ІНСТИТУТ ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ І ТЕХНОЛОГІЙ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ГІДРОМЕХАНІКИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Редчиць Дмитро Олександрович

УДК 532.516; 533.9

ДИСЕРТАЦІЯ

Нестаціонарні зв'язані задачі динаміки рідини, газу та низькотемпературної плазми

01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми

Фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________________ Д. О. Редчиць

Науковий консультант: Довгий Станіслав Олексійович,
академік НАН України, д.ф.-м.н., професор

Дніпро – 2020

АНОТАЦІЯ

Редчиць Д. О. Нестаціонарні зв'язані задачі динаміки рідини, газу та низькотемпературної плазми. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.05 «Механіка рідини, газу та плазми». – Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню нестаціонарних процесів динаміки рідини, газу та низькотемпературної плазми при розв'язанні зв'язаних задач. Вивчено фізичні особливості широкого класу відривних течій за допомогою розробленого спеціалізованого пакету обчислювальної аеродинаміки й електродинаміки.

Метою роботи є побудова математичної моделі для опису параметрів нестаціонарних ламінарних, перехідних і турбулентних потоків повітря в наближенні в'язкої нестисливої рідини та низькотемпературної плазми діелектричного бар'єрного розряду при розв'язку зв'язаних задач.

Для досягнення поставленої мети розроблено нову фізично обґрунтовану математичну модель розвитку в часі процесів аеродинаміки, електродинаміки, динаміки частинок і хімічної кінетики для моделювання особливостей взаємодії суцільного в'язкого середовища з плазмою діелектричного бар'єрного розряду. Аналіз проблеми базується на розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса, замкнених диференціальною моделлю турбулентності, а також моделлю ламінарно-турбулентного переходу, і рівнянь, що описують поведінку низькотемпературної плазми.

У роботі використовувалися два підходи для моделювання турбулентності. Перший підхід, заснований на моделюванні потоку в'язкої нестисливої рідини на базі нестаціонарних осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса з використанням диференціальних моделей турбулентності Spalart-Allmaras (SA) та її модифікацій SARC, SALSA, і другий – гібридний підхід, заснований на моделюванні від'єднаних вихорів із затримкою (DDES). Вперше повну γ-Re_θ

модель адаптовано для використання разом з моделями турбулентності SA, SARC і SALSA. Запропоновано нові співвідношення для визначення значень питомої швидкості дисипації та турбулентної в'язкості в незбуреному потоці.

Розроблено нову математичну модель низькотемпературної нерівноважної ідеальної плазми діелектричного бар'єрного розряду в повітрі. У якості базового обраний дифузійно-дрейфовий підхід для опису просторово-тимчасової структури, включаючи нестаціонарні електродинамічні процеси, кінетичні явища та плазмохімічні реакції. У моделі враховуються електронно-збуджені та метастабільні стани молекул азоту та кисню, нейтральні атоми кисню, електрони, а також позитивні та негативні іони, у цілому 14 частинок і 97 плазмохімічних реакцій, включаючи поверхневі процеси. Хімічні реакції включають: процеси дисоціації, іонізації молекул електронним ударом з основного стану; ступінчасту, асоціативну іонізацію та фотоіонізацію; збудження молекул; іонізацію збуджених (метастабільних) молекул; прилипання і відлипання електронів; рекомбінацію електронів і позитивних іонів; хімічні перетворення нейтральних атомів, молекул та іонів, а також процеси вторинної емісії електронів з відкритого електрода і діелектричної поверхні.

Основною особливістю розробленої чисельно-аналітичної моделі є використання раціональної кількості рівнянь для опису всіх основних нестаціонарних параметрів діелектричного бар'єрного розряду в повітрі. Обрані 14 видів частинок забезпечують високу точність математичного моделювання основних плазмохімічних реакцій, включаючи як поверхневі процеси, так і швидкоплинні явища в просторі (розвиток стримера й електронних лавин). Розроблена нова чисельно-аналітична модель діелектричного бар'єрного розряду дозволяє якісно та кількісно відтворювати процеси діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора та призначена для адекватного відтворення сили Лоренца, що діє на турбулентний потік частково іонізованого повітря, у широкому діапазоні амплітуд і частот прикладеної напруги, а також параметрів і властивостей діелектричної поверхні.

Система вихідних рівнянь аеродинаміки, записувалася щодо довільної криволінійної системи координат на рухливих сітках. Узгодження полів тиску та швидкості здійснювалося за допомогою методу штучної стисливості, модифікованого для розрахунку нестаціонарних задач. Інтегрування системи вихідних рівнянь проводилося чисельно з використанням методу контрольного об'єму. Для конвективних потоків використовувалася протипоточна апроксимація Rogers-Kwak третього порядку точності, яка заснована на схемі Roe. Запропоновано модифікацію схеми Rogers-Kwak першого та третього порядку точності для конвективних членів. Основна відмінність модифікованої схеми Rogers-Kwak від класичної полягає в тому, що потоки розраховуються з використанням метричних коефіцієнтів на гранях контрольного об'єму за значеннями гідродинамічних параметрів у точках. У моделях турбулентності та ламінарно-турбулентного переходу для апроксимації конвективних складових застосовувалася схема TVD з обмежувачем потоків ISNAS третього порядку. Побудовано неявний алгоритм для модифікованої схеми Rogers-Kwak першого та третього порядку точності.

Нова взаємно узгоджена система вихідних рівнянь низькотемпературної плазми, що складається з рівняння для електричного потенціалу та рівнянь динаміки частинок, записувалася у довільній криволінійній системі координат. Вперше вводиться несиметрична скінченно-об'ємна апроксимація других похідних для електричного потенціалу в рівняннях для динаміки заряджених частинок плазми з метою збереження фізичних особливостей процесу адвекції. Апроксимація проводиться з урахуванням несиметрично «відфільтрованого» значення густини заряджених частинок плазми, тому що формальна математична апроксимація оператора за допомогою симетричних скінченно-різницевих співвідношень (як для дифузійних доданків) призводить до втрати фізичних особливостей процесу переносу потоку заряджених частинок у суцільному середовищі.

Розроблено чисельно-аналітичну модифікацію рівняння Пуассона для електричного поля в криволінійній системі координат для безпосереднього виділення операторів електричного потенціалу, замість опосередкованого впливу через значення густини заряджених частинок в джерельному доданку, з використанням протипоточної апроксимації густини заряджених частинок у других похідних для електричного потенціалу.

Для нестаціонарних рівнянь динаміки плазми розроблено неявний чисельний алгоритм з підітераціями за псевдочасом, який базується на скінченно-об'ємному підході. Рівняння для електричного потенціалу з джерелами вирішувалося за допомогою методу мінімізації узагальненої нев'язки (GMRES) з неповним LU-розкладанням (ILU) загальної матриці системи у якості передзумовлювання. У нестаціонарних рівнянь для густини частинок плазми апроксимація дрейфових (адвективних) похідних здійснювалася за допомогою схеми TVD з функцією-обмежувачем MinMod. Реалізовано єдиний неявний чисельний алгоритм для ефективного розв'язку неоднорідної системи вихідних рівнянь.

Виявлено фізичні особливості обтікання плоскої пластини, кругового циліндра та аеродинамічного профілю на основі чисельного розв'язку нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини з використанням різних моделей турбулентності (SA, SARC і SALSA) і γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу.

Проведено порівняння результатів розрахунків обтікання циліндра з використанням моделі γ-Re_θ ламінарно-турбулентного переходу і без неї. Показано, що при низьких числах Рейнольдса, коли обтікання циліндра носить ламінарний характер, а слід турбулентний, використання моделі турбулентності SA і SARC призводить до розвитку турбулентного примежового шару на циліндрі і, як наслідок, до зміни розташування точки відриву. Неправильне розташування точки відриву впливає на розподіл тиску в донній частини циліндра і на інтегральні аеродинамічні характеристики. Встановлено, що застосування моделі переходу дозволяє адекватно відтворити ламінарний відрив поблизу передньої крайки профілю NACA 4412 з подальшим його приєднанням. Показано, що застосування диференціальної γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу якісно і кількісно покращує результати чисельного моделювання.

В роботі проведено чисельне вивчення фізичних особливостей турбулентного обтікання J-профілю для довільного кута атаки. Результати обчислювальних експериментів показали, що застосування DDES підходу призводить до формування меншої зони відриву з серією дрібних вихорів більшої інтенсивності. Підхід, заснований на моделюванні відокремлених вихорів з затримкою (DDES), краще відтворює нестаціонарні фізичні особливості, що виникають при обтіканні J-профілю. Проведено комплексні дослідження аеродинаміки симетричних і несиметричних профілів із замкнутим і розімкнутим контуром. Вперше виявлено вплив ступеня замкнутості J-профілю на коефіцієнти сили лобового опору і підйомної сили, а також на структуру обтікання в цілому.

В роботі представлено результати розрахунку турбулентного обтікання багатоелементного профілю в широкому діапазоні кутів атаки. Виділено фізичні особливості структури потоку при обтіканні багатоелементного профілю 30P30N. Встановлено, що зі збільшенням кута атаки розміри відривної зони на внутрішній поверхні передкрилка багатоелементного профілю зменшуються, а в хвостовій частині основного профілю залишаються майже незмінними. На основі розробленої математичної моделі і спеціалізованого пакета обчислювальної аеродинаміки показано динаміку та аеродинаміку трьохелементного профілю 30P30N при його розкритті з крейсерської конфігурації та переході у злітно-посадкову.

Проведено розрахунки турбулентного обтікання контуру транспортного засобу поблизу екрану. Виділено фізичні особливості структури течії навколо транспортного засобу і виконано порівняльний аналіз інтегральних та розподілених аеродинамічних характеристик контуру транспортного засобу з експериментальними і розрахунковими даними. Показано можливість застосування розробленого спеціалізованого CFD пакету до задач аеродинаміки наземного транспорту.

Проведено серію чисельних розрахунків нестаціонарного обтікання вертикально-осьової (ВО) вітроенергетичної установки (ВЕУ) з роторами Дар'є та Савоніуса турбулентним потоком вітру. Показано, що основний внесок в крутний момент вертикально-осьової вітроенергетичної установки здійснюється за рахунок ротора Дар'є, на частку ротора Савоніуса припадає лише кілька відсотків від загального обсягу виробленого установкою моменту. Вперше встановлено, що наявність ротора Савоніуса в центральній частині вертикально-осьової вітроенергетичної установки призводить до істотного затінення підвітряної ділянки траєкторії лопаті ротора Дар'є, і до зниження крутного моменту, що генерується.

Проведено серію обчислювальних експериментів з моделювання нестаціонарних процесів низькотемпературної нерівноважної плазми діелектричного бар'єрного розряду, а також її вплив на керування структурою потоку повітря. Проведено детальне вивчення стадій зародження, розвитку і гасіння катодоспрямованого стримера для реальних конфігурацій плазмових актуаторов на основі розробленої математичної моделі. Проаналізовано нестаціонарні характеристики плазми в області над діелектричною поверхнею, включаючи розподіл густини частинок, електричного потенціалу і компонент сили Лоренца.

Вперше встановлено вплив структури частинок плазми та густини заряджених частинок на зміну сили Лоренца в часі. Показано, що основний внесок в формування сили Лоренца на позитивному напівперіоді коливання прикладеної напруги надають іони кисню O_4^+. Для випадку негативного напівперіоду основний внесок здійснюється за рахунок негативно заряджених іонів кисню, зокрема O^-.

Проведено параметричні дослідження геометричних параметрів плазмових актуаторов та їх вплив на швидкість повітря, що генерується. Показано, що зі збільшенням амплітуди прикладеної напруги відбувається зростання швидкості повітря, що генерується, яка носить асимптотичний характер. Зменшення товщини діелектрика призводить до збільшення швидкості повітря.

Вперше продемонстровано виникнення рушійної сили циліндра в результаті впливу чотирьох плазмових актуаторов на основі діелектричного бар'єрного розряду на повітря, що знаходиться у стані спокою. Показано можливість зменшення коефіцієнта опору циліндра за допомогою плазмових актуаторов за рахунок придушення вихрової доріжки Кармана.

Ключові слова: керування структурою потоку, діелектричний бар'єрний розряд, низькотемпературна нерівноважна плазма, рівняння Нав'є-Стокса, моделювання турбулентності.

Список публікацій здобувача за темою дисертації:

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Редчиц Д. А., Приходько А. А. Аэродинамика роторов Дарье и Савониуса. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2007. № 5. С. 26–31 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

2. Редчиц Д. А. Аэродинамика вращающейся лопасти ротора Дарье. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2007. Вип. 11, Т. 2. С. 205–220.

3. Редчиц Д. А. Численное моделирование закритического обтекания профиля турбулентным несжимаемым потоком. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2007. Вип. 11, Т. 1. С. 12–24.

4. Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарных турбулентных отрывных течений при обтекании ротора Савониуса. *Авиационно-космическая техника и технология.* 2008. № 5. С. 53–58.

5. Редчиц Д. А. Численное моделирование обтекания ротора Дарье вертикально-осевой ветроэнергетической установки. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2008. Вип. 12. С. 157–172.

6. Дзензерский В. А. Приходько А. А., Хачапуридзе Н. М., Редчиц Д. А. Моделирование нестационарных турбулентных течений при обтекании подвижных тел сложной геометрии на основе уравнений Навье-Стокса. *Вісник*

Харківського національного університету. 2009. Вип. 11, № 847. С. 283–286 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

7. Редчиц Д. А. Аэродинамика ротора Савониуса. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2009. Вип. 13, Т. 1. С. 27–41.

8. Редчиц Д. А. Математическое моделирование аэродинамических процессов при обтекании вертикально-осевых ветроэнергетических установок. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2009. Вип. 2 (35). С. 374–378.

9. Редчиц Д. А. Математическое моделирование отрывных течений на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса. *Научные ведомости Белгородского государственного университета.* 2009. №13 (68). С. 118–146.

10. Prikhod'ko A. A., Redtchits D. A. Numerical modeling of a viscous incompressible unsteady separated flow past a rotating cylinder. *Fluid Dynamics*. 2009. Vol. 44, No. 6. P. 823–829 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

11. Редчиц Д. А. Математическое моделирование физических особенностей турбулентного обтекания многоэлементного профиля. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2010. Вип. 3 (39). С. 398–403.

12. Тарасов С. В., Яскевич Э. П., Редчиц Д. А., Костюков И. Ю. Математическое моделирование поля течения вокруг одиночной лопасти. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2010. Вип. 14, № 5, Т. 1. С. 152–164 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

13. Редчиц Д. А. Математическое моделирование диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2011. Вып. 3 (42). С. 359–365.

14. Редчиц Д. А., Гуржий А. А. Численное моделирование эффекта Магнуса при обтекании кругового цилиндра невозмущенным потоком вязкой жидкости. *Прикладная гидромеханика.* 2012. Т. 14, № 1. С. 63–71 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

15. Редчиц Д. А. Разработка автоматизированного препроцессора для вычислительной гидродинамики. *Вісник Дніпропетровського университета.* 2012. Т. 20, № 5, Вип. 16, Т. 1. С. 32–43.

16. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Костюков И. Ю. Воспроизведение обтекания трехлопастного ротора Дарье. *Техническая механика.* 2012. № 4. С. 67–75 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

17. Редчиц Д. А. Моделирование воздействия диэлектрического барьерного разряда на находящийся в покое воздух. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2012. Вип. 18. С. 161–174.

18. Дзензерский В. А., Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Хачапуридзе Н. М. Математическое моделирование аэродинамики вертикально-осевой ветроэнергетической установки с роторами Дарье и Савониуса. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2012. Вип. 19. С. 96–111 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

19. Редчиц Д. А Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью диэлектрического барьерного разряда. *Вісник Харківського національного університету.* 2013. №1063. С. 144−159.

20. Редчиц Д. А. Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью четырех плазменных актуаторов. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2013. Вип. 3 (42). С. 286–291.

21. Дзензерский В. А., Редчиц Д. А., Хачапуридзе Н. М., Моисеенко С. В. Аэродинамика трехэлементного профиля 30P30N в крейсерской и взлетно-посадочной конфигурации. *Вісник Дніпропетровського университету.* 2013. Т. 21. № 5, Вип. 17. Т. 2. С. 59–68 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

22. Редчиц Д. А., Польовий О. Б., Моисеенко С. В. Управление вихревой дорожкой Кармана с помощью плазменных актуаторов. *Вісник Дніпропетровського университету.* 2013. Т.21, № 5, Вип. 17, Т. 1. С. 63–80.

23. Редчиц Д. А. Математическая модель диэлектрического барьерного разряда в воздухе *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2014. Вып. 3 (50). С. 429–436.

24. Редчиц Д. А. Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью плазменных актуаторов. *Техническая механика.* 2014, № 2. С.106–119.

25. Редчиц Д. А. Численное моделирование диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Техническая механика.* 2014, № 4. С. 102–117.

26. Редчиц Д. А. Математическое моделирование плазмы диэлектрического барьерного разряда в воздухе *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2015. Вып. 3 (54). С. 452–458.

27. Тарасов С.В., Редчиц Д. А., Полевой О. Б., Чашина И. Б., Моисеенко С. В. Вычислительная гидродинамика на службе ветроэнергетики. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2016. Т.24, № 5, Вип. 20, Т. 1.С. 38–48 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

28. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Численное моделирование обтекания турбулентным потоком транспортного средства вблизи экрана. *Вестник*

Херсонского национального технического университета. 2016. Вып. 3 (58). С. 398–402 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

29. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Численное моделирование процессов аэродинамики вертикально-осевой ветроэнергетической установки. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2017. Т. 24, № 5. Вип. 26. С. 153–167 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

30. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Абрамовский Е. Р., Гладенко В. П., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Экспериментальное и численное изучение физических особенностей турбулентного обтекания J-лопасти ротора Дарье. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2017. Т. 25, № 5, Вип. 21, Т. 1. С. 12–26 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

31. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Аэродинамика J-профиля в турбулентном потоке воздуха при круговой продувке. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2017. Вып. 3 (62), Т. 2.С. 208–214 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

32. Редчиц Д. А., Белоусова Т. П., Выгоднер И. В., Ляхович Т. П., Моисеенко С. В. Автоматизированный препроцессор для задач вычислительной аэродинамики. *Региональный межвузовский сборник научных работ.* 2018. Вып. 4 (117). С. 61–71.

33. Тарасов С. В., Редчиц Д. А, Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Математическое моделирование турбулентного обтекания симметричных и несимметричных профилей. *Вестник Херсонского национального технического*

университета. 2018. Вып. 3 (66), Т. 1. С. 171–177 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

34. Redchyts D. O., Gourjii A. A., Moiseienko S. V., Bilousova T. P. Aerodynamics of the turbulent flow around a multi-element airfoil in cruse configuration and in takeoff and landing configuration. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2019. Vol. 5, No 7 (101). P. 36–41 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

35. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Чашина И. Б., Выгоднер И. В. Обтекание цилиндра и аэродинамического профиля с учетом ламинарно-турбулентного перехода *Вестник Днепровского национального университета.* 2019. Вып. 23, Т. 27. С. 77–84 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

36. Redchyts D. O., Shkvar E. A. Moiseienko S. V. Control of Karman Vortex Street by using Plasma Actuators. *Fluid Dynamics and Materials Processing.* 2019. Vol. 15, No 5. P. 509–525 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

37. Redchyts D. O., Shkvar E. A. Moiseienko S. V. Computational Simulation of Turbulent Flow Around Tractor-Trailers. *Fluid Dynamics and Materials Processing.* 2020. Vol. 16, No 1. P. 91–103 (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

38. Redchyts D., Zinchenko A., Prykhodko O. Numerical simulation of Darrieus and Savonius wind turbine aerodynamics. *International Congress on Industrial and Applied Mathematics*: proc. of 6th international congress (Zurich, Switzerland, 16-20 July 2007). Zurich. 2007. С. 134–138.

39. Redchyts D. Numerical simulation of wind turbine rotors aerodynamics. PAMM. 2008. Vol. 7, No 1. P. 2100049–2100050.

40. Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарных турбулентных отрывных течений при обтекании роторов Дарье и Савониуса. *Комп'ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 30 вересня-1 жовтня 2008 р.). Київ. 2008. С. 43.

41. Редчиц Д. А. Математическое моделирование обтекания трехэлементного профиля 30P30N. *Комп'ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 29-30 вересня 2010 р.). Київ. 2010. С. 34–35.

42. Дзензерский В. А., Хачапуридзе Н. М., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Численное моделирование турбулентного обтекания многоэлементного профиля. *Методы дискретных особенностей в задачах матфизики:* зб. тез XV международного симпозиума (м. Херсон, 13-18 червня 2011 р.). Херсон. 2011. С. 167–170.

43. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Пахомова Ю. А. Численное моделирование управления отрывом потока при обтекании цилиндра с помощью плазменных актуаторов. *Тараповские чтения:* зб. тез міжнародної конференції (м. Харків, 30-31 травня 2012 р.). Харків. 2012. С. 92.

44. Редчиц Д. А. Управление отрывом потока воздуха с помощью плазменных актуаторов. *Комп'ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 1-2 жовтня 2012 р.). Київ. 2012. С. 22–23.

45. Редчиц Д. А. Математическое моделирование диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу:* матеріали IV міжнародної наукової конференції (м. Дніпропетровськ, 1-3 листопада 2012 р.). Дніпропетровськ. 2012. С. 80–83.

46. Дзензерский В. А., Моисеенко С. В., Редчиц Д. А., Хачапуридзе Н. М. Моделирование диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора в подвижной сплошной среде. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики:* труды XVI международного симпозиума (м. Херсон, 8-16 червня 2013 р.). Херсон. 2013. С. 151–154.

47. Редчиц Д. А., Щеглов Г. А, Марчевский И. К. Математическое моделирование аэродинамики ротора вертикально-осевой ветроэнергетической установки. *Сучасні енергетичні установки на транспорті і технології та обладнання для їх обслуговування:* матеріали IV всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Херсон, 9-11 жовтня 2013 р.). Херсон. 2013. С. 307–311.

48. Редчиц Д. А., Полевой О. Б. Применение уравнений Навье-Стокса для решения прикладных задач аэрогидродинамики. *П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені ак. Кравчука:*зб. тез доповідей (м. Київ, 15-17 травня 2014 р.). Київ. 2014. С. 262.

49. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Пахомова Ю. А. Математическое моделирование турбулентного обтекания трехэлементного профиля 30P30N. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез доповідей шостої міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 27-29 травня 2014 р.). Херсон. 2014. С. 208–211.

50. Редчиц Д. А. Компьютерное моделирование гидромеханики слабоионизированной плазмы. *Комп'ютерна гідромеханіка:* зб. тез доповідей науково-практичної конференції (м. Київ, 30 вересня-1 жовтня 2014 р.). Київ. 2014. С. 31–32.

51. Редчиц Д. А. Численно-аналитическая модель диэлектрического барьерного разряда. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу:* матеріали V міжнародної наукової конференції (м. Дніпропетровськ, 6-8 листопада 2014 р.). Дніпропетровськ. 2014. С. 77–80.

52. Редчиц Д. А. Численное моделирование плазмы диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування:* матеріали V всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Херсон, 1-3 жовтня 2014 р.). Херсон. 2014. С. 107–111.

53. Редчиц Д. А. Математическое моделирование слабоионизированной плазмы диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Сучасний стан та*

проблеми двигунобудування: матеріали міжнародної науково-технічної конференції (м. Миколаїв, 19-21 листопада 2014 р.). Миколаїв. 2014. С. 247–250.

54. Редчиц Д. А., Полевой О. Б. Математическое моделирование сопряженных задач вычислительной аэродинамики. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* міжнародна науково-практична конференція (м. Херсон, 26–28 травня 2015 р.). Херсон. 2015. С. 217–220.

55. Редчиц Д. А. Компьютерное моделирование обтекания профиля транспортного средства вблизи экрана турбулентным потоком. *Информационные технологии в металлургии и машиностроении:* зб. тез научно-технической конференции (м. Дніпро, 29-31 березня 2016 р.). Дніпро. 2016. С. 37.

56. Редчиц Д. А. Математическое моделирование обтекания транспортного средства вблизи экрана. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 24-26 травня 2016 р.). Херсон. 2016. С. 270–273.

57. Редчиц Д. А. Численное моделирование физических процессов при турбулентном обтекании транспортного средства. *Диференціальні рівняння та проблеми аерогідромеханіки й тепломасопереносу:* зб. тез доповідей всеукраїнської наукової конференції (м. Дніпро, 28-30 вересня 2016 р.). Дніпро. 2016. С. 86–87.

58. Редчиц Д. А. Компьютерное моделирование обтекания турбулентным потоком транспортного средства вблизи экрана. *Комп'ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 29-30 вересня 2016 р.). Київ. 2016. С. 52–53.

59. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Численное моделирование процессов аэродинамики J-лопасти ротора Дарье. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 23-25 травня 2017 р.). Херсон. 2017. С. 241–243.

60. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Аэродинамика роторов вертикально-осевых ветроэнергетических установок. *Безпека життєдіяльності на транспорті і виробництві – освіта, наука, практика:* зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 14-16 вересня 2017 р.). Херсон. 2017. С. 368–373.

61. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Численное моделирование аэродинамики профилей симметричной и несимметричной формы. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 29-31 травня 2018 р.). Херсон. 2018. С. 258–260.

62. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Математическое моделирование аэродинамики симметричных и несимметричных профилей. *Міжнародна конференція з математичного моделювання:* матеріали XIX міжнародної конференції (м. Херсон, 17-21 вересня 2018 р.). Херсон. 2018. С. 31.

63. Редчиц Д. А. Применение методов математического моделирования динамики и аэродинамики к проектированию ветроэнергетических установок. *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування:* матеріали всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Херсон, 13-14 вересня 2018 р.). Херсон. 2018. С. 233–238.

64. Редчиц Д. А., Тарасов С. В. Компьютерное моделирование аэродинамики симметричных и несимметричных профилей. *Комп'ютерна гідромеханіка:* зб. тез науково-практичної конференції (м. Київ, 26-27 вересня 2018 р.). Київ. 2018. С. 48–49.

65. Редчиц Д. А., Тучина У. Н., Моисеенко С. В. Численное моделирование нестационарных потоков холодной плазмы. *Космические технологии: настоящее и будущее:* зб. тезисов 7-й международной конференции (м. Дніпро, 21-24 травня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 66.

66. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Математическое моделирование процессов ламинарно-турбулентного перехода

в задачах внешней аэродинамики. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті.* зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 28-30 травня 2019 р.). Херсон. 2019. С. 258–260.

67. Тарасов С. В., Редчиц Д. А, Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Аэродинамика ветроэнергетической установки с роторами Дарье и Савониуса. *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування:* матеріали міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 12-13 вересня 2019 р.). Херсон. 2019. С. 141.

68. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в задачах аэрогидромеханики. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій:* тези міжнародної науково-технічної конференції пам’яті академіка В. І. Моссаковського (м. Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 276–277.

69. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Математическое моделирование турбулентного обтекания цилиндра и аэродинамического профиля с учетом ламинарно-турбулентного перехода. *Міжнародна конференція з математичного моделювання:* матеріали XX міжнародної конференції (м. Херсон, 16-20 вересня 2019 р.). Херсон. 2019. С. 98.

ANNOTATION

Redchyts D. O. Unsteady coupled problems of the dynamics of a liquid, gas, and low-temperature plasma. – Qualification scientific work with the manuscript copyright.

The dissertation for the degree of Doctor of physical-mathematical sciences, specialty 01.02.05 "Mechanics of a liquid, gas and plasma". – Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

The dissertation is devoted to the study of unsteady processes of the dynamics of a liquid, gas, and low-temperature plasma in solving the coupled problems. The physical features of a wide class of separated flows were studied using the developed specialized package of computational aerodynamics and electrodynamics.

The aim of this work is to construct a mathematical model for describing the parameters of unsteady laminar, transient, and turbulent air flows in the approximation of a viscous incompressible fluid and a low-temperature plasma dielectric barrier discharge.

To achieve this aim, a new physically based mathematical model of the development of aerodynamics, electrodynamics, particle dynamics and chemical kinetics processes over time was developed to model the interaction features of a continuous viscous medium with plasma of a dielectric barrier discharge.

The analysis of the task is based on the solution of the Navier-Stokes equations closed by the differential turbulence model, as well as the model of the laminar-turbulent transition, and equations describing the behavior of a low-temperature plasma.

In the dissertation, two approaches were used to simulate turbulence. The first one is based on simulation the flow of a viscous incompressible fluid based on unsteady Reynolds averaged Navier-Stokes equations using Spalart-Allmaras (SA) differential turbulence models and its modifications SARC, SALSA. The second is a hybrid approach based on simulation of delayed detached eddy simulation (DDES). For the first time, the full γ-Re_θ laminar-turbulent transition model is adapted for use

with the Spalart-Allmaras, SARC and SALSA turbulence models. New relations are proposed for determining the values of the specific dissipation rate and turbulent viscosity in the undisturbed flow.

A new mathematical model of a low-temperature non-equilibrium ideal plasma of a dielectric barrier discharge in air is developed. The drift-diffusion approach was chosen as the base for describing the spatial-temporal structure, including unsteady electrodynamics processes, kinetic phenomena, and plasma-chemical reactions. The model takes into account electronically excited and metastable states of nitrogen and oxygen molecules, oxygen atoms, electrons, as well as positive and negative ions, a total of 14 particles and 97 plasma-chemical reactions, including surface processes. Chemical reactions include the processes of dissociation, ionization of molecules by electron impact from the ground state, stepwise, associative and photoionization, excitation of molecules, ionization of excited (metastable) molecules, electron attachment and detachment, recombination of electrons and positive ions, chemical transformations of neutral atoms, molecules and ions, as well as processes of secondary electron emission from an open electrode and a dielectric surface.

The main feature of the developed numerical-analytical model is the use of a rational number of equations to describe all the main unsteady parameters of a dielectric barrier discharge in air. The selected 14 types of particles provide high accuracy of mathematical modeling of the main plasma-chemical reactions, including both surface processes and transient phenomena in space (development of a streamer and electronic avalanches). The developed new numerical-analytical model of the dielectric barrier discharge allows qualitatively and quantitatively reproducing the processes of the dielectric barrier discharge during the operation of the plasma actuator and is designed to adequately reproduce the Lorentz force acting on the turbulent flow of partially ionized air in a wide range of amplitudes and frequencies of the applied voltage, as well as parameters and dielectric surface properties.

The system of initial equations of aerodynamics was recorded in relation to an arbitrary curvilinear coordinate system on moving grids. The pressure and velocity fields were reconciled using the artificial compressibility method modified to calculate unsteady tasks. Integration of the system of initial equations was carried out numerically using the control volume method. Upwind Rogers-Kwak approximation based on the third order Roe scheme was used for convective flows. A modification of the first and third order Rogers-Kwak scheme for convective terms is proposed. The main difference between the Rogers-Kwak modified scheme and the classical one is that the flows are calculated using metric coefficients on the faces of the control volume from the values of the hydrodynamic parameters at the points. In the models of turbulence and laminar-turbulent transition, the TVD scheme with a third-order ISNAS flow limiter was used to approximate the convective terms. An implicit algorithm for the modified first- and third-order Rogers-Kwak scheme is constructed.

A new mutually agreed system of initial equations of low-temperature plasma, consisting of an equation for the electric potential and equations of particle dynamics, was written in an arbitrary curvilinear coordinate system.

For the first time, an asymmetric finite-volume approximation of the second derivatives for the electric potential is introduced in the equations for the dynamics of charged plasma particles in order to preserve the physical features of the advection process. The approximation is made taking into account the asymmetrically "filtered" value of the density of charged plasma particles, since the formal mathematical approximation of the operator using symmetric finite-difference relations (as for diffusion terms) leads to the loss of physical features of the process of transfer of a stream of charged particles in continuous media.

A numerical-analytical modification of the Poisson equation for the electric field in a curvilinear coordinate system is developed to directly identify the electric potential operators, instead of indirectly influencing the density of charged particles in the source term using the upwind approximation of the density of charged particles in the second derivatives for the electric potential.

For unsteady equations of plasma dynamics, an implicit numerical algorithm with pseudo-time iteration is developed, which is based on a finite-volume approach. The equation for the electrostatic potential with sources was solved using the generalized minimal residual method (GMRES) with incomplete LU (ILU) preconditioning. In unsteady equations for the density of plasma particles, the drift (advective) derivatives were approximated using the TVD scheme with the MinMod limit function. A single implicit numerical algorithm for the efficient solution of a nonuniform system of initial equations is implemented.

The physical features of the flow around a flat plate, a circular cylinder and an aerodynamic airfoil on the basis of the numerical solution of the unsteady Navier-Stokes equations of an incompressible fluid using various turbulence models (SA, SARC and SALSA) and the γ-Re_θ model of the laminar-turbulent transition are revealed.

The calculation results of the flow around a cylinder were compared using and without the γ-Re_θ laminar-turbulent transition model. It was that at low Reynolds numbers, when the flow around the cylinder is laminar in nature, and the turbulent wake using the turbulence model SA and SARC leads to the development of a turbulent boundary layer on the cylinder and, as a consequence, to a change in the position of the separation point. The incorrect position of the separation point affects the pressure distribution in the bottom of the cylinder and the integrated aerodynamic characteristics. It was established that the use of the transition model allows to adequately reproduce the laminar separation near the leading edge of the NACA 4412 airfoil with its subsequent attachment. It is shown that the use of the γ-Re_θ differential the laminar-turbulent transition model qualitatively and quantitatively improves the results of numerical simulation.

The numerical study of the physical features of the turbulent flow around the J-airfoil for an arbitrary angle of attack is carried out. The results of computational experiments showed that the use of the DDES approach leads to the formation of a smaller separation zone with a series of small vortices of higher intensity. The approach based on the delayed detached eddy simulation (DDES) better reproduces the unsteady physical features that occur when the J-airfoil is flowing. Comprehensive studies of the aerodynamics of symmetric and asymmetric airfoils with closed and open contours are carried out. For the first time, the influence of the closure degree of the J-airfoil on the coefficients of drag and lift force, as well as on the flow structure around as a whole, was revealed.

The results of the turbulent flow calculation of a multi-element airfoil are presented in a wide range of angles of attack. The physical features of the flow structure during flow around the 30P30N multi-element airfoil are highlighted. It was found that with increasing angle of attack, the size of the separation zone on the inner surface of the slat of the multi-element airfoil decrease, and remain almost constant in the tail of the main airfoil. On the basis of the developed mathematical model and a specialized package of computational aerodynamics for solving of conjugate tasks, the dynamics and aerodynamics of the three-element airfoil 30P30N are shown when it is opened from a cruising configuration and transferred to a landing.

The turbulent flow around the vehicle contour near the screen is calculated. The physical features of the structure of the flow around the vehicle are identified and a comparative analysis of the integrated and distributed aerodynamic characteristics of the vehicle contour is performed with experimental and calculated data. The applicability of the developed specialized CFD package to the tasks of aerodynamics of ground transport is shown.

A series of numerical calculations of the unsteady flow of a vertical-axis wind turbine (VAWT) with Darrieus and Savonius rotors by a turbulent wind flow was carried out. It is shown that the main contribution to the torque of the vertical-axis wind turbine is due to Darrieus rotor, the Savonius rotor accounts for only a few percent of the total moment produced by the plant. It was first established that the presence of a Savonius rotor in the central part of the vertical-axis wind turbine leads to a significant shading of the leeward portion of the trajectory of the Darrieus rotor blade and to a decrease in the generated torque.

A series of computational experiments were conducted to simulate the unsteady processes of a low-temperature nonequilibrium plasma of a dielectric barrier discharge, as well as its influence on the control of the air flow structure. A detailed study of the stages of formation, development, and quenching of a cathode-directed streamer for real configurations of plasma actuators based on the developed mathematical model has been carried out. The unsteady plasma characteristics in the region above the dielectric surface are analyzed, including the distribution of particle density, electric potential, and components of the Lorentz force.

For the first time, the effect of charged plasma particles on the formation of the Lorentz force over time was established. It was shown that the main contribution to its formation in the positive period is made by oxygen ions O_4^+. For negative half-period of the oscillation of the applied voltage, the main contribution is due to negative oxygen ions, in particular O^-.

Parametric studies of the geometric parameters of plasma actuators and their influence on the generated air velocity are carried out. It is shown that with an increase in the amplitude of the applied voltage, the generated air velocity increases, which is asymptotic. A decrease in the thickness of the dielectric leads to an increase in the generated air velocity.

For the first time, the occurrence of a driving force as a result of the action of four plasma actuators based on a dielectric barrier discharge on a cylinder in air at rest is demonstrated. The possibility of decreasing the cylinder drag coefficient using plasma actuators by suppressing the Karman vortex street is shown.

Keywords: flow structure control, dielectric barrier discharge, low-temperature nonequilibrium plasma, Navier-Stokes equations, turbulence simulation.

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження

Обчислювальна гідродинаміка використовується в багатьох галузях промисловості як невід'ємна частина процесу проектування нової техніки, що обумовлено меншою вартістю чисельних експериментів у порівнянні з натурними. Основна задача CFD – відтворення реальних фізичних процесів з максимальним ступенем вірогідності. За рахунок цього вдається глибше зрозуміти процеси, що відбуваються, виробити рекомендації з аеродинамічних форм проектованого пристрою, близькими до оптимальних. Подібні розрахунки дозволяють одержати докладні характеристики пристрою задовго до його виготовлення та впровадження, суттєво скорочуючи витрати на дорогі продувки в аеродинамічних трубах, які присутні при стандартних методах проектування. Окремою проблемою є комп'ютерна візуалізація одержуваного розв'язку, необхідна не тільки для отримання окремих характеристик, але й для розуміння загальної картини течії.

Зв’язані задачі являють собою найбільш складний рівень математичного моделювання обчислювальної аеродинаміки. Крім механіки рідини та газу тут необхідно враховувати динаміку твердого тіла, багатофазних середовищ, електродинаміку, хімічну кінетику та інше. Разом з тим, саме результати розв’язку зв’язаних задач є найбільш затребуваними у промисловості.

За останні два-три десятиліття обчислювальна аеродинаміка добилася значного прогресу в розв'язку класичних задач механіки рідини та газу. Основу становить чисельний розв'язок нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса, як найбільш повної моделі текучих суцільних середовищ. Осереднені за Рейнольдсом або за Фавром рівняння Нав'є-Стокса із сучасними диференціальними моделями турбулентності дозволяють провести чисельну реконструкцію поля течії та розрахувати інтегральні аеродинамічні характеристики з високим ступенем вірогідності при прийнятних витратах комп'ютерних ресурсів.

Дещо інша ситуація склалася для зв'язаних задач динаміки рідини, газу та плазми, які являють собою основну область інтересів розвитку сучасних інноваційних технологій. Даний клас задач вимагає спільного математичного опису динаміки частинок рідини та газу, фізико-хімічних реакцій, електромагнітного впливу на суцільне середовище, динаміки іонів і електронів, врахування взаємодії між частинками плазми та несучого середовища, а також з обтічною поверхнею.

Слід зазначити, що на сьогоднішній день відсутній єдиний науково-обґрунтований методологічний підхід до створення математичних моделей зв'язаних задач динаміки рідини, газу та плазми. Питання створення адекватних і ефективних математичних моделей зв'язаних задач рідини, газу та плазми до теперішнього часу є відкритим.

Спільне дослідження динаміки та аеродинаміки рухомих тіл являє собою класичний напрям досліджень, які знаходять застосування в вітроенергетиці, авіації, наземному транспорті.

Вимоги щодо фізичної достовірності отриманих чисельних результатів в широкому діапазоні параметрів течій призводять до необхідності модифікації відомих алгоритмів розв'язку систем нелінійних диференціальних рівнянь, а також до вдосконалення моделей турбулентності, включаючи ламінарно-турбулентний перехід.

Керування структурою потоку відноситься до зв'язаних задач і є актуальною проблемою при проектуванні нової авіаційної та ракетно-космічної техніки, двигуно- і турбінобудування, вітроенергетики. Існуючі методи керування відривом потоку, як правило, є енергозатратними та вимагають змін у конструкції обтічного тіла (охолодження поверхні, перфорування поверхні, встановлення інтерцепторів або додаткових рухливих елементів). У зв'язку з цим, розробка ефективних і малозатратних методів запобігання відриву потоку належить до найсучасніших напрямків фундаментальної та прикладної аеродинаміки.

Запобігання відриву потоку за допомогою ефективних і малозатратних методів дозволить поліпшити аеродинамічні характеристики рухомих тіл різного призначення. Класичні методи керування відривом потоку включають тепло- і масообмін з обтічної поверхнею, установку додаткових стаціонарних або рухомих елементів конструкції.

До перспективних методів керування структурою течії належить створення частково іонізованого потоку із застосуванням плазмових актуаторів (ПА) [186, 187, 191]. Фізичні основи керування потоком повітря за допомогою плазми є маловивченими. Види плазми, що генеруються, різноманітні. Дослідження в цій наукової галузі ведуться у США, Великобританії, Франції, Японії, Китаї, РФ, Україні. Низький рівень споживання електроенергії, відсутність рухливих елементів є безумовною перевагою плазмових актуаторів. Застосування слабо іонізованої плазми для керування відривом потоку є новим розділом в аеродинаміці і відноситься до перспективних технологій.

Оскільки плазмові актуатори вбудовані в поверхню тіла, вони не створюють додаткової перешкоди, іонізують зовнішній потік і за рахунок сили Лоренца, що виникає, дозволяють досягати бажану структуру течії. Наявні експериментальні дані закордонних авторів підтверджують високу ефективність даного способу керування відривом потоку.

Плазмові актуатори успішно використовувалися в різних пристроях з керування потоком, таких як породження нестійкості примежового шару на гострому конусі при числі Маху 3.5 [186], збільшення підйомної сили на елементах крила [187], керування потоком на погано обтічному тілі [254], зниження опору [154], нестаціонарне генерування вихорів [191], керування відривом потоку з передньої крайки профілю [198], керування примежовим шаром [150].

Інтерес до плазмових актуаторів обумовлений, з одного боку, простотою використання пристроїв для створення діелектричного бар'єрного розряду (ДБР), з іншого боку – можливістю генерування високої напруги на борту літака або іншого транспортного засобу компактними і високоефективними генераторами.

Крім того, існують ПА на основі коронного розряду. Однак вони менш ефективні у порівнянні із ДБР через можливість пробою повітря та різкого зниження продуктивності ПА. Діелектричний бар'єрний і коронний розряди призводять до утворення низькотемпературної нерівноважної плазми [175, 176, 224], хоча принципи роботи цих пристроїв дещо відрізняються між собою [235].

Використання ПА для керування потоком має ряд переваг перед механічними системами. Вони цілком електронні, прості у своїй конструкції, легкі, не мають рухливих частин, мають низьку інерційність, і можливість інтеграції в поверхню, низький час спрацьовування, працюють у широкому частотному діапазоні, не викликаючи резонансу, а також можуть розташовуватися на дуже тонких поверхнях [264, 309]. Але при цьому електричний розряд, що виникає, повинен впливати на повітря поблизу аеродинамічних поверхонь. Крім того, плазмові актуатори при впливі на повітряний потік дозволяють безпосередньо трансформувати електричну енергію в кінетичну енергію потоку.

Застосування плазмових актуаторов на основі діелектричного бар'єрного розряду належить до сучасних і перспективних способів зміни структури течії [154, 253, 254, 277]. ДБР відрізняється стійкою роботою при атмосферному тиску без згортання розряду в стислу дугу на відміну від коронного розряду [162, 243, 252].

Незважаючи на численні експериментальні дослідження впливу плазми на навколишнє повітря, відсутня загальна теорія взаємодії, яка ґрунтувалася б на плазмових та аеродинамічних процесах. Даний факт пояснюється відсутністю достовірних результатів багатьох хімічних реакцій, що виникають в результаті впливу ДБР на середовище, а також швидкості їх протікання. Основні методи вимірювання плазми забезпечують непряму інформацію про ДБР. Експериментальні підходи не дозволяють отримувати детальну інформацію про розподіли електричного поля та густини частинок плазми.

Вивченню низькотемпературної нерівноважної плазми ДБР при роботі плазмових актуаторов присвячено ряд експериментальних [157, 192, 193, 197, 198, 199] і теоретичних робіт [149, 165, 168 175, 176, 224]. Дослідження проводилися у двох основних напрямах: перший – вивчення фізики одиночного ДБР при роботі плазмового актуатора, а другий – оптимізація плазмових актуаторів для збільшення їх ефективності з керування дозвуковим потоком повітря.

Значні експериментальні результати з вивчення плазми діелектричного бар'єрного розряду були отримані T. Corke, M. Post [186, 187] в Університеті Нотр-Дама (США), C. Enloe, T. Mclaughlin, R. VanDyken, J. Fuscher [194] в Академії ВПС США, T. Abe, M. Takagaki [149] в Інституті космічних досліджень (Японія), M. Forte, J. Jolibois, E. Moreau [199] в Університеті Пуатьє (Франція), а також М. Нудновой, Н. Александровим, А. Стариковським [247] у Московському фізико-технічному інституті (РФ).

Удосконалювання існуючих конструкцій плазмових актуаторів та їх роботи на основі діелектричного бар'єрного розряду вимагає повного аналізу всієї сукупності фізико-хімічних процесів, що протікають, включаючи як макроскопічні характеристики ДБР, так і структуру окремого мікророзряду, а також склад продуктів плазмохімічних реакцій.

Для ефективного керування відривом потоку необхідно враховувати геометричні й експлуатаційні характеристики плазмових актуаторів [199]. До них відносяться: розташування актуатора на поверхні обтічного тіла, орієнтація, геометричні розміри, відносний зсув ізольованого та відкритого електродів, прикладена напруга та її частота. Вплив перерахованих вище параметрів на роботу плазмових актуаторів перетворює оптимізацію даних пристроїв на основі експериментальних досліджень у досить трудомістку, складну і дорогу задачу. Застосування обчислювальної гідродинаміки дає можливість істотно заощадити часові та фінансові витрати з оптимізації таких комплексних систем керування потоком.

До того ж, невеликі розміри плазмової області, а також швидкоплинність електродинамічних, хімічних і кінетичних процесів (електронна лавина, стример) при ДБР не дозволяють проводити прямі вимірювання густини заряджених частинок, а також нейтральних атомів і молекул. Тому, важливу роль в дослідженні таких розрядів відіграє чисельне моделювання.

У зв'язку зі складністю фізичних процесів, основні проблеми в теоретичному аналізі та чисельному моделюванні ДБР при роботі ПА та його впливі на навколишнє середовище є відсутність адекватної фізичної та математичної моделі розвитку ДБР у повітрі. Цей факт не дозволяє правильно оцінити імпульс, індукований ДБР, що входить у рівняння Нав'є-Стокса як джерельний член для моделювання аеродинамічного впливу ПА на навколишнє повітря.

Проблема розуміння та моделювання ДБР при роботі ПА пов'язана в першу чергу з неможливістю повного опису фізики розряду у зв'язку зі складністю і різноманіттям фізико-хімічних процесів. Спрощені моделі ДБР не дозволяють правильно оцінити керуючий імпульс від електромагнітного поля в потоці повітря. Ці моделі спираються на емпіричні константи динаміки частково іонізованого потоку і придатні тільки для обмеженого класу явищ.

Повна чисельна реконструкція всього поля нестаціонарної течії спільно з електродинамічними, електрохімічними процесами дозволяє отримати унікальну інформацію про досліджувані процеси. Але максимально точне врахування всіх факторів, включаючи другорядні, призводить до такої постановки задачі, що потребує розв’язку декількох сотень диференціальних та інтегральних рівнянь. Незважаючи на істотний прогрес у чисельному моделюванні, математичні моделі такого рівня фактично непридатні для реалізації в рамках комп'ютерних технологій і є основою суто теоретичного аналізу.

Розробка працездатної моделі для опису процесів, досліджуваних у широкому діапазоні визначальних параметрів, є актуальною і поки що не вирішеною проблемою в даній галузі знань. Математична модель, що розробляється, з одного боку, повинна враховувати основні фізико-хімічні процеси, що відбуваються, а з іншого боку, бути достатньо компактною для реалізації на сучасній комп’ютерній техніці.

Аналіз наукової проблеми показав, що для коректного моделювання ДБР необхідно враховувати наступні ключові аспекти: повний цикл коливання прикладеної до електродів напруги; врахування стримерної та таунсендовської фаз; фотоіонізацію повітря ультрафіолетовим випромінюванням в області розряду; хімічну кінетику розряду; осадження іонів та електронів на діелектричну поверхню, а також емісію електронів з відкритого електрода; залежність коефіцієнтів хімічних реакцій (іонізації, прилипання та ін.), дифузії та рухливості від локальних значень напруженості електричного поля.

Додаткову складність при моделюванні ДБР пов'язано з характерними масштабами часу і довжини. Так, для ДБР можна виділити три незалежні часові масштаби. Найкоротший масштаб часу порядку 10^{-8} с, пов'язаний з утворенням мікророзрядів і перерозподілом зарядів в плазмі. Другий масштаб часу характеризує роботу самого плазмового актуатора. Він визначається частотою прикладеної напруги. Цей масштаб часу порядку 10^{-4} с (для частоти 10 кГц), який приблизно в 10^{4} раз більше, ніж масштаб часу формування мікророзрядів. Третій масштаб часу порядку 10^{-2} с, пов'язаний з аеродинамічними процесами в повітрі.

Така відмінність у часових масштабах дає право вважати, що аеродинамічні процеси не впливають на хімічну кінетику і електродинамічну взаємодію. Тому математична модель повинна мати можливість розраховувати динаміку і кінетику плазми як на рівні окремого мікророзряду (час – порядку наносекунд, а довжина – порядку мікрон), так і на макроскопічному рівні (час – близько мілісекунд, а довжина – близько сантиметрів).

Окрему проблему становить створення ефективного, надійного та ретельно верифікованого програмного забезпечення для розв’язку зв’язаних задач динаміки рідини, газу та низькотемпературної плазми.

Сучасні комерційні пакети програм обчислювальної аеродинаміки досить якісно відтворюють стаціонарні турбулентні течії нестисливого середовища. Однак вони не враховують більшість явищ, необхідних для моделювання динаміки частково іонізованого потоку, виникнення і перенос електронів та іонів, фотоіонізацію, електрохімічні процеси. Крім того, необхідність моделювання нестаціонарних процесів накладає додаткові обмеження на використовувані чисельні алгоритми.

Сучасні тенденції в проектуванні складної техніки пов'язані із застосуванням повних математичних моделей механіки рідини та газу, заснованих на самих загальних фізичних законах (збереження маси, імпульсу, енергії), реологічних співвідношеннях, динаміці турбулентних вихорів. Такі моделі є, з математичної точки зору, складними системами нелінійних диференціальних рівнянь, для розв'язку яких потрібно використання потужних обчислювальних комплексів. Для створення таких моделей використовується практично весь апарат вищої математики – аналітична та диференціальна геометрія, математичний аналіз, тензорне числення, теорія рівнянь математичної фізики. Розв'язок таких систем створює якісно новий рівень проектування – проведення чисельних експериментів, що повністю відтворюють умови натурних експериментів.

Систему рівнянь Нав'є-Стокса, виведено в першій половині XIX століття, до сих пір є основою обчислювальної гідродинаміки. Рівняння Нав'є-Стокса, що використовують закони збереження маси, імпульсу, енергії в поєднанні з основними термодинамічними і реологічними законами, містять мінімальну кількість вихідних припущень, що робить їх найбільш повною й обґрунтованою системою рівнянь механіки рідини і газу. Саме рівняння Нав'є-Стокса (на відміну від рівнянь потенціалу та Ейлера) дозволяють відтворювати реальні фізичні процеси з необхідною точністю.

У той самий час з математичної точки зору вони становлять найскладнішу систему рівнянь математичної фізики, що застосовуються до вивчення реальних об'єктів. Для порівняння, рівняння Максвелла і Шредінгера, що становлять основу класичної електродинаміки і квантової механіки, є більш простими, що допускають аналітичні (точні) розв'язки. Для рівнянь Нав'є-Стокса ситуація зворотна, їх розв'язок можливий тільки на основі чисельного експерименту, тому що більшість течій, що зустрічаються на практиці, є нестаціонарними, тривимірними та турбулентними.

Характерною рисою зазначеної системи рівнянь є її нелінійність за наявності диференціальних доданків другого порядку з малим параметром. Хоча існуючий рівень обчислювальної техніки дозволяє використовувати повну постановку початково-крайової тривимірної задачі, реалізація в індустріальних додатках такого підходу залишається занадто трудомісткою.

Актуальною проблемою в сучасній обчислювальній гідродинаміці залишається можливість чисельного розв'язку двовимірних і тривимірних рівнянь Нав'є-Стокса для нестисливої рідини. Бурхливе зростання обчислювальної техніки в останнє десятиліття дозволило розв'язати за допомогою чисельних методів ряд практичних задач, однією з яких стало математичне моделювання процесів обтікання тіл, що перебувають у дозвуковому потоці.

Основна проблема в отриманні розв'язку нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини полягає в труднощах одночасного розв'язку рівнянь кількості руху й рівняння нерозривності. На першому етапі розвитку чисельних алгоритмів розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса для нестисливих течій частіше використовувалися змінні завихреність-функція течії [116]. Такий підхід має ряд переваг. Рівняння нестисливої рідини в змінних завихреність-функція течії за своєю структурою близьке до рівняння Пуассона, для якого розроблені ефективні чисельні методи розв'язку крайових задач. У цьому випадку необхідно вирішувати тільки одне рівняння переносу завихреності та рівняння Пуассона для функції течії з умовами Діріхле. Тиск визначається за результатами розрахунку функції течії наприкінці кожного кроку за часом. При розв'язку системи рівнянь у фізичних змінних необхідно вирішувати два рівняння кількості руху й одне рівняння для тиску з граничними умовами Неймана на частині межі. Тому перший підхід набагато економічніший, так як час розв'язку одного рівняння переносу завихреності значно менше, ніж час розв'язку рівнянь кількості руху. На основі даного підходу було вирішено велику кількість прикладних задач, але розрахунки просторових задач з використанням функції течії дуже складні.

Підвищення швидкодії та збільшення об'єму пам'яті комп'ютерів відкрило можливості розв'язку просторових задач. Двовимірні алгоритми чисельного розв'язку рівнянь Навье-Стокса в змінних завихреність-функція течії безпосередньо не узагальнюються на тривимірний випадок. Алгоритм розрахунків тривимірних течій нестисливої рідини на основі рівнянь Нав'є-Стокса, записаних щодо потенціалу швидкості і вектора завихреності, запропоновано у роботі [156]. Однак цей алгоритм через великий об'єм зайнятої пам'яті та необхідності розв'язку трьох рівнянь Пуассона на кожному кроці за часом не набув популярності.

Застосування фізичних змінних дозволяє вирішувати двовимірні та тривимірні задачі за єдиним алгоритмом. Більшість із існуючих пакетів прикладних програм розв'язку рівнянь Ейлера і Нав'є-Стокса були розроблені для авіаційної і ракетної галузей промисловості і тому націлені на розв'язок рівнянь стисливих потоків. Основні математичні проблеми при розв'язку рівняння Нав'є-Стокса нестисливої рідини пов'язані з різним типом диференціальних рівнянь для законів збереження маси та кількості руху. Однак методики, призначені для стисливих потоків, виявилися неефективними при прямому зниженні числа Маху. Це пов'язано з «жорсткістю» вихідних рівнянь для низькошвидкісних течій внаслідок значних відмінностей у характерних часах конвективного переносу та поширення акустичних збурень. Різні способи подолання зазначених труднощів пов'язані з використанням для визначення тиску спеціального рівняння Пуассона [7, 209], рівнянь для поправок [7, 34], різних штрафних функцій [140], доповненням рівняння нерозривності нестаціонарним членом [11], регуляризацією матриці коефіцієнтів при похідних за часом [8, 14, 30, 119, 172, 173].

При розв'язку рівнянь нестисливої рідини у фізичних змінних застосовувався метод маркерів і комірок (MAC) [181, 182, 209], алгоритм SIMPLE [34, 177, 250], метод штучної стисливості [184], останнім часом значний прогрес у підвищенні ефективності чисельних алгоритмів досягнуто при використанні локального передзумовлювання [305, 314].

Метод штучної стисливості є розумний компроміс між зазначеними вище підходами. З одного боку, за рахунок додавання до рівняння нерозривності похідної тиску за часом вихідна система рівнянь приводиться до єдиного типу. Це дозволяє безпосередньо узгодити поля тиску і швидкості на одному часовому шарі. З іншого боку, даний метод не пов'язаний з обмеженнями за числом Маху на відміну від "чисто стисливого" підходу.

У разі нестисливих течій, збурення в хвилях тиску поширюються з нескінченною швидкістю. Коли застосовується метод штучної стисливості, хвилі мають кінцеву швидкість і їх величина залежить від вибору параметра штучної стисливості. У нестисливих течіях, поле тиску миттєво реагує на збурення в потоці. У разі штучної стисливості може спостерігатися відставання в часі впливу збурень на поле тиску. Поведінка примежових шарів у в’язких течіях дуже чутлива до градієнту тиску в напрямку потоку, особливо, в разі відриву примежового шару. При відриві хвилі тиску поширюються з скінченною швидкістю і змінюють локальний градієнт тиску, який, в свою чергу, впливає на розташування точки відриву. Коливання поля тиску поблизу точки відриву можуть привести до квазістаціонарного періодичного розв'язку.

Відома велика кількість робіт з чисельного інтегрування рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини на структурованих і неструктурованих, блочних, адаптивних і неадаптивних сітках з використанням методу скінченних різниць та скінченних об'ємів, різних підходів і різницевих схем [4, 6, 13, 15, 42, 144].

В останнє десятиліття в обчислювальній гідродинаміці набуло широкого поширення застосування неструктурованих сіток з трикутними комірками для двовимірних задач [152, 232]. Застосування таких сіток поблизу твердої поверхні стає неефективним через великі перекоси кутів трикутників. Також існують певні проблеми з підвищенням порядку апроксимації конвективних складових вище другого порядку. Основною перевагою використання неструктурованих сіток є порівняльна простота генерації розрахункових сіток в областях складної геометрії.

Альтернативним підходом до розв'язку цієї проблеми є застосування багатоблочного підходу [9, 274], який дозволяє будувати топологічно незалежні сітки навколо тіл складної геометрії. Широкий розвиток багатоблочні обчислювальні технології отримали на початку 90-х років минулого століття. Це пов'язано з необхідністю просторового розрахунку тіл складної геометрії. До переваг даного підходу можна віднести можливість використання високого порядку апроксимації конвективних доданків, що особливо важливо при розрахунку турбулентних примежових шарів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами

Дисертація виконувалася в рамках плану науково-дослідних робіт Інституту транспортних систем і технологій НАН України:

- № 1.3.6.13 «Розробка теорії і систем левітуючого транспорту та новітніх автономних інтегрованих систем енергопостачання з використанням сонячних і вітроенергоустановок і енергонакопичувачів» (№ ДР 0105U007964, 2006–2010 рр.);
- № 1.3.6.14 «Розвиток методів досліджень механіки транспортних засобів і енергетичних систем» (№ ДР 0107U001166, 2007–2011 рр.);
- № 1.3.6.15 «Розробка математичних моделей і дослідження наземних високошвидкісних магнітолевітуючих транспортних засобів і перспективних систем енергозабезпечення» (№ ДР 0110U006964, 2011–2015 рр.);
- № 1.3.6.16 «Розвиток методів механіки, аеродинаміки та дослідження систем керування транспортними й енергетичними об'єктами» (№ ДР 0112U000097, 2012–2016 рр.);
- № 1.3.6.17 «Розробка нових і вдосконалювання існуючих методів дослідження магнітолевітуючого транспорту та систем генерування і накопичення енергії» (№ ДР 0116U001281, 2016–2020 рр.);
- № 1.3.6.18 «Розробка нових і розвиток відомих методів досліджень механіки транспортних і енергетичних систем» (№ ДР 0116U008318, 2017–2021 рр.);

а також у рамках грантів Національної академії наук України для молодих учених і гранту Президента України для обдарованої молоді:

- «Дослідження процесів динаміки та аеродинаміки роторів вертикально-осьових вітроенергетичних установок» (№ ДР 0107U005999, 2007–2008 рр.);
- «Чисельне моделювання обтікання роторів вітроенергетичних установок» (№ ДР 0109U005808, 2009–2010 рр.);
- «Моделювання діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора в суцільному середовищі» (№ ДР 0111U008197, 2011–2012 рр.);
- «Керування відривом потоку повітря за допомогою плазмових актуаторів» (№ ДР 0113U005457, 2013–2014 рр.);
- «Дослідження аеродинаміки перспективних для України вітроенергетичних установок із плазмовими актуаторами» (згідно з розпорядженням Президента України № 349 від 27.11.2013 г., 2014 р.).

Мета і завдання дослідження

Мета роботи – побудова математичної моделі для опису параметрів нестаціонарних ламінарних, перехідних і турбулентних потоків повітря в наближенні в'язкої нестисливої рідини та низькотемпературної плазми діелектричного бар'єрного розряду при розв'язку зв’язаних задач.

Для досягнення поставленої мети були сформульовані наступні завдання:

– Побудувати зв’язану математичну модель аеродинаміки, електродинаміки, динаміки плазми та хімічної кінетики для дослідження взаємодії потоків повітря з низькотемпературною плазмою діелектричного бар'єрного розряду.

– Провести модифікацію відомих скінченно-об’ємних алгоритмів для побудови чисельно-аналітичної моделі, яка б дозволила якісно та кількісно відтворювати нестаціонарні процеси в зв’язаних задачах аеродинаміки та динаміки плазми.

– Розробити підхід для чисельного моделювання ламінарно-турбулентного переходу на основі повної γ-Re_θ моделі та однопараметричних диференціальних рівнянь переносу турбулентних характеристик.

– Створити спеціалізований пакет для розв’язку зв’язаних задач аеродинаміки, динаміки твердого тіла, електродинаміки та динаміки частинок плазми.

– Провести параметричні дослідження структури відривних течій поблизу симетричних та несиметричних профілів замкнутого і розімкнутому контурів, багатоелементного профілю в крейсерській та злітно-посадковій конфігурації, наземного транспортного засобу, а також вертикально-осьової вітроенергетичної установки з роторами Дар'є та Савоніуса.

– Розглянути механізми формування окремого мікророзряду та детально вивчити стадії зародження, розвитку і гасіння катодоспрямованого стримера при роботі плазмового актуатора в повітрі при атмосферному тиску.

– Провести дослідження нестаціонарних процесів низькотемпературної нерівноважної плазми діелектричного бар'єрного розряду при повному циклі гармонічних коливань зовнішнього електричного поля.

– Встановити вплив окремих типів заряджених частинок плазми на нестаціонарне формування сили Лоренца в частково іонізованому повітрі.

– Провести параметричні дослідження фізичних і геометричних характеристик плазмових актуаторів та їх вплив на генерацію потоків повітря.

– Показати можливість виникнення рушійної сили та зменшення сили лобового опору циліндра за рахунок керування структурою потоку за допомогою плазмових актуаторів.

Об'єкт дослідження – динаміка нестаціонарних ламінарних, перехідних та турбулентних потоків повітря та низькотемпературної плазми при обтіканні тіл довільної геометрії.

Предмет дослідження – властивості нестаціонарних процесів в ламінарних, перехідних і турбулентних потоках повітря та в низькотемпературній плазмі діелектричного бар'єрного розряду та відтворюваність цих процесів відповідними математичними моделями та чисельними методами.

Методи дослідження

В роботі для дослідження нестаціонарних ламінарних, перехідних і турбулентних потоків повітря і низькотемпературної плазми діелектричного бар'єрного розряду в зв’язаних задач використовується математичне моделювання та чисельні методи розв'язку задач математичної фізики.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

– Побудовано нову фізично обґрунтовану математичну модель низькотемпературної плазми діелектричного бар'єрного розряду в повітрі для опису її просторово-часової структури, котра якісно і кількісно відтворює нестаціонарні аеродинамічні, електродинамічні, плазмохімічні процеси та кінетичні явища при частковій іонізації повітря плазмовими актуаторами.

– Вперше повну γ-Re_{θ} модель ламінарно-турбулентного переходу адаптовано для використання спільно з моделями турбулентності Spalart-Allmaras, SARC і SALSA.

– Розроблено модифікацію схеми Rogers-Kwak першого і третього порядку точності для конвективних членів на основі якої побудовано неявний чисельний алгоритм розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса.

– Вперше виявлено вплив ступеня замкнутості J-профілю на його коефіцієнти сили лобового опору і підйомної сили, а також на структуру обтікання профілю в цілому.

