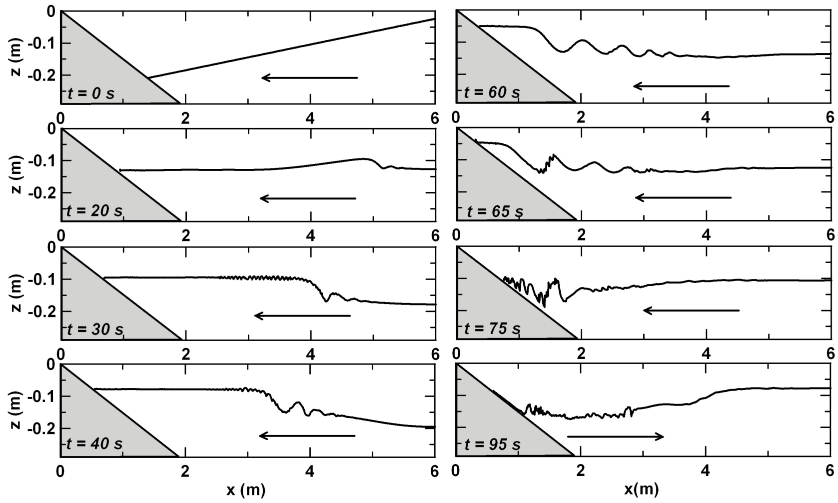

Рисунок 7.15: Моделювання зміни поверхні розділу в експерименті 12 (таблиця 7.2)

Результати моделювання показали, що процес трансформації та обвалення на схилі визначається двома механізмами: перекиданням хвилі та зсувною нестійкістю. За аналогією з поверхневими хвилями в роботі [66] було проведено класифікацію трансформації внутрішніх хвильових режимів за числами Ірібарена (розділ 3.5): розлиття (spilling breakers), пірнання (plunging breakers), колапсування (collapsing breakers), нестійкість Кельвіна-Гельмгольца. Але зазначимо, що немає повної аналогії між внутрішніми та поверхневими хвилями, оскільки повітря має густину в тисячі разів менше, ніж у води, тоді як різниця густин між шарами води становить близько 10^{-2} кг/м^3, і тому динаміка потоків в обох шарах є суттєвою в процесі формування та трансформації

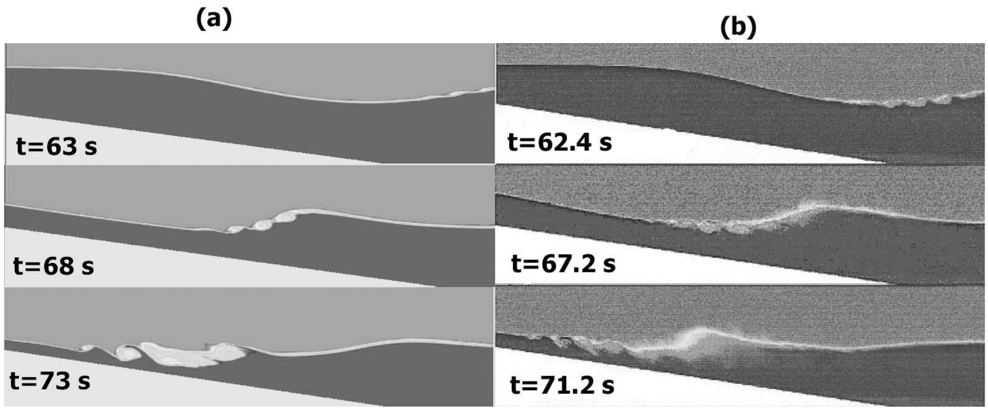

Рисунок 7.16: Порівняння моделювання обвалення хвиль на схилі 3/20 з лабораторним експериментом [66]. (a) - розрахунки (експеримент 12), (b) - лабораторний експеримент 18 (таблиця 7.2)

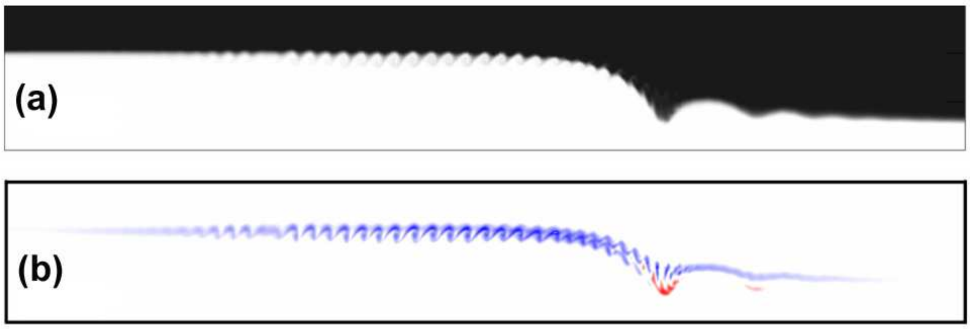

Рисунок 7.17: Розподіл солоності (a) та завихоренності (b) в момент t=30 в експерименті 12.

внутрішніх хвиль, що не має відповідності у поверхневих хвиль.

На рисунках 7.18, 7.19 показано перетворення енергії для експерименту 12. Еволюція кінетичної KE (1.156) та потенціальної енергії PE (1.150) (розділ 1.4.2) в лабораторному басейні показує, що трансформація цугу хвиль на схилі при $t = 60 - 75$ с призводить до швидкого затухання кінетичної та потенційної енергії. На малюнку 7.19 показано еволюцію псевдоенергії PSE сума кінетичної енергії та доступної потенційної енергії APE та фонової потенційної енергії BPE, розраховану адіабатичним сортуванням поля густини в об'ємі. Видно, що швидкий перенос енергії відбувся в момент $t = 60 - 80$ с, коли пакет хвиль руйнується на схилі, і перемішування при руйнуванні

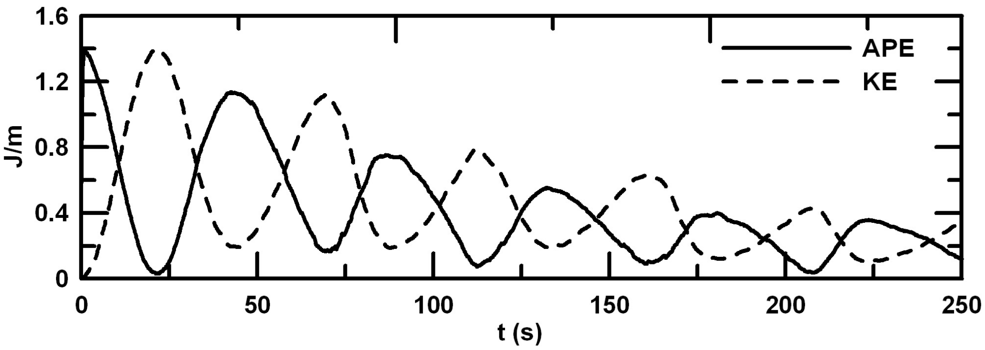

Рисунок 7.18: Перетворення енергії (доступної потенціальної APE та кінетичної KE) для експерименту 12.

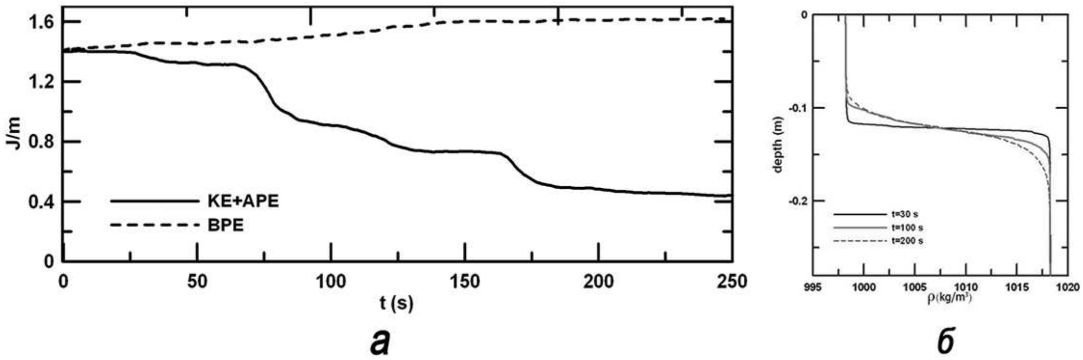

Рисунок 7.19: Перетворення енергії (псевдоенергії PSE=APE+KE та фонової потенціальної енергії BPE) та зміни товщини пікнокліну в часі для експерименту 12.

хвиль призводить до незворотного потовщення пікнокліну. Зміни товщини пікнокліну показано на рисунку 7.19 (б). Зазначимо, що інший процес, який призводить до потовщення пікнокліну - це неадіабатична фонова дифузія температури або солоності.

7.3 Трансформація внутрішніх сейш в басейні з пагорбом

У цьому розділі буде розглянута динаміка перетворення великомасштабних хвиль у басейні з пагорбом. Як і в попередніх розділах, використовувався лабораторний обчислювальний басейн з двошаровою стратифікацією

по солоності. Лабораторний басейн має довжину $L = 6$ м і висоту $H = 0.29$ м [126] з пагорбом, у центрі резервуару.
Пагорб задавався у вигляді Гаусіану

$$H = H_m - H_{sill} \cdot e^{-\frac{(x-x_s)^2}{L_{sill}}}, \tag{7.11}$$

де $H_m = 0.29$ м, $H_{sill} = 0.14$ м, $x_s = 3$ м, $L_{sill} = 0.5$ м. Початковий розподіл солоності відповідає експерименту 8, де $h_2/H_m = 0.7$, $\eta_{i0}/h_2 = 0.39$. Чисельне моделювання проводилося у квазідвовимірній постановці при молекулярних значеннях в'язкості та дифузії солі. Число вузлів розрахункової сітки $1300 \times 5 \times 500$. Експеримент 9 (розділ 5.4.1) належить області генерації усамітнених хвиль (режим II). Проте наявність пагорбу істотно впливає на процес формування хвильового ланцюга та трансформації хвиль. Еволюція солоності в цьому випадку показана на рисунку 7.20. Початковий нахил поверхні розділу (рис 7.20 a) формує, як і в експерименті 8, двосторонній потік, що призводить до утворення нелінійного бору на правій стороні басейну (рис 7.20b). Потім нелінійний бор перетворюється на ланцюг усамітнених хвиль (рис 7.20 c). Тим часом двосторонній потік над пагорбом спочатку прискорюється і стає надкритичним, як видно на рисунку 7.23, де показано зміну у часі складеного числа Фруда (3.9) вздовж лабораторного басейну з пагорбом. Теорія двошарової гідравліки передбачає постійний потік у каналі, коли потік критичний (складене число Фруда $Fr^2 = 1$) в двох контрольних точках, одна з яких знаходиться на вершині пагорба, а інша у підніжжя пагорбу [56]. Потік є докритичним (тобто $Fr^2 < 1$) між цими двома контрольними точками. Проте, в разі нестаціонарних потоків в обох шарах ці умови не виконуються: зони надкритичного потоку виникають з підвітряної сторони важкої рідини.

Більш детально процес взаємодії зі схилом продемонстровано на рис. 7.21. Як видно з послідовності знімків солоності та завихоренності, цей потік не-

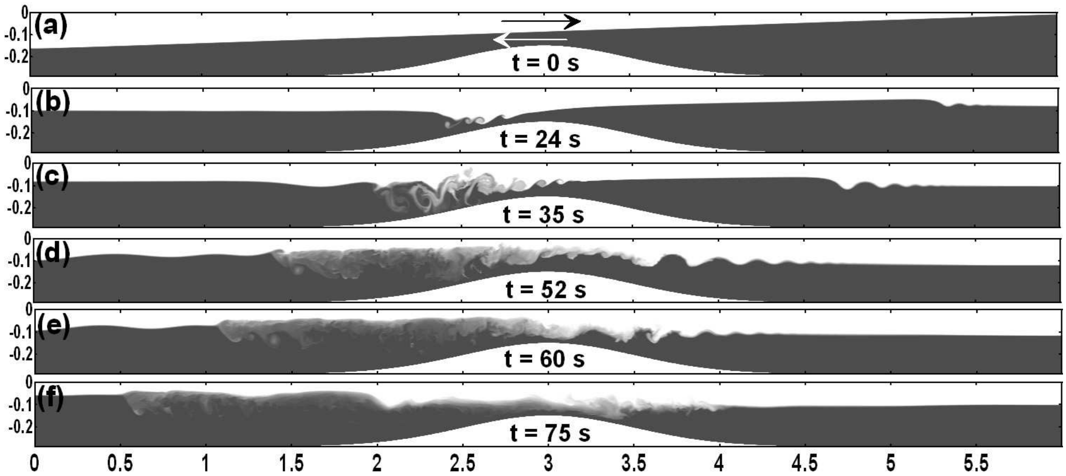

Рисунок 7.20: Результати моделювання поля солоності у випадку басейну з пагорбом. Розповсюдження хвилі відбувається справа наліво

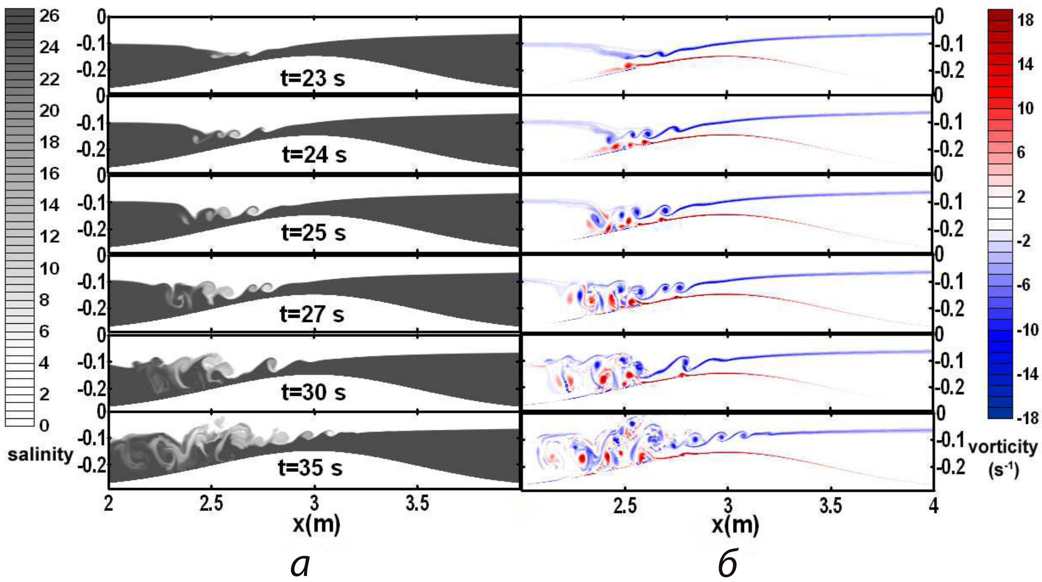

Рисунок 7.21: Утворення надкритичних потоків над пагорбом. (а) - поле солоності, (б) - поле завихореності [179]

стійкий. Нестійкість призводить до появи вихорів Кельвіна-Гельмгольца (t = 27 с) та подальшого перемішування ($t = 35$ с). Наступною важливою подією є формування цугу усамітенних хвиль- пониження, які взаємодіють з підводним пагробом (рис. 7.22). Коли хвилі підходять до пагорбу, вони посилюються, змінюють полярність та руйнуються. Проте, цей механізм обвален-

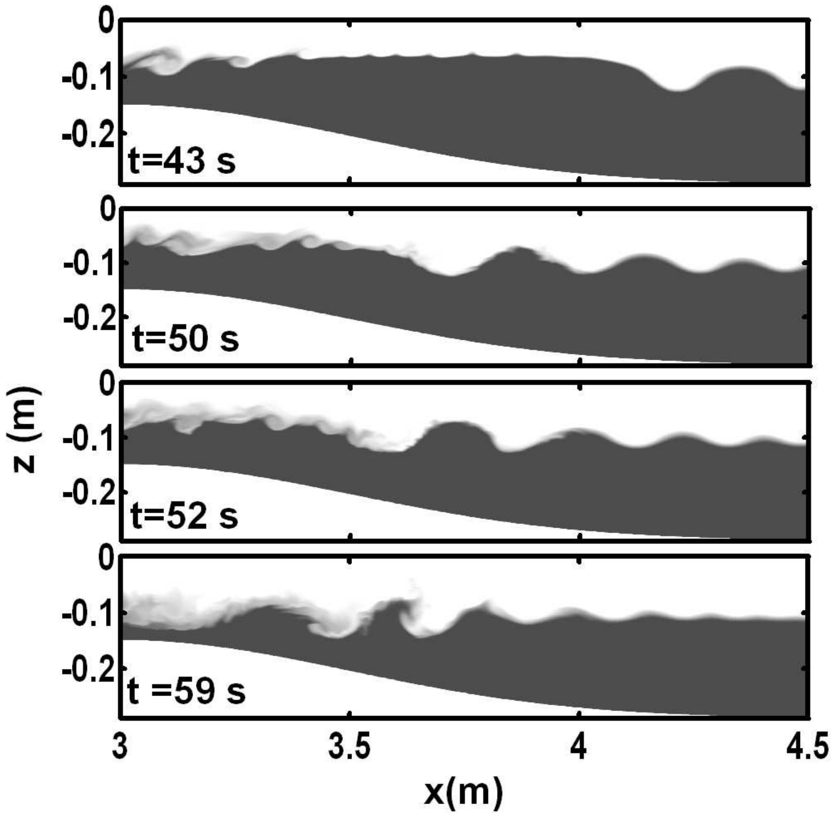

Рисунок 7.22: Обвалення хвиль із утворенням оберненої нестійкості [179]

ня суттєво відрізняється від конвективного руйнування і обвалення спричиненого зсувом, оскільки хвилі взаємодіють з пагорбом при двосторонньому потоці. Зсувний потік не дає можливості обвалення хвилі-підвищення, що підходять до пагорбу, формуючи підвітряні хвилі, які зазнають так званої "зворотної"нестійкості. Така нестійкість була досліджена в роботі [130] в лабораторному експерименті з руйнування періодичних внутрішніх хвиль на пагорбі у формі Гаусіану. У цих експериментах "зворотна"нестійкість є лише одним із трьох типів нестійкості: "зворотна"нестійкість, занурення, та обвалення із формуванням нестійкості Кельвіна Гельмгольца. У представленому чисельному моделюванні спостерігався лише перший тип. Наявність пагорбу суттєво змінює процеси обміну між потенційною та кінетичною енергією. Це відбувається тому, що пагорб блокує вільні коливання (сейшинг) в басейні, що призводить до сильного розсіювання надкритичних потоків над пагор-

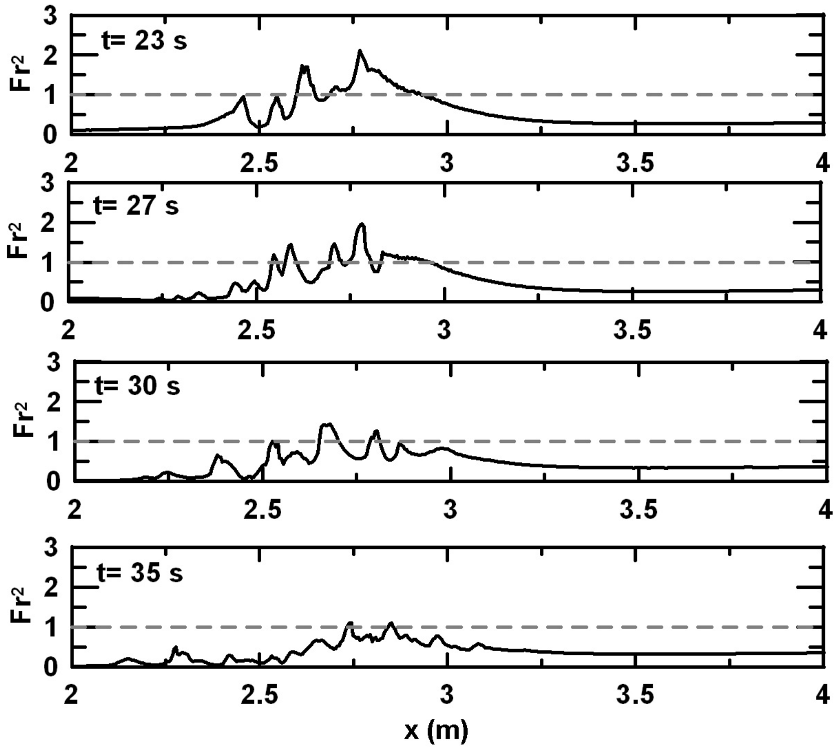

Рисунок 7.23: Зміни складеного числа Фруда (3.9) вздовж лабораторного басейну з пагорбом [179].