– Встановлено, що наявність ротора Савоніуса в центральній частині вертикально-осьової вітроенергетичної установки призводить до зниження крутного моменту, що генерується ротором Дар'є.

– Вперше встановлено вплив структури частинок плазми та густини заряджених частинок на зміну сили Лоренца в часі. Показано, що основний внесок у формування сили Лоренца на позитивному напівперіоді коливання прикладеної напруги надають іони кисню O_4^+. На негативному напівперіоді основний внесок здійснюється за рахунок негативно заряджених іонів кисню, зокрема O^-.

– Вперше на основі чисельного моделювання показано можливість за допомогою плазмових актуаторів виникнення рушійної сили циліндра та зменшення коефіцієнта опору циліндра внаслідок придушення вихрової доріжки Кармана.

Практичне значення отриманих результатів полягає в наступному:

– Розроблено спеціалізований пакет обчислювальної аеродинаміки, електродинаміки та хімічної кінетики на основі рівнянь Нав'є-Стокса, Гельмгольца, електричного потенціалу, сучасних диференціальних моделей турбулентності і ламінарно-турбулентного переходу, котрий дозволяє ефективно моделювати стаціонарне і нестаціонарне ламінарне чи турбулентне обтікання тіл складної геометрії за наявності плазмових джерел.

– Отримано нові дані щодо зміни структури відривних течій, характеристик аеродинамічних профілів, нові результати з аеродинаміки вертикально-осьових (ВО) вітроенергетичних установок (ВЕУ) з роторами Дар'є і Савоніуса, вироблено рекомендації щодо підвищення енергетичної ефективності ВЕУ.

– Розроблені підходи та методики дозволяють відтворювати реальні аеродинамічні процеси обтікання тіл довільної форми і розраховувати їх аеродинамічні характеристики з урахуванням впливу низькотемпературної плазми.

Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням фундаментальних моделей механіки рідини, газу та низькотемпературної плазми; коректністю математичної постановки задач дослідження та застосуванням надійних чисельних методів для їх розв'язку; контрольованою точністю обчислень; якісним узгодженням результатів чисельних розрахунків з експериментальними та розрахунковими даними інших авторів, опублікованими у світовій науковій літературі.

Особистий внесок здобувача

Основні результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, формулювання постановок задач виконано спільно. Розробка алгоритмів і програм, чисельні розрахунки, порівняння отриманих результатів з експериментальними та розрахунковими даними виконані здобувачем.

Апробація матеріалів дисертації

Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на:

- Міжнародній науково-практичній конференції «Людина і космос» (м. Дніпропетровськ, 2007 р.);
- Міжнародній конференції «Передові космічні технології на благо людства» (м. Дніпропетровськ, 2007 р.);
- Міжнародній конференції «Dynamical System Modelling and Stability Investigation» (м. Київ, 2007, 2009, 2011 рр.);
- Міжнародних симпозіумах «Методи дискретних особливостей у задачах математичної фізики» (м. Херсон, 2007, 2009, 2011, 2013 рр.);
- Міжнародній школі-семінарі «Моделі й методи аеродинаміки» (м. Москва-Євпаторія, 2007 р.);
- International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM07) (м. Цюріх, Швейцарія, 2007 р.);
- Науково-технічних конференціях пам'яті академіка НАНУ В.І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища та міцності конструкцій» (м. Дніпропетровськ, 2007, м. Дніпро, 2019 рр.);
- Міжнародних наукових конференціях «Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу» (м. Дніпропетровськ, 2008, 2010, 2012, 2014 рр.);
- Міжнародних конгресах двигунобудівників (м. Рибаче, 2007, 2008, 2009 рр.);
- Міжнародних науково-практичних конференціях «Комп'ютерна гідромеханіка» (м. Київ, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018 рр.);
- V міжнародній науково-практичній конференції «Нетрадиційні й поновлювані джерела енергії як альтернатива первинних джерел енергії в регіоні» (м. Львов, 2009 р.);
- Міжнародних конференціях з математичного моделювання (м. Херсон, 2009–2019 рр.);

- X міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки» (м. Дніпродзержинськ, 2010 р.);
- Міжнародній конференції «Математичні проблеми технічної механіки» (м. Дніпропетровськ, 2011 р.);
- Міжнародній конференції «Сучасні проблеми математики і її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях» (м. Харків, 2011 р.);
- Міжнародних конференціях «Pontus Euxinus» (м. Севастополь, 2011, 2012, 2013 рр.);
- Наукових конференціях «Інформаційні технології в керуванні складними системами (м. Дніпропетровськ, 2011, 2013 рр.);
- Міжнародній науковій конференції «Імпульсні процеси в механіці суцільних середовищ» (м. Миколаїв, 2011 р.);
- XXIII Науково-технічній конференції з аеродинаміки (м. Москва, 2012 р.);
- Науково-практичній конференції з міжнародною участю «Комп'ютерне моделювання в наукомістких технологіях» (м. Харків, 2012 р.);
- Міжнародній конференції «Тараповські читання» (м. Харків, 2012 р.);
- Науково-технічних конференціях «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні» (м. Дніпро, 2013, 2015– 2019 рр.);
- Міжнародних науково-практичних конференціях «Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті» (м. Херсон, 2013 – 2019 рр.);
- Всеукраїнських науково-практичних конференціях «Сучасні енергетичні установки на транспорті та технології і устаткування для їхнього обслуговування» (м. Херсон, 2013 – 2019 рр.);
- Семінарі Херсонської державної морської академії (м. Херсон, 2013 р.);
- Щорічній науково-технічній конференції молодих учених і фахівців (м. Київ, 2014 р.);
- XV міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 2014 р.);

- Міжнародній науково-технічній конференції «Сучасний стан і проблеми двигунобудування» (м. Миколаїв, 2014 р.);
- Науково-практичній молодіжній конференції «Екологічні проблеми Азово-Чорноморського регіону та комплексне керування прибережною зоною» (м. Севастополь, 2014 р.);
- Всеукраїнській науковій конференції «Диференціальні рівняння та проблеми аерогідромеханіки й тепломасопереносу» (м. Дніпропетровськ, 2016 р.);
- Міжнародній науково-практичній конференції «Безпека життєдіяльності на транспорті й виробництві – освіта, наука, практика» (м. Херсон, 2017 р.);
- Всеукраїнській науково-практичній конференції «Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделюванні об'єктів, явищ і процесів» (м. Миколаїв, 2018 р.);
- Науково-технічній конференції «Космічні технології: сьогодення й майбутнє» (м. Дніпро, 2019 р.);
- Міжнародній науково-технічній конференції «Удосконалювання енергоустановок методами математичного й фізичного моделювання» (м. Харків, 2019 р.);
- Семінарі Інституту транспортних систем і технологій НАН України (м. Дніпро, 2019 р.);
- Семінарі Херсонського національного технічного університету (м. Херсон, 2019 р.);
- Семінарах Інституту гідромеханіки НАН України (м. Київ, 2019 р.).
- Семінарі Інституту технічної механіки НАН і ДКА України (м. Дніпро, 2020 р.);
- Семінарі Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара (м. Дніпро, 2020 р.);
- Семінарі Інституту проблем математичних машин і систем НАН України. (м. Київ, 2020 р.);

Окремі матеріали роботи доповідалися на засіданні Президії НАН України в 2010 р.

За результатами роботи автор був відзначений:

– стипендією НАН України для молодих учених (2008−2010, 2012–2013 рр.);

– стипендією Президента України для молодих учених (2010–2011 рр.);

– премією Верховної Ради України для молодих учених в області фундаментальних і прикладних досліджень і науково-технічних розробок (диплом № 871-VI, 2008 р.);

– премією Президента України для молодих учених (свідоцтво № 499, 2011 р.);

– премією Кабінету Міністрів України за особливі досягнення молоді в розвитку України (диплом № 420-р, 2013 р.);

– премією ім. М. К. Янгеля Національної академії наук України (2019 р.).

Публікації

Результати дисертації опубліковано у 69 роботах: 37 статтях, у тому числі в фахових вітчизняних та зарубіжних виданнях 25 [2, 3, 5–7, 9, 10, 12, 14–19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30, 34–37] (із них 9 [2, 3, 5, 7, 15, 17, 19, 24, 25] без співавторів), 32 роботи в збірниках наукових праць і тезах міжнародних конференцій [38–69]. З опублікованих по дисертації робіт налічується 31 [1, 2, 4–7, 9–16, 18–20, 22–26, 28–34, 36, 37] стаття у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз, у тому числі 4 [10, 34, 36, 37] – до Scopus та Web of Science.

Структура та обсяг дисертації

Дисертаційна робота складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел, двох додатків. Робота включає 312 сторінок основного тексту, 157 рисунків, 16 таблиць, 327 використаних джерел, усього 489 сторінок.

У *вступі* розкрито стан і суть наукової проблеми, обґрунтовано важливість і актуальність теми дисертації, викладено мету роботи і сформульовано основні положення, які виносяться на захист, а також її практичне значення і наукову новизну.

У *першому розділі* розглянуто методи керування відривом потоку, основні типи плазми, типи плазмових актуаторов та механізми керування потоком, а також ієрархію часу протікання плазмових та аеродинамічних процесів. Виконано огляд математичних моделей для опису розвитку плазми при роботі плазмового актуатора та її взаємодії з навколишнім середовищем. Крім того наведено огляд методів розв’язку рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини, методів створення дискретного простору, підходів до моделювання турбулентності, а також моделей і методів моделювання ламінарно-турбулентного переходу. Дається огляд в історичній ретроспективі вкладу світових вчених в розвиток питань, що обговорюються в дисертації.

У *другому розділі* наведено загальний математичний опис дослідження зв’язаних задач аеродинаміки, електродинаміки, динаміки плазми і хімічної кінетики для моделювання взаємодії суцільного середовища (нейтрального повітря) з плазмою діелектричного бар'єрного розряду. Математична модель базується на розв'язку нестаціонарних осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса замкнутих диференціальною моделлю турбулентності і рівнянь електродинаміки та динаміки, що описують поведінку низькотемпературної плазми діелектричного бар'єрного розряду.

У *третьому розділі* описуються чисельні методи для розв'язку зв’язаних задач динаміки рідини, газу та низькотемпературної плазми. Наведено вихідні рівняння аеродинаміки, електродинаміки і динаміки частинок плазми в криволінійній системі координат на рухомих сітках. Побудовано дискретні аналоги вихідних рівнянь, а також неявні схеми для забезпечення працездатності та ефективності розробленого чисельного алгоритму. Наведено структурний опис розробленого спеціалізованого пакета обчислювальної аеродинаміки, електродинаміки, динаміки і хімічної кінетики плазми. Описано розроблений автоматизований препроцесор для задач обчислювальної аеродинаміки.

У *четвертому розділі* проведено вивчення фізичних особливостей ламінарно-турбулентного переходу при обтіканні плоскої пластини, кругового циліндра і профілю крила в широкому діапазоні кутів атаки і чисел Рейнольдса на основі нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини з використанням різних моделей турбулентності і γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу.

У *п'ятому розділі* розглянуто особливості турбулентного обтікання елементів енергетичних і транспортних систем в широкому діапазоні чисел Рейнольдса і кутів атаки. Проведено чисельне моделювання турбулентного обтікання профілів симетричної і несиметричної форми, багатоелементного профілю в крейсерській, злітно-посадковій і перехідній конфігурації, а також профілю транспортного засобу поблизу екрану. Аналізуються структура течій, коефіцієнти тиску, тертя, підйомної сили і сили лобового опору.

У *шостому розділі* на базі розробленого спеціалізованого пакета обчислювальної аеродинаміки виконано дослідження зв'язаних задач динаміки й аеродинаміки роторів вертикально-осьових вітроенергетичних установок. Проведено параметричні дослідження впливу геометричних характеристик ВО ВЕУ, що складаються з роторів Дар'є і Савоніуса, на енергетичну ефективність. Виконано порівняння отриманих чисельних результатів з наявними експериментальними даними.

У *сьомому розділі* проведено серію обчислювальних експериментів з моделювання нестаціонарних процесів низькотемпературної нерівноважної плазми діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора, а також її вплив на керування структурою потоку повітря. Виконано детальне вивчення стадій зародження, розвитку і гасіння катодоспрямованого стримера при роботі плазмового актуатора. Проведено параметричні дослідження геометричних параметрів плазмових актуаторів та їх вплив на швидкість повітря, що генерується. Показано можливості керування потоком повітря на плоскій пластині і циліндрі при роботі плазмового актуатора на основі діелектричного бар'єрного розряду.

У *додатках* наведено матрицю лінеаризації джерельних доданків та список публікацій здобувача за темою дисертації.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПИТАННЯ

Відрив потоку рідини або газу – одна з основних і найбільш складних проблем аеро- і гідромеханіки. Відрив потоку зустрічається практично у всіх галузях техніки: суднобудуванні, авіації, ракетній техніці, наземному транспорті, вітроенергетиці. Виникнення відриву призводить до значних змін параметрів потоку (швидкість, тиск) у порівнянні з їхніми значеннями в умовах безвідривного обтікання. Як правило, відрив потоку – явище небажане, що призводить до втрати енергії, збільшення опору, зростання нестаціонарних навантажень, зменшення підйомної сили крила, виникнення нестійкості [31, 145].

Зростаючий інтерес до відривних течій обумовлений серйозними наслідками, пов'язаними з цим явищем. Відрив потоку призводить до збільшення витрат палива, а також безпосередньо пов'язаний з безпекою на транспорті. Особливо це питання гостро стоїть в цивільній авіації, де небажаний відрив (зрив) потоку може привести до втрати керованості та появі великих навантажень на поверхнях літальних апаратів, а також необхідність підвищення потужності двигунів для компенсації втрат енергії [146].

У цьому розділі розглянуто методи керування відривом потоку, основні типи плазми, типи плазмових актуаторів і механізми керування потоком, а також ієрархію часу протікання плазмових і аеродинамічних процесів. Представлено огляд математичних моделей для опису розвитку плазми при роботі плазмового актуатора та її взаємодії з навколишнім в'язким середовищем. Крім того, наведено огляди методів розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини, методів створення дискретного простору, підходів до моделювання турбулентності, а також методів моделювання ламінарно-турбулентного переходу. Розглянуто переваги та недоліки прикладних програм обчислювальної аеродинаміки.

1.1 Класифікація методів керування структурою течії

Ефективність роботи компресорів, вітроенергетичних установок, турбін, насосів, вентиляторів та їх елементів, а також автомобілів, літаків, ракет, кораблів, підводних човнів безпосередньо залежать від структури потоку при обтіканні даних об'єктів. Оптимальні значення робочих характеристик, досягаються в умовах, близьких до відриву.

Керуючи відривом потоку можна досягти певної структури течії та підвищити робочі характеристики літальних апаратів, наземного транспорту, морських суден, гідромашин та їх елементів [145].

Велике розмаїття відривних течій призводить до необхідності проведення широкого кола експериментальних досліджень. Висока вартість експериментів в аеродинамічних трубах призводить до збільшення ролі теоретичних і чисельних досліджень у цьому напрямку.

Відрив потоку відноситься до важливих проблем аеро- і гідродинаміки, і пов'язаний з геометрією тіла (позитивний або негативний градієнт тиску), параметрами потоку, що набігає (число Маху, кут атаки, в'язкість) і режимом обтікання (ламінарний, турбулентний, стаціонарний, нестаціонарний). Варіація цих параметрів призводить до величезного різноманіття відривних течій.

Основна мета керування відривом потоку – поліпшення аеродинамічних характеристик обтічного тіла або підвищення ефективності роботи апаратів і машин [145].

Керування відривом потоку можливо у вигляді придушення або уповільнення початку відриву з ліквідацією або зменшенням розмірів відривної зони. Також можливе створення локального відриву і на його базі керувати структурою основної течії.

Методи керування відривом потоку за способом впливу на потік можуть бути розділені на *пасивні* та *активні*. Пасивні методи здійснюють вплив на потік без підведення зовнішньої енергії, у той час як активні методи використовують додаткові джерела енергії. У свою чергу активні методи можна класифікувати залежно від того, використовується або не використовується робоча рідина для керування відривом потоку.

До пасивних методів керування структурою течії відносяться [146]:

– вибір форми поверхні обтічного тіла;

– генератори вихорів;

– зміна форми передньої крайки;

– щілини (передкрилки, закрилки, направляючі лопатки);

– рухливі поверхні;

– пластини;

– керування переходом (локальні турбулізатори, зміна шорсткості поверхні);

– сітки.

До активних методів керування структурою течії відносяться [146]:

– масообмін з обтічною поверхнею (відсмоктування і вдув потоку);

– теплообмін з обтічною поверхнею;

– акустичний актуатор;

– механічний актуатор;

– плазмовий актуатор.

1.1.1 Пасивні методи керування структурою течії

Вибір форми поверхні обтічного тіла. Вибір форми поверхні тіла повинен забезпечити оптимальні умови обтікання. Як правило, такими умовами є відсутність відриву або наявність невеликої відривної зони, яка не впливає на основні аеродинамічні характеристики тіла.

Генератори вихорів. Генератори вихорів використовуються для підведення енергії із зовнішнього потоку в примежовий шар і можуть застосовуватися для керування потоком, що вже відірвався, на крилах і дифузорах. Генератори вихорів забезпечують стійкість примежового шару, поліпшують керованість літака на малих швидкостях і великих кутах атаки. Успішне застосування генераторів вихорів залежить від їх форми, розташування на обтічній поверхні та інтенсивності потоку.

Зміна форми передньої крайки. Під зміною форми передньої крайки мають на увазі частину крила, що відхиляється, з метою забезпечення необхідної структури течії та досягнення потрібних аеродинамічних характеристик. Даний підхід керування відривом відрізняється від передкрилків і закрилків, тим, що в цьому випадку відсутні щілини.

Щілини. Щілини є ефективним способом запобігання відриву потоку на багатоелементних аеродинамічних профілях і складових крилах за рахунок перетікання повітря та підвищення енергетики потоку. Складене крило являє собою основний профіль і певний набір передкрилків і закрилків, які розділені щілинами. Перетікання повітря з області підвищеного тиску в область зниженого створює ефект вдуву, що призводить до прискорення загальмованого потоку і наростання примежового шару стає незначним. Даний факт призводить до збільшення робочих кутів атаки без зриву потоку з несучих поверхонь.

Рухливі поверхні. Мова йде про рух частини поверхні обтічного тіла в напрямку основного потоку з певною швидкістю. Даний ефект якісно проявляється при обтіканні циліндра, що обертається (ефект Магнуса). Однак такий підхід складний у реалізації, і є неекономічним.

Пластини. Застосування поділяючих пластин у сліді за тілом може привести до зниження пульсацій у сліді та зменшити лобовий опір основного тіла. Також розташування пластин у донній частині транспортних засобів призводить до кращого відновлення тиску в цій області, і, як наслідок, до зменшення лобового опору.

Керування переходом. Відрив потоку можна затягти або придушити, якщо викликати перехід від ламінарної течії до турбулентної вище за течією від місця, де можливий ламінарний відрив. Такий ефект пояснюється тим, що турбулентний потік характеризується більш високою енергетикою особливо в примежовому шарі.

Сітки. Застосування сіток дозволяє запобігти відриву потоку та підвищити стійкість основної течії. Сітка підвищує рівень турбулентності та сприяє швидкому перерозподілу потоку. Основними недоліками такого підходу є підвищений опір і складність експлуатації обтічного тіла.

1.1.2 Активні методи керування структурою течії

Відрив потоку можна запобігти або сповільнити за допомогою пристроїв із підведенням енергії в примежовий шар, зменшенням впливу в'язкості або завданням певної температури поверхні.

Відсмоктування потоку. Відсмоктування потоку призводить до зменшення впливу в'язкості, до видалення загальмованих частинок рідини або газу із примежового шару, щоб примежовий шар, що заново формується, зміг подолати позитивний градієнт тиску. За рахунок відсмоктування потоку вдається поліпшити аеродинамічні характеристики обтічних тел. Використання керування примежовим шаром дозволяє істотно збільшити критичний кут атаки та підвищити безпеку польоту літака. Даний підхід вимагає додаткове джерело потужності, збільшення ваги, підвищення витрати палива, а також перфорування обтічної поверхні, що не завжди можливо в реальних умовах.

Вдув потоку. Вдув потоку проводиться з метою передати додатковий імпульс загальмованим частинкам рідини або газу паралельно поверхні (тангенціальний вдув) або підсилити перемішування примежового шару з основним потоком по нормалі до стінки (нормальний вдув). Вдув потоку відноситься до одному з ефективних способів керування відривом потоку, проте він має ряд недоліків, властивих керуванню відривом потоку шляхом відсмоктування.

Теплообмін (теплопередача). Керування відривом за допомогою теплообміну частинок примежового шару з обтічною поверхнею відбувається за рахунок передачі тепла від більш нагрітих об'єктів до менш нагрітих. За рахунок цього змінюється енергетика потоку і можна одержувати бажану структуру течії. Даний підхід широко використовується на трансзвуковому та надзвуковому режимах обтікання.

Акустичний актуатор. Акустичний актуатор являє собою динамік, вмонтований у поверхню обтічного тіла, який створює коливання повітря та передає енергію в примежовий шар за рахунок зміни тиску на поверхні.

Механічний актуатор. Механічний актуатор схожий з акустичним актуатором. Він складається з рухомої пластини, яка створює додаткову перешкоду основному потоку та призводить до генерації вихорів. За допомогою цих вихорів вдається впливати на примежовий шар і одержувати потрібну структуру потоку.

Плазмовий актуатор. Плазмовий актуатор являє собою пристрій з підведення енергії за рахунок електричної, магнітної, теплової взаємодії або їх комбінації в потік повітря. У результаті перерахованих вище взаємодій між плазмою газового розряду та навколишнім повітрям відбувається трансформація енергії електромагнітного поля в кінетичну енергію у примежовому шарі повітря.

1.2 Огляд досліджень течій повітря при наявності низькотемпературної плазми

1.2.1 Плазма, її класифікація та форми

Плазмою (четвертим агрегатним станом речовини) називається повністю або частково іонізований газ заряджених частинок [44]. Термін «плазма» для іонізованого газу вперше ввів І. Ленгмюр в 1928 році. Термін «іонізований» означає, що з атомів видалений (доданий) один або кілька електронів, у результаті чого нейтральний атом перетворюється в позитивно (негативно) заряджений іон.

Як правило, плазма складається з електронів і позитивно заряджених іонів і може бути як квазінейтральною, так і неквазінейтральною. У плазмі можуть бути присутніми також нейтральні атоми: якщо їх частка значна, то плазма називається *частково іонізованою*. Якщо в плазмі число негативних зарядів дорівнює числу позитивних (тобто електричний заряд дорівнює нулю), то плазма вважається *квазінейтральною*. Наявність іонів та електронів забезпечує проходження електричного струму через плазму, а також взаємодію з електричним і магнітним полями.

Плазма буває ідеальна та неідеальна, низькотемпературна та високотемпературна, рівноважна та нерівноважна [44].

Ідеальна плазма – це іонізований ідеальний газ заряджених частинок, у якому середня потенційна енергія взаємодії заряджених частинок набагато менша їх середньої кінетичної енергії. В ідеальній плазмі присутній просторовий заряд і електричне поле, але немає взаємодії між окремими частинками. *Неідеальна плазма* – плазма, у якій потенційна енергія взаємодії між зарядженими частинками порівнянна з їхньою кінетичною енергією або перевищує її. У більшості випадків, що зустрічаються на практиці, плазма близька до ідеальної.

Прийнято вважати, що *низькотемпературна плазма* – це плазма з температурою $T \leq 10^5$ K, а *високотемпературна* – з температурою $T > 10^5$ K.

Температура електронів у *нерівноважній плазмі* суттєво перевищує температуру іонів. Даний факт пояснюється істотною відмінністю в масах електрона та іона, що ускладнює процес обміну енергією. Така ситуація зустрічається в газових розрядах, коли іони мають температуру близько сотень, а електрони – близько десятків тисяч К. У *рівноважній плазмі* температура електронів дорівнює температурі іонів. Як правило, температура рівноважної плазми більше декількох тисяч °К.

За формами виникнення плазму можна розділити на три групи: штучно створену, що має земну і космічну природу [44].

До першої групи належать: плазмові панелі, електрична дуга в дуговому зварюванні, неонові лампи, плазмові ракетні двигуни, генератори озону, діелектричний бар'єрний розряд при роботі плазмових актуаторів та ін.

До другої групи належать: іоносфера, блискавки, вогні святого Ельма, полярне сяйво, полум'я.

До третьої групи відносяться: зірки, туманності, космічний простір, сонячний вітер.

1.2.2 Основні типи газових розрядів та їх класифікація

Газовий розряд – сукупність процесів, що виникають при протіканні електричного струму через іонізований газ (плазму), що утворився під дією прикладеного електричного поля [44].

Розряди діляться на *самостійні* та *несамостійні*. Для здійснення газового розряду застосовують як *сталі* в часі, так і *змінні* електромагнітні поля.

За частотою прикладеного електромагнітного поля розряди бувають [44]:

1. сталі та низькочастотні ($< 10^5$ Гц);
2. високочастотні ($10^5 \div 10^8$ Гц);
3. надвисокочастотні ($10^9 \div 10^{11}$ Гц);
4. оптичні ($> 10^{11}$ Гц).

За характером іонізації стану газу можна розрізняти [44]:

1. пробій газового проміжку;
2. підтримка електромагнітним полем нерівноважної плазми;
3. підтримка електромагнітним полем рівноважної плазми.

Основні види розрядів [44]:

1. тліючий;
2. дуговий;
3. іскровий;
4. коронний;
5. високочастотний;
6. діелектричний бар'єрний.

Газовий розряд, який виникає за рахунок зовнішніх джерел (іонізуюче випромінювання, емісія електронів внаслідок накалювання катода) називається *несамостійним* [44].

При подальшому збільшенні напруги струм різко зростає та відбувається *пробій*, що характеризується світінням. Пробій починається з декількох випадкових (космічного походження) або емітованих з поверхні електронів. При цьому розряд стає *самостійним*. Під дією електричного поля електрон прискорюється і, досягнувши потенціалу іонізації, вириває електрон із зовнішньої орбіти атома. У результаті іонізації виникає два повільні електрони, які повторюють той самий цикл. Саме пробиває напруга (потенціал запалювання) забезпечує стаціонарне відтворення електронів, що вириваються з катода і витягаються на анод. У результаті розмноження електронів розвивається *електронна лавина*. Іонізація газу відбувається за $10^{-7} \div 10^{-6}$ с. Перехід несамостійного розряду в самостійний відповідає *настанню пробою* [44].

Таунсендовський розряд – стаціонарний електричний розряд. Виникає при низькому тиску газу та характеризується малими струмами ($10^{-18} \div 10^{-6}$ А). Виникає об'ємний заряд, що має дуже низьку густина і не спотворює зовнішнє електричне поле. Розряд може бути як несамостійним, так і самостійним. В останньому випадку він носить назву *темного розряду*. При підвищенні струму темний розряд переходить у тліючий розряд [44].

Тліючий розряд – стаціонарний самостійний (самопідтримуючий) електричний розряд у газі. Виникає, як правило, при низькому тиску газу та високій напрузі ($10^{2} \div 10^{3}$ В). Характеризується низькими значеннями струму ($10^{-6} \div 10^{-1}$ А) і стабільністю в часі, на відміну від нестаціонарних (імпульсних) електричних розрядів у газах. Іонізований газ (плазма) є електронейтральним за винятком приелектродних областей. Ступінь іонізації плазми становить $10^{-8} \div 10^{-6}$. Плазма в цьому розряді є нерівноважною. Електрони мають енергію ~1 еВ і температуру $T_e \approx 10^4$ К. Хоча температура газу, а також іонів, відповідає температурі навколишнього середовища $T \approx 300$ К. Яскравим прикладом тліючого розряду, є світіння рекламних неонових ламп [44].

Дуговий розряд (дуга) – один з типів стаціонарного самостійного електричного розряду в газі при тиску порядку атмосферного. Виникає при низькій напрузі ($10^1 \div 10^2$ В) і характеризується сильними струмами (>1 А). При дуговому розряді виникає рівноважна низькотемпературна плазма з $T = T_e \approx 10^4$ К і ступенем іонізації $10^{-3} \div 10^{-1}$. Дуговий розряд використовується в дугових печах, при дуговому зварюванні, а також у плазмотронах [44].

Іскровий розряд (іскра) – нестаціонарна форма електричного розряду в газах. Такий розряд виникає звичайно при тисках порядку атмосферного та високій напруженості електричного поля порядку $10^6 \div 10^7$ В/м. Пробій здійснюється шляхом проходження електронних лавин, і проростання плазмового каналу (стримера) між електродами. *Стример* – це тонкий канал, заповнений іонізованим газом. Стримери перекривають розрядний проміжок і з'єднують електроди безперервними провідними каналами. Відбувається як би коротке замикання електродів сильно іонізованим іскровим каналом [44]. У потужному іскровому розряді сила струму може досягати значень порядку 10^5 А, а температура 10^4 К. Різке зростання температури призводить до стрибкоподібного збільшення тиску, у результаті чого на межах провідних каналів виникає ударна хвиля. Сукупність ударних хвиль супроводжується характерним звуковим ефектом – «тріском» іскри. У природних умовах іскрові розряди спостерігаються у вигляді блискавок, а звукові ефекти у вигляді грому.

Коронний розряд – самостійний газовий розряд. Виникає при порівняно високих тисках порядку атмосферного в різко неоднорідних полях, недостатніх для пробою всього проміжку. Як правило, передує іскровому розряду [44].

Відмінною рисою даного розряду є те, що іонізаційні процеси та порушення нейтральних частинок газу при їх зіткненнях з електронами відбуваються не по всій довжині проміжку, а тільки в невеликій його частині поблизу електрода з дуже великою кривизною поверхні (вістря, тонкі дроти й т.п.). Ця область характеризується значно вищими значеннями напруженості поля в порівнянні із середніми значеннями для всього проміжку. Коли напруженість поля досягає граничного значення (для повітря близько $3 \cdot 10^6$ В/м), навколо коронуючого електрода виникає світіння, що має вид оболонки або корони. У природі коронний розряд може виникати на верхівках дерев, щоглах (вогні святого Ельма).

Високочастотний розряд – один з типів газового розряду, який виникає під дією високочастотного електромагнітного поля. Високочастотні розряди за способом збудження бувають двох типів: *індукційні* і *ємнісні*. Якщо *високочастотний розряд* виникає між ізольованими електродами, то такий розряд називається *безелектродним*. Якщо плазма розряду стикається з електродами, то такий розряд є *електродним* [44].

Високочастотний індукційний (Н-типу) розряд заснований на використанні явища електромагнітної індукції. Літера *Н* позначає визначальну роль магнітного поля в даному розряді. Високочастотний індукційний розряд є *безелектродним* [44].

Високочастотний ємнісний (Е-типу) розряд виникає між двома ізольованими або відкритими електродами, до яких прикладена змінна напруга. Система із двох електродів, один з яких занурений у діелектрик, поводиться стосовно прикладеної змінної напруги як конденсатор. У пристроях такого типу електричне поле відіграє визначальну роль (у порівнянні з магнітним полем) і розряди в них називають *ємнісними*. Літера *Е* позначає визначальну роль електричного поля в даному розряді [44]. Прикладом високочастотного розряду є стримери трансформатора Тесла.

Діелектричний бар'єрний розряд (ДБР) – це електричний розряд у газовому середовищі, що виникає між двома електродами, один або обидва з яких покриті діелектриком. Бар'єрний розряд відрізняється від високочастотного ємнісного більш низькою частотою ($< 10^5$ Гц) прикладеної напруги. Найбільш цікавою властивістю цих розрядів є те, що при атмосферному тиску пробій зароджується у вигляді великого числа незалежних струмових філаментів (ниток), відомі як мікророзряди, які існують на дуже малих тимчасових масштабах порядку десятків наносекунд. Вони характеризуються слабко іонізованими плазмовими каналами. ДБР може підтримувати розряд у великому обсязі при атмосферному тиску без згортання в дугу. Заряд, накопичується біля поверхні діелектрика протягом короткого часу після пробою, послабляючи електричне поле в області розряду, що робить його самообмеженим [44].

Діелектричний бар'єрний розряд забезпечує можливість ефективної іонізації газів при атмосферному тиску, що добре підходить для багатьох хімічних плазмових процесів. Перші посилання датуються 1857 роком, коли Вернер фон Сіменс запропонував новий тип електричного газового розряду, який дозволяв генерувати озон з повітря при атмосферному тиску. З тих пір ДБР став широко використовуватися в різних додатках. ДБР використовується у виробництві озону, плазмових панелей, системах дезінфекції живих тканин і стерилізації медичного обладнання, в пристроях генерації вихорів, при ініціюванні горіння, а також у керуванні структурою потоку повітря.

Останнім часом з'явилося безліч експериментальних робіт, що показують можливість застосування спеціального пристрою – плазмового актуатора, на основі ДБР в якості елемента керування течією газу. У більшості випадків ці роботи розглядають вплив ДБР на процес формування відривної течії на поверхні циліндра [304], плоскої пластини [191], профілю крила [187], що обтікаються дозвуковим потоком повітря. Показано, що за допомогою ініціювання ДБР на поверхні аеродинамічного тіла можна затягти або запобігти відриву потоку повітря [188]. Даний ефект виникає через особливу конфігурацію електродів, завдяки якій при ініціюванні розряду виникає додаткове прискорення течії повітря поблизу поверхні плазмового актуатора. При подачі напруги на плазмовий актуатор у спочиваючому повітрі формується течія повітря з характерною величиною швидкості потоку порядку декількох метрів у секунду.

1.2.3 Електричний пробій та його види. Потенціал запалювання

Електричний пробій – процес перетворення непровідного газу в провідний, у результаті впливу на нього сильного електричного поля.

Існує два основні механізми *пробою*: таунсендовський та іскровий. Індивідуальна лавина є першочерговою і обов'язковою складовою будь-якого механізму пробою.

Таунсендовський пробій виникає внаслідок розмноження лавин. Оскільки через дифузію електронів лавина розпливається в поперечному напрямку, то нова лавина виникає з іншого місця на катоді. Тому таунсендовський пробій дифузійно займає весь об'єм між електродами. Цим він зовні відрізняється від іскрового, коли між електродом і діелектричною поверхнею проростає тонкий провідний канал – стример (мікроблискавка), а сусідні ділянки залишаються неіонізованими.

Прилипання електронів сповільнює іонізацію в лавині та призводить до збільшення полів, що призводять до пробою. Лавина може переродитися в стример, якщо в ній досягається досить велике посилення іонізації.

Іскровий пробій виникає в результаті проходження стримера між електродами. Виникнення іскрового пробою пояснюється за допомогою стримерної теорії [44]. В основі теорії лежить той факт, що між електродами виникає тонкий слабко іонізований канал – стример, який поширюється за позитивно зарядженому сліду першої потужної лавини. У цей слід втягуються електрони від вторинних лавин. Кожна наступна лавина виникає в результаті фотоіонізації від проходження попередньої лавини. У результаті змішування електронів вторинних лавин з іонами первинної утворюється квазінейтральна плазма. Електрони збуджують атоми, які потім випромінюють нові фотони. Відбувається зростання позитивного заряду в плазмовому каналі стримера.

Якщо стример виникає поблизу анода та проростає до катода, то він називається *катодоспрямованим (позитивним)* [44]. Такий стример формується при не великих перенапруженнях у порівнянні із пробивним. Після проходження лавини негативні іони витягаються до поверхні анода зі швидкістю дрейфу порядку 10^3 м/с, де нейтралізуються при взаємодії з відкритим електродом, віддаючи електрон у зовнішній ланцюг. Таким чином результуючий об'ємний заряд стає позитивним. Катодоспрямований стример виникає в результаті фотоіонізації атомів на околицях первинної лавини енергійними фотонами, які випускаються збудженими в лавині атомами. Швидкість поширення стримера порядку 10^6 м/с, густина зарядів – $10^{19} \div 10^{20}$ м$^{-3}$, а діаметр стримерного каналу – $10^{-4} \div 10^{-3}$ м.

Якщо стример виникає поблизу катода та проростає до анода, то його називають *анодоспрямованим (негативним)*. Анодоспрямований стример характеризується більшим перенапруженням.

В електричному полі поріг пробою сильно залежить від полярності відкритого електрода. Експериментально встановлене [44], що пробивна напруга у випадку, коли відкритий електрод є катодом у два рази більше, чим для анода. Це пов'язано з різними умовами розвитку електронних лавин і стримерів поблизу відкритого електрода. Коли відкритий електрод є анодом, електронні лавини рухаються від поверхні діелектрика в напрямку до відкритого електрода. У міру наближення електронів до анода, вони потрапляють в область більш сильного електричного поля, а, отже, прискорюються та швидше розмножуються. Даний процес стимулює переродження електронної лавини в позитивний стример. Коли відкритий електрод є катодом, то в міру віддалення від нього електрони потрапляють в область із більш слабким електричним полем. Це призводить до зменшення швидкості розмноження електронних лавин і як наслідок ускладнює виникнення стримера.

Повітря всередині стримерного каналу діелектричного бар'єрного розряду нагрівається в результаті енерговиділення з боку хвилі іонізації. Результати експериментальних даних [44] і аналітичних розрахунків [44] говорять про те, що температура повітря підніметься не більше ніж на 2÷3 К. Отже, стример залишає за собою холодну плазму.

Електричний пробій характеризується потенціалом запалювання [44]. *Потенціал запалювання* – так називається напруга пробою V_t. Дана величина та відповідне поле пробою E_t залежать від типу газу, матеріалу катоду, тиску p та довжини розрядного проміжку d. Для плоских електродів (в однорідному електричному полі) [44]

$$V_t = \frac{B(pd)}{C + \ln(pd)}, \qquad \frac{E_t}{p} = \frac{B(pd)}{C + \ln(pd)}, \qquad C = \ln\frac{A}{\ln(1 + 1/\gamma)}$$

де γ – коефіцієнт вторинної емісії (10^{-2}). Значення констант A та B отримані експериментально по кривим Пашена. Для повітря $A = 15$, $B = 365$, $C = 1.18$, $(pd)_{\min} = 0.83$ торр·см, $(E/p)_{\min} = 365$ В/(торр·см), $V_{\min} = 300$ В.

Механізм розмноження лавин працює при атмосферному тиску в плоских проміжках до 5 см ($pd < 4000$ торр·см). Поріг пробою повітря при атмосферному тиску $E_t = 3.2 \cdot 10^6$ В/м.

У випадку довгих проміжків ($d > 5$ см), що пробиває поле в повітрі при кімнатній температурі знижується до значення $E_t = 2.6 \cdot 10^6$ В/м, але при цьому діє інший механізм пробою – стримерний.

1.2.4 Утворення та загибель заряджених частинок у повітрі. Основні види іонізації

Коли молекули та атоми знаходяться в основному стані, можливі три варіанти виривання електронів: ударами електронів, ударами важких частинок, а також світловими квантами (фотонами) ультрафіолетового випромінювання. Процес виривання електронів з нейтральних атомів або молекул газу називається *іонізацією* [44]. *Ступінь іонізації плазми* визначається відношенням числа заряджених частинок до вихідного числа атомів. У слабоіонізованій плазмі, частка іонізованих молекул газу перебуває в діапазоні від 10^{-8} до 10^{-2}.

Головним джерелом утворення позитивних іонів та електронів у газових розрядах є іонізація електронним ударом. Іонізація ударами іонів і атомів (термічна іонізація) можлива при енергіях частинок порядку $\sim 10^6$ еВ, і в газових розрядах відбувається вкрай рідко. Фотоіонізація в плазмі відіграє істотну роль при іскровому пробої, як джерело електронів при проходженні стримера [44].

У слабоіонізованій плазмі атоми іонізуються електронним ударом, як правило, з основного стану. Збуджені атоми також відіграють істотну роль при ступінчастій та асоціативній іонізації [44].

Термічна іонізація – іонізація, при якій енергію для відриву електрона від атома або молекули забезпечують зіткнення між атомами в результаті збільшення температури.

Фотоіонізація – іонізація молекул газу фотонами.

Іонізація електронним ударом – відбувається в ході зіткнень електронів, що прискорилися в електричному полі, з нейтральними атомами та молекулами газу. У результаті виникає лавинне збільшення числа заряджених частинок, оскільки в процесі іонізації утворюються нові електрони, які теж після прискорення починають брати участь у зіткненнях з атомами, викликаючи їх іонізацію. Для виникнення та підтримки газового розряду потрібна наявність електричного поля, тому що плазма може існувати, тільки якщо електрони здобувають у зовнішньому полі енергію, достатню для іонізації атомів, а кількість утворених іонів перевищує число рекомбінованих іонів [44].

Основною характеристикою швидкості іонізації є *частота іонізації* ν_i, що характеризує іонізуючу здатність електронів. *Частота іонізації* – це число іонізацій, що здійснюються одним електроном за 1 секунду.

Похідною величиною від частоти іонізації є *іонізаційний коефіцієнт Таунсенда* α – число іонізацій, що здійснюються одним електроном на шляху в 1 см [44]. Іонізаційний коефіцієнт Таунсенда $\alpha = \nu_i / \nu_d$, де ν_d – швидкість дрейфу.

Рух зарядженої частинки під дією електричного поля називається *дрейфом*.

Ступінчаста іонізація – коли енергії одного так званого повільного електрона недостатньо, щоб викликати іонізацію, він передає частину енергії атому та призводить його у збуджений стан. Наступні зіткнення повільних електронів передають відсутню енергію та викликають іонізацію.

Асоціативна іонізація – утворення одного іона із двох збуджених атомів або молекул з вириванням електрона.

При іонізації позитивний іон утворюється при втраті атомом електрона. Для того щоб витягти електрон з атома або молекули необхідно затратити енергію для подолання енергії зв'язку електрона в атомі. Ця величина називається *потенціалом іонізації* (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Потенціал іонізації атомів і молекул азоту та кисню [44]

Атом	Потенціал іонізації, еВ		Молекула	Потенціал іонізації, еВ
N	14.5		N_2	15.6
O	13.6		O_2	12.2

Процес прилипання електронів до нейтральних атомів і молекулам призводить до утворення негативних іонів. Негативний іон утворюється при захопленні електрона атомом з вивільненням енергії. Даний механізм відіграє провідну роль серед механізмів втрат електронів в електронегативних газах, до яких відноситься повітря. У повітрі, основними компонентами якого є азот і кисень, при електричному розряді відбувається прилипання електронів з формуванням негативних іонів кисню. Гази, молекули та атоми яких здатні захоплювати вільні електрони та утворювати стійкі негативні іони, називають *електронегативними*.

Коефіцієнт прилипання Таунсенда η – це число прилипань електронів на шляху в 1 см [44]. Коефіцієнт прилипання $\eta = \nu_\eta / \nu_d$, де ν_η – частота прилипань.

Основними механізмами прилипання є: у потрійних зіткненнях, дисоціативним шляхом і фотоприлипання (радіаційне захоплення). Існують і інші механізми утворення негативних іонів такі як: взаємодія збуджених частинок з поверхнею електрода, дисоціативне захоплення, прямий розпад молекули на заряджені компоненти, передача електронів нейтральній частинці.

1.2.5 Типи плазмових актуаторів і механізми керування потоком

Тип плазмового актуатору визначається видом використовуваного газового розряду. Найбільш поширеними є плазмові актуатори на основі тліючого, коронного, іскрового, високочастотного та діелектричного бар'єрного розряду [188, 219, 282].

Існує два основні механізми впливу плазмових актуаторів на зовнішнє середовище [234]:

– теплове, є результатом швидкого нагріву газу в результаті виділення джоулева тепла (іскровий розряд, дуговий розряд);

– електромагнітне, відбувається за рахунок магнітогідродинамічної (МГД) або електрогідродинамічної (ЕГД) взаємодії заряджених частинок з нейтральними молекулами газу (коронний розряд, діелектричний бар'єрний розряд) [244].

Плазмовий актуатор на основі ДБР складається із двох електродів, розташованих асиметрично, які розділені діелектриком, як показано на рис. 1.1. Один з електродів відкритий і контактує з повітрям, а інший – повністю занурений у діелектричний матеріал (скло, кварц, полімери). Електроди розташовуються на аеродинамічній поверхні уздовж розмаху обтічного тіла та є, як правило, довгими та тонкими. Звичайно плазмові актуатори використовують плоску або циліндричну форму електродів. Розрядні проміжки варіюються від міліметра до декількох сантиметрів, залежно від застосування [248].

Механізм впливу діелектричного бар'єрного розряду на структуру течії полягає в наступному. Висока напруга, прикладена до електродів, іонізує повітря за рахунок сильного електричного поля порядку 10^7 В/м, внаслідок чого утворюється слабко іонізована нерівноважна плазма. Іони та електрони отримують імпульс за рахунок прискорення електричним полем, а потім передають імпульс нейтральним атомам і молекулам при зіткненні. Така взаємодія виражається через масову силу (силу Лоренца). Таким чином, плазмовий актуатор генерує пристінний потік повітря (рис. 1.2 а) і змінює профіль примежового шару (рис. 1.2 б). У свою чергу перерозподіл швидкості в примежовому шарі призводить до його стабілізації та затягування відриву від поверхні тіла вниз за течією. При подачі напруги на актуатор у повітрі формується пристінний потік з характерною величиною швидкості повітря в декілька метрів за секунду.

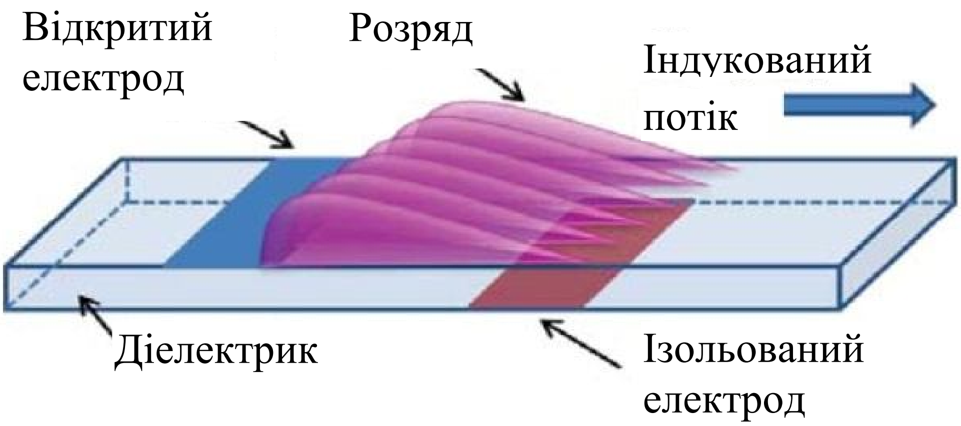
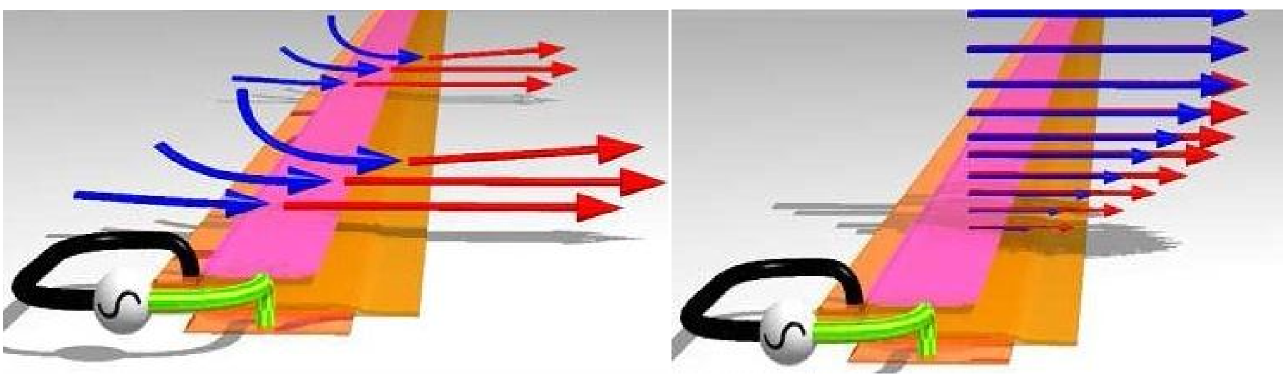


Рисунок 1.1 – Схема лінійного плазмового актуатора [191]



а) б)

Рисунок 1.2 – Генерування пристінного потоку повітря (а) плазмовим актуатором і зміна профілю примежового шару (б) [206]

1.2.6 Експериментальні дослідження фізики одиночного діелектричного бар'єрного розряду. Просторово-часова структура плазми

До теперішнього часу вироблено загальне уявлення про взаємодію між електричним полем, зарядженими частинками плазми і несучим середовищем. У результаті впливу електромагнітного поля плазмового актуатора на заряджені частинки виникає масова сила (сила Лоренца), яка призводить до передачі імпульсу навколишньому повітрю.

Однак у сучасній науковій літературі [192, 199, 243] існують значні розбіжності з приводу структури плазми, що утворюється, які вкрай важливі для опису фізики та принципу роботи ДБР. Складність вимірювань фізичних властивостей плазми обумовлена відмінністю геометричних масштабів і істотною роллю перехідних процесів. Невеликі розміри плазмової області, а також швидкоплинність процесів при ДБР не дозволяють проводити прямі вимірювання густини заряджених частинок, а також нейтральних атомів і молекул.

Утворення плазми може бути пов'язано з одним із двох механізмів.

Перший механізм обумовлений ємнісним зв'язком. У цьому випадку електрони в плазмі одержують енергію в результаті коливань електромагнітного поля в плазмовому шарі (шарі дебаєвського екранування). Шар дебаєвського екранування можна розглядати як електричний примежовий шар, який утворюється поблизу поверхні через різницю в теплових швидкостях іонів і електронів. Ємнісний зв'язок плазми, як правило, характеризується просторовим розсіяним світінням. Цей тип плазми часто використовується для обробки матеріалів при тисках 1÷10 торр (0,001÷0,01 атм.).

Другий механізм – електронна лавина. У цьому механізмі електрони прискорюються в електричному полі та одержують достатню енергію, щоб викликати іонізацію при зіткненні з нейтральними атомами. Новостворені електрони потім прискорюються в полі та викликають подальшу іонізацію. Результат – лавиноподібна іонізація. Цей тип плазми зберігається протягом короткого проміжку часу та сконцентрований у невеликому просторі. Якщо ця плазма формується з краю широкого електрода, то мільйони окремих мікророзрядів можуть утворювати візуально однорідну плазму. Експериментальні вимірювання, проведені з достатньою часовою роздільною здатністю, фіксують окремі електронні лавини [194].

C. Enloe [194, 195] провів детальне вивчення фізики ДБР при роботі плазмового актуатора. У своїх роботах він використовував фотоелектронний помножувач для вивчення перехідних і просторових структур плазмового розряду. Через порівняння електричного струму в актуаторі та виміру світіння плазми було показано, що ці два результати корелюють між собою і що можна використовувати інформацію про інтенсивність світла для вивчення фізики бар'єрного розряду. C. Enloe [194] виміряв силу струму, що проходить через плазму, і встановив, що окремі імпульси на два порядки менші, ніж період коливання напруги. Це свідчить про те, що плазма формується з електронних лавин, а не за рахунок ємнісного зв'язку, де вимірювання сили струму були б пропорційні зміні прикладеної до електродів напруги. Також було виявлено, що існує різниця між двома частинами періоду змінної напруги, коли прикладена напруга позитивна та коли негативна.

Діелектричний бар'єрний розряд відрізняється від багатьох типів плазмових розрядів тим, що електричний потенціал прикладається тільки до однієї із границь плазми – до відкритого електрода. Електричний потенціал на поверхні діелектрика визначається при взаємодії плазми з цією поверхнею.

Плазма існує у вигляді серії мікророзрядів тривалістю кілька десятків наносекунд, що виникають між відкритим електродом і поверхнею діелектрика. Оскільки заряд мікророзрядів накопичується на поверхні діелектрика, що призводить до зниження прикладеного електричного поля в цьому місці, плазма є самообмеженою. Це самообмеження в поведінці відключає розряд на макрорівні тому для підтримки плазми потрібно постійно змінювати напругу, яка прикладена до електродів.

Коли відкритий електрод виступає в ролі катода, то такий напівперіод називають «прямий хід». У випадку, коли відкритий електрод виступає в ролі анода, то ця фаза розряду називається «зворотній хід».

Неозброєним оком може здатися, що плазма з'являється як відносно рівномірний розсіяний розряд. Але більш глибокі виміри показали [194], що це високо структуроване утворення, як у часі, так і в просторі. Насправді плазма складається з ряду мікророзрядів, що відбуваються у швидкій послідовності.

У повітрі, характер цих окремих мікророзрядів варіюється залежно від того, чи йде прямий або зворотній хід. Характер кожного із цих етапів розвитку плазми радикально відрізняється. Під час прямого ходу, мікророзряди відбуваються з відносно високою частотою й низькою кількістю зарядів, про що свідчать низькі рівні світла, що випромінюються плазмою. Під час аналогічного періоду часу, протягом зворотного ходу виникають відносно яскраві спалахи світла із вкрапленнями темних ділянок.

1.2.7 Оптимізація плазмових актуаторів на основі експериментальних досліджень

У роботі [193] за допомогою адаптації пасивної вимірювальної техніки, а саме ємнісного V-зонда, отримано розподіл потенціалу по поверхні діелектрика в часі при ДБР. Отримано інформацію про поздовжній розподіл електричного поля в плазмі. Встановлено, що потенціал на поверхні діелектрика визначається в першу чергу в результаті осадження заряджених частинок. Розподіл зарядів на поверхні відбувається дуже швидко (протягом від одного до декількох циклів змінної напруги, що прикладено до ПА). Отримані дані, що характеризують зарядку поверхні діелектрика залежно від часу через фізичне осадження (або видалення) заряду з поверхні.

M. Forte було встановлено [199], що головну роль у створенні рушійної сили відіграє асиметрія електродів. До того ж ширина нижнього електрода дуже важлива для утворення плазми. Було показано, що маленький зазор або часткове перекриття електродів не змінюють робочі характеристики плазмового актуатора, але впливають на стабільність запалювання плазмового розряду. Невелике накладення електродів приводить до більш рівномірного запалювання плазми.

Іншою важливою характеристикою, яка впливає на роботу плазмового актуатора, є форма сигналу прикладеної напруги. Як підказують експерименти [199], швидкість утворення, розміри та густина плазми залежать від зміни напруги на електродах. Більш крутий і довгий нахил сигналу напруги dV/dt призводить до утворення більшої кількості плазми на поверхні діелектрика, і до максимуму індукованої плазмовим актуатором швидкості потоку. T. Corke [187] і H. Nishida [246] досліджували різні форми вхідного сигналу змінної напруги та встановили, що найкращі результати виходять, коли прикладена напруга має форму «позитивної пилкоподібності».

У роботах [192, 197] виконано експериментальне дослідження діелектричного бар'єрного розряду при роботі ПА при атмосферному тиску. За допомогою лазерної інтерферометрії проводилися експерименти із плазмовими актуаторами, розташованими на крутильному маятнику. Визначено характеристики сили в часі та густина розподілу заряду по поверхні діелектрика за допомогою інтерферометрії та методу поділу електродів. Експерименти проводилися при атмосферному тиску з різним рівнем змісту кисню для того, щоб вивчити вплив іонів кисню на створення сили Лоренца. Результати показали, що плазма прискорює повітря двічі протягом одного циклу змінної напруги.

В експериментальній роботі G. Font [197] встановлено вплив складу атмосфери на ефективність роботи плазмового актуатора. Показано, що видалення всього кисню з повітря вплинуло на макроскопічні розрядні характеристики плазми, про що свідчить відношення між потужністю, що розсіюється, і прикладеною напругою. Додавання кисню призводить до істотної зміни цих характеристик. Показано ефективність роботи ПА залежно від складу атмосфери у вигляді відношення виміряної сили на одиницю потужності, що розсіюється пристроєм. Ефективність пристрою безпосередньо залежить від процентного вмісту кисню в повітрі. Очевидно, що електронні властивості кисню впливають на роботу ПА.

Кисень у повітрі суттєво змінює структуру ДБР (у порівнянні із чистим азотом) через присутність негативних іонів (O_2^-, O^-). Наявність кисню в атмосфері необхідна для утворення негативних іонів (O_2^-, O^-) за допомогою приєднання електронів до кисню. Негативні іони створюють імпульс у напрямку, протилежному дії позитивних іонів. До того ж процеси рекомбінації, дисоціації та збудження у кисню сильно відрізняються від азоту. Кисень має більш низьку енергію іонізації у порівнянні з азотом (12.06 eV проти 15.6 eV). Результати показали, робота актуатора безпосередньо пов'язана із часткою кисню в атмосфері, її ефективність зростає лінійно із відсотковим вмістом кисню.

G. Font [198] встановив вплив вологості повітря на роботу плазмового актуатора. Результати показали, що ефективність плазмового актуатора не змінюється зі зростанням відносної вологості повітря. Найбільш вірогідним поясненням даного факту є занадто маленький досліджуваний діапазон вологості (40÷60 %). Слід згадати, що абсолютна вологість більш важлива для роботи плазмового актуатора, ніж відносна вологість.

Експериментально встановлено [194], що потужність, яка розсіюється, у плазмовому актуаторі, зростала пропорційно прикладеній напрузі $P \propto V_{пр}^{7/2}$.

В роботі C. Enloe встановлено [193], що ДБР у повітрі призводить до утворення позитивних і негативних іонів над поверхнею діелектрика. Коли відкритий електрод виступає в ролі катода, тоді відбувається прискорення потоку. Це прискорення пов'язане з негативними іонами, які зміщаються вниз по потоку під дією електричного поля. Після гасіння плазми, відбувається вповільнення потоку через в'язкий опір повітря [193]. Під час зворотного ходу плазма знову запалюється та знову відбувається прискорення потоку. Це прискорення пов'язане з позитивними іонами. Для однакових значень напруги та частоти, друге прискорення істотно менше у порівнянні з першим.

У разі зворотного ходу, формування іонної хмари постійно переривається високими імпульсами струму (стримерами), які не є ефективними для створення іонного вітру. При прямому ході спостерігаються імпульси струму з високою частотою та низькою амплітудою, що призводить до істотного зростання іонної хмари.

A. Asghar, E. Jumper [154] виявили, що за допомогою низькотемпературної плазми можна контролювати відрив вихорів із круглого циліндра при числах Рейнольдса в діапазоні $5 \cdot 10^4 \div 2.5 \cdot 10^5$.

R. Van Dyken, T. Mclaughlin [309] досліджували вплив плазми діелектричного бар'єрного розряду, розташованого на 7% хорди профілю, на обтікання профілю NACA 0015. Отримано істотне збільшення підйомної сили та зменшення лобового опору профілю на закритичних значеннях кута атаки. У роботі [309] було показано, що періодичне збудження примежового шару за допомогою ДБР дозволило значно збільшити максимальне значення підйомної сили та розширити діапазон кутів атаки безвідривного обтікання профілів. Даний ефект пояснюється здатністю ДБР створювати значну добавку до швидкості в примежовому шарі, а також виконувати функцію джерела періодичних збурень. Добавка до швидкості в примежовому шарі крила становить, як правило, 3÷7 м/с, що досить для затягування відриву потоку при числах Рейнольдса порядку $10^5 \div 10^6$. При більш високих числах Рейнольдса на перший план виходить механізм, пов'язаний зі створенням збурень у передвідривному примежовому шарі. Множинні механізми впливу ДБР робить вигідним його застосування для розв'язку широкого кола задач, пов'язаних з керуванням структурою потоку.

1.2.8 Ієрархія часу протікання плазмових і аеродинамічних процесів

Аналіз плазмових і аеродинамічних часів є ключовим моментом у розумінні процесів, що відбуваються при керуванні потоком. У випадку обтікання тіла повітрям у якості характерних масштабів довжини та часу приймаються геометричні характеристики тіла (наприклад, довжина) і час, за яке повітря пройде цю відстань (табл. 1.2). Якщо розглядати плазму в повітрі, що виникає при діелектричному бар'єрному розряді, то крім зазначених вище часів виникають характерні часи, пов'язані зі швидкістю протікання хімічних реакцій, а також з релаксацією об'ємного заряду та іншими процесами, що відбуваються в плазмі. Мінімальний масштаб часу відповідає релаксації об'ємного заряду (встановлення електронейтральності плазми) і знаходиться в діапазоні $10^{-11} \div 10^{-9}$ с. Максимальний характерний час відповідає часу прольоту молекул повітря над обтічним тілом $10^{-3} \div 10^{-1}$ с (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Характерні часи протікання плазмових і аеродинамічних процесів [293]

Процес	Інтервал, с
Релаксація об'ємного заряду	$10^{-11} \div 10^{-9}$
Нагрівання електронів	$10^{-9} \div 10^{-8}$
Дрейф електронів	$10^{-9} \div 10^{-7}$
Дрейф іонів	$10^{-8} \div 10^{-6}$
Ударна іонізація	$10^{-7} \div 10^{-6}$
Ступінчаста іонізація	$10^{-7} \div 10^{-5}$
Прилипання	$10^{-7} \div 10^{-6}$
Відлипання	$10^{-7} \div 10^{-6}$
Електрон-іонна рекомбінація	$10^{-7} \div 10^{-6}$
Іон-іонна рекомбінація	$10^{-5} \div 10^{-4}$
Час протікання діелектричного бар'єрного розряду	$10^{-4} \div 10^{-3}$
Гідродинамічний час	$10^{-3} \div 10^{-1}$

Істотна відмінність у часі аеродинамічних процесів ($\tau \sim 10^{-1}$) і процесів, що відбуваються при електричному розряді ($\tau \sim 10^{-11}$с), не дає можливості провести пряме чисельне моделювання розглянутих процесів, що відбуваються в ДБР, навіть із використанням сучасних суперкомп'ютерів ні в цей час, ні в недалекому майбутньому. Тому для моделювання цих процесів застосовуються різні моделі плазмового впливу на потік.

Виникаюча тут система нелінійних диференціальних рівнянь вимагає розробки ефективних чисельних алгоритмів, що враховують різнорідний масштаб за часом і простору окремих фізичних і хімічних процесів для отримання розв'язку з реальними витратами обчислювальних ресурсів.

1.2.9 Огляд методів чисельного моделювання діелектричного бар'єрного розряду

Незважаючи на значний прогрес у розумінні структури та властивостей ДБР, що виникає при низькому тиску, теоретичний опис поведінки бар'єрного розряду в повітрі при високому (атмосферному) тиску є обмеженим. Превалюють два напрямки досліджень, засновані на діаметрально протилежних тенденціях.

З одного боку, існують численні напівемпіричні методики, засновані на обробці результатів експериментальних досліджень. Такі методики досить прості з математичної точки зору та не вимагають великих витрат людських і комп'ютерних ресурсів для їхньої реалізації. Ключовим недоліком такого підходу є наявність емпіричних констант, які, не будучи універсальними, можуть змінювати свої значення залежно від швидкості руху частинок рідини та газу, інтенсивності електромагнітного впливу, геометрії течії та багатьох інших факторів.

З іншого боку, при створенні математичної моделі намагаються врахувати максимально можливе число взаємодій, включаючи другорядні. Результатом, як правило, є диференціальні системи, що полягають із декількох сотень рівнянь, що різняться між собою як за математичним типом, так і за працезатратами на їх розв'язок. Отримані в такий спосіб математичні моделі являють собою найчастіше теоретичний інтерес і малопридатні для практичного застосування.

Найпоширенішим способом моделювання впливу плазми на навколишнє повітря є включення сили Лоренца в якості масової сили в рівняння Нав'є-Стокса. В силу різниці характерних часів для аеродинамічних і плазмових процесів впливом аеродинаміки на структуру плазмового розряду можна знехтувати. У цьому випадку можна розділити задачу за фізичними процесами і моделювати вплив плазми на навколишнє середовище шляхом розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса.

Повний і точний облік всіх полів і взаємодій частинок в плазмі вкрай складний, тому для її опису і впливу на навколишнє середовище застосовують одну із спрощених моделей. Математичні моделі плазмового розряду можна розділити на три типи (рис. 1.3).

Рисунок 1.3 – Ієрархія математичних моделей опису плазми

Лінеаризовані та аналітико-емпіричні моделі містять у собі експериментальні дані, а також апріорі закладену форму плазмової області та пов'язане з нею розподіл напруженості електричного поля та густини результуючого заряду.

Феноменологічні моделі використовують деякі диференціальні співвідношення, замкнені експериментальними константами та придатні для певного класу взаємодій. Ці моделі, як правило, вимагають додаткові припущення (співвідношення Больцмана) щодо розподілу густини електричного заряду в області. Загальною рисою феноменологічних моделей є необхідність калібрування емпіричних констант для нових умов задачі.