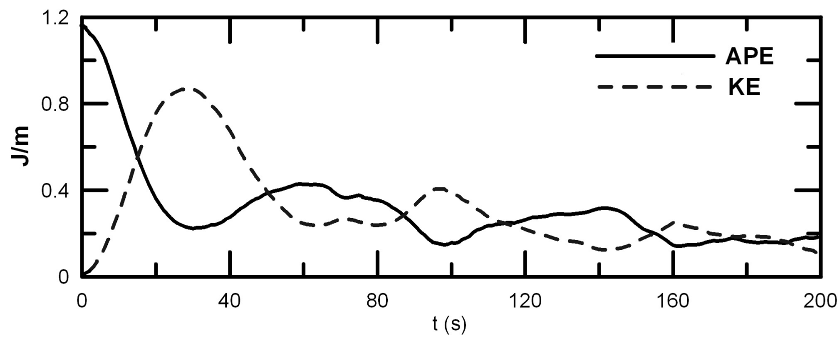

Рисунок 7.24: Еволюція кінетичної енергії KE та доступної потенціальної енергії APE в басейні з пагорбом [179].

бом. Разом ці ефекти призводять до посилення перемішування та зростання фонової потенціальної енергії на рис. 7.24-7.25.

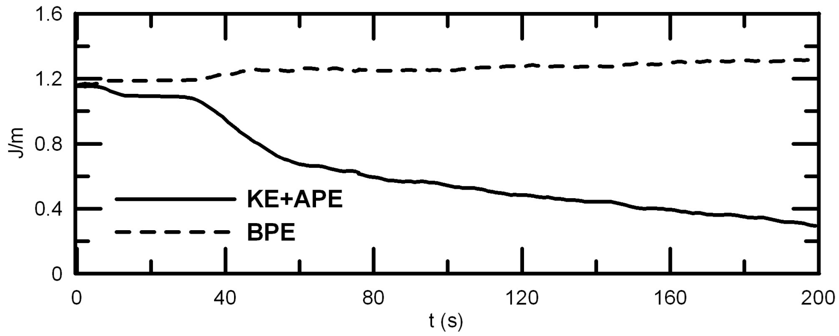

Рисунок 7.25: Еволюція повної псевдоенергії PSE та фонової потенціальної енергії BPE в басейні з пагорбом [179].

7.4 Трансформація внутрішніх сейш в басейні з вузькістю

Метою цього розділу є вивчення динаміки внутрішніх хвиль в басейні з вузькістю та пагорбом. Цей процес досі недостатньо вивчений. В роботі [264] вивчалась стійкість прогресивних, періодичних, внутрішніх хвиль, що проходять через звуження. Амплітуда хвилі у звуженні зростає, а зсувна нестійкість Кельвіна-Гельмгольца розвивається на гребені великих зсувних хвиль. Лабораторний експеримент з розповсюдження внутрішніх усамітнених хвиль через вузькість [105] показав появу нестійкості хвиль у звуженні. Однак немає ні лабораторних, ні теоретичних робіт з вивчення трансформації сейш в озері при наявності вузькості. У моделюванні використовувався лабораторний обчислювальний резервуар з двошаровою статифікацією солі. Басейн має довжину L=6 м та висоту H_m=0.29 м (як в попередніх експериментах та роботі [126]) та глибиною $B = 0.5$ м з вузькістю посередині, вид зверху на такий лабораторний басейн показано на рис. 7.26. Вузькість має симетричну форму також у формі Гаусіану, який задано як:

$$B = B_m - 2B_{narrow} \cdot e^{-\frac{(x-x_s)^2}{L_{narrow}}}, \tag{7.12}$$

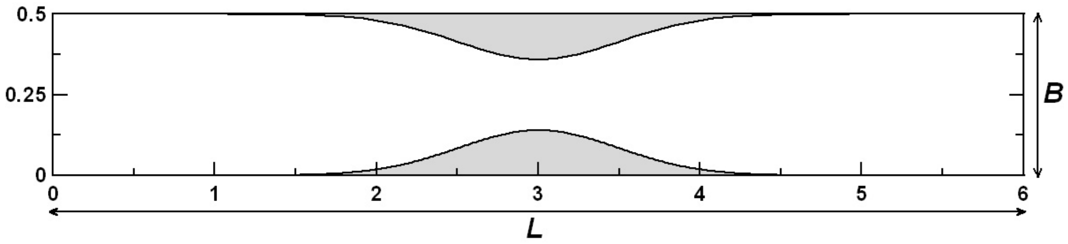

Рисунок 7.26: Вид зверху обчислювального басейну з вузькістю [179].

де $B_m = 0.5\,\text{м}, 2B_{narrow} = 0.28\,\text{м}$, $x_s = 3\,\text{м}$, $L_{narrow} = 0.5\,\text{м}$. Початковий розподіл солоності відповідає експерименту 8 з розділу 3.5, де безрозмірні параметри дорівнюють $h_2/H_m = 0.7$, $\eta_{i0}/h_2 = 0.39$. Моделювання проводилися в тривимірному режимі з використанням молекулярних значень в'язкості та дифузії солі. Розрахункова сітка містила $600 \times 23 \times 200$ вузлів.

Спочатку розглянемо ефект звуження в басейні постійної глибини. Як вже було зазначено, розглянутий у розділі 3.5 експеримент 8 (таблиця 7.5) є режимом генерації одиночної хвилі (режим II). Еволюція поля солоності, яке було отримано в результаті моделювання, в центральній частині резервуара з вузькістю показана на рисунку 7.27. Початковий нахил поверхні розділу (рис. 7.27 а) створює двосторонній потік, який прискорюється і стає надкритичним ($Fr > 1$) у вузькості, як видно на рисунку 7.28. Зсувна нестійкість виникає з появи вихорів Кельвіна-Гельмгольца у вузькості та вище за течією при ($t = 20$ с).

Відповідно до теорії двошарової гідравліки усталений потік у двох шарах через вузькість в каналі набуває максимальних значень, коли потік є критичним е найвужчій ділянці [56]. Однак, як видно на рис. 7.28, зона надкритичного потоку виникає в шарі більш густої рідини. Зсувна нестійкість у вузькості призводить до розвитку вихорів КГ (рис. 7.29). Тим часом нахил призводить до утворення нелінійних фронтів у правій частині басейну (рис. 7.29). Нелінійний фронт перетворюється в хвилеподібний цуг солітонів, який поширюється в ліву сторону. Проте, сильна дисипація та перемішува-

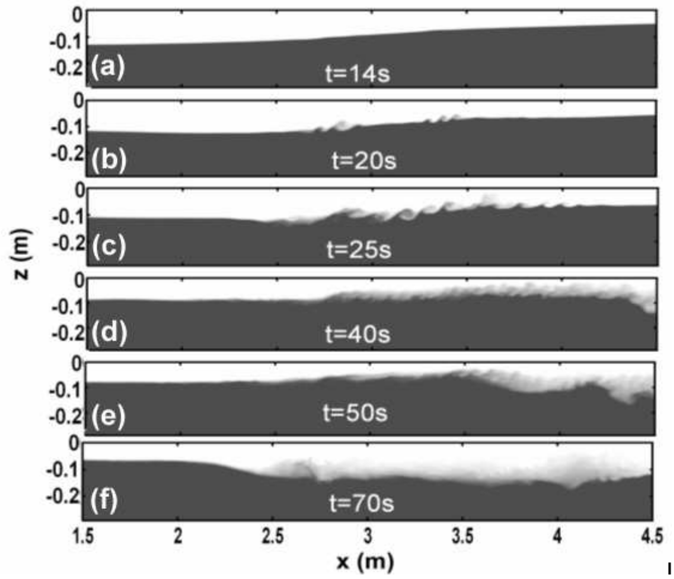

Рисунок 7.27: Поле солоності, отримане в результаті чисельного моделювання в центральній частині чисельного басейну з вузькістю [179].

ння в зоні звуження уповільнює коливання великих амплітуд та утворення послідовності солітонів.

Розглянемо ефект поєднання вузькості та пагорбу. Форма вузькості описується 7.12, а форма пагорба задається як 7.11. Сітка містить $600 \times 23 \times 200$ вузлів. Еволюція поля солоності, отриманого за допомогою моделювання, в центральній частині лабораторного басейну з вузькістю та пагорбом показана на рисунку 7.29. Початковий нахил поверхні розділу створює двосторонній потік, який прискорюється і стає надкритичним у області вузькості/пагорбу, як показано на рисунку 7.28. Нестійкість Кельвіна-Гельмгольца виникає на гребені пагорбу, що співпадає з максимальним звуженням. Сильне перемішування виникає з підвітряної сторони пагорбу та звуження при $t = 20 - 70$ с.

В роботі [56] в рамках теорії двошарової гідравліки встановили, що усталений обмінний потік через звуження та пагорб в каналі критичний,коли потік стає критичним у вузькості та іншій точці гідравлічного контрою, де $Fr = 1$. Як видно на рис. 7.28, критична точка виникає спочатку в момент часу $t = 20$

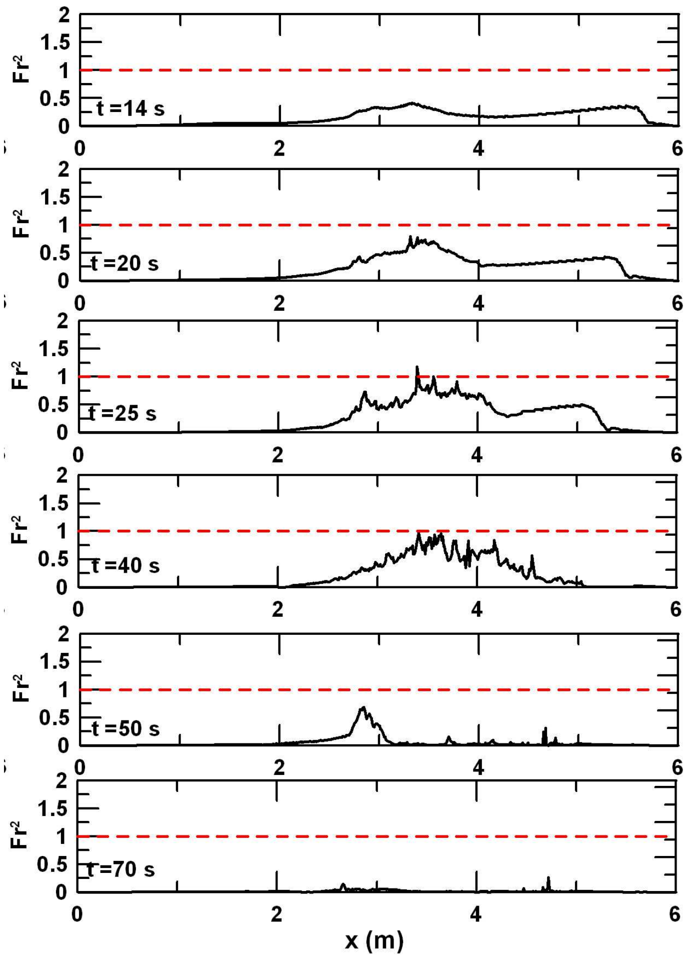

Рисунок 7.28: Складене число Фруда (3.9)вздовж басейну з вузькістю і пагорбом [179]

на підвітренній стороні пагорбу та звуження, і надкритичний потік знаходиться нижче за течією. З часом надкритична зона ($Fr > 1$) преходить вгору за течією $t = 40$, а обмінний потік зменшується після $t = 70$. Ланцюжок усамітнених внутрішніх хвиль утворюється з правого боку басейну і, коли вони підходять до порога/вузькості, їх профілі стають крутішими, а потім вони руйнуються. Сильне перемішування і руйнування цих хвиль призводить до "поглинання"хвиль на перешкоді, що сильно деформує хвилі, які через неї проходять.

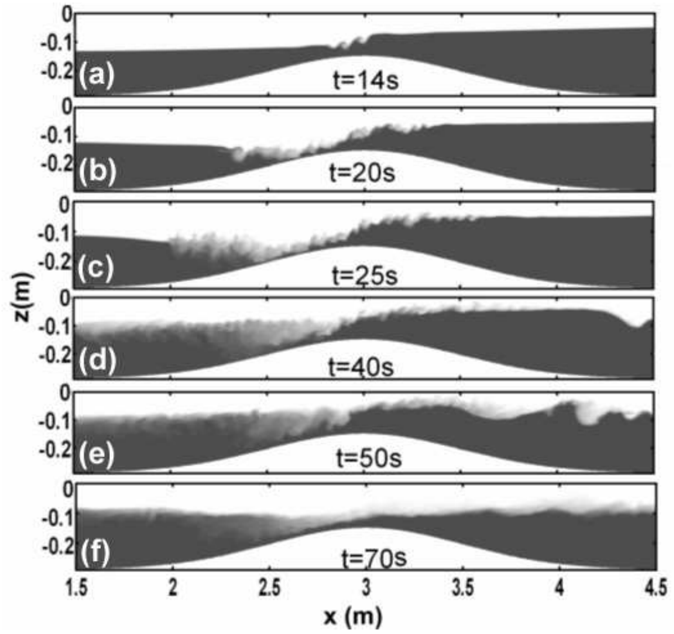

Рисунок 7.29: Поле солоності, отримане в результаті чисельного моделювання в центральній частині чисельного басейну з вузькістю і пагорбом [179]

7.5 Моделювання внутрішніх сейш в малому подовженому озері

В даному розділі наведено результати тривимірного чисельного моделювання виродження внутрішніх сейш великої амплітуди в модельному вузькому озері змінної глибини. Озеро глибини $H(x, y)$ має довжину $L = 5$ км, ширину $B = 1$ км, і максимальну глибину $H_{max} = 30$ м (Рис. 7.30). Карта глибин дна задавалась у вигляді аналітичної функції

$$H(x, y) = 0.25H_{max}(\sin(a_1\pi(x - L/2) - \frac{\pi}{2}) + \\ + \sin(b_1\pi(y - B/2) - \frac{\pi}{2}))^2, \\ \frac{(x - L/2)^2}{(L/2)^2} + \frac{(y - B/2)^2}{(B/2)^2} < 1, \tag{7.13}$$

де $a_1 = 0.0003$ м $^{-1}$, $b_1 = 0.001$ м $^{-1}$. Товщина верхнього прогрітого шару води $h_1 = 2.5$ м, максимальна товщина нижнього більш холодного шару $H_2 = 25.5$ м. Початкова температурна стратифікація, відповідає розподілу

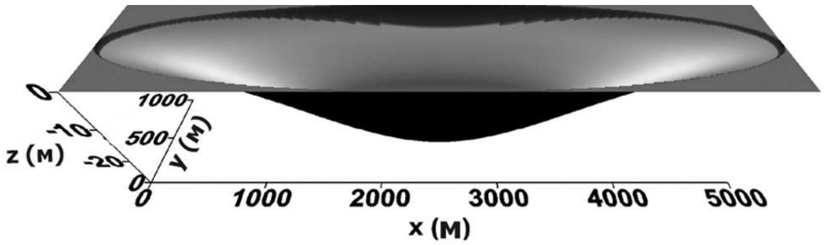

Рисунок 7.30: Карта глибин ідеалізованого озера, що задана функцією 7.14

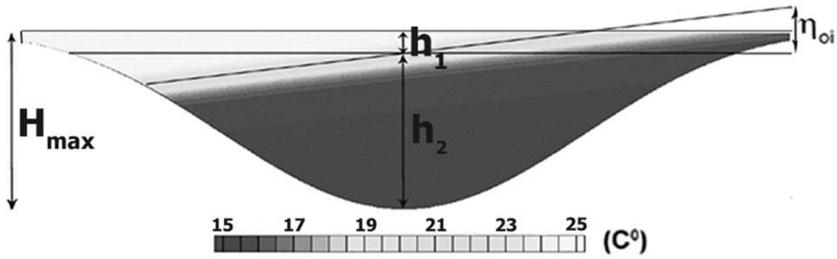

Рисунок 7.31: Початковий розподіл температури на вертикальному розрізі вздовж озера

температури озера влітку в помірних широтах, задавалася у вигляді:

$$T(z) = \frac{T_{up} + T_{bot}}{2} - \frac{T_{up} - T_{bot}}{2} \tanh\left(\frac{z - h_1}{dh}\right), \tag{7.14}$$

де $dh = 2.5$ м, $T_{up} = 25^o$ C и $T_{bot} = 15^o$ C – температура верхнього та нижнього шарів, відповідно.

У початковий момент часу термоклін відхилений від незбуреного горизонтального положення на кут, який визначається параметром $\eta_{0i}/h_1 = 1.7$, де η_{0i} це максимальне відхилення від незбуреного положення ізоповерхні з максимальним градієнтом температури. А відношення товщини верхнього шару до максимальної глибини дорівнює $h_1/H_{max} = 0.15$. Відповідно до класифікації течій в прямокутному басейні при двошаровій стратифікації [126], цей випадок знаходиться на межі надкритичних течій (режим III) і режиму, в якому присутні як надкритичні течії, що призводять до утворення борів, так і утворення зсувної нестійкості Кельвіна-Гельмгольца (режим V). Такий режим в реальному озері виникає після впливу сильного вітру, який призводить до того, що термоклін перетинає вільну поверхню.

Було проведено три чисельних експеримента для того, щоб виявити і відокремити ефекти, пов'язані з тривимірною топографією і негідростатичними ефектами:

1. двовимірний негідростатичний експеримент (2DNH),
2. тривимірний негідростатичний експеримент (3DNH),
3. тривимірний гідростатичний експеримент (3DH).

Роздільна здатність сітки для випадку тривимірного експерименту $500 \times 100 \times 60$ вузлів, а в разі квазідвумірного експерименту $500 \times 100 \times 5$. Для розрахунків використовувалася сігма-система координат: $\sigma(x, y, z) = z/(H + \eta)$. На рис. 7.32 показано еволюцію в часі вертикального перетину поля температури уздовж озера для експериментів 2DNH, 3DNH і 2DH. Як вже було відзначено, для цього режиму характерне утворення внутрішнього бору. У двовимірному випадку формування і еволюція бору супроводжується інтенсивним перемішуванням (рис. 7.32 а). Потім бор трансформується в солібор з цугом солітонів (рис.7.32в). За соліборам з'являється потовщення термокліну і формування хвилі другої моди.

Аналогічна задача була розрахована за допомогою моделі MITgcm. На рис. 7.35 зображено формування поверхневого сліду, що спричинений вихровими парами як в моделі MITgcm так і моделі NH-POM. І хоча алгоритми моделей відрізняються, формування поверхневого сліду відбувається при моделюванні обома моделями. Тривимірна топографія озера призводить до нових ефектів. Взаємодія великомасштабних течій з “ ложкоподібними ” торцями озера призводить до інтенсифікації заплиску сейші і до формування бору більшої амплітуди, ніж в двовимірному випадку (рис. 7.32). Перемішування в цій конфігурації більш інтенсивне. Після формування бору також з'являється

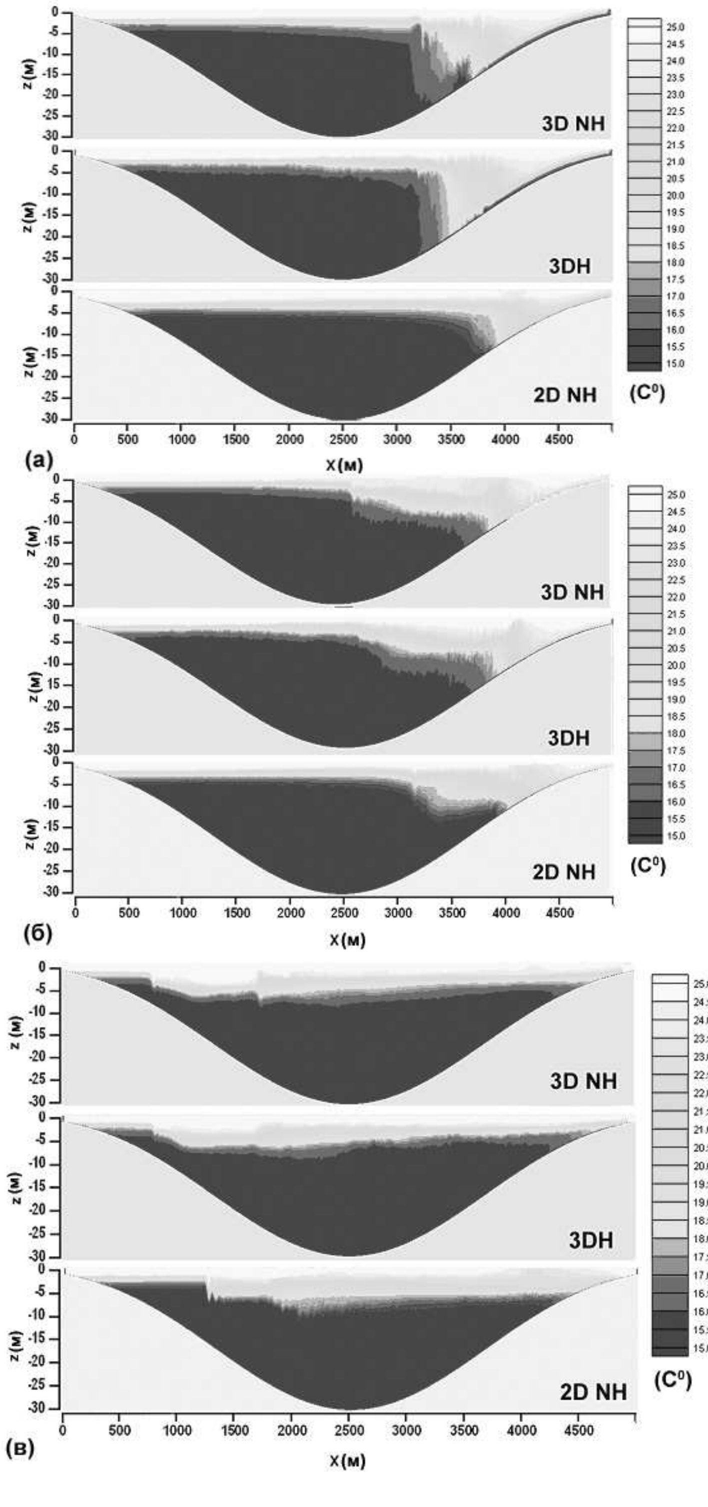

Рисунок 7.32: Розподіл температури на вертикальному перетині вздовж озера. (а) - $t = 0$ години, (б) - $t = 1.5$ години, (в) - $t = 2.5$ годин [179]

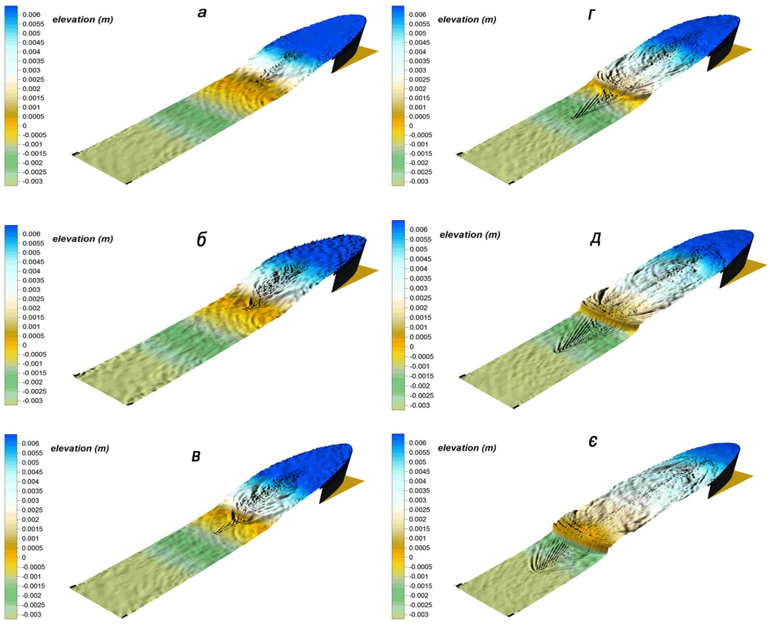

Рисунок 7.33: Рівень вільної поверхні в моменти часу (а) - $t = 0$, (б) - $t = 0.5$, (в) - $t = 1$, (г) - $t = 1.5$, (д) - $t = 2$, (є) - $t = 2.5$ годин [179]

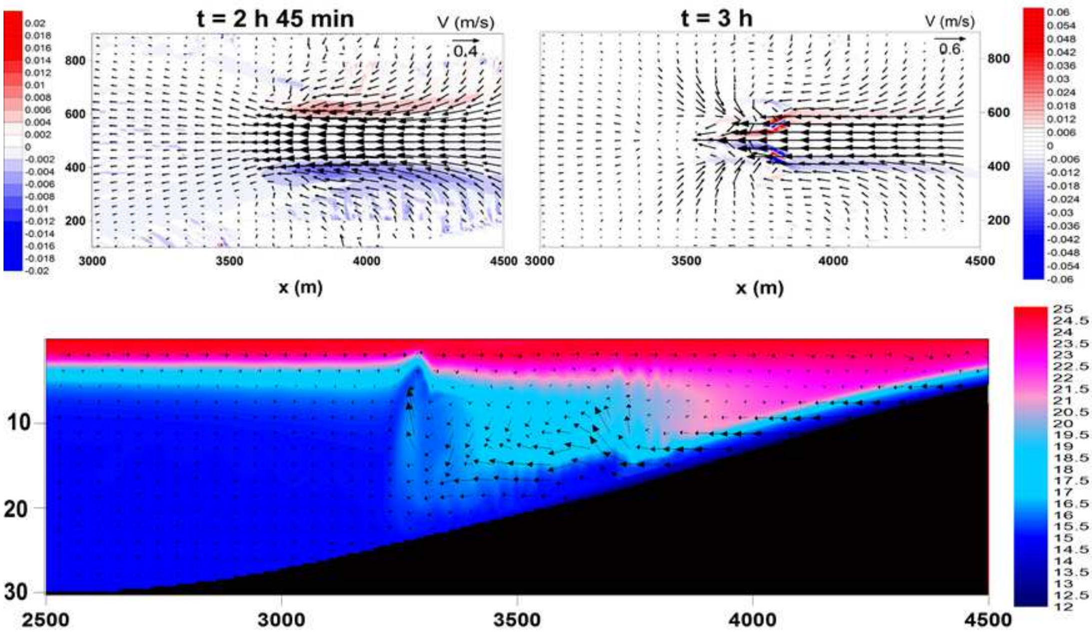

Рисунок 7.34: Швидкості на дні озера в моменти (а) - $t = 0$, (б) - $t = 1.5$ години, (в) - вертикальний перетин в час $t = 2$ години

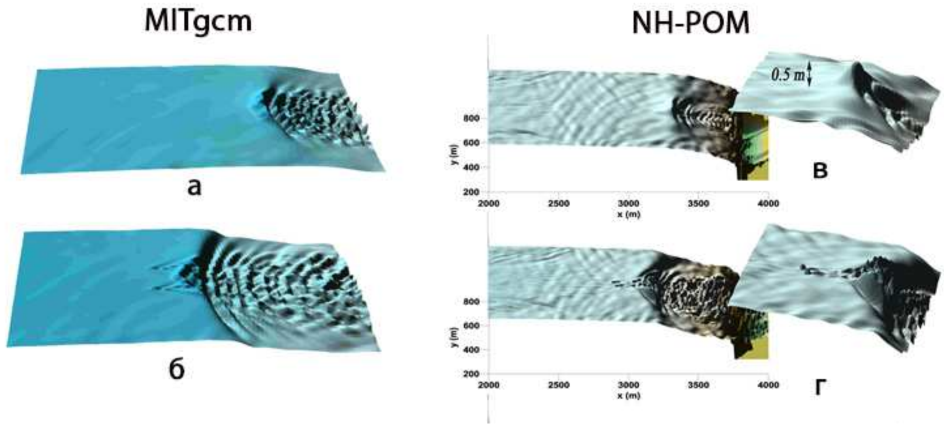

Рисунок 7.35: Формування поверхневого сліду при (а) $t = 0.5$, (б)- $t = 1$ годин моделлю MITgcm та, (в) - $t = 0.5$ та (г) $t = 1$ годин моделлю NH-POM

цуг усамітнених хвиль. Формування бору і його еволюція в тривимірному випадку також супроводжується інтенсивним перемішуванням і формуванням хвиль другої моди, що рухаються на задньому фронті солібору (7.32 в). На стадії формування бору процеси, що відбуваються в гідростатичному експерименті подібні негідростатичного. Потім бор з практично такою ж швидкістю переміщується до іншого кінця озера. У гідростатичному випадку також існують хвилі, схожі на усамітнені, але вони не є усамітненими внутрішніми хвилями, подібними хвилям на рис. 7.2 (а) та (б), так як в гідростатичній моделі ці хвилі виникають при нелінійному укручені при наявності чисельної дисперсії, і тому їх характеристики залежать від чисельної схеми і роздільної здатності обчислювальної сітки [87].

Розглянемо просторову структуру поширення хвиль в експерименті 3DNH. Еволюція вільної поверхні показана на рисунку 7.33, а придонні швидкості в момент формування бору $t = 4.5$ години приведені на рисунку 7.34. Як видно з рисунку 7.33, особливості рельєфу дна по краях озера призводять до того, що відбувається фокусування потоку і формування струменя уздовж осі симетрії озера. Цей надкритичний струмінь видно в наступні моменти часу як надкритичний потік, який викликає хвильовий слід на ізотермі та

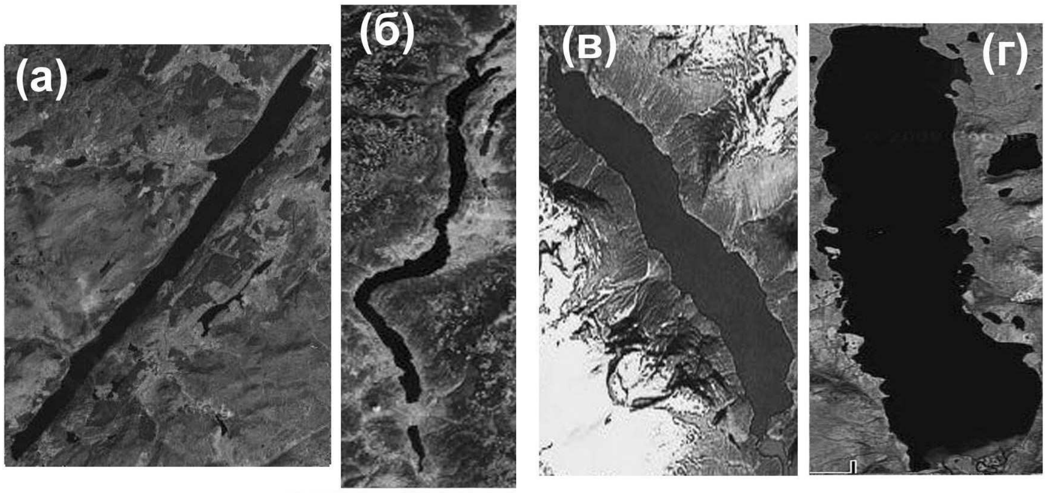

Рисунок 7.36: Деякі озера, де спостерігалися "озерні монстри '. (а)-озеро Лох-Несс,(б) - озера Оканаган, (в)- озера Лоен,(г)- озеро Лабинкир

на вільній поверхні (рис. 7.33). Максимальна швидкість у струмені становить 0.9 м/с, в той час як швидкість поширення бору 0.3 м/с . Зауважимо, що цей потік може викликати ерозію дна в зоні високих придонних швидкостей (рисунок 7.34).

Можна припустити, що слід, який поширюється на поверхні за збуренням термокліну в модельному озері з глибинами ідеалізованого озера, що задаються функцією (7.14), буде спостерігатися і в реальних подовжених озерах. Це фізичне явище може бути інтерпретовано спостерігачами як слід від рухомої великої тварини. Легенди про "озерних монстрів " засновані на свідченнях очевидців, більшість з яких описують монстрів як рухомі об'єкти, що викликають хвилі на поверхні озера, схожі на корабельні. Зазвичай притулком для " озерних монстрів " служать глибокі і вузькі озера в помірних широтах. Найвідомішими з цих істот є мешканець шотландського озера Лох-Несс (рис. 7.36а), змій Огопого з озера Оканаган (рис. 7.36 б) в Канаді, монстр з озера Лоен (рис. 7.36 в) в Норвегії та з озера Лабинкир (рис. 7.36 г).

7.6 Моделювання сильнонелінійної внутрішньої сейши в озері Лох-Несс

Найбільш досліджене з усіх згаданих у вступі озер - озеро Лох-Несс. Озеро має довжину 35 км, середню глибину 140 м, а максимальна глибина 240 метрів. Озеро має скрізь майже однакову ширину 1.4 км рис. 7.38. Вперше внутрішні сейші в озерах спостерігалися саме в озері Лох-Несс ще на початку XX століття [274] та [275], більше ніж 100 років тому. Явище генерації внутрішнього бору також було виявлено в озері Лох-Несс ще у 1955 Мортімером, та описано в роботі [206] і досліджувалася в роботі [263]. Часто, внутрішній бор, що сформувався за цугом усамітнених внутрішніх хвиль, може кілька разів перетинати Лох-Несс. Приклад такого бору можна побачити на рисунку 7.39 та 7.40, де зображені зміни температури в точках A та B, що зображені на рисунку 7.38. Цей внутрішній бор відбивається від кінців озера. Однак, вимірювання просторової структури внутрішніх стоячих хвиль в цьому озері поки не проводилося, що залишає відкритим питання про виникнення надкритичного струменя при відбитті внутрішніх хвиль або борів від кінців озера. Озеро Лох-Несс представляє собою природну лабораторією для вивчення внутрішніх сейш, це ідеальний природній басейн, який добре підходить для вивчення генерації, розповсюдження та трансформації внутрішніх хвиль. В озерах режим II з діаграми (рисунок 7.1) часто зустрічається та відповідає режиму виродження стоячих коливань розмірів озера за рахунок нелінійності у цуги коротких усамітнених хвиль (рисунок 7.3). Спостереження такого режиму в різноманітних озерах зображено на рис. 7.37.