Кінетичні моделі будуються на основі самих загальних фізичних законах з урахуванням усіх хімічних реакцій, що протікають. Ці моделі дуже громіздкі та мало придатні для прямого практичного застосування. Кінетичні моделі пов'язані з розв'язком рівняння Больцмана для функції розподілу за швидкостями частинок в просторі та у часі.

Феноменологічні моделі

Кожна з феноменологічних моделей являє собою унікальний метод розрахунку сили Лоренца, яка описує вплив плазми на навколишнє повітря, а також призводить до менш жорстких вимог до просторової роздільної здатності обчислювальної області та часових масштабів взаємодії. Істотна відмінність між кінетичними моделями та феноменологічними моделями полягає в тому, що останні зазвичай містять у собі припущення про поведінку або електричного поля або густини результуючого заряду в плазмі.

D. Orlov і T. Corke [187] запропонували модель, яка ґрунтується на поданні поверхні діелектрика набором віртуальних електродів. Плазмовий актуатор представляється як електричний ланцюг, поведінка якого описується звичайними диференціальними рівняннями з урахуванням віртуальних електродів. Розв'язок даного рівняння забезпечує напругу на віртуальних електродах, яке застосовується в якості додаткової (третьої) граничної умови для електричного потенціалу. Дана модель призводить до генерування значної течії повітря в напрямку вверх по потоку, що суперечить експериментальним результатам M. Post [253, 254] і N. Balcon [157], отриманим за допомогою PIV технології.

Y. Suzen [300] розробив електростатичну модель плазми діелектричного бар'єрного розряду для розрахунків сили Лоренца. У цій роботі було запропоновано розщепити рівняння, що описує електростатичну поведінку плазми на дві частини: першу – відповідну зовнішньому електричному полю та другу частину – відповідну електричному полю, породженому зарядженими частинками.

Кінетичні моделі

Кінетичні моделі базуються на хімічних реакціях, що виникають у повітрі при ДБР, і описують частинки, що присутні в плазмі, такі як електрони, іони, нейтральні атоми за допомогою рівнянь переносу. Суттєвими складовими фізики плазми є процеси іонізації, рекомбінації, а також утворення та поширення стримеру. У цілому, ці моделі здатні точно вирішувати та прогнозувати плазмові явища. Проте, розв'язок цих рівнянь вимагає дуже невеликих порядку 10^{-3} м розрахункових областей із просторовою здатністю 10^{-8} м для моделювання плазмових процесів. Цей факт накладає значні обмеження на крок інтегрування за часом. Тому застосування даного сімейства математичних моделей на сьогоднішній день вкрай важко для проектування та оптимізації плазмових актуаторів.

Одну з перших моделей було розроблено F. Massines [235]. Одновимірну модель засновано на одночасному розв'язку рівняння нерозривності для заряджених частинок і рівнянні Пуассона. Дослідження дозволило одержати просторово-тимчасовий розподіл для плазми. Показано, що досліджувані процеси характеризуються коефіцієнтом дифузії та константою швидкості іонізації.

Відомі математичні моделі, розроблені для діелектричного бар'єрного розряду в повітрі, які включають 20÷30 рівнянь для хімічних реакцій з різними швидкостями протікання та обсягом енергії, що виділяється. Ці рівняння враховують взаємодію між електронами, іонами та нейтральними атомами в різних газах, які присутні в повітрі. Дані моделі розроблено для діелектричного бар'єрного розряду в одномірній постановці та вимагають значних обчислювальних витрат. G. Font [198] використовував ці ідеї для моделювання плазмового розряду в асиметричному плазмовому актуаторі. Ґрунтуючись на експериментальних даних C. Enloe [194], у ці моделі G. Font включив реакції для азоту та кисню.

Існує також група спрощених моделей, в яких не розглядаються хімічні реакції, але газ подається як суміш іонів, електронів і нейтральних молекул. Ці моделі спочатку описували розряд в одномірній постановці, а потім були розширені на двовимірний випадок діелектричного бар'єрного розряду.

A. Likhanskii [229] моделював слабо іонізовану повітряно-плазмову серед як суміш нейтральних молекул, електронів, позитивних і негативних іонів, враховуючи процеси іонізації та рекомбінації. Результати моделювання показали особливу важливість присутності негативних іонів у повітрі. S. Roy і D. Gaitonde [278] моделювали діелектричний бар'єрний розряд при атмосферному тиску, розв'язуючи рівняння нерозривності, імпульсу заряду, електричного поля та розподілу потенціалу. У їхньому підході в якості газу-носія використовувався гелій, тому що для нього відомі хімічні реакції та коефіцієнти для плазми. Оскільки всі перераховані вище моделі строго описують процеси, що протікають у плазмовому розряді, вони дуже трудомісткі та при реалізації вимагають значних обчислювальних ресурсів.

За допомогою математичної моделі ДБР, розробленої J. Boeuf [164], можна одержати масову силу в результаті проходження серії мікророзрядів у плазмі для пилкоподібної напруги позитивної та негативної полярності. У даній моделі враховується утворення негативних іонів кисню, що дозволяє коректно відтворювати дифузійну структуру ДБР при прямому ході. Однак для випадку зворотного ходу, коли розряд розвивається в стримерній формі, модель не враховує фотоіонізацію повітря за рахунок ультрафіолетового випромінювання в області розряду. Встановлено [44], що фотоіонізація є основним джерелом затравочних електронів у механізмі формування стримера. Без урахування даного процесу довжина стримера виходить на порядок менше експериментальних значень.

У роботі [149] розроблено модель, яка враховує накопичення та релаксацію заряду протягом тільки одного мікророзряду. Цю модель було верифіковано з використанням наявних експериментальних даних по довжині розряду та розподілу густини заряду по поверхні діелектрика, але отриманих даних недостатньо для відтворення масової сили, що генерується ДБР при роботі ПА в реальних умовах. На практиці ПА створює потік повітря в результаті проходження великої кількості мікророзрядів протягом кожного напівперіоду прикладеної змінної напруги. Чисельне моделювання такої серії мікророзрядів у ході одного періоду напруги досить складна та трудомістка задача в плані обчислювальних витрат.

У роботі [196] за допомогою методу частинок в осередках і методу Монте-Карло (PIC-DSMC) проведено чисельне моделювання плазмового розряду і його взаємодію з потоком. Склад і фізика утворення плазми визначено кількісно. Отримані результати порівнювалися з експериментальними даними. Результати чисельного моделювання показали, що плазма генерується за допомогою електронної лавини в ДБР. Плазма утворюється в результаті руху електронної лавини від відкритого електрода до діелектричної поверхні над ізольованим електродом на першій половині циклу та навпаки, на другій половині циклу. Імпульс передається в потік на обох половинах циклу, але іонізація не еквівалентна протягом обох напівперіодів. Це приводить до створення плазмовим актуатором результуючої сили, що діє в одному напрямку. Хоча в цілому загальні ефекти були визначені кількісно за допомогою експериментів, точний характер плазми та її механізми передачі імпульсу не були досить якісно описані.

1.3 Огляд методів чисельного розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини

1.3.1 Узгодження полів тиску та швидкості

Метод маркерів і комірок (MAC). Одним з перших методів розв'язку рівнянь нестисливої рідини є метод маркерів і комірок (метод MAC), запропонований F. Harlow і J. Welch [209]. У цьому методі для зв'язку поля тиску з полем швидкості використовується рівняння Пуассона на кожному кроці за часом. До недоліків MAC відноситься використання тільки рознесеної сітки та необхідність розв'язку рівняння Пуассона. При реалізації цього методу можуть виникнути проблеми зі збіжністю розв'язку та постановкою граничних умов [142]. Подальше вдосконалення методу МАС пов'язано з веденням дрібних осередків і обчисленням положень маркерів, яке запропонували Chan зі співавторами [181, 182].

Метод розщеплення. Серед різних методів розв'язку рівнянь динаміки нестисливої рідини широке застосування одержав метод розщеплення. Відомо велике число різних його модифікацій і способів реалізації. Основна мета методу розщеплення полягає у зведенні складної задачі до послідовності найпростіших. При цьому згідно із класифікацією Н. Яненко [147] можна виділити аналітичне, геометричне та фізичне розщеплення.

Метод розщеплення може бути використаний для отримання розв'язку нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини [7, 35, 142, 156]. Загальне застосування цього методу складається із трьох кроків. На першому кроці відшукується проміжне поле швидкості, використовуючи рівняння кількості руху, у яких члени градієнта тиски обчислені за значенням тиску з попереднього тимчасового шару [7]. Наступним кроком є розрахунки поля тиску, який повинний задовольняти проміжному полю швидкості. На третьому кроці перенос здійснюється тільки за рахунок градієнта тиску.

Деталі розв'язку, що вимагають більш докладного розгляду різних аспектів, таких, як схеми диференціювання, інтегрування за часом і застосування граничних умов можна знайти в роботах [11, 156].

Алгоритми SIMPLE. У своїй основі метод SIMPLE має циклічну послідовність операцій «предиктор-коректор» при розв'язку вихідних рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини [34, 177]. Замість рівняння нерозривності розв'язується рівняння Пуассона для тиску. Це робиться для того, щоб зв'язати поле тиску та швидкості, що дозволяє відповідним чином моделювати природу нестисливих течій.

На початку розрахунків у рівняннях кількості руху градієнти тиску задаються приблизно. Після обчислення компонентів вектора швидкості, визначають тиск із рівняння Пуассона. Потім розраховують градієнти тиску та використовують їх значення в рівняннях руху, за якими знаходять уточнені значення компонент швидкості. Ця процедура повторюється доти, поки рівняння нерозривності не буде виконуватися із заданою точністю [142].

Тому що швидкість збіжності виявилася недостатньою, процедуру SIMPLE було модифіковано й отримала назву SIMPLER [34, 142]. У ній спочатку задається поле швидкості, а не поле тиску, як це було в SIMPLE. Поправки до швидкості в SIMPLER обчислюються так само, як і в процедурі SIMPLE, але використовуються повні рівняння Пуассона для тиску. У сімействі алгоритмів SIMPLE дискретизація вихідних рівнянь здійснюється за методом скінчених об'ємів.

Метод штучної стисливості. Щоб уникнути розв'язку рівняння Пуассона для знаходження поля тиску на кожному часовому шарі, A. Chorin [184] запропонував метод штучної стисливості. Теоретичні основи застосування методу штучної стисливості для розв'язку рівнянь Навье-Стокса нестисливої рідини можна знайти в [35, 140, 142]. У цьому методі до рівняння нерозривності додається похідна тиску від часу.

1.3.2 Апроксимація конвективних похідних

При реалізації методу штучної стисливості можуть бути застосовані ті ж різницеві схеми, що використовуються для рівнянь Ейлера та Нав'є-Стокса стисливого газу. Удосконалення чисельних методів розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса призвело до застосування методу скінчених об'ємів і алгоритмів розщеплення, що враховують напрямки поширення збурень.

Важливою властивістю чисельного методу в довільній системі координат є його монотонність і консервативність, які зводять до мінімуму збурювання, обумовлені методом розв'язку за рахунок різницевої апроксимації та кривизни сіткових ліній.

Використання центрально-різницевих схем для апроксимації конвективних членів вимагає, щоб у рівняння явно була додана штучна дисипація. Такі схеми складні в застосуванні, тому що параметр штучної дисипації доводиться підбирати для кожного конкретного випадку. Використання занадто великої штучної дисипації може привести до втрати точності обчислень [271].

Існує два основні класи протипоточних схем. До першого належать схеми TVD, які засновані на обмеженні порядку диференціювання поблизу розривів або областей з великим градієнтом тиску, де порядок диференціювання знижується, а сумарна дисипація зростає [271]. Розвиток TVD-алгоритмів призвів до створення багатьох нових [28], але в теж час родинних схем, таких, як UNO, TVD2, UNO2 [212], TVB [288], ENO [211, 213], AUSM [231, 232], WENO [233]. Різними авторами запропоновані обмежувачі, більшість із яких є немонотонними: MinMod В. Колгана [27], B. van Leer [311, 313], G. van Albada, B. van Leer, W. Roberts [307], ”superbee” P. Roe, J. Pike [268], ISNAS M. Zijlema [326, 327], MUSCL [312], B. Koren [223]. У роботах П. Хартвич і Ч. Су [144, 217], J. Gorski [205], M. Zijlema [326, 327], схеми TVD були застосовані до розв'язку рівнянь нестисливої рідини.

До другого типу відносяться схеми, засновані на значеннях власних чисел конвективних потоків. В основному, ці схеми розроблялися стосовно до рівнянь Ейлера та Нав'є-Стокса стисливого газу [265, 266]. Для нестисливої рідини S. Rogers і D. Kwak [270, 271, 272] розробили схему, засновану на протипоточній апроксимації розщеплених різниць вектора потоків.

1.4 Огляд підходів до моделювання турбулентності

Турбулентні течії відіграють ключову роль у багатьох практичних задачах, наприклад, в аерокосмічній промисловості, автомобілебудуванні, суднобудуванні, технологічних процесах, двигунобудуванні та ін. Незважаючи на величезні зусилля вчених та інженерів, турбулентні течії до кінця не вивчені та важко передбачувані. Ця область аеродинаміки є однією, що розвивається, найбільш динамічно. Тут вводяться нові припущення, гіпотези і поняття. Особлива увага приділяється розумінню фізики турбулентного потоку і підвищення рівня існуючих концепцій і моделей.

Переважна більшість інженерних задач суттєво залежить від турбулентності. Турбулентність впливає на опір різних тіл, відрив потоку, розподіл різномасштабних вихорів, що у свою чергу може вплинути на якісну поведінку структури течії. Характер взаємодії повітря з обтічним тілом вимагає докладних вимірювань, які є дорогими та трудомісткими. До того ж деякі вимірювання практично неможливо провести в лабораторних умовах. Тому математичне моделювання процесів аеродинаміки часто буває більш інформативним у прогнозуванні характеристик турбулентного потоку.

Моделювання турбулентності є ключовим питанням у більшості CFD задач. Практично всі інженерні задачі пов'язані з високими числами Рейнольдса та, отже, вимагають застосування моделей турбулентності.

Вибір підходу для моделювання турбулентності при розрахунках аеродинамічних характеристик становить окрему проблему. На даний момент не існує універсального підходу для моделювання турбулентності в широкому діапазоні течій. Вибір підходу залежить від характеру турбулентного потоку, необхідної точності, доступних обчислювальних ресурсів, і тимчасових витрат необхідних на процес моделювання.

Існує чотири основні напрямки моделювання турбулентних течій [296]:

- Моделювання на базі осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (RANS)
    - Лінійні моделі вихрової в'язкості
        - Алгебраїчні моделі
        - Однопараметричні моделі
        - Двопараметричні моделі
    - Нелінійні моделі вихрової в'язкості
    - Модель переносу напруг Рейнольдса (RSM)
- Моделювання великих вихорів (LES)
- Гібридні моделі
    - Моделювання відокремлених вихорів (DES)
    - Моделювання відокремлених вихорів із затримкою (DDES, IDDES)
    - Моделювання адаптивних масштабів (SAS)
- Пряме чисельне моделювання (DNS)

1.4.1 Моделі турбулентності на базі осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (RANS)

Моделювання на базі осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds-Averaged Navier-Stokes – RANS) використовує запис рівняння переносу осередненого за часом течії, з усіма передбачуваними масштабами турбулентності. Такий підхід суттєво зменшує обчислювальні ресурси, необхідні для чисельного розв'язку задачі. У той самий час даний підхід погано відтворює течії з масивним відривом потоку. Крок за часом визначається нестаціонарними параметрами осередненого потоку, а не турбулентністю.

У методі RANS застосовуються алгебраїчні або диференціальні моделі турбулентності. Створення моделей турбулентності – це спроба математичного опису на основі деяких теоретичних міркувань взаємодії вихорів різного масштабу в діапазоні від колмогоровського (порядку декількох мікронів) до великомасштабної турбулентності, зрівняної з масштабами обтічного тіла. Існує кілька десятків моделей турбулентності, розроблених для різних класів течій. Універсальної моделі не існує і навряд чи така коли-небудь буде створена. На сьогоднішній момент розрахунки на основі RANS широко застосовуються в промисловій практиці.

У цей час в більшості практичних розрахунків осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса вирішуються разом з моделлю турбулентності. Метод осереднення за Рейнольдсом для моделювання турбулентності вимагає визначення Рейнольдсових напружень.

Зазвичай використовується гіпотеза Буссінеска [170], в якій тензор Рейнольдсових напруг пропорційний тензору швидкостей деформацій. У якості коефіцієнта пропорційності виступає турбулентна в'язкість. Гіпотеза Буссінеска використовується в лінійних моделях турбулентності Baldwin-Lomax [159], Johnson-King [221], Baldwin-Barth [158], Spalart-Allmaras [295], $k-\varepsilon$ [226], $k-\omega$ [322] і нелінійних моделях турбулентності V2F [190], а також у їх модифікаціях. Перевага цієї методики полягає в невеликих обчислювальних ресурсах.

Альтернативний підхід, втілений у моделі Рейнольдсових напруг (Reynolds Stress Model – RSM) [143], полягає в тому, що рівняння переносу відповідних величин замикаються за допомогою тензора Рейнольдсових напружень. У якості додаткового використовується рівняння переносу для швидкості турбулентної дисипації ε, яке необхідне для визначення масштабу турбулентності. Це означає, що для двовимірних задач потрібно 5 додаткових рівнянь переносу, а для тривимірних 7.

У багатьох випадках, моделі, засновані на гіпотезі Буссінеска, працюють досить якісно, і використання RSM моделі є невиправданим з погляду обчислювальних витрат.

Класифікацію моделей турбулентності можна знайти в роботах [143].

Лінійні моделі вихрової в'язкості

Алгебраїчні моделі. В алгебраїчних моделях вихрової в'язкості типу шляху змішування Прандтля [143], масштаб турбулентної швидкості та довжини співвідносяться з локальним градієнтом середньої швидкості та характеристичною довжиною в примежових шарах, такими як ширина примежового шару або відстань до стінки. Одними з найпоширеніших алгебраїчних моделей є моделі Baldwin-Lomax [159] і Cebeci-Smith [179, 180]. Моделі типу шляху змішування ґрунтуються на неявному допущенні локальної рівноваги турбулентності, тому вони не можуть моделювати ефекти переносу та передісторію турбулентності. Модель Johnson-King [221] займає проміжне місце між алгебраїчними та диференціальними моделями. У даній моделі введене звичайне диференціальне рівняння для обліку максимального дотичного напруження в примежових шарах відповідно до гіпотези Bradshaw [171]. Вона показала задовільні результати при наявності слабкого відриву.

Однак ці моделі ґрунтуються на простих емпіричних формулах для опису розподілу масштабу довжини, які застосовуються тільки для рівноважних примежових шарів. Тому алгебраїчні моделі не рекомендується використовувати для розрахунку течій з масивним відривом потоку.

Однопараметричні моделі. У моделі турбулентності Baldwin-Barth [271] для обліку передісторії течії використовується рівняння переносу вихрової в'язкості. Дана модель містить у собі сім коефіцієнтів замикання та три емпіричні демпфіруючи функції. Модель Baldwin-Barth незадовільно працює в течіях з розвиненим і масивним відривом потоку [39]. Модель турбулентності Spalart-Allmaras (SA) [295] розроблено у 1992 році та призначено для опису рівноважних течій типу примежового шару для задач зовнішнього обтікання при малих кутах атаки з невеликими відривними зонами. У 1997 році P. Spalart і M. Shur запропонували модифікацію вихідної моделі SARC (Spalart-Allmaras for Rotation and Curvature) [297] введенням додаткових евристичних функцій для обліку кривизни ліній течії та обертання твердої обтічної поверхні. У 2003 році співробітниками TU Berlin було запропоновано модифікацію SALSA (Strain-Adaptive Linear Spalart-Allmaras Model) [279], у якій генерація турбулентності зв'язувалася не з ротором поля швидкості, а з тензором швидкостей деформацій. Крім того, на основі досвіду використання первісної моделі були внесені зміни в деякі константи. Різного роду модифікації дозволили більш точно враховувати нестаціонарні ефекти в турбулентності. Моделі SA [295], SARC [297], SALSA [279] добре зарекомендували себе при розв'язку задач зовнішньої дозвукової аеродинаміки.

Двопараметричні моделі. Стандартна $k-\varepsilon$ модель, запропонована B. Launder і D. Spalding [226], набула широкого застосування при розв'язку практичних інженерних задач. На базі стандартної $k-\varepsilon$ з урахуванням її недоліків були створені RNG $k-\varepsilon$ [324] і Realizable $k-\varepsilon$ моделі [226]. Обидві моделі Realizable і RNG $k-\varepsilon$ показують істотну перевагу перед стандартною $k-\varepsilon$ моделлю турбулентності для скривлених, вихрових і обертових потоків.

Стандартну $k-\omega$ модель розроблено D. Wilcox [322], адаптовано для розрахунку відривних течій з низьким числом Рейнольдса, що враховує вплив стисливості. У цій моделі розв'язуються два додаткові рівняння переносу для турбулентної кінетичної енергії k, і специфічної швидкості дисипації ω. Дана модель показує задовільні результати розрахунків примежових шарів і потоків при низьких числах Рейнольдса.

Модель переносу дотичних напружень (Shear-Stress Transport – SST), є різновидом стандартної $k-\omega$ моделі, що була розроблена F. Menter [240] у 1993 році. Дана модель ефективно поєднує стійкість і точність стандартної $k-\omega$ моделі в пристінкових областях і $k-\varepsilon$ моделі далеко від стінок. SST модель пройшла тривалу апробацію та добре зарекомендувала себе в процесі використання.

Нелінійні моделі вихрової в'язкості

P. Durbin [190] розробив у 1995 році модель V2F, яка містить чотири рівняння щодо чотирьох змінних: кінетичної енергії k, швидкості дисипації ε, нормальних флуктуацій v^2 та еліптичної релаксаційної функції f. Важливим елементом моделі V2F є здатність враховувати нелінійні ефекти тиску-напруги та анізотропію турбулентності. Низькорейнольдсова модель V2F, як і стандартна модель $k-\varepsilon$, не вимагає ніяких демпфуючих функцій поблизу стінки.

Зроблені спроби звести диференціальні рівняння моделі переносу напруг Рейнольдса до алгебраїчних шляхом введення допущень, що спрощують конвективні та дифузійні доданки у рівнянні переносу. У результаті в 1993 році T. Gatski і C. Speziale [201] було отримано модель явних алгебраїчних напруг EASM (Explicit Algebraic Stress Model), яка є розширенням $k-\varepsilon$ моделі. Модифікація цієї моделі з урахуванням корекції на кривизну ліній течії (Curvature Corrected), одержала назву EASMCC [201]. Моделі EASM і EASMCC сконструйовані для течій рідини та газу з явно вираженою анізотропією потоку.

Модель переносу напруг Рейнольдса

Модель переносу напруг Рейнольдса [143] є однією із найскладніших моделей турбулентності. У ній не використовується припущення про ізотропність турбулентної в'язкості, а для замикання осереднених за

Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса, розв'язуються рівняння переносу для Рейнольдсових напруг разом з рівнянням для швидкості турбулентної дисипації.

Тому що модель RSM описує ефекти кривизни, обертання, різкої зміни напруг між шарами більш строго, ніж одно- та двох параметричні моделі турбулентності, то вона має більший потенціал для більш точних розрахунків складних потоків. Однак RSM модель все-таки має деякі спрощення, які були прийняті при складанні рівнянь переносу Рейнольдсових напруг. Використання цієї моделі турбулентності рекомендується у випадках, коли анізотропність турбулентного потоку впливає на характер турбулентної течії (циклони, сильно закручені потоки в камерах згоряння, вторинні течії в каналах, викликані великими нормальними напруженнями).

1.4.2 Моделювання великих вихорів (LES)

Модель LES (Large Eddy Simulations – LES) заснована на поділі вихорів різних масштабів, є проміжною ланкою між підходами DNS і RANS. У моделі LES більші вихори описуються в нестаціонарній постановці з використанням системи «фільтруючих» співвідношень. Набір «фільтруючих» співвідношень служить для виключення з розрахунку підсіточних вихорів Колмогоровського масштабу, тобто вихорів, розмір яких менше комірок розрахункової сітки. Ця особливість дозволяє явно описати великі вихори в розрахунках і неявно враховувати дрібні вихори за допомогою підсіточної моделі (SGS). Застосування моделі LES у промислових задачах вкрай обмежене та можливе лише в досить простих геометричних областях, що в основному пов'язано з високими вимогами даних моделей до обчислювальних ресурсів.

1.4.3 Гібридні моделі

Обмежені можливості моделей турбулентності для RANS стимулювали пошук нових підходів до моделювання течій, що поєднують у собі економічність рівнянь Рейнольдса з універсальністю методу великих вихорів. Труднощі, пов'язані з використанням стандартних LES моделей, особливо в пристінкових областях, призвело до розробки гібридних моделей, які намагаються об'єднати кращі властивості RANS і LES підходів в єдину модель. Прикладом гібридного методу є моделювання відокремлених вихорів (Detached Eddy Simulation – DES) [296]. Ця модель використовує RANS у пристінковій області, а в іншій області працює LES підхід.

Модель DES, запропонована P. Spalart [296], є гібридом двох попередніх підходів і полягає в об'єднанні моделі LES для опису великомасштабної турбулентності та RANS для дрібномасштабної. Концепцію вперше реалізовано разом з моделлю турбулентної в'язкості Spalart-Allmaras [295].

1.4.4 Пряме чисельне моделювання турбулентності

Пряме чисельне моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation – DNS) є самим загальним підходом в обчислювальній гідродинаміці, засноване на чисельному розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса без будь-яких замикаючих припущень і моделей турбулентності. Це означає, що для всього діапазону просторових і часових масштабів турбулентності необхідно забезпечити роздільну здатність. Тут потрібен облік динаміки виникнення та руйнування турбулентних вихорів практично на молекулярному рівні. Обчислювальні витрати на DNS є дуже високими, навіть при невеликих числах Рейнольдса. Для чисел Рейнольдса, що зустрічаються в більшості промислових задач, обчислювальні ресурси, необхідні для DNS, будуть перевищувати потужність самого потужного комп'ютера в цей час. Проте, пряме чисельне моделювання є корисним інструментом у фундаментальних дослідженнях в області турбулентності. Такий підхід є науково-дослідним в обчислювальній гідродинаміці. Він дуже дорогий навіть для індустріально розвинених країн і його впровадження в промисловість прогнозується на другу половину XXI століття.

Розв'язок нестаціонарних неосереднених рівнянь Нав'є-Стокса без будь-яких замикаючих співвідношень при великих числах Рейнольдса на даний момент є неможливим через великі обчислювальні витрати. Існують альтернативні способи розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса, у яких не враховуються дрібномасштабні турбулентні пульсації: метод осереднення за Рейнольдсом (RANS) та метод фільтрації (LES). Ці методи вимагають додаткових співвідношень для замикання вихідної системи.

1.5 Огляд моделей і методів моделювання ламінарно-турбулентного переходу

В динаміці рідини існує три форми руху: ламінарна, турбулентна та перехідна. Ламінарна течія вниз за потоком втрачає стійкість і стає турбулентною. Цей процес називається ламінарно-турбулентним переходом. Якщо цей процес відбувається усередині примежового шару, то говорять про перехід примежового шару.

Ламінарно-турбулентний перехід – складне явище, яке містить у собі кілька різних механізмів. В останні десятиліття значні зусилля були присвячені дослідженням цієї проблеми. За своєю природою ламінарно-турбулентний перехід відноситься до проблеми турбулентності, одному з фундаментальних явищ у гідродинаміці, дослідженням якого займаються вже протягом більш ста років. Для опису переходу розроблені різні теорії, аналітичні або чисельні методи.

Ламінарно-турбулентний перехід має велике значення в різних галузях промисловості при розробці сучасних літаків, вертольотів, безпілотників, роторів вітроенергетичних установок, кораблів, підводних човнів, реактивних двигунів та інших пристроїв. Ламінарні та турбулентні примежові шари мають різні аеродинамічні та теплообмінні характеристики. Так ламінарний примежовий шар має менше поверхневе тертя у порівнянні з турбулентним. Крім того, швидкість теплопередачі в турбулентному примежовому шарі набагато вище, ніж у ламінарному шарі. Ці факти використовують, щоб поліпшити аеродинамічні та теплові характеристики транспортного засобу. Хоча виникають ситуації, коли турбулентний примежовий шар є бажаним через його кращу стійкість до позитивних градієнтів тиску та відриву потоку. Тому, щоб запобігти або затягти відрив потоку ламінарний примежовий шар спеціально турбулізують.

Вивчення ламінарно-турбулентного переходу проводиться за допомогою льотних випробувань, продувок в аеродинамічних трубах, теоретичного аналізу, математичного моделювання або комбінацій цих підходів.

1.5.1 Режими ламінарно-турбулентного переходу

Можна виділити [237] п'ять основних режимів ламінарно-турбулентного переходу: природний, вимушений, відривний, зворотний і перехід, викликаний нестійкістю поперечної течії.

Природний перехід. Природний (нормальний) перехід зазвичай відбувається на гладкій поверхні при низькому рівні турбулентності (Tu) у потоці, що набігає (Tu < 1%) [237]. Цей перехід характеризується утворенням двовимірних хвиль Толлміна-Шлихтинга в поздовжньому напрямку, які ростуть по амплітуді. Перехід відбувається після того, як хвилі стають нелінійними, і в гру вступають нев'язкі механізми, які призводять до тривимірних збурень. Турбулентні плями народжуються та ростуть у навколишньому ламінарному шарі, поки вони в остаточному підсумку не зливаються в турбулентний примежовий шар [237].

Вимушений (обхідний, байпасний) перехід. Вимушений перехід відбувається при високому рівні турбулентності у вільному потоці (Tu > 1%) [238]. Перші дві стадії природного перехідного процесу можна повністю обійти, так що турбулентні плями утворюються безпосередньо в примежовому шарі. Вимушений перехід є найбільш поширеним режимом ламінарно-турбулентного переходу в промислових задачах. Цей тип переходу звичайно реалізується на лопатках у газотурбінних двигунах і на лопатях вертолітного гвинта.

Відривний перехід. Відривний перехід відбувається, коли ламінарний примежовий шар відривається через позитивний градієнт тиску або велику кривизну поверхні та знову приєднується у вигляді вже турбулентного примежового шару вниз за потоком. У результаті формується відривний пузир, як правило, на передній крайці аеродинамічного профілю. Залежно від розподілу тиску та рівня турбулентності змінюються і розміри відривного пузиря, що впливає на аеродинамічні характеристики обтічного тіла. Відривний перехід зустрічається головним чином у компресорах і турбінах низького тиску [237], а також при обтіканні аеродинамічних профілів.

*Зворотний перехід (*реламінарізація*).* Реламінарізація – це перехід від турбулентної течії до ламінарної. Зворотний перехід виникає при сильному прискоренні потоку. Найбільш характерним механізмом виникнення реламінарізації є дисипація турбулентної енергії. Це відбувається, коли в турбулентному потоці дисипація перевищує генерацію турбулентної енергії, і потік повертається в ламінарний стан [237].

Перехід, викликаний нестійкістю поперечної течії. Такий вид переходу є повністю тривимірним явищем і зустрічається, як правило, на крилах літака, лопатях гелікоптера, де відбувається зміна профілю швидкості в поперечній течії [237].

1.5.2 Фактори, що впливають на ламінарно-турбулентний перехід

Виникнення ламінарно-турбулентного переходу, а також режим, за яким буде розвиватися перехід, залежить від геометричних параметрів обтічного тіла та характеристик потоку, що набігає. До них відносяться: рівень турбулентності потоку, що набігає, градієнт тиску, шорсткість поверхні, а також ефекти стисливості, масо- і теплообміну.

Оскільки існує багато складних факторів, які можуть впливати на перехід, дотепер не було знайдено задовільної теорії для опису процесу переходу. Походження турбулентності усе ще залишається невирішеною проблемою в механіці рідини і газу [237].

Рівень турбулентності потоку, що набігає. Високий рівень турбулентності (Tu) потоку, що набігає, призводить до зміни режиму ламінарно-турбулентного переходу від природного до байпасного. Високі рівні турбулентності характерні, як правило, для внутрішніх течій [237]. Крім того великі значення впливають на відривний перехід – чи буде відривний пузир ламінарним і знову приєднається як турбулентний потік або сформується масивний відрив.

Градієнт тиску. Градієнт тиску є важливим параметром, який сильно впливає на початок ламінарно-турбулентного переходу. Так негативний градієнт тиску призводить до затягування переходу, у той час як позитивний градієнт тиску сприяє початку переходу [237]. До того ж сильний негативний градієнт тиску може призводити до реламінарізації потоку.

Шорсткість поверхні. При малій шорсткості обтічної поверхні реалізується природний режим ламінарно-турбулентного переходу. Велика шорсткість поверхні призводить до зміни режиму переходу від природного до байпасного. До того ж вплив шорсткості сильно залежить від числа Рейнольдса та зіставне з впливом рівня турбулентності потоку, що набігає [237].

Ефекти стисливості, масо- і теплообміну. Стисливість повітря впливає на ламінарно-турбулентний перехід. Масообмін виявляє більш істотний вплив, ніж стисливість повітря. Так вдув призводить до інтенсифікації переходу, включаючи зміну самого характеру переходу від природного до байпасного. У той самий час відсмоктування примежового шару призводить до затягування ламінарно-турбулентного переходу [237]. Охолодження поверхні, що обтікається повітрям, призводить до зміщення точки переходу вниз за потоком, а обтікання водою – вверх по потоку, тому що зміняться кінематична в'язкість середовища. Вплив цих процесів має практичне значення при розробці технологій керування потоком.

1.5.3 Моделі ламінарно-турбулентного переходу

На сьогоднішній день однією з проблем обчислювальної аеродинаміки є моделювання турбулентності та врахування ламінарно-турбулентного переходу, а також зворотного процесу – реламінарізації. Велика кількість течій, що зустрічаються на практиці є перехідними. У цих течіях присутня як ламінарна форма руху рідини або газу, так і турбулентна. До таких відносяться течії в газових турбінах, у теплообмінниках ядерних реакторів, на крилах літальних апаратів (безпілотників), на елементах конструкцій вітроенергетичних установок.

Найчастіше при розгляді такого роду задач ламінарною зоною зневажають і розглядають усю область течії як турбулентну. Від того чи є течія ламінарною або турбулентною залежить розподіл тертя, теплових потоків і тиску по поверхні обтічного тіла. Нехтування зоною ламінарно-турбулентного переходу може привести до істотних похибок у визначенні інтегральних характеристик. Основні напівемпіричні моделі турбулентності, розроблені для замикання осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса, не в змозі змоделювати перехід. Це призвело до створення нового напрямку в обчислювальній аеродинаміці, головною метою якого є моделювання ламінарно-турбулентного переходу.

Методи моделювання ламінарно-турбулентного переходу можна розділити на три основні класи: аналітичні, статистичні й методи прямого моделювання переходу (LES, DNS).

Аналітичні методи

Аналітичні методи, засновані на теорії стійкості, базуються на гіпотезі малих збурень Прандтля та розроблялися з метою передбачення початку природного переходу при низькому рівні турбулентності потоку, що набігає. До цих методів належать метод e^N, розроблений A. Smith [292] і J. van Ingen [310], а також метод, заснований на параболізованих рівняннях стійкості (parabolized stability equations – PSE) T. Herbert [214].

Метод e^N. Метод e^N, розроблений A. Smith [292] і J. van Ingen [310] більше 60 років тому, є одним з найпопулярніших методів у даному класі. Цей метод заснований на лінійній теорії стійкості в припущенні про плоскопаралельну структуру потоку та розраховує зростання амплітуд збурень від точки початку примежового шару до місця переходу. Параметр N – сумарна швидкість росту найбільш нестабільних збурень. Основна проблема методу e^N полягає в тому, що через прийняті припущення про плоскопаралельну структуру течії він не може передбачити байпасний перехід, викликаний нелінійними ефектами. Крім того, значення N для початку переходу не є універсальним параметром і вимагає коректування на основі експериментальних даних під кожний клас течій. Отже, метод e^N вважається в кращому разі напівемпіричним методом.

Метод, заснований на параболізованих рівняннях стійкості. З метою обліку нелінійних ефектів, які не враховуються в лінійній теорії стійкості T. Herbert [214] запропонував метод, заснований на параболізованих рівняннях стійкості. Даний метод дозволяє розраховувати перехідну область після точки початку переходу. Однак цей метод вимагає розрахунок зростання амплітуд збурень уздовж ліній течії, що являє собою значні труднощі для тривимірних розрахунків, оскільки напрямок лінії течії не завжди збігається з поверхнею тіла. Крім того, розвиток хвиль збурень сильно залежить від початкової амплітуди хвилі, яка не є універсальною, як і N – параметр у методі e^N. Тому застосування даного методу в задачах зі складною геометрією представляється проблематичним.

Статистичні методи

Статистичні методи моделювання ламінарно-турбулентного переходу містять у собі моделі, що використовують коефіцієнт переміжності, і моделі, що використовують ламінарну кінетичну енергію.

Моделі, що використовують коефіцієнт переміжності. Моделі, що базуються на понятті коефіцієнта переміжності γ, одержали широке поширення при розв'язку задач обчислювальної аеродинаміки. Коефіцієнт переміжності γ є мірою ймовірності того, що дана точка в просторі перебуває всередині турбулентної області. Інакше кажучи, це частка часу, коли потік є турбулентним. Діапазон зміни коефіцієнта переміжності дорівнює від нуля до одиниці. Значення нуля відповідає ламінарній течії, значення одиниці являє собою повністю турбулентний потік.

При побудові моделей ламінарно-турбулентного переходу, які використовують поняття коефіцієнта переміжності необхідно розв'язати дві задачі. По-перше, треба одержати розподіл коефіцієнта переміжності в розрахунковій області, а, по-друге, визначити критерій початку переходу.

Найвідомішими та поширеними моделями в цій групі є *γ-модель* переходу Y. Suzen і P. Huang [301], γ-модель F. Menter і P. Smirnov [242], γ-модель байпасного переходу P. Durbin [189] і γ-Re_θ модель R. Langtry і F. Menter [225, 241]. Найбільш вдалою є γ-Re_θ модель ламінарно-турбулентного переходу, яка розроблялася для спільного використання з моделлю турбулентності SST Menter. В γ-Re_θ моделі розв'язується два рівняння переносу: одне для переміжності γ та інше для критичного числа Рейнольдса втрати імпульсу Re_θ.

Надалі γ-Re_θ модель було адаптовано до моделі турбулентності Spalart-Allmaras (SA) [185]. У новій модифікації, рівняння переносу для критичного числа Рейнольдса втрати імпульсу Re_θ замінено алгебраїчним співвідношенням. У результаті комбінація нової моделі переходу з моделлю турбулентності Spalart-Allmaras одержала назву модель SA γ.

Моделі, що використовують ламінарну кінетичну енергію. На відміну від моделей, що використовують поняття переміжності, D. Walters і J. Leylek [318] запропонували підхід, в якому розв'язується рівняння переносу ламінарної кінетичної енергії. Цей метод заснований на ідеї, що байпасний перехід викликаний поздовжніми флуктуаціями дуже великої амплітуди, які сильно відрізняються від турбулентних пульсацій. У пристінній області турбулентна кінетична енергія k_T розділяється на дрібномасштабну та великомасштабну. Дрібномасштабна енергія вносить безпосередній вклад у генерацію турбулентності, а великомасштабна призводить до генерації ламінарних пульсацій k_L. Спочатку k_T-k_L-ε модель [318] будувалася на k-ε моделі турбулентності. У роботі D. Walters і D. Cokljat [317] було запропоновано k_T-k_L-ε модель, яка базувалася на k-ω моделі турбулентності. Основна проблема цих моделей полягає в тому, що калібрування ламінарно-турбулентного переходу впливає на розв'язок, що отримується при розрахунку повністю турбулентних течій. Крім того ці моделі здатні описати лише деякі режими ламінарно-турбулентного переходу.

Методи прямого моделювання переходу

Пряме чисельне моделювання (Direct Numerical Simulation – DNS) дозволяє моделювати ламінарно-турбулентний перехід, тому що базується на нестаціонарних рівняннях Нав'є-Стокса та не потребує будь-яких моделей турбулентності для замикання вихідних рівнянь. Проте, для такого підходу необхідна детальна сітка, щоб забезпечити роздільну здатність всіх масштабів турбулентності, включаючи колмогоровський. Мінімальна кількість вузлів у розрахунковій сітці повинно бути порядку Re^3. Незважаючи на швидкий ріст обчислювальної техніки, практичне застосування даного підходу обмежене малими числами Рейнольдса.

Моделювання великих вихорів. Як альтернативний варіант прямому чисельному моделюванню можна використовувати метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES) на основі моделі Смагоринського для опису поведінки дрібномасштабних вихорів. Однак даний похід дуже чутливий до значення константи Смагоринського. Тому для поліпшення якості моделювання ламінарно-турбулентного переходу на основі LES підходу доцільно використовувати динамічні моделі для опису дрібномасштабних вихорів, типу Germano [202], оскільки підсіткова вихрова в'язкість у динамічній моделі автоматично знижується до нуля у ламінарному примежовому шарі.

Оскільки DNS і LES забезпечують роздільну здатність усіх масштабів турбулентності, то такі підходи здатні моделювати всі режими ламінарно-турбулентного переходу. Однак обчислювальні витрати для методів DNS і LES надмірно високі. Тому застосування цих методів для моделювання ламінарно-турбулентного переходу в основному обмежено простими конфігураціями та невеликими числами Рейнольдса.

1.6 Методи створення дискретного простору

Розвиток обчислювальної аеродинаміки та зростання інтересу до дослідження більш складних аеродинамічних форм призвели до вдосконалювання та ускладнення чисельних методів розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса, а також посилення вимог, що пред'являються до дискретизації розрахункової області в препроцесорі в сучасних пакетах обчислювальної аеродинаміки.

Основна задача препроцесора – створення поблизу обтічного тіла дискретного простору, логічно взаємопов'язаного з використовуваним чисельним алгоритмом. Створення багатоблочного дискретного простору включає у собі розв'язок наступних задач:

– інтерполяцію обтічної поверхні;

– задання (однозв'язної або багатозв’язної) розрахункової області;

– розбивка розрахункової області на підобласті;

– побудова розрахункових сіток у кожній підобласті;

– визначення параметрів контрольних об'ємів для кожної розрахункової сітки;

– встановлення топологічного взаємозв'язку між підобластями;

– визначення процедур перерахування геометричних параметрів підобластей і взаємозв'язків між ними при русі окремих блоків;

– розміщення шуканих гідродинамічних величин у кожній підобласті, включаючи комірки (контрольні об'єми), необхідні для завдання граничних умов на зовнішніх межах розрахункової області;

– вибір (розробку) алгоритмів розрахунку (інтерполяції) шуканих величин на внутрішніх межах між підобластями.

Широке застосування отримали три основні типи розрахункових сіток: неструктуровані, багатоблочні структуровані та багатоблочні пересічні структуровані (типу Chimera) (рис. 1.4).

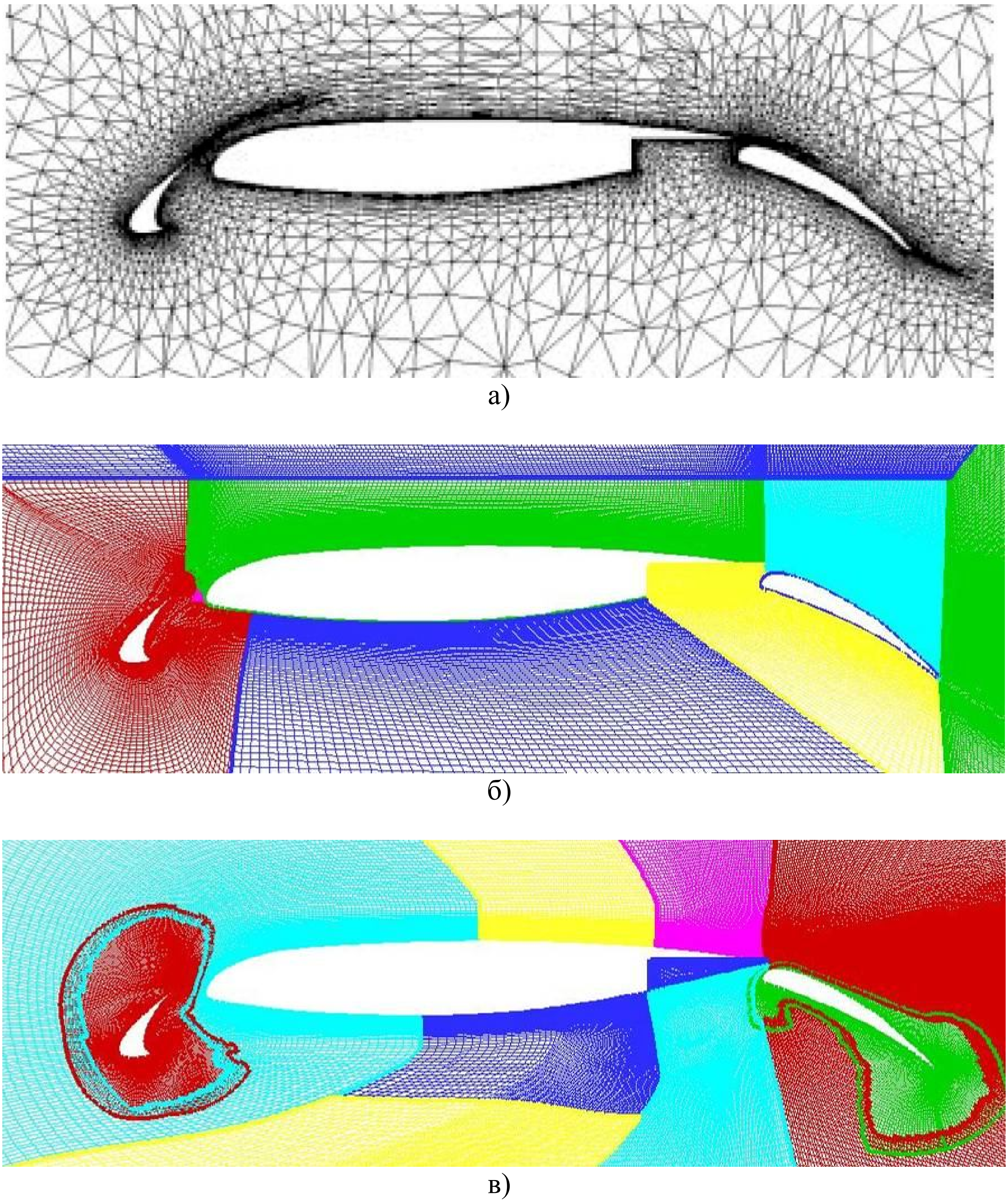


Рисунок 1.4 – Методи побудови дискретного простору (сіток) навколо тіла: а – неструктурована одноблочна сітка [168]; б – структурована багатоблочна сітка; в – багатоблочна пересічна структурована сітка (типу Chimera).

Кожна із цих сіток має свої переваги та недоліки (табл. 1.3). Так, основна перевага неструктурованої сітки – це можливість її генерації навколо тіл довільної форми включаючи багатозв’язні області, а також адаптація до областей великих градієнтів. До недоліків можна віднести складний чисельний алгоритм реалізації солвера, а також його низьку роздільну здатність у примежових шарах. До того ж вимоги, що пред'являються до обсягу оперативної пам'яті при використанні даного виду сітки, у кілька разів вище, ніж для структурованих.

Основна перевага структурованої сітки без перетинів – можливість створення на їх основі простого алгоритму для солвера, а також висока роздільна здатність у примежових шарах. Головним недоліком є жорстка зв'язаність кількості вузлів сусідніх блоків по суміжних напрямках.

Таблиця 1.3 – Порівняльна характеристика сіток

	Неструктурована	Структурована багатоблочна	Структурована пересічна
Генерація сітки для тіл складної геометрії	+	–	+ –
Рух сіток відносно один одного	+ –	–	+
Адаптація сітки	+	–	+
Чисельний алгоритм	–	+	+
Роздільна здатність в'язких шарів	–	+	+
Вимоги до пам'яті	–	+	+
Вимоги до процесора	–	+	+

Багатоблочні пересічні (з нахлестом) структуровані сітки, відомі також як Chimera, виникли на початку 80-х [160, 161] і одержали широке поширення в 90-х роках минулого століття. Вони поєднують в собі переваги неструктурованої та структурованої багатоблочної сітки і, до того ж, позбавлені головного недоліку структурованих багатоблочних сіток – рівної кількості вузлів сусідніх блоків по суміжних напрямках. Окремою проблемою стоїть рух сіток відносно один одного при розв'язку задач динаміки елементів профілю. Для багатоблочної пересічної структурованої сітки можливість руху блоків закладено початково.

Стратегія даного підходу полягає в розбивці складної обчислювальної області на більш дрібні, які можна уявити відносно простими розрахунковими сітками. Основною задачею є забезпечення передачі структури даних між обчислювальними сітками. Кожна сітка обчислювальної області входить до препроцесору для визначення взаємозв'язку між сітками та розрахунку інтерполяційних даних.

Інтерполяційні дані, які передаються в обчислювальне ядро, містять у собі список інтерполяційних точок, інтерполяційні коефіцієнти, донорні комірки для кожної інтерпольованої точки. У інтерполяційні дані також включається (входить або повинен входити) список точок, які вилучаються з обчислювальної області, якщо ті потрапляють всередину твердого тіла.

На сьогоднішній день найбільш універсальним є препроцесор PEGASUS [275], який розробляється в NASA впродовж трьох десятиліть. Існують й інші препроцесори (DCF3D [239], Beggar [222], FASTRAN [320], Overture [174]) для багатоблочних пересічних структурованих сіток, які мають різний рівень автоматизації. Кожен з цих препроцесорів видає список інтерполяційних даних, які необхідні для обчислювального ядра. Так, автоматизований препроцесор PEGASUS успішно застосовується з наступними CFD-кодами: Overflow, NXAIR, INS3D.

1.7 Пакети прикладних програм обчислювальної аеродинаміки

Сучасний етап розвитку обчислювальної аеродинаміки характеризується розробкою програмних продуктів, реалізованих у вигляді пакетів прикладних програм. Розвиток обчислювальної аеродинаміки зберігає високі темпи завдяки безперервному вдосконалюванню елементної бази обчислювальної техніки, розширенню парку доступної для аеродинаміків-обчислювачів високопродуктивних комп'ютерів.

Сучасні пакети програм, орієнтовані на розв'язок задач обчислювальної гідродинаміки, можна розділити на три групи.

До *першої* групи належать науково-прикладні пакети, що розробляються у великих дослідницьких центрах США та країнах Західної Європи (NASA – США, ONERA – Франція, DLR – Німеччина, NLR – Нідерланди), а також у корпораціях Boeing, Lockheed та ін. Ці програмні засоби розбудовувалися протягом декількох десятиліть і призначені, у першу чергу, для розв'язку прикладних задач аерокосмічної промисловості. Вони припускають використання суперкомп'ютерів з масовим розпаралелюванням обчислювальних процесів для отримання результатів у реальний термін. Крім того, як показує огляд наукової літератури, нові підходи до розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса, нові моделі турбулентності перед впровадженням у практику відпрацьовуються в рамках даних програмних засобів. На жаль, дані пакети програм є інтелектуальною власністю розроблювачів і, як правило, недоступні для широкого кола дослідників.

До *другої* групи слід віднести комерційні CFD програми, такі як ANSYS CFX, ANSYS Fluent, STAR-CD, FLOW-3D, ACE-U, SolidWorks, CFD++, FlowVision та ін. Наприклад, бюджет ANSYS на 2018 рік становив близько 3,27 млрд. доларів. А вартість однієї ліцензійної копії пакету ANSYS – 50÷200 тис. доларів. Крім того, розбудовуються комерційні програми, призначені для обслуговування окремих етапів задач CFD: генерація сіток (Gridgen, Chimera), візуалізації течій (Tecplot). Ці програмні засоби з'явилися наприкінці 1980-х і початку 2000-х років. Об'єктивною метою комерційних CFD програм є допомога проектувальникам, пов'язаним з розв'язком задач обчислювальної гідродинаміки, які не мають реальних можливостей для розробки власних CFD пакетів. З погляду застосовуваних апаратних засобів, комерційні пакети призначені для експлуатації на персональних комп'ютерах або кластерах ПК. Це, у свою чергу, веде до зниження вірогідності одержуваних результатів на користь автоматизації розрахунків.

Третю групу складають CFD програми, що розробляються в університетах і невеликих науково-дослідних центрах практично у всіх розвинених країнах. Колективи співробітників звичайно невеликі (4÷10 учених, аспірантів, програмістів), комп'ютерна техніка різноманітна, що залежить від рівня фінансування організації. Саме тут з'являються нові CFD – ідеї, нові моделі турбулентності. Хоча ці пакети поступаються першій і другій групі за універсальністю, але науково-дослідні пакети можуть успішно конкурувати при розв'язку окремих, вузькоспеціалізованих задач обчислювальної аеродинаміки.

Незважаючи на наявність науково-прикладних (NASA, ONERA, DLR, NLR, OVERflow, NXAIR, INS3D, OpenFOAM) і комерційних (ANSYS CFX, ANSYS Fluent, COMSOL Multiphysics, CFD-Star, STAR-CD, FLOW-3D, SolidWorks, ACE-U, CFD++, FlowVision) пакетів з обчислювальної аеродинаміки, використання їх для розрахунку процесів обтікання ротора вітроенергетичної установки, динаміки багатоелементного профілю, а також задач плазмової аеродинаміки представляється проблематичним.

По-перше, широка спрямованість (універсальність) може привести до недостатньо адекватного врахування специфічних аспектів плазмових актуаторів. На сьогоднішній день серед комерційних пакетів для розв'язку задач обчислювальної аеродинаміки відсутні можливості моделювання зв'язаних задач динаміки низькотемпературної плазми та суцільного в'язкого середовища.

По-друге, основні комерційні пакети програм базуються на методологічній базі обчислювальної аерогідродинаміки та персональних комп'ютерах, розроблених у середині 90-х років. Це проявляється у використанні ряду спрощених підходів і методик. Наприклад, для опису турбулентних явищ найчастіше застосовуються пристінкові функції, що апріорно припускають певну структуру течії, що не підходить для моделювання відривних течій. Використання спрощених підходів проявляється також у недостатній роздільній здатності розрахункових сіток.

По-третє, комерційні пакети рекламують свої широкі можливості, однак, судячи з огляду літератури, ці можливості недостатньо верифіковано. Немає достатньої впевненості в працездатності того або іншого пакета при певному поєднанні вихідних параметрів задачі, наявності складних нестаціонарних явищ, таких, як динамічний зрив потоку.

По-четверте, у комерційних пакетах вкрай важко знайти оптимальне поєднання чисельних методів, геометрії та топології сітки при максимальній роздільній здатності, щоб одержати достовірні та надійні дані з якісної та кількісної сторони.

Крім того, до недоліків сучасних комерційних CFD пакетів також слід віднести можливі складнощі в освоєнні та в застосуванні, закритий код (принцип «чорного ящика»), можливість вирішувати тільки те коло задач, яке закладено розробником, а також проблеми, пов'язані з ліцензійним використанням.

1.8 Висновки до розділу 1

1. Виконано огляд традиційних та плазмових методів керування структурою течії. Проаналізовано різні типи плазмових актуаторів. Розглянуто фізичні основи діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора в суцільному в'язкому середовищі. Проаналізовано механізми плазмового керування потоком.

2. За результатами огляду встановлено, що найбільш перспективним з методів плазмового керування відривом потоку є метод на базі діелектричного бар'єрного розряду. Він не вимагає великих потужностей джерел енергії та забезпечує часткову іонізацію повітря в необхідній області потоку.

3. Проведено огляд методів чисельного моделювання діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора, а також розглянуто ієрархію часу протікання плазмових та аеродинамічних процесів.

4. В результаті проведеного огляду методів чисельного моделювання діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора в суцільному середовищі, а також аналізу характерних масштабів часу протікання плазмових і аеродинамічних процесів обрано клас математичних моделей, який дозволяє відтворювати вплив плазмового джерела на навколишнє повітря з достатньою точністю та прийнятними витратами часу.

5. Визначено напрямки з розробці математичних моделей діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора в повітрі. Математична модель повинна якісно та кількісно відтворювати процеси діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора в суцільному в'язкому середовищі.

6. Розглянуто підходи до моделювання турбулентності, а також моделі та методи моделювання ламінарно-турбулентного переходу. Обрано найбільш перспективні моделі, що описують ламінарно-турбулентний перехід і нестаціонарні ефекти в турбулентності для задач зовнішньої аеродинаміки.

РОЗДІЛ 2
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ РІДИНИ, ГАЗУ ТА НИЗЬКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ПЛАЗМИ

У даному розділі наведено загальний математичний опис дослідження зв'язаних задач аеродинаміки, електродинаміки, динаміки плазми та хімічної кінетики для моделювання взаємодії суцільного в'язкого середовища (нейтрального повітря) з плазмою діелектричного бар'єрного розряду.

Математична модель базується на розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса та рівнянь, що описують поведінку плазми. Для замикання нестаціонарних осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса застосовуються однопараметричні моделі турбулентності Spalart-Allmaras, а також її модифікації SARC і SALSA. Розглянуто можливість опису турбулентності на основі методу відокремлених вихорів із затримкою (DDES). Моделювання ламінарно-турбулентного переходу описувалось за допомогою диференціальної γ-Re_θ моделі. Виходячи з результатів попередніх досліджень по методах математичного опису низькотемпературної нерівноважної ідеальної плазми [165, 199, 224], у якості базового обраний дифузійно-дрейфовий підхід для опису просторово-тимчасової структури діелектричного бар'єрного розряду в повітрі при атмосферному тиску, включаючи кінетичні явища та плазмохімічні реакції. Швидкості хімічних реакцій (іонізації, збудження, прилипання), а також коефіцієнти переносу (для електронів) залежать від напруженості електричного поля та визначаються з розв'язку рівняння Больцмана з використанням функції розподілу електронів за швидкостями та енергіями. Наведено безрозмірну форму запису вихідної системи рівнянь, сформульовано початково-крайову задачу.

2.1 Концепція математичної моделі

У класичному розумінні математична модель – це сукупність вихідних рівнянь, доповнена фізичними та математичними граничними умовами, які описують динаміку перебігу фізичних процесів при заданій геометрії.

Розроблена математична модель складається з:

– моделі динаміки в'язкого суцільного середовища – рівнянь Нав'є-Стокса для нестисливих течій (три рівняння для двовимірного випадку);

– диференціальних моделей турбулентності та ламінарно-турбулентного переходу, що включає від одного до трьох додаткових рівнянь;

– моделі динаміки та електродинаміки низькотемпературної плазми, що складається з 22 диференціальних рівнянь різного типу (рівняння Гельмгольца та Пуассона, дифузійно-дрейфові рівняння).

Розширенням запропонованої математичної моделі є врахування:

– моделі динаміки твердого тіла [50];

– моделі динаміки стисливого газу [36–38].

Для зв’язаних задач такі системи являють собою «верхівку айсбергу», оскільки тут існує ряд додаткових проблем, пов'язаних зі спільною чисельною реалізацією рівнянь, що описують різнорідні фізичні процеси.

Для створення математичної моделі недостатньо просто виписати диференціальні рівняння, що відображають конкретні фізичні процеси. Як правило, єдина система, що описує різнорідні фізико-хімічні процеси стикається з проблемою неузгодженості за характерними часами та швидкостями, різнорідністю протікання фізичних процесів (дифузія, адвекція, крос доданки в джерельних членах) та їх математичним описом.

Однією з головних проблем є відмінність масштабів за часом протікання нелінійних фізичних процесів. Так занадто дрібний крок інтегрування знижує загальну працездатність чисельної схеми розв'язку рівнянь на 2÷3 порядки. Процеси, що призводять до дрібних кроків за часом (наприклад, зародження стримера) найчастіше бувають локальними, тобто відбуваються не у весь час циклу, а в порівняно невеликий період циклу. Процеси, що відповідають більшим крокам за часом фактично не розвиваються та процесорний час витрачається не раціонально. Для забезпечення працездатності спеціалізованого пакета необхідно вжити додаткових заходів математичного (чисельного) характеру.

У зв'язку з цим має сенс розширити поняття концепції математичної моделі до чисельно-аналітичної. Аналітична частина являє собою систему вихідних рівнянь, граничні умови, оцінку адекватності описуваних фізичних процесів. Чисельну сторону математичної моделі пов'язано в першу чергу із забезпеченням працездатності спеціалізованого пакета програм. Мова йде не стільки про добре відомі чисельні алгоритми розв'язку окремих рівнянь або систем рівнянь, а про ті додаткові заходи, що забезпечують взаємну працездатність різних аспектів загальної математичної моделі. Такі додаткові заходи чисельного (алгоритмічного) характеру являють собою необхідні умови працездатності конкретного програмного продукту та є невід'ємною частиною розробленої чисельно-аналітичної моделі.

Для створення надійної математичної моделі необхідно розробити відповідні нові чисельні прийоми для забезпечення працездатності та ефективності кінцевого чисельного алгоритму, які викладено в розділі 3 цієї роботи.

2.2 Рівняння динаміки в'язкого нестисливого потоку

У роботі розглядається рух повітря при малих числах Маху ($M < 0.3$). У цьому випадку ефектами стисливості повітря нехтують і його можна розглядати як нестисливе середовище.

2.2.1 Осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса

Найбільш популярними рівняннями, що описують рух суцільного в'язкого середовища у широкому діапазоні практично актуальних умов, є нестаціонарні осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса для в'язкого нестисливого потоку з використанням запропонованого Буссінеском модельного представлення компонент тензора турбулентних напружень та урахуванням масових сил [151]

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla\right)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\left[\left(\nu + \nu_t\right)\nabla \mathbf{u}\right] + \frac{1}{\rho}\mathbf{f}_b, \tag{2.2}$$

де ∇ – оператор Гамільтона, t – час, $\mathbf{u}$ – вектор швидкості, p – тиск, ρ – густина, ν і ν_t – молекулярний і турбулентний кінематичні коефіцієнти в'язкості, $\mathbf{f}_b$ – вектор масової сили (зокрема, сили Лоренца), віднесений до одиниці об'єму.

Система рівнянь записано в розмірній формі для фізичних змінних у декартовій системі координат. Дана форма запису рівнянь Нав'є-Стокса (2.1) і (2.2) є наслідком інтегральних законів збереження маси та імпульсу, виведення яких наведено у роботі [31].

Аеродинамічний момент і проекції сил обчислюються за допомогою наступних співвідношень

$$Q = \oiint_S \left[\left(x - x_0 \right) F_y - \left(y - y_0 \right) F_x \right] dS \ , \tag{2.3}$$

$$F_x = -p \cos\left(\overline{\mathbf{n}}, \overline{\mathbf{i}} \right) + \tau \cos\left(\overline{\mathbf{t}}, \overline{\mathbf{i}} \right), \tag{2.4}$$

$$F_y = -p \cos\left(\overline{\mathbf{n}}, \overline{\mathbf{j}} \right) + \tau \cos\left(\overline{\mathbf{t}}, \overline{\mathbf{j}} \right), \tag{2.5}$$

де F_x і F_y – проекції аеродинамічних сил на осі декартових координат, віднесені на елементарну площу, x і y – декартові координати, x_0 і y_0 – декартові координати осі обертання, щодо якої визначається моментна характеристика, S – поверхня обтічного тіла, U_τ – дотична складова вектора швидкості, l_n – відстань по нормалі до поверхні, $\tau = \mu\left(\partial U_\tau / \partial l_n \right)$ – дотичне напруження, μ – коефіцієнт динамічної в'язкості, $\overline{\mathbf{n}}$ – вектор нормалі до поверхні, $\overline{\mathbf{t}}$ – дотичний вектор до поверхні, $\overline{\mathbf{i}}$, $\overline{\mathbf{j}}$ – одиничні орти декартових координат.

2.2.2 Початкові та граничні умови для рівнянь Нав'є-Стокса

У якості початкових умов задавалися параметри незбуреного потоку у всій розрахунковій області. На зовнішній межі застосовувалися невідбиваючі граничні умови, для розрахунку яких використовувався метод характеристик [321]. На поверхні твердого тіла ставилася умова прилипання.

2.3 Моделювання турбулентності

Для замикання осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса використовуються диференціальні однопараметричні моделі Spalart-Allmaras [295], SARC [289, 297] і SALSA [279], які розроблені для задач зовнішньої дозвукової аеродинаміки. Моделі SARC і SALSA дозволяють враховувати кривизну ліній течії, обертання твердої обтічної поверхні та нестаціонарні ефекти.

2.3.1 Стандартна модель турбулентності Spalart-Allmaras

Стандартна модель турбулентності Spalart-Allmaras (Spalart-Allmaras – SA) [295] призначена для визначення розмірного кінематичного коефіцієнта турбулентної в'язкості за формулою

$$\nu_t = \tilde{\nu}_t \cdot f_{v1}, \tag{2.6}$$

де $f_{v1} = \chi^3 \big/ \left(\chi^3 + c_{v1}^3\right)$ – демпфуюча функція кінематичних в’язкостей $\chi = \tilde{\nu}_t / \nu$, $\tilde{\nu}_t$ – робоча змінна. Рівняння для визначення $\tilde{\nu}_t$ в моделі Spalart-Allmaras набуває вигляду [295]

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu}_t + \frac{1}{\sigma}\nabla\left[\left(\nu + \tilde{\nu}_t\right)\nabla\tilde{\nu}_t\right] + \frac{c_{b2}}{\sigma}\nabla^2\tilde{\nu}_t - f_w\left(\frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}\right)\left(\frac{\tilde{\nu}_t}{d}\right)^2. \tag{2.7}$$

Перший доданок у правій частині рівняння (2.7) – джерельний член генерації турбулентності, в якому

$$\tilde{S} \equiv f_{v3}W + \frac{\tilde{\nu}_t}{k^2 d^2} f_{v2}, \qquad W = \sqrt{2W_{ij}W_{ij}}, \tag{2.8}$$

де $W_{ij} = 0.5\left(\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i\right)$ – тензор завихреності.

Функція f_{v2} визначається за допомогою співвідношення

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}. \tag{2.9}$$

Другий та третій доданки в правій частині (2.7) відповідають за дисипацію турбулентності. Четверте – за деструкцію турбулентності поблизу твердої стінки та містить функцію

$$f_w = g\left[\frac{1+c_{w3}^6}{g^6+c_{w3}^6}\right]^{1/6}, \tag{2.10}$$

де $g = r + c_{w2}(r^6 - r)$, $r = \dfrac{\tilde{v}_t}{\tilde{S}k^2 d^2}$, d – відстань до найближчої стінки. Значення констант: $k = 0.41$ – константа Кармана, $\sigma = 2/3$ – турбулентне число Прандтля, $c_{b1} = 0.1355$, $c_{b2} = 0.622$, $c_{v2} = 5.0$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2$, $c_{v1} = 7.1$, $f_{v3} = 1$.

2.3.2 Модель турбулентності Spalart-Allmaras з урахуванням обертання та кривизни ліній течії

Модель турбулентності Spalart-Allmaras з урахуванням обертання та кривизни ліній течії (Spalart-Allmaras for Rotation and Curvature – SARC) розроблено Spalart і Shur [297].

У моделі SARC [297], на відміну від стандартної SA [295], доданок генерації турбулентності множиться на евристичну функцію f_{r1}

$$f_{r1} = \left(1+c_{r1}\right)\frac{2r^*}{\left(1+r^*\right)}\left[1 - c_{r3}\tan^{-1}\left(c_{r2}\tilde{r}\right)\right] - c_{r1}, \tag{2.11}$$

де $c_{r1} = 1$, $c_{r2} = 12$. Константу c_{r3} визначено Spalart і Shur [297] у діапазоні $0.6 \div 1.0$. У даній роботі $c_{r3} = 0.6$. Функція r^* визначається як $r^* = S/W$, де $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, $W = \sqrt{2W_{ij}W_{ij}}$, $S_{ij} = 0.5\left(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i\right)$ – тензор швидкостей деформацій. Функція $\tilde{r}$ згідно [289] набуває вигляду

$$\tilde{r} = 2W_{ik}S_{jk}\left[\frac{DS_{ij}}{Dt} + \left(\varepsilon_{imn}S_{jn} + \varepsilon_{jmn}S_{in}\right)\Omega_m\right] / G^4, \tag{2.12}$$

де Ω_m – значення кутових швидкостей обертання щодо осей x_m, ε_{imn} – компоненти тензора третього рангу Леві-Чівіта, $G = \sqrt{0.5\left(S^2 + W^2\right)}$.

2.3.3 *Модель Spalart-Allmaras, що адаптована до тензора швидкостей деформацій*

Модель Spalart-Allmaras, що адаптована до тензора швидкостей деформацій (Strain-Adaptive Linear Spalart-Allmaras Model – SALSA) [279] є розвитком оригінальної моделі SA. Модель SALSA враховує нестаціонарні ефекти в турбулентності та швидко адаптується до зміни структури течії. Дану модель засновано на принципі вихрової в'язкості для слабостисливих течій зі зневажливо малими флуктуаціями густини.

Рівняння для визначення $\tilde{\nu}_t$ в моделі Spalart-Allmaras, що адаптована до тензора швидкостей деформацій, записується у вигляді [279]

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = \tilde{c}_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu}_t + \nabla\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma}\right)\nabla\tilde{\nu}_t\right] + \frac{c_{b2}}{\sigma}\nabla^2\tilde{\nu}_t - f_w\left(\frac{\tilde{c}_{b1}}{k^2} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma}\right)\left(\frac{\tilde{\nu}_t}{d}\right)^2.$$

Від стандартної моделі турбулентності Spalart-Allmaras SALSA відрізняється модифікацією членів генерації, дисипації та деструкції турбулентної в'язкості. Стандартний коефіцієнт c_{b1} модифікується в доданку генерації наступним чином

$$\tilde{c}_{b1} = c_{b1}\sqrt{\Gamma}, \quad \Gamma = \min\left(1.25,\, \max\left(\gamma,\, 0.75\right)\right), \quad \gamma = \max\left(\alpha_1, \alpha_2\right), \tag{2.14}$$

$$\alpha_1 = \left(1.01\frac{\tilde{\nu}_t}{k^2 d^2 S^*}\right)^{0.65}, \qquad \alpha_2 = \max\left[0,\ 1 - \tanh\left(\frac{\chi}{68}\right)\right]^{0.65}. \tag{2.15}$$

Основна відмінність SALSA від стандартної моделі турбулентності SA полягає у використанні тензора швидкостей деформацій замість тензора завихреності

$$\tilde{S} = S^*\left[\left(\frac{1}{\chi}\right) + f_{v1}\right], \quad S^* = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}, \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] - \frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}. \tag{2.16}$$

Функції, які входять у доданок деструкції, мають такий вигляд

$$r = 1.6\tanh\left[0.7\left(\frac{\Psi}{\tilde{S}}\right)\right], \quad \Psi = \frac{\tilde{\nu}_t}{k^2 d^2}. \tag{2.17}$$

Значення інших констант такі ж, як і в стандартній моделі SA [295].

2.3.4 Моделювання відокремлених вихорів (DES)

DES підхід заснований на модифікації RANS моделі турбулентності Spalart-Allmaras (SA) таким чином, що RANS підхід працює поблизу твердих поверхонь, а вдалині від стінки включаються підсіткові моделі LES [296]. DES підхід виходить шляхом заміни в моделі SA (SARC, SALSA) відстані до найближчої стінки d на $\tilde{d}$, де $\tilde{d}$ визначається як

$$\tilde{d} = \min\left(d, C_{DES}\Delta\right), \quad \Delta = \max\left(\Delta x, \Delta y, \Delta z\right), \tag{2.18}$$

де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – поточні розміри сітки. Базове значення $C_{DES} = 0.65$.

2.3.5 Моделювання відокремлених вихорів з затримкою (DDES)

DES підхід використовує в примежових шарах RANS, а області масивного відриву – LES. Однак якщо використовувати детальну розрахункову сітку в примежових шарах, це може привести до ініціалізації LES у пристінковій зоні. Щоб уникнути спрацьовування LES у примежовому шарі було запропоновано концепцію моделювання відокремлених вихорів із затримкою (Delayed Detached Eddy Simulation – DDES) [296]. Модифікації, запропоновані в DDES, нетрудомісткі з погляду їх реалізації, однак істотні в теоретичному змісті. Дві основні відмінності: нове визначення підсіткового масштабу довжини, що відрізняються від звичайного LES підходу, де використовуються тільки розміри комірок сітки; і нова емпірична RANS-LES гібридна функція, що розроблена для забезпечення більш успішного зв'язку двох підходів у приєднаних примежових шарах.

В DDES підході відстань до найближчої стінки $\tilde{d}$ визначається за формулою

$$\tilde{d} = d - f_d \max\left(0,\ d - C_{DES}\Delta\right), \tag{2.19}$$

де

$$f_d = 1 - \tanh\left(\left[C_{DDES} \cdot r_d\right]^3\right), \quad r_d \equiv \frac{\nu_t + \nu}{\sqrt{U_{i,j}U_{i,j}}\kappa^2 d^2}. \tag{2.20}$$

Стандартне значення $C_{DDES} = 8$.

2.3.6 Початкові та граничні умови для моделей турбулентності

У моделях турбулентності SA, SARC і SALSA значення турбулентної в'язкості на тілі покладалося рівним нулю, а на вихідній межі ставилася умова Неймана.

Граничні умови для значення турбулентної в'язкості в потоці, що набігає (на вхідній межі) $\nu_{t\infty}$ у роботі [294] задавалися наступним чином

$$\nu_{t\infty} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \mathrm{Re}. \tag{2.21}$$

Дане значення турбулентної в'язкості відповідає інтенсивності турбулентності потоку, що набігає $Tu = 0.08165\,\%$ [294]. Для врахування рівня турбулентності потоку, що набігає, в даній роботі запропоновано модифікацію вихідної формули (2.21) у вигляді

$$\nu_{t\infty} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \mathrm{Re} \cdot \left(\frac{Tu_\infty}{0.08165}\right)^{0.5}, \tag{2.22}$$

яка отримана в результаті більш точної апроксимації даних, опублікованих у роботах [225, 241, 294].

Кінетична енергія турбулентності потоку, що набігає, розраховується за формулою

$$k_\infty = \frac{3}{2}\left(\frac{Tu_\infty \cdot U_\infty}{100}\right)^2, \tag{2.23}$$

Питома швидкість дисипації в потоці, що набігає, задавалась наступним чином

$$\omega_\infty = \frac{k_\infty}{\nu_{t\infty}}, \tag{2.24}$$

або може бути скоригована з урахуванням виродження однорідної ізотропної турбулентності.

Значення кінетичної енергії турбулентності та питомої швидкості дисипації потоку, що набігає, необхідні для використання в диференціальній γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу.

У якості початкових умов у моделях турбулентності SA, SARC і SALSA задавалось значення турбулентної в'язкості в потоці, що набігає, $\nu_{t\infty}$ яке розраховується виходячи з інтенсивності турбулентності потоку, що набігає Tu_∞.

2.4 Моделювання ламінарно-турбулентного переходу (γ-Re_θ модель)

З усього різноманіття моделей ламінарно-турбулентного переходу була обрана найбільш успішна диференціальна модель γ-Re_θ Menter [225], що базується на рівнянні для коефіцієнта переміжності та рівнянні для критичного числа Рейнольдса втрати імпульсу. Спочатку дана модель розроблялася для застосування спільно з моделлю турбулентності k-ω SST Menter [241].

У даній роботі не розглядаються інші моделі ламінарно-турбулентного переходу, тому що ці порівняння вже були проведені в роботі [298] і найкращі результати були отримані саме за допомогою γ-Re_θ моделі переходу на базі моделі турбулентності k-ω SST Menter [241]. Тому метою цієї роботи було адаптувати γ-Re_θ модель ламінарно-турбулентного переходу для використання спільно з моделями турбулентності SA, SARC і SALSA.

Диференціальна γ-Re_θ модель ламінарно-турбулентного переходу [225], містить у собі рівняння переносу коефіцієнта переміжності та рівняння переносу критичного числа Рейнольдса втрати імпульсу. Крім того, у даній моделі присутня велика кількість кореляційних функцій, що узагальнюють емпіричні залежності.

2.4.1 Рівняння переносу для коефіцієнта переміжності

Рівняння переносу для коефіцієнта переміжності записувалось у вигляді

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t}+\nabla(\rho\mathbf{u}\gamma)=P_\gamma-E_\gamma+\nabla\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_f}\right)\nabla\gamma\right], \tag{2.25}$$

де γ – коефіцієнт переміжності, μ і μ – молекулярний та турбулентний коефіцієнти динамічної в'язкості, y – відстань до поверхні обтічного тіла.

Складові генерації та деструкції/реламінаризації коефіцієнта переміжності визначались наступним чином

$$P_\gamma=F_{length}c_{a1}\rho S\left(\gamma F_{onset}\right)^{0.5}\left(1-c_{e1}\gamma\right), \tag{2.26}$$

$$E_\gamma=c_{a2}\rho\Omega\gamma F_{turb}\left(c_{e2}\gamma-1\right), \tag{2.27}$$

де ρ – густина, $S=\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ – інваріант тензора швидкостей деформацій, $\Omega=\sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ – інваріант тензора завихреності, $F_{turb}=e^{-\left(R_T/4\right)^4}$, F_{length} – функція, що контролює довжину переходу, F_{onset} – функція, що контролює початок переходу та визначається як

$$F_{onset}=\max\left[F_{onset2}-F_{onset3},0\right], \tag{2.28}$$

$$F_{onset1}=\frac{Re_v}{2.193\cdot Re_{\theta c}\left(\tilde{R}e_{\theta t}\right)}, \tag{2.29}$$

$$F_{onset2}=\min\left[\max\left(F_{onset1},F_{onset1}^4\right),2.0\right], \tag{2.30}$$

$$F_{onset3}=\max\left[1-\left(\frac{R_T}{2.5}\right)^3,0\right], \tag{2.31}$$

$$R_T=\frac{\rho k}{\mu\omega}, \tag{2.32}$$

$$Re_v=\frac{\rho y^2 S}{\mu}, \tag{2.33}$$

де $Re_{\theta c}$ – критичне число Рейнольдса втрати імпульсу при якому починає рости переміжність у примежовому шарі, k – кінетична енергія турбулентності, ω – питома швидкість дисипації.

Обидва вирази для генерації та деструкції/реламінаризації є безрозмірними функціями, які використовуються для керування рівнянням переміжності в примежовому шарі.

Значення $Re_{\theta c}$ знаходиться вище за потоком, ніж число Рейнольдса переходу $\tilde{R}e_{\theta t}$ та різниця між ними повинна бути отримана з емпіричної кореляції. Значення F_{length} і $Re_{\theta c}$ є кореляційними функціями $\tilde{R}e_{\theta t}$ та мають наступний вигляд

$$F_{length} = \begin{cases} \left[39.8189 + (\text{-}119.270 \cdot 10^{-4})\tilde{R}e_{\theta t} + (\text{-}132.567 \cdot 10^{-6})\tilde{R}e_{\theta t}{}^{2}\right] & \tilde{R}e_{\theta t} < 400, \\ \left[263.404 + (\text{-}123.939 \cdot 10^{-2})\tilde{R}e_{\theta t} + (194.548 \cdot 10^{-5})\tilde{R}e_{\theta t}^{2} + (\text{-}101.695 \cdot 10^{-8})\tilde{R}e_{\theta t}^{3}\right] & \\ & 400 \le \tilde{R}e_{\theta t} < 596, \\ \left[0.5 \text{ - } (\tilde{R}e_{\theta t} \text{-} 596.0) \cdot 3.0 \cdot 10^{-4}\right] & 596 \le \tilde{R}e_{\theta t} < 1200, \\ \left[0.3188\right] & 1200 \le \tilde{R}e_{\theta t}, \end{cases} \tag{2.34}$$

$$Re_{\theta c} = \begin{cases} \tilde{R}e_{\theta t} - \begin{pmatrix} 396.035 \cdot 10^{-2} + (-120.656 \cdot 10^{-4})\tilde{R}e_{\theta t} + (868.230 \cdot 10^{-6})\tilde{R}e_{\theta t}^{2} \\ +(-696.506 \cdot 10^{-9})\tilde{R}e_{\theta t}^{3} + (174.105 \cdot 10^{-12})\tilde{R}e_{\theta t}^{4} \end{pmatrix}, & \tilde{R}e_{\theta t} \le 1870 \\ \tilde{R}e_{\theta t} - \left(593.11 + (\tilde{R}e_{\theta t} - 1870.0) \cdot 0.482\right), & \tilde{R}e_{\theta t} \le 1870 \end{cases} . \tag{2.35}$$

У в'язкому підшарі значення кореляційної функції F_{length} вважається рівним 40 і розраховується за формулами

$$F_{length} = F_{length}\left(1 - F_{sublayer}\right) + 40 \cdot F_{sublayer}\,, \tag{2.36}$$

$$F_{sublayer} = e^{-\left(R_{\omega}/0.4\right)^{2}}, \tag{2.37}$$

$$R_{\omega} = \frac{\rho y^{2} \omega}{500 \mu}\,. \tag{2.38}$$

Значення констант у рівнянні переносу коефіцієнта переміжності наведені нижче

$$c_{e1} = 1.0, \quad c_{a1} = 2.0, \quad c_{e2} = 50.0, \quad c_{a2} = 0.06, \quad \sigma_f = 1.0. \tag{2.39}$$

Для опису переходу, викликаного відривом примежового шару, вираз для коефіцієнта переміжності набуде вигляду

$$\gamma_{sep} = \min\left(s_1 \max\left[0, \left(\frac{\mathrm{Re}_v}{3.235 Re_{\theta c}}\right) - 1\right] F_{reattach}, 2\right) F_{\theta t}, \tag{2.40}$$

$$F_{reattach} = e^{-\left(R_T/20\right)^4}, \tag{2.41}$$

$$\gamma_{eff} = \max\left(\gamma, \gamma_{sep}\right), \tag{2.42}$$

$$s_1 = 2. \tag{2.43}$$

Слід зазначити, що вищевказана модифікація турбулентної кінетичної енергії здійснюється тільки в області ламінарно-турбулентного переходу, і не впливає на повністю турбулентні течії [225]. Однак іноді буває необхідність підсилити генерацію кінетичної енергії турбулентності та, як наслідок, турбулентної в'язкості у випадку відриву турбулентного примежового шару. C. Sheng [287] модифікував вихідну формулу наступним чином

$$\gamma_{sep} = s_2 \cdot \min\left[\left(\frac{\mathrm{Re}_v}{3.235 \cdot Re_{\theta c}} - 1\right), 1.0\right] F_{\theta t}, \tag{2.44}$$

$$\gamma_{eff} = \max\left(\gamma, \gamma_{sep}\right), \tag{2.45}$$

$$s_2 = 1.0 - 2.0. \tag{2.46}$$

2.4.2 Початкові та граничні умови для рівняння переносу коефіцієнта переміжності

У якості початкових умов значення коефіцієнта переміжності в розрахунковій області дорівнювало одиниці. Потік коефіцієнта переміжності по нормалі до поверхні твердого тіла дорівнює нулю, на вхідній межі коефіцієнт переміжності дорівнює одиниці, а на вихідній межі ставилась умова Неймана.

2.4.3 Рівняння переносу критичного числа Рейнольдса втрати імпульсу

Рівняння переносу критичного числа Рейнольдса втрати імпульсу $\tilde{R}e_{\theta t}$ набуває вигляду

$$\frac{\partial\left(\rho\tilde{R}e_{\theta t}\right)}{\partial t}+\nabla\left(\rho\mathbf{u}\tilde{R}e_{\theta t}\right)=P_{\theta t}+\nabla\left[\sigma_{\theta t}\left(\mu+\mu_t\right)\nabla\tilde{R}e_{\theta t}\right]. \qquad (2.47)$$

Доданок генерації $P_{\theta t}$ розроблено так, щоб значення робочої змінної $\tilde{R}e_{\theta t}$ в рівнянні переносу критичного числа Рейнольдса втрати імпульсу за межами примежового шару відповідало значенню $Re_{\theta t}$, розрахованому з емпіричної кореляції (2.61). Доданок генерації $P_{\theta t}$ набуває вигляду

$$P_{\theta t}=c_{\theta t}\frac{\rho}{t}\left(Re_{\theta t}-\tilde{R}e_{\theta t}\right)\left(1.0-F_{\theta t}\right), \qquad (2.48)$$

$$t=\frac{500\mu}{\rho U^2}, \qquad (2.49)$$

де t – безрозмірний масштаб часу, U – модуль швидкості. Функцію змішування $F_{\theta t}$ розроблено таким чином, щоб відключити доданок генерації $P_{\theta t}$ в примежовому шарі та дати можливість робочої змінній $\tilde{R}e_{\theta t}$ дифундувати з потоку, що набігає. Функція змішування $F_{\theta t}$ дорівнює одиниці всередині примежового шару та нулю поза нього. Вона визначається наступним чином

$$F_{\theta t}=\min\left\{\max\left[F_{wake}\cdot e^{-\left(\frac{y}{\delta}\right)^4},1.0-\left(\frac{\gamma-1/c_{e2}}{1.0-1/c_{e2}}\right)^2\right],1.0\right\}, \qquad (2.50)$$

$$\theta_{BL}=\frac{\tilde{R}e_{\theta t}\mu}{\rho U}, \qquad \delta_{BL}=\frac{15}{2}\theta_{BL}, \qquad \delta=\frac{50\Omega y}{U}\cdot\delta_{BL}, \qquad (2.51)$$

$$Re_{\omega}=\frac{\rho\omega y^2}{\mu}, \qquad F_{wake}=e^{-\left(\frac{Re_{\omega}}{1e+5}\right)^2}. \qquad (2.52)$$

Функція F_{wake} забезпечує відключення функції змішування $F_{\theta t}$ в області сліду.

Значення констант у рівнянні переносу критичного числа Рейнольдса втрати імпульсу наступні

$$c_{\theta t} = 0.03\,, \qquad \sigma_{\theta t} = 2\,. \tag{2.53}$$

Емпірична кореляція для початку переходу заснована на наступних параметрах

$$\lambda_\theta = \frac{\rho\theta^2}{\mu}\frac{dU}{ds}, \tag{2.54}$$

$$Tu = 100\frac{\sqrt{2k/3}}{U}, \tag{2.55}$$

де $\dfrac{dU}{ds}$ – прискорення вздовж ліній течії, яке можна обчислити, взявши похідну швидкості U в напрямках x, y і z, а потім підсумовуючи внесок цих похідних уздовж ліній течії

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[2u\frac{du}{dx}+2v\frac{dv}{dx}+2w\frac{dw}{dx}\right], \tag{2.56}$$

$$\frac{dU}{dy} = \frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[2u\frac{du}{dy}+2v\frac{dv}{dy}+2w\frac{dw}{dy}\right], \tag{2.57}$$

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[2u\frac{du}{dz}+2v\frac{dv}{dz}+2w\frac{dw}{dz}\right], \tag{2.58}$$

$$\frac{dU}{ds} = \left[\left(u/U\right)\frac{dU}{dx}+\left(v/U\right)\frac{dU}{dy}+\left(w/U\right)\frac{dU}{dz}\right]. \tag{2.59}$$

Число Рейнольдса товщини втрати імпульсу $Re_{\theta t}$ є функцією безрозмірного параметра градієнта тиску λ_θ й інтенсивності турбулентності Tu

$$\frac{\rho U\theta}{\mu} = Re_{\theta t} = f\left(\lambda_\theta, Tu\right). \tag{2.60}$$

Емпірична кореляція для $\mathrm{Re}_{\theta t}$ визначається наступним чином

$$Re_{\theta t} = f\left(\lambda_\theta, Tu\right) = \begin{cases} \left[1173.51 - 589.428 \cdot Tu + \dfrac{0.2196}{Tu^2}\right] F\left(\lambda_\theta\right), & Tu \le 1.3 \\ 331.50\left[Tu - 0.5658\right]^{-0.671} F\left(\lambda_\theta\right), & Tu > 1.3 \end{cases}. \quad (2.61)$$

$$F\left(\lambda_\theta\right) = \begin{cases} 1.0 - \left[-12.986 \cdot \lambda_\theta - 123.66 \cdot \lambda_\theta^2 - 405.689 \cdot \lambda_\theta^3\right] e^{-\left[\frac{Tu}{1.5}\right]^{1.5}}, & \lambda_\theta \le 0 \\ 1.0 + 0.275\left[1 - \mathrm{e}^{\left[-35\lambda_\theta\right]}\right] e^{-\left[\frac{Tu}{0.5}\right]}, & \lambda_\theta > 0 \end{cases}. \quad (2.62)$$

Кореляція використовувалась тільки в джерельному члені (2.48) у рівнянні для критичного числа Рейнольдса початку переходу (2.47).

Рівняння (2.61), (2.62) необхідно розв’язувати ітераційно, оскільки товщина втрати імпульсу θ присутня у лівій частині рівняння (2.60), а також у правій частині у вигляді безрозмірного параметру градієнта тиску λ_θ .

Для числової стійкості параметри прискорення, інтенсивність турбулентності та емпірична кореляція для $\mathrm{Re}_{\theta t}$ повинні бути обмежені в такий спосіб

$$-0.1 \le \lambda_\theta \le 0.1, \quad Tu \ge 0.027, \quad Re_{\theta t} \ge 20. \quad (2.63)$$

Мінімальна інтенсивність турбулентності, що дорівнює 0.027%, відповідає критичному числу Рейнольдса втрати імпульсу 1450, яке є найбільшим експериментально спостережуваним числом Рейнольдса переходу на плоскій пластині [225].

2.4.4 Початкові та граничні умови для рівняння переносу критичного числа Рейнольдса втрати імпульсу

У якості початкових умов значення $\tilde{R}e_{\theta t}$ в розрахунковій області задавалась, виходячи з емпіричної кореляції (2.61). На поверхні твердого тіла значення $\tilde{R}e_{\theta t}$ покладалося рівним нулю, на вхідній межі воно задавалося, виходячи з емпіричної кореляції (2.61) на основі значень інтенсивності турбулентності, а на вихідній межі ставилась умова Неймана.

2.4.5 Інтеграція моделі ламінарно-турбулентного переходу до моделі турбулентності Spalart-Allmaras та її модифікацій

При використанні γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу в стандартній моделі турбулентності Spalart-Allmaras (2.7)

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = \tilde{P} + \frac{1}{\sigma}\nabla\left[\left(\nu + \tilde{\nu}_t\right)\nabla\tilde{\nu}_t\right] + \frac{c_{b2}}{\sigma}\nabla^2\tilde{\nu}_t - \tilde{D}, \tag{2.64}$$

модифікуються доданки генерації і деструкції турбулентної в'язкості, таким чином

$$\tilde{P} = \gamma_{eff} P, \tag{2.65}$$

$$\tilde{D} = \min\left[\max\left(0.5, \gamma_{eff}\right),\ 1.0\right] D, \tag{2.66}$$

де P і D – складові генерації і деструкції турбулентної в'язкості в базовій моделі турбулентності Spalart-Allmaras.

Для використання γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу разом з диференціальними моделями турбулентності Spalart-Allmaras та її модифікаціями SARC і SALSA потрібно мати співвідношення для кінетичної енергії турбулентності k та питомої швидкості дисипації ω. У даній роботі запропоновані такі вирази

$$\omega = \max\left[\frac{\max\left(\Omega, S\right)}{0.3}, \omega_\infty\right], \tag{2.67}$$

$$k = \nu_t \cdot \omega, \tag{2.68}$$

де ω_∞ – питома швидкість дисипації в потоці, що набігає.

2.5 Кінетична схема плазми діелектричного бар'єрного розряду

Зовнішні параметри атмосфери розглядаються сталими і можуть бути обрані в широкому діапазоні значень в залежності від конкретики задачі. У якості робочого газу в роботі виступає повітря з фіксованою часткою азоту та кисню при сталих значеннях атмосферного тиску, густини та температури.

Діелектричний бар'єрний розряд в повітрі при атмосферному тиску генерує низькотемпературну нерівноважну плазму [175, 176, 224].

У роботі розглядаються електронно-збуджені та метастабільні (*) стани молекул азоту $N_2^*\left(A^3\Sigma_u^+\right)$, $N_2\left(B^3\Pi_g\right)$, $N_2^*\left(a'^1\Sigma_u^-\right)$, $N_2\left(C^3\Pi_u\right)$ і молекул кисню $O_2^*\left(a^1\Delta_g\right)$, $O_2^*\left(b^1\Sigma_g^+\right)$, нейтральні атоми кисню O, електрони e, а також позитивні N_2^+, N_4^+, O_2^+, O_4^+ і негативні іони O^-, O_2^-, у цілому 14 частинок і 97 плазмохімічних реакцій, включаючи поверхневі процеси (табл. 2.2) [5, 45, 175, 176, 224].

Хімічні реакції включають: процеси дисоціації, іонізації молекул електронним ударом з основного стану; ступінчасту, асоціативну іонізацію та фотоіонізацію; збудження молекул; іонізацію збуджених (метастабільних) молекул; прилипання і відлипання електронів; рекомбінацію електронів і позитивних іонів; хімічні перетворення нейтральних атомів, молекул та іонів, а також процеси вторинної емісії електронів з відкритого електрода і діелектричної поверхні.

Приймалось, що температура іонів T_i дорівнює температурі повітря T, тому що плазма діелектричного бар'єрного розряду є нерівноважною. Температура T_e, рухливість μ_e і дифузія D_e електронів, а також коефіцієнти деяких хімічних реакцій (іонізації, збудження, прилипання) у загальному випадку залежать від середньої енергії електронів $\bar{\varepsilon}$ і розраховуються за допомогою солвера BOLSIG+ [207], який заснований на розв'язку рівнянь Больцмана з використанням функції розподілу електронів за швидкостями та енергіями. Найчастіше, щоб не розв'язувати рівняння енергії для електронів використовують залежність перерахованих вище параметрів від напруженості електричного поля (наближення локального поля).

Таблиця 2.1 – Об'ємні процеси в плазмі діелектричного бар'єрного розряду

№	Реакція	Константа швидкості реакції	[ ]
1. ІОНІЗАЦІЯ МОЛЕКУЛ 1.1. Фотоіонізація			
0.	$e + N_2 \rightarrow N_2^* + e + h\nu(UV\text{-}фотон)$ $h\nu(UV\text{-}фотон) + O_2 \rightarrow O_2^+ + e$	S_{ph}, $1/\left(м^3 \cdot c\right)$	[228]
1.2. Іонізація електронним ударом з основного стану			
1.	$e + N_2 \rightarrow N_2^+ + 2e$	$\alpha_1 = f\left(\bar{\varepsilon}\right)$ або $\alpha_1 = f\left(E\right)$, $1/м$	[207]
2.	$e + O_2 \rightarrow O_2^+ + 2e$	$\alpha_2 = f\left(\bar{\varepsilon}\right)$ або $\alpha_2 = f\left(E\right)$, $1/м$	[207]
1.3. Ступінчаста іонізація електронним ударом *1.3.1. Збудження молекул*			
3.	$e + N_2 \rightarrow N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right) + e$	$\alpha_3 = f\left(\bar{\varepsilon}\right)$ або $\alpha_3 = f\left(E\right)$, $1/м$	[207]
4.	$e + N_2 \rightarrow N_2\left(B^3\Pi_g\right) + e$	$\alpha_4 = f\left(\bar{\varepsilon}\right)$ або $\alpha_4 = f\left(E\right)$, $1/м$	[207]
5.	$e + N_2 \rightarrow N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right) + e$	$\alpha_5 = f\left(\bar{\varepsilon}\right)$ або $\alpha_5 = f\left(E\right)$, $1/м$	[207]
6.	$e + N_2 \rightarrow N_2\left(C^3\Pi_u\right) + e$	$\alpha_6 = f\left(\bar{\varepsilon}\right)$ або $\alpha_6 = f\left(E\right)$, $1/м$	[207]
7.	$e + O_2 \rightarrow O_2\left(a^1\Delta_g\right) + e$	$\alpha_7 = f\left(\bar{\varepsilon}\right)$ або $\alpha_7 = f\left(E\right)$, $1/м$	[207]
8.	$e + O_2 \rightarrow O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right) + e$	$\alpha_8 = f\left(\bar{\varepsilon}\right)$ або $\alpha_8 = f\left(E\right)$, $1/м$	[207]
1.3.2. Іонізація збуджених (метастабільних) молекул			
9.a	$e + O_2\left(a^1\Delta_g\right) \rightarrow O_2^+ + 2e$	$k_{9a} = 1.30 \cdot 10^{-15} \cdot T_{ev}^{1.1} \exp\left(-11.10/T_{ev}\right)$, $м^3/c$	[166]
9.b	$e + O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right) \rightarrow O_2^+ + 2e$	$k_{9b} = 1.36 \cdot 10^{-15} T_{ev}^{1.1} \exp\left(-10.43/T_{ev}\right)$, $м^3/c$	[166]
10.	$e + N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right) \rightarrow N_2^+ + 2e$	$\log k_{10} = -14.1 - 12.1/\vartheta$, $м^3/c$	[285]
1.4. Асоціативна іонізація			
11.	$N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right) + N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right) \rightarrow N_4^+ + e$	$k_{11} = 5 \cdot 10^{-17}$, $м^3/c$	[236]

12.	$N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right)+N_2\left(B^3\Pi_g\right)\to N_4^+ + e$	$k_{12}=5\cdot 10^{-17}$, $м^3/с$	[236]
13.	$N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right)+N_2\left(C^3\Pi_u\right)\to N_4^+ + e$	$k_{13}=5\cdot 10^{-17}$, $м^3/с$	[236]
14.	$N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right)+N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right)\to N_4^+ + e$	$k_{14}=2\cdot 10^{-16}$, $м^3/с$	[236]
15.	$N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right)+N_2\left(C^3\Pi_u\right)\to N_4^+ + e$	$k_{15}=2\cdot 10^{-16}$, $м^3/с$	[236]
16.	$N_2\left(B^3\Pi_g\right)+N_2\left(B^3\Pi_g\right)\to N_4^+ + e$	$k_{16}=2\cdot 10^{-16}$, $м^3/с$	[236]
17.	$N_2\left(C^3\Pi_u\right)+N_2\left(C^3\Pi_u\right)\to N_4^+ + e$	$k_{17}=2\cdot 10^{-16}$, $м^3/с$	[236]
2. ПРИЛИПАННЯ ЕЛЕКТРОНІВ 2.1. Дисоціативне прилипання			
18.	$e+O_2\to O^- + O$	$\eta_{18}=f\left(\bar{\varepsilon}\right)$ або $\eta_{18}=f\left(E\right)$, $1/м$	[207]
2.2. Прилипання електрона в потрійних зіткненнях			
19.	$e+O_2+O_2\to O_2^- + O_2$	$k_{19}=1.4\cdot 10^{-41}\cdot 300/T_e\cdot\exp\left(-600/T\right)\times$ $\times\exp\left[700\left(T_e-T\right)/\left(T_e\cdot T\right)\right]$, $\frac{м^6}{с}$	[224]
20.	$e+O_2+N_2\to O_2^- + N_2$	$k_{20}=1.07\cdot 10^{-43}\left(300/T_e\right)^2\exp\left(-70/T\right)\times$ $\times\exp\left[1500\left(T_e-T\right)/\left(T_e\cdot T\right)\right]$, $\frac{м^6}{с}$	[224]
21.	$e+O+O_2\to O^- + O_2$	$k_{21}=1\cdot 10^{-43}$, $м^6/с$	[224]
22.	$e+O+O_2\to O+O_2^-$	$k_{22}=1\cdot 10^{-43}$, $м^6/с$	[224]
3. ВІДЛИПАННЯ ЕЛЕКТРОНІВ 3.1. Відлипання в зіткненнях з незбудженими молекулами і атомами			
23.	$O_2^- + N_2\to O_2+N_2+e$	$k_{23}=1.9\cdot 10^{-18}\left(T/300\right)^{0.5}\exp\left(-4990/T\right), м^3/с$	[224]
24.	$O_2^- + O_2\to O_2+O_2+e$	$k_{24}=2.7\cdot 10^{-16}\left(T/300\right)^{0.5}\exp\left(-5590/T\right), м^3/с$	[224]
25.	$O^- + O\to O_2+e$	$k_{25}=5\cdot 10^{-16}$, $м^3/с$	[224]
26.	$e+O^-\to O+2e$	$k_{26}=1.95\cdot 10^{-18}T_{ev}^{0.5}\exp\left(-3.4/T_{ev}\right)$, $м^3/с$	[167]
3.2. Відлипання в зіткненнях зі збудженими молекулами			

27.	$O_2^- + O_2\left(a^1\Delta_g\right) \to O_2 + O_2 + e$	$k_{27} = 2.0 \cdot 10^{-16}$, $м^3/c$	[224]
28.	$O_2^- + O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right) \to O_2 + O_2 + e$	$k_{28} = 3.6 \cdot 10^{-16}$, $м^3/c$	[224]
29.	$O_2^- + N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right) \to O_2 + N_2 + e$	$k_{29} = 2.1 \cdot 10^{-15}$, $м^3/c$	[224]
30.	$O_2^- + N_2\left(B^3\Pi_g\right) \to O_2 + N_2 + e$	$k_{30} = 2.5 \cdot 10^{-15}$, $м^3/c$	[224]
31.	$O^- + O_2\left(a^1\Delta_g\right) \to O + O_2 + e$	$k_{31} = 3.0 \cdot 10^{-16}$, $м^3/c$	[224]
32.	$O^- + O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right) \to O + O_2 + e$	$k_{32} = 6.9 \cdot 10^{-16}$, $м^3/c$	[224]
4. РЕКОМБІНАЦІЯ ЕЛЕКТРОНІВ ТА ІОНІВ 4.1. Електрон-іонна дисоціативна рекомбінація			
33.	$e + N_4^+ \to N_2 + N_2$	$k_{33} = 2.0 \cdot 10^{-12} \cdot \left(300/T_e\right)^{0.5}$, $м^3/c$	[224]
34.	$e + O_4^+ \to O_2 + O_2$	$k_{34} = 1.4 \cdot 10^{-12} \cdot \left(300/T_e\right)^{0.5}$, $м^3/c$	[224]
35.	$e + N_2^+ \to N + N$	$k_{35} = 2.8 \cdot 10^{-13} \cdot \left(300/T_e\right)^{0.5}$, $м^3/c$	[224]
36.	$e + O_2^+ \to O + O$	$k_{36} = 2.8 \cdot 10^{-13} \cdot \left(300/T_e\right)$, $м^3/c$	[204]
4.2. Електрон-іонна рекомбінація в потрійних зіткненнях			
37.	$e + e + N_2^+ \to e + N_2$	$k_{37} = 1.4 \cdot 10^{-31} \cdot \left(300/T_e\right)^{4.5}$, $м^6/c$	[224]
38.	$e + e + O_2^+ \to e + O_2$	$k_{38} = 1.4 \cdot 10^{-31} \cdot \left(300/T_e\right)^{4.5}$, $м^6/c$	[224]
39.	$e + N_2^+ + N_2 \to N_2 + N_2$	$k_{39} = 6 \cdot 10^{-39} \cdot \left(300/T_e\right)^{1.5}$, $м^6/c$	[224]
40.	$e + N_2^+ + O_2 \to N_2 + O_2$	$k_{40} = 6 \cdot 10^{-39} \cdot \left(300/T_e\right)^{1.5}$, $м^6/c$	[224]
41.	$e + O_2^+ + N_2 \to O_2 + N_2$	$k_{41} = 6 \cdot 10^{-39} \cdot \left(300/T_e\right)^{1.5}$, $м^6/c$	[224]
42.	$e + O_2^+ + O_2 \to O_2 + O_2$	$k_{42} = 6 \cdot 10^{-39} \cdot \left(300/T_e\right)^{1.5}$, $м^6/c$	[224]
4.3. Іон-іонна рекомбінація в подвійних зіткненнях			
43.	$O_2^- + N_2^+ \to O_2 + N_2$	$k_{43} = 1.6 \cdot 10^{-13} \cdot \left(300/T\right)^{0.5}$, $м^3/c$	[224]
44.	$O^- + N_2^+ \to O + N_2$	$k_{44} = 2 \cdot 10^{-13} \cdot \left(300/T\right)^{0.5}$, $м^3/c$	[224]
45.	$O_2^- + O_2^+ \to O_2 + O_2$	$k_{45} = 4.2 \cdot 10^{-13} \cdot \left(300/T\right)^{0.5}$, $м^3/c$	[224]

46.	$O_2^- + O_2^+ \rightarrow O_2 + O + O$	$k_{46} = 1 \cdot 10^{-13}$, $м^3/с$	[224]
47.	$O^- + O_2^+ \rightarrow O + O_2$	$k_{47} = 1 \cdot 10^{-13} \cdot (300/T)^{0.5}$, $м^3/с$	[224]
48.	$O^- + O_2^+ \rightarrow O + O + O$	$k_{48} = 1 \cdot 10^{-13}$, $м^3/с$	[224]
49.	$O_2^- + O_4^+ \rightarrow O_2 + O_2 + O_2$	$k_{49} = 1 \cdot 10^{-13}$, $м^3/с$	[224]
4.4. Іон-іонна рекомбінація в потрійних зіткненнях			
50.	$O^- + O_2^+ + O_2 \rightarrow O + O_2 + O_2$	$k_{50} = 3.066 \cdot 10^{-31} \cdot T^{-2.5}$, $м^6/с$	[167]
51.	$O_2^- + O_4^+ + O_2 \rightarrow O_2 + O_2 + O_2 + O_2$	$k_{51} = 4 \cdot 10^{-38}$, $м^6/с$	[167]
5. ХІМІЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ НЕЙТРАЛЬНИХ АТОМІВ І МОЛЕКУЛ 5.1. Хімічні перетворення за участю нейтральних атомів і молекул			
52.	$O + O + N_2 \rightarrow O_2\left(a^1\Delta_g\right) + N_2$	$k_{52} = 2.76 \cdot 10^{-46} \cdot \exp(720/T)$, $м^6/с$	[224]
53.	$O + O + N_2 \rightarrow O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right) + N_2$	$k_{53} = 2.76 \cdot 10^{-46} \cdot \exp(720/T)$, $м^6/с$	[224]
54.	$O + O + O_2 \rightarrow O_2\left(a^1\Delta_g\right) + O_2$	$k_{54} = 2.45 \cdot 10^{-43} \cdot T^{-0.63}$, $м^6/с$	[224]
55.	$O + O + O_2 \rightarrow O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right) + O_2$	$k_{55} = 2.45 \cdot 10^{-43} \cdot T^{-0.63}$, $м^6/с$	[224]
5.2. Хімічні перетворення за участю збуджених молекул			
56.	$N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right) + O_2 \rightarrow N_2 + O_2\left(a^1\Delta_g\right)$	$k_{56} = 1.29 \cdot 10^{-18}$, $м^3/с$	[224]
57.	$N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right) + O_2 \rightarrow N_2 + O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right)$	$k_{57} = 1.29 \cdot 10^{-18}$, $м^3/с$	[224]
58.	$N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right) + O_2 \rightarrow N_2 + O + O$	$k_{58} = 2.54 \cdot 10^{-18}$, $м^3/с$	[224]
59.	$N_2\left(B^3\Pi_g\right) + O_2 \rightarrow N_2 + O + O$	$k_{59} = 3 \cdot 10^{-16}$, $м^3/с$	[224]
60.	$N_2\left(B^3\Pi_g\right) \rightarrow N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right) + h\nu$	$k_{60} = 1.5 \cdot 10^5$, $1/с$	[224]
61.	$N_2\left(B^3\Pi_g\right) + N_2 \rightarrow N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right) + N_2$	$k_{61} = 5 \cdot 10^{-17}$, $м^3/с$	[224]
62.	$N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right) + N_2 \rightarrow N_2\left(B^3\Pi_g\right) + N_2$	$k_{62} = 2 \cdot 10^{-19}$, $м^3/с$	[224]
63.	$N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right) + O_2 \rightarrow N_2 + O + O$	$k_{63} = 2.8 \cdot 10^{-17}$, $м^3/с$	[224]
64.	$N_2\left(C^3\Pi_u\right) \rightarrow N_2\left(B^3\Pi_g\right) + h\nu$	$k_{64} = 3 \cdot 10^7$, $1/с$	[224]

65.	$N_2\left(C^3\Pi_u\right)+N_2 \rightarrow N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right)+N_2$	$k_{65}=1\cdot10^{-17},\ м^3/c$	[224]
66.	$O_2\left(a^1\Delta_g\right)+N_2 \rightarrow O_2+N_2$	$k_{66}=3\cdot10^{-27},\ м^3/c$	[224]
67.	$O_2\left(a^1\Delta_g\right)+O_2 \rightarrow O_2+O_2$	$k_{67}=2.2\cdot10^{-24}\cdot\left(T/300\right)^{0.8},\ м^3/c$	[224]
68.	$O_2\left(a^1\Delta_g\right)+O \rightarrow O_2+O$	$k_{68}=7\cdot10^{-22},\ м^3/c$	[224]
69.	$O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right)+O_2 \rightarrow O_2+O_2$	$k_{69}=2.317\cdot10^{-28}\cdot T^{0.5},\ м^3/c$	[167]
70.	$O_2\left(a^1\Delta_g\right)+O_2\left(a^1\Delta_g\right) \rightarrow O_2+O_2$	$k_{70}=9\cdot10^{-23}\cdot\exp\left(-560/T\right),\ м^3/c$	[167]
6. ХІМІЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ІОНІВ 6.1. Хімічні перетворення позитивних іонів			
71.	$N_2^+ + N_2 + N_2 \rightarrow N_4^+ + N_2$	$k_{71}=5\cdot10^{-41},\ м^6/c$	[224]
72.	$O_2^+ + O_2 + O_2 \rightarrow O_4^+ + O_2$	$k_{72}=2.4\cdot10^{-42}\cdot\left(300/T\right)^{3.2},\ м^6/c$	[224]
73.	$N_4^+ + N_2 \rightarrow N_2^+ + N_2 + N_2$	$k_{73}=1\cdot10^{-20.6},\ м^3/c$	[224]
74.	$N_4^+ + O_2 \rightarrow O_2^+ + N_2 + N_2$	$k_{74}=2.5\cdot10^{-16},\ м^3/c$	[224]
75.	$O_4^+ + O_2 \rightarrow O_2^+ + O_2 + O_2$	$k_{75}=3.3\cdot10^{-12}\left(300/T\right)^4\exp\left(-5030/T\right),м^3/c$	[224]
76.	$O_4^+ + O_2\left(a^1\Delta_g\right) \rightarrow O_2^+ + O_2 + O_2$	$k_{76}=1\cdot10^{-16},\ м^3/c$	[224]
77.	$O_4^+ + O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right) \rightarrow O_2^+ + O_2 + O_2$	$k_{77}=1\cdot10^{-16},\ м^3/c$	[224]
6.2. Хімічні перетворення негативних іонів			
78.	$O_2^- + O \rightarrow O_2 + O^-$	$k_{78}=3.3\cdot10^{-16},\ м^3/c$	[224]
79.	$O^- + O_2\left(a^1\Delta_g\right) \rightarrow O_2^- + O$	$k_{79}=1\cdot10^{-16},\ м^3/c$	[224]
7. ДИСОЦІАЦІЯ			
80.	$e + O_2 \rightarrow O + O + e$	$k_{80}=7.1\cdot10^{-15}\cdot\exp\left(-8.6/T_{ev}\right),\ м^3/c$	[165]

де $\vartheta = 10^{20}\cdot E/N_{air}$ $\left[B\cdot м^2\right]$, N_{air} – число молекул N_2 і O_2 $\left[м^{-3}\right]$, T_{ev} – температура електронів у плазмі в електронвольтах [еВ].

Коефіцієнти хімічних реакцій виду $k = f\left(\bar{\varepsilon}\right)$ та $k = f\left(E\right)$ обговорюються в пункті 2.11 і розраховуються за допомогою солвера BOLSIG+ [207], який використовує експериментальні дані щодо ефективного перетину зіткнень.

2.6 Кінетична схема взаємодії заряджених і збуджених частинок з поверхнею діелектрика й електрода

Процеси взаємодії заряджених і збуджених частинок з поверхнею діелектрика супроводжуються фізико-хімічними перетвореннями та схематично показані на рис. 2.1. При досягненні електронами діелектрика відбувається поглинання поверхнею діелектрика (адсорбція) електронів з навколишнього об'єму (процес А на рис. 2.1). Електрон може перейти до іншого місця на поверхні діелектрика (поверхнева дифузія), де рекомбінує з позитивним зарядом (поверхнева рекомбінація, процес В на рис. 2.1).

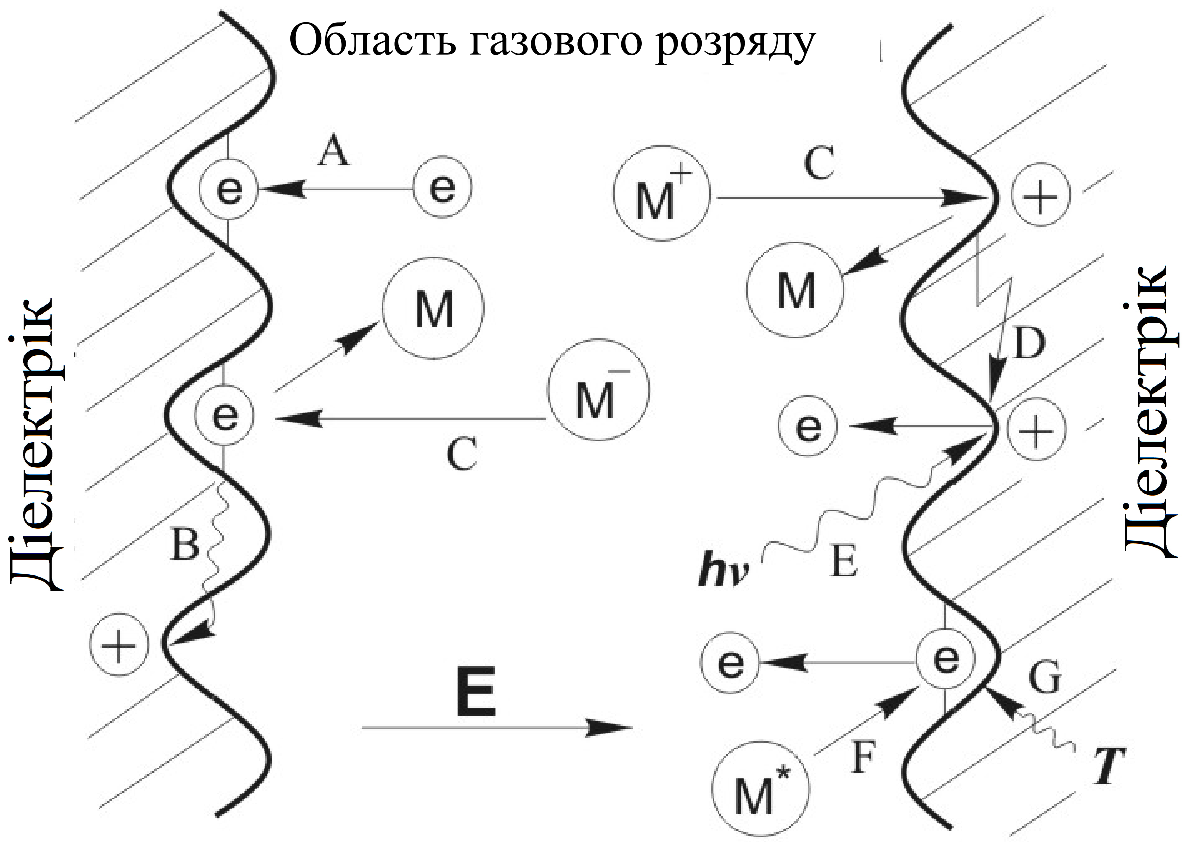


Рисунок 2.1 – Схема поверхневих процесів на діелектрику

Коли іон досягає поверхні діелектрика, ситуація зовсім інша. Оскільки енергія рекомбінації зазвичай значно перевищує роботу виходу електронів, то відбувається процес перезарядки з утворенням нейтрального атома й електронної дірки на поверхні діелектрика (процес C на рис. 2.1). Якщо енергії, що залишилася, досить, щоб вирвати інший електрон, тоді виникає процес іонно-електронної емісії (процес D на рис. 2.1).

Під іонно-електронною емісією мають на увазі процес випущення електронів металами або діелектриками при взаємодії їх з іонами, збудженими та нейтральними частинками. Основною характеристикою є коефіцієнт іонно-електронної емісії γ, що дорівнює числу емітованих електронів до загального числа частинок, що бомбардують. Залежність коефіцієнта іонно-електронної емісії від напруженості електричного поля для мідного анода наведено на рис. 2.2. Для діелектрика коефіцієнт іонно-електронної емісії дорівнює $\gamma_{diel} = 0.005$ [203]. Існує два основні механізми іонно-електронної емісії: потенційне виривання електронів та їх кінетичне вибивання.

Потенційне виривання обумовлено передачею електронам енергії, яка виділяється при нейтралізації іона та переході його в основний стан атома. Кінетичне вибивання пов'язано з іонізацією атомів поверхні металу або діелектрика при ударній взаємодії з іонами, що бомбардують.

У діелектричному бар'єрному розряді основним механізмом іонно-електронної емісії є потенційне виривання електронів. Для протікання кінетичного вибивання енергія іонів повинна бути порядку декількох кілоелектронвольтів (кеВ) у той час як їх енергія в діелектричному бар'єрному розряді менше 0.03 еВ.

Процес фотоемісії (процес E на рис. 2.1) незначний для азотно-кисневої плазми, тому що більшість фотонів випускається у видимому діапазоні і їх енергія занадто мала, щоб викликати емісію електронів. Тому процес фотоемісії в цій роботі не розглядається.

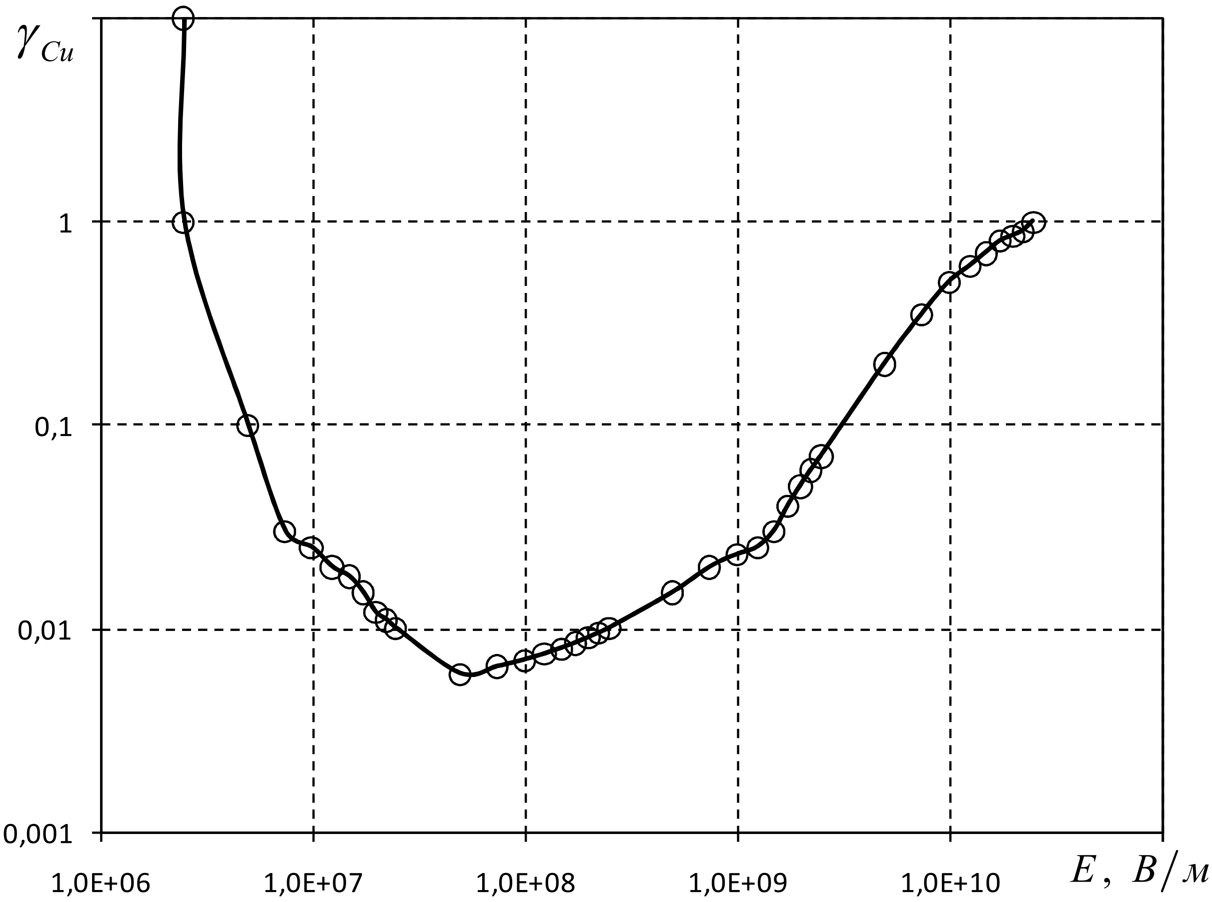


Рисунок 2.2 – Коефіцієнт іонно-електронної емісії з мідного катода [251]

Десорбція електронів може бути викликана зіткненнями збуджених молекул з поверхнею (процес F на рис. 2.1) або за рахунок теплового впливу (процес G на рис. 2.1). Частота десорбції пропорційна потоку збуджених частинок, а частота термодесорбції експоненціально залежить від енергії зв'язку електрона та температури стінки. Тому що потік збуджених частинок до діелектрика вважаємо рівним нулю, а температура поверхні діелектрика й електрода дорівнює температурі навколишнього середовища, то даними процесами можна знехтувати.

При взаємодії частинок з поверхнею електрода картина дещо інша (рис. 2.3). Електрони притягаються анодом і, досягаючи поверхні електрода, поглинаються металом (процес A на рис. 2.3).

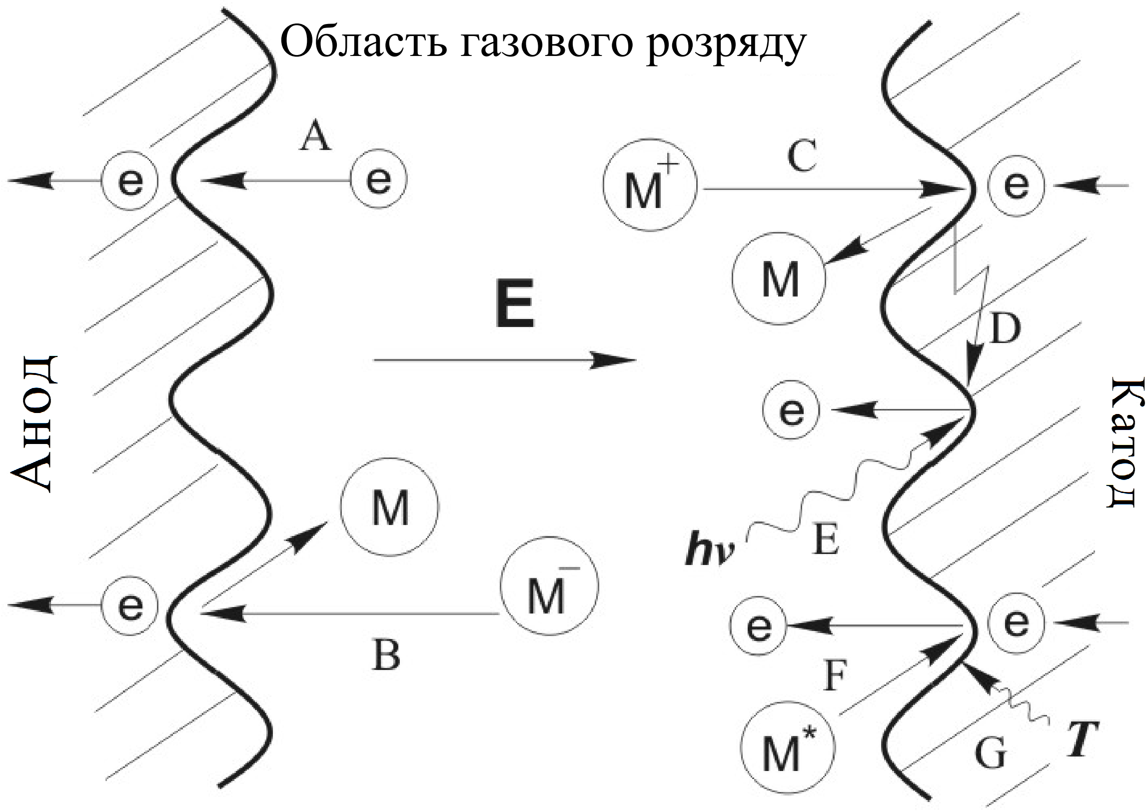


Рисунок 2.3 – Схема поверхневих процесів на електроді

Взаємодія негативно заряджених іонів з поверхнею анода призводить до перезарядження іона, а електрон, що відірвався, поглинається електродом (процес B на рис. 2.3). Те ж саме відбувається й з позитивними іонами (процес C на рис. 2.3). До того ж при взаємодії позитивно заряджених іонів з поверхнею катода відбувається процес іонно-електронної емісії (процес D на рис. 2.3).

Процеси фотоемісії (процес E на рис. 2.3), термоемісії (процес G на рис. 2.3) та емісії електронів за рахунок зіткнення збуджених молекул з поверхнею (процес F на рис. 2.3), зневажливо малі в порівнянні з основним видом іонно-електронної емісії.

Таблиця 2.2 – Поверхневі процеси на діелектрику та відкритому електроді

№	Реакція	Константа швидкості реакції	[ ]
1. ДІЕЛЕКТРИК 1.1. Адсорбція електронів поверхнею діелектрика			
1.	$e + Surf_{diel} \rightarrow \sigma_-$		[203]
2.	$O_2^- + Surf_{diel} \rightarrow O_2 + \sigma_-$		[203]
3.	$O^- + Surf_{diel} \rightarrow O + \sigma_-$		[203]
1.2. Іонно-електронна емісія з поверхні діелектрика			
4.	$N_4^+ + Surf_{diel} \rightarrow 2N_2 + \gamma_{diel} \cdot e + (1+\gamma_{diel})\sigma_+$	$\gamma_{diel} = 0.005$	[203]
5.	$N_2^+ + Surf_{diel} \rightarrow N_2 + \gamma_{diel} \cdot e + (1+\gamma_{diel})\sigma_+$	$\gamma_{diel} = 0.005$	[203]
6.	$O_4^+ + Surf_{diel} \rightarrow 2O_2 + \gamma_{diel} \cdot e + (1+\gamma_{diel})\sigma_+$	$\gamma_{diel} = 0.005$	[203]
7.	$O_2^+ + Surf_{diel} \rightarrow O_2 + \gamma_{diel} \cdot e + (1+\gamma_{diel})\sigma_+$	$\gamma_{diel} = 0.005$	[203]
1.3. Поверхнева рекомбінація			
8.	$\sigma_- + \sigma_+ \rightarrow \alpha_{rw} \cdot Surf_{diel}$	$\alpha_{rw} = 1.2 \cdot 10^{-4},\ м^2/c$	[203]
2. ЕЛЕКТРОД 2.1. Адсорбція електронів поверхнею електрода			
9.	$e + Surf_{Cu} \rightarrow e_{Cu}$		[203]
10.	$O_2^- + Surf_{Cu} \rightarrow O_2 + e_{Cu}$		[203]
11.	$O^- + Surf_{Cu} \rightarrow O + e_{Cu}$		[203]
2.2. Іонно-електронна емісія з поверхні електрода			
12.	$N_4^+ + Surf_{Cu} \rightarrow 2N_2 + \gamma_{Cu} \cdot e$	$\gamma_{Cu} = f(E)$	[251]
13.	$N_2^+ + Surf_{Cu} \rightarrow N_2 + \gamma_{Cu} \cdot e$	$\gamma_{Cu} = f(E)$	[251]
14.	$O_4^+ + Surf_{Cu} \rightarrow 2O_2 + \gamma_{Cu} \cdot e$	$\gamma_{Cu} = f(E)$	[251]
15.	$O_2^+ + Surf_{Cu} \rightarrow O_2 + \gamma_{Cu} \cdot e$	$\gamma_{Cu} = f(E)$	[251]

2.7 Рівняння електричного потенціалу

У загальному випадку електродинаміка плазми може бути описана чотирма рівняннями Максвелла у вигляді [29]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c , \tag{2.69}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \tag{2.70}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2.71}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{2.72}$$

де $\mathbf{H}$ – напруженість магнітного поля, $\mathbf{B}$ – магнітна індукція, $\mathbf{E}$ – напруженість електричного поля, $\mathbf{D}$ – електрична індукція, $\mathbf{j}$ – густина електричного струму, ρ_c – густина результуючого об'ємного заряду. Рівняння (2.69)–(2.72) являють собою закон Гауса, закон Гауса для магнітного поля, закон Фарадея та закон Ампера-Максвелла, відповідно.