Лох-Неське озеро надзвичайно пряме. Воно лежить у тектонічному розломі Грейт-Глен, що прямує з північного сходу до південного заходу долиною Грейт-Глен, і далі прямує через озеро Лох-Несс, що спрямоване у напрямку домінуючих вітрів (стрілка на рис. 7.38). Так як ширина озера становить кіль-

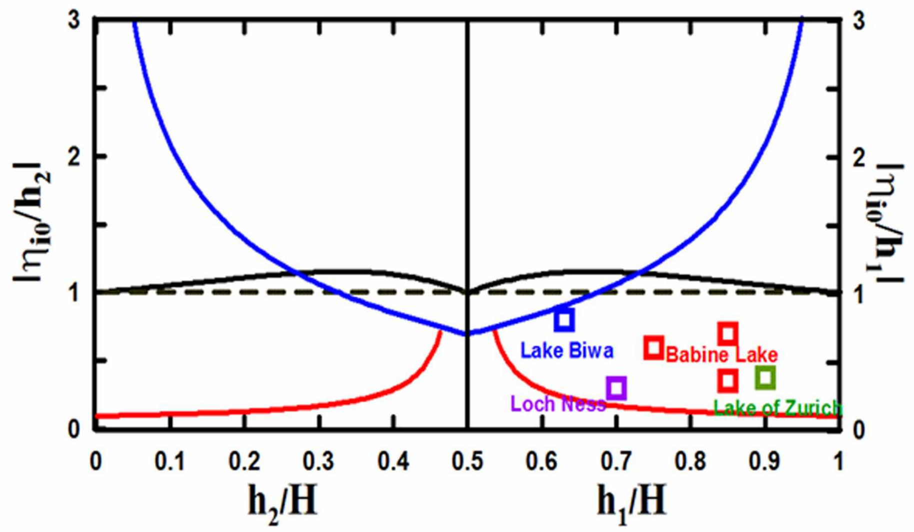

Рисунок 7.37: Режим II часто зустрічається в озерах і відповідає режиму виродження стоячих коливань розмірів озера за рахунок нелінійності у цуги коротких усамітнених хвиль.

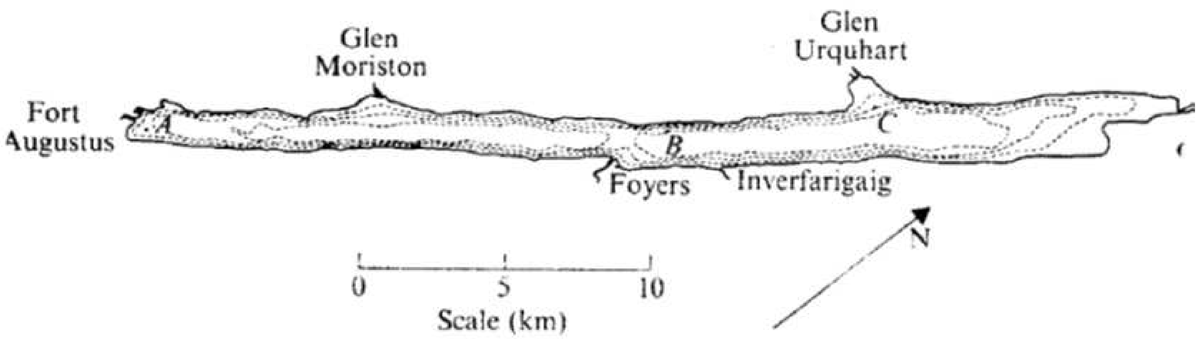

Рисунок 7.38: Карта глибин озера Лох-Несс.

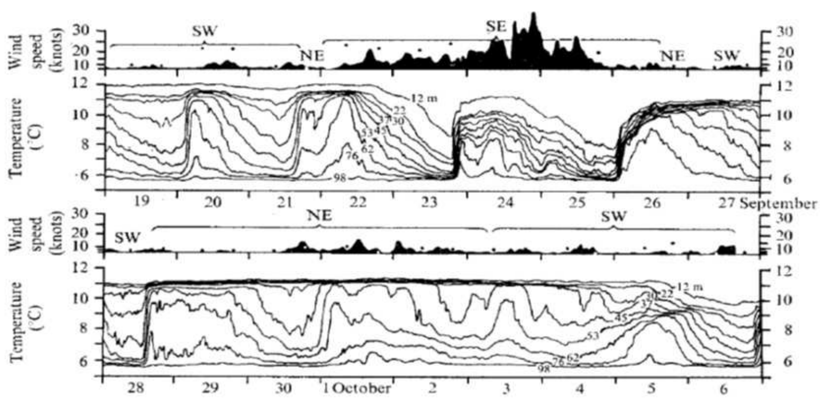

Рисунок 7.39: Зміни температури в точці A з рис. 7.38 [206]

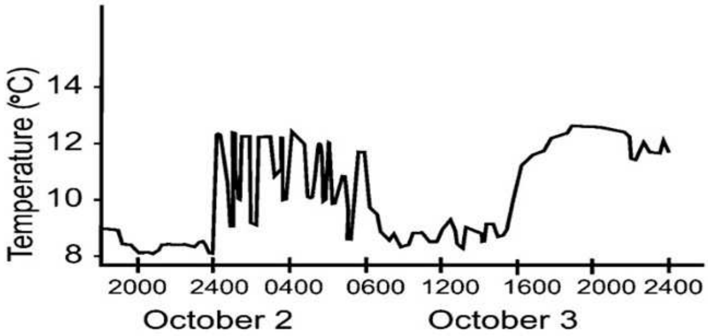

Рисунок 7.40: Спостереження внутрішнього бору в озері Лох-Несс з роботи [263].

ка кілометрів і характерний масштаб озера - декілька кілометрів $R_R > L$, то вплив ефектів обертання Землі на динаміку внутрішніх сейш тут слабкий. У 1955 році Мортимер [206] встановив три терморезисторні ланцюги в цьому озері. Він також як і в роботі [206] описав внутрішній бор, який повертається після відбиття в торці озера. В статті [263] було показано, що внутрішній бор в озері Лох-Несс має структуру, аналогічну припливному бору, що поширюється зі швидкістю близько 0.35 м/с з крутим переднім фронтом, за яким потім формується послідовність внутрішніх хвиль рис. 7.40. Сильнонелінійні хвилі породжуються сильними вітрами, які мають місце протягом сезону, коли озеро не вкрито льодовим покривом, найчастіше восени. Форма хвиль-пониження, які формуються в озері під час сильного вітрового впливу, мають вигляд функції Хевісайда; а їх амплітуда обернено пропорційна фазовій швидкості. Спостереження показали, що внутрішній бор містить пакет просторово когерентних велико амплітудних внутрішніх одиничних хвиль, за якими слідує осцилюючий хвильовий цуг (рис. 7.40). В роботі показано, що високочастотні усамітнені хвилі руйнуються на похилих торцях рельєфу дна озера, що призводить до посилення дисипації та є причиною сильного перемішування.

Область на північно-східному кінці озера Лох-Несс подібна до конфігурації розглянутого вище гіпотетичного 'ложкоподібного' озера. Карта глибин, що використовується для розрахунків внутрішніх сейш в озері Лох-Несс, показана на рисунку 7.41 і була взята з [206]. Моделювання трансформації внутрішньої сейші в озері Лох-Несс проводилось на розрахунковій сітці моделлю MITgcm 2.2.9. Роздільна здатність сітки задавалась $1000 \times 150 \times 160$ вузлів з більш детальною роздільною здатністю $10 \times 12 \times 0.4$ м в зоні інтересу (північно-східному кінці озера).

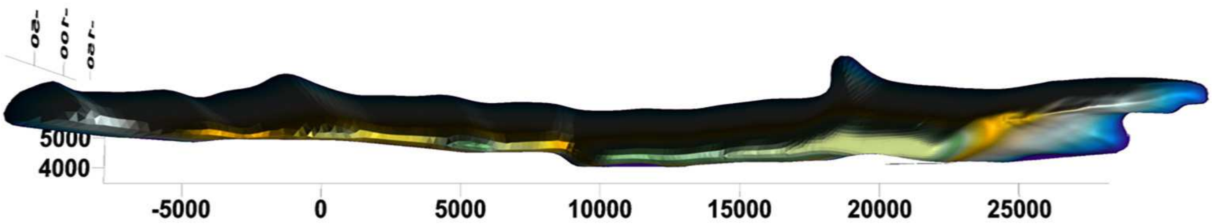

Рисунок 7.41: Карта глибин озера Лох-Несс, що використовувалася при моделюванні моделлю MITgcm.

Для завдання початкової умови в чисельному моделюванні , а саме початкового розподілу температури в озері Лох-Несс, задавався нахил термокліну, який відповідав числу Веддербурна (7.2) $W = 1.05$. Вважалось, що термоклін, що утворився в озері на глибині 36 м, відокремлює більш теплий верхній шар (епілімінон) із температурою близько 12 С від глибинних більш холодних вод (гіполімінон) з температурою 6 С. І тоді різниця густини між епілімінон та гіполімніоном складає $\Delta\rho = 0.5$ кг/м ^{3}. Профіль початкової температури зображено на рисунку 7.42 (а). Швидкість лінійних хвиль при заданій стратифікації $c_{in} = \sqrt{g\frac{\Delta\rho}{\rho}\frac{h_1 h_2}{H_max}} = 0.37$ м/с, $\frac{\eta}{h_1} = 1.05$, $\frac{h_1}{H} = 0.2$.

Чисельне дослідження трансформації внутрішніх стоячих хвиль в озері Лох-Несс, що взаємодіють із особливостями дна показало, що може відбуватися фокусування потоків, і в хвилі з'являється надкритичний внутрішній струмінь. Внутрішній надкритичний струмінь викликає надкритичні рухи в термокліні, що призводять до формування вихрових з вертикальною віссю в термокліні. Ці вихрові пари, що рухаються зі швидкостями 0.9 м/с вздовж

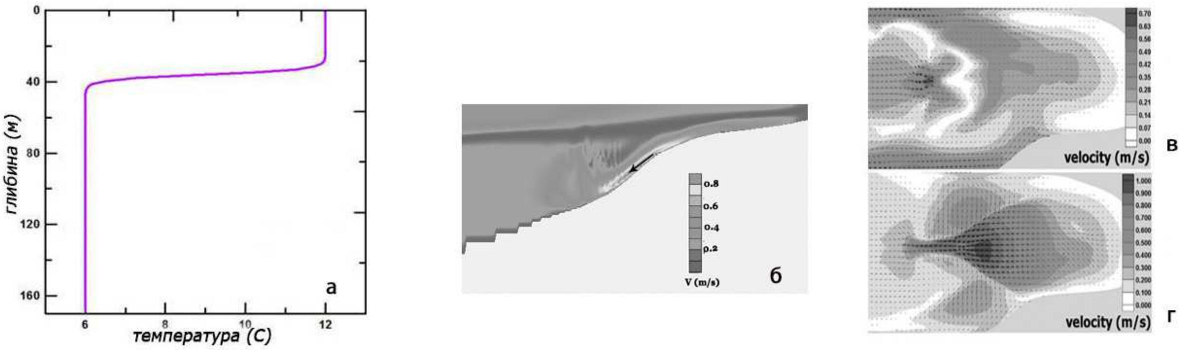

Рисунок 7.42: (а)- профіль температури, що використовувався в моделюванні, (б)- поле швидкості у вертикальному перетині в момент $t = 2.5$ години біля північно-східного кінця озера, (в)- поле швидкості на висоті 10 метрів від поверхні біля північно-східного кінця озера в моменти часу $t = 3$ години (в) та при $t = 3$ години на дні озера

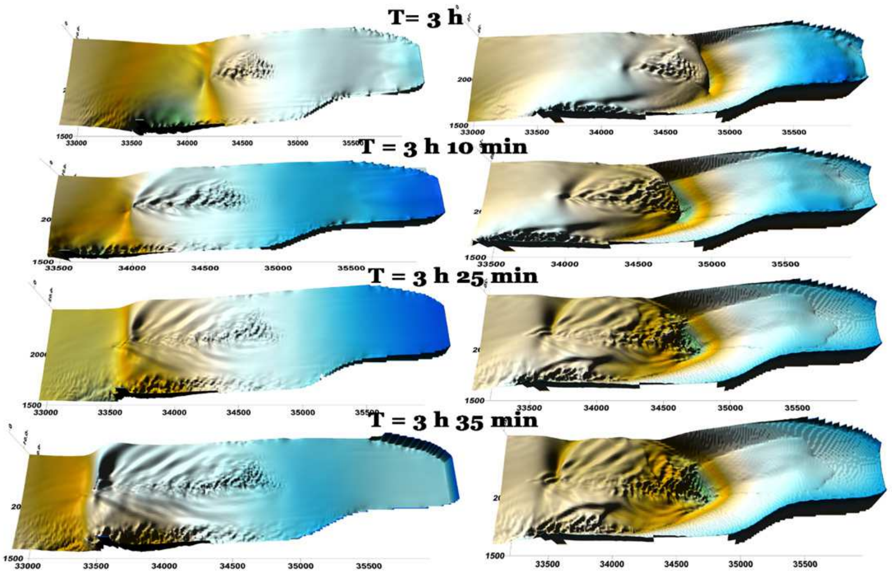

Рисунок 7.43: Формування поверхневого сліду, спричиненого фокусуванням потоків завдяки рельєфу на північному кінці Лох-Несс. Еволюція рівня вільної поверхні - ліва панель на рисунку, ізотерма T = 9 C - праворуч

озера та викликають хвильове збурення як в термокліні, так і на поверхні озера. Чисельне моделювання двома різними чисельними моделями NH-POM та MITgcm продемонструвало один і той самий феномен - формування надкритичного донного струменю на дні озера та формування вихрових пар з вертикальною віссю, які спричинять поверхневі сліди на поверхні. Моделювання взаємодії внутрішньої сейші з північним кінцем озера Лох-Несс підтверджує можливість існування надкритичного внутрішнього струменю та розвитку подальших внутрішніх і поверхневих збурень. Тому можливо сформулювати гіпотезу, що свідчення деяких очевидців та легенди про "озерних монстрах"можуть бути пояснені такими феноменами, що супроводжуються поверхневим слідом, який є наслідком фокусування потоків завдяки рельєфу дна.

7.7 Висновки до розділу 7

В розділі розглянуті задачі трансформації сильно нелінійних сейш в замкнених басейнах. Проблема динаміки внутрішніх сейш в озерах розглядається з самого простого випадку: чисельного моделювання трансформації внутрішніх сейш у квазі-двомірному прямокутному чисельному басейні із двошаровою стратифікацією. На наступному етапі вивчається вплив топографії (похилого дна тапідводних пагорбів) на трансформацію стоячих хвиль. Наявність похилого дна на відміну від прямокутного басейну є причиною затухання коротких хвиль. Результати моделювання показали, що процес трансформації та руйнування внутрішніх сейш на схилі визначається двома механізмами: перекиданням хвилі та зсувною нестійкістю. В чисельних експериментах з трансформацією стоячих внутрішніх хвиль із підводним пагорбом були зафіксовані різноманітні гідродинамічні ефекти: зафіксована "зворотна"нестійкість та руйнування хвиль на похилому дні із формуванням нестійкості Кельвіна-Гельмгольца. В тривимірних експериментах до пагорбу було додано вузькість, в цьому випадку початковий нахил поверхні розділу створює двосторонній потік, який прискорюється і стає надкритичним у області вузькості/пагорбу. Нестійкість Кельвіна-Гельмгольца виникає на гребені хвилі в околі пагорбу, що співпадає з максимальним звуженням, потік стає надкритичним, тобто складене число Фруда $Fr > 1$, що є причиною інтенсивного перемішування перемішування. Вперше виявлено, що при взаємодії внутрішніх сейш з рельєфом дна подовженого озера може відбуватися фокусування потоків у сейшах і виникнення надкритичного внутрішнього струменя. Він формує вихрові пари з вертикальними осями, що викликають збурення в термокліні і на поверхні. За допомогою чисельного моделювання для озера Лох-Несс було продемонстровано можливість формування вихрових пар, що рухаються з швидкістю 0.9 м/с та хвильового сліду за ними, що дає можливість пояснити цим феноменом свідчення очевидців та легенди про "озерних монстрів".

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню динаміки внутрішніх хвиль великої амплітуди. Вивчено фізичні механізми динаміки внутрішніх усамітнених хвиль великих амплітуд, а саме їх розповсюдження, затухання, взаємодія між хвилями, руйнування при виході до шельфових зон та роль внутрішніх хвиль у процесах перемішування в різноманітних водоймах, зокрема, в озерах. Вивчено процеси взаємодії усамітнених внутрішніх хвиль великих амплітуд з особливостями рельєфу дна та підводними перешкодами. В роботі одержано такі нові наукові результати:

1. Встановлено закономірності трансформації полів швидкості та густини хвиль в залежності від параметру блокування B (відношення висоти нижнього шару над перешкодою або шельфом до амплітуди внутрішньої усамітненої хвилі) для опису режимів трансформації внутрішніх усамітнених хвиль над перешкодами та різкими змінами дна. При взаємодії внутрішньої усамітненої хвилі з підводною сходинкою в залежності від параметру B встановлено п'ять різних режимів взаємодії внутрішньої усамітненої хвилі першої моди з підводною сходинкою у двошаровій стратифікації: (i) слабка взаємодія; (ii) помірна взаємодія; (iii) сильна взаємодія; (iv) перехідний режим; (v) режим повного відбиття.

2. В результаті вдосконалення та верифікації за допомогою даних лабораторних експериментів та аналітичних розв'язках чисельної гідродинамічної моделі NH-POM для стратифікованих середовищ з вільною по-

верхнею розширені її можливості за рахунок узагальненої вертикальної системи координат, підсіткової моделі турбулентності та паралелізації коду моделі, що дозволило проводити чисельне моделювання із високою роздільною здатністю в областях складної форми.

3. Отримано автомодельні залежності втрат енергії при трансформації внутрішніх хвиль першої моди. Показано, що втрати енергії внутрішньої усамітненої хвилі (як пониження так і підвищення), що трансформується над сходинкою, не досягають 50% від енергії падаючої хвилі. Вперше продемонстровано можливий сценарій генерації внутрішніх усамітнених хвиль першої бароклінної моди при трансформації хвиль другої бароклінної моди при значеннях параметра блокування $B < 0.5$.

4. Отримано автомодельні залежності нормованих амплітуд та швидкостей хвиль при трансформації хвилі другої моди. Вперше виявлено феномен генерації брізерів внутрішніх хвиль першої бароклінної моди при взаємодії хвиль другої бароклінної моди з підводною сходинкою в тришаровій стратифікації в діапазон значень параметру блокування $0.5 < B < 2$.

5. Описано новий сценарій неадіабатичної трансформації внутрішніх хвиль на похилому дні. На першому етапі трансформації виникає нестійкість Кельвіна-Гельмгольца, що призводить до зменшення амплітуди хвилі, після чого хвиля трансформується на схилі без перекидання. У такому сценарії зсувна нестійкість є домінуючим механізмом перетворення хвиль.