Можна показати [29], що закон Фарадея та закон Гауса для магнітної індукції виконуються тотожно, якщо електричне та магнітне поля виразити через скалярний φ і векторний $\mathbf{A}$ потенціали

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \tag{2.73}$$

Вектор електричної індукції $\mathbf{D}$ пов'язаний з вектором напруженості електричного поля $\mathbf{E}$ через абсолютну діелектричну проникність $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o$ і дорівнює $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, де ε_r – відносна діелектрична проникність середовища, ε_0 – електрична стала, φ – електричний потенціал.

Замість рівнянь Максвелла для опису електродинаміки плазми ДБР може бути використано рівняння Пуассона для електричного поля [44, 178] при виконанні наступних двох умов [178].

Першою є умова $\tau_{em} \ll \tau$, де τ – характерний час, пов'язаний з електричними або механічними процесами, що відбуваються в плазмі діелектричного бар'єрного розряду, $\tau_{em} = L/c$ – характерний час, який визначається часом проходження електромагнітної хвилі, L – характерний розмір плазмового актуатора, c – швидкість світла.

Для змінного в часі електричного поля в якості характерного часу приймається період коливання електричного поля T. Тому [178]

$$\frac{L}{cT} \sim \frac{L\omega}{c} \ll 1, \tag{2.74}$$

де ω – частота електромагнітного поля. Для типових параметрів плазмових актуаторів на основі ДБР $L \sim 10^{-2}$ м, $\omega \sim 10^{4}$ Гц.

Умова $\omega \ll (c/L)$ гарантує, що магнітне поле, створюване струмом зміщення, порядку $B \simeq \mu\varepsilon L\omega E$, автоматично задовольняє умові $cB \ll E$, де B – модуль магнітної індукції, E – модуль напруженості електричного поля, $\mu \sim 10^{-6}$ Гн·м, $\varepsilon \sim 10^{-11}$ Ф/м.

Друга умова полягає в тому, що магнітне поле, що генерується струмом провідності, також має задовольняти умові $cB \ll E$. Оскільки з четвертого рівняння Максвелла (2.72) (теорема про циркуляцію магнітного поля) масштаб для модуля магнітної індукції дорівнює $B = \mu LJ$ [178], тоді

$$\frac{cB}{E} = \frac{c\mu LJ}{E}, \tag{2.75}$$

або

$$J \ll E\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{L}, \tag{2.76}$$

де J – густина електричного струму. В результаті маємо $J \ll 3E$.

Густина електричного струму в плазмі ДБР $J \sim 10^{-2}$ А/м^2, модуль напруженості електричного поля $E \sim 10^{7}$ В/м, що повністю задовольняє другій умові.

Крім того, швидкості руху заряджених частинок у плазмі ДБР набагато менші (на 3÷5 порядків) ніж релятивістські швидкості. Тоді закон Гауса з урахуванням поверхневого заряду набуває вигляду

$$\nabla\left(\varepsilon_r\nabla\varphi\right)=-\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta\left(h\right) \quad (2.77)$$

де $\delta\left(h\right)$ – дельта-функція Дірака, h – відстань по нормалі до поверхні діелектрика, σ – сумарна поверхнева густина заряду. Рівняння (2.77) являє собою рівняння Пуассона для електричного поля.

Густина результуючого заряду в будь-якій точці плазми визначається як різниця між густиною позитивного та негативного заряду. Тоді можна записати

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\left(\varepsilon_r\nabla\varphi\right)=-\frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_{N_4^+}+n_{N_2^+}+n_{O_4^+}+n_{O_2^+}-n_{O_2^-}-n_{O^-}-n_e\right)-\\-\frac{\left(\sigma_+-\sigma_-\right)}{\varepsilon_0}\delta\end{gathered}, \quad (2.78)$$

де σ_+, σ_- – поверхнева густина позитивного та негативного зарядів, $n_{N_4^+}$, $n_{N_2^+}$, $n_{O_4^+}$, $n_{O_2^+}$, $n_{O_2^-}$, n_{O^-}, n_e – об'ємна густина електронів, а також позитивних і негативних іонів азоту та кисню, e – елементарний заряд.

Дане рівняння дозволяє описувати нестаціонарні процеси через нестаціонарні граничні умови для потенціалу φ та змінний за часом джерельний доданок.

2.8 Рівняння динаміки заряджених частинок плазми

2.8.1 Рівняння Больцмана

Кінетичне рівняння Больцмана описує зміну в часі t функцію розподілу густини частинок $f\left(\mathbf{r},\mathbf{v},t\right)$ в одночастковому фазовому просторі. Розглянемо функцію розподілу в просторі координат і швидкостей $f\left(\mathbf{r},\mathbf{v},t\right)$. У класичній статистиці одночасткова функція розподілу нормується так, що інтеграл за всіма швидкостями є густина числа частинок у точці $\mathbf{r}$ в поточний момент часу t [157]

$$n\left(\mathbf{r},t\right)=\int f\left(\mathbf{r},\mathbf{v},t\right)d\mathbf{v}, \quad (2.79)$$

де $\mathbf{r}$ – координата, $\mathbf{v}$ – швидкість.

Повна похідна функції розподілу за часом набуває вигляду [157]

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \tag{2.80}$$

Враховуючи, що $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}=\mathbf{v}$, а $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=\frac{\mathbf{F}}{m}$ запишемо вираз (2.80) у такий спосіб

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)+\frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r},\mathbf{v},t), \tag{2.81}$$

де $\mathbf{F}$ – сила, що діє на частинку, m – маса частинки.

З іншого боку зміна функції розподілу в часі характеризується інтегралом зіткнень

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_{col}(\mathbf{r},\mathbf{v},t) \tag{2.82}$$

або

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)+\frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_{col}(\mathbf{r},\mathbf{v},t). \tag{2.83}$$

Інтеграл зіткнень $\{\partial f/\partial t\}_{col}$ визначає швидкість зміни функції розподілу $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ внаслідок зіткнень між частками і являє собою різницю між джерелами та стоками частинок.

Єдина зовнішня сила, яка враховується в рівнянні, виникає при впливі електричного поля на заряджені частинки

$$\mathbf{F}=e\mathbf{E}. \tag{2.84}$$

Частинки плазми – це електрони, іони та нейтральні атоми. Кожний вид частинок підкоряється власному рівнянню Больцмана. Поле просторового заряду враховується шляхом поєднання рівняння Пуассона для електричного поля з рівняннями Больцмана для кожного виду частинок.

Інтегрування рівняння Больцмана за простором швидкості призводить до гідродинамічних рівнянь (рівняння збереження маси та імпульсу).

2.8.2 Рівняння збереження маси

Математичне сподівання рівняння Больцмана виходить шляхом інтегрування рівняння за простором швидкості. Відзначимо, що для будь-якої змінної $X(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ середнє значення визначається за формулою [157]

$$\overline{X}(\mathbf{r},t)=\frac{\int X(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\,fd\mathbf{v}}{\int fd\mathbf{v}}=\frac{1}{n}\int X(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\,fd\mathbf{v}\,. \qquad (2.85)$$

Інтеграл рівняння Больцмана набуває вигляду

$$\int\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\frac{e\mathbf{E}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right)d\mathbf{v}=\int\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_{col}d\mathbf{v}\,. \qquad (2.86)$$

Перший доданок:

$$\int\frac{\partial f}{\partial t}d\mathbf{v}=\frac{\partial}{\partial t}\int fd\mathbf{v}=\frac{\partial n}{\partial t}\,. \qquad (2.87)$$

Другий доданок:

$$\int\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{v}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\int \mathbf{v}fd\mathbf{v}=\frac{\partial n\overline{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{r}}\,. \qquad (2.88)$$

Третій доданок:

Тому що напруженість електричного поля $\mathbf{E}$ не залежить від $\mathbf{v}$ і для всіх $\mathbf{r}$ виконується співвідношення $f(\mathbf{r},\mathbf{v}_{\min},t)=f(\mathbf{r},\mathbf{v}_{\max},t)=0$, тоді

$$\frac{e\mathbf{E}}{m}\int\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}d\mathbf{v}=\frac{e\mathbf{E}}{m}f\Big|_{\mathbf{v}_{\min}}^{\mathbf{v}_{\max}}=0\,. \qquad (2.89)$$

Вираз $\int\{\partial f/\partial t\}_{col}d\mathbf{v}$ – це фактично джерело S виникнення частинок у результаті миттєвої, локальної генерації та деструкції заряджених частинок через зіткнення в певному місці $\mathbf{r}$ й у момент часу t.

Застосовуючи векторні величини, математичне очікування рівняння Больцмана дасть нам закон збереження кількості частинок.

Закон збереження кількості частинок певного роду в плазмі виражається через рівняння нерозривності [157]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = S, \tag{2.90}$$

де $\mathbf{\Gamma} = n\overline{\mathbf{v}}$ – потік частинок, n – концентрація частинок, $\overline{\mathbf{v}}$ – середня швидкість частинок, S – джерельний член, що описує генерацію та деструкцію заряджених частинок даного роду.

2.8.3 Рівняння збереження імпульсу

Рівняння збереження імпульсу частинок виходить шляхом множення рівняння Больцмана на $m\mathbf{v}$ й інтегрування за простором швидкості [157].

Перший доданок:

$$\int m\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial t}d\mathbf{v} = m\frac{\partial n\overline{\mathbf{v}}}{\partial t}. \tag{2.91}$$

Другий доданок:

$$\int m\mathbf{v}\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{v} = m\frac{\partial n\overline{\mathbf{v}\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{r}}. \tag{2.92}$$

Швидкість руху частинки складається із двох доданків

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \overline{\mathbf{v}}, \tag{2.93}$$

де $\mathbf{V}$ – теплова швидкість, яка задовольняє умові $\overline{\mathbf{V}} = 0$ (середня швидкість теплового руху). Тоді [157]

$$\overline{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{V}\mathbf{V}} + 2\overline{\mathbf{V}\,\overline{\mathbf{v}}} + \overline{\overline{\mathbf{v}}\,\overline{\mathbf{v}}} = \overline{\mathbf{V}^2} + \overline{\mathbf{v}}\,\overline{\mathbf{v}}, \tag{2.94}$$

$$m\frac{\partial\, n\overline{\mathbf{v}\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{r}} = m\frac{\partial\, n\overline{\mathbf{V}\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{r}} + m\frac{\partial\, n\overline{\mathbf{v}}\,\overline{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{r}}. \tag{2.95}$$

Третій доданок

$$\int m\mathbf{v}\frac{e\mathbf{E}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}d\mathbf{v} = e\mathbf{E}\int \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}d\mathbf{v}, \tag{2.96}$$

де сила $e\mathbf{E}$ не залежить від швидкості частинки [157].

Права частина виразу (2.96) може бути записана в наступному вигляді [157]

$$e\mathbf{E}\int \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}d\mathbf{v} = e\mathbf{E}\int \frac{\partial(\mathbf{v}f)}{\partial \mathbf{v}}d\mathbf{v} - e\mathbf{E}\int f\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}}d\mathbf{v}. \quad (2.97)$$

У виразі (2.97) перший доданок у правій частині звертається в нуль при переході за допомогою теореми Остроградського-Гауса від об'ємного інтеграла до поверхневого й інтегрування за всім простором швидкостей ($f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) \to 0$ при $\mathbf{v} \to \infty$).

У результаті отримаємо [157]

$$e\mathbf{E}\int \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}d\mathbf{v} = e\mathbf{E}\int f d\mathbf{v} = -ne\mathbf{E}. \quad (2.98)$$

Доданок у правій частині (2.83) при множенні на $m\mathbf{v}$ набуває вигляду [157]

$$\int m\mathbf{v}\left\{\frac{\delta f}{\delta t}\right\}_{col} d\mathbf{v} = -mn\nu\overline{\mathbf{v}}, \quad (2.99)$$

де ν – частота передачі імпульсу при зіткненнях (частота зіткнень) між розглянутою частинкою та нейтральними атомами.

У результаті отримаємо [157]

$$m\frac{\partial n\overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + m\frac{\partial n\overline{\mathbf{VV}}}{\partial \mathbf{r}} + m\frac{\partial n\,\overline{\mathbf{v}}\,\overline{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{r}} = ne\mathbf{E} - mn\nu\overline{\mathbf{v}}. \quad (2.100)$$

При узагальненні на ізотропний тривимірний випадок з'являється сила внутрішнього тертя в недіагональних доданках тензора $\mathbf{VV}$ – тензор тиску $\overline{p}$

$$m\nabla n\overline{\mathbf{V}}\overline{\mathbf{V}} = \nabla\overline{p}, \quad (2.101)$$

і рівняння збереження імпульсу прийме наступний вигляд [157]

$$m\frac{\partial n\overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + m\nabla\left(n\,\overline{\mathbf{v}}\,\overline{\mathbf{v}}\right) = ne\mathbf{E} - \nabla\overline{p} - mn\nu\overline{\mathbf{v}}. \quad (2.102)$$

У рівнянні (2.102) перший доданок праворуч описує імпульс, отриманий зарядженими частинками під впливом електричного поля, а останній доданок являє собою імпульс, втрачений частинками при зіткненнях з нейтральними молекулами.

2.8.4 Рівняння збереження імпульсу в дифузійно-дрейфовому наближенні

Рівняння (2.102) може бути спрощене з використанням дифузійно-дрейфового наближення [157].

Частота зіткнень іонів і електронів з нейтральними атомами дорівнює [157]

$$\nu_e = \frac{e}{m_e \mu_e} = 6.11 \cdot 10^{12}\, 1/c, \quad \nu_{N_4^+} = \frac{e}{m_{N_4^+} \mu_{N_4^+}} = 7.05 \cdot 10^{9}\, 1/c, \qquad (2.103)$$

де $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл – елементарний заряд, $m_e = 9.1094 \cdot 10^{-31}$ кг – маса електрона, $\mu_e = 0.0287\ м^2/(B \cdot c)$ – рухливість електронів при напруженості електричного поля $E = 2 \cdot 10^6\ B/м$, $m_{N_4^+} = 9.296 \cdot 10^{-26}$ кг – маса іона N_4^+, $\mu_{N_4^+} = 2.44 \cdot 10^{-4}$ $м^2/(B \cdot c)$ – рухливість іонів N_4^+.

Тому що густина нейтральних атомів велика $N = 2.447 \cdot 10^{25}\, 1/м^3$, довжина вільного пробігу заряджених частинок набагато менша характерних розмірів області (число Кнудсена $Kn << 1$), а частота зіткнень іонів та електронів з нейтральними атомами набагато більша, ніж частота електричного поля $\nu = 10^3 \div 10^4\ 1/c$. Тому інерцією іонів і електронів $\partial mn\bar{\mathbf{v}}/\partial t$ можна знехтувати [157].

Дрейфова швидкість, обумовлена зовнішнім електричним полем, дуже мала в порівнянні з тепловою швидкістю $\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}} << \overline{\mathbf{VV}}$ [157].

Температуру пов'язано з тиском наступним співвідношенням

$$p = mn\overline{\mathbf{V}}\overline{\mathbf{V}} = nk_B T, \qquad (2.104)$$

де T – температура, k_B – константа Больцмана.

Градієнт тиску набуває вигляду

$$\nabla p = k_B T \nabla n + k_B n \nabla T\ . \qquad (2.105)$$

Для електронів термодифузійний доданок $k_B n \nabla T$ дуже малий у порівнянні з дифузійним $k_b T \nabla n$, а для іонів і зовсім дорівнює нулю тому що

$T_i = T = const$. У результаті рівняння (2.102) набуде вигляду [157]

$$mn\overline{\nu}\,\overline{\mathbf{v}} = ne\mathbf{E} - k_B T\nabla n\,, \tag{2.106}$$

або

$$n\overline{\mathbf{v}} = \frac{ne}{m\overline{\nu}}\mathbf{E} - \frac{k_B T}{m\overline{\nu}}\nabla n\,. \tag{2.107}$$

Вводячи вираз для рухливості заряджених частинок (2.108)

$$\mu = \frac{e}{m\overline{\nu}}\,, \tag{2.108}$$

і вираз для дифузії (2.109)

$$D = \frac{k_B T}{m\overline{\nu}}\,, \tag{2.109}$$

рівняння збереження імпульсу (2.102) у дифузійно-дрейфовому наближенні набуде вигляду [157]

$$n\overline{\mathbf{v}} = \mu\mathbf{E}n - D\nabla n \quad \text{(для позитивно заряджених частинок)}, \tag{2.110}$$

$$n\overline{\mathbf{v}} = -\mu\mathbf{E}n - D\nabla n \quad \text{(для негативно заряджених частинок)}. \tag{2.111}$$

2.8.5 Наближення локального поля

Залежність коефіцієнтів переносу та деяких хімічних реакцій (іонізації, збудження, прилипання) від напруженості електричного поля називається наближенням локального поля.

У цьому наближенні передбачається, що в системі немає переносу енергії, крім пружних зіткнень. Енергія електронів безпосередньо зв'язана в просторі й у часі з електричним полем, а їх нагрівання точно врівноважується втратами енергії при зіткненнях. Із цього випливає, що локальна рівновага електронів досягається миттєво в часі при зміні напруженості електричного поля. Інакше кажучи, приріст енергії заряджених частинок у локальному електричному полі локально врівноважується втратами через зіткнення. Коефіцієнти переносу та швидкості хімічних реакцій розглядаються як функції електричного поля [157]

$$\mu_e = \mu_e(E), \quad D_e = D_e(E), \quad k_e = k_e(E) \ . \tag{2.112}$$

Дана гіпотеза може давати помилкові результати в областях сильного електричного поля. Якщо довжина вільного пробігу електронів невелика по відношенню до характерної відстані зміни електричного поля, електрони можуть одержувати енергію в одному місці та розсіювати її десь в іншому. Крім того, коли електричне поле пов'язане з амбіполярною дифузією й електрони утримуються цим полем, неможливо зв'язати енергію електронів з локальним електричним полем. До того ж для електронів наближення локального поля часто призводить до незадовільних результатів розрахунків через погану передачу енергії при зіткненнях електронів з нейтральними атомами (відмінність у масі на чотири порядки). Тому, замість використання співвідношень (2.112), коефіцієнти переносу, а також коефіцієнти швидкості хімічних реакцій іонізації, збудження і прилипання будуть функціями середньої енергії електронів [157, 164]

$$\mu_e = \mu_e(\bar{\varepsilon}), \quad D_e = D_e(\bar{\varepsilon}), \quad k_e = k_e(\bar{\varepsilon}) \ . \tag{2.113}$$

Для важких частинок з низькою рухливістю справедливо наближення локального поля, але для електронів більш доцільно розв’язувати ще одне додаткове рівняння, що описує перенос їх середньої енергії.

У роботі розглядаються два підходи до визначення коефіцієнтів переносу й основних хімічних реакцій на базі рівняння енергії електронів і без нього (наближення локального поля). Електричне поле плазмового актуатора при діелектричному розряді сильно нерівномірне. Тому краще застосовувати підхід до визначення коефіцієнтів переносу й основних хімічних реакцій, заснований на середній енергії електронів, чим визначати їх як функцію напруженості електричного поля (наближення локального поля).

Використання рівняння енергії для електронів підвищує точність математичної моделі та призводить до більш реалістичного опису фізичних процесів, що відбуваються в діелектричному бар'єрному розряді.

2.8.6 Рівняння збереження енергії для електронів

Кінетична енергія, що отримується електронами в електричному полі, перетворюється в теплову енергію хаотичного руху за рахунок зіткнень. Енергія електронів визначається за формулою

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} k_B T_e, \tag{2.114}$$

де $\bar{\varepsilon}$ – середня енергія електронів.

Рівняння для середньої енергії електронів набуває вигляду [157]

$$\frac{\partial n_e \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{5}{3} \nabla \cdot \left(n_e \bar{\varepsilon} \bar{\mathbf{v}}_e \right) + \nabla \mathbf{Q} + n_e e \mathbf{E} \bar{\mathbf{v}}_e = -n_e \bar{\nu}_e \bar{\varepsilon}, \tag{2.115}$$

де $\mathbf{Q}$ – тепловий потік, $n_e e \mathbf{E} \bar{\mathbf{v}}_e$ – джерело тепла, що представляє енергію, отриману електронами в електричному полі, $n_e \bar{\nu}_e \bar{\varepsilon}$ – втрата енергії при зіткненнях, яка залежить від самої середньої енергії.

У рівнянні збереження імпульсу (2.102) складовою інерції електронів нехтували, тому що частота, відповідна до обміну імпульсами в зіткненнях, набагато більша частоти електричного поля. Для кінетичної енергії складовою інерції нехтувати не можна.

Тому потік середньої енергії електронів у рівнянні (2.115) набуває вигляду

$$\nabla \mathbf{\Gamma}_\varepsilon = \frac{5}{3} \nabla \cdot \left(n_\varepsilon \bar{\mathbf{v}}_e \right) + \nabla \mathbf{Q}, \tag{2.116}$$

де $n_\varepsilon = n_e \bar{\varepsilon}$ – густина середньої енергії електронів. Тоді потік енергії пов'язаний з потоком електронів визначається за наступною формулою [157]

$$\mathbf{\Gamma}_\varepsilon = \frac{5}{3} \mathbf{\Gamma}_e \bar{\varepsilon} + \mathbf{Q}, \tag{2.117}$$

Тепловий потік пропорційний градієнту температури

$$\mathbf{Q} = -\lambda_e \nabla T_e, \tag{2.118}$$

де $\lambda_e = \frac{5}{2} k_B n_e D_e$ – коефіцієнт теплопровідності [44].

У результаті тепловий потік набуває вигляду [157]

$$\mathbf{Q} = -\frac{5}{3} n_e D_e \nabla \bar{\varepsilon} . \tag{2.119}$$

Поєднуючи рівняння (2.111) для електронів з рівняннями (2.117) і (2.119), отримаємо

$$\mathbf{\Gamma}_\varepsilon = \frac{5}{3} \bar{\varepsilon} \left(-\mu_e \mathbf{E} n_e - D_e \nabla n_e \right) - \frac{5}{3} n_e D_e \nabla \bar{\varepsilon} , \tag{2.120}$$

$$\mathbf{\Gamma}_\varepsilon = -\frac{5}{3} \mu_e \mathbf{E} n_\varepsilon - \frac{5}{3} \left(\bar{\varepsilon} D_e \nabla n_e + n_e D_e \nabla \bar{\varepsilon} \right), \tag{2.121}$$

$$\mathbf{\Gamma}_\varepsilon = -\frac{5}{3} \mu_e \mathbf{E} n_\varepsilon - \frac{5}{3} D_e \nabla n_\varepsilon , \tag{2.122}$$

$$\mathbf{\Gamma}_\varepsilon = -\mu_\varepsilon \mathbf{E} n_\varepsilon - D_\varepsilon \nabla n_\varepsilon , \tag{2.123}$$

де $\mu_\varepsilon = 5/3\, \mu_e$ – рухливість енергії, $D_\varepsilon = 5/3\, D_e$ – коефіцієнт дифузії енергії. У результаті рівняння збереження енергії для електронів можна записати у вигляді (2.124) [157]

$$\frac{\partial n_\varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\varepsilon = H - P\left(\bar{\varepsilon} \right), \tag{2.124}$$

де $H = n_e e \mathbf{E} \bar{\mathbf{v}}_e = e \mathbf{\Gamma}_\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}$, $P\left(\bar{\varepsilon} \right) = n_e \bar{\nu}_e \bar{\varepsilon}$.

2.9 Рівняння динаміки частинок плазми в дифузійно-дрейфовому наближенні

Підставляючи вирази (2.110) і (2.111) в (2.90), отримаємо

$$\frac{\partial n_\ell}{\partial t} + \nabla \cdot \left(s \mu_\ell \mathbf{E} n_\ell - D_\ell \nabla n_\ell \right) = S_\ell , \tag{2.125}$$

де $s = 1$ – для позитивно заряджених частинок і $s = -1$ – для негативно заряджених частинок, ℓ – порядковий номер рівняння або назва хімічного елемента.

У даній роботі розглядаються 14 видів частинок. Виходячи з кінетичної схеми плазми діелектричного бар'єрного розряду, можна скласти рівняння динаміки для кожного сорту частинок

$1 - N_4^+$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial n_{N_4^+}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mu_{N_4^+} \mathbf{E} n_{N_4^+} - D_{N_4^+} \nabla n_{N_4^+} \right) = k_{11} n_{N_2(A)} n_{N_2(a')} + k_{12} n_{N_2(A)} n_{N_2(B)} + \\ &+ k_{13} n_{N_2(A)} n_{N_2(C)} + k_{14} n_{N_2(a')}^2 + k_{15} n_{N_2(a')} n_{N_2(C)} + k_{16} n_{N_2(B)}^2 + k_{17} n_{N_2(C)}^2 - \\ &- k_{33} n_e n_{N_4^+} + k_{71} n_{N_2^+} n_{N_2}^2 - k_{73} n_{N_4^+} n_{N_2} - k_{74} n_{N_4^+} n_{O_2}\end{aligned}, \quad (2.126)$$

$2 - N_2^+$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial n_{N_2^+}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mu_{N_2^+} \mathbf{E} n_{N_2^+} - D_{N_2^+} \nabla n_{N_2^+} \right) = \alpha_1 \left| \mathbf{\Gamma_e} \right| + k_{10} n_e n_{N_2(A)} - k_{35} n_e n_{N_2^+} - \\ &- k_{37} n_e^2 n_{N_2^+} - k_{39} n_e n_{N_2^+} n_{N_2} - k_{40} n_e n_{N_2^+} n_{O_2} - k_{43} n_{N_2^+} n_{O_2^-} - k_{44} n_{N_2^+} n_{O^-} - \\ &- k_{71} n_{N_2^+} n_{N_2}^2 + k_{73} n_{N_4^+} n_{N_2}\end{aligned}, \quad (2.127)$$

$3 - N_2 \left(A^3 \Sigma_u^+ \right)$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial n_{N_2(A)}}{\partial t} = \alpha_3 \left| \mathbf{\Gamma_e} \right| - k_{10} n_e n_{N_2(A)} - k_{11} n_{N_2(A)} n_{N_2(a')} - k_{12} n_{N_2(A)} n_{N_2(B)} - \\ &- k_{13} n_{N_2(A)} n_{N_2(C)} - k_{29} n_{O_2^-} n_{N_2(A)} - \left(k_{56} + k_{57} + k_{58} \right) n_{N_2(A)} n_{O_2} + k_{60} n_{N_2(B)} + \\ &+ k_{61} n_{N_2(B)} n_{N_2}\end{aligned}, \quad (2.128)$$

$4 - N_2 \left(B^3 \Pi_g \right)$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial n_{N_2(B)}}{\partial t} = \alpha_4 \left| \mathbf{\Gamma_e} \right| - k_{12} n_{N_2(A)} n_{N_2(B)} - k_{16} n_{N_2(B)}^2 - k_{30} n_{O_2^-} n_{N_2(B)} - \\ &- k_{59} n_{N_2(B)} n_{O_2} - k_{60} n_{N_2(B)} - k_{61} n_{N_2(B)} n_{N_2} + k_{62} n_{N_2(a')} n_{N_2} + k_{64} n_{N_2(C)}\end{aligned}, \quad (2.129)$$

$5 - N_2 \left(a'^1 \Sigma_u^- \right)$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial n_{N_2(a')}}{\partial t} = \alpha_5 \left| \mathbf{\Gamma_e} \right| - k_{11} n_{N_2(A)} n_{N_2(a')} - k_{14} n_{N_2(a')}^2 - \\ &- k_{15} n_{N_2(a')} n_{N_2(C)} - k_{62} n_{N_2(a')} n_{N_2} - k_{63} n_{N_2(a')} n_{O_2} + k_{65} n_{N_2(C)} n_{N_2}\end{aligned}, \quad (2.130)$$

$6 - N_2 \left(C^3 \Pi_u \right)$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial n_{N_2(C)}}{\partial t} = \alpha_6 \left| \mathbf{\Gamma_e} \right| - k_{13} n_{N_2(A)} n_{N_2(C)} - k_{15} n_{N_2(a')} n_{N_2(C)} - \\ &- k_{17} n_{N_2(C)}^2 - k_{64} n_{N_2(C)} - k_{65} n_{N_2(C)} n_{N_2}\end{aligned}, \quad (2.131)$$

$7 - O_4^+$

$$\frac{\partial n_{O_4^+}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mu_{O_4^+} \mathbf{E} n_{O_4^+} - D_{O_4^+} \nabla n_{O_4^+} \right) = -k_{34} n_e n_{O_4^+} - k_{49} n_{O_2^-} n_{O_4^+} - \\ -k_{51} n_{O_2^-} n_{O_4^+} n_{O_2} + k_{72} n_{O_2^+} n_{O_2}^2 - k_{75} n_{O_4^+} n_{O_2} - k_{76} n_{O_4^+} n_{O_2(a)} - k_{77} n_{O_4^+} n_{O_2(b)} , \quad (2.132)$$

$8 - O_2^+$

$$\frac{\partial n_{O_2^+}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mu_{O_2^+} \mathbf{E} n_{O_2^+} - D_{O_2^+} \nabla n_{O_2^+} \right) = \alpha_2 \left| \mathbf{\Gamma_e} \right| + k_{9a} n_e n_{O_2(a)} + k_{9b} n_e n_{O_2(b)} - \\ -k_{36} n_e n_{O_2^+} - k_{38} n_e^2 n_{O_2^+} - k_{41} n_e n_{O_2^+} n_{N_2} - k_{42} n_e n_{O_2^+} n_{O_2} - \left(k_{45} + k_{46} \right) n_{O_2^-} n_{O_2^+} - \\ -\left(k_{47} + k_{48} \right) n_{O^-} n_{O_2^+} - k_{50} n_{O^-} n_{O_2^+} n_{O_2} - k_{72} n_{O_2^+} n_{O_2}^2 + k_{74} n_{N_4^+} n_{O_2} + \\ +k_{75} n_{O_4^+} n_{O_2} + k_{76} n_{O_4^+} n_{O_2(a)} + k_{77} n_{O_4^+} n_{O_2(b)} + S_{ph} , \quad (2.133)$$

$9 - O_2^-$

$$\frac{\partial n_{O_2^-}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\mu_{O_2^-} \mathbf{E} n_{O_2^-} - D_{O_2^-} \nabla n_{O_2^-} \right) = k_{19} n_e n_{O_2}^2 + k_{20} n_e n_{O_2} n_{N_2} + k_{22} n_e n_O n_{O_2} - \\ -k_{23} n_{O_2^-} n_{N_2} - k_{24} n_{O_2^-} n_{O_2} - k_{27} n_{O_2^-} n_{O_2(a)} - k_{28} n_{O_2^-} n_{O_2(b)} - k_{29} n_{O_2^-} n_{N_2(A)} - \\ -k_{30} n_{O_2^-} n_{N_2(B)} - k_{43} n_{O_2^-} n_{N_2^+} - \left(k_{45} + k_{46} \right) n_{O_2^-} n_{O_2^+} - k_{49} n_{O_2^-} n_{O_4^+} - k_{51} n_{O_2^-} n_{O_4^+} n_{O_2} - \\ -k_{78} n_{O_2^-} n_O + k_{79} n_{O^-} n_{O_2(a)} , \quad (2.134)$$

$10 - O^-$

$$\frac{\partial n_{O^-}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\mu_{O^-} \mathbf{E} n_{O^-} - D_{O^-} \nabla n_{O^-} \right) = \eta_{18} \left| \mathbf{\Gamma_e} \right| + k_{21} n_e n_O n_{O_2} - k_{25} n_{O^-} n_O - \\ -k_{26} n_e n_{O^-} - k_{31} n_{O^-} n_{O_2(a)} - k_{32} n_{O^-} n_{O_2(b)} - k_{44} n_{O^-} n_{N_2^+} - \\ -\left(k_{47} + k_{48} \right) n_{O^-} n_{O_2^+} - k_{50} n_{O^-} n_{O_2^+} n_{O_2} + k_{78} n_{O_2^-} n_O - k_{79} n_{O^-} n_{O_2(a)} , \quad (2.135)$$

$11 - O$

$$\frac{\partial n_O}{\partial t} = \eta_{18} \left| \mathbf{\Gamma_e} \right| - k_{21} n_e n_O n_{O_2} - k_{25} n_{O^-} n_O + k_{26} n_e n_{O^-} + k_{31} n_{O^-} n_{O_2(a)} + \\ +k_{32} n_{O^-} n_{O_2(b)} + 2k_{36} n_e n_{O_2^+} + k_{44} n_{O^-} n_{N_2^+} + 2k_{46} n_{O_2^-} n_{O_2^+} + \left(k_{47} + 3k_{48} \right) n_{O^-} n_{O_2^+} + \\ +k_{50} n_{O^-} n_{O_2^+} n_{O_2} - \left(k_{52} + k_{53} \right) n_O^2 n_{N_2} - \left(k_{54} + k_{55} \right) n_O^2 n_{O_2} + 2k_{58} n_{N_2(A)} n_{O_2} + \\ +2k_{59} n_{N_2(B)} n_{O_2} + 2k_{63} n_{N_2(a')} n_{O_2} - k_{78} n_{O_2^-} n_O + k_{79} n_{O^-} n_{O_2(a)} + 2k_{80} n_e n_{O_2} , \quad (2.136)$$

$12 - O_2\left(a^1\Delta_g\right)$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial n_{O_2(a)}}{\partial t} = \alpha_7\left|\mathbf{\Gamma_e}\right| - k_{9a}n_e n_{O_2(a)} - k_{27}n_{O_2^-}n_{O_2(a)} - \\&-k_{31}n_{O^-}n_{O_2(a)} + k_{52}n_O^2 n_{N_2} + k_{54}n_O^2 n_{O_2} + k_{56}n_{N_2(A)}n_{O_2} - k_{66}n_{O_2(a)}n_{N_2} -, \\&-k_{67}n_{O_2(a)}n_{O_2} - k_{68}n_{O_2(a)}n_O - k_{70}n_{O_2(a)}^2 - k_{76}n_{O_4^+}n_{O_2(a)} - k_{79}n_{O^-}n_{O_2(a)}\end{aligned} \tag{2.137}$$

$13 - O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right)$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial n_{O_2(b)}}{\partial t} = \alpha_8\left|\mathbf{\Gamma_e}\right| - k_{9b}n_e n_{O_2(b)} - k_{28}n_{O_2^-}n_{O_2(b)} - k_{32}n_{O^-}n_{O_2(b)} + \\&+k_{53}n_O^2 n_{N_2} + k_{55}n_O^2 n_{O_2} + k_{57}n_{N_2(A)}n_{O_2} - k_{69}n_{O_2(b)}n_{O_2} - k_{77}n_{O_4^+}n_{O_2(b)}\end{aligned}, \tag{2.138}$$

$14 - e$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla\cdot\left(-\mu_e\mathbf{E}n_e - D_e\nabla n_e\right) = \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\left|\mathbf{\Gamma_e}\right| + k_{9a}n_e n_{O_2(a)} + k_{9b}n_e n_{O_2(b)} + \\&+k_{10}n_e n_{N_2(A)} + k_{11}n_{N_2(A)}n_{N_2(a')} + k_{12}n_{N_2(A)}n_{N_2(B)} + k_{13}n_{N_2(A)}n_{N_2(C)} + \\&+k_{14}n_{N_2(a')}^2 + k_{15}n_{N_2(a')}n_{N_2(C)} + k_{16}n_{N_2(B)}^2 + k_{17}n_{N_2(C)}^2 - \eta_{18}\left|\mathbf{\Gamma_e}\right| - \\&-k_{19}n_e n_{O_2}^2 - k_{20}n_e n_{O_2}n_{N_2} - \left(k_{21} + k_{22}\right)n_e n_O n_{O_2} + k_{23}n_{O_2^-}n_{N_2} + \\&+k_{24}n_{O_2^-}n_{O_2} + k_{25}n_{O^-}n_O + k_{26}n_e n_{O^-} + k_{27}n_{O_2^-}n_{O_2(a)} + k_{28}n_{O_2^-}n_{O_2(b)} + \\&+k_{29}n_{O_2^-}n_{N_2(A)} + k_{30}n_{O_2^-}n_{N_2(B)} + k_{31}n_{O^-}n_{O_2(a)} + k_{32}n_{O^-}n_{O_2(b)} - \\&-k_{33}n_e n_{N_4^+} - k_{34}n_e n_{O_4^+} - k_{35}n_e n_{N_2^+} - k_{36}n_e n_{O_2^+} - k_{37}n_e^2 n_{N_2^+} - k_{38}n_e^2 n_{O_2^+} \\&-k_{39}n_e n_{N_2^+}n_{N_2} - k_{40}n_e n_{N_2^+}n_{O_2} - k_{41}n_e n_{O_2^+}n_{N_2} - k_{42}n_e n_{O_2^+}n_{O_2} + S_{ph}\end{aligned}, \tag{2.139}$$

де $\mathbf{\Gamma_e}$ – вектор потоку електронів

$$\mathbf{\Gamma_e} = -\mu_e\mathbf{E}n_e - D_e\nabla n_e. \tag{2.140}$$

Коефіцієнти об'ємних хімічних реакцій наведено в таблиці 2.1, а коефіцієнти переносу в пункті 2.11. Джерельний доданок S_{ph} відповідає за фотоіонізацію та розраховується на основі моделі фотоіонізації [229].

Система рівнянь динаміки частинок плазми в дифузійно-дрейфовому формулюванні у декартовій двовимірній формі запису має вигляд

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}\right]=\mathbf{S}, \qquad (2.141)$$

де $\mathbf{n}$ − вектор шуканих змінних для об'ємної густини частинок, $\boldsymbol{\mu}$ і $\mathbf{D}$ – векторні коефіцієнти рухливості та дифузії частинок, $\mathbf{S}$ − вектор джерельних членів

$$\mathbf{n}=\Big[n_{N_4^+},\ n_{N_2^+},\ n_{N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right)},\ n_{N_2\left(B^3\Pi_g\right)},\ n_{N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right)},\ n_{N_2\left(C^3\Pi_u\right)},$$
$$n_{O_4^+},\ n_{O_2^+},\ n_{O_2^-},\ n_{O^-},\ n_O,\ n_{O_2\left(a^1\Delta_g\right)},\ n_{O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right)},\ n_e\Big]^T, \qquad (2.142)$$

$$\boldsymbol{\mu}=\Big[\mu_{N_4^+},\ \mu_{N_2^+},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$$
$$\mu_{O_4^+},\ \mu_{O_2^+},\ -\mu_{O_2^-},\ -\mu_{O^-},\ 0,\ 0,\ 0,\ -\mu_e\Big]^T, \qquad (2.143)$$

$$\mathbf{D}=\Big[D_{N_4^+},\ D_{N_2^+},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$$
$$D_{O_4^+},\ D_{O_2^+},\ D_{O_2^-},\ D_{O^-},\ 0,\ 0,\ 0,\ D_e\Big]^T, \qquad (2.144)$$

$$\mathbf{S}=\Big[S_{N_4^+},\ S_{N_2^+},\ S_{N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right)},\ S_{N_2\left(B^3\Pi_g\right)},\ S_{N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right)},\ S_{N_2\left(C^3\Pi_u\right)},$$
$$S_{O_4^+},\ S_{O_2^+},\ S_{O_2^-},\ S_{O^-},\ S_O,\ S_{O_2\left(a^1\Delta_g\right)},\ S_{O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right)},\ S_e\Big]^T. \qquad (2.145)$$

Тут під добутком вигляду $\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}$ мається на увазі вектор $\left[\mu_1 n_1, \mu_2 n_2, \ldots, \mu_\ell n_\ell\right]^T$.

Компоненти вектора $\mathbf{S}$ у виражені (2.145) – це джерельні складові (праві частини) у відповідних рівнянь (2.126)–(2.139), які формуються виходячи з кінетичної схеми діелектричного бар'єрного розряду, і відповідають за джерела та стоки певного сорту частинок.

Швидкістю руху нейтральних і збуджених частинок можна знехтувати, тому що вона порівнянна зі швидкістю руху суцільного середовища та на 2÷3 порядку менша, ніж швидкість руху заряджених частинок. До того ж швидкості протікання хімічних процесів за участю нейтральних і збуджених частинок набагато вищі, ніж процеси дифузії.

2.10 Рівняння балансу поверхневої густини позитивного та негативного заряду на діелектрику

Процеси на поверхні діелектрика відіграють істотну роль у роботі плазмового актуатора. Так, взаємодія заряджених частинок з діелектриком призводить до накопичення електричного заряду на поверхні діелектрика. Рівняння балансу поверхневої густини позитивного та негативного заряду визначається за такими виразами

$$\frac{\partial \sigma_+}{\partial t} = -e\left(1+\gamma_{diel}\right)\Gamma_{i+} - \alpha_{rw}\sigma_+\sigma_-/e\,, \tag{2.146}$$

$$\frac{\partial \sigma_-}{\partial t} = -e\Gamma_{i-} - e\Gamma_e - \alpha_{rw}\sigma_+\sigma_-/e\,, \tag{2.147}$$

де Γ_{i+}, Γ_{i-}, Γ_e – потік позитивних і негативних іонів та електронів по нормалі до поверхні, який визначається по типу граничних умов, α_{rw} – коефіцієнт поверхневої рекомбінації.

Коефіцієнт поверхневої рекомбінації α_{rw} (процес B на рис. 2.1) визначається поверхневою дифузією електронів. У роботі [203] вираз для коефіцієнта поверхневої рекомбінації α_{rw} визначається за наступним співвідношенням

$$\alpha_{rw} = d_r\sqrt{\frac{\pi k_b T_w}{m_e}}\,, \tag{2.148}$$

де $d_r = 10^{-9}\,м$ – радіус рекомбінації (величина, що характеризує двовимірні зіткнення, аналогічна ефективному перетину зіткнень для тривимірного випадку), T_w – температура діелектричної поверхні.

Значення коефіцієнтів поверхневих реакцій наведено в таблиці 2.2.

2.11 Моделювання фотоіонізації

При моделюванні діелектричного бар'єрного розряду в повітрі при атмосферному тиску необхідно враховувати явище фотоіонізації для правильного опису поширення катодоспрямованого (позитивного) стримера.

У повітрі фотоіонізація молекул кисню відбувається під впливом ультрафіолетового випромінювання збуджених молекул азоту $N_2\left(b^1\Pi_u, b'^1\Sigma_u^+, c_4'^1\Sigma_u^+\right)$ в діапазоні довжин хвиль 98.0–102.5 нм [325]. Електрони, прискорені сильним електричним полем у голівці стримера, стикаючись, збуджують електронні стани азоту $N_2\left(b^1\Pi_u, b'^1\Sigma_u^+, c_4'^1\Sigma_u^+\right)$. Збуджені молекули азоту можуть випромінювати фотони з енергією, достатньою для іонізації молекул кисню на деякій відстані.

Для опису джерельного доданка S_{ph} в рівняннях (2.133), (2.139) використовувалась SP3 модель Ларсена, яка заснована на розв'язку диференціальних рівнянь Гельмгольца. Цей підхід був спочатку запропонований P. Segur [284] і A. Bourdon [169] для моделювання стримерів і показав якіснє узгодження з класичним інтегральним підходом M. Zheleznyak [325].

Рівняння для фотоіонізації набуває вигляду

$$S_{ph}(\vec{r}) = \sum_j A_j p_{O2} c \Psi_{0,j}(\vec{r}), \tag{2.149}$$

де $A_1 = 0.0067\ см^{-1}Торр^{-1}$, $A_2 = 0.0346\ см^{-1}Торр^{-1}$, $A_3 = 0.3059\ см^{-1}Торр^{-1}$ – сталі коефіцієнти, p_{O_2} – парціальний тиск кисню в повітрі (150 Торр при атмосферних умовах на рівні землі), c – швидкість світла.

Функція $\Psi_{0,j}\left(\vec{r}\right)$ записується у вигляді

$$\Psi_{0,j}\left(\vec{r}\right) = \frac{\gamma_2 \varphi_{1,j} - \gamma_1 \varphi_{2,j}}{\gamma_2 - \gamma_1}, \tag{2.150}$$

де $\gamma_n = \frac{5}{7}\left[1 + (-1)^n 3\sqrt{\frac{6}{5}}\right]$, а функції $\varphi_{1,j}(\vec{r})$ знаходяться з розв'язку наступної системи рівнянь Гельмгольца

$$\nabla^2\varphi_{1,j}(\vec{r}) - \frac{(\lambda_j p_{O2})^2}{k_1^2}\varphi_{1,j}(\vec{r}) = -\frac{\lambda_j p_{O2}}{k_1^2}\frac{\xi n_u(\vec{r})}{c\tau_u}, \qquad (2.151)$$

$$\nabla^2\varphi_{2,j}(\vec{r}) - \frac{(\lambda_j p_{O2})^2}{k_2^2}\varphi_{2,j}(\vec{r}) = -\frac{\lambda_j p_{O2}}{k_2^2}\frac{\xi n_u(\vec{r})}{c\tau_u}, \qquad (2.152)$$

де $k_n^2 = \frac{3}{7} + (-1)^n \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$, $\lambda_1 = 0.0447\ см^{-1}Торр^{-1}$, $\lambda_2 = 0.112\ см^{-1}Торр^{-1}$, $\lambda_3 = 0.5994\ см^{-1}Торр^{-1}$.

Другий множник у правій частині рівнянь (2.151), (2.152) визначається за допомогою співвідношення

$$\xi\frac{n_u(\vec{r})}{\tau_u} = \frac{p_q}{p + p_q}\xi\frac{\nu_u(\vec{r})}{\nu_i(\vec{r})}\nu_i(\vec{r})n_e(\vec{r}), \qquad (2.153)$$

де p – тиск навколишнього середовища, p_q – тиск гасіння ($p_q = 30\,Торр$), коефіцієнт $\xi\frac{\nu_u(\vec{r})}{\nu_i(\vec{r})} = 0.06$, ν_i – частота іонізації.

Граничні умови для системи рівнянь Гельмгольца (2.151), (2.152) записуються у вигляді

$$\vec{\nabla}\varphi_{1,j}(\vec{r})\cdot\vec{n}_s = -\lambda_j p_{O2}\alpha_1\varphi_{1,j}(\vec{r}) - \lambda_j p_{O2}\beta_2\varphi_{2,j}(\vec{r}), \qquad (2.154)$$

$$\vec{\nabla}\varphi_{2,j}(\vec{r})\cdot\vec{n}_s = -\lambda_j p_{O2}\alpha_2\varphi_{2,j}(\vec{r}) - \lambda_j p_{O2}\beta_1\varphi_{1,j}(\vec{r}), \qquad (2.155)$$

де $\alpha_n = \frac{5}{96}\left(34 - (-1)^n 11\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$, $\beta_n = \frac{5}{96}\left(2 + (-1)^n\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$.

У результаті для визначення доданка фотоіонізації S_{ph} (2.149) необхідно розв’язувати систему із шести рівнянь (2.151), (2.152) з граничними умовами (2.154), (2.155).

2.12 Початкові та граничні умови для вихідної системи рівнянь динаміки плазми та електричного потенціалу

2.12.1 Рівняння Пуассона для електричного потенціалу

У якості початкових умов для рівняння Пуассона задавався нульовий розподіл електричного потенціалу в області.

Рівняння (2.77) для електричного потенціалу розв’язувалось, використовуючи прикладену напругу до електродів як граничну умову, а також відповідні значення відносної діелектричної проникності для повітря та діелектрика. Змінна напруга, яку прикладено до відкритого електрода, задавалась як

$$\varphi(t) = \varphi^{\max} f(t). \tag{2.156}$$

Функція форми хвилі $f(t)$ описувалось синусоїдою

$$f(t) = \sin(2\pi\omega t), \tag{2.157}$$

де ω – частота, $\varphi^{\max}$ – амплітуда коливань. До ізольованого електрода прикладався нульовий потенціал. На зовнішніх межах ставилась умова Неймана $\partial\varphi / \partial\ell_n = 0$ [300].

2.12.2 Рівняння динаміки частинок плазми

У якості початкових умов для рівняння динаміки заряджених частинок плазми задавалася фонова концентрація іонів і електронів ($n_+ = 10^9\ 1/м^3$, $n_- = 10^9\ 1/м^3$, $n_e = 10^{10}\ 1/м^3$). Граничні умови для рівнянь динаміки заряджених частинок (2.126)–(2.139) на твердій поверхні наведено в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 – Граничні умови для рівнянь динаміки заряджених частинок

$E_{\ell_n} > 0$	$E_{\ell_n} \le 0$
$\Gamma_{i+} = -1/4\, n_{i+} V_{i+}^{th}$	$\Gamma_{i+} = \mu_{i+} E_n n_{i+} - 1/4\, n_{i+} V_{i+}^{th}$
$\Gamma_{i-} = -\mu_{i-} E_n n_{i-} - 1/4\, n_{i-} V_{i-}^{th}$	$\Gamma_{i-} = -1/4\, n_{i-} V_{i-}^{th}$
$\Gamma_e = -\mu_e E_n n_e - 1/4\, n_e V_e^{th}$	$\Gamma_e = -\gamma_{Cu,diel} \Gamma_{i+}$

де $V_{i,e}^{th}$ – теплова швидкість руху частинок, γ_{Cu} – коефіцієнт іонно-електронної емісії з мідного анода, який залежить від напруженості електричного поля.

На зовнішніх межах ставилась умова Неймана $\partial n / \partial \ell_n = 0$. Теплова швидкість руху частинок визначалась за формулою

$$V_{i,e}^{th} = \sqrt{\frac{8k_b T_{i,e}}{\pi m_{i,e}}}, \tag{2.158}$$

де $m_{i,e}$, $T_{i,e}$ – маса та температура іонів чи електронів.

Потік енергії електронів у результаті теплового руху до поверхні дорівнює

$$\Gamma_\varepsilon = \frac{5}{3} V_e^{th} n_\varepsilon . \tag{2.159}$$

2.13 Коефіцієнти переносу та хімічних реакцій

Коефіцієнти рухливості та дифузії електронів, а також коефіцієнти деяких хімічних реакцій отримано за допомогою солвера BOLSIG+ [207]. Його розроблено у Лабораторії плазми та перетворення енергії (Laboratoire Plasma et Conversion d'energie – LAPLACE) університету Тулузи у Франції та призначено для чисельного розв'язку рівняння Больцмана для електронів у слабоіонізованих газах в однорідному електричному полі. Такі умови характерні для нерівноважної низькотемпературної плазми. У цих умовах розподіл електронів визначається балансом між електричним прискоренням і втратою імпульсу й енергії при зіткненнях з нейтральними частинками газу.

Основна мета BOLSIG+ – отримання коефіцієнтів швидкості зіткнень (коефіцієнтів хімічних реакцій) і переносу (коефіцієнти дифузії та рухливості) електронів виходячи з даних щодо ефективного перетину зіткнень.

У цьому солвері функція розподілу електронів розраховується для різних значень напруженості електричного поля. При інтегруванні рівняння Больцмана використовується ефективний перетин зіткнень. При інтегруванні функція розподілу електронів дає значення коефіцієнтів переносу (рухливість, дифузія) і коефіцієнтів хімічних реакцій.

Коефіцієнти іонізації, прилипання і збудження отримані за допомогою солвера BOLSIG+. Коефіцієнти дифузії та рухливості заряджених частинок мають наступні значення:

$$\mu_{N_4^+} = 2.44 \cdot 10^{-4} \ м^2/(В \cdot с), \qquad D_{N_4^+} = 6.31 \cdot 10^{-6} \ м^2/с,$$

$$\mu_{N_2^+} = 2.05 \cdot 10^{-4} \ м^2/(В \cdot с), \qquad D_{N_2^+} = 5.30 \cdot 10^{-6} \ м^2/с,$$

$$\mu_{O_4^+} = 2.08 \cdot 10^{-4} \ м^2/(В \cdot с), \qquad D_{O_4^+} = 5.38 \cdot 10^{-6} \ м^2/с,$$

$$\mu_{O_2^+} = 2.52 \cdot 10^{-4} \ м^2/(В \cdot с), \qquad D_{O_2^+} = 6.52 \cdot 10^{-6} \ м^2/с,$$

$$\mu_{O_2^-} = 2.84 \cdot 10^{-4} \ м^2/(В \cdot с), \qquad D_{O_2^-} = 7.35 \cdot 10^{-6} \ м^2/с,$$

$$\mu_{O^-} = 4.77 \cdot 10^{-4} \ м^2/(В \cdot с), \qquad D_{O^-} = 1.23 \cdot 10^{-5} \ м^2/с,$$

Залежність коефіцієнтів рухливості та дифузії електронів, а також температури від напруженості електричного поля наведено на рис. 2.4–2.6.

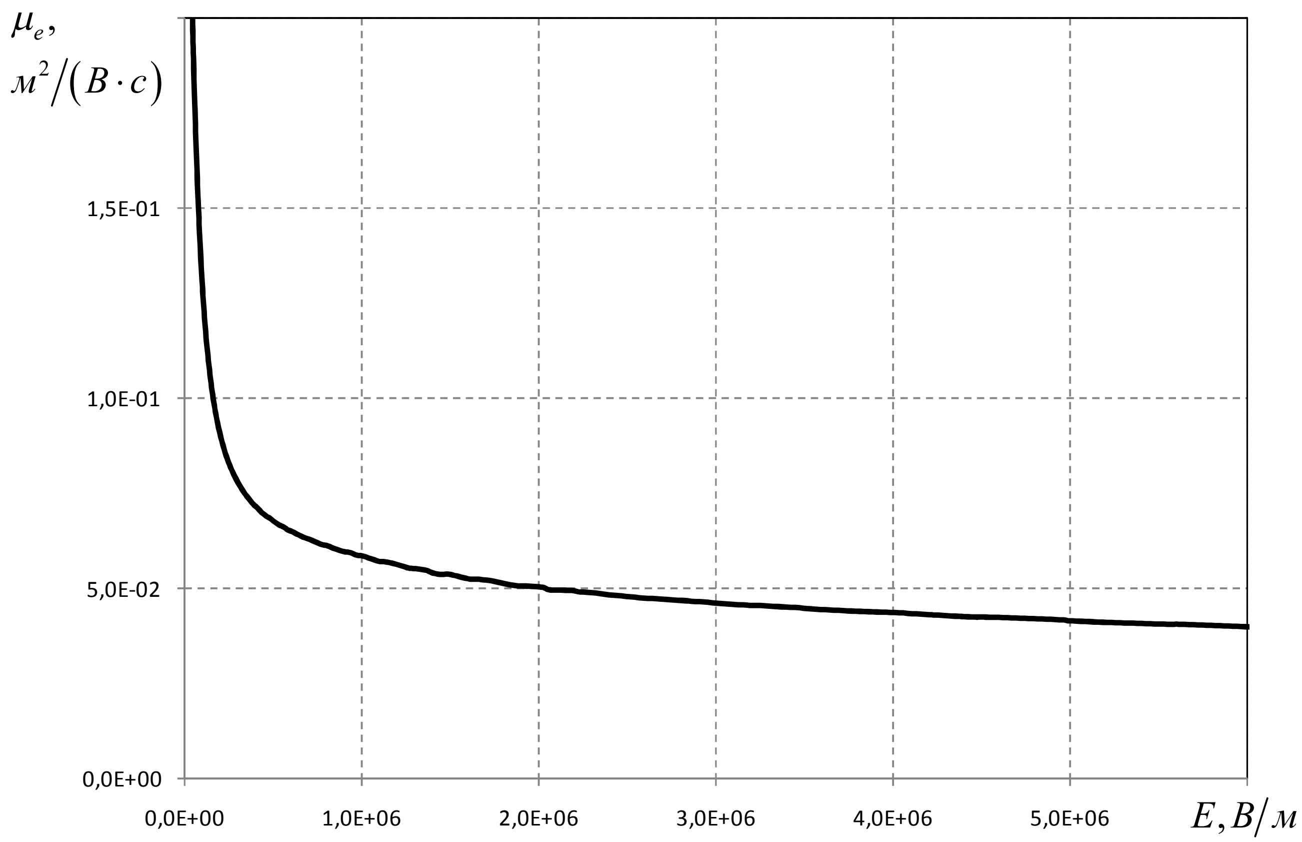


Рисунок 2.4 – Залежність рухливості електронів μ_e від напруженості електричного поля E

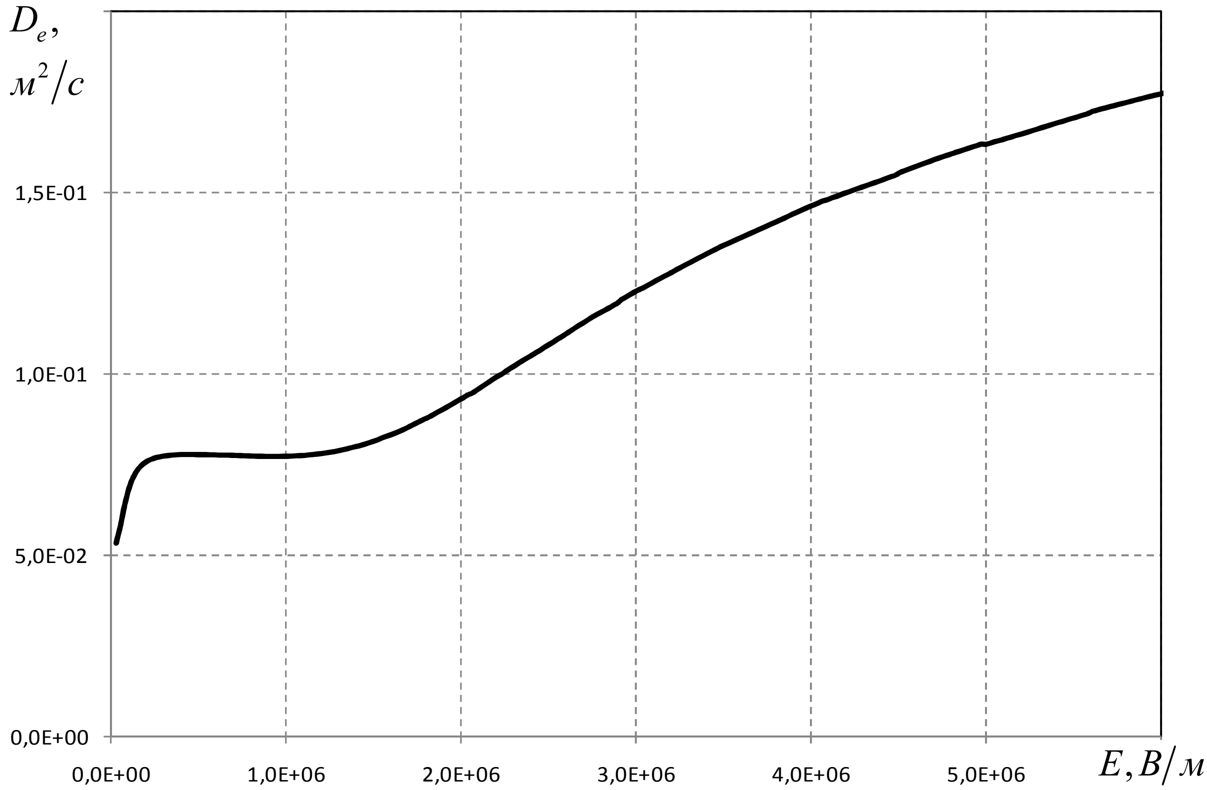


Рисунок 2.5 – Залежність дифузії електронів D_e від напруженості електричного поля E

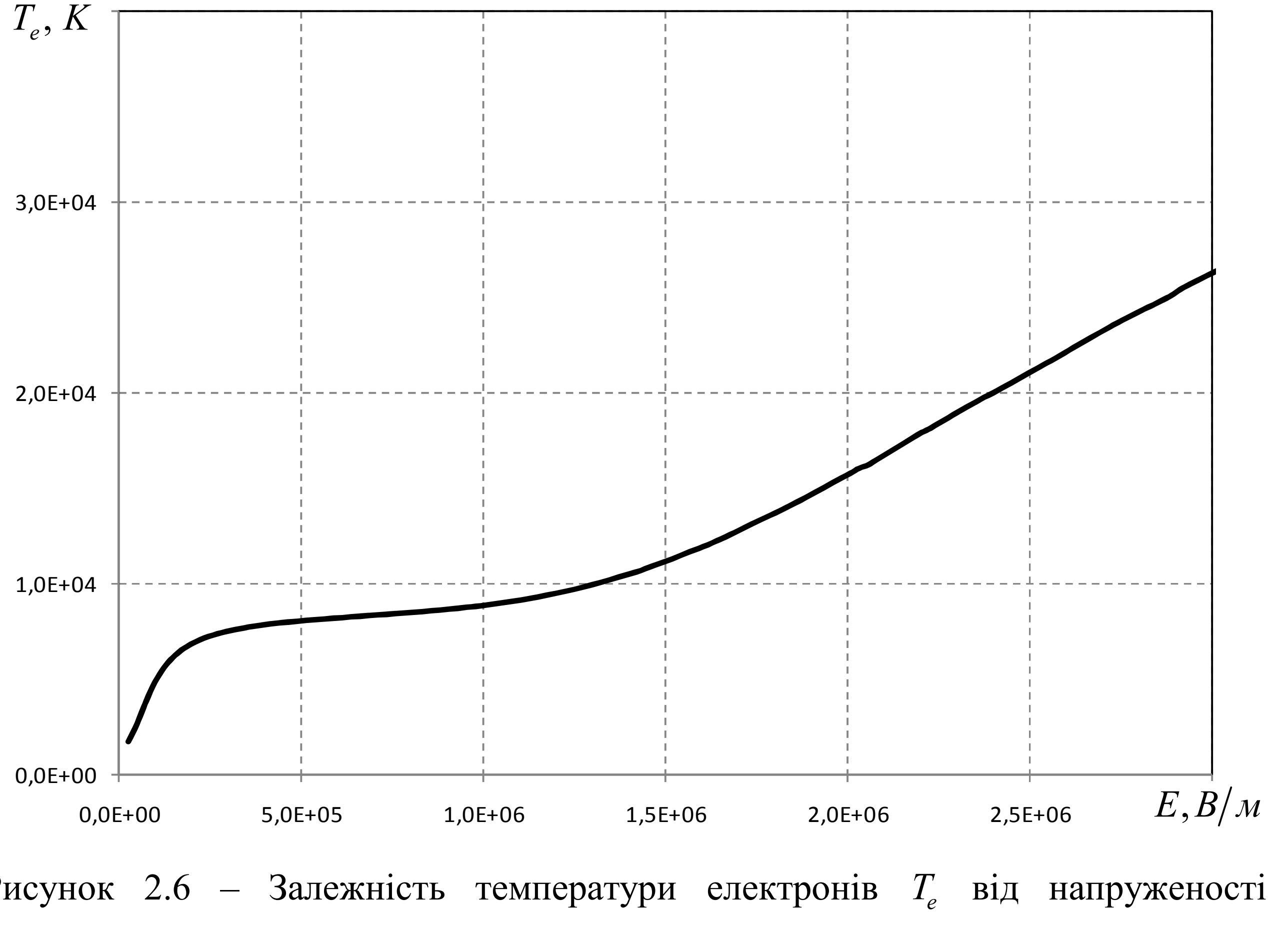


Рисунок 2.6 – Залежність температури електронів T_e від напруженості електричного поля E

2.14 Сила електрогідродинамічної взаємодії (сила Лоренца)

Заряджені частинки плазми взаємодіють із нейтральними молекулами повітря через пружні зіткнення. У результаті відбувається передача імпульсу від іонів і електронів до молекул повітря в результаті чого виникає масова сила – сила електрогідродинамічної взаємодії (сила Лоренца).

Сила електрогідродинамічної взаємодії (EHD) на одиниці об'єму має такий вигляд

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{f}_{EHD} = \mathbf{f}_{i+} - \mathbf{f}_{i-} - \mathbf{f}_e, \tag{2.160}$$

$$\mathbf{f}_{i+} = m_{i+} n_{i+} \nu_{i+} \overline{\mathbf{v}}_{i+}, \quad \mathbf{f}_{i-} = m_{i-} n_{i-} \nu_{i-} \overline{\mathbf{v}}_{i-}, \quad \mathbf{f}_e = m_e n_e \nu_e \overline{\mathbf{v}}_e, \tag{2.161}$$

де m, n, ν, $\overline{\mathbf{v}}$ – маса, густина (концентрація), частота пружних зіткнень із нейтральними молекулами (частота передачі імпульсу) і вектор швидкості заряджених частинок, а індекси e, $i+$ та $i-$ відносяться до електронів, позитивних і негативних іонів, відповідно Швидкістю руху нейтральних молекул можна знехтувати в силу їх малості у порівнянні зі швидкістю заряджених частинок.