6 . Вперше побудовано нову класифікацію режимів взаємодії внутрішніх хвиль у двошаровій стратифікації із ідеалізованим трапеціїдальним шельфом та на її основі проведено оцінки втрат енергії хвиль при їх трансформації. Класифікація представляє собою тривимірну діаграму в про-

сторі трьох параметрів: (1) нормованої амплітуди хвилі, (2) параметру блокування В та (3) куту схилу трапеціїдального шельфу. В залежності від цих параметрів виділяються чотири області, що відповідають режимам: (i) хвилі не обвалюються і не змінюють полярність на шельфі, (ii) обвалюються, але без зміни полярності, (iii) відбувається зміна полярності хвилі, і внутрішня хвиля- пониження трансформується в хвилю-підвищення на шельфі, але при цьому не обвалюється, (iii) відбувається зміна полярності хвилі, хвиля обвалюється. Встановлено відповідність даної класифікації з результатами лабораторних і натурних експериментів та побудовано карти, на яких визначені зони режимів трансформації внутрішніх усамітнених хвиль для шельфу Південнокитайського моря. Побудовано нову класифікацію хвиль другої моди відносно мінімального числа Річардсона $Ri_{min} > 1$ та локального числа Фруда Fr_{max}: (i) слабонелінійні хвилі при $Fr_{max} < 1$, (ii) стійкі сильнонелінійні хвилі, що переносять масу при $Ri_{min} > 0.15$ та $Fr_{max} = 1.2$, (iii) нестійкі сильнонелінійні хвилі при $Ri_{min} < 0.1$. Досліджено закономірності затухання внутрішніх хвиль другої бароклінної моди від типу хвилі. Виявлено неповну автомодельність динаміки хвиль другої моди за числом Рейнольдса, що виражається у залежності параметра Річардсона від нього при великих значеннях чисел Рейнольдса Re_{eff}. Показано, що еволюція хвиль другої бароклінної моди великих амплітуд із захопленими ядрами відбувається таким чином, що число Річардсона зростає з часом по автомодельній залежності.

7 . Показано, що фронтальна взаємодія усамітнених хвиль великих амплітуд першої та другої бароклінних мод значно відрізняється від прогнозів слабонелінійної теорії. На відміну від хвиль малих і помірних амплітуд зіткнення хвиль великої амплітуди супроводжується утворенням нестій-

кості Кельвіна-Гельмгольца. Вперше показано, що для хвиль першої моди однакових великих амплітуд зсувна нестійкість виникає до зіткнення, а потім виникає знову, коли хвилі розбігаються після зіткнення. Вперше продемонстровано, що взаємодія внутрішніх хвиль другої моди відбувається по-різному в залежності від типу хвиль. Причина цього у різних механізмах, що керують динамікою хвиль різних типів: нелінійна взаємодія, колапс захоплених ядер, нестійкість та ефекти в'язкості. Отримано залежність втрат енергії від амплітуд хвилі, яка не є монотонною. Встановлено, що взаємодія внутрішніх усамітнених хвиль не є еластичною.

8. Вперше виявлено, що при взаємодії внутрішніх сейш з рельєфом дна подовженого озера може відбуватися фокусування потоків у сейшах і виникнення надкритичного внутрішнього струменя. Він формує вихрові пари з вертикальними осями, що викликають слідоподібні збурення в термокліні і на поверхні. За допомогою чисельного моделювання для озера Лох-Несс було продемонстровано можливість формування вихрових пар, що рухаються зі швидкістю 0.9 м/с, та хвильового сліду за ними, що дає можливість пояснити цим феноменом свідчення очевидців та легенди про "озерних монстрів".

Бібліоґрафія

[1] Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.

[2] Билюнас М.В., Доценко С.Ф. Свободные внутренние волны в неоднородном течении с вертикальным сдвигом скорости. *Морской гидрофизический журнал.* 2012. № 1. С. 3-16.

[3] Бровченко И., Канарская Ю., Мадерич В., Терлецкая Е. Трехмерное негидростатическое моделирование воздействия струй судовых движителей на дно и берега *Збірник праць конференції "Моделювання 2006".* 2006, С. 137–141.

[4] Бровченко И., Терлецкая К., Городецкая Н., Мадерич В., Никишов В. Взаимодействие внутренних уединенных волн большой амплитуды с препятствием. *Прикладна гідромеханіка.* 2007. № 1(**81**). С. 3-7.

[5] И.Бровченко, В.Мадерич, С.Семин, Ю.Степанянц, Е.Терлецкая Моделирование трансформации волновых пакетов поверхностных волн в водоеме с резким изменением глубины. *Прикладна гідромеханіка.* 2015. № 1(**89**). С. 3-9.

[6] Бровченко И.А, Мадерич В.С.,Терлецкая К.В. Численное моделирование трехмерной структуры течений в районе глубоководных каньонов восточного побережья Черного моря. *International Journal of Civil and Structural Engineering.* 2011. № **7(2)**. С. 47–53.

[7] Бровченко И.А., Мадерич В.С., Никишов В.И., Терлецкая Е.В. Численное моделирование взаимодействия внутренних волн с подводным прямо-

угольным препятствием *Збірник праць конференції “Моделювання 2010”*. 2010, С. 222–229.

[8] Бровченко І.О., Мадерич В.С., Терлецька К.В., Беженар Р.В.,Кошебуцький В.І. Різномасштабне чисельне моделювання циркуляції в Чорному морі та Дніпро-Бузькому лимані *Збірник праць конференції “Моделювання 2012”*. 2012, С. 121–124.

[9] Бровченко И.А, Мадерич В.С., Терлецкая К.В. Численное моделирование трехмерной структуры течений в районе глубоководных каньонов восточного побережья Черного моря. *International Journal of Civil and Structural Engineering*. 2011. № **7(2)**. С. 47–53.

[10] Гаврилов Н.В, Ляпидевский В.Ю Симметричные уединенные волны на границе раздела жидкостей . *ДАН*. 2009. № **429**. С. 187–190.

[11] Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. 396 с.

[12] Гордейчик Б.Н., Тер-Крикоров А.М. О равномерных аппроксимациях фундаментального решения уравнения внутренних волн. *Прикладная математика и механика*. 1996. № **60**. С. 443-450.

[13] Ефимов В.В., Куликов Е.А., Рабинович А.Б., Файн И.В. Волны в пограничных областях океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. 280 с.

[14] Канарская Ю.В., Мадерич В.С. Чиленная негидростатическая модель стратифицированных течений со свободной поверхностью. *Прикладная Гидромеханика*. 2002. № 76. С. 12-21.

[15] Канарская Ю.В., Мадерич В.С. Сильно-нелинейные волны и гравитационные течения в прямоугольном бассейне. *Прикладная гидромеханика*. 2004. № **6(78)**. С. 75–78.

[16] Козлов В. Ф., Макаров, В. Г Об одном классе стационарных гравитационных течений со скачком плотности. *Изв. РАН, Физ. Атм. Океана*. 1990. № 26. С. 395-402.

[17] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В Теоретическая гидромеханика. М.: 1963, **1**. 612 с.

[18] Куркин А.А., С.В. Семин и Ю.А. Степанянц Трансформация поверхностных волн над донным уступом. *Изв. РАН,ФАО.* 2015. № 50. С. 55-105.

[19] Леонов А.И. О двумерном уравнении Кортевега-де Вриза в тории нелинейных и поверхностных волн. *Доклады НАН СССР.* 1976. № 229. С. 820-824.

[20] Лисиченок, А.Д. Интенсивные внутренние волны в Черном море. Екологічна безпека прибережної та шельфової зон та комплексне використання ресурсів шельфу: Зб. наук. пр. — Севастополь.2005.С.12 49-59

[21] Мадерич В.С., Кулик А. И. Коллапс интрузий в устойчиво стратифицированной среде. *Изв. РАН, Физ. Атм. Океана.* 1992. № 28. С. 1197–1204.

[22] Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде. К.: Наукова Думка, 1988. 240 с.

[23] Мадерич В.С., Терлецкая Е.В., Бровченко И.А. Фронтальное столкновение внутренних волн большой амплитуды. *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* 2015. № 8(3). С. 44-53.

[24] Мадерич В.С, Терлецкая Е.В., Бровченко И. Структура и динамика гравитационных течений на склоне: поток трансформированных под ледником Ронне-Фильхнера вод в море Уэддела. *Український Антарктичний Журнал.* 2010. **9**.P. 263-270. (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків та аналіз результатів)

[25] Мадерич В.С, Терлецкая Е.В., Бровченко И. Моделювання різномасштабних процесів формування придонних і шельфових вод у південній частині моря Ведделла. *Український Антарктичний Журнал.* 2017. **16**.P. 3. 45-51 (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків та аналіз результатів)

[26] Мадерич В.С., Терлецкая Е.В., Бровченко И.А., Талипова Т.Г. Неполная автомодельность внутренних волн второй моды в слое раздела. *Прикладна гідромеханіка.* 2013. № 15. С. 68-77.

[27] Никишов В.И.,Селезов И.Т., Хомицкий В.В. Взаимодействие уединенных поверхностных и внутренних волн с береговыми склонами. *Прикладна Гідромеханіка.* 2011. № 13(85). С. 51-63.

[28] Никишов В.И. К вопросу о генерации внутренних волн локальным возмущением. *Прикладная механіка.* 1981. № 17(6). С. 137-140.

[29] Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане. *Океанология.* 1978. № 18. С. 119-125.

[30] Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 274 с.

[31] Пелиновский Е.Н., Шаврацкий С.Х., Раевский М.А. Уравнение Кортевега – де Вриза для нестационарных длинных внутренних волн в неоднородном океане. *Известия, Физика атмосферы и океана.* 1977. № 13. С. 373 - 376.

[32] Пелиновский Е.Н., Полухина О.Е., Лэмб К. Нелинейные внутренние волны в океане, стратифицированном по плотности и течению. *Океанология.* 2000. № **40(6)**. С. 805 - 815.

[33] Рущицкий Я.Я., Каттани К. Терлецкая К.В. Моделирование распространения одного типа одиночного импульсав линейно упругом композите с применением вейвлет анализа. *Прикладна механіка.* 2005. № **41(4)**. С. С. 61 – 69.

[34] Слюняев А.В., Пелиновский Е.Н. Динамика солитонов большой амплитуды. *ЖЭТФ.* 1996. № **116**. С. 318-335.

[35] Слюняев А.В., Пелиновский Е.Н. Начальная задача для модифицированного уравнения Кортевега - де Вриза на пьедестале: рождение солитонов и бризеров. *Изв. Академии инженерных наук РФ.* 2001. **33**.P. 166-175.

[36] Стеценко О.Г., Лук'янов П.В. Двовимірна задача розсіяння внутрішніх хвиль на перемішаній плямі в період в'язко-дифузійної стадії її еволюції. *Прикладна механіка.* 2002. № 8. С. 76-83.

[37] Стретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости . *Journal of Atmospheric Sciences.* 1936. № 304. С. 86-98.

[38] Талипова Т.Г. Куркина О.Е. Куркин А.А. Рувинская Е.А. Терлецкая Е.В. Моделирование внутренних волн в прибрежной зоне Баренцева моря. *Экологические системы и приборы.* 2014. № **3**. С. 26-39. (здобувачу належить проведення чисельних розрахунків)

[39] Терлецкая Е.В., Мадерич В.С., Бровченко И.А. Трансформация уединенных внутренних волн большой амплитуды над ступенькой на дне. *Прикладна гідромеханіка.* 2009. № **11(83)**. С. 65–76.

[40] Терлецкая Е.В., Мадерич В.С Бровченко И.А. Взаимодействие уединенных внутренних волн при их фронтальном столкновении. *Прикладна гідромеханіка.* 2011. **13(85)**.P. 68–77.

[41] Терлецкая К.В., Мадерич В.С., Бровченко И.А. Сильно-нелинейные внутренние сейши в удлинненных стратифицированных озерах и феномен «озерных монстров». *Прикладна гідромеханіка.* 2011. № **13(85), №1**. С. 51–55.

[42] Терлецкая К. Взаимодействие внутренних уединенных волн второй моды с подводной ступенькой. *Прикладна гідромеханіка.* 2014. **88**.P. 55-61.

[43] Терлецкая Е.В., Мадерич В.С., Бровченко И. Численное исследование взаимодействия внутренних уединенных волн второй бароклинной моды при их фронтальном столкновении. *Прикладна гідромеханіка.* 2015. № 2. С. 44-54.

[44] Терлецкая Е.В., Семин С.С., Степанянц Ю.А., Бровченко И.А., Мадерич В.С. Моделирование трансформации волновых пакетов поверхностных волн в водоеме с резким изменением глубины. *Прикладна гідромеханіка.* 2015. № 1. С. 3-9.

[45] Терлецкая Е., Семин С., Талипова Т., Смирнов Д., Бровченко И. Трансформация внутренних уединенных волн понижения над донной ступенькой в трехслойной стратифицированной жидкости. *Прикладна гідромеханіка.* 2015. № 2. С. 56-63.

[46] Терлецкая К.В. Классификация режимов наката внутренних уединенных волн на трапецеидальный шельф. *Прикладна гідромеханіка.* 2016. № **18(90)**. С. 1. 69-78

[47] Терлецька К.В. Диссипація енергії внутрішніх хвиль над підводними перешкодами. *Гідромеханіка та акустика.* 2018. № 1. С. 85-98.

[48] Черкесов Л.В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. К.: Наукова думка, 1976. 364 с.

[49] Федоров К.Н. Тонкая термохалинная структура вод океана. М.: Гидрометеоиздат, 1976. 184 с.

[50] Ablowitz M., Segur H. Solitons and inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM, 1981. 410 c.

[51] Aghsaee P., Boegman L., Lamb K.G. Breaking of shoaling internal solitary waves. *J. Fluid Mech.*. 2010. **659**.P. 289–317.

[52] Akylas T., Grimshaw R. Solitary internal waves with oscillatory tails. *J. Fluid Mech.* 1992. **242**.P. 279—298.

[53] Almgren A., Camassa, R., and Tiron, R. Shear instability of internal solitary waves in Euler fluids with thin pycnoclines. *J. Fluid Mech.* 2012. **710**.P. 324–361.

[54] Alpers W. H. W.-C. Lim Hock Observation of internal waves in the Andaman Sea by ERS SAR. *Observation of internal waves in the Andaman Sea by ERS SA*. 1997. 4.P. 1435 - 1437.

[55] Apel J.R., Ostrovsky L. A. , Stepanyants Y. A. , Lynch J. F. Internal solitons in the ocean and their effect on underwater sound. *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. **121**.P. 695–722.

[56] Armi L., Farmer D.M. Maximal two-layer exchange through a contraction with barotropic net flow. *J Fluid Mech.* 2007. **164**.P. 27–51.

[57] Barad M.F., Fringer O.B. Simulations of shear instabilities in interfacial gravity waves. *J. Fluid Mech.* 2010. **644**.P. 61—95.

[58] L.F. Bartholomeusz The reflection of long waves at a step. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 1958. **54**.P. 106–118.

[59] Ben-Naim E., Krapivsky P. L., Redner S. Fundamental Kinetic Processes. Boston: University press, 2008. 269 p.

[60] Battjes J. A., J. Janssen Energy loss and set-up due to breaking of random waves *Proceedings of the 16th international conference on coastal engineering.* 1978, P. 569–587.

[61] Benjamin T. B. Internal waves of finite amplitude and permanent form. *J. Fluid Mech.* 1966. **25**.P. 25:241-270.

[62] Benjamin T. B. Waves of permanent form in fluids of great depth. *J. Fluid Mech.* 1967. **29**.P. 559–592.

[63] Benney D.J. Long nonlinear waves in fluid flows. *J.Math.Phys.* 1966. **45**.P. 52–63.

[64] Berntsen J., Xing J., Alendal G. Assessment of non-hydrostatic ocean models using labora-tory scale problems. *Cont Shelf Res.* 2006. **26**.P. 1433–1447.

[65] Blumberg A.F., Mellor G.L. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model. In: Heaps N. (ed) Three-Dimensional Coastal Ocean Models, Am Geoph Union: 1987, New York. 352 p.

[66] Boegman L., Ivey G.N., Imberger J. The degeneration of internal waves in lakes with sloping topography. *Limnol Oceanogr.* 2005. **50**.P. 1620–1637.

[67] Boegman L., Ivey G.N., Imberger J. The energetics of large-scale internal wave degeneration in lakes. *J Fluid Mech.* 2005. **531**.P. 159–180.

[68] Bogucki D., Garrett C. A simple model for the shear-induced decay of an internal solitary wave. *J Phys Oceanogr.* 1993. **8**.P. 1767–1776.

[69] Bourgault D., Kelley D.E. On the reflectance of uniform slopes for normally incident inter-facial solitary waves. *J Phys Oceanogr.* 2007. **37**.P. 1156–1162.

[70] Brandt A. and Shipley K. R. Laboratory experiments on mass transport by large amplitude mode-2 internal solitary waves. *Physics of Fluids.* 2014. **26**.P. 10.1063.

[71] Brovchenko I., Kanarska J., Maderich V., Terletska K. 3D non-hydrostatic modeling of bottom stability under impact of the turbulent ship propeller jet. *Acta Geophysica*. 2007. **55(1)**.P. 47–55.

[72] Brown D. J., Christie D.R. Fully nonlinear solitary waves in continuously stratified incompressible Boussinesq fluids. *Phys. Fluids*. 1998. **10**.P. 2569–2586.

[73] Bryan K. A A numerical method for the study of the circulation of the World Ocean. *J. Comput. Phys*. 1969. **4**.P. 347-376.

[74] Carr M., Fructus D., Grue J., Jensen A., Davies P. A Convectively-induced shear instability in large internal solitary waves. *Phys. Fluids*. 2008. **20**.P. doi:10.1063/1.3030947.

[75] Casulli V., Stelling G. Numerical simulation of 3D quasi-hydrostatic free-surface flows. *J. Hydraul. Eng*. 1998. **124**.P. 678-–686.

[76] Chambarel J., Kharif C. , Touboul J. Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation. *Nonlinear Proc. Geoph*. 2009. **16**.P. 111-–122.

[77] Chang K.A., Hsu T.J., Liu P.L.-F. Vortex generation and evolution in water waves propagating over a submerged rectangular obstacle, part I," Solitary waves. *Coastal Engineering* . 44. 2001.P. **44**.13-36

[78] Chen C.-Y. An experimental study of stratified mixing caused by internal solitary waves in a two-layered fluid system over variable seabed topography. *Ocean Engineering*. 2007. **34**.P. 1995 – 2008.