Враховуючи вирази (2.161) та (2.106), формула (2.160) для сили електрогідродинамічної взаємодії набуде вигляду

$$\mathbf{f}_{EHD} = \mathbf{f}_{i+} - \mathbf{f}_{i-} - \mathbf{f}_e = e\left(n_{i+} - n_{i-} - n_e\right)\mathbf{E} - k_B\left(T_{i+}\nabla n_{i+} + T_{i-}\nabla n_{i-} + T_e\nabla n_e\right). \tag{2.162}$$

Плазма впливає на нейтральний газ за допомогою електричного поля та через градієнт тиску іонів та електронів. Перший доданок у правій частині виразу (2.162) при атмосферному тиску виявляє домінуюче значення у створенні електрогідродинамічної сили, тому другим доданком можна знехтувати. Остаточний вираз для сили електрогідродинамічної взаємодії заряджених частинок плазми діелектричного бар'єрного розряду з нейтральним повітрям прийме наступний вигляд

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{f}_{EHD} = e\left(n_{i+} - n_{i-} - n_e\right)\mathbf{E} = \rho_c \mathbf{E}. \tag{2.163}$$

У принципі допускається одночасний розв'язок рівнянь динаміки повітря та заряджених частинок, щоб точно визначити вплив плазми на нейтральний потік повітря.

У той самий час на практиці одночасний розв'язок рівнянь динаміки частинок плазми з рівняннями Нав'є-Стокса являє собою дуже складну задачу через велику різницю характерних масштабів часу різних процесів, що відбуваються в плазмі та у нейтральному повітрі (табл. 1.2).

Істотна відмінність у часових масштабах передбачає, що вплив плазми на нейтральний газ можна моделювати шляхом осереднення доданка масової сили в рівнянні (2.2) за один період T роботи плазмового актуатора [216]

$$\mathbf{f}_b\left(x,y\right)=\left\langle \mathbf{f}_b\left(x,y,t\right)\right\rangle=\frac{\int_0^T\left[e\left(n_{i+}\left(x,y,t\right)-n_{i-}\left(x,y,t\right)-n_e\left(x,y,t\right)\right)\mathbf{E}\left(x,y,t\right)\right]dt}{T}. \quad (2.164)$$

Таким чином, рівняння динаміки частинок плазми розв'язується окремо від рівнянь Нав'є-Стокса для нейтральної течії, і вплив плазми враховується через масову силу в рівнянні імпульсу для неіонізованого повітря. Ця сила залежить від координат, але не залежить від часу.

2.15 Рівняння електростатики плазми на основі дебаєвського радіусу екранування

2.15.1 Вихідна система рівнянь електростатики

Для даного класу задач плазму можна розглядати як іонізований квазінейтральний газ [300]. Можна вважати [300], що заряди в плазмі мають достатньо часу (у порівнянні з гідродинамічним часом) для перерозподілу в області та система стає квазістаціонарною. У цьому випадку електричний струм, напруженість магнітного поля та магнітна індукція асимптотично прагнуть до нуля. Беручи до уваги вищесказане, із системи рівнянь Максвелла залишається тільки одне рівняння $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_c$, що представляє собою закон Гауса для електричної індукції.

У цьому випадку силу Лоренца, яку віднесено до одиниці об'єму, набуває вигляду

$$\mathbf{f}_b = \rho_c \mathbf{E} \tag{2.165}$$

і входить у праву частину рівняння Нав'є-Стокса (2.2), як масова сила.

Вважаючи, що плазма знаходиться у квазістаціонарному стані, а тимчасові масштаби досить великі для перерозподілу зарядів, і, застосовуючи співвідношення Больцмана $n = n_0 \exp\left(e\Phi / kT\right)$, отримаємо [300]

$$\rho_c / \varepsilon_o = -\left(e^2 n_0 / \varepsilon_o\right)\left[\left(1 / kT_i\right) + \left(1 / kT_e\right)\right]\Phi , \tag{2.166}$$

де T_i і T_e – температура іонів та електронів у плазмі, відповідно.

Використовуючи дебаєвську довжину λ_D, що характеризує відстань, на яку поширюється дія електричного поля окремого заряду в нейтральному середовищі, що складається з позитивно і негативно заряджених частинок

$$\lambda_D = \left[\left(e^2 n_0 / \varepsilon_o\right)\left(1 / kT + 1 / kT_e\right)\right]^{-1/2} , \tag{2.167}$$

вираз (2.166) набуде вигляду

$$\rho_c / \varepsilon_o = \left(-1 / \lambda_D^2\right)\Phi . \tag{2.168}$$

З моменту, коли частинки газу стають частково іонізованими, можна припустити, що потенціал Φ може складатися із двох частин: потенціал від зовнішнього електричного поля та потенціал, що відповідає густини результуючого заряду в плазмі [300]

$$\Phi = \phi + \varphi . \tag{2.169}$$

Якщо припустити, що дебаєвська довжина мала та заряд на стінці невеликий, а розподілом заряджених частинок в області керує потенціал на стінці, що виник через електричний заряд на тій самий стінці, то впливом дуже слабкого електричного поля плазми на зовнішнє електричне поле можна знехтувати. Тому можна записати два окремі рівняння з точки зору цих двох потенціалів, одне для зовнішнього електричного поля, що обумовлене прикладеною напругою до електродів [300]

$$\nabla\left(\varepsilon_r \nabla \phi\right) = 0\,, \tag{2.170}$$

та інше рівняння для потенціалу, що діє з боку заряджених частинок [300]

$$\nabla\left(\varepsilon_r \nabla \varphi\right) = -\rho_c \,/\, \varepsilon_o\,. \tag{2.171}$$

Враховуючи вирази (2.168), (2.169) і (2.170) рівняння (2.171) набуде вигляду

$$\nabla\left(\varepsilon_r \nabla \rho_c\right) = \rho_c \,/\, \lambda_D^2\,. \tag{2.172}$$

Після того, як в області отримано розподіл потенціалу та густини результуючого заряду в результаті розв'язку рівнянь (2.170) і (2.172), відповідно, сила Лоренца (2.165) прийме наступний вигляд

$$\mathbf{f}_b = \rho_c \mathbf{E} = \rho_c\left(-\nabla \phi\right). \tag{2.173}$$

2.15.2 Початкові та граничні умови для системи рівнянь електростатики

У якості початкових умов задавався нульовий розподіл електричного потенціалу та густини результуючого заряду в області.

Рівняння (2.170) розв’язувалось для електричного потенціалу, використовуючи прикладену напругу до електродів як граничну умову (рис. 2.7), а також відповідні значення відносної діелектричної проникності для повітря та діелектрика. Змінна напруга, прикладена до відкритого (верхнього) електроду, задавалась як

$$\phi\left(t\right) = \phi_{\max} f\left(t\right). \tag{2.174}$$

Функція форми хвилі $f\left(t\right)$ може бути синусоїдою

$$f\left(t\right) = \sin\left(2\pi\omega t\right) \tag{2.175}$$

або прямокутною

$$\begin{cases} f(t) = 1 \quad \textit{для} \quad \sin(2\pi\omega t) \geq 0, \\ f(t) = -1 \; \textit{для} \quad \sin(2\pi\omega t) < 0, \end{cases} \tag{2.176}$$

де ω – частота, $\phi^{\max}$ – амплітуда коливань. До ізольованого електрода прикладався нульовий потенціал. На зовнішніх межах ставилась умова Неймана $\partial\phi/\partial n = 0$ [300].

Рівняння (2.172) розв’язувалось щодо густини результуючого заряду ρ_c тільки в повітряній області. Нормальний градієнт для густини результуючого заряду на поверхні твердого тіла дорівнював нулю, за винятком області над ізольованим електродом. На зовнішній межі густина результуючого заряду дорівнювала нулю. В області над ізольованим електродом густина заряду описувалась таким чином, щоб синхронізувати зі зміною в часі напругу $\phi(t)$, що прикладено до відкритого електрода,

$$\rho_{c,w}(x,t) = \rho_{c\max} G(x) f(t), \tag{2.177}$$

де $\rho_{c\max}$ – максимальне значення густини заряду в області. Зміна густини заряду на стінці $\rho_{c,w}$ в області плазми над ізольованим електродом у напрямку x описувалось функцією $G(x)$.

Експериментальні дослідження [191] свідчать про те, що розподіл густини заряду підкоряється половині Гаусового розподілу

$$G(x) = \exp\left[-(x-\mu)^2 / \left(2\sigma^2\right)\right], \tag{2.178}$$

для $x \geq 0$, де μ – локальний параметр, що вказує на розташування максимуму, σ – коефіцієнт масштабу, що визначає швидкість загасання. У розрахунках локальний параметр μ вибирається таким чином, щоб пік функції $G(x)$ відповідав лівій грані ізольованого електрода. Значення коефіцієнта масштабу $\sigma = 0.3$ забезпечує поступове зменшення розподілу густини заряду від лівої грані електрода до правої. Значення частоти й амплітуди прикладеної до електродів напруги беруться з експериментів. Встановлено [300], що дебаєвська довжина λ_D дорівнює 0.00017 м, а максимальна густина заряду в області $\rho_{c\max}$ дорівнює 0.0075 Кл/м^3.

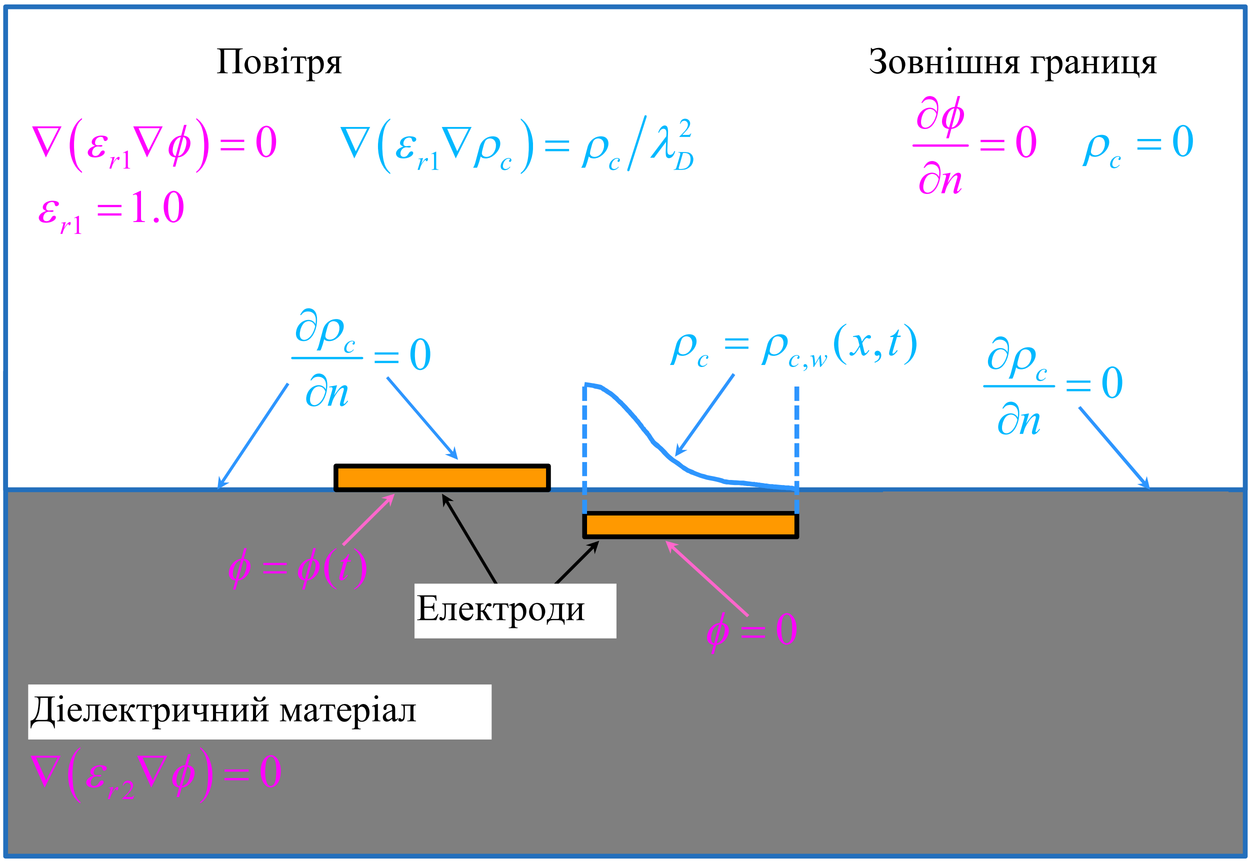


Рисунок 2.7 – Граничні умови для системи рівнянь електростатики

2.16 Безрозмірна форма запису вихідної системи рівнянь

У правій частині рівнянь Нав'є-Стокса, записаних у безрозмірному вигляді, з'являються два критерії подібності: перший характеризує відношення сил інерції до сил в'язкості Re, а другий відношення електричних сил до сил інерції D_c.

Для обезрозмірювання вихідної системи рівнянь введемо наступні характерні величини: U_∞ – швидкість потоку, що набігає, ρ_∞ – густина потоку, що набігає, p_∞ – тиск у потоці, що набігає, μ_∞ – динамічний коефіцієнт в'язкості потоку, що набігає, ν_∞ – кінематичний коефіцієнт в'язкості потоку, що набігає, L – характерна довжина, $\phi_{\max}$ – максимальна амплітуда напруги, яку прикладено до електродів, $\rho_{c\max}$ – максимальне значення густини результуючого заряду в області.

Безрозмірні змінні будемо визначати наступним чином:

$$\overline{x} = x/L\,,\quad \overline{y} = y/L\,,\quad \overline{z} = z/H\,,\quad \overline{u_i} = u_i/U_\infty\,,\quad \overline{\rho} = \rho/\rho_\infty\,,\quad \overline{\mu} = \mu/\mu_\infty\,,$$

$$\overline{\nu} = \nu/\nu_\infty\,,\quad \overline{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2},\quad \mathrm{Re} = \frac{\rho_\infty L U_\infty}{\mu_\infty},\quad \overline{\omega} = \omega\frac{L}{U_\infty},\quad \overline{t} = t\frac{U_\infty}{L},$$

$$\overline{\phi} = \frac{\phi}{\phi_{\max}},\quad \overline{\lambda_d} = \frac{\lambda_d}{L},\quad \overline{\rho_c} = \frac{\rho_c}{\rho_{c\max}},\quad D_c = \frac{\rho_{c\max}\cdot E_{\max}\cdot L}{\rho_\infty \cdot U_\infty^2},\quad \overline{\mathbf{f}_b} = \frac{\mathbf{f}_b}{\rho_{c\max}\cdot E_{\max}},$$

тоді рівняння(2.2),(2.7),(2.170), (2.172) приймуть вигляд

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{u}}}{\partial\overline{t}} + \left(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla\right)\overline{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\nabla\overline{p} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla\left[\left(\overline{\nu} + \overline{\nu_t}\right)\left(\nabla\overline{\mathbf{u}}\right)\right] + \frac{1}{\overline{\rho}}D_c\overline{\rho_c}\left(-\nabla\overline{\phi}\right), \qquad (2.179)$$

або

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{u}}}{\partial\overline{t}} + \left(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla\right)\overline{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\nabla\overline{p} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla\left[\left(\overline{\nu} + \overline{\nu_t}\right)\left(\nabla\overline{\mathbf{u}}\right)\right] + \frac{1}{\overline{\rho}}D_c\overline{\mathbf{f}}_b, \qquad (2.180)$$

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\tilde{c}_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu}_t + \frac{1}{\sigma}\nabla\left[\left(\overline{\nu} + \tilde{\nu}_t\right)\nabla\tilde{\nu}_t\right] + \frac{c_{b2}}{\sigma}\nabla^2\tilde{\nu}_t - f_w\left(\frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma}\right)\left(\frac{\tilde{\nu}_t}{d}\right)^2\right\}, \qquad (2.181)$$

$$\tilde{S} \equiv f_{v3}W\,\mathrm{Re} + \frac{\tilde{\nu}_t}{k^2 d^2}f_{v2}, \qquad (2.182)$$

$$\nabla\left(\varepsilon_r\nabla\overline{\varphi}\right) = 0, \qquad (2.183)$$

$$\nabla\left(\varepsilon_r\nabla\overline{\rho_c}\right) = \overline{\rho_c}\,/\,\overline{\lambda}_D^2, \qquad (2.184)$$

де Re – безрозмірний параметр, число Рейнольдса, D_c – коефіцієнт, що характеризує відношення електричних сил до сил інерції, λ_D – дебаєвська довжина, $\mathbf{f}_b$ – сила Лоренца.

Надалі символ безрозмірної величини $\left(\overline{\ }\right)$ будемо опускати для зручності.

2.17 Висновки до розділу 2

1. Сформульовано загальну постановку проблеми дослідження аеродинаміки, електродинаміки, динаміки плазми та хімічної кінетики для моделювання взаємодії суцільного в'язкого середовища (нейтрального повітря) з плазмою діелектричного бар'єрного розряду. Постановка проблеми базується на розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса, замкнутих диференціальною моделлю турбулентності, а також моделлю ламінарно-турбулентного переходу і рівнянь, що описують поведінку низькотемпературної плазми.

2. Вперше γ-Re_θ модель ламінарно-турбулентного переходу адаптовано для використання разом з моделями турбулентності Spalart-Allmaras, SARC і SALSA.

3. Запропоновано нові співвідношення для визначення значень питомої швидкості дисипації в потоці та турбулентної в'язкості в незбуреному потоці (на вхідній межі) з урахуванням рівня турбулентності потоку, що набігає.

4. Розроблено нову математичну модель низькотемпературної нерівноважної ідеальної плазми діелектричного бар'єрного розряду в повітрі при атмосферному тиску для опису просторово-часової структури, включаючи нестаціонарні електродинамічні процеси, кінетичні явища та плазмохімічні реакції.

5. У якості базового обраний дифузійно-дрейфовий підхід, у якому враховуються електронно-збуджені та метастабільні стани молекул азоту та кисню, нейтральні атоми кисню, електрони, а також позитивні та негативні іони в загальній кількості до ста плазмохімічних реакцій.

6. У розробленій математичній моделі коефіцієнти швидкості хімічних реакцій (іонізації, збудження, прилипання), а також коефіцієнти переносу (для електронів) залежать від напруженості електричного поля (середньої енергії електронів) і визначаються з розв'язку рівняння Больцмана з використанням функції розподілу електронів за швидкостями та енергіями.

7. Запропонована математична модель враховує хімічні реакції, що описують процеси дисоціації, іонізації, збудження молекул, прилипання і відлипання електронів, рекомбінації електронів і позитивних іонів, перетворення нейтральних атомів, молекул та іонів, а також процеси вторинної емісії електронів з відкритого електрода та діелектричної поверхні.

РОЗДІЛ 3
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ РІДИНИ, ГАЗУ ТА НИЗЬКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ПЛАЗМИ

У розділі описуються чисельні методи для розв'язку зв'язаних задач динаміки рідини, газу та низькотемпературної плазми. Наведено вихідні рівняння аеродинаміки, електродинаміки та динаміки частинок плазми в криволінійній системі координат на рухомих сітках. Побудовано дискретні аналоги вихідних рівнянь, а також неявні схеми для забезпечення працездатності та ефективності розробленого чисельного алгоритму.

Наведено структурний опис розробленого спеціалізованого пакета обчислювальної аеродинаміки, електродинаміки, динаміки та хімічної кінетики плазми. Описано розроблений автоматизований препроцесор для задач обчислювальної аеродинаміки.

3.1 Рівняння Нав'є-Стокса в'язкого нестисливого потоку в криволінійній системі координат на рухомих сітках

У довільних рухомих координатах $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$ система нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса (2.1)–(2.2) нестисливої рідини записувалась у консервативній формі у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{U}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{V}{J}\right) = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\hat{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{f}}_{\mathrm{v}}\right) + \hat{\mathbf{s}} \equiv -\hat{\mathbf{r}}, \tag{3.2}$$

де $\hat{\mathbf{r}}$ – права частина рівнянь кількості руху, $J = \dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}$ – якобіан перетворення координат,

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \; \hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \xi_x p + uU + \xi_t u \\ \xi_y p + vU + \xi_t v \end{bmatrix}, \; \hat{\mathbf{f}} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \eta_x p + uV + \eta_t u \\ \eta_y p + vV + \eta_t v \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

де u, v – декартові складові вектора швидкості; p – тиск; $U = \xi_x u + \xi_y v$, $V = \eta_x u + \eta_y v$ – контраваріантні компоненти швидкості; $\xi_t = -x_\tau \xi_x - y_\tau \xi_y$, $\eta_t = -x_\tau \eta_x - y_\tau \eta_y$, $\xi_x = J y_\eta$, $\xi_y = -J x_\eta$, $\eta_x = -J y_\xi$, $\eta_y = J x_\xi$ – метричні коефіцієнти, $\hat{\mathbf{s}}$ – джерельний член (сила Лоренца). Густина входить у доданок для тиску.

В'язкі члени в неортогональній системі координат мають вигляд

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{v}} = \frac{\nu + \nu_t}{\mathrm{Re} J} \begin{bmatrix} \left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right) u_\xi + \left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right) u_\eta \\ \left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right) v_\xi + \left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right) v_\eta \end{bmatrix},$$
$$\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{v}} = \frac{\nu + \nu_t}{\mathrm{Re} J} \begin{bmatrix} \left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right) u_\xi + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right) u_\eta \\ \left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right) v_\xi + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right) v_\eta \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

де ν та ν_t – молекулярний і турбулентний кінематичні коефіцієнти в'язкості, Re – число Рейнольдса.

У довільній системі координат джерельний член набуває вигляду

$$\hat{\mathbf{s}} = D_c \frac{1}{\rho} \frac{\rho_c}{J} \begin{bmatrix} \xi_x E_\xi + \eta_x E_\eta \\ \xi_y E_\xi + \eta_y E_\eta \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

де E_ξ, E_η – компоненти напруженості електричного поля в довільній системі координат, ρ – густина повітря, ρ_c – густина результуючого заряду, D_c – безрозмірний параметр, що характеризує відношення електричних сил до сил інерції.

3.2 Моделі турбулентності Spalart-Allmaras, SARC, SALSA і *γ-Re_θ* модель ламінарно-турбулентного переходу в криволінійній системі координат на рухомих сітках

У безрозмірному вигляді для довільних криволінійних координат диференціальне рівняння (2.7) в моделі Spalart-Allmaras і SARC можна представити у вигляді [245]

$$\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial t}+\frac{\partial\left(U\tilde{\nu}_t\right)}{\partial\xi}+\frac{\partial\left(V\tilde{\nu}_t\right)}{\partial\eta}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu}_t+\frac{1}{\sigma}\left[(1+c_{b2})T_1-c_{b2}T_2\right]-f_w\left(\frac{c_{b1}}{k^2}+\frac{1+c_{b2}}{\sigma}\right)\left(\frac{\tilde{\nu}_t}{d}\right)^2\right\},\quad(3.6)$$

де

$$\begin{aligned}T_1=\xi_x\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\nu+\tilde{\nu}\right)\xi_x\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\xi}\right]+\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\nu+\tilde{\nu}\right)\eta_x\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\eta}\right]+\\+\xi_y\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\nu+\tilde{\nu}\right)\xi_y\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\xi}\right]+\eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\nu+\tilde{\nu}\right)\eta_y\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\eta}\right]\end{aligned},\quad(3.7)$$

$$\begin{aligned}T_2=\left(\nu+\tilde{\nu}_t\right)\left[\xi_x\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi_x\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\xi}\right)+\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta_x\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\eta}\right)+\right.\\\left.+\xi_y\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi_y\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\xi}\right)+\eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta_y\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\eta}\right)\right]\end{aligned}.\quad(3.8)$$

Джерельний член генерації турбулентності модифікується в такий спосіб

$$\tilde{S}=\mathrm{Re}\,f_{v3}W+\frac{\tilde{\nu}_t}{k^2d^2}f_{v2}.\quad(3.9)$$

Диференціальне рівняння переносу турбулентної в'язкості в моделі SALSA у довільних криволінійних координатах у безрозмірному вигляді записується в такий спосіб

$$\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial t}+\frac{\partial\left(U\tilde{\nu}_t\right)}{\partial\xi}+\frac{\partial\left(V\tilde{\nu}_t\right)}{\partial\eta}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\tilde{c}_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu}_t+\frac{1}{\sigma}\left[(1+c_{b2})L_1-c_{b2}L_2\right]-f_w\left(\frac{\tilde{c}_{b1}}{k^2}+\frac{1+c_{b2}}{\sigma}\right)\left(\frac{\tilde{\nu}_t}{d}\right)^2\right\}\quad(3.10)$$

де оператори L_1 і L_2 мають вигляд

$$\begin{aligned}L_1=\xi_x\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\sigma\nu+\tilde{\nu}_t\right)\xi_x\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\xi}\right]+\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\sigma\nu+\tilde{\nu}_t\right)\eta_x\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\eta}\right]+\\+\xi_y\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\sigma\nu+\tilde{\nu}_t\right)\xi_y\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\xi}\right]+\eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\sigma\nu+\tilde{\nu}_t\right)\eta_y\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\eta}\right]\end{aligned},\quad(3.11)$$

$$\begin{aligned}L_2=\left(\nu+\tilde{\nu}_t\right)\left[\xi_x\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi_x\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\xi}\right)+\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta_x\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\eta}\right)+\right.\\\left.+\xi_y\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi_y\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\xi}\right)+\eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta_y\frac{\partial\tilde{\nu}_t}{\partial\eta}\right)\right]\end{aligned}.\quad(3.12)$$

Перший доданок у правій частині рівняння (3.10) – джерельний член генерації турбулентності, набуває вигляду

$$\tilde{S} = \operatorname{Re} S^* \left[\left(\frac{1}{\chi} \right) + f_{v1} \right]. \tag{3.13}$$

У γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу рівняння переносу для коефіцієнта переміжності та рівняння переносу критичного числа Рейнольдса втрати імпульсу мають ту ж структуру, що й рівняння переносу в моделях турбулентності. Тому рівняння переносу в γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу записуються аналогічним образом з урахуванням коефіцієнтів при диференціальних операторах.

3.3 Метод штучної стисливості

Метод штучної стисливості [184] модифікує рівняння нерозривності шляхом додавання похідної тиску за псевдочасом

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{p}{J} \right) = -\beta \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{V}{J} \right) \right], \tag{3.14}$$

де τ – псевдочас, β – параметр штучної стисливості.

У рівняння кількості руху також вводиться псевдочасова похідна швидкості. У випадку стаціонарного формулювання рівняння інтегруються доти, поки права частина $\hat{\mathbf{r}}$ в рівнянні (3.2) та дивергенція швидкості (3.1) не звернуться в нуль. Таким чином, система рівнянь набуває вигляду

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\hat{\mathbf{E}} - \hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{v}} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{F}}_{\mathrm{v}} \right) + \hat{\mathbf{S}} = -\hat{\mathbf{R}}, \tag{3.15}$$

де $\hat{\mathbf{R}}$ – вектор нев'язки цих рівнянь,

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \dfrac{p}{J} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta U}{J} \\ \hat{\mathbf{e}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta V}{J} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{f}}_{\mathrm{v}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

3.4 Дискретний аналог вихідних рівнянь гідродинаміки

3.4.1 Застосування методу контрольних об'ємів до розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса

У даній роботі застосовується контрольно-об'ємний підхід у криволінійній системі координат [303]. Перетворення координат проводиться за допомогою введення змінних ξ, η, пов'язаних з координатними лініями, що відображають сітку для фізичної області x, y в рівномірну сітку в площині ξ, η (рис. 3.1). Перетворення координат дозволяє використовувати різницеві формули, призначені для розрахункових сіток зі сталим кроком, і застосувати алгоритм розрахунків, для якого потрібна впорядкованість внутрішніх вузлів розрахункової сітки.

Запишемо дискретний аналог вихідної системи рівнянь (3.15)

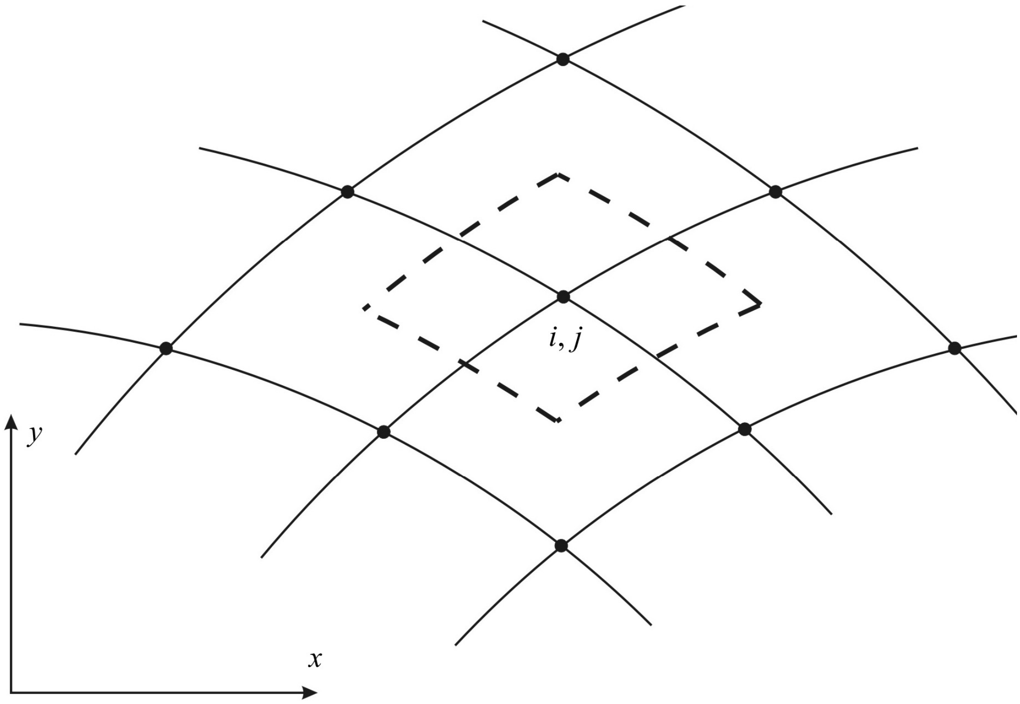
$$\frac{\Delta\hat{\mathbf{D}}}{\Delta\tau} + \frac{\hat{\mathbf{E}}_{i+1/2} - \hat{\mathbf{E}}_{i-1/2}}{\Delta\xi} + \frac{\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{j-1/2}}{\Delta\eta} - \frac{\left(\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{v}}\right)_{i+1} - \left(\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{v}}\right)_{i-1}}{2\Delta\xi} - \frac{\left(\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}}\right)_{j+1} - \left(\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}}\right)_{j-1}}{2\Delta\eta} + \hat{\mathbf{S}} = 0\,. \quad (3.17)$$

Біля кожної точки з координатами i, j будується контрольний об'єм із гранями, що знаходяться на середині інтервалів сітки. Метричні коефіцієнти на грані контрольного об'єму розраховуються за наступними співвідношеннями [303]

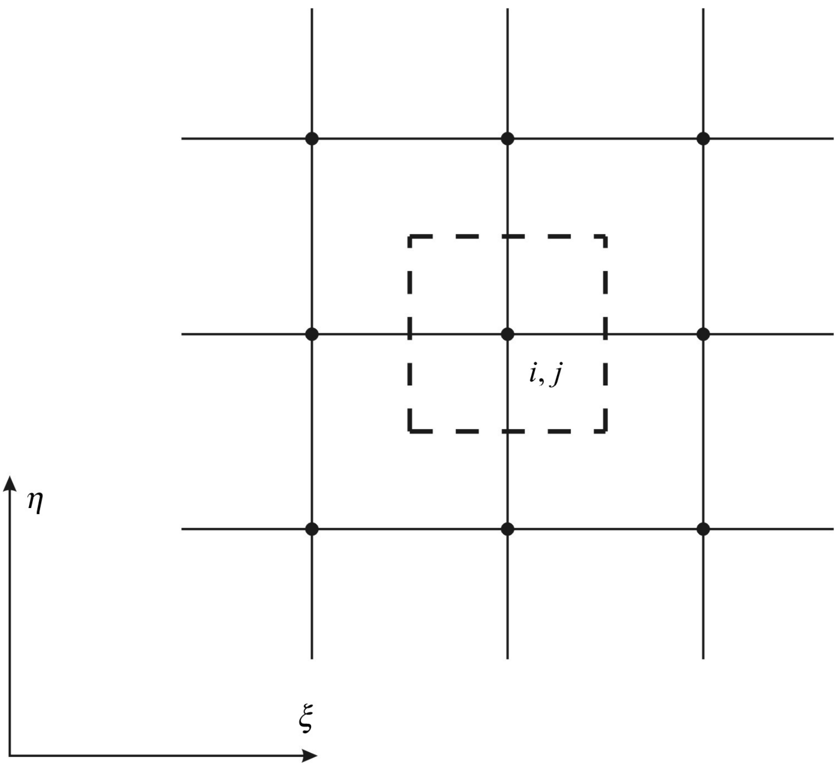
$$\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_i + \left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i+1}\right]. \quad (3.18)$$

Значення залежних змінних приписується до вузлів сітки, тому при використанні контрольно-об'ємного підходу дуже важливим є алгоритм обчислення потоків на гранях комірок.

Основною ідеєю побудови контрольного об'єму в рівняннях гідродинаміки є отримання можливості протипоточної апроксимації на гранях комірки й одночасно виконання законів збереження.



а)



б)

Рисунок 3.1 – Схема контрольного об'єму у фізичній (а) і математичній (б) областях

3.4.2 Апроксимація похідних за часом

Стаціонарне формулювання. Апроксимуємо псевдочасову похідну за допомогою неявної схеми Ейлера

$$\frac{\hat{\mathbf{D}}^{m+1}-\hat{\mathbf{D}}^{m}}{\Delta\tau}=-\hat{\mathbf{R}}^{m+1}, \tag{3.19}$$

де верхній індекс m відповідає псевдочасовому ітераційному шару. Після лінеаризації правої частини $\hat{\mathbf{R}}^{m+1}$ рівняння (3.19) приймає вид

$$\left[\frac{1}{\Delta\tau}\mathbf{I}+\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{R}}}{\partial\hat{\mathbf{D}}}\right)^{m}\right]\left(\hat{\mathbf{D}}^{m+1}-\hat{\mathbf{D}}^{m}\right)=-\hat{\mathbf{R}}^{m}, \tag{3.20}$$

де $\mathbf{I}$ – одинична 3×3 матриця. Це рівняння ітераційно вирішується доти, поки норма нев'язка $\hat{\mathbf{R}}$ не стане менше деякої, наперед заданої, малої величини.

Нестаціонарне формулювання. При дослідженні нестаціонарних течій у рівняннях кількості руху похідні за часом обчислювалися за скінченно-різницевою другого порядку трехточечній схемі

$$\frac{3\hat{\mathbf{u}}^{n+1}-4\hat{\mathbf{u}}^{n}+\hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{2\Delta t}=-\hat{\mathbf{r}}^{n+1}, \tag{3.21}$$

де верхній індекс n позначає момент часу $t=n\Delta t$, $\hat{\mathbf{r}}$ – права частина в рівняннях кількості руху (3.2).

Для розв'язку рівнянь (3.15) і узгодженню з рівнянням нерозривності на кроці $n+1$ введемо псевдочасовий шар і позначимо його верхнім індексом m. Рівняння розв’язуються ітераційно так, щоб $\hat{u}^{n+1,m+1}$, $\hat{v}^{n+1,m+1}$ наближалися до значення швидкості $\hat{u}^{n+1}$, $\hat{v}^{n+1}$ на новому часовому шарі, а дивергенція швидкості наближалася до нуля.

Коли дивергенція швидкості звертається в нуль, формулювання штучної стисливості представляється у вигляді, дуже схожому для стаціонарного випадку, а рівняння нерозривності збігається з рівнянням нерозривності для стаціонарних течій.

При розрахунку нестаціонарних течій рівняння (3.22) розв’язується доти, поки похідна за псевдочасом $\partial\hat{\mathbf{D}}/\partial\tau$ не звернеться в нуль [273]

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{D}}}{\partial\tau}+\frac{1}{2\Delta t}\begin{bmatrix}0\\ 3\hat{\mathbf{u}}^{n+1}-4\hat{\mathbf{u}}^{n}+\hat{\mathbf{u}}^{n-1}\end{bmatrix}=-\hat{\mathbf{R}}^{n+1}. \tag{3.22}$$

У цьому випадку рівняння (3.1) виконується, і дивергенція швидкості дорівнює нулю. Використаний алгоритм базується на тришаровій неявній схемі з підітераціями за псевдочасом τ другого порядку точності за фізичним часом t

$$\mathbf{I}_{\mathbf{t\tau}}\left(\hat{\mathbf{D}}^{n+1,m+1}-\hat{\mathbf{D}}^{n+1,m}\right)=-\hat{\mathbf{R}}^{n+1,m+1}-\frac{\mathbf{I_m}}{\Delta t}\left(1.5\hat{\mathbf{D}}^{n+1,m}-\hat{\mathbf{D}}^{n}+0.5\hat{\mathbf{D}}^{n-1}\right), \tag{3.23}$$

де

$$\mathbf{I}_{\mathbf{t\tau}}=diag\left[\frac{1}{\Delta\tau},\frac{1}{\Delta\tau}+\frac{1.5}{\Delta t},\frac{1}{\Delta\tau}+\frac{1.5}{\Delta t}\right],\qquad \mathbf{I_m}=diag\left[0,1,1\right]. \tag{3.24}$$

Лінеарізуемо нев'язку $\hat{\mathbf{R}}^{n+1,m+1}$ та запишемо рівняння (3.23) в дельта-формі [272]

$$\left[\mathbf{I}_{\mathbf{t\tau}}+\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{R}}}{\partial\hat{\mathbf{D}}}\right)^{n+1,m}\right]\left(\hat{\mathbf{D}}^{n+1,m+1}-\hat{\mathbf{D}}^{n+1,m}\right)=-\hat{\mathbf{R}}^{n+1,m}-\frac{\mathbf{I_m}}{\Delta t}\left(1.5\hat{\mathbf{D}}^{n+1,m}-2\hat{\mathbf{D}}^{n}+0.5\hat{\mathbf{D}}^{n-1}\right). \tag{3.25}$$

Лінеаризацію рівняння (3.23) виконано за псевдочасом. У випадку нестаціонарної постановки задачі, необхідно встановлювати розв'язок за псевдочасом на кожному кроці фізичного часу. Обидві системи рівнянь (3.19) і (3.23) вимагають дискретизації вектора нев'язки $\hat{\mathbf{R}}$. Похідні у в’язких членах апроксимуються центрально-різницевою схемою другого порядку. Для конвективних потоків використовується протипоточне диференціювання, яке засновано на методі Roe [265, 266].

Узагальнений вектор потоків для двовимірної системи рівнянь набуває вигляду

$$\hat{\mathbf{E}}_i=\begin{bmatrix}\beta\Theta\\ k_x p+u\Theta+k_t u\\ k_y p+v\Theta+k_t v\end{bmatrix}, \tag{3.26}$$

де $\hat{\mathbf{E}}_i = \hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{F}}$ для $i = 1,2$, відповідно. Нормовані метрики визначаються за допомогою співвідношень

$$k_x = \frac{1}{J}\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad k_y = \frac{1}{J}\frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad k_t = \frac{1}{J}\frac{\partial \xi}{\partial t}, \tag{3.27}$$

контраваріантний компонент вектора швидкості

$$\Theta = k_x u + k_y v. \tag{3.28}$$

Перетворимо матрицю Якобі до діагонального вигляду

$$\hat{\mathbf{A}}_i = \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_i}{\partial \mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & \beta k_x & \beta k_y \\ k_x & k_x u + \Theta & k_y u \\ k_y & k_x v & k_y v + \Theta \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Матриця Якобі може бути представлена у вигляді

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{X}_i^{-1}, \tag{3.30}$$

де $\mathbf{\Lambda}_i$ – діагональна матриця власних значень

$$\mathbf{\Lambda}_i = diag\left[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right], \tag{3.31}$$

$$\lambda_1 = \Theta + k_t, \quad \lambda_2 = \Theta + c + \tfrac{1}{2}k_t, \quad \lambda_3 = \Theta - c + \tfrac{1}{2}k_t, \tag{3.32}$$

c – штучна швидкість звуку

$$c = \sqrt{\left(\Theta + \tfrac{1}{2}k_t\right)^2 + \beta\left(k_x^2 + k_y^2\right)}. \tag{3.33}$$

Матриця лівих власних векторів набуває вигляду [272]

$$\mathbf{X}_i = \frac{1}{2\beta c\left(c^2 - \frac{1}{4}k_t^2\right)} \begin{bmatrix} 0 & \beta\left(c^2 - \frac{1}{4}k_t^2\right) & -\beta\left(c^2 - \frac{1}{4}k_t^2\right) \\ -2\beta c k_y & \left(u\lambda_2 + \beta k_x\right)\left(c + \frac{1}{2}k_t\right) & \left(u\lambda_3 + \beta k_x\right)\left(c - \frac{1}{2}k_t\right) \\ 2\beta c k_x & \left(v\lambda_2 + \beta k_y\right)\left(c + \frac{1}{2}k_t\right) & \left(u\lambda_3 + \beta k_y\right)\left(c - \frac{1}{2}k_t\right) \end{bmatrix}, \tag{3.34}$$

а зворотна до неї матриця правих власних векторів

$$\mathbf{X}_i^{-1} = \begin{bmatrix} k_y u - k_x v & -v\lambda_1 - \beta k_y & u\lambda_1 + \beta k_x \\ -\lambda_3 & \beta k_x & \beta k_y \\ -\lambda_2 & \beta k_x & \beta k_y \end{bmatrix}. \tag{3.35}$$

3.4.3 Апроксимація конвективних похідних у рівняннях Нав'є-Стокса

Протипоточну схему описано P. Roe [265, 266, 267, 268] для апроксимації розв'язку задачі Рімана для стисливого газу, і модифіковано S. Rogers і D. Kwak [270, 271, 272, 273] для нестисливих течій. Протипоточну схему розглянуто для одномірного випадку та застосовувалась для кожного напрямку окремо.

Похідна конвективних потоків у напрямку ξ апроксимується

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} = \frac{\mathbf{E}_{i+1/2} - \mathbf{E}_{i-1/2}}{\Delta \xi}, \tag{3.36}$$

де $\mathbf{E}_{i+1/2}$ – вектор потоку, i – індекс для напрямку ξ.

Схема Rogers-Kwak (класична по точках*) 1-й порядок*

Вектор потоку визначався співвідношенням [270, 272]

$$\mathbf{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}\left(\mathbf{D}_{i+1}\right) + \mathbf{E}\left(\mathbf{D}_i\right) - \mathbf{\Phi}_{i+1/2}\right], \tag{3.37}$$

де $\mathbf{\Phi}_{i+1/2}$ – дисипативний член певного порядку точності.

Потоки $\mathbf{E}\left(\mathbf{D_{i+1}}\right)$ та $\mathbf{E}\left(\mathbf{D_i}\right)$ розраховувались з використанням метричних коефіцієнтів, віднесених на якобіан перетворення координат, у цих точках.

Для $\mathbf{\Phi}_{i+1/2} = 0$ цей запис відповідає центрально-різницевій схемі. Протипоточна схема першого порядку набуває вигляду

$$\mathbf{\Phi}_{i+1/2} = \Delta \mathbf{E}^{+}_{i+1/2} - \Delta \mathbf{E}^{-}_{i+1/2}, \tag{3.38}$$

де $\Delta \mathbf{E}^{\pm}$ – різниця потоків у напрямку позитивного та негативного поширення хвиль. Різниця потоків обчислюється як [270, 272]

$$\Delta \mathbf{E}^{\pm}_{i+1/2} = \mathbf{A}^{\pm}\left(\overline{\mathbf{D}}\right) \Delta \mathbf{D}_{i+1/2}, \tag{3.39}$$

де

$$\Delta\mathbf{D}_{i+1/2} = \mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_i \,. \qquad (3.40)$$

Плюс (мінус) матриці Якобі мають тільки позитивні (негативні) власні значення [270, 272]

$$\mathbf{A}^{\pm} = \mathbf{X}\ \mathbf{\Lambda}^{\pm}\mathbf{X}^{-1}, \qquad (3.41)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{\Lambda} \pm \left|\mathbf{\Lambda}\right|\right). \qquad (3.42)$$

При розрахунках матриці Якобі використовувалося деяке проміжне значення, яке є функцією значень змінних у точках i та $i+1$. Властивості схеми Roe [265], які необхідні для консервативної схеми, задовольняються, якщо вони беруться як середні з цих величин [270, 272]

$$\bar{\mathbf{D}}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{D}_{i+1} + \mathbf{D}_i\right). \qquad (3.43)$$

Схема Rogers-Kwak (класична по точках*) 3-й порядок*

Схеми більш високого порядку можуть бути отримані з використанням різниць потоків. Схема третього порядку записувалася за допомогою співвідношення [270, 272]

$$\mathbf{\Phi}_{i+1/2} = -\frac{1}{3}\left[\Delta\mathbf{E}^{+}_{i-1/2} - \Delta\mathbf{E}^{+}_{i+1/2} + \Delta\mathbf{E}^{-}_{i+1/2} - \Delta\mathbf{E}^{-}_{i+3/2}\right]. \qquad (3.44)$$

Схема Rogers-Kwak (класична по точках*) 5-й порядок*

Основна проблема з використанням схем вище другого порядку полягає у збереженні точності поблизу границь. Збільшення порядку точності призводить до розширення обчислювального шаблону. Так, схема, запропонована M. Rai [257], п'ятого порядку точності, заснована на протипоточному диференціюванні, вимагає 11 точок для розрахункового шаблону, а схема Rogers-Kwak [270, 272] лише 7 точок і набуває вигляду

$$\mathbf{\Phi}_{i+1/2} = -\frac{1}{30}[-2\Delta\mathbf{E}^{+}_{i-3/2} + 11\Delta\mathbf{E}^{+}_{i-1/2} - 6\Delta\mathbf{E}^{+}_{i+1/2} - 3\Delta\mathbf{E}^{+}_{i+3/2} + \\ + 2\Delta\mathbf{E}^{-}_{i+5/2} - 11\Delta\mathbf{E}^{-}_{i+3/2} + 6\Delta\mathbf{E}^{-}_{i+1/2} + 3\Delta\mathbf{E}^{-}_{i-3/2}]. \tag{3.45}$$

У точках поблизу границь порядок схеми знижується до другого за допомогою співвідношення [270, 272]

$$\mathbf{\Phi}_{i+1/2} = \epsilon\left[\Delta\mathbf{E}^{+}_{i+1/2} - \Delta\mathbf{E}^{-}_{i+1/2}\right], \tag{3.46}$$

де $\epsilon = 0$ відповідає центрально-різницевій схемі другого порядку. При $\epsilon = 1$ одержуємо схему першого порядку в співвідношенні (3.31). Ненульове значення коефіцієнта ϵ в рівнянні (3.31) призводить до додавання дисипації поблизу границь. У даній роботі, відповідно до рекомендацій [271], прийнято значення $\epsilon = 0.01$.

Схема Rogers-Kwak (модифікована по грані)

Вектор потоку визначався співвідношенням

$$\mathbf{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i+1}\right) + \mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i}\right) - \mathbf{\Phi}_{i+1/2}\right]. \tag{3.47}$$

де $\mathbf{\Phi}_{i+1/2}$ – дисипативний член певного порядку точності.

Потоки $\mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i+1}\right)$ та $\mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i}\right)$ розраховувалися з використанням метричних коефіцієнтів, віднесених на якобіан перетворення координат, на грані i+1/2 за значеннями гідродинамічних параметрів у точках i+1 і i, відповідно [43].

3.4.4 Апроксимація конвективних похідних у моделях турбулентності

В однопараметричній моделі турбулентності SA для апроксимації конвективних складових застосовувалася схема TVD з обмежувачем потоків ISNAS 3-го порядку, який розроблено для моделювання переносу турбулентних характеристик [326, 327].

Конвективні похідні апроксимувались за допомогою співвідношення

$$\frac{\partial\left(U\tilde{v}_t\right)}{\partial\xi}=\frac{\left(U\tilde{v}_t\right)_{i+1/2}-\left(U\tilde{v}_t\right)_{i-1/2}}{\Delta\xi}, \tag{3.48}$$

де $\tilde{v}_t$ – робоча змінна в моделях турбулентності, U – контраваріантний компонент швидкості, що обчислюється, на лівій $i-1/2$ і правій $i+1/2$ гранях контрольного об'єму.

Можна показати [210, 326], що практично будь-яка TVD схема може бути записана у вигляді

$$\left(f\right)_{i+1/2}=\left(f_{UDS}\right)_{i+1/2}+\psi_{i+1/2}, \tag{3.49}$$

де $\left(f_{UDS}\right)_{i+1/2}$ – значення функції на грані контрольного об'єму, яке розраховано за протипоточною схемою; $\psi_{i+1/2}$ – нелінійний обмежувач потоків, який є функцією значень f в околиці $i+1/2$ грані контрольного об'єму.

Протипоточна схема вдосконалювалась за допомогою наступних співвідношень

$$f_{i+1/2}=\begin{cases} f_i \;\;+\psi_{i+1/2}\left(f_{i+1}-f_i,\;\; f_i-f_{i-1}\right), & U_{i+1/2}\geq 0\\ f_{i+1}-\psi_{i+1/2}\left(f_{i+2}-f_{i+1}, f_{i+1}-f_i\right), & U_{i+1/2}<0\end{cases}, \tag{3.50}$$

$$f_{i-1/2}=\begin{cases} f_{i-1}+\psi_{i-1/2}\left(f_i-f_{i-1}, f_{i-1}-f_{i-2}\right), & U_{i-1/2}\geq 0\\ f_i \;\;-\psi_{i-1/2}\left(f_{i+1}-f_i,\;\; f_i-f_{i-1}\right), & U_{i-1/2}<0\end{cases}. \tag{3.51}$$

Для схеми TVD ISNAS [326, 327] третього порядку точності обмежувач ψ набуває вигляду

$$\psi=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Delta f_L\dfrac{\left(\Delta f_R^2+3\Delta f_L\,\Delta f_R\right)}{\left(\Delta f_L+\Delta f_R\right)^2}, & \left(\Delta f_L\cdot\Delta f_R\right)>0\\ 0, & \left(\Delta f_L\cdot\Delta f_R\right)\leq 0\end{cases}. \tag{3.52}$$

3.4.5 Побудова неявної схеми для розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса

Матриця Якобі вектора нев'язки $\hat{\mathbf{R}}$ необхідна для додавання в ліву частину рівняння (3.25). Використовуючи формулу (3.37) для конвективних і центрально-різницеву схему для в’язких членів, запишемо чисельну апроксимацію вектора нев'язки щодо точки i,j

$$\mathbf{R}_{i,j} = \frac{\mathbf{E}_{i+1/2,j} - \mathbf{E}_{i-1/2,j}}{\Delta\xi} + \frac{\mathbf{F}_{i,j-1/2} - \mathbf{F}_{i,j-1/2}}{\Delta\eta} - \\ - \frac{\left(\mathbf{E}_{\mathbf{v}}\right)_{i+1,j} - \left(\mathbf{E}_{\mathbf{v}}\right)_{i-1,j}}{2\Delta\xi} - \frac{\left(\mathbf{F}_{\mathbf{v}}\right)_{i,j+1} - \left(\mathbf{F}_{\mathbf{v}}\right)_{i,j-1}}{2\Delta\eta}, \tag{3.53}$$

де чисельні потоки $\mathbf{E}$ та $\mathbf{F}$ визначаються за допомогою співвідношення (3.25) з першим, третім або п'ятим порядком дисипативних членів виразів (3.38), (3.44), (3.45), відповідно. Подальше виведення зроблено в припущенні, що $\Delta\xi$ і $\Delta\eta$ прийняті рівними одиниці.

Формування точної матриці Якобі вектора нев'язки є складним для практичної реалізації, особливо, коли використовується протипоточне диференціювання високого порядку точності.

Схема Rogers-Kwak (класична по точках*) 1-й порядок*

Застосовуючи перший порядок для конвективних членів, отримаємо вектор нев'язки [270, 272]

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}\Big[\mathbf{E}\big(\mathbf{D}_{i+1}\big) + \mathbf{E}\big(\mathbf{D}_{i}\big) - \mathbf{A}^{+}_{i+1/2}\cdot\big(\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_{i}\big) + \mathbf{A}^{-}_{i+1/2}\cdot\big(\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_{i}\big)\Big]_{j}, \tag{3.54}$$

$$\mathbf{E}_{i-1/2,j} = \frac{1}{2}\Big[\mathbf{E}\big(\mathbf{D}_{i}\big) + \mathbf{E}\big(\mathbf{D}_{i-1}\big) - \mathbf{A}^{+}_{i-1/2}\cdot\big(\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i-1}\big) + \mathbf{A}^{-}_{i-1/2}\cdot\big(\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i-1}\big)\Big]_{j}, \tag{3.55}$$

$$\mathbf{F}_{i,j+1/2} = \frac{1}{2}\Big[\mathbf{F}\big(\mathbf{D}_{j+1}\big) + \mathbf{F}\big(\mathbf{D}_{j}\big) - \mathbf{B}^{+}_{j+1/2}\cdot\big(\mathbf{D}_{j+1} - \mathbf{D}_{j}\big) + \mathbf{B}^{-}_{j+1/2}\cdot\big(\mathbf{D}_{j+1} - \mathbf{D}_{j}\big)\Big]_{i}, \tag{3.56}$$

$$\mathbf{F}_{i,j-1/2} = \frac{1}{2}\Big[\mathbf{F}\big(\mathbf{D}_{j}\big) + \mathbf{F}\big(\mathbf{D}_{j-1}\big) - \mathbf{B}^{+}_{j-1/2}\cdot\big(\mathbf{D}_{j} - \mathbf{D}_{j-1}\big) + \mathbf{B}^{-}_{j-1/2}\cdot\big(\mathbf{D}_{j} - \mathbf{D}_{j-1}\big)\Big]_{i}, \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2}\Big[&\mathbf{E}\left(\mathbf{D}_{i+1}\right) - \mathbf{A}^{+}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_{i}\right) + \mathbf{A}^{-}_{i+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_{i}\right) - \\ &-\mathbf{E}\left(\mathbf{D}_{i-1}\right) + \mathbf{A}^{+}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i-1}\right) - \mathbf{A}^{-}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i-1}\right) + \\ &+\mathbf{F}\left(\mathbf{D}_{j+1}\right) - \mathbf{B}^{+}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1} - \mathbf{D}_{j}\right) + \mathbf{B}^{-}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1} - \mathbf{D}_{j}\right) - \\ &-\mathbf{F}\left(\mathbf{D}_{j-1}\right) + \mathbf{B}^{+}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j} - \mathbf{D}_{j-1}\right) - \mathbf{B}^{-}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j} - \mathbf{D}_{j-1}\right) \\ &-\left(\mathbf{E}_{\mathbf{v}}\right)_{i+1,j} + \left(\mathbf{E}_{\mathbf{v}}\right)_{i-1,j} - \left(\mathbf{F}_{\mathbf{v}}\right)_{i,j+1} + \left(\mathbf{F}_{\mathbf{v}}\right)_{i,j-1}\Big]\end{aligned} \quad . \qquad (3.58)$$

Апроксимуючи матрицю Якобі вектора нев'язки, сформуємо стрічкову матрицю [270, 272]

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{B}\left[\frac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j-1}}, 0\ldots, 0, \frac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i-1,j}}, \frac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j}}, \frac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i+1,j}}, 0\ldots, 0, \frac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j+1}}\right], \qquad (3.59)$$

де $\mathbf{B}$ – стрічкова матриця.

Матриці, що входять у неявну частину, визначаються за допомогою наступних співвідношень

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j-1}} = \dfrac{1}{2}\left[-\hat{\mathbf{B}}_{i,j-1} - \mathbf{B}^{+}_{i,j-1/2} + \mathbf{B}^{-}_{i,j-1/2} + \left(\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{2}}\right)_{i,j-1}\right], \\ \dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i-1,j}} = \dfrac{1}{2}\left[-\hat{\mathbf{A}}_{i-1,j} - \mathbf{A}^{+}_{i-1/2,j} + \mathbf{A}^{-}_{i-1/2,j} + \left(\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{1}}\right)_{i-1,j}\right], \\ \dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j}} = \dfrac{1}{2}\Big[\mathbf{A}^{+}_{i+1/2,j} + \mathbf{A}^{+}_{i-1/2,j} - \mathbf{A}^{-}_{i+1/2,j} - \mathbf{A}^{-}_{i-1/2,j} + \\ \qquad + \mathbf{B}^{+}_{i,j+1/2} + \mathbf{B}^{+}_{i,j-1/2} - \mathbf{B}^{-}_{i,j+1/2} - \mathbf{B}^{-}_{i,j-1/2}\Big], \\ \dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i+1,j}} = \dfrac{1}{2}\left[\mathbf{A}_{i+1,j} - \mathbf{A}^{+}_{i+1/2,j} + \mathbf{A}^{-}_{i+1/2,j} - \left(\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{1}}\right)_{i+1,j}\right], \\ \dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j+1}} = \dfrac{1}{2}\left[\mathbf{B}_{i,j+1} - \mathbf{B}^{+}_{i,j+1/2} + \mathbf{B}^{-}_{i,j+1/2} - \left(\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{2}}\right)_{i,j+1}\right], \end{cases} \qquad (3.60)$$

де $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}_{1}$, $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{2}}$ у рівнянні (3.29)

$$\mathbf{A}^{\pm} = \mathbf{X}_1 \mathbf{\Lambda}_1^{\pm} \mathbf{X}_1^{-1}, \quad \mathbf{B}^{\pm} = \mathbf{X}_2 \mathbf{\Lambda}_2^{\pm} \mathbf{X}_2^{-1}. \qquad (3.61)$$

Схема Rogers-Kwak (модифікована по грані) 1-й порядок

Схему Rogers-Kwak першого порядку для конвективних членів на грані контрольного об'єму запишемо в наступному вигляді [43]

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}\Big[\mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i+1}\right) + \mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i}\right) - \mathbf{A}^{+}_{i+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_{i}\right) + \mathbf{A}^{-}_{i+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_{i}\right)\Big]_{j}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{E}_{i-1/2,j} = \frac{1}{2}\Big[\mathbf{E}_{i-1/2}\left(\mathbf{D}_{i}\right) + \mathbf{E}_{i-1/2}\left(\mathbf{D}_{i-1}\right) - \mathbf{A}^{+}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i-1}\right) + \mathbf{A}^{-}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i-1}\right)\Big]_{j}, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{F}_{i,j+1/2} = \frac{1}{2}\Big[\mathbf{F}_{j+1/2}\left(\mathbf{D}_{j+1}\right) + \mathbf{F}_{j+1/2}\left(\mathbf{D}_{j}\right) - \mathbf{B}^{+}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1} - \mathbf{D}_{j}\right) + \mathbf{B}^{-}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1} - \mathbf{D}_{j}\right)\Big]_{i}, \quad (3.64)$$

$$\mathbf{F}_{i,j-1/2} = \frac{1}{2}\Big[\mathbf{F}_{j-1/2}\left(\mathbf{D}_{j}\right) + \mathbf{F}_{j-1/2}\left(\mathbf{D}_{j-1}\right) - \mathbf{B}^{+}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j} - \mathbf{D}_{j-1}\right) + \mathbf{B}^{-}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j} - \mathbf{D}_{j-1}\right)\Big]_{i}. \quad (3.65)$$

Вектор нев'язки в цьому випадку набуває вигляду

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2}\Big[&\mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i+1}\right) + \mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i}\right) - \mathbf{A}^{+}_{i+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_{i}\right) + \mathbf{A}^{-}_{i+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_{i}\right) - \\ &-\mathbf{E}_{i-1/2}\left(\mathbf{D}_{i}\right) - \mathbf{E}_{i-1/2}\left(\mathbf{D}_{i-1}\right) + \mathbf{A}^{+}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i-1}\right) - \mathbf{A}^{-}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i-1}\right) + \\ &+\mathbf{F}_{j+1/2}\left(\mathbf{D}_{j+1}\right) + \mathbf{F}_{j+1/2}\left(\mathbf{D}_{j}\right) - \mathbf{B}^{+}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1} - \mathbf{D}_{j}\right) + \mathbf{B}^{-}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1} - \mathbf{D}_{j}\right) - \\ &-\mathbf{F}_{j-1/2}\left(\mathbf{D}_{j}\right) - \mathbf{F}_{j-1/2}\left(\mathbf{D}_{j-1}\right) + \mathbf{B}^{+}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j} - \mathbf{D}_{j-1}\right) - \mathbf{B}^{-}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j} - \mathbf{D}_{j-1}\right) - \\ &-\left(\mathbf{E}_{\mathbf{v}}\right)_{i+1,j} + \left(\mathbf{E}_{\mathbf{v}}\right)_{i-1,j} - \left(\mathbf{F}_{\mathbf{v}}\right)_{i,j+1} + \left(\mathbf{F}_{\mathbf{v}}\right)_{i,j-1}\Big]\end{aligned} \quad . (3.66)$$

На відміну від формули (3.58), у формулі (3.66), потоки, пов'язані з центральною точкою i,j не скорочуються, тому що використовують різні значення метричних коефіцієнтів.

Матриці, що входять у неявну частину, визначаються за допомогою наступних співвідношень [43]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j-1}} = \dfrac{1}{2}\Big[-\mathbf{B}_{i,j-1/2}(\mathbf{D}_{i,j-1}) - \mathbf{B}^{+}_{i,j-1/2} + \mathbf{B}^{-}_{i,j-1/2} + \left(\boldsymbol{\gamma}_2\right)_{i,j-1} \Big], \\ \dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i-1,j}} = \dfrac{1}{2}\Big[-\mathbf{A}_{i-1/2,j}(\mathbf{D}_{i-1,j}) - \mathbf{A}^{+}_{i-1/2,j} + \mathbf{A}^{-}_{i-1/2,j} + \left(\boldsymbol{\gamma}_1\right)_{i-1,j} \Big], \\ \dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j}} = \dfrac{1}{2}\Big[\mathbf{A}_{i+1/2,j}(\mathbf{D}_{i,j}) - \mathbf{A}_{i-1/2,j}(\mathbf{D}_{i,j}) + \mathbf{A}^{+}_{i+1/2,j} + \mathbf{A}^{+}_{i-1/2,j} - \mathbf{A}^{-}_{i+1/2,j} - \mathbf{A}^{-}_{i-1/2,j} + \\ \qquad + \mathbf{B}_{i,j+1/2}(\mathbf{D}_{i,j}) - \mathbf{B}_{i,j-1/2}(\mathbf{D}_{i,j}) + \mathbf{B}^{+}_{i,j+1/2} + \mathbf{B}^{+}_{i,j-1/2} - \mathbf{B}^{-}_{i,j+1/2} - \mathbf{B}^{-}_{i,j-1/2} \Big], \\ \dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i+1,j}} = \dfrac{1}{2}\Big[\mathbf{A}_{i+1/2,j}(\mathbf{D}_{i+1,j}) - \mathbf{A}^{+}_{i+1/2,j} + \mathbf{A}^{-}_{i+1/2,j} - \left(\boldsymbol{\gamma}_1\right)_{i+1,j} \Big], \\ \dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j+1}} = \dfrac{1}{2}\Big[\mathbf{B}_{i,j+1/2}(\mathbf{D}_{i,j+1}) - \mathbf{B}^{+}_{i,j+1/2} + \mathbf{B}^{-}_{i,j+1/2} - \left(\boldsymbol{\gamma}_2\right)_{i,j+1} \Big], \end{cases} \tag{3.67}$$

Присутність доданків, пов'язаних із центральною точкою, призводить до посилення діагонального переважання.