[79] Cheng M.H, Hsu JRC, Chen CY Laboratory experiments on waveform inversion of an internal solitary wave over a slope-shelf Environ Fluid Mech. *Ocean Engineering*. 2011. **11**.P. 353 – 384.

[80] Choi W., Barros R., Camassa R. A regularized model for strongly nonlinear internal solitary waves. *J. Fluid Mech*. 2009. **629**.P. 73-–85.

[81] Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. *J. Fluid Mech*. 1999. **396**.P. 1–36.

[82] Chorin A.J. Numerical solution of the Navier–Stokes equations. *Math Comput.* 1977. **22**.P. 745–762.

[83] Christie D. R. The morning glory of the Gulf of Carpentaria: a paradigm for nonlinear waves in the lower atmosphere. *Austral. Met. Mag.* 1992. **41**.P. 21-–60.

[84] Clarke R.H. Colliding sea breezes and the creation of internal atmospheric waves: a numerical model. *Austral. Met. Mag.*. 1984. **32**.P. 207-–226.

[85] Craig W., Guyenne P., Hammack J., Henderson D., and Sulem C. Solitary wave interactions. *Phys. Fluids.* 2006. **18**.P. 1–25.

[86] Cotter C. J., Holm D. D., Percival J. R The square root depth wave equations. *Proc. R. Soc. A.* 2009. **466**.P. 3621–3633.

[87] Daily C., Imberger J. Modelling solitons under the hydrostatic and Boussinesq approximations. *Int J Num Methods Fluids* . 2003. **43**.P. 231–252.

[88] Davis R. E., Acrivos A. Solitary waves in deep water. *J. Fluid Mech.* 1967. **29**.P. 593-601.

[89] Deepwell D., and Stastna M. Mass transport by mode-2 internal solitary-like waves. *Phys. Fluids.* 2016. **28**.P. https://doi.org/10.1063/1.4948544.

[90] Derzho O. G., and Grimshaw R. Solitary waves with a vortex core in a shallow layer of stratified fluid . *Phys. Fluids.* 1997. **9**.P. 3378-3385.

[91] Djordjevic V.D., Redekopp L.G. The fission and desintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography. *J. Phys. Oceanogr.* 1978. **8**.P. 1016 - 1024.

[92] Dubreil-Jacotin L. Sur les ondes type permanent dans les liquides heterogenes. *Atti R. Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sci.Fis., Mat. Nat.* 1932. **15**.P. 44–72.

[93] Duda Timothy F., Preisig James C. A Modeling Study of Acoustic Propagation Through Moving Shallow-Water Solitary Wave Packets. *IEEE Journal of Oceanic Engineering.* 1999. **24(1)**.P. 16-32.

[94] Evans W. A., Ford M. J. An integral equations approach to internal (2-layer) solitary waves. *Phys. Fluids*. 1996. 8.P. 2032–47.

[95] Farmer, D.M. and Armi L. The flow of Mediterranean Water through the Strait of Gibraltar. *Prog. Oceanogr*. 1988. **21** .P. 1-105.

[96] Fletcher C. A. J Computational techniques for fluid dynamics. Vol 2, Second Edn, Spring-er-Verlag: Berlin, 1991. 216 p.

[97] Fraser N. Surfing an oil rig. *Energy Rev*. 1999. **20(4)**.P. 1–29.

[98] Fringer O.B., Gerritsen M, Street RL An unstructured-grid, finite-volume, nonhydrostatic, parallel coastal ocean simulator. *Ocean Modelling*. 2006. **14**.P. 139–173.

[99] Fructus D., Carr M., Grue J., Jensen A., Davies P. A. Shear-induced breaking of large internal solitary waves. *J. Fluid Mech*. 2009. **620**.P. 1–29.

[100] Fructus D, Grue J. Fully nonlinear solitary waves in a layered stratified fluid. *J. Fluid Mech*. 2005. **505**.P. 323–47.

[101] Fu K.-H., Wang Y.-H, St. Laurent L., Harper S., Wang D.-P. Shoaling of large-amplitude nonlinear internal waves at Dongsha Atoll in the northern South China Sea. *Continental Shelf Research*. 2012. **37**.P. 1–7.

[102] Funakoshi M., Oikawa M. Long internal waves of large amplitude in a two-layer fluid. *J. Phys. Soc. Jpn*. 1986. **55**.P. 128–44.

[103] Gerkema T. An introduction to internal waves. Lecture notes, Royal NIOZ: Texel, 2008. 207 p.

[104] Giniyatullin A.R., Kurkin A.A.,Semin S.V. and Stepanyants Y.A. Transformation of narrowband wavetrains of surface gravity waves passing over a bottom step. *Math. Model. Nat.Phenom*. 2014. **9**.P. 73–82.

[105] Gorogedtska N. Nikishov V., Hutter K. Laboratory Modelling on Transformation of Large-Amplitude Internal waves by topographic obstructions. *Ch. 3 in Hutter K. (Ed.) Nonlinear internal waves in lakes*. Springer. Series: Advances in Geophysical and Environmental Mechanics. 2012.P. 193–276.

[106] Grimshaw, R., Pelinovsky, E., Poloukhina, O. Higher-order Korteweg-de Vries models for internal solitary waves in a stratified shear flow with a free surface. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2002. **9**.P. 221-235.

[107] Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Modeling internal solitary waves in the coastal ocean. *Survey in Geophysics*. 2007. **28**.P. 273–298.

[108] Grimshaw R., Pelinovsky E., and Talipova T. Fission of a weakly nonlinear interfacial solitary wave at a step. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn*. 2008. **102**.P. 179.

[109] Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E. and T. Talipova Wave group dynamics in weakly nonlinear long - wave models. *Physica D*. 2001. **159**.P. 35.

[110] Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T, Kurkin A Simulation of the transformation of internal solitary wave on oceanic shelves. *J Phys Oceanogr*. 2004. **34**.P. 2774–2791.

[111] Grimshaw R., Pelinovsky E.,, T. Talipova, M. Ruderman, and R. Erdely Short-living large-amplitude pulses in the nonlinear long-wave models described by the modifid Korteweg – de Vries equation. *Stud. Appl. Math*. 2005. **189**.P. 114.

[112] Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., and Sergeeva A. Rogue internal waves in the ocean: Long wave model. *ur. Phys. J.: Spec. Top*. 2010. **185**.P. 195.

[113] Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., and Kurkina O. Internal solitary waves: Propagation, deformation and disintegration. *ur. Nonlinear Processes Geophys*. 2010. **17**.P. 633.

[114] Grue J., Jensen A., Rusas P.-O., Sveen J. K. Properties of large amplitude internal waves. *J. Fluid Mech*. 1999. **380**.P. 257–278.

[115] Hallberg, R., A. Adcroft, J.P. Dunne, J.P. Krasting, and R.J. Stouffer, Sensitivity of Twenty-First-Century Global-Mean Steric Sea Level Rise to Ocean Model Formulation. *J. Climate*. 2010. **26**.P. 2947–2956. https://doi.org/10.1175/JCLI-D-12-00506.1

[116] Harlow FH, Welch JE Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys Fluids.* 1978. **8**.P. 2182–2189.

[117] Helland-Hansen B. and F. Nansen. The Norwegian Sea – its Physical Oceanography based upon the Norwegian researches 1900-1904. *Vol. II, No. 2.* Det Mallingske Bogtrykkeri. Kristiania.P. 1909.

[118] Helfrich K.R. White B.L. A model for large-amplitude internal solitary waves with trapped cores . *Nonlin. Processes Geophys.* 2010. **17**.P. 303—318.

[119] Helfrich Karl R. and Kendall Melville W. Long Nonlinear Internal Waves . *Annu. Rev. Fluid Mec.* 2006. **38**.P. 395–425.

[120] Helfrich Karl R. Internal solitary wave breaking and run-up on a uniform slope . *J. Fluid Mech.* 1992. **243**.P. 133.

[121] Helfrich Karl R. and Melville W. K. and Miles W. On interfacial solitary waves over slope-shelf topography . *J. Fluid Mech.* 1984. **149**.P. 305-317.

[122] Helfrich K R, Melville W K On long nonlinear internal waves over slope-shelf topography. *J. Fluid Mech.* 1986. **167**.P. 285-308.

[123] Holloway PE, Pelinovsky E, Talipova T. A generalized Korteweg-de Vries model of internal tide transformation in the coastal zone. *J. Geophys. Res.* 104. 1999.P. **104**.18333

[124] Holloway PE, Pelinovsky E, Talipova T, Barnes B. A nonlinear model of internal tide transformation on the Australian north west shelf. *J. Phys. Oceanogr.* 1999. **27**.P. 871—96.

[125] Honji H., Matsunaga, Y. Sugihara, K. Sakai Experimental observation of internal symmetric solitary waves in a two-layer fluid. *Fluid Dynamics Research* . 1995. **15**.P. 89–102.

[126] Horn D.A, Imberger J, Ivey G.N. AThe degeneration of large-scale interfacial gravity waves in lakes. *J Fluid Mech.* 2001. **434**.P. 181–207.

[127] Howard L. N. Note on a paper by John W. Miles. *J. Fluid Mech.* 1961. **10**.P. 509–569.

[128] Hsieh C. M., Cheng M. H., Hwang R. R. and John R. C. Hsu Numerical study on evolution of an internal solitary wave across a trapezoidal obstacle with different front slopes. *Appl. Ocean Research*. 2016. **20**.P. 125-135.

[129] Hsu R.-C., M.H. Cheng, C.-Y. Chen Potential hazards and dynamical analysis of interfacial solitary wave interactions. *Nat. Hazards*. 11. 2013.P. 255–278.

[130] Hult, E. L., C. D. Troy, and J. R. Koseff The breaking of interfacial waves at a submerged bathymetric ridge. *J. Fluid Mech*. 2009. **637**.P. 45–71.

[131] Maderich V., Brovchenko I., Terletska K., Hutter K. Numerical simulations of the nonhydrostatic transformation of basin-scale internal gravity waves and wave-enhanced meromixis in lakes. Ch. 4 in Hutter K. (Ed.) Nonlinear internal waves in lakes : Springer. Series: Advances in Geophysical and Environmental Mechanics, 2012. 193–276 p.

[132] Hutter K. Nonlinear internal waves in lakes. Springer: Series: Advances in Geophysical and Environmental Mechanics, 2012. 276 p.

[133] Iafrati, A and Campana, E. F. A domain decomposition approach to compute wave breaking (wave breaking flows). Int. J. Numer. Meth. Fluids: 2003., **41**. 419-445. p.

[134] Jo T.-C., Choi W. Dynamics of strongly nonlinear solitary waves in shallow water. *Stud. Appl. Math*. 2002. **109**.P. 205–227.

[135] Jo T.-C., Choi W. On stabilizing the strongly nonlinear internal wave model. *Stud. Appl. Math*. 2002. **120**.P. 65—85.

[136] Jackson, C.R., J.C.B. da Silva, and G. Jeans The generation of nonlinear internal waves. *Oceanography*. 2012. **25(2)**.P. 108–123.

[137] Kakutani, T., and Yamasaki, N. Solitary waves on a two-layer fluid. *J. Phys. Soc. Japan*. 1978. **45**.P. 674 - 679.

[138] Kamachi, M. and H. Honji Steady flow patterns of internal solitary bulges in a stratified fluid. *Phys. Fluids* . 1982. **15**.P. 1119 - 1120.

[139] Kanarska Y., Maderich V. A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows. *Ocean Dynamics*. 2003. **53**.P. 176–185.

[140] Kanarska Y, Shchepetkin A, McWilliams JC Algorithm for non-hydrostatic dynamics in the Regional Oceanic Modeling System. *Ocean Modelling*. 2007. **18**.P. 143–174.

[141] Kao T.W., Pan F.S., Renouard D. Internal solitions on the pycnocline: generation, propagation, shoaling and breaking over a slope. *J. Fluid Mech.* 1985. **159**.P. 19-–53.

[142] Klymak J.M. and Moum J. Internal solitary waves of elevation advancing on a shoaling shelf. *Geophys Res Let*. 2003. doi10.10292003GL017706.P. 30(20) 2045.

[143] Kodaira T., Waseda T., Miyata M., Choi W. Internal solitary waves in a two-fluid system with a free surface. *J. Fluid Mech.*. 2016. **804**.P. 201-–223.

[144] Koop C.G., Butler G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system. *J Fluid Mech*. 1981. **112**.P. 225–251.

[145] Kubota T., Ko D. R. S., Dobbs, L.D. Weakly-nonlinear, long internal gravity waves in stratied fluids of finite depth. *J. Hydronautics*. 1978. **12** .P. 157.

[146] Kuhlbrodt T. and J.M. Gregory Ocean heat uptake and its consequences for the magnitude of sea level rise and climate change. *Geophys. Res. Lett.*. 2012. **39**.P. L18608. doi:10.1029/2012GL052952

[147] Kunze E., Firing E., Hummon J., Chereskin T. K., and Thurnherr A. Global abyssal mixing inferred from lowered ADCP shear and CTD strain profiles. *Journal of Physical Oceanography*. 2006. **36**.P. 1553–1576.

[148] Kundu P. K. , Cohen I. M., Dowling D. R. Fluid Mechanics 5th Edition. Academic Press: 6 edition, 2016. 895 p.

[149] Kurkina O., A. Kurkin, E. Rouvinskaya, and T. Soomere Propagation regimes of interfacial solitary waves in a three-layer fluid. *Nonlinear Processes Geophys*. 2015. **22**.P. 117.

[150] Konyaev K. V., Sabinin K. D., Serebryany A. N. Large amplitude internal waves at the Mascarene Ridge in the Indian Ocean. *Deep Sea Res. Part I.* 1995. **42**.P. 2075 – 2091.

[151] Lamb K.G On the change of form of long waves advacing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary wave. *Phil. Mag.* (5)39. 1895.P. 422–443.

[152] Lamb K., Polukhina O., Talipova T., Pelinovsky E., W. Xiao and Kurkin A. Breather generation in fully nonlinear models of a stratified fluid. *PHYSICAL REVIEW*. 1998. **75**.P. 046306.

[153] Lamb K., Yan L. The evolution of internal wave undular bores: comparisons of a fully nonlinear numerical model with weakly nonlinear theory. *J. Phys. Oceanography*. 1996. **26**.P. 2712-2734..

[154] Lamb K.G Are solitary internal waves solitons?. *Studies Appl. Math*. 1998. **101**.P. 289–308.

[155] Lamb K.G. A numerical investigation of solitary internal waves with trapped cores formed via shoaling. *Journal Of fluid Mechanics*. 2002. **451**.P. 109–144.

[156] Lamb K. and Farmer D. Instabilities in an Internal Solitary-like Wave on the Oregon Shelf. *J. Pys. Oceanography*. 2010. **41**.P. 67.

[157] Lamb K. G. Numerical simulations of stratified inviscid flow over a smooth obstacle. *J. Fluid Mech*. 1994. **260**.P. 1-22.

[158] Lamb H. Hydrodynamics. *Cambridge*. Cambridge Univ. Press. 1933.P. 295.

[159] Lamb K.G., Nguyen V.T. On calculating energy flux in internal solitary waves with an application to reflectance. *J Phys Oceanogr*. 2009. **29**.P. 1–7.

[160] LambK.G., Wan,B.G. Conjugate flows and flat solitary waves for a continuously stratified fluid. *Physics Of Fluids1*. 1998. **10**.P. 2061–2079.

[161] Alan Lapworth Collision of two sea-breeze frontsobserved in Wales . *Weather*. November 2005. **60**.P. 316.

[162] Laurent St., Simmons L. H, Tang T.Y. and Wang Y.H. Turbulent properties of internal waves in the South China Sea. *Oceanography* . 2011. **24(4)**.P. 78-87. https://doi.org/10.5670/oceanog.2011.96.

[163] Lee J. H. ,Lozovatsky I., Jang S.-T., Ch. J. Jang, Ch. S. Hong, and H. J. S. Fernando Episodes of nonlinear internal waves in the northern east China sea. *Geophys. Res. Lett.* 2006. **33**.P. doi:10.1029.

[164] Liao G.,Xu X. H.,Liang Ch., Ch. Dong, B. Zhou, T. Ding, W. Huang, and D. Xu Analysis of kinematic parameters of internal solitary waves in the northern south China sea. *Deep Sea Res. Part I.* 2014. **94**.P. 159.

[165] Lin P. A numerical study of solitary wave interaction with rectangular obstacles. *Coastal Engineering* . 51. 2004.P. **44**.35-51

[166] Liu A. K., S. Y. Chang, M.-K. Hsu, and N. K. Liang Evolution of nonlinear internal waves in the East and South China Seas. *J. Geophys. Res.*. 1998. **103**.P. 7995-8008.

[167] Long R.R. Some aspects of the flow of stratified fluid. I. A theoretical investigatio. *Tellus*. 1953. **5**.P. 42–5.

[168] Losada M.A., Vidal C., and Medina R. Experimental study of the evolution of a solitary wave at the abrupt junction. *J.Geophys. Res.* 1989. **94**.P. 14,557–14,566.

[169] Luzzatto-Fegiz P., Helfrich Karl R. Laboratory experiments and simulations for solitary internal waves with trapped cores. *J. Fluid Mech.* 2010. **757**.P. 354-380.

[170] Maderich V. S., Heijst G. J. F. van Brandt, A. Laboratory experiments on intrusive flows and internal waves on a pycnocline . *J. Fluid Mech.* 2001. **432**.P. 285–311.

[171] Maderich V. S., Kulik A. I Laboratory experiments on the collapse of an intrusion in a layered medium . *Izv. Akad. Nauk. USSR, Phys. Atmos. Ocean.* 1992. **28**.P. 1197–1204.

[172] Talipova T., Terletska K., Maderich V., Brovchenko I., Pelinovsky E., Jung K.T., Grimshaw R. Internal solitary wave transformation over a bottom step: loss of energy. *Phys. Fluids.* 2013. **25**.P. 032110; doi: 10.1063/1.4797455.

[173] Maderich V., Jung, K. T., Terletska K., Brovchenko I., and Talipova T. Incomplete similarity of internal solitary waves with trapped core. *Fluid Dyn. Res.* 2015. **47**.P. https://doi.org/10.1088/0169-5983/47/3/035511.

[174] Maderich V., Heling R., Bezhenar R., Brovchenko I., Jenner H., Koshebutskyy A., Kuschan A., Terletska K. Development and application of 3D numerical model THREETOX to the prediction of cooling water transport and mixing in the inland and coastal waters. *Hydrological Processes.* 2008. **22**.P. 1000–1013.

[175] Maderich V.,Talipova T.,Grimshaw R.,Pelinovsky E., Choi B. H., Brovchenko I., Terletska K., and D. C. Kim The transformation of an interfacial solitary wave of elevation at a bottom step. *Nonlinear Processes in Geophysics.* 2009. **16**.P. 33-42.

[176] Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Terletska K., Brovchenko I., Pelinovsky E., Choi B.H. Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a bottom step. *Physics of Fluids.* 2010. **22**.P. doi:10.1063/1.3455984.

[177] Maderich V., Fenical S., Brovchenko I., Terletska K., Shepsis V. 3D Modelling System of Bottom and Bank Erosion. *Proc. of the 9th Int. Conf. on the Mediterranean Coastal Environment, MEDCOAST 09.* 2009. **2**.P. 887–898.

[178] Maderich V. S., Heijst G. J. F. van Brandt A. Laboratory experiments on intrusive flows and internal waves on a pycnocline . *J. Fluid Mech.* 2001. **432**.P. 285–311.

[179] Maderich V., Brovchenko I., Terletska K., Hutter K. Numerical simulations of the nonhydrostatic transformation of basin-scale internal gravity waves and wave-enhanced meromixis in lakes. *Ch. 4 in Hutter K. (Ed.) Nonlinear internal waves in lakes.* Springer. Series: Advances in Geophysical and Environmental Mechanics. 2012.P. 193-276.

[180] Maderich V., Jung K.T., Terletska K., Talipova T., Brovchenko I. Incomplete similarity of internal solitary waves with trapped core. *Fluid Dynamics Research*. 2015. **47**.P. 035511.

[181] Maderich V., Jung K.T., Terletska K., Kim K.O. Head-on collision of internal waves with trapped core. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2017. № **24**. C. 751-762.

[182] Mahadevan A., Oliger J., Street R. A nonhydrostatic mesoscale ocean model. Part I: Implementation and scaling. *J. Phys. Oceanogr.* 1996. **26**.P. 1860-–1879.

[183] Marchant T R, Smyth N F Soliton interaction for the extended Korteweg-de Vries equation. *Journal of Applied Mathematics*. 1996. 56.P. 157-176.

[184] Marsha J., Adcroft A., Hill C., Perelman L., and C.Heisey A finite-volume, incompressible Navier-–Stokes model for studies of the ocean on parallel computers. *J. Geophys. Res.* 1997. **102**.P. 5753–5766.

[185] Marshal J., Hill C.,Perelman L., and Adcroft A. Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modelling. *J. Geophys. Res.* 1997. **102**.P. 5733-5752.

[186] Massel S.R. Hydrodynamics of the coastal zone. *Elsevier*. Amsterdam. 1989.P. 336.

[187] Martinsen E.A., Engedahl H. Implementation and testing of a lateral boundary scheme as open boundary condition in a barotropic ocean model. *Coastsl Eng.*. 1987. **11**.P. 603–627.

[188] MATLAB Signal Processing Toolbox User's Guide. *The Mathworks, Inc.* Natick. 2001.P. 300.

[189] Matsuno Y. Oblique interaction of interfacial solitary waves in a two-layer deep fluid. *P. Roy.Soc.Lond A* . 1998. **454**.P. 835-856.

[190] Maxworthy T. Experiments on collisions between solitary waves. *J. Fluid Mech.* 1976. **76**.P. 177-–185.

[191] Mehta A. P., Sutherland B. R. , Kyba P. J. Interfacial gravity currents. Part II. Wave excitation. *Phys. Fluids* . 2002. **14**.P. 3558 – 3569.

[192] Mellor G.L. An equation of state for numerical models of ocean and estuaries. *J Atmos. Ocean. Tech.* 1991. **8**.P. 609–611.

[193] Mellor G. L. A three-dimensional primitive equation? numerical ocean model. Manual: Princeton University, 2004. 56 p.

[194] Mellor G., Yamada T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Reviews of Geophysics and Space Physics.* 1982. **20**.P. 851–875.

[195] Mellor G., Hakkinen S., Ezer T., Patchen R. A generalization of a sigma coordinate ocean model and an intercomparison of model vertical grids. *Pinardi N, Woods JD (eds.), Ocean Forecasting: Conceptual Basis and Applications.* Springer, Berlin. 2002.P. 55–72.

[196] Melet, A., R. Hallberg, S. Legg, and M. Nikurashin Sensitivity of the ocean state to lee wave–driven mixing. *Journal of Physical Oceanography.* 2014. **44(3)**.P. doi:10.1175/1079 .

[197] Michallet H., Ivey G.N. Experiments on mixing due to internal solitary waves breaking on uniform slopes. *J Geophys Res.* 1999. **104**.P. 13467–13477.

[198] Michallet H., Barthelemy E. Experimental study of interfacial solitary waves. *J. Fluid Mech.* 1998. 366.P. 159–77.

[199] Miles J.W. Surface-wave scattering matrix for a shelf. *J.Fluid Mech.* 1967. **28**.P. 755–767.

[200] Miles J.W. On internal solitary waves. *Tellus.* 1979. **31**.P. 456 - 462.

[201] Miles J.W., Howard, L.N. Note on a heterogeneous shear flow. *J. Fluid Mech.* 1964. **20**.P. 331-–336.

[202] Mirie Su C. H. Internal solitary waves and their head-on collision. I. *J. Fluid Mech.* 1984. **147**.P. 213–231.

[203] Mirie R.M., Su C. H. Internal solitary waves and their head-on collision. II. *Phys. Fluids*. 1986. **29**.P. 31–37.

[204] Miropolsky Yu.Z. Dynamics of internal gravity waves in the ocean. *Springer*. Berlin. 2001.P. 406.

[205] Miyata M. An internal solitary wave of large amplitude. *La Mer*. 1985. **23**.P. 43–48.

[206] Mortimer C.H. Some effects of the Earth's rotation on water movements in stratified lakes. *Proc. Intern. Assoc. Limnol.* 1955. **12** .P. 66-77.

[207] Moum J.N., Farmer D.M., Smyth W.D., Armi L., Vagle S. Structure and generation of turbulence at interfaces strained by internal solitary waves propagating shoreward over the continental shelf. *J. Phys. Oceanogr.* 2003. **33**.P. 2093–2112.

[208] Moum J. N., Klymak J. M., Nash J.D. ,Perlin A., Smyth W.D. Energy transport by nonlinear internal waves. *J. Phys. Oceanogr.*. 2007. **37**.P. 1968-1988.

[209] Moum J.N., Farmer D.M., Smyth W.D., Armi L., Vagle S. Structure and generation of turbulence at interfaces strained by internal solitary waves propagating shoreward over the continental shelf. *J. Phys. Oceanogr.* 2003. **33**.P. 2093-2112.

[210] Munk W., Wunsch C. Abyssal recipes II: energetics of tidal and wind mixing. *Deep Sea Research Part I Oceanographic Research Papers*. 45. 1998.P. 1977-2010.

[211] Nam S. H. and Send U. Direct evidence of deep water intrusions onto the continental shelf via surging internal tides . *J. Geophys. Res.*. 2010. **116**.P. doi:10.1029/2010JC00669.

[212] Newman J.N. Propagation of water waves over an infinite step. *J.Fluid Mech.* 1965. **23**.P. 339–415.

[213] Nguyen H.Y., Dias F. A Boussinesq system for two-way propagation of interfacial waves. *Physica D*. 2008. **237** .P. 2365–2389.

[214] Notay Y. Aggregation-based algebraic multigrid for convection-diffusion equations. *SIAM J. Sci. Comput.* 2012. **34** .P. A2288–A2316.

[215] Osborn A. Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform . *Physical Oceanography.* 2010. **97**.P. 917.

[216] Osborn A., Scarlet R. I, Terry Burch The Influence of Internal Waves on Deep-Water Drilling . *Journal of Petroleum Technology.* 1978. **30**.P. 1497-1504.

[217] Olsthoorn J., Baglaenko A., Stastna M. Analysis of asymmetries in propagating mode2 waves. *Nonlin. Processes Geophys.* 2013. **20**.P. 59—69.

[218] Ono H. Algebraic solitary wave in stratified fluids. *J. Phys. Soc. Jpn.* 1974. **39**.P. 1082–1091.

[219] Orr M.H., Mignerey P.C. Nonlinear internal waves in the South China Sea: observation of the conversion of depression internal waves to elevation internal waves. *J. Geophys. Res.* 2003. **108 (C3)**.P. 3064–2010.

[220] Ostrovsky L., and Stepanyants, Yu. Do internal solitons exist in the ocean?. *Rev. Geophys.* 1989. **27**.P. 293-310.

[221] Palma E.D., Matano R. P. On the implementation of open boundary conditions to a general circulation model: The barotropic model. *J. Geophys Res.* 1996. **103**.P. 1319–1341.

[222] Parnum I., MacLeod R., Alec D. and Gavrilov A The effect of internal waves on underwater sound propagation. *Acoustics* . 2017. 24.P. 1-9.

[223] Pelinovsky E., Choi B.H.,Talipova T., Wood S.B., and D.Ch. Kim Solitary wave transformation on the underwater step: Asymptotic theory and numerical experiments. *Appl. Math. and Comp.* 2010. **217**.P. 1704-1718.

[224] Pelinovsky E.,Grimshaw R. Structural transformation of eigenvalues for a perturbed algebraic soliton potential. *Physics Letters A.* 1997. **229**.P. 165-172.

[225] Polzin K. L., J. M. Toole J. R. Ledwell, and R. W. Schmitt Spatial variability of turbulent mixing in the abyssal ocean. *Science.* 1997. **276**.P. 93–96.

[226] Polukhin N., Talipova T., Pelinovsky E., and Lavrenov I. Kinematic characteristics of the high-frequency internal wave fild in the Arctic. *Oceanology.* 2003. **43**.P. 33.

[227] Pullin D. I., Grimshaw R. H. J. Finite-amplitude solitary waves at the interface between two homogeneous fluids . *Phys. Fluids* . 1988. **31**.P. 3550–3559.

[228] Quaresma L., Vitorino A., Oliveira A. C. B. da Silva Evidence of sediment resuspension by nonlinear internal waves on the western Portuguese mid-shelf. *Marine Geology.* 2007. 246(2).P. 3550–3559.

[229] Ramp S. R. Y. J., Yang D. B. Reeder, and F. L. Bahr Observations of a mode-2 nonlinear internal wave on the northern Heng-Chun Ridge south of Taiwan. *Journal of Geophysical Research.* 2012. **117**.P. 30–43.

[230] Rottman J., Simpson, J The formation of internal bores in the atmosphere - a laboratory model. *Quarterly Journal Of The Royal Meteorological Society.* 1989. **76**.P. 177-–185.

[231] Goler R. and Reeder M. The Generation of the Morning Glory. *Journal of the atmospheric science.* 2003. **61**.P. 1360–1376.

[232] Rushchitsky J.J., Cattani C., Terletskaya E.V., Symchuk Y. Elastic wavelets and their application to problems of solitary wave propagation AAPP. *AAPP: Physical, Mathematical, and Natural Sciences.* 2008. № (86)1. C. DOI:10.1478/C1A0801004.

[233] Spigel R.H. and J. Imberger The classification of Mixed-Layer Dynamics of Lakes of Small to Medium Size. *J. Phys. Oceanogr.* 1980. **10**.P. 1104–1121.https://doi.org/10.1175/1520-0485(1980)

[234] Shchepetkin A.F., McWilliams J.C. The Regional Ocean Modeling System: A split-explicit, free-surface, topography-following coordinate oceanic model. *Ocean Modelling.* 2005. **9**.P. 347–404.

[235] Seabra-Santos F.J., Renouard D., Temperville A Numerical and experimaental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle. *J. Fluid Mech.*. 176. 1987.P. **176**.117-134

[236] Stanton T. P., Ostrovsky L. A. Observations of highly nonlinear internal solitons over the continental shelf. *J. Geophys. Res.* 1998. **25(14)**.P. 2695-2698.

[237] Su C. H. and Mirie R. M. On head-on collisions between two solitary waves. *J. Fluid Mech.* 1980. **98**.P. 509-–525.

[238] Sabinin K.D. Internal wave packets over the Maskaren ridge. *Izvestiya of Academy of Science of the URSS. Atmospheric and Oceanic Physics.* 1992. **26**.P. 625–633.

[239] Shroyer E. L., J. N. Moum and J. D. Nash Mode 2 waves on the continental shelf: Ephemeral components of the nonlinear internal wavefield. *Journal of Geophysical Research.* 2010. **115**.P. 347-–371.

[240] Shroyer E.L., Moum J.N., Nash J.D. Observations of polarity reversal in shoaling nonlinear internal waves. *J Phys Oceanogr* . 2008. **39**.P. 691–701.

[241] Stamp A. P., Jacka M. Deep-water internal solitary waves. *J. Fluid Mech.* 1995. **305**.P. 347–341.

[242] Song Z.J., Teng B., Gou Y. et al. Comparisons of internal solitary wave and surface wave actions on marine structures and their responses. *Applied Ocean Res.* 2011. **33**.P. 120-129.

[243] Smith R.K, Noonan J. A. Sea-Breeze Circulations over Cape York Peninsula and the Generation of Gulf of Carpentaria Cloud Line Disturbances. *Journal of Atmospheric Sciences.* 1986. **43**.P. 1679-1693.

[244] Simpson, J. E. Gravity Currents in the Environment and the Laboratory. *2nd Edn. Cambridge University Press.* 1997. **456**.P. 33-48.

[245] Siegel D.A., Domaradzki J.A. Large-eddy simulation of decaying stably stratified turbulence. *J Phys Oceanogr.* 1994. **24**.P. 2353–2386.

[246] Shroyer E. L., Moum J. N., Nash J. D. Mode-2 waves on the continental shelf: ephemeral components of the nonlinear internal wave field. *J. Geophys. Res.* 2010. **1115**.P. doi:10.1029/2009JC005605.

[247] Segur, H., Hammack, J. L. Soliton models of long internal waves. *J. Fluid Mech.* 1982. **118** .P. 285.

[248] Salloum M., Knio O. M., Brandt A Numerical simulation of mass transport in internal solitary waves . *Phys. Fluids.* 2012. **15**.P. 89—102.

[249] Shepherd, T. G. A unified theory of available potential-energy, Atmos. *Ocean.* 1993. **31**.P. 1–26.

[250] Seabra-Santos F.J., Renouard D.P., and Temperville A.M. Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle. *J.Fluid Mech.* 1987. **176**.P. 17–134.

[251] Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. *Mon Weather Rev.* 1963. **91**.P. 99–164.

[252] Turkington B., Eydeland A., Wang S. A computational method for solitary internal waves in a continuously stratified fluid. *Stud. Appl. Math.* 1991. **85**.P. 93-–127.

[253] Tung K. K, Chan T.F. , Kubota T. Large amplitude internal waves of permanent form. *Stud. Appl. Math.* 1982. **66**.P. 1-44.

[254] Troy C. D., Koseff J. R. The instability and breaking of long internal waves. *J. Fluid Mech.* 2005. **543**.P. 107-–336.

[255] Talipova T., Terletska K., Maderich V., Brovchenko I.,Pelinovsky E., Jung K.T., Grimshaw R. Solitary wave transformation on the underwater step: Asymptotic theory and numerical experiments. *Physics of Fluids.* 2013. **25**.P. doi: 10.1063/1.4797455.

[256] Talipova T. G., Pelinovsky E. N., and Kharif Ch. Modulational instability of long internal waves of moderate amplitudes in stratifid and horizontally inhomogeneous ocean. *JETP Lett.* 2011. **94**.P. 182.

[257] Terletska K., Kyung Tae J., Talipova T., Maderich V, Brovchenko I. and Roger Grimshaw Internal breather-like wave generation by the second mode solitary wave interaction with a step. *Physics of fluids.* 2016. **28**.P. https://doi.org/10.1063/1.4967203.

[258] Terletska K., Jung K.T.,Maderich V., Kim K.O. Frontal collision of internal solitary waves of first mode. *Wave motion.* 2018. **77**.P. 229-242.

[259] Takano K. Effets d'un obstacle parallelepipedique sur la propagation de la houle.. *La Houille Blanche.* 1960. **15**.P. 247–267.

[260] Talipova T., Terletska K., Maderich V., Brovchenko I., Pelinovsky E., Jung K.T., Grimshaw R. Solitary wave transformation on the underwater step: Asymptotic theory and numerical experiments. *Physics of Fluids.* 2013. **25**.P. doi: 10.1063/1.4797455.

[261] Thorpe S.A. The Turbulent Ocean . *Cambridge University Press* . 2005. 356.P. https://doi.org/10.1017/CBO9780511819933.

[262] Thorpe S.A., Hall A., Crofts I. The internal surge in Loch Ness. *Nature.* 1972. **237**.P. 96-98.

[263] Thorpe S.A. Near-resonant forcing in a shallow two-layer fluid: a model for the internal surge in Loch Ness? . *J Fluid Mech.* 1974. **63**.P. 509-527.

[264] Troy C. D. Koseff J. R. The instability and breaking of long internal waves. *J. Fluid Mech.* 2005. **543**.P. 107—298.

[265] Terez D. E., Knio O. M. Numerical simulations of large-amplitude internal solitary waves . *J. Fluid Mech.* 1998. **362**.P. 53–82.

[266] Thompson R.O.R.Y., Imberger J. Response of a numerical model of a stratified lake to wind stres . *Int. Symp. on Stratified Flows.* 1980. Trondheim, June 1980.P. (.589)

[267] Vlasenko V.,Stashchuk N., Guo C. and Chen X. Multimodal structure of baroclinic tides in the South China Sea . *Nonlin. Processes Geophys.* 2010. **17**.P. 529-543.

[268] Vlasenko, V.I., Hutter, K. Generation of second mode solitary waves by the interaction of a first mode soliton with a sill . *Nonlin. Processes Geophys.* 2001. **8**.P. 223–239.

[269] Vlasenko, V.I., Hutter, K. Numerical experiments on the breaking of solitary internal waves over a slope shelf topography.. *J. Phys. Oceanogr.* 2002. **32**.P. 1779-1793.

[270] Vlasenko V, Ostrovsky L, Hutter K Adiabatic behaviour of strongly nonlinear internal solitary waves in slope-shelf areas . *J. Geophys. Res.*. 2005. **110**.P. oi: 10.1029/2004JC002705.