Схема Rogers-Kwak (модифікована по грані) 3-й порядок

Застосовуючи схему Rogers-Kwak третього порядку для конвективних членів, отримаємо вектор нев'язки [43]

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}\Big\{ & \mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i+1}\right) + \mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i}\right) + \\ + \frac{1}{3}\Big[& \mathbf{A}^{+}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i-1}\right) - \mathbf{A}^{+}_{i+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_{i}\right) + \mathbf{A}^{-}_{i+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_{i}\right) - \mathbf{A}^{-}_{i+3/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+2} - \mathbf{D}_{i+1}\right) \Big] \end{aligned}\right\}_{j}, \tag{3.68}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_{i-1/2,j} = \frac{1}{2}\Big\{ & \mathbf{E}_{i-1/2}\left(\mathbf{D}_{i}\right) + \mathbf{E}_{i-1/2}\left(\mathbf{D}_{i-1}\right) + \\ + \frac{1}{3}\Big[& \mathbf{A}^{+}_{i-3/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i-1} - \mathbf{D}_{i-2}\right) - \mathbf{A}^{+}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i-1}\right) + \mathbf{A}^{-}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i-1}\right) - \mathbf{A}^{-}_{i+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_{i}\right) \Big] \end{aligned}\right\}_{j}, \tag{3.69}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}_{i,j+1/2} = \frac{1}{2}\Big\{ & \mathbf{F}_{j+1/2}\left(\mathbf{D}_{j+1}\right) + \mathbf{F}_{j+1/2}\left(\mathbf{D}_{j}\right) + \\ + \frac{1}{3}\Big[& \mathbf{B}^{+}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j} - \mathbf{D}_{j-1}\right) - \mathbf{B}^{+}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1} - \mathbf{D}_{j}\right) + \mathbf{B}^{-}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1} - \mathbf{D}_{j}\right) - \mathbf{B}^{-}_{j+3/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+2} - \mathbf{D}_{j+1}\right) \Big] \end{aligned}\right\}_{i}, \tag{3.70}$$

$$\mathbf{F}_{i,j-1/2}=\frac{1}{2}\Big\{\mathbf{F}_{j-1/2}\left(\mathbf{D}_j\right)+\mathbf{F}_{j-1/2}\left(\mathbf{D}_{j-1}\right)+ \\ +\frac{1}{3}\Big[\mathbf{B}^{+}_{j-3/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j-1}-\mathbf{D}_{j-2}\right)-\mathbf{B}^{+}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j}-\mathbf{D}_{j-1}\right)+B^{-}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j}-\mathbf{D}_{j-1}\right)-\mathbf{B}^{-}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1}-\mathbf{D}_{j}\right)\Big]\Big\}_i, \tag{3.71}$$

$$\mathbf{R}_{ij}=\frac{1}{2}\Big[\mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i+1}\right)+\mathbf{E}_{i+1/2}\left(\mathbf{D}_{i}\right)+\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i}-\mathbf{D}_{i-1}\right)- \\ -\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}_{i+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+1}-\mathbf{D}_{i}\right)+\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-}_{i+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+1}-\mathbf{D}_{i}\right)-\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-}_{i+3/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+2}-\mathbf{D}_{i+1}\right)- \\ -\mathbf{E}_{i-1/2}\left(\mathbf{D}_{i}\right)-\mathbf{E}_{i-1/2}\left(\mathbf{D}_{i-1}\right)-\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}_{i-3/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i-1}-\mathbf{D}_{i-2}\right)+ \\ +\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i}-\mathbf{D}_{i-1}\right)-\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-}_{i-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i}-\mathbf{D}_{i-1}\right)+\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-}_{i+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{i+1}-\mathbf{D}_{i}\right)+ \\ +\mathbf{F}_{j+1/2}\left(\mathbf{D}_{j+1}\right)+\mathbf{F}_{j+1/2}\left(\mathbf{D}_{j}\right)+\frac{1}{3}\mathbf{B}^{+}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j}-\mathbf{D}_{j-1}\right)- \\ -\frac{1}{3}\mathbf{B}^{+}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1}-\mathbf{D}_{j}\right)+\frac{1}{3}\mathbf{B}^{-}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1}-\mathbf{D}_{j}\right)-\frac{1}{3}\mathbf{B}^{-}_{j+3/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+2}-\mathbf{D}_{j+1}\right)- \\ -\mathbf{F}_{j-1/2}\left(\mathbf{D}_{j}\right)-\mathbf{F}_{j-1/2}\left(\mathbf{D}_{j-1}\right)-\frac{1}{3}\mathbf{B}^{+}_{j-3/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j-1}-\mathbf{D}_{j-2}\right)+ \\ +\frac{1}{3}\mathbf{B}^{+}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j}-\mathbf{D}_{j-1}\right)-\frac{1}{3}\mathbf{B}^{-}_{j-1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j}-\mathbf{D}_{j-1}\right)+\frac{1}{3}\mathbf{B}^{-}_{j+1/2}\cdot\left(\mathbf{D}_{j+1}-\mathbf{D}_{j}\right)- \\ -\left(\mathbf{E}_{\mathbf{v}}\right)_{i+1,j}+\left(\mathbf{E}_{\mathbf{v}}\right)_{i-1,j}-\left(\mathbf{F}_{\mathbf{v}}\right)_{i,j+1}+\left(\mathbf{F}_{\mathbf{v}}\right)_{i,j-1}\Big] \tag{3.72}$$

Матриці для оператора, що входять у неявну частину, визначаються за допомогою наступних співвідношень [43]

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j-2}} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}\mathbf{B}^{+}_{i,j-3/2}\right], \\
\dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i-2,j}} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}\mathbf{A}^{+}_{i-3/2,j}\right], \\
\dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j-1}} = \dfrac{1}{2}\left[-\mathbf{B}_{i,j-1/2}(\mathbf{D}_{i,j-1}) - \dfrac{2}{3}\mathbf{B}^{+}_{i,j-1/2} + \dfrac{1}{3}\mathbf{B}^{-}_{i,j-1/2} - \dfrac{1}{3}\mathbf{B}^{+}_{i,j-3/2} + \left(\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{2}}\right)_{i,j-1}\right], \\
\dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i-1,j}} = \dfrac{1}{2}\left[-\mathbf{A}_{i-1/2,j}(\mathbf{D}_{i-1,j}) - \dfrac{2}{3}\mathbf{A}^{+}_{i-1/2,j} + \dfrac{1}{3}\mathbf{A}^{-}_{i-1/2,j} - \dfrac{1}{3}\mathbf{A}^{+}_{i-3/2,j} + \left(\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{1}}\right)_{i-1,j}\right], \\
\dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j}} = \dfrac{1}{2}\Bigg[\mathbf{A}_{i+1/2,j}(\mathbf{D}_{i,j}) - \mathbf{A}_{i-1/2,j}(\mathbf{D}_{i,j}) + \dfrac{1}{3}\mathbf{A}^{+}_{i+1/2,j} + \dfrac{2}{3}\mathbf{A}^{+}_{i-1/2,j} - \dfrac{2}{3}\mathbf{A}^{-}_{i+1/2,j} - \dfrac{1}{3}\mathbf{A}^{-}_{i-1/2,j} + \\
\qquad + \mathbf{B}_{i,j+1/2}(\mathbf{D}_{i,j}) - \mathbf{B}_{i,j-1/2}(\mathbf{D}_{i,j}) + \dfrac{1}{3}\mathbf{B}^{+}_{i,j+1/2} + \dfrac{2}{3}\mathbf{B}^{+}_{i,j-1/2} - \dfrac{2}{3}\mathbf{B}^{-}_{i,j+1/2} - \dfrac{1}{3}\mathbf{B}^{-}_{i,j-1/2}\Bigg], \\
\dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i+1,j}} = \dfrac{1}{2}\left[\mathbf{A}_{i+1/2,j}(\mathbf{D}_{i+1,j}) - \dfrac{1}{3}\mathbf{A}^{+}_{i+1/2,j} + \dfrac{2}{3}\mathbf{A}^{-}_{i+1/2,j} + \dfrac{1}{3}\mathbf{A}^{-}_{i+3/2,j} - \left(\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{1}}\right)_{i+1,j}\right], \\
\dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j+1}} = \dfrac{1}{2}\left[\mathbf{B}_{i,j+1/2}(\mathbf{D}_{i,j+1}) - \dfrac{1}{3}\mathbf{B}^{+}_{i,j+1/2} + \dfrac{2}{3}\mathbf{B}^{-}_{i,j+1/2} + \dfrac{1}{3}\mathbf{B}^{-}_{i,j+3/2} - \left(\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{2}}\right)_{i,j+1}\right], \\
\dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i+2,j}} = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{3}\mathbf{A}^{-}_{i+3/2}\right], \\
\dfrac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial \mathbf{D}_{i,j+2}} = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{3}\mathbf{B}^{-}_{j+3/2}\right],
\end{cases}
\tag{3.73}
$$

У лівій частині рівняння (3.25) зберігалися в'язкі члени лише для ортогональної сітки. В результаті

$$
\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{1}} = \frac{\nu + \nu_t}{J}\left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right)\mathbf{I}_{\mathbf{m}}\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{2}} = \frac{\nu + \nu_t}{J}\left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)\mathbf{I}_{\mathbf{m}}\frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{3.74}
$$

де $\mathbf{I}_{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – модифікована одинична матриця.

Блочно-матрична система лінійних алгебраїчних рівнянь неявної схеми розв’язувалася методом мінімізації узагальненої нев'язки (GMRES) з неповним LU-розкладанням (ILU(k)) загальної матриці системи у якості передзумовлювання [163, 280, 308].

3.5 Невідбиваючі граничні умови для двовимірних течій нестисливої рідини

Для визначення залежних змінних на зовнішній межі розрахункової області використовуються невідбиваючі граничні умови, засновані на методі характеристик [321].

Характеристичні змінні визначаються зі співвідношення

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{X}_{k,o}^{-1} \cdot \mathbf{D} = \begin{bmatrix} w_{k,1} \\ w_{k,2} \\ w_{k,3} \end{bmatrix}, \tag{3.75}$$

де $\mathbf{X}_{k,o}^{-1}$ – матриця лівих власних векторів для напрямку $k\left(\xi,\eta\right)$, розрахована в точці з індексом "o", $\mathbf{D} = \left\{p, u, v\right\}^T$ – вектор незалежних змінних.

Використовуючи розкладання матриці, $\mathbf{A} = \mathbf{X\Lambda X}^{-1}$ отримаємо значення $w`_{k,1}, w`_{k,2}$, $w`_{k,3}$

$$w`_{k,1} = -\frac{1}{\left(c + k_t/2\right)\left(c - k_t/2\right)}\left[\left(uk_y - vk_x\right)_o p - \left(v\theta_k + \beta k_y\right)_o u + \left(u\theta_k + \beta k_x\right)_o v\right], \tag{3.76}$$

$$w`_{k,2} = \frac{1}{2c\left(c - k_t/2\right)}\left[\left(\theta_k - \left(c + k_t/2\right)\right)_o p - \beta\left(k_x u + k_y v\right)\right], \tag{3.77}$$

$$w`_{k,3} = -\frac{1}{2c\left(c + k_t/2\right)}\left[\left(\theta_k - \left(c - k_t/2\right)\right)_o p - \beta\left(k_x u + k_y v\right)\right], \tag{3.78}$$

де

$$\theta_k = k_x u + k_y v + k_t, \tag{3.79}$$

$$c = \sqrt{\left(\theta_k - k_t/2\right)^2 + \beta\left(k_x^2 + k_y^2\right)}\ . \tag{3.80}$$

У своїй роботі D. Whitfield і L. Taylor [321] далі користуються видом характеристичних змінних, який можна умовно назвати «пристосованими» для виведення граничних умов. «Пристосовані» характеристичні змінні можна записати у вигляді

$$w_{k,1}=\left(uk_y-vk_x\right)_o p-\left(v\theta_k+\beta k_y\right)_o u+\left(u\theta_k+\beta k_x\right)_o v, \qquad (3.81)$$

$$w_{k,2}=\left(\theta_k-\left(c+k_t/2\right)\right)_o p-\beta\left(k_x u+k_y v\right), \qquad (3.82)$$

$$w_{k,3}=\left(\theta_k+\left(c-k_t/2\right)\right)_o p-\beta\left(k_x u+k_y v\right). \qquad (3.83)$$

Спрощення співвідношень (3.81), (3.82), (3.83) у порівнянні зі співвідношеннями (3.76), (3.77), (3.78) досягається за рахунок відкидання коефіцієнта перед квадратними дужками [321], тому що при розв'язку рівняння у вигляді $\left(w_{k,1}\right)_a=\left(w_{k,1}\right)_b$ ці коефіцієнти скорочуються, оскільки значення c обчислюється в точці з індексом “o” і не залежить від параметрів у точках з індексом “a”, “b”, “ℓ”.

Вхідна межа. Відповідно до термінології, прийнятої в роботі [321], термін «вхідна межа» застосовується до межі, на якій перше власне значення матриці **A** негативне $\lambda_{k,1}=k_x u+k_y v+k_t<0$.

Гранична точка позначається індексом “b”, найближча внутрішня точка має індекс “ℓ”, точка, що лежить поза розрахункової області, відповідальна за перенесення незбурених параметрів “∞”, має індекс “a”.

Для даного типу потоку через межу співвідношення для характеристичних змінних мають вигляд [321]

$$\left(w_{k,1}\right)_a=\left(w_{k,1}\right)_b,\quad \left(w_{k,2}\right)_\ell=\left(w_{k,2}\right)_b,\quad \left(w_{k,3}\right)_a=\left(w_{k,3}\right)_b. \qquad (3.84)$$

Із цих співвідношень визначаються значення залежних змінних на зовнішній межі за такими формулами

$$p_b=\frac{p_\infty+p_\ell}{2}-\frac{1}{2c_o}\left[\beta\left(\theta_{k,\infty}-\theta_{k,\ell}\right)-\left(\theta_{k,o}-k_t/2\right)\left(p_\infty-p_\ell\right)\right], \qquad (3.85)$$

$$u_b=u_\infty-\frac{(p_\infty-p_b)\left[u\left(\theta_k^2+\beta\left(k_x^2+k_y^2\right)\right)+\beta k_x k_t+\left(c-k_t/2\right)(u\theta_k+\beta k_x)\right]_o}{\beta\left(c_o-k_t/2\right)\left(c_o+k_t/2\right)}, \qquad (3.86)$$

$$v_b=v_\infty-\frac{(p_\infty-p_b)\left[v\left(\theta_k^2+\beta\left(k_x^2+k_y^2\right)\right)+\beta k_y k_t+\left(c-k_t/2\right)(v\theta_k+\beta k_y)\right]_o}{\beta\left(c_o-k_t/2\right)\left(c_o+k_t/2\right)}. \qquad (3.87)$$

Тут значення c визначено за (3.80), значення параметрів у точці з індексом "o" виходять осередненням параметрів у точках "b" і "ℓ" з попереднього часового шару.

Вихідна межа. Термін «вихідна межа» застосовується до межі, на якій перше власне значення матриці $\mathbf{A}$ позитивне. $\lambda_{k,1} = k_x u + k_y v + k_t \geq 0$.

Гранична точка позначається індексом "b", найближча внутрішня точка має індекс "a", точка, що лежить поза розрахункової області, відповідальна за перенесення незбурених параметрів "∞", має індекс "ℓ".

Співвідношення для характеристичних змінних мають вигляд [321]

$$\left(w_{k,1}\right)_a = \left(w_{k,1}\right)_b, \quad \left(w_{k,2}\right)_a = \left(w_{k,2}\right)_b, \quad p_b = p_\infty. \tag{3.88}$$

Звідси значення залежних змінних визначаються за такими формулами

$$u_b = u_a - \frac{(p_a - p_b)\left[u\left(\theta_k^2 + \beta\left(k_x^2 + k_y^2\right)\right) + \beta k_x k_t - \left(c + k_t / 2\right)(u\theta_k + \beta k_x)\right]_o}{\beta\left(c_o - k_t / 2\right)\left(c_o + k_t / 2\right)}, \tag{3.89}$$

$$v_b = v_a - \frac{(p_a - p_b)\left[v\left(\theta_k^2 + \beta\left(k_x^2 + k_y^2\right)\right) + \beta k_y k_t - \left(c + k_t / 2\right)(v\theta_k + \beta k_y)\right]_o}{\beta\left(c_o - k_t / 2\right)\left(c_o + k_t / 2\right)}. \tag{3.90}$$

У разі нерухомої сітки $k_t = 0$.

3.6 Система рівнянь динаміки частинок плазми та електричного потенціалу в криволінійній системі координат

3.6.1 Нестаціонарне формулювання

Для моделювання діелектричного бар'єрного розряду необхідно спільно розв'язувати систему рівнянь динаміки частинок плазми (2.141) з рівнянням Пуассона для електричного поля (2.78) та рівняннями балансу поверхневої густини заряду.

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}\right]=\mathbf{S}, \tag{3.91}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{\varphi}}+\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_r\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_r\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_+-n_-\right)-\frac{\delta}{\varepsilon_0}\left(\sigma_+-\sigma_-\right), \tag{3.92}$$

$$\frac{\partial \sigma_+}{\partial t}=-e\left(1+\gamma_{diel}\right)\Gamma_{i+}-\alpha_{rw}\sigma_+\sigma_-/e, \tag{3.93}$$

$$\frac{\partial \sigma_-}{\partial t}=-e\Gamma_{i-}-e\Gamma_e-\alpha_{rw}\sigma_+\sigma_-/e, \tag{3.94}$$

де τ_{φ} – псевдочас для рівняння електричного потенціалу, $n_+=n_{N_4^+}+n_{N_2^+}+n_{O_4^+}+n_{O_2^+}$, $n_-=n_{O_2^-}+n_{O^-}+n_e$ – об'ємна густина позитивних і негативних частинок.

3.6.2 Рівняння динаміки частинок плазми

Помножимо рівняння для густини частинок на Якобіан перетворення координат

$$\frac{1}{J}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}-\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]-\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}\right]=\frac{1}{J}\mathbf{S}, \tag{3.95}$$

і враховуючи співвідношення між декартовими та довільними координатами

$$\frac{\partial}{\partial x}=\xi_x\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial}{\partial \eta},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\xi_y\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{3.96}$$

отримаємо

$$\begin{gathered}\frac{1}{J}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}-\frac{1}{J}\left[\xi_x\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\eta_x\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\xi_y\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+\eta_y\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]-\\-\frac{1}{J}\left[\xi_x\frac{\partial}{\partial \xi}\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}+\eta_x\frac{\partial}{\partial \eta}\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}+\xi_y\frac{\partial}{\partial \xi}\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}+\eta_y\frac{\partial}{\partial \eta}\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}\right]=\frac{1}{J}\mathbf{S}\end{gathered}. \tag{3.97}$$

Перегрупуємо відносно похідних $\partial/\partial \xi$ і $\partial/\partial \eta$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{n}}{J}\right)-\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}}{J}\left(\xi_x\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}}{J}\left(\xi_y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}}{J}\left(\eta_x\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}}{J}\left(\eta_y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]- \\ -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\mathbf{D}}{J}\xi_x\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}+\frac{\mathbf{D}}{J}\xi_y\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mathbf{D}}{J}\eta_x\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}+\frac{\mathbf{D}}{J}\eta_y\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}\right)=\frac{1}{J}\mathbf{S}. \quad (3.98)$$

Тоді

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial t}-\frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_\xi}{\partial \xi}-\frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_\eta}{\partial \eta}-\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_\xi}{\partial \xi}-\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_\eta}{\partial \eta}=\hat{\mathbf{S}}, \quad (3.99)$$

де

$$\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{n}/J, \qquad \hat{\mathbf{S}}=\mathbf{S}/J, \quad (3.100)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_\xi=\frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}}{J}\left(\xi_x\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\xi_y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \qquad \hat{\mathbf{H}}_\eta=\frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}}{J}\left(\eta_x\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\eta_y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \quad (3.101)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_\xi=\frac{\mathbf{D}}{J}\left(\xi_x\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}+\xi_y\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}\right), \qquad \hat{\mathbf{D}}_\eta=\frac{\mathbf{D}}{J}\left(\eta_x\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}+\eta_y\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}\right). \quad (3.102)$$

Оскільки

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\xi_x\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=\xi_y\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad (3.103)$$

тоді

$$\hat{\mathbf{H}}_\xi=\frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}}{J}\left(\xi_x\left(\xi_x\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)+\xi_y\left(\xi_y\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)\right), \quad (3.104)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_\eta=\frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}}{J}\left(\eta_x\left(\xi_x\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)+\eta_y\left(\xi_y\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)\right). \quad (3.105)$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}=\xi_x\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}=\xi_y\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta}, \quad (3.106)$$

тоді

$$\hat{\mathbf{D}}_\xi = \frac{\mathbf{D}}{J}\left(\xi_x \left(\xi_x \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta} \right) + \xi_y \left(\xi_y \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta} \right) \right), \tag{3.107}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_\eta = \frac{\mathbf{D}}{J}\left(\eta_x \left(\xi_x \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta} \right) + \eta_y \left(\xi_y \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta} \right) \right). \tag{3.108}$$

Групуючи подібні доданки, одержимо

$$\hat{\mathbf{H}}_\xi = \frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}}{J}\left(\left(\xi_x^2 + \xi_y^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right), \tag{3.109}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_\eta = \frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}}{J}\left(\left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right), \tag{3.110}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_\xi = \frac{\mathbf{D}}{J}\left(\left(\xi_x^2 + \xi_y^2 \right) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} + \left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \right) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta} \right), \tag{3.111}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_\eta = \frac{\mathbf{D}}{J}\left(\left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \right) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2 \right) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta} \right). \tag{3.112}$$

3.6.3 Рівняння Пуассона для електричного потенціалу

У декартовій формі рівняння Пуассона для електричного поля набуває вигляду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\varphi} + \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_r \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon_r \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \delta . \tag{3.113}$$

Помножимо рівняння на Якобіан перетворення координат

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_r \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon_r \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} - \frac{1}{J} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \delta , \tag{3.114}$$

і враховуючи співвідношення між декартовими та довільними координатами

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{3.115}$$

отримаємо

$$\frac{1}{J}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_\varphi}+\frac{1}{J}\left(\xi_x\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\varepsilon_r\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{J}\left(\xi_y\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\varepsilon_r\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}-\frac{1}{J}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta\,, \quad (3.116)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{J}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_\varphi}+\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\xi_x}{J}\varepsilon_r\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\eta_x}{J}\varepsilon_r\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\xi_y}{J}\varepsilon_r\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\eta_y}{J}\varepsilon_r\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\\=-\frac{1}{J}\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}-\frac{1}{J}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta\end{gathered}. \quad (3.117)$$

Перегрупуємо складові щодо похідних $\frac{\partial}{\partial\xi}$ і $\frac{\partial}{\partial\eta}$. Тоді

$$\frac{1}{J}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_\varphi}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi_x}{J}\varepsilon_r\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\xi_y}{J}\varepsilon_r\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta_x}{J}\varepsilon_r\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\eta_y}{J}\varepsilon_r\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=-\frac{1}{J}\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}-\frac{1}{J}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta\,, \quad (3.118)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{J}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_\varphi}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\xi_x}{J}\varepsilon_r\left(\xi_x\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+\frac{\xi_y}{J}\varepsilon_r\left(\xi_y\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\right]+\\+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\eta_x}{J}\varepsilon_r\left(\xi_x\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+\frac{\eta_y}{J}\varepsilon_r\left(\xi_y\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\right]=-\frac{1}{J}\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}-\frac{1}{J}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta\end{gathered}, \quad (3.119)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{J}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_\varphi}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\varepsilon_r\left(\xi_x^2+\xi_y^2\right)}{J}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\varepsilon_r\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)}{J}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]+\\+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\varepsilon_r\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)}{J}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\varepsilon_r\left(\eta_x^2+\eta_y^2\right)}{J}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]=-\frac{1}{J}\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}-\frac{1}{J}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta\end{gathered}. \quad (3.120)$$

Рівняння Пуассона в криволінійній системі координат прийме наступний вигляд

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\tau_\varphi}+\frac{\partial\hat{\varphi}_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{\varphi}_\eta}{\partial\eta}=-\frac{\hat{\rho}_c}{\varepsilon_0}-\frac{\hat{\sigma}}{\varepsilon_0}\delta\,, \quad (3.121)$$

де

$$\hat{\varphi}=\varphi/J\,,\quad \hat{\rho}_c=\rho_c/J\,,\quad \hat{\sigma}=\sigma/J\,, \quad (3.122)$$

$$\hat{\varphi}_\xi=\frac{\varepsilon_r}{J}\left[\left(\xi_x^2+\xi_y^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right], \quad (3.123)$$

$$\hat{\varphi}_\eta=\frac{\varepsilon_r}{J}\left[\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\left(\eta_x^2+\eta_y^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]. \quad (3.124)$$

3.7 Неявний метод для рівнянь динаміки частинок плазми та електричного потенціалу

3.7.1 Рівняння динаміки частинок плазми

Розглянемо рівняння (3.99) на новому часовому шарі $n+1, m+1$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}^{n+1,m+1}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{\xi}^{n+1,m+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{\eta}^{n+1,m+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_{\xi}^{n+1,m+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_{\eta}^{n+1,m+1}}{\partial \eta} = \hat{\mathbf{S}}^{n+1,m+1}, \quad (3.125)$$

або

$$\frac{1}{\Delta t}\left(1.5\hat{\mathbf{n}}^{n+1,m+1} - 2\hat{\mathbf{n}}^{n} + 0.5\hat{\mathbf{n}}^{n-1}\right) = \hat{\mathbf{R}}^{n+1,m+1} + \hat{\mathbf{S}}^{n+1,m+1}, \quad (3.126)$$

де

$$\hat{\mathbf{R}}^{n+1,m+1} = \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{\xi}^{n+1,m+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{\eta}^{n+1,m+1}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_{\xi}^{n+1,m+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_{\eta}^{n+1,m+1}}{\partial \eta}. \quad (3.127)$$

Використаний алгоритм базується на тришаровій неявній схемі з підітераціями другого порядку точності за фізичним часом t.

Лінеарізуемо нев’язку $\hat{\mathbf{R}}^{n+1,m+1}$, джерельний член $\hat{\mathbf{S}}$ та запишемо рівняння (3.126) в дельта-формі

$$\begin{gathered}\left[\frac{1.5}{J\Delta t}\mathbf{E}_{14\times14} - \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{n}}\right)^{n+1,m} - \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{n}}\right)^{n+1,m}\right]\Delta\mathbf{n}^{n+1,m} = \\ = \hat{\mathbf{R}}^{n+1,m} + \hat{\mathbf{S}}^{n+1,m} - \frac{1}{\Delta t}\left(1.5\hat{\mathbf{n}}^{n+1,m} - 2\hat{\mathbf{n}}^{n} + 0.5\hat{\mathbf{n}}^{n-1}\right)\end{gathered}, \quad (3.128)$$

де $\Delta\mathbf{n}^{n+1,m} = \mathbf{n}^{n+1,m+1} - \mathbf{n}^{n+1,m}$, $\mathbf{E}_{14\times14}$ – одинична матриця 14×14.

3.7.2 Рівняння балансу поверхневої густини заряду

Рівняння балансу поверхневої густини позитивного та негативного заряду на діелектрику з урахуванням умови, що $\Gamma_{-} = \Gamma_{i-} + \Gamma_{e}$, $\Gamma_{+} = \Gamma_{i+}$, визначаються за співвідношеннями

$$\frac{\partial\hat{\sigma}_+}{\partial t} = -e\left(1+\gamma_{diel}\right)\hat{\Gamma}_+ - \hat{S}_\sigma, \tag{3.129}$$

$$\frac{\partial\hat{\sigma}_-}{\partial t} = -e\hat{\Gamma}_- - \hat{S}_\sigma, \tag{3.130}$$

де

$$\hat{\sigma}_\pm = \sigma_\pm / J, \quad \hat{\Gamma}_\pm = \Gamma_\pm / J, \quad \hat{S}_\sigma = \frac{\alpha_{rw}\sigma_+\sigma_-}{eJ} \tag{3.131}$$

Розглянемо рівняння (3.129) та (3.130) на новому тимчасовому шарі $n+1$ для підітерації $m+1$

$$\frac{\partial\hat{\sigma}_+^{\,n+1,m+1}}{\partial t} = -e\left(1+\gamma_{diel}\right)\hat{\Gamma}_+^{\,n+1,m+1} - \hat{S}_\sigma^{\,n+1,m+1}, \tag{3.132}$$

$$\frac{\partial\hat{\sigma}_-^{\,n+1,m+1}}{\partial t} = -e\hat{\Gamma}_-^{\,n+1,m+1} - \hat{S}_\sigma^{\,n+1,m+1}, \tag{3.133}$$

Потік заражених частинок до поверхні діелектрика (у напрямку η) дорівнює

$$\hat{\Gamma}_\pm = \frac{\hat{H}_{\eta,\pm} + \hat{H}_{\eta,\pm}^{th}}{J \cdot A_{\eta 1/2}}, \tag{3.134}$$

де $A_{\eta 1/2}$ – площа грані контрольного об'єму в напрямку до поверхні

$$A_{\eta 1/2} = \sqrt{\left(\frac{\eta_x}{J}\right)^2 + \left(\frac{\eta_y}{J}\right)^2}_{\,1/2}, \tag{3.135}$$

$$\hat{H}_{\eta,+} = \hat{H}_{\eta,N_4^+} + \hat{H}_{\eta,N_2^+} + \hat{H}_{\eta,O_4^+} + \hat{H}_{\eta,O_2^+}, \hat{H}_{\eta,-} = \hat{H}_{\eta,O_2^-} + \hat{H}_{\eta,O_2^-} + \hat{H}_{\eta,e}, \tag{3.136}$$

$$\hat{H}_{\eta,+}^{th} = \hat{H}_{\eta,N_4^+}^{th} + \hat{H}_{\eta,N_2^+}^{th} + \hat{H}_{\eta,O_4^+}^{th} + \hat{H}_{\eta,O_2^+}^{th}, \hat{H}_{\eta,-}^{th} = \hat{H}_{\eta,O_2^-}^{th} + \hat{H}_{\eta,O_2^-}^{th} + \hat{H}_{\eta,e}^{th}, \tag{3.137}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{\eta(1/2),\pm} = -\frac{\boldsymbol{\mu}_\pm \mathbf{n}_\pm}{J}\left(\left(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right), \tag{3.138}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{\eta,\pm}^{th} = -\sqrt{\left(\frac{\eta_x}{J}\right)^2 + \left(\frac{\eta_y}{J}\right)^2} \cdot \frac{\mathbf{n}_\pm \mathbf{V}_\pm^{th}}{4}. \tag{3.139}$$

У дискретній формі рівняння (3.132) і (3.133) набудуть наступного вигляду

$$\frac{1}{\Delta t}\left(1.5\hat{\sigma}_+^{\,n+1,m+1} - 2\hat{\sigma}_+^{\,n} + 0.5\hat{\sigma}_+^{\,n-1}\right) = -e\left(1+\gamma_{diel}\right)\hat{\Gamma}_+^{\,n+1,m+1} - \hat{S}_\sigma^{\,n+1,m+1}, \quad (3.140)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(1.5\hat{\sigma}_-^{\,n+1,m+1} - 2\hat{\sigma}_-^{\,n} + 0.5\hat{\sigma}_-^{\,n-1}\right) = -e\hat{\Gamma}_-^{\,n+1,m+1} - \hat{S}_\sigma^{\,n+1,m+1}. \quad (3.141)$$

Після лінеаризації рівнянь (3.140) і (3.141) одержимо

$$\begin{gathered}\left[\frac{1.5}{J\Delta t} + \frac{\alpha_{rw}\sigma_-^{\,n+1,m}}{eJ}\right]\Delta\sigma_+^{\,n+1,m} = -e\left(1+\gamma_{diel}\right)\hat{\Gamma}_+^{\,n+1,m+1} - \frac{\alpha_{rw}\sigma_+^{\,n+1,m}\sigma_-^{\,n+1,m}}{eJ} - \\ -\frac{1}{\Delta t}\left(1.5\hat{\sigma}_+^{\,n+1,m} - 2\hat{\sigma}_+^{\,n} + 0.5\hat{\sigma}_+^{\,n-1}\right)\end{gathered}, \quad (3.142)$$

$$\begin{gathered}\left[\frac{1.5}{J\Delta t} + \frac{\alpha_{rw}\sigma_+^{\,n+1,m}}{eJ}\right]\Delta\sigma_-^{\,n+1,m} = -e\hat{\Gamma}_-^{\,n+1,m+1} - \frac{\alpha_{rw}\sigma_+^{\,n+1,m}\sigma_-^{\,n+1,m}}{eJ} - \\ -\frac{1}{\Delta t}\left(1.5\hat{\sigma}_-^{\,n+1,m} - 2\hat{\sigma}_-^{\,n} + 0.5\hat{\sigma}_-^{\,n-1}\right)\end{gathered}. \quad (3.143)$$

де $\Delta\sigma_\pm^{\,n+1,m} = \sigma_\pm^{\,n+1,m+1} - \sigma_\pm^{\,n+1,m}$.

3.7.3 Рівняння електричного потенціалу з урахуванням рівнянь для густини заряджених частинок

При розв'язку рівняння Пуассона для електричного потенціалу разом з рівняннями динаміки частинок плазми важливу роль відіграє крок інтегрування за часом. Явне узгодження цих рівнянь накладає обмеження на крок за часом вигляду $\Delta t \le \Delta t_{Maxwell}$, де $\Delta t_{Maxwell} = \varepsilon_0 \big/ \sum e\mu_k n_k$ – максвеллівський час ($k = i_+, i_-, e$). Максвеллівський час (час релаксації об'ємного заряду) являє собою характерний час, що необхідний зарядженим частинкам для встановлення рівноважного стану під дією змінного електричного поля, яке вони ж і змінюють.

Взаємозв'язок рівняння Пуассона з рівняннями динаміки заряджених частинок полягає в розрахунку переносу частинок у сумарному електричному полі, яке складається з електричного поля, породженого цими ж зарядженими частинками, і зовнішнього електричного поля.

Розглянемо рівняння (3.121) на новому часовому шарі $n+1$ для підітерації $m+1$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}^{n+1,m+1}}{\partial\tau_{\varphi}}+\frac{\partial\hat{\varphi}_{\xi}^{\;n+1,m+1}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{\varphi}_{\eta}^{\;n+1,m+1}}{\partial\eta}=-\frac{\hat{\rho}_{c}^{\;n+1,m+1}}{\varepsilon_{0}}-\frac{\hat{\sigma}^{\;n+1,m+1}}{\varepsilon_{0}}\delta\,, \qquad (3.144)$$

або

$$\frac{\partial\hat{\varphi}^{n+1,m+1}}{\partial\tau_{\varphi}}+\frac{\partial\hat{\varphi}_{\xi}^{\;n+1,m+1}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{\varphi}_{\eta}^{\;n+1,m+1}}{\partial\eta}=-\frac{e}{\varepsilon_{0}}\left(\hat{n}_{+}^{n+1,m+1}-\hat{n}_{-}^{n+1,m+1}\right)-\frac{\delta}{\varepsilon_{0}}\left(\hat{\sigma}_{+}^{n+1,m+1}-\hat{\sigma}_{-}^{n+1,m+1}\right) (3.145)$$

З розкладання в ряд Тейлора за часом t для значень n_{+}, n_{-}, σ_{+} і σ_{-} отримаємо

$$\hat{n}_{+}^{n+1,m+1}=\hat{n}_{+}^{n+1,m}+\Delta t\left(\frac{\partial\hat{n}_{+}}{\partial t}\right)^{n+1,m+1}+O(\Delta t^{2})\,, \qquad (3.146)$$

$$\hat{n}_{-}^{n+1,m+1}=\hat{n}_{-}^{n+1,m}+\Delta t\left(\frac{\partial\hat{n}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m+1}+O(\Delta t^{2})\,, \qquad (3.147)$$

$$\hat{\sigma}_{+}^{n+1,m+1}=\hat{\sigma}_{+}^{n+1,m}+\Delta t\left(\frac{\partial\hat{\sigma}_{+}}{\partial t}\right)^{n+1,m+1}+O(\Delta t^{2})\,, \qquad (3.148)$$

$$\hat{\sigma}_{-}^{n+1,m+1}=\hat{\sigma}_{-}^{n+1,m}+\Delta t\left(\frac{\partial\hat{\sigma}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m+1}+O(\Delta t^{2})\,. \qquad (3.149)$$

Підставляючи (3.146)–(3.149) в (3.145), отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\varphi}^{n+1,m+1}}{\partial\tau_{\varphi}}+\frac{\partial\hat{\varphi}_{\xi}^{\;n+1,m+1}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{\varphi}_{\eta}^{\;n+1,m+1}}{\partial\eta}=-\frac{e}{\varepsilon_{0}}\left(\hat{n}_{+}^{\;n+1,m}-\hat{n}_{-}^{\;n+1,m}\right)-\frac{\delta}{\varepsilon_{0}}\left(\hat{\sigma}_{+}^{\;n+1,m}-\hat{\sigma}_{-}^{\;n+1,m}\right)-\\-\frac{e}{\varepsilon_{0}}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{n}_{+}}{\partial t}\right)^{n+1,m+1}+\frac{e}{\varepsilon_{0}}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{n}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m+1}-\frac{\delta}{\varepsilon_{0}}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{\sigma}_{+}}{\partial t}\right)^{n+1,m+1}+\frac{\delta}{\varepsilon_{0}}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{\sigma}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m+1}\end{aligned} .(3.150)$$

З рівняння (3.99) маємо

$$\left(\frac{\partial\hat{n}_{+}}{\partial t}\right)^{n+1,m+1}=\left(\frac{\partial\hat{H}_{\xi,+}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{H}_{\eta,+}}{\partial\eta}+\frac{\partial\hat{D}_{\xi,+}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{D}_{\eta,+}}{\partial\eta}+\hat{S}_{+}\right)^{n+1,m+1}-\left(\frac{\partial\hat{n}_{+}}{\partial t}\right)^{n+1,m}, \qquad (3.151)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{n}_-}{\partial t}\right)^{n+1,m+1} = \left(\frac{\partial \hat{H}_{\xi,-}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{H}_{\eta,-}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{D}_{\xi,-}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{D}_{\eta,-}}{\partial \eta} + \hat{S}_-\right)^{n+1,m+1} - \left(\frac{\partial \hat{n}_-}{\partial t}\right)^{n+1,m}, \quad (3.152)$$

де

$$\left(\frac{\partial \hat{n}_\pm}{\partial t}\right)^{n+1,m} = \frac{1}{\Delta t}\left(1.5\hat{n}_\pm^{\;n+1,m} - 2\hat{n}_\pm^{\;n} + 0.5\hat{n}_\pm^{\;n-1}\right), \quad (3.153)$$

$$\frac{\partial \hat{n}_+}{\partial t} = \frac{\partial \hat{n}_{N_4^+}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{n}_{N_2^+}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{n}_{O_4^+}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{n}_{O_2^+}}{\partial t}, \quad (3.154)$$

$$\frac{\partial \hat{H}_{\xi,+}}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{H}_{\xi,N_4^+}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{H}_{\xi,N_2^+}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{H}_{\xi,O_4^+}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{H}_{\xi,O_2^+}}{\partial \xi}, \quad (3.155)$$

$$\frac{\partial \hat{H}_{\eta,+}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{H}_{\eta,N_4^+}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}_{\eta,N_2^+}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}_{\eta,O_4^+}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}_{\eta,O_2^+}}{\partial \eta}, \quad (3.156)$$

$$\frac{\partial \hat{D}_{\xi,+}}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{D}_{\xi,N_4^+}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{D}_{\xi,N_2^+}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{D}_{\xi,O_4^+}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{D}_{\xi,O_2^+}}{\partial \xi}, \quad (3.157)$$

$$\frac{\partial \hat{D}_{\eta,+}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{D}_{\eta,N_4^+}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{D}_{\eta,N_2^+}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{D}_{\eta,O_4^+}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{D}_{\eta,O_2^+}}{\partial \eta}, \quad (3.158)$$

$$S_+ = S_{N_4^+} + S_{N_2^+} + S_{O_4^+} + S_{O_2^+}, \quad (3.159)$$

$$\frac{\partial \hat{n}_-}{\partial t} = \frac{\partial \hat{n}_{O_2^-}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{n}_{O^-}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{n}_e}{\partial t}, \quad (3.160)$$

$$\frac{\partial \hat{H}_{\xi,-}}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{H}_{\xi,O_2^-}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{H}_{\xi,O^-}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{H}_{\xi,e}}{\partial \xi}, \quad (3.161)$$

$$\frac{\partial \hat{H}_{\eta,-}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{H}_{\eta,O_2^-}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}_{\eta,O^-}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}_{\eta,e}}{\partial \eta}, \quad (3.162)$$

$$\frac{\partial \hat{D}_{\xi,-}}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{D}_{\xi,O_2^-}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{D}_{\xi,O^-}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{D}_{\xi,e}}{\partial \xi}, \quad (3.163)$$

$$\frac{\partial \hat{D}_{\eta,-}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{D}_{\eta,O_2^-}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{D}_{\eta,O^-}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{D}_{\eta,e}}{\partial \eta}, \quad (3.164)$$

$$S_{-} = S_{O_2^-} + S_{O^-} + S_e. \tag{3.165}$$

З рівнянь (3.140) і (3.141) маємо

$$\left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{+}}{\partial t}\right)^{n+1,m+1} = \left(-e\left(1+\gamma_{diel}\right)\hat{\Gamma}_{+} - \hat{S}_{\sigma}\right)^{n+1,m+1} - \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{+}}{\partial t}\right)^{n+1,m}, \tag{3.166}$$

$$\left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m+1} = \left(-e\hat{\Gamma}_{-} - \hat{S}_{\sigma}\right)^{n+1,m+1} - \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m}, \tag{3.167}$$

де

$$\left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{\pm}}{\partial t}\right)^{n+1,m} = \frac{1}{\Delta t}\left(1.5\hat{\sigma}_{\pm}{}^{n+1,m} - 2\hat{\sigma}_{\pm}{}^{n} + 0.5\hat{\sigma}_{\pm}{}^{n-1}\right). \tag{3.168}$$

Підставляючи (3.151), (3.152), (3.166), (3.167) в (3.150), отримаємо

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \hat{\varphi}^{n+1,m+1}}{\partial \tau_{\varphi}} + \frac{\partial \hat{\varphi}_{\xi}{}^{n+1,m+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\varphi}_{\eta}{}^{n+1,m+1}}{\partial \eta} = -\frac{e}{\varepsilon_0}\left(\hat{n}_{+}{}^{n+1,m} - \hat{n}_{-}{}^{n+1,m}\right) - \\
-\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial \hat{H}_{\xi,+}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{H}_{\eta,+}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{D}_{\xi,+}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{D}_{\eta,+}}{\partial \eta} + \hat{S}_{+}\right)^{n+1,m+1} + \frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial \hat{n}_{+}}{\partial t}\right)^{n+1,m} + \\
+\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial \hat{H}_{\xi,-}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{H}_{\eta,-}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{D}_{\xi,-}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{D}_{\eta,-}}{\partial \eta} + \hat{S}_{-}\right)^{n+1,m+1} - \frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial \hat{n}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m} - . \\
-\frac{\delta}{\varepsilon_0}\left(\hat{\sigma}_{+}{}^{n+1,m} - \hat{\sigma}_{-}{}^{n+1,m}\right) + \frac{\delta}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{+}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\sigma}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m} \\
+\frac{e\delta}{\varepsilon_0}\Delta t\left[\frac{\left(1+\gamma_{diel}\right)}{J\cdot A_{\eta 1/2}}\left(\hat{H}_{\eta,+} + \hat{H}_{\eta,+}^{th}\right) - \frac{1}{J\cdot A_{\eta 1/2}}\left(\hat{H}_{\eta,-} + \hat{H}_{\eta,-}^{th}\right)\right]^{n+1,m+1}
\end{gathered} \tag{3.169}$$

або

$$\frac{\partial\hat{\varphi}^{n+1,m+1}}{\partial\tau_{\varphi}}+\frac{\partial\hat{\varphi}_{\xi}^{\,n+1,m+1}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{\varphi}_{\eta}^{\,n+1,m+1}}{\partial\eta}+$$

$$+\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left[\frac{\partial\left(\hat{H}_{\xi,+}-\hat{H}_{\xi,-}\right)^{n+1,m+1}}{\partial\xi}+\frac{\partial\left(\hat{H}_{\eta,+}-\hat{H}_{\eta,-}\right)^{n+1,m+1}}{\partial\eta}\right]-$$

$$-\frac{e\delta}{\varepsilon_0}\Delta t\left[\frac{\left(1+\gamma_{diel}\right)\hat{H}_{\eta,+}}{J\cdot A_{\eta 1/2}}-\frac{\hat{H}_{\eta,-}}{J\cdot A_{\eta 1/2}}\right]^{n+1,\,m+1}=-\frac{e}{\varepsilon_0}\left(\hat{n}_{+}^{\,n+1,m}-\hat{n}_{-}^{\,n+1,m}\right)-\frac{\delta}{\varepsilon_0}\left(\hat{\sigma}_{+}^{\,n+1,m}-\hat{\sigma}_{-}^{\,n+1,m}\right)-$$

$$-\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{D}_{\xi,+}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{D}_{\eta,+}}{\partial\eta}+\hat{S}_{+}\right)^{n+1,m+1}+\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{D}_{\xi,-}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{D}_{\eta,-}}{\partial\eta}+\hat{S}_{-}\right)^{n+1,m+1}-$$

$$+\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{n}_{+}}{\partial t}\right)^{n+1,m}-\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{n}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m}+\frac{\delta}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{\sigma}_{+}}{\partial t}-\frac{\partial\hat{\sigma}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m}+$$

$$+\frac{e\delta}{\varepsilon_0}\Delta t\left[\frac{\left(1+\gamma_{diel}\right)}{J\cdot A_{\eta 1/2}}\hat{H}_{\eta,+}^{th}-\frac{1}{J\cdot A_{\eta 1/2}}\hat{H}_{\eta,-}^{th}\right]^{n+1,m+1} \qquad (3.170)$$

Якщо в чисельному алгоритмі спочатку розв’язується рівняння відносно φ, а потім рівняння для густини заряджених частинок n_+ і n_-, то в співвідношенні (3.171) всі коефіцієнти беруться з попередньої підітерації m

$$\frac{\partial\hat{\varphi}^{n+1,m+1}}{\partial\tau_{\varphi}}+\frac{\partial\hat{\varphi}_{\xi}^{\,n+1,m+1}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{\varphi}_{\eta}^{\,n+1,m+1}}{\partial\eta}+$$

$$+\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left[\frac{\partial\left(\hat{H}_{\xi,+}-\hat{H}_{\xi,-}\right)^{n+1,m+1}}{\partial\xi}+\frac{\partial\left(\hat{H}_{\eta,+}-\hat{H}_{\eta,-}\right)^{n+1,m+1}}{\partial\eta}\right]-$$

$$-\frac{e\delta}{\varepsilon_0}\Delta t\left[\frac{\left(1+\gamma_{diel}\right)\hat{H}_{\eta,+}}{J\cdot A_{\eta 1/2}}-\frac{\hat{H}_{\eta,-}}{J\cdot A_{\eta 1/2}}\right]^{n+1,m+1}=-\frac{e}{\varepsilon_0}\left(\hat{n}_{+}^{\,n+1,m}-\hat{n}_{-}^{\,n+1,m}\right)-\frac{\delta}{\varepsilon_0}\left(\hat{\sigma}_{+}^{\,n+1,m}-\hat{\sigma}_{-}^{\,n+1,m}\right)- \qquad (3.171)$$

$$-\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{D}_{\xi,+}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{D}_{\eta,+}}{\partial\eta}+\hat{S}_{+}-\frac{\partial\hat{n}_{+}}{\partial t}\right)^{n+1,m}+\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{D}_{\xi,-}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{D}_{\eta,-}}{\partial\eta}+\hat{S}_{-}-\frac{\partial\hat{n}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m}+$$

$$+\frac{\delta}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial\hat{\sigma}_{+}}{\partial t}-\frac{\partial\hat{\sigma}_{-}}{\partial t}\right)^{n+1,m}+\frac{e\delta}{\varepsilon_0}\Delta t\left[\frac{\left(1+\gamma_{diel}\right)}{J\cdot A_{\eta 1/2}}\hat{H}_{\eta,+}^{th}-\frac{1}{J\cdot A_{\eta 1/2}}\hat{H}_{\eta,-}^{th}\right]^{n+1,m}$$

Використання розкладання в ряд Тейлора не накладає обмежень за типом схеми (явна або неявна) для рівнянь вигляду (3.99).

У результаті маємо рівняння Пуассона для електричного потенціалу φ на часовому шарі $n+1, m+1$ з урахуванням об'ємної густини заряджених частинок n_+ і n_- на цьому ж часовому шарі (3.171) у вигляді

$$\frac{1}{\Delta\tau_\varphi}\left(\hat{\varphi}^{n+1,m+1} - \hat{\varphi}^{n+1,m}\right) = -\hat{R}_\varphi^{n+1,m+1} + \hat{S}_\varphi^{n+1,m}, \tag{3.172}$$

де

$$\begin{gathered} \hat{R}_\varphi^{n+1,m+1} = \frac{\partial \hat{\varphi}_\xi^{\;n+1,m+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\varphi}_\eta^{\;n+1,m+1}}{\partial \eta} + \\ + \frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left[\frac{\partial\left(\hat{H}_{\xi,+} - \hat{H}_{\xi,-}\right)^{n+1,m+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial\left(\hat{H}_{\eta,+} - \hat{H}_{\eta,-}\right)^{n+1,m+1}}{\partial \eta}\right] -, \\ -\frac{e\delta}{\varepsilon_0}\Delta t\left[\frac{\left(1+\gamma_{diel}\right)\hat{H}_{\eta,+}}{J\cdot A_{\eta 1/2}} - \frac{\hat{H}_{\eta,-}}{J\cdot A_{\eta 1/2}}\right]^{n+1,m+1} \end{gathered} \tag{3.173}$$

$$\begin{gathered} \hat{S}_\varphi^{n+1,m} = -\frac{e}{\varepsilon_0}\left(\hat{n}_+^{\;n+1,m} - \hat{n}_-^{\;n+1,m}\right) - \frac{\delta}{\varepsilon_0}\left(\hat{\sigma}_+^{\;n+1,m} - \hat{\sigma}_-^{\;n+1,m}\right) - \\ -\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial \hat{D}_{\xi,+}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{D}_{\eta,+}}{\partial \eta} + \hat{S}_+ - \frac{\partial \hat{n}_+}{\partial t}\right)^{n+1,m} + \frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial \hat{D}_{\xi,-}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{D}_{\eta,-}}{\partial \eta} + \hat{S}_- - \frac{\partial \hat{n}_-}{\partial t}\right)^{n+1,m} + . \\ + \frac{\delta}{\varepsilon_0}\Delta t\left(\frac{\partial \hat{\sigma}_+}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\sigma}_-}{\partial t}\right)^{n+1,m} + \frac{e\delta}{\varepsilon_0}\Delta t\left[\frac{\left(1+\gamma_{diel}\right)}{J\cdot A_{\eta 1/2}}\hat{H}_{\eta,+}^{th} - \frac{1}{J\cdot A_{\eta 1/2}}\hat{H}_{\eta,-}^{th}\right]^{n+1,m} \end{gathered} \tag{3.174}$$

Лінеарізуемо нев'язку $\hat{R}^{n+1,m+1}$ та запишемо рівняння (3.172) в дельта-формі

$$\left[\frac{1}{J\Delta\tau_\varphi} + \left(\frac{\partial \hat{R}_\varphi}{\partial \varphi}\right)^{n+1,m}\right]\Delta\varphi^{n+1,m} = -\hat{R}_\varphi^{n+1,m} + \hat{S}_\varphi^{n+1,m}, \tag{3.175}$$

де

$$\Delta\varphi^{n+1,m} = \varphi^{n+1,m+1} - \varphi^{n+1,m}. \tag{3.176}$$

Лінеаризацію рівняння (3.172) виконано за псевдочасом.

3.8 Дискретний аналог рівнянь динаміки частинок плазми та електричного потенціалу

3.8.1 Рівняння для об'ємної густини заряджених частинок

До рівняння для об'ємної густини частинок (3.99) входять дрейфові (адвективні) складові, $\dfrac{\partial \hat{\mathbf{H}}_\xi}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial \hat{\mathbf{H}}_\eta}{\partial \eta}$ вигляду $\dfrac{\partial}{\partial \xi}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\langle \mathbf{n}\rangle \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial}{\partial \eta}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\langle \mathbf{n}\rangle \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial}{\partial \xi}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\langle \mathbf{n}\rangle \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, $\dfrac{\partial}{\partial \eta}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\langle \mathbf{n}\rangle \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, які апроксимуються за наступними співвідношеннями

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\langle \mathbf{n}\rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{2\Delta\xi^2}\Big[\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1}+\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{i}\right)\langle \mathbf{n}\rangle_{i+1/2}\left(\varphi_{i+1}-\varphi_i\right)- \\ -\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{i}+\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{i-1}\right)\langle \mathbf{n}\rangle_{i-1/2}\left(\varphi_{i}-\varphi_{i-1}\right)\Big], \tag{3.177}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\langle \mathbf{n}\rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{1}{2\Delta\eta^2}\Big[\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{j+1}+\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{j}\right)\langle \mathbf{n}\rangle_{j+1/2}\left(\varphi_{j+1}-\varphi_j\right)- \\ -\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{j}+\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{j-1}\right)\langle \mathbf{n}\rangle_{j-1/2}\left(\varphi_{j}-\varphi_{j-1}\right)\Big], \tag{3.178}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\langle \mathbf{n}\rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{1}{8\Delta\xi\Delta\eta}\Big[\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{i+1,j}+\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j}\right)\langle \mathbf{n}\rangle_{i+1/2}\left(\varphi_{i+1,j+1}+\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i+1,j-1}+\varphi_{i,j-1}\right)- \\ -\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j}+\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{i-1,j}\right)\langle \mathbf{n}\rangle_{i-1/2}\left(\varphi_{i,j+1}+\varphi_{i-1,j+1}-\varphi_{i,j-1}-\varphi_{i-1,j-1}\right)\Big], \tag{3.179}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\langle \mathbf{n}\rangle \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{8\Delta\eta\,\Delta\xi}\Big[\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j+1}+\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j}\right)\langle \mathbf{n}\rangle_{j+1/2}\left(\varphi_{i+1,j+1}+\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j+1}-\varphi_{i-1,j}\right)- \\ -\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j}+\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j-1}\right)\langle \mathbf{n}\rangle_{j-1/2}\left(\varphi_{i+1,j}+\varphi_{i+1,j-1}-\varphi_{i-1,j}-\varphi_{i-1,j-1}\right)\Big]. \tag{3.180}$$

де

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\left(\xi_x^2+\xi_y^2\right)\boldsymbol{\mu}}{J},\quad \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\left(\eta_x^2+\eta_y^2\right)\boldsymbol{\mu}}{J},\quad \widehat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)\boldsymbol{\mu}}{J}, \tag{3.181}$$

$\langle \mathbf{n}\rangle$ – густина заряджених частинок на грані контрольного об'єму, відфільтрована за протипоточною схемою або схемою TVD з обмежувачем потоків MinMod [27].

Формальна математична апроксимація оператора вигляду $\dfrac{\partial}{\partial \xi}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\langle \mathbf{n} \rangle \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, за допомогою симетричних скінченно-різницевих співвідношень (як для дифузійних доданків) призводить до втрати фізичного змісту даного оператора як адвекції заряджених частинок. Для збереження фізичного змісту адвекції вводиться несиметрична скінченно-об'ємна апроксимація для φ з урахуванням адвекції *n*.

Дифузійні складові $\dfrac{\partial \hat{\mathbf{D}}_\xi}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial \hat{\mathbf{D}}_\eta}{\partial \eta}$ вигляду $\dfrac{\partial}{\partial \xi}\breve{\boldsymbol{\alpha}}\dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial}{\partial \eta}\breve{\boldsymbol{\beta}}\dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta}$, $\dfrac{\partial}{\partial \xi}\breve{\boldsymbol{\gamma}}\dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta}$, $\dfrac{\partial}{\partial \eta}\breve{\boldsymbol{\gamma}}\dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi}$ апроксимуються за співвідношеннями (3.182), (3.183), (3.184), (3.185), відповідно.

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\breve{\boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} = \frac{1}{2\Delta\xi^2}\Big[\big(\breve{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1} + \breve{\boldsymbol{\alpha}}_i\big)\big(\mathbf{n}_{i+1} - \mathbf{n}_i\big) - \big(\breve{\boldsymbol{\alpha}}_i + \breve{\boldsymbol{\alpha}}_{i-1}\big)\big(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i-1}\big)\Big], \tag{3.182}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\breve{\boldsymbol{\beta}}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta} = \frac{1}{2\Delta\eta^2}\Big[\big(\breve{\boldsymbol{\beta}}_{j+1} + \breve{\boldsymbol{\beta}}_j\big)\big(\mathbf{n}_{j+1} - \mathbf{n}_j\big) - \big(\breve{\boldsymbol{\beta}}_j + \breve{\boldsymbol{\beta}}_{j-1}\big)\big(\mathbf{n}_j - \mathbf{n}_{j-1}\big)\Big], \tag{3.183}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi}\breve{\boldsymbol{\gamma}}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta} = \frac{1}{8\Delta\xi\Delta\eta}\Big[&\big(\breve{\boldsymbol{\gamma}}_{i+1,j} + \breve{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j}\big)\big(\mathbf{n}_{i+1,j+1} + \mathbf{n}_{i,j+1} - \mathbf{n}_{i+1,j-1} - \mathbf{n}_{i,j-1}\big) - \\ &-\big(\breve{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j} + \breve{\boldsymbol{\gamma}}_{i-1,j}\big)\big(\mathbf{n}_{i,j+1} + \mathbf{n}_{i-1,j+1} - \mathbf{n}_{i,j-1} - \mathbf{n}_{i-1,j-1}\big)\Big]\end{aligned}, \tag{3.184}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \eta}\breve{\boldsymbol{\gamma}}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} = \frac{1}{8\Delta\eta\,\Delta\xi}\Big[&\big(\breve{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j+1} + \breve{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j}\big)\big(\mathbf{n}_{i+1,j+1} + \mathbf{n}_{i+1,j} - \mathbf{n}_{i-1,j+1} - \mathbf{n}_{i-1,j}\big) - \\ &-\big(\breve{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j} + \breve{\boldsymbol{\gamma}}_{i,j-1}\big)\big(\mathbf{n}_{i+1,j} + \mathbf{n}_{i+1,j-1} - \mathbf{n}_{i-1,j} - \mathbf{n}_{i-1,j-1}\big)\Big]\end{aligned}. \tag{3.185}$$

де

$$\breve{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\big(\xi_x^2 + \xi_y^2\big)\mathbf{D}}{J},\ \ \breve{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\big(\eta_x^2 + \eta_y^2\big)\mathbf{D}}{J},\ \ \breve{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\big(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y\big)\mathbf{D}}{J}, \tag{3.186}$$

3.8.2 Визначення відфільтрованої густини заряджених частинок на грані контрольного об'єму

Доданки $\partial\hat{\mathbf{H}}_\xi \big/ \partial\xi$, $\partial\hat{\mathbf{H}}_\eta \big/ \partial\eta$ відповідають за адвекцію (дрейф) заряджених частинок. Формальна математична апроксимація виразів (3.177)–(3.180) за допомогою симетричних скінченно-різницевих співвідношень (як для дифузійних доданків) призводить до втрати фізичного змісту даного оператора як адвекції заряджених частинок. Для збереження фізичного змісту адвекції вводиться несиметрична скінченно-об'ємна апроксимація для φ з урахуванням адвекції **n**.

На грані контрольного об'єму в напрямку ξ відфільтровані значення густини заряджених частинок розраховуються за схемою TVD з обмежувачем потоків MinMod

$$\langle \mathbf{n} \rangle_{i+1/2} = \begin{cases} \mathbf{n}_i \ \ + \mathbf{\Psi}_{i+1/2}\left(\mathbf{n}_{i+1} - \mathbf{n}_i,\ \ \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i-1}\right), & -\left(\boldsymbol{\mu}\nabla\varphi\right)_{i+1/2} \geq 0 \\ \mathbf{n}_{i+1} - \mathbf{\Psi}_{i+1/2}\left(\mathbf{n}_{i+2} - \mathbf{n}_{i+1}, \mathbf{n}_{i+1} - \mathbf{n}_i\right), & -\left(\boldsymbol{\mu}\nabla\varphi\right)_{i+1/2} < 0 \end{cases}, \tag{3.187}$$

$$\langle \mathbf{n} \rangle_{i-1/2} = \begin{cases} \mathbf{n}_{i-1} + \mathbf{\Psi}_{i-1/2}\left(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i-1},\ \ \mathbf{n}_{i-1} - \mathbf{n}_{i-2}\right), & -\left(\boldsymbol{\mu}\nabla\varphi\right)_{i-1/2} \geq 0 \\ \mathbf{n}_i \ \ - \mathbf{\Psi}_{i-1/2}\left(\mathbf{n}_{i+1} - \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i-1}\right), & -\left(\boldsymbol{\mu}\nabla\varphi\right)_{i-1/2} < 0 \end{cases}, \tag{3.188}$$

де $\mathbf{\Psi}_{i+1/2}$ – обмежувач потоків MinMod другого порядку точності.

Дрейфова швидкість $-\boldsymbol{\mu}\nabla\varphi$ на грані контрольного об'єму визначається за допомогою наступних співвідношень

$$-\left(\boldsymbol{\mu}\nabla\varphi\right)_{i+1/2} = -\frac{\boldsymbol{\mu}_{i+1} + \boldsymbol{\mu}_i}{2} \cdot \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta\xi}, \tag{3.189}$$

$$-\left(\boldsymbol{\mu}\nabla\varphi\right)_{i-1/2} = -\frac{\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\mu}_{i-1}}{2} \cdot \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\Delta\xi}. \tag{3.190}$$

Для схеми TVD MinMod [27] другого порядку точності обмежувач $\mathbf{\Psi}$ набуває вигляду

$$\mathbf{\Psi} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} MinMod\left(\Delta\,\mathbf{f}_L, \Delta\mathbf{f}_R\right), & \left(\Delta\mathbf{f}_L \cdot \Delta\mathbf{f}_R\right) > 0 \\ 0, & \left(\Delta\mathbf{f}_L \cdot \Delta\mathbf{f}_R\right) \leq 0 \end{cases}. \tag{3.191}$$

У напрямку η формули для визначення відфільтрованих значень густини заряджених частинок на грані контрольного об'єму аналогічні.

3.8.3 Рівняння для електричного потенціалу з урахуванням рівнянь для густини заряджених частинок

Рівняння Пуассона для електричного потенціалу φ з урахуванням рівнянь для густини заряджених частинок і поверхневого заряду в дельта-формі набуває вигляду (3.175). Нев'язка R даного рівняння може бути записана у вигляді

$$\hat{R}_{\varphi}^{n+1,m} = \frac{\partial \hat{\varphi}_{\xi}^{\,n+1,m}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\varphi}_{\eta}^{\,n+1,m}}{\partial \eta} + \sum_{k} \frac{\partial \hat{\phi}_{\xi}^{\,n+1,m}}{\partial \xi} + \sum_{k} \frac{\partial \hat{\phi}_{\eta}^{\,n+1,m}}{\partial \eta} + \sum_{+} d\hat{\sigma}_{+}^{n+1,m} - \sum_{-} d\hat{\sigma}_{-}^{n+1,m}, \quad (3.192)$$

де

$$\hat{\varphi}_{\xi} = \frac{\varepsilon_r}{J}\left[\left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right], \quad (3.193)$$

$$\hat{\varphi}_{\eta} = \frac{\varepsilon_r}{J}\left[\left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right], \quad (3.194)$$

$$\hat{\phi}_{\xi} = \frac{\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t \mu_k \left\langle n_k \right\rangle}{J}\left[\left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right], \quad (3.195)$$

$$\hat{\phi}_{\eta} = \frac{\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t \mu_k \left\langle n_k \right\rangle}{J}\left[\left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right], \quad (3.196)$$

$$d\hat{\sigma}_{+} = \frac{\frac{e\delta}{\varepsilon_0}\Delta t \frac{\left(1 + \gamma_{diel}\right)}{J \cdot A_{\eta 1/2}} \mu_{+} \left\langle n_{+} \right\rangle}{J}\left[\left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right], \quad (3.197)$$

$$d\hat{\sigma}_{-} = \frac{\frac{e\delta}{\varepsilon_0}\Delta t \frac{1}{J \cdot A_{\eta 1/2}} \mu_{-} \left\langle n_{-} \right\rangle}{J}\left[\left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right], \quad (3.198)$$

де $k = N_4^+, N_2^+, O_4^+, O_2^+, O_2^-, O^-, e$; $+ = N_4^+, N_2^+, O_4^+, O_2^+$; $- = O_2^-, O^-, e$

$$\chi^{+} = \frac{\frac{e\delta}{\varepsilon_0}\Delta t \frac{\left(1 + \gamma_{diel}\right)}{J \cdot A_{\eta 1/2}} \mu_{+} \left\langle n_{+} \right\rangle \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)}{J}, \quad \chi^{-} = \frac{\frac{e\delta}{\varepsilon_0}\Delta t \frac{1}{J \cdot A_{\eta 1/2}} \mu_{-} \left\langle n_{-} \right\rangle \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)}{J}.$$

Символ $\langle\ \rangle$ позначає протипоточну апроксимацію n на грань контрольного об'єму (3.187), (3.188) для збереження адвекції. Апроксимація других похідних для φ проводиться за скінченно-об'ємними співвідношеннями з урахуванням несиметрично «відфільтрованого» значення n. Термін «фільтрація» вводиться спеціально для акцентування нової чисельної апроксимації других похідних за φ з урахуванням адвекції n.