[271] Vlasenko V., Stashchuk N., M. E. Inall, Joanne E. Hopkins Tidal energy conversion in a global hot spot: On the 3D dynamics of baroclinic tides at the Celtic Sea shelf break . *J. Geophys. Res.*. 2014. **119**.P. 3249. doi:10.1002/2013JC009708

[272] Vlasenko V., Stashchuk N. Internal tides near the Celtic sea shelf break: A new look at a well known problem . *Deep Sea Res. Part I.* 2015. **103**.P. 24.

[273] Waterhouse Amy F., Jennifer A. MacKinnon, Jonathan D. Nash, Matthew H. Alford, Eric Kunze, Harper L. Simmon, Kurt L. Polzin, Louis C. St. Laurent, Oliver M. Sun, Robert Pinkel, Lynne D. Talley, Caitlin B. Whalen, Tycho N. Huussen, Glenn S. Carter, Ilker Fer, Stephanie Waterman, Alberto C. Naveira Garabato, Thomas B. Sanford, and Craig M. Lee Global Patterns of Diapycnal Mixing from Measurements of the Turbulent Dissipation Rate. *Journal of physical ocenorgaphy.* 2014. **44**.P. 1854–1872.

[274] Watson E.R. Movement of the waters of the Loch Ness, as indicated by temperature observation. *Geogr.J* . 1904. **24**.P. 430-437.

[275] Wedderburn E.M. Temperature of the fresh-water lochs of Scotland. *Trans. R. Soc. Edin* . 1907. **45**.P. 407-489.

[276] Wessels F., Hutter, K. Interaction of internal waves with a topographic sill in a two-layered fluid. *Journal of Physical Oceanography.* 1996. **26(2)**.P. 5–20.

[277] Wijesekera, H. W., L. Padman, T. Dillon, M. Levine, C. Paulson, and R. Pinkel The application of internal-wave dissipation models to a region of strong mixing. *Journal of physical ocenorgaphy.* 1993. **23**.P. 269–286.

[278] Winsberg, Morton Florida Weather. *Gainesville.* University Press of Florida. **2003**.P. 116.

[279] Winters K. B., Lombard P. N., Riley J. J., D'Asaro E. A. Available potential energy and mixing in density stratified fluids. *J. Fluid Mech.* 1995. **289**.P. 115–128.

[280] Wunsch C., Ferrari R. Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2004. **36**.P. 281-314. doi:10.1146/annurev.fluid. 36.050802.122121.

[281] Yang Y. J., Fang Y. C., Chang M.-H., Ramp S. R., Kao C.-C., Tang T. Y. Observations of second baroclinic mode internal solitary waves on the continental slope of the northern South China Sea. *J. Geophys. Res.* 2009. **114**.P. doi:10.1029/2009JC005305.

[282] Yang Y. J., Fang Y. C., Tang T. Y., Ramp S. R. Convex and concave types of second baroclinic mode internal solitary waves. *Nonlin. Processes Geophys.* 2010. **17**.P. 605–614.

[283] Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* 1965. **15**.P. 240–243.

[284] Zarate A. Ruiz de and Nachbin A. A reduced model for internal waves interacting with topography at intermediate depth. *Communications in Mathematical Scienc.* 2008. **6**.P. 385-396.

[285] Xiaodong H., Zhaohui C., Wei Z., Zhiwei Zhang, Chun Z., Qingxuan Y. and Jiwei T. An extreme internal solitary wave event observed in the northern South China Sea. *Scientific Reports.* 2016. 10.1038.P. 30041.

[286] Xue J., Graber H. C., Romeiser R., Lund B. Understanding internal wave-wave interaction patterns observed in satellite images of the mid-atlantic bight. *30(19).* Ocean Sciences. 25.P. 2006. 3211-3219

[287] Zhou X., Grimshaw R. The effect of variable currents on internal solitary waves. *Dyn. Atm. Oceans.* 1989. **14**.P. 17 - 39.

[288] Zhao Z, Klemas V, Zheng Q, Yan X Satellite observation of internal solitary waves con-verting polarity. Geophys Res Let.: 30(19), 2003. doi:10.10292003GL0182869 p.

ДОДАТКИ

Табл. 7.3: Характеристики перешкод та внутрішніх хвиль, що розглядались в чисельних експериментах

тип хвилі	**H(м)**	a_{in}**(м)**	H_{ob}/h_2	h_1/h_2	**три-к**	**півколо**	**прямо-к** L_{obst} = 0.17 **м**	**прямо-к** L_{obst} = 0.52**м**	**пластина**
підв.	0.5	0.03	4	0.75	$TE1$	$SE1$			
підв.	0.5	0.052	4	0.75	$TE2$	$SE2$			
підв.	0.5	0.073	4	0.75	$TE3$	$SE3$			
пон.	0.5	0.05	0.25	0.75	$TD1$	$SD1$			
пон.	0.5	0.07	0.25	0.75	$TD2$	$SD2$			
підв.	0.5	0.052	0.25	0.75					$RE1$
пон.	0.3	0.059	0.1	0.7			$1703a$	$1703b$	$1703c$
пон.	0.3	0.036	0.1	0.7			$0104a$	$0104b$	$0104c$
пон.	0.3	0.065	0.1	0.8					2203
пон.	0.3	0.036	0.1	0.8					0303
пон.	0.3	0.067	0.1	0.8			0203		

Табл. 7.4: Характеристики обчислювального лотка і хвиль для серій чисельних експериментів

N	H_{obst}(м)	$\|a_i\|$(м)	h_1(м)	B	x_{obst}(м)	*resolution*
1_a	20	$1.8 - 3.5$	20	$1.9 - 3.7$	$5000 - 7000$	$3000 \times 4 \times 300$
1	20	$1.2 - 3.3$	20	$2. - 5.5$	$5000 - 7000$	$3000 \times 4 \times 300$
2	16.65	$1.2 - 3.3$	20	$3. - 8.3$	8000	$3000 \times 4 \times 300$
3	6.65	$1.2 - 3.3$	20	$6 - 16.6$	8000	$3000 \times 4 \times 300$
4	$5 - 40$	5	10	$-0.5 - 4.5$	4000	$3000 \times 4 \times 300$
5	$5 - 40$	7	10	$-0.7 - 6.2$	4000	$3000 \times 4 \times 300$

Табл. 7.5: Параметри експериментів

джерело	експеримент	H/Ls	$\Delta\rho/\rho$	ξ	a/h_1	сітка
Michallet et al, 1999	$MI1(3D)$	∞	0.04	∞	1.07	$800 \times 100 \times 32$
Michallet et al, 1999	$MI2(3D)$	∞	0.04	∞	1.07	$800 \times 100 \times 5$
Michallet et al, 1999	$MI8(3D)$	0.169	0.04	0.52	1.06	$800 \times 100 \times 32$
Michallet et al, 1999	$MI8(2D)$	0.169	0.04	0.5	1.1	$800 \times 100 \times 5$
Michallet et al, 1999	$MI12(2D$	0.214	0.012	0.66	1.19	$800 \times 100 \times 32$
Michallet et al, 1999	$MI12(2D)$	0.214	0.012	0.65	1.22	$800 \times 100 \times 5$
Michallet et al, 1999	$MI15(2D)$	0.214	0.047	0.8	0.74	$800 \times 100 \times 32$
Michallet et al, 1999	$MI15(2D)$	0.214	0.047	0.76	0.78	$800 \times 100 \times 5$
Nikishov et al 2009	1104	0.2	0.01	0.6	1.63	$1100 \times 350 \times 32$
Nikishov et al 2009	2906	1.73	0.01	4.4	1.5	$1100 \times 350 \times 5$
	$A1$	0.04	0.022	0.143	1.4	$1200 \times 500 \times 32$
	$A2$	0.15	0.022	0.53	1.4	$1200 \times 500 \times 5$
	$A3$	0.04	0.022	0.139	0.95	$1200 \times 500 \times 32$

Табл. 7.6: Параметри розрахунків фронтального зіткнення внутрішніх усамітнених хвиль першої бароклінної моди (1)

Эксп.	h_1	a	$\lambda_{0.5}$	$\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$	γ	α	α_{cr}	α_{max}	Ri_{min}	Re_w
$D1$	6	-0.6	151	0.0227	0.136	0.1	2.33	3.16	0.57	589
$D2$	6	-1.2	148	0.0227	0.136	0.2	2.33	3.16	0.51	1189
$D3$	6	-2.4	142	0.0227	0.136	0.4	2.33	3.16	0.31	2395
$D4$	6	-3	137	0.0227	0.136	0.5	2.33	3.16	0.3	3000
$D5$	6	-3.6	132	0.0227	0.136	0.7	2.33	3.16	0.27	3730
$D6$	6	-4.2	128	0.0227	0.136	0.9	2.33	3.16	0.24	4353
$D7$	6	-5.4	125	0.0227	0.136	0.9	2.33	3.16	0.2	5694
$D8$	6	-6.48	124	0.0227	0.136	1.08	2.33	3.16	0.16	6892
$D9$	6	-7.8	125	0.0227	0.136	1.3	2.33	3.16	0.14	8509
$D9$	6	-7.8	125	0.0227	0.136	1.3	2.33	3.16	0.14	8509
$D10$	6	-9.96	131	0.0227	0.136	1.66	2.33	3.16	0.13	11227
$D11$	6	-11.52	140	0.0227	0.136	1.92	2.33	3.16	0.12	13195
$D12$	6	-13.2	144	0.0227	0.136	2.2	2.33	3.16	0.12	14040
$D13$	6	-13.6	145	0.0227	0.136	2.26	2.33	3.16	0.11	16072
$D14$	6	-14.4	146	0.0227	0.136	2.4	2.33	3.16	0.08	17149
$D15$	10	-8.2	121	0.0311	0.25	0.82	1.4	1.5	0.2	9914
$D16$	10	-5.2	121	0.0311	0.25	0.52	1.4	1.5	0.029	6178
$D17$	10	-3.7	128	0.0311	0.25	0.37	1.4	1.5	0.38	4339

Табл. 7.7: Параметри розрахунків фронтального зіткнення внутрішніх усамітнених хвиль першої бароклінної моди (2)

Эксп.	h_1	a	$\lambda_{0.5}$	$\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$	γ	α	α_{cr}	α_{max}	Ri_{min}	Re_w
$E1$	10	8.7	121	0.0311	0.25	0.87	1.4	1.5	0.021	10519
$E2$	10	4.2	128	0.0311	0.25	0.42	1.4	1.5	0.32	4963
$E3$	10	2	132	0.0311	0.25	1.1	1.4	1.5	0.18	2345
$E4$	10	11	123	0.0311	0.25	0.42	1.4	1.5	0.32	13500
$E5$	6	11.52	134	0.0311	0.136	1.92	2.33	3.16	0.12	10996

Табл. 7.8: Характеристики хвиль, що взаємодіють. Товщина пікнокліну h, амплітуди a, довжини хвилі $\lambda_{0.5}$, відношення ε, безрозмірної амплітуди α, числа Фруда Fr_{max}, мінімального числа Річардсона Ri_{min}, числа Рейнольдса Re_m та клас хвилі для серії експериментів А

Эксп.	h (cm)	a (cm)	$\lambda_{0.5}$	ε	α	Fr_{max}	Ri_{min}	Re_m	
$A1$	0.5	0.25	3.15	92	0.5	0.33	81	45.1	1
$A2$	0.5	0.4	2.35	92	0.81	0.71	52	86.6	1
$A3$	0.5	0.58	1.9	92	1.15	0.82	14	132	1
$A4$	0.5	0.68	2	92	1.35	0.98	11	166	1
$A5$	0.5	0.8	2.2	92	1.6	1.11	1.1	223	2
$A6$	0.5	0.94	2.4	92	1.88	1.12	0.8	277	2
$A7$	0.5	1.08	2.65	92	2.15	1.16	0.4	338	2
$A8$	0.5	1.3	3.15	92	2.6	1.25	0.35	443	2
$A9$	0.5	1.7	3.65	92	3.3	1.28	0.25	683	2
$A10$	0.5	1.9	4.25	92	3.38	1.29	0.19	785	2
$A11$	0.5	2.3	4.75	92	4.6	1.3	0.15	1075	2
$A12$	0.5	2.5	5.35	92	5	1.35	0.12	1242	3
$A13$	0.5	3.2	6.35	92	6.4	1.31	0.06	1681	3

Табл. 7.9: Характеристики хвиль, що взаємодіють. Товщина пікнокліну h, амплітуди a, довжини хвилі $\lambda_{0.5}$, відношення ε, безрозмірної амплітуди α, числа Фруда Fr_{max}, мінімального числа Річардсона Ri_{min}, числа Рейнольдса Re_m та клас хвилі для серії експериментів B

Експ.	$h\ cm$	$a\ cm$	$\lambda_{0.5}$	ε	α	Fr_{max}	Ri_{min}	Re_m	
$B1$	1	0.63	5.21	46	0.63	0.51	24	153	1
$B2$	1	0.85	4.23	46	0.85	0.68	11.5	225	1
$B3$	1	1.25	3.61	46	1.25	1.02	2.4	388	1
$B4$	1	1.95	5.25	46	1.95	1.16	0.38	765	1
$B5$	1	2.68	6.65	46	2.68	1.22	0.18	1225	2
$B6$	1	2.86	7.1	46	2.86	1.22	0.13	1345	2
$B7$	1	3.56	8.6	46	3.56	1.23	0.11	1839	2

Табл. 7.10: Характеристики хвиль, що взаємодіють. Товщина пікнокліну h, амплітуди a, довжини хвилі $\lambda_{0.5}$, відношення ε, безрозмірної амплітуди α, числа Фруда Fr_{max}, мінімального числа Річардсона Ri_{min}, числа Рейнольдса Re_m та клас хвилі для серії експериментів C-D

Эксп.	$h\ cm$	$a\ cm$	$\lambda_{0.5}$	ε	α	Fr_{max}	Ri_{min}	Re_m	
$C1$	2	0.42	14	23	0.21	0.19	52	161	1
$C2$	2	0.76	10.4	23	0.38	0.3	25	291	1
$C3$	2	1.2	7	23	0.6	0.5	3.1	511	1
$C4$	2	1.7	6.1	23	0.85	0.69	1.1	669	1
$C5$	2	2.02	6.21	23	1.01	0.84	0.45	881	1
$C6$	2	2.6	6.25	23	1.3	0.9	0.23	1159	1
$C7$	2	2.9	7.22	23	1.45	1.01	0.22	1483	2
$C8$	2	3.3	7.9	23	1.65	1.08	0.18	1851	2
$C9$	2	3.5	8.5	23	1.75	1.147	0.15	2030	2
$C10$	2	4.1	9.2	23	2.05	1.17	0.13	2521	2
$C11$	2	4.56	10.82	23	2.28	1.23	0.12	2812	2
$C12$	2	4.85	12.44	23	2.42	1.24	0.09	3171	3
$C13$	2	5.28	13.4	23	2.64	1.25	0.07	3478	3
$C14$	2	5.94	15.31	23	2.97	1.29	0.05	3884	3
$D1$	0.25	0.55	12.5	56	2.2	1.18	1.05	329	2

Табл. 7.11: Параметри чисельного басейну і характеристики хвиль, що генеруються для двох серій чисельних експериментів по взаємодії внутрішніх хвиль другої моди зісходинкою на дні (значення представлені в метрах)

Exp	H_s	C_1	C_2	C_{br}	a_1	a_2	a_{br}	λ_1	λ_2	λ_{br}
1.1	0.04	...	0.053	...	...	0.0295	...	...	0.115	...
1.2	0.06	0.13	0.053	0.01	0.0002	0.028	0.0024	1.2	0.11	1.1
1.3	0.08	0.128	0.052	0.014	0.0003	0.028	0.005	1.1	0.1	1.
1.4	0.1	0.125	0.051	0.061	0.0005	0.0275	0.008	1	0.09	0.9
1.5	0.115	0.121	0.049	0.018	0.0009	0.026	0.01	0.95	0.089	0.81
1.6	0.12	0.118	0.0478	0.02	0.0014	0.025	0.011	0.9	0.087	0.7
1.7	0.13	0.11	0.047	0.0208	0.0016	0.024	0.012	0.85	0.085	0.62
1.8	0.14	0.108	0.046	0.021	0.0021	0.0235	0.013	0.8	0.082	0.51
1.9	0.15	0.105	0.042	0.0219	0.0026	0.0225	0.015	0.78	0.08	...
1.10	0.16	0.1	0.041	0.023	0.0036	0.02	0.0153	0.72	0.078	0.38
1.11	0.17	0.095	0.039	0.025	0.0045	0.019	0.016	0.65	0.072	...
1.12	0.18	0.0875	0.03	...	0.0063	0.016	...	0.59	0.07	...
1.13	0.19	0.085	...	...	0.009	...	...	0.45	...	...
1.14	0.2	0.0815	...	...	0.015	...	...	0.32	...	...
1.15	0.22	0.065	...	...	0.027	...	...	0.13	...	...
1.16	0.23	0.05	...	...	0.028	...	...	0.08	...	...
1.17	0.24	0.04	...	...	0.024	...	...	0.021	...	...
1.17	0.25	0.029	...	...	0.02	...	...	0.01	...	...

Табл. 7.12: Параметри чисельного басейну і характеристики хвиль, що генеруються для двох серій чисельних експериментів по взаємодії внутрішніх хвиль другої моди зі сходинкою на дні (значення представлені в метрах)

Exp	H_s	C_1	C_2	C_{br}	a_1	a_2	a_{br}	λ_1	λ_2	λ_{br}
2.1	0.03	0.132	0.036	0.02	0.0018	0.042	0.018	1.86	0.25	1.24
2.2	0.05	0.132	0.06	0.021	0.002	0.04	0.019	1.72	0.24	1.07
2.3	0.08	0.129	0.058	0.022	0.003	0.036	0.022	1.7	0.22	0.95
2.4	0.09	0.125	0.055	0.0224	0.004	0.035	0.024	1.64	0.2	0.87
2.5	0.1	0.12	0.053	0.023	0.005	0.034	0.026	1.52	0.18	0.8
2.6	0.12	0.115	0.051	...	0.0081	0.03	...	1.4	0.15	...
2.7	0.13	0.11	...	...	0.009	0.0275	...	1.28	0.13	...
2.8	0.14	0.108	...	...	0.012	...	...	1.	...	...
2.9	0.15	0.105	...	...	0.015	...	...	0.8	...	...
2.10	0.16	0.098	...	...	0.018	...	...	0.58	...	...
2.11	0.17	0.089	...	...	0.022	...	...	0.3	...	...
2.12	0.2	0.075	...	...	0.039	...	...	0.23	...	...
2.13	0.23	0.058	...	...	0.048	...	...	...	...	...