У виразі (3.192) для нев'язки електричного потенціалу $\hat{R}_{\varphi}^{n+1,m}$ входять складові $\frac{\partial \hat{\varphi}_{\xi}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \hat{\varphi}_{\eta}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \hat{\phi}_{\xi}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \hat{\phi}_{\eta}}{\partial \eta}$ вигляду $\frac{\partial}{\partial \xi}\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}\beta\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \xi}\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\tilde{\alpha}\langle n\rangle\right]_k\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\tilde{\beta}\langle n\rangle\right]_k\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\tilde{\gamma}\langle n\rangle\right]_k\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\tilde{\gamma}\langle n\rangle\right]_k\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, які апроксимуються за наступними співвідношеннями.

Так похідні $\frac{\partial}{\partial \xi}\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}\beta\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \xi}\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ приймуть вид (3.199), (3.200), (3.201), (3.202), відповідно.

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}=\frac{1}{2\Delta\xi^2}\left[\left(\alpha_{i+1}+\alpha_i\right)\left(\varphi_{i+1}-\varphi_i\right)-\left(\alpha_i+\alpha_{i-1}\right)\left(\varphi_i-\varphi_{i-1}\right)\right], \qquad (3.199)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\beta\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}=\frac{1}{2\Delta\eta^2}\left[\left(\beta_{j+1}+\beta_j\right)\left(\varphi_{j+1}-\varphi_j\right)-\left(\beta_j+\beta_{j-1}\right)\left(\varphi_j-\varphi_{j-1}\right)\right], \qquad (3.200)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \xi}\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}=\frac{1}{8\Delta\xi\Delta\eta}\Big[\left(\gamma_{i+1,j}+\gamma_{i,j}\right)\left(\varphi_{i+1,j+1}+\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i+1,j-1}+\varphi_{i,j-1}\right)-\\ -\left(\gamma_{i,j}+\gamma_{i-1,j}\right)\left(\varphi_{i,j+1}+\varphi_{i-1,j+1}-\varphi_{i,j-1}-\varphi_{i-1,j-1}\right)\Big]\end{gathered}, \qquad (3.201)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \eta}\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}=\frac{1}{8\Delta\eta\Delta\xi}\Big[\left(\gamma_{i,j+1}+\gamma_{i,j}\right)\left(\varphi_{i+1,j+1}+\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j+1}-\varphi_{i-1,j}\right)-\\ -\left(\gamma_{i,j}+\gamma_{i,j-1}\right)\left(\varphi_{i+1,j}+\varphi_{i+1,j-1}-\varphi_{i-1,j}-\varphi_{i-1,j-1}\right)\Big]\end{gathered}, \qquad (3.202)$$

де $\alpha=\frac{\varepsilon_r\left(\xi_x^2+\xi_y^2\right)}{J}$, $\beta=\frac{\varepsilon_r\left(\eta_x^2+\eta_y^2\right)}{J}$, $\gamma=\frac{\varepsilon_r\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)}{J}$.

Похідні $\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\tilde{\alpha}\langle n\rangle\right]_k\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\tilde{\beta}\langle n\rangle\right]_k\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\tilde{\gamma}\langle n\rangle\right]_k\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\tilde{\gamma}\langle n\rangle\right]_k\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ обчислюються за формулами (3.203), (3.204), (3.205), (3.206).

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\tilde{\alpha}\langle n\rangle\right]_k\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}=\frac{1}{2\Delta\xi^2}\Big\{\left[\left(\tilde{\alpha}_{i+1}+\tilde{\alpha}_i\right)\langle n\rangle_{i+1/2}\right]_k\left(\varphi_{i+1}-\varphi_i\right)-\\ -\left[\left(\tilde{\alpha}_i+\tilde{\alpha}_{i-1}\right)\langle n\rangle_{i-1/2}\right]_k\left(\varphi_i-\varphi_{i-1}\right)\Big\}\end{gathered}, \qquad (3.203)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\tilde{\beta}\left\langle n\right\rangle\right]_k\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{1}{2\Delta\eta^2}\begin{Bmatrix}\left[\left(\tilde{\beta}_{j+1}+\tilde{\beta}_j\right)\left\langle n\right\rangle_{j+1/2}\right]_k\left(\varphi_{j+1}-\varphi_j\right)-\\-\left[\left(\tilde{\beta}_j+\tilde{\beta}_{j-1}\right)\left\langle n\right\rangle_{j-1/2}\right]_k\left(\varphi_j-\varphi_{j-1}\right)\end{Bmatrix},\qquad(3.204)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\tilde{\gamma}\left\langle n\right\rangle\right]_k\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{1}{8\Delta\xi\Delta\eta}\begin{Bmatrix}\left[\left(\tilde{\gamma}_{i+1,j}+\tilde{\gamma}_{i,j}\right)\left\langle n\right\rangle_{i+1/2}\right]_k\left(\varphi_{i+1,j+1}+\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i+1,j-1}+\varphi_{i,j-1}\right)-\\-\left[\left(\tilde{\gamma}_{i,j}+\tilde{\gamma}_{i-1,j}\right)\left\langle n\right\rangle_{i-1/2}\right]_k\left(\varphi_{i,j+1}+\varphi_{i-1,j+1}-\varphi_{i,j-1}-\varphi_{i-1,j-1}\right)\end{Bmatrix},\qquad(3.205)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\tilde{\gamma}\left\langle n\right\rangle\right]_k\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{1}{8\Delta\xi\Delta\eta}\begin{Bmatrix}\left[\left(\tilde{\gamma}_{i,j+1}+\tilde{\gamma}_{i,j}\right)\left\langle n\right\rangle_{j+1/2}\right]_k\left(\varphi_{i+1,j+1}+\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j+1}-\varphi_{i-1,j}\right)-\\-\left[\left(\tilde{\gamma}_{i,j}+\tilde{\gamma}_{i,j-1}\right)\left\langle n\right\rangle_{j-1/2}\right]_k\left(\varphi_{i+1,j}+\varphi_{i+1,j-1}-\varphi_{i-1,j}-\varphi_{i-1,j-1}\right)\end{Bmatrix},\qquad(3.206)$$

де $\tilde{\alpha}=\dfrac{\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left|\mu_k\right|\left(\xi_x^2+\xi_y^2\right)}{J}$, $\tilde{\beta}=\dfrac{\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left|\mu_k\right|\left(\eta_x^2+\eta_y^2\right)}{J}$, $\tilde{\gamma}=\dfrac{\frac{e}{\varepsilon_0}\Delta t\left|\mu_k\right|\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)}{J}$.

3.8.4 Дискретизація неявної схеми для розв'язку рівняння електричного потенціалу з урахуванням рівнянь для густини заряджених частинок

Дискретизація нев'язки $\hat{R}_{\varphi}^{n+1,m}$ необхідна для додавання в ліву частину рівняння (3.175). У лівій частині рівняння (3.175) зберігалися лише повторні похідні. Подальше виведення зроблено у припущенні, що $\Delta\xi$ і $\Delta\eta$ прийняті рівними одиниці $\Delta\xi=\Delta\eta=1$. Перегрупуємо вираження (3.199), (3.200), (3.201), (3.202) відносно φ

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\left[\left(\alpha_{i+1}+\alpha_i\right)\varphi_{i+1}-\left(\alpha_{i+1}+2\alpha_i+\alpha_{i-1}\right)\varphi_i+\left(\alpha_i+\alpha_{i-1}\right)\varphi_{i-1}\right],\qquad(3.207)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\beta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\left[\left(\beta_{j+1}+\beta_j\right)\varphi_{j+1}-\left(\beta_{j+1}+2\beta_j+\beta_{j-1}\right)\varphi_j+\left(\beta_j+\beta_{j-1}\right)\varphi_{j-1}\right],\qquad(3.208)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\tilde{\alpha}\left\langle n\right\rangle\right]_k\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\left[\left(\tilde{\alpha}_{i+1}+\tilde{\alpha}_i\right)\left\langle n\right\rangle_{i+1/2}\right]_k\varphi_{i+1}-\left[\left(\tilde{\alpha}_{i+1}+\tilde{\alpha}_i\right)\left\langle n\right\rangle_{i+1/2}\right]_k\varphi_i-\\-\left[\left(\tilde{\alpha}_i+\tilde{\alpha}_{i-1}\right)\left\langle n\right\rangle_{i-1/2}\right]_k\varphi_i+\left[\left(\tilde{\alpha}_i+\tilde{\alpha}_{i-1}\right)\left\langle n\right\rangle_{i-1/2}\right]_k\varphi_{i-1}\end{Bmatrix},\qquad(3.209)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\tilde{\beta}\langle n\rangle\right]_k\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\Big\{\left[\left(\tilde{\beta}_{j+1}+\tilde{\beta}_j\right)\langle n\rangle_{j+1/2}\right]_k\varphi_{j+1}-\left[\left(\tilde{\beta}_{j+1}+\tilde{\beta}_j\right)\langle n\rangle_{j+1/2}\right]_k\varphi_j- \\ -\left[\left(\tilde{\beta}_j+\tilde{\beta}_{j-1}\right)\langle n\rangle_{j-1/2}\right]_k\varphi_j+\left[\left(\tilde{\beta}_j+\tilde{\beta}_{j-1}\right)\langle n\rangle_{j-1/2}\right]_k\varphi_{j-1}\Big\}. \qquad (3.210)$$

Члени $\left(\partial\hat{R}_\varphi/\partial\varphi\right)$, що входять у неявну частину рівняння (3.175), визначаються за допомогою наступних співвідношень

У точці i,j:

$$\frac{\partial\hat{R}_{i,j}}{\partial\varphi_{i,j}}=-\frac{1}{2}\left(\alpha_{i+1}+2\alpha_i+\alpha_{i-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\beta_{j+1}+2\beta_j+\beta_{j-1}\right)- \\ -\frac{1}{2}\sum_k\Big\{\left[\left(\tilde{\alpha}_{i+1}+\tilde{\alpha}_i\right)\langle n\rangle_{i+1/2}\right]_k+\left[\left(\tilde{\alpha}_i+\tilde{\alpha}_{i-1}\right)\langle n\rangle_{i-1/2}\right]_k\Big\}- \\ -\frac{1}{2}\sum_k\Big\{\left[\left(\tilde{\beta}_{j+1}+\tilde{\beta}_j\right)\langle n\rangle_{j+1/2}\right]_k+\left[\left(\tilde{\beta}_j+\tilde{\beta}_{j-1}\right)\langle n\rangle_{j-1/2}\right]_k\Big\}- \\ -\frac{1}{2}\Big\{\sum_+\left[\left(\chi^+_{j+1}+\chi^+_j\right)\langle n\rangle_{j+1/2}\right]_+-\sum_-\left[\left(\chi^-_{j+1}+\chi^-_j\right)\langle n\rangle_{j+1/2}\right]_-\Big\}. \qquad (3.211)$$

У точці $i-1,j$:

$$\frac{\partial\hat{R}_{i,j}}{\partial\varphi_{i-1,j}}=\frac{1}{2}\left(\alpha_i+\alpha_{i-1}\right)+\frac{1}{2}\sum_k\left[\left(\tilde{\alpha}_i+\tilde{\alpha}_{i-1}\right)\langle n\rangle_{i-1/2}\right]_k. \qquad (3.212)$$

У точці $i+1,j$:

$$\frac{\partial\hat{R}_{i,j}}{\partial\varphi_{i+1,j}}=\frac{1}{2}\left(\alpha_{i+1}+\alpha_i\right)+\frac{1}{2}\sum_k\left[\left(\tilde{\alpha}_{i+1}+\tilde{\alpha}_i\right)\langle n\rangle_{i+1/2}\right]_k. \qquad (3.213)$$

У точці $i,j-1$:

$$\frac{\partial\hat{R}_{i,j}}{\partial\varphi_{i,j-1}}=\frac{1}{2}\left(\beta_j+\beta_{j-1}\right)+\frac{1}{2}\sum_k\left[\left(\tilde{\beta}_j+\tilde{\beta}_{j-1}\right)\langle n\rangle_{j-1/2}\right]_k. \qquad (3.214)$$

У точці $i,j+1$:

$$\frac{\partial\hat{R}_{i,j}}{\partial\varphi_{i,j+1}}=\frac{1}{2}\left(\beta_{j+1}+\beta_j\right)+\frac{1}{2}\sum_k\left[\left(\tilde{\beta}_{j+1}+\tilde{\beta}_j\right)\langle n\rangle_{j+1/2}\right]_k+ \\ +\frac{1}{2}\Big\{\sum_+\left[\left(\chi^+_{j+1}+\chi^+_j\right)\langle n\rangle_{j+1/2}\right]_+-\sum_-\left[\left(\chi^-_{j+1}+\chi^-_j\right)\langle n\rangle_{j+1/2}\right]_-\Big\}. \qquad (3.215)$$

Отримана скалярна система алгебраїчних рівнянь розв’язувалася методом GMRES з ILU(k) передзумовлюванням [163, 280, 308].

3.8.5 Апроксимація джерельних доданків у рівняннях динаміки частинок плазми

У рівнянні динаміки частинок плазми в дифузійно-дрейфовому наближенні в джерельні доданки S у відповідних рівнянь (2.126)–(2.139), які формуються виходячи з кінетичної схеми діелектричного бар'єрного розряду, входять вирази вигляду $\varpi \cdot \left|\mathbf{\Gamma_e}\right|$. Позначимо ці доданки в такий спосіб

$$Z = \varpi \cdot \left|\mathbf{\Gamma_e}\right|, \tag{3.216}$$

де ϖ – сума всіх коефіцієнтів Таунсенда (іонізаційного α та прилипання η) з урахуванням знака в залежності від кінетичної схеми, $\left|\mathbf{\Gamma_e}\right|$ – модуль вектора потоку електронів, який розраховується наступним чином

$$\left|\mathbf{\Gamma_e}\right| = \sqrt{\Gamma_{ij,x}^2 + \Gamma_{ij,y}^2} = \sqrt{\left(\Gamma_{i,x} + \Gamma_{j,x}\right)^2 + \left(\Gamma_{i,y} + \Gamma_{j,y}\right)^2}, \tag{3.217}$$

де $\Gamma_{ij,x}, \Gamma_{ij,y}$– декартові компоненти вектора потоку електронів у точці i,j визначаються осередненням відповідних компонент, розрахованих на гранях контрольного об'єму

$$\Gamma_{ij,x} = \Gamma_{i,x} + \Gamma_{j,x}, \quad \Gamma_{ij,y} = \Gamma_{i,y} + \Gamma_{j,y}, \tag{3.218}$$

$$\Gamma_{i,x} = \frac{1}{2}\left[\Gamma_{i+1/2,x} + \Gamma_{i-1/2,x}\right], \tag{3.219}$$

$$\Gamma_{i,y} = \frac{1}{2}\left[\Gamma_{i+1/2,y} + \Gamma_{i-1/2,y}\right], \tag{3.220}$$

$$\Gamma_{j,x} = \frac{1}{2}\left[\Gamma_{j+1/2,x} + \Gamma_{j-1/2,x}\right], \tag{3.221}$$

$$\Gamma_{j,y} = \frac{1}{2}\left[\Gamma_{j+1/2,y} + \Gamma_{j-1/2,y}\right]. \tag{3.222}$$

Декартові компоненти вектора потоку електронів на гранях контрольного об'єму мають вигляд

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+1/2,x} &= \Gamma_{i+1/2} \cdot \mathrm{n}_{i+1/2,x}, \quad \Gamma_{i+1/2,y} = \Gamma_{i+1/2} \cdot \mathrm{n}_{i+1/2,y}, \\ \Gamma_{i-1/2,x} &= \Gamma_{i-1/2} \cdot \mathrm{n}_{i-1/2,x}, \quad \Gamma_{i-1/2,y} = \Gamma_{i-1/2} \cdot \mathrm{n}_{i-1/2,y}, \end{aligned} \tag{3.223}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{j+1/2,x} &= \Gamma_{j+1/2} \cdot \mathrm{n}_{j+1/2,x}, \quad \Gamma_{j+1/2,y} = \Gamma_{j+1/2} \cdot \mathrm{n}_{j+1/2,y}, \\ \Gamma_{j-1/2,x} &= \Gamma_{j-1/2} \cdot \mathrm{n}_{j-1/2,x}, \quad \Gamma_{j-1/2,y} = \Gamma_{j-1/2} \cdot \mathrm{n}_{j-1/2,y}, \end{aligned} \tag{3.224}$$

де $\Gamma_{i\pm1/2,x}, \Gamma_{i\pm1/2,y}, \Gamma_{j\pm1/2,x}, \Gamma_{j\pm1/2,y}$ – компоненти вектора потоку електронів на гранях контрольного об'єму в криволінійній системі координат, $\mathrm{n}_{i\pm1/2,x}, \mathrm{n}_{i\pm1/2,y}$, $\mathrm{n}_{j\pm1/2,x}, \mathrm{n}_{j\pm1/2,y}$ – компоненти вектора зовнішньої нормалі на гранях контрольного об'єму.

Вектор зовнішньої нормалі на грані $i+1/2$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_{i+1/2} &= \left(\mathrm{n}_x; \mathrm{n}_y\right)_{i+1/2} = \left(\frac{\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}; \frac{\xi_y}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} \right)_{i+1/2} = \\ &= \left(\frac{\xi_x / J}{\sqrt{\left(\xi_x/J\right)^2 + \left(\xi_y/J\right)^2}}; \frac{\xi_y / J}{\sqrt{\left(\xi_x/J\right)^2 + \left(\xi_y/J\right)^2}} \right)_{i+1/2} . \end{aligned} \tag{3.225}$$

Значення метричних коефіцієнтів, віднесених на якобіан перетворення координат, на грані контрольного об'єму, розраховуються за наступними співвідношеннями

$$\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i+1} + \left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i}\right], \tag{3.226}$$

$$\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_{i+1} + \left(\frac{\xi_y}{J}\right)_{i}\right], \tag{3.227}$$

$$\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_{i+1} + \left(\frac{\eta_x}{J}\right)_{i}\right], \tag{3.228}$$

$$\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_{i+1/2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_{i+1}+\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_{i}\right]. \tag{3.229}$$

У напрямку $\overline{\mathbf{n}}_{i+1/2}$

$$\begin{aligned}\Gamma_{i+1/2}&=\left(-\mu n\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}-D\frac{\partial n}{\partial\ell}\right)_{i+1/2}=\\&=-\mu_{i+1/2}\left\langle n\right\rangle_{i+1/2}\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{\Delta\ell_{i+1/2}}-D_{i+1/2}\frac{n_{i+1}-n_i}{\Delta\ell_{i+1/2}},\end{aligned} \tag{3.230}$$

де $\Delta\ell_{i+1/2}=\sqrt{\left(x_{i+1}-x_i\right)^2+\left(y_{i+1}-y_i\right)^2}$. Під $n,\ \mu,\ D$ маються на увазі відповідні значення n_e,μ_e,D_e.

3.8.6 Дискретизація неявної схеми для розв'язку рівняння для об'ємної густини заряджених частинок

Дискретизація вектора нев'язки $\hat{\mathbf{R}}^{n+1,m}$ необхідна для додавання в ліву частину рівняння (3.128). У лівій частині рівняння (3.128) зберігалися лише повторні похідні та $\Delta\xi=\Delta\eta=1$. До того ж у неявній частині будемо використовувати другий порядок визначення відфільтрованої густини заряджених частинок на грані контрольного об'єму. Перегрупуємо вирази (3.182), (3.184) відносно **n**, а (3.178) залишимо без змін

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\left\langle\mathbf{n}\right\rangle\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\Big[\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1}+\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_i\right)\left\langle\mathbf{n}\right\rangle_{i+1/2}\left(\varphi_{i+1}-\varphi_i\right)-\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_i+\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{i-1}\right)\left\langle\mathbf{n}\right\rangle_{i-1/2}\left(\varphi_i-\varphi_{i-1}\right)\Big], \tag{3.231}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\left\langle\mathbf{n}\right\rangle\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\Big[\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{j+1}+\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j\right)\left\langle\mathbf{n}\right\rangle_{j+1/2}\left(\varphi_{j+1}-\varphi_j\right)-\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j+\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{j-1}\right)\left\langle\mathbf{n}\right\rangle_{j-1/2}\left(\varphi_j-\varphi_{j-1}\right)\Big], \tag{3.232}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\breve{\boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\Big[\left(\breve{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1}+\breve{\boldsymbol{\alpha}}_i\right)\mathbf{n}_{i+1}-\left(\breve{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1}+2\breve{\boldsymbol{\alpha}}_i+\breve{\boldsymbol{\alpha}}_{i-1}\right)\mathbf{n}_i+\left(\breve{\boldsymbol{\alpha}}_i+\breve{\boldsymbol{\alpha}}_{i-1}\right)\mathbf{n}_{i-1}\Big], \tag{3.233}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\breve{\boldsymbol{\beta}}\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\Big[\left(\breve{\boldsymbol{\beta}}_{j+1}+\breve{\boldsymbol{\beta}}_j\right)\mathbf{n}_{j+1}-\left(\breve{\boldsymbol{\beta}}_{j+1}+2\breve{\boldsymbol{\beta}}_j+\breve{\boldsymbol{\beta}}_{j-1}\right)\mathbf{n}_j+\left(\breve{\boldsymbol{\beta}}_j+\breve{\boldsymbol{\beta}}_{j-1}\right)\mathbf{n}_{j-1}\Big]. \tag{3.234}$$

Члени $\left(\partial\hat{\mathbf{R}}/\partial\mathbf{n}\right)^{n+1,m}$, що входять у неявну частину, визначаються за допомогою наступних співвідношень

У точці i,j

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_{i,j}}{\partial \mathbf{n}_{i,j}} = \frac{1}{2}\mathbf{diag}\Big\{\Big[\big(\widehat{\alpha}_{i+1}+\widehat{\alpha}_i\big)\mathrm{a}_{i+1/2}\big(\varphi_{i+1}-\varphi_i\big)-\big(\widehat{\alpha}_i+\widehat{\alpha}_{i-1}\big)\mathrm{a}_{i-1/2}\big(\varphi_i-\varphi_{i-1}\big)+$$
$$+\Big(\widehat{\beta}_{j+1}+\widehat{\beta}_j\Big)\mathrm{a}_{j+1/2}\big(\varphi_{j+1}-\varphi_j\big)-\Big(\widehat{\beta}_j+\widehat{\beta}_{j-1}\Big)\mathrm{a}_{j-1/2}\big(\varphi_j-\varphi_{j-1}\big)-, \quad (3.235)$$
$$-\big(\breve{\alpha}_{i+1}+2\breve{\alpha}_i+\breve{\alpha}_{i-1}\big)-\Big(\breve{\beta}_{j+1}+2\breve{\beta}_j+\breve{\beta}_{j-1}\Big)\Big]_k\Big\}$$

У точці $i-1,j$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_{i,j}}{\partial \mathbf{n}_{i-1,j}} = \frac{1}{2}\mathbf{diag}\Big\{\Big[-\big(\widehat{\alpha}_i+\widehat{\alpha}_{i-1}\big)\big(1-\mathrm{a}_{i-1/2}\big)\big(\varphi_i-\varphi_{i-1}\big)+\big(\breve{\alpha}_i+\breve{\alpha}_{i-1}\big)\Big]_k\Big\}, \quad (3.236)$$

У точці $i+1,j$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_{i,j}}{\partial \mathbf{n}_{i+1,j}} = \frac{1}{2}\mathbf{diag}\Big\{\Big[\big(\widehat{\alpha}_{i+1}+\widehat{\alpha}_i\big)\big(1-\mathrm{a}_{i+1/2}\big)\big(\varphi_{i+1}-\varphi_i\big)+\big(\breve{\alpha}_{i+1}+\breve{\alpha}_i\big)\Big]_k\Big\}, \quad (3.237)$$

У точці $i,j-1$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_{i,j}}{\partial \mathbf{n}_{i,j-1}} = \frac{1}{2}\mathbf{diag}\Big\{\Big[-\Big(\widehat{\beta}_j+\widehat{\beta}_{j-1}\Big)\big(1-\mathrm{a}_{j-1/2}\big)\big(\varphi_j-\varphi_{j-1}\big)+\Big(\breve{\beta}_j+\breve{\beta}_{j-1}\Big)\Big]_k\Big\}, \quad (3.238)$$

У точці $i,j+1$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_{i,j}}{\partial \mathbf{n}_{i,j+1}} = \frac{1}{2}\mathbf{diag}\Big\{\Big[\Big(\widehat{\beta}_{j+1}+\widehat{\beta}_j\Big)\big(1-\mathrm{a}_{j+1/2}\big)\big(\varphi_{j+1}-\varphi_j\big)+\Big(\breve{\beta}_{j+1}+\breve{\beta}_j\Big)\Big]_k\Big\}, \quad (3.239)$$

де $k \in 1,\ldots,14$,

$$\begin{cases}\mathrm{a}_{i+1/2}=1, & -\big(\mu_k\nabla\varphi\big)_{i+1/2}\ge 0\\ \mathrm{a}_{i+1/2}=0, & -\big(\mu_k\nabla\varphi\big)_{i+1/2}<0\end{cases}, \quad \begin{cases}\mathrm{a}_{i-1/2}=0, & -\big(\mu_k\nabla\varphi\big)_{i-1/2}\ge 0\\ \mathrm{a}_{i-1/2}=1, & -\big(\mu_k\nabla\varphi\big)_{i-1/2}<0\end{cases}, \quad (3.240)$$

$$\begin{cases}\mathrm{a}_{j+1/2}=1, & -\big(\mu_k\nabla\varphi\big)_{j+1/2}\ge 0\\ \mathrm{a}_{j+1/2}=0, & -\big(\mu_k\nabla\varphi\big)_{j+1/2}<0\end{cases}, \quad \begin{cases}\mathrm{a}_{j-1/2}=0, & -\big(\mu_k\nabla\varphi\big)_{j-1/2}\ge 0\\ \mathrm{a}_{j-1/2}=1, & -\big(\mu_k\nabla\varphi\big)_{j-1/2}<0\end{cases}. \quad (3.241)$$

Доданки $\partial Z/\partial n_{14}$, входять у неявну частину джерельного члена $\left(\partial\hat{\mathbf{S}}/\partial\mathbf{n}\right)^{n+1,m}$, визначаються за допомогою наступних співвідношень

У точці i,j

$$\frac{\partial Z_{i,j}}{\partial n_{i,j}} = \varpi\frac{1}{2\left|\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{e}}\right|}\left[2\big(\Gamma_{i,x}+\Gamma_{j,x}\big)\left(\frac{\partial\Gamma_{i,x}}{\partial n_{i,j}}+\frac{\partial\Gamma_{j,x}}{\partial n_{i,j}}\right)+2\big(\Gamma_{i,y}+\Gamma_{j,y}\big)\left(\frac{\partial\Gamma_{i,y}}{\partial n_{i,j}}+\frac{\partial\Gamma_{j,y}}{\partial n_{i,j}}\right)\right] \quad (3.242)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{i,x}}{\partial n_{i,j}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Gamma_{i+1/2,x}}{\partial n_{i,j}} + \frac{\partial \Gamma_{i-1/2,x}}{\partial n_{i,j}}\right], \tag{3.243}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{i+1/2,x}}{\partial n_{i,j}} = \mathrm{n}_{i+1/2,x}\frac{\partial \Gamma_{i+1/2}}{\partial n_{i,j}}, \tag{3.244}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{i+1/2}}{\partial n_{i,j}} = -\mu_{i+1/2}\mathrm{a}_{i+1/2}\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{\Delta\ell_{i+1/2}} + D_{i+1/2}\frac{1}{\Delta\ell_{i+1/2}}, \tag{3.245}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{i-1/2,x}}{\partial n_{i,j}} = \mathrm{n}_{i-1/2,x}\frac{\partial \Gamma_{i-1/2}}{\partial n_{i,j}}, \tag{3.246}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{i-1/2}}{\partial n_{i,j}} = -\mu_{i-1/2}\mathrm{a}_{i-1/2}\frac{\varphi_{i}-\varphi_{i-1}}{\Delta\ell_{i-1/2}} - D_{i-1/2}\frac{1}{\Delta\ell_{i-1/2}}, \tag{3.247}$$

де

$$\begin{cases}\mathrm{a}_{i+1/2}=1, & -\left(\mu_k\nabla\varphi\right)_{i+1/2}\ge 0\\ \mathrm{a}_{i+1/2}=0, & -\left(\mu_k\nabla\varphi\right)_{i+1/2}< 0\end{cases},\quad \begin{cases}\mathrm{a}_{i-1/2}=0, & -\left(\mu_k\nabla\varphi\right)_{i-1/2}\ge 0\\ \mathrm{a}_{i-1/2}=1, & -\left(\mu_k\nabla\varphi\right)_{i-1/2}< 0\end{cases}, \tag{3.248}$$

У точці $i-1, j$

$$\frac{\partial Z_{i,j}}{\partial n_{i-1,j}} = \varpi\frac{1}{2\left|\mathbf{\Gamma_e}\right|}\left[2\left(\Gamma_{i,x}+\Gamma_{j,x}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_{i,x}}{\partial n_{i-1,j}}+\frac{\partial \Gamma_{j,x}}{\partial n_{i-1,j}}\right)+2\left(\Gamma_{i,y}+\Gamma_{j,y}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_{i,y}}{\partial n_{i-1,j}}+\frac{\partial \Gamma_{j,y}}{\partial n_{i-1,j}}\right)\right], \tag{3.249}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{i,x}}{\partial n_{i-1,j}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Gamma_{i+1/2,x}}{\partial n_{i-1,j}} + \frac{\partial \Gamma_{i-1/2,x}}{\partial n_{i-1,j}}\right], \tag{3.250}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{i-1/2,x}}{\partial n_{i-1,j}} = \mathrm{n}_{i-1/2,x}\frac{\partial \Gamma_{i-1/2}}{\partial n_{i-1,j}}, \tag{3.251}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{i-1/2}}{\partial n_{i-1,j}} = -\mu_{i-1/2}\mathrm{a}_{i-1/2}\frac{\varphi_{i}-\varphi_{i-1}}{\Delta\ell_{i-1/2}} + D_{i-1/2}\frac{1}{\Delta\ell_{i-1/2}}, \tag{3.252}$$

У точці $i+1, j$

$$\frac{\partial Z_{i,j}}{\partial n_{i+1,j}} = \varpi\frac{1}{2\left|\mathbf{\Gamma_e}\right|}\left[2\left(\Gamma_{i,x}+\Gamma_{j,x}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_{i,x}}{\partial n_{i+1,j}}+\frac{\partial \Gamma_{j,x}}{\partial n_{i+1,j}}\right)+2\left(\Gamma_{i,y}+\Gamma_{j,y}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_{i,y}}{\partial n_{i+1,j}}+\frac{\partial \Gamma_{j,y}}{\partial n_{i+1,j}}\right)\right], \tag{3.253}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{i,x}}{\partial n_{i+1,j}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Gamma_{i+1/2,x}}{\partial n_{i+1,j}} + \frac{\partial \Gamma_{i-1/2,x}}{\partial n_{i+1,j}}\right], \tag{3.254}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{i+1/2,x}}{\partial n_{i+1,j}} = \mathrm{n}_{i+1/2,x}\frac{\partial \Gamma_{i+1/2}}{\partial n_{i+1,j}}, \tag{3.255}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{i+1/2}}{\partial n_{i+1,j}} = -\mu_{i+1/2} \mathrm{a}_{i+1/2} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta \ell_{i+1/2}} - D_{i+1/2} \frac{1}{\Delta \ell_{i+1/2}} . \qquad (3.256)$$

Лінеаризацію джерельного члена $\left(\partial \hat{\mathbf{S}} / \partial \mathbf{n}\right)^{n+1,m}$ з урахуванням доданків вигляду $\partial Z / \partial n_{14}$ наведено в додатку А.

Отримана блочно-матрична система алгебраїчних рівнянь вирішувалася методом GMRES з ILU(k) передзумовлюванням [163, 280, 308].

3.9 Рівняння електростатики плазми в криволінійній системі координат

Рівняння електростатики (2.170) та розподілу об'ємної густини заряду в області (2.172) є рівняння Лапласа та Пуассона відповідно. Дані рівняння відносяться до еліптичного типу. У безрозмірній формі рівняння електростатики та розподілу об'ємної густини заряду в області в довільних координатах $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$ мають вигляд

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \eta} - \hat{S} = 0 , \qquad (3.257)$$

де $\hat{S}$ – джерельний член в рівняннях електростатики,

$$\hat{S} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\rho_c}{\lambda_D^2} \end{bmatrix}, \qquad (3.258)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right) \varepsilon_r \phi_\xi \\ \left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right) \varepsilon_r \rho_{c\xi} \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right) \varepsilon_r \phi_\eta \\ \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right) \varepsilon_r \rho_{c\eta} \end{bmatrix}, \qquad (3.259)$$

де J – якобіан перетворення координат; ξ_x, ξ_y, η_x, η_y – метричні коефіцієнти, ϕ – електричний потенціал, ρ_c – густина результуючого заряду, λ_D – дебаєвська довжина, ε_r – відносна діелектрична проникність середовища.

3.10 Дискретний аналог вихідних рівнянь електростатики

3.10.1 Застосування методу контрольних об'ємів до розв'язку рівнянь електростатики

Дискретизацію вихідної системи рівнянь електростатики виконано за допомогою методу контрольного об'єму в криволінійних координатах [303]. Короткий опис даного методу наведено в пункті (3.4.1) для рівнянь гідродинаміки.

Дискретний аналог вихідних рівнянь електростатики та розподілу об'ємної густини заряду при використанні скінченно-об'ємного підходу набуде вигляду

$$\frac{\hat{H}_{i+1/2}-\hat{H}_{i-1/2}}{\Delta\xi}+\frac{\hat{Q}_{j+1/2}-\hat{Q}_{j-1/2}}{\Delta\eta}-\hat{S}=0, \tag{3.260}$$

де i, j – номера вузлів сітки в напрямках $\xi,\ \eta$ відповідно; $i+1/2,\dots,j-1/2$ – напівцілі номери граней контрольних об'ємів.

3.10.2 Апроксимація похідних у рівняннях електростатики

Доданки, що входять в рівняння (3.260), є другими похідними повторного вигляду $\frac{\partial}{\partial\xi}\alpha\frac{\partial f}{\partial\xi}$, де $f\equiv\phi,\ \rho_c$.

При апроксимації в'язких доданків використовуються центрально-різницеві співвідношення другого порядку точності. Для повторних похідних вони мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\alpha\frac{\partial f}{\partial\xi}\approx\frac{\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)_{i+1/2}-\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)_{i-1/2}}{\Delta\xi}, \tag{3.261}$$

де

$$\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)_{i+1/2}\approx\frac{\left(\alpha_{i+1}+\alpha_i\right)}{2}\frac{\left(f_{i+1}-f_i\right)}{\Delta\xi}, \tag{3.262}$$

що відповідає класичній скінченно-різницевій формулі

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\alpha\frac{\partial f}{\partial\xi}\approx\frac{1}{2\Delta\xi^2}\left[\left(\alpha_{i+1}+\alpha_i\right)\left(f_{i+1}-f_i\right)-\left(\alpha_i+\alpha_{i-1}\right)\left(f_i-f_{i-1}\right)\right]. \qquad (3.263)$$

Застосовуючи формулу (3.263) до рівняння (3.260), отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\varepsilon_r\xi_x\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi_x f}{J}\right)=\frac{1}{2\Delta\xi^2}\begin{bmatrix}\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_{i+1}\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i+1}f_{i+1}+\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_i\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i+1}f_{i+1}-\\-\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_{i+1}\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_i f_i-\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_i\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_i f_i-\\-\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_i\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_i f_i-\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_{i-1}\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_i f_i+\\+\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_i\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i-1}f_{i-1}+\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_{i-1}\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i-1}f_{i-1}\end{bmatrix}, \quad (3.264)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\varepsilon_r\xi_y\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi_y f}{J}\right)=\frac{1}{2\Delta\xi^2}\begin{bmatrix}\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_{i+1}\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_{i+1}f_{i+1}+\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_i\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_{i+1}f_{i+1}-\\-\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_{i+1}\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_i f_i-\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_i\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_i f_i-\\-\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_i\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_i f_i-\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_{i-1}\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_i f_i+\\+\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_i\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_{i-1}f_{i-1}+\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_{i-1}\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_{i-1}f_{i-1}\end{bmatrix}, \quad (3.265)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\varepsilon_r\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta_x f}{J}\right)=\frac{1}{2\Delta\eta^2}\begin{bmatrix}\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_{j+1}\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_{j+1}f_{j+1}+\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_j\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_{j+1}f_{j+1}-\\-\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_{j+1}\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_j f_j-\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_j\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_j f_j-\\-\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_j\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_j f_j-\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_{j-1}\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_j f_j+\\+\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_j\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_{j-1}f_{j-1}+\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_{j-1}\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_{j-1}f_{j-1}\end{bmatrix}, \quad (3.266)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\varepsilon_r\eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta_y f}{J}\right)=\frac{1}{2\Delta\eta^2}\begin{bmatrix}\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_{j+1}\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_{j+1}f_{j+1}+\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_j\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_{j+1}f_{j+1}-\\-\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_{j+1}\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_j f_j-\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_j\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_j f_j-\\-\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_j\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_j f_j-\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_{j-1}\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_j f_j+\\+\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_j\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_{j-1}f_{j-1}+\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_{j-1}\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_{j-1}f_{j-1}\end{bmatrix}. \qquad (3.267)$$

У результаті одержуємо рівняння у вигляді

$$A_{i+1}f_{i+1}+B_{i-1}f_{i-1}+C_{i,j}f_{i,j}+D_{j+1}f_{j+1}+E_{j-1}f_{j-1}=0, \qquad (3.268)$$

де

$$A_{i+1}=\frac{1}{2\Delta\xi^2}\left[\left(\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_{i+1}+\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_i\right)\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i+1}+\left(\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_{i+1}+\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_i\right)\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_{i+1}\right], \qquad (3.269)$$

$$B_{i-1}=\frac{1}{2\Delta\xi^2}\left[\left(\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_i+\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_{i-1}\right)\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i-1}+\left(\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_i+\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_{i-1}\right)\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_{i-1}\right], \qquad (3.270)$$

$$C_{i,j}=-\frac{1}{2\Delta\xi^2}\begin{bmatrix}\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_{i+1}\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_i+\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_i\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_i+\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_i\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_i+\left(\varepsilon_r\xi_x\right)_{i-1}\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_i+\\\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_{i+1}\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_i+\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_i\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_i+\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_i\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_i+\left(\varepsilon_r\xi_y\right)_{i-1}\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_i\end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2\Delta\eta^2}\begin{bmatrix}\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_{j+1}\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_j+\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_j\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_j+\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_j\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_j+\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_{j-1}\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_j+\\\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_{j+1}\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_j+\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_j\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_j+\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_j\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_j+\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_{j-1}\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_j\end{bmatrix}, \qquad (3.271)$$

$$-\hat{S}_{i,j}$$

$$D_{j+1}=\frac{1}{2\Delta\eta^2}\left[\left(\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_{j+1}+\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_j\right)\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_{j+1}+\left(\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_{j+1}+\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_j\right)\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_{j+1}\right], \qquad (3.272)$$

$$E_{j-1}=\frac{1}{2\Delta\eta^2}\left[\left(\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_j+\left(\varepsilon_r\eta_x\right)_{j-1}\right)\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_{j-1}+\left(\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_j+\left(\varepsilon_r\eta_y\right)_{j-1}\right)\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_{j-1}\right]. \quad (3.273)$$

Після дискретизації вихідних рівнянь електростатики отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь розв’язувалася за допомогою методу мінімізації узагальненої нев'язки (GMRES) з ILU(k) передзумовлюванням [163, 280, 308].

3.11 Структурний опис розробленого спеціалізованого пакета обчислювальної аеродинаміки, електродинаміки, динаміки та хімічної кінетики плазми

У даній роботі розроблено спеціалізований пакет обчислювальної аеродинаміки та електродинаміки (CFD пакет), який складається з трьох основних елементів: препроцесора, обчислювального ядра (солвера) і постпроцесора (рис. 3.2).

Препроцесор відповідає за формування вихідної геометрії, створення дискретного простору та руху окремих блоків розрахункової сітки.

В *обчислювальному ядрі* відбувається інтегрування рівнянь динаміки в'язкого нестисливого середовища та електродинаміки низькотемпературної плазми, розрахунки параметрів турбулентності та виконання граничних умов.

Постпроцесор відповідає за вбудовану візуалізацію результатів (скалярні та векторні величини), обробку інтегральних характеристик за часом (розрахунки аеродинамічних характеристик) і підготовку даних для зовнішніх візуалізаторів.

Сучасні вимоги, що пред'являються до достовірності одержуваних чисельних результатів і надійності програмно-методичного забезпечення вимагають ретельного тестування та верифікації розробленого комплексу програм. Тестування та верифікацію розробленого спеціалізованого пакета обчислювальної аеродинаміки й електродинаміки проведено на багатьох задачах [16–26, 33, 39–41, 43, 46–115, 117, 118, 120–139, 255, 258–263].

Рисунок 3.2 – Схема спеціалізованого пакета обчислювальної аеродинаміки та електродинаміки

3.11.1 Автоматизований препроцесор для задач обчислювальної аеродинаміки

Виходячи з аналізу переваг і недоліків різних типів сіток (розділ 1) у даній роботі був зроблений вибір на користь структурованих пересічних багатоблочних сіток [269, 274]. Такий підхід дозволив виробити єдину методологію розрахунків течій в'язкого суцільного середовища навколо тіл складної геометричної форми.

Ідею, що лежить в основі багатоблочних пересічних структурованих сіток, представлено на рис. 3.3. Тут показано дві незалежно згенеровані сітки навколо двох твердих тіл. Сітка B, навколо меншого тіла 2, «вкладена» у сітку A, навколо більшого тіла 1. Зовнішня межа сітки, навколо меншого тіла 2, одержує інформацію про поле течії шляхом інтерполяції від відповідних комірок сітки (інтерполяційний шаблон) навколо більшого тіла 1. У той самий час повинен відбуватися й зворотний процес обміну інформацією. Так, сітка A повинна одержувати інформацію про поле течії від сітки B. Для сітки A необхідно визначити штучну границю, тому що деякі точки цієї сітки потрапляють усередину меншого тіла 2, і в такий спосіб лежать поза областю поля течії. Усі точки штучної межі сітки А, які потрапили усередину сітки В, можуть одержувати інформацію про поле течії шляхом інтерполяції від комірок сітки В. У загальному випадку, будь-яка сітка може обмінюватися даними з іншою через зовнішню границю області та точки штучної межі.

Процес інтерполяції показано на рис. 3.4, де розглянуто частину області перетину між двома сітками. Точки розрахункової сітки А, які лежать усередині тіла, вилучаються з розрахункової області. В Chimera технології ці точки називаються вилученими точками. Точки сітки А навколо вилучених називаються крайовими точками. Вони одержують інформацію про поле течії шляхом інтерполяції від комірок сітки В. Крайові точки позначено квадратними символами (рис. 3.4). Відповідно, точки на зовнішній межі сітки В одержують інформацію про поле течії від комірок сітки А. Ці точки позначено кружками (рис. 3.4).

Розмірність сіток (число вузлів у кожному напрямку) явно не зв'язана між собою. Передача інформації з однієї розрахункової області в іншу здійснюється через області їх взаємного перекриття за допомогою інтерполяційних залежностей, що зв'язують між собою залежні змінні у вузлах сусідніх сіток.

З метою збереження третього порядку апроксимації конвективних доданків у рівняннях переносу при використанні одноблочної сітки кожний вузол повинен мати, щонайменше, два сусідні вузли з кожної сторони [269]. Тільки для вузлів, розташованих поблизу поверхні тіла або зовнішньої межі розрахункової області, порядок апроксимації конвективних членів може бути знижений до другого. Виходячи із цих міркувань, мінімальна зона перекриття розрахункових сіток повинна містити не менш чотирьох вузлів [269]. Для визначення залежних змінних на внутрішніх межах розрахункових блоків використовувалась бікубічна інтерполяція [269, 274].

Робота автоматизованого препроцесора складається з 4 основних елементів: генерація пересічних сіток (I) (рис. 3.5), узгодження розрахункових областей (II) (рис. 3.6), оптимізація багатоблочної сітки (III) (рис. 3.7) і рух окремих блоків (IV) (рис. 3.8).

I. Генерація пересічних сіток. Розрахункові сітки типу O, H і C будуються навколо обтічного тіла методом багатьох поверхонь [142] або можуть бути імпортовані з будь-якого генератора структурованих сіток.

II. Узгодження розрахункових областей. Для отримання інтерполяційних даних, необхідних для обчислювального ядра (солвера), автоматизованому препроцесору необхідно виконати три основні операції.

Крок 1. Виріз отворів у сітках. Вузли розрахункових сіток, що потрапили усередину тіла, вилучаються з обчислювальної області. Для визначення крайових точок і точок зовнішньої межі необхідно мати два шари інтерполяційних точок. Кількість шарів інтерполяційних точок називається периферійним рівнем. Наприклад, на рис. 3.4 наведено два периферійні рівні. Подвійний периферійний рівень має певні переваги для обчислювального ядра та забезпечує більш високу точність розв'язку.

Крок 2. Ідентифікація інтерполяційних точок. Розрізняють два типи інтерполяційних точок: крайові точки, сусідні з вилученими, і точки зовнішньої межі (рис. 3.9). Знаходження крайових точок не представляє особливих складностей, тому що вони є сусідніми з вилученими точками. Точки зовнішньої межі – це точки, які лежать на межі обчислювальної сітки та для яких не ставляться граничні умови солвера.

Процес оптимізації багатоблочних пересічних структурованих сіток в автоматизованому препроцесорі починається з ідентифікації точок, які потрапили усередину обтічного тіла та точок зовнішньої межі. При оптимізації області перетинання велика кількість внутрішніх точок можуть бути ідентифіковані як інтерполяційні граничні точки. Таким чином, процес інтерполяції в препроцесорі починається з пошуку всіх можливих донорних комірок розрахункових сіток для кожної точки сітки. Даний процес розпадається на підпроцеси, у кожному з яких беруть участь пари сіток, одна – як донорна, інша – як приймаюча. Зауважимо, що для будь-яких двох сіток A та

В виникає два подпроцесса: перший із сіткою А в якості донорної і В як приймаючої; і другий, коли В – донорна, а сітка А – як приймаюча. Таким чином, виникає $N(N-1)$ можливих пар, що донорно-приймаючих сіток, де N – число обчислювальних мереж. Число пар сіток зростає пропорційно N^2, тому для збільшення обчислювальної ефективності інтерполяційного процесу в автоматизованому препроцесорі реалізований наступний алгоритм пошуку.

Інтерполяційний підпроцес для пари сіток починається з визначення можливого перетинання двох сіток. Для цього навколо кожної сітки будується прямокутник таким чином, щоб усі вузли розрахункової сітки перебували усередині даної області. Якщо прямокутники, описані навколо двох різних сіток, не перетинаються, значить і вузли розрахункових сіток не беруть участі в інтерполяції. Якщо прямокутники перетинаються, то виконується наступний цикл підпроцесу для кожного вузла приймаючої сітки. Усередині цього циклу перевіряється, чи знаходиться вузол даної сітки всередині прямокутника донорної сітки, і на закінчення виконується пошук комірки донорної сітки, необхідної для інтерполяції. Після того як для кожного вузла приймаючої сітки знайдено донорну комірку, відбувається розрахунок інтерполяційних коефіцієнтів.

Крок 3. Визначення донорних комірок, які використовуються для розрахунку значень параметрів поля течії в крайових і граничних точках області, знайдених у кроці 2. Якщо для інтерпольованої точки не знайдено відповідну донорну комірку, то така точка називається ізольованою.

Для виконання перших двох кроків необхідна повна інформація із граничних умов для кожної сітки. В якості вхідних параметрів автоматизований препроцесор використовує дискретну геометрію обтічного тіла, розрахункові сітки, а також граничні умови.

III. Оптимізація багатоблочної сітки. Заключним кроком в отриманні якісного розв'язку для пересічних областей повинна бути оптимізація багатоблочних структурованих сіток. В областях перетинань окремих блоків залишаються лише комірки з мінімальною площею.

Розроблений в автоматизованому препроцесорі алгоритм оптимізації пересічних областей має високу надійність і не вимагає людської участі. Ця процедура виконується після автоматичного вирізу отворів у сітках, і коли стають відомі всі донорні / приймаючі вузли розрахункових сіток. Метод оптимізації пересічних областей засновано на тому, що вузли докладної сітки залишаються як частина обчислювальної області, у той час як для вузлів грубої сітки застосовується інтерполяція з вузлів докладної сітки.

Як приклад розглянемо оптимізацію зони перетинання двох одномірних сіток A и B. Згущення вузлів сітки A виконано до лівого краю, а сітки B – до правого.

Першим кроком є інтерполяція всіх точок сітки A на сітку B і навпаки (рис. 3.9 а). Потім в області перетинання двох сіток виділяються комірки з більшою площею (рис. 3.9 б). Стрілками показано напрямок передачі даних параметрів течії від комірок із меншою площею до комірок із більшою. Напрямок стрілки вказує на інтерпольований вузол, а її кінець на донорну комірку.

На третьому кроці відбувається перевірка, чи є інтерпольовані вузли, ідентифіковані на першому кроці, частиною донорних комірок. Якщо є, то даний вузол вилучається зі списку інтерпольованих вузлів. Результат даного процесу для сіток A і B показано на рис. 3.9 в.

Для завершення процесу оптимізації пересічних сіток, необхідно визначити яка з донорних комірок (у випадку складного перетинання – трьох і більш сіток) буде передавати інформацію на інтерпольований вузол. Критерієм вибору служить мінімальна площа комірки. Використовуючи дану процедуру, визначаємо інтерпольовані вузли та вузли поля течії (рис. 3.9 г).

IV. Рух окремих блоків. При розв'язку задачі з рухомими поверхнями відбувається зміщення окремих блоків сітки, а потім виконується крок 2 і крок 3 роботи препроцесора. Як приклад розглянуто задачу про розкриття багатоелементного профілю (рис. 3.8).

Представлено результати двох обчислювальних експериментів з генерації багатоблочних пересічних структурованих сіток навколо трьохелементного профілю 30P30N (рис. 3.7), а також вертикально-осьової вітроенергетичної установки з роторами Савоніуса та Дар'є (рис. 3.10).

Приклади двох пересічних сіток і результат оптимізації області перетинання навколо передкрилка та закрилка трьохелементного профілю 30P30N наведено на рис. 3.7, а також поблизу лопаті ротора Дар'є на рис. 3.10 в. Як видно, область перетину знаходиться вдалині від області істотного згущення вузлів у районі примежових шарів.

Результат оптимізації області перетинання для випадку трьох сіток представлено на рис. 3.10 б. У цьому випадку оптимізація в «ручному» режимі буде надзвичайно складною та практично неможливою в тривимірному випадку.

На базі згенерованих багатоблочних пересічних структурованих сіток проведено чисельне моделювання турбулентного обтікання вертикально-осьової вітроенергетичної установки з роторами Савоніуса та Дар'є (рис. 3.11 а), а також трьохелементного профілю 30P30N у злітно-посадковій конфігурації (рис. 3.11 б).

Багатоблочні обчислювальні технології дозволяють проводити чисельне моделювання стаціонарних і нестаціонарних, ламінарних і турбулентних течій нестисливої рідини навколо рухомих і нерухомих тіл складної геометрії.

3.11.2 Обчислювальне ядро для розв'язку зв'язаних задач

Чисельний алгоритм базується на основі рівнянь Нав'є-Стокса, включаючи кілька диференціальних моделей турбулентності (SA [295], SARC [289, 297], SALSA [279]) для розрахунку стаціонарних і нестаціонарних ламінарних і турбулентних течій, у який інтегровано блок, що розв'язує рівняння електродинаміки плазми. Моделювання ламінарно-турбулентного переходу проводилося на основі диференціальної γ-Re_θ моделі [225, 241]. Узгодження полів тиску та швидкості в рівняннях Нав'є-Стокса здійснювалося за допомогою методу штучної стисливості, модифікованого для розрахунку нестаціонарних задач [272].

Система вихідних рівнянь інтегрувалася чисельно з використанням методу контрольного об'єму. Для конвективних потоків використовувалася протипоточна апроксимація Rogers-Kwak третього порядку точності [271] , що заснована на схемі Roe. У моделях турбулентності для апроксимації конвективних доданків застосовувалася схема TVD з обмежувачем потоків ISNAS третього порядку [326, 327]. Похідні у в'язких членах апроксимувалися центрально-різницевою схемою другого порядку.

Алгоритм розв'язку рівнянь базується на тришаровій неявній схемі з підітераціями за псевдочасом другого порядку точності за фізичним часом. Отримана блочно-матрична система лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язувалася методом мінімізації узагальненої нев'язки (GMRES) з ILU(k) передзумовлюванням [163, 280, 308].

Блок, що розв'язує рівняння електродинаміки, динаміки та хімічної кінетики плазми, інтегровано в обчислювальне ядро розробленого спеціалізованого пакета. Для моделювання діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатору додатково розв'язувалися рівняння електродинаміки та динаміки плазми з урахуванням хімічної кінетики. Вплив діелектричного бар'єрного розряду на навколишнє середовище здійснювалося через силу Лоренца, що входить як джерельний член у рівняння Нав'є-Стокса. Розроблений алгоритм має можливість розпаралелювання на багатоядерних системах.

3.11.3 Постпроцесор

Постпроцесорна обробка даних результатів чисельного моделювання є невід'ємною частиною CFD досліджень. Традиційно на постпроцесор покладається підготовка даних для візуалізації, аналізу та осмислення отриманих результатів. Програмне забезпечення постпроцесора тісно взаємодіє із препроцесором і обчислювальним ядром пакета на всіх етапах обчислювальних експериментів – від налагодження окремих блоків до підготовки та проведення параметричних досліджень.

На етапах налагодження здійснюється контроль процесів збіжності ітераційних процесів на кожному кроці інтегрування за часом, а також частотний аналіз можливих осциляцій чисельного розв'язку. Функції контролю збіжності найчастіше залишаються задіяні в ході чисельного моделювання конкретних задач із метою підтвердження достовірності отриманих результатів.

При підготовці обчислювальних експериментів постпроцесор взаємодіє з препроцесором, насамперед в аналізі якості розрахункової сітки та її окремих блоків, а також при формуванні початкового наближення поля течії.

У ході розв'язку нестаціонарних задач механіки рідини, газу та плазми може виконуватися поточна просторова візуалізація всіх або деяких шуканих величин. У розробленому спеціалізованому пакеті формуються файли для графічної обробки добре відомими візуалізаторами, такими як Paraview, Tecplot 360, Visit. Особливу увагу було приділено підготовці даних для анімаційних відеороликів, що демонструють нестаціонарний характер досліджуваної задачі. Як альтернатива зовнішньому програмному забезпеченню може застосовуватися вбудований візуалізатор на основі пакета CDFvisor, який розроблено в Інституті транспортних систем і технологій НАН України.

У постпроцесорі проводиться розрахунок розподілів параметрів на поверхні обтічного тіла − коефіцієнтів тиску, тертя, концентрації частинок плазми та ін. Тут само визначаються інтегральні характеристики зовнішніх сил, що діють на тверде тіло, і здійснюється висновок цих даних для аналізу нестаціонарних параметрів розв'язуваної задачі.

При завершенні сеансу розрахунку у постпроцесорі проводиться збереження стану задачі на жорсткому диску комп'ютера. При необхідності можливий розрахунок осереднених за часом полів течії або окремих нестаціонарних характеристик.

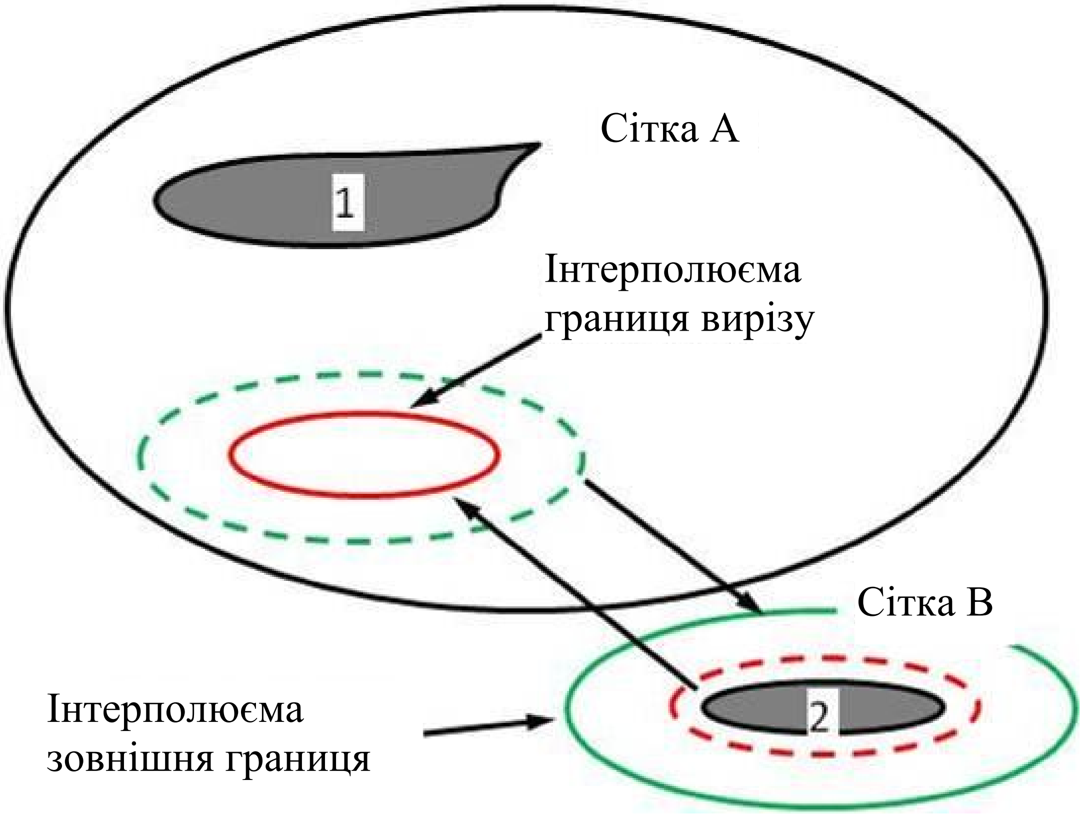


Рисунок 3.3 – Загальна концепція пересічних сіток

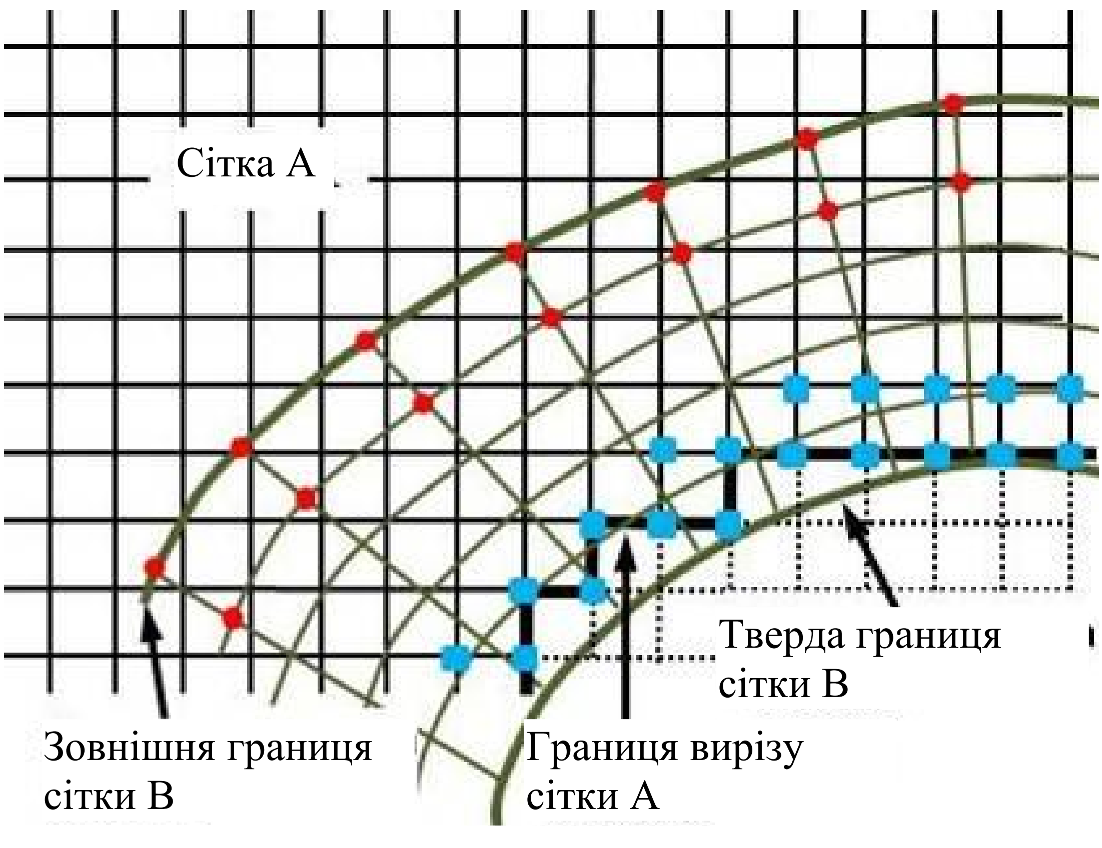


Рисунок 3.4 – Детальний вид області перетину [275]

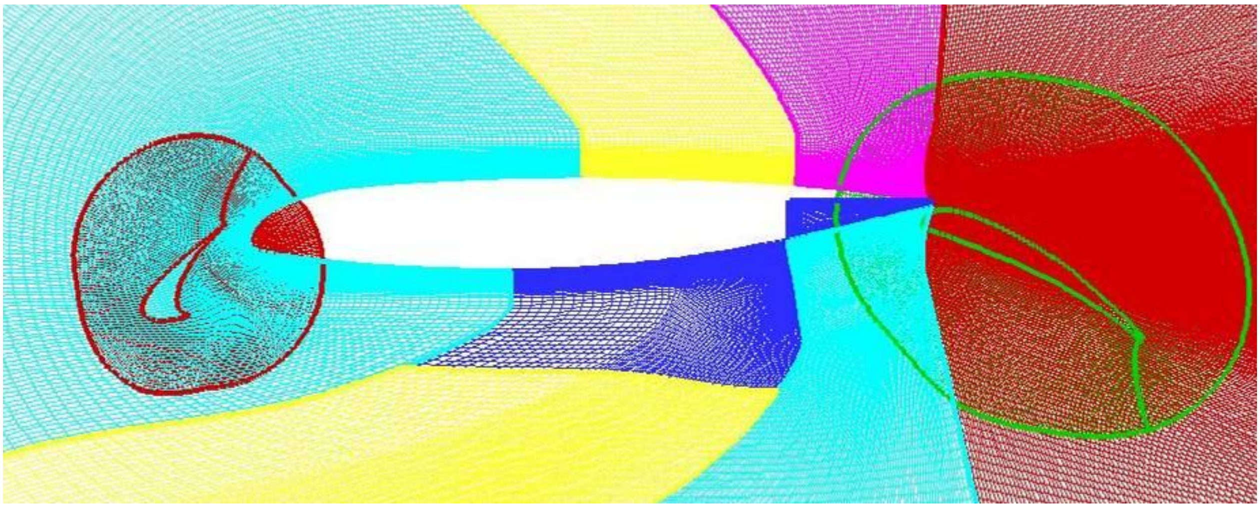


Рисунок 3.5 – Генерація пересічних сіток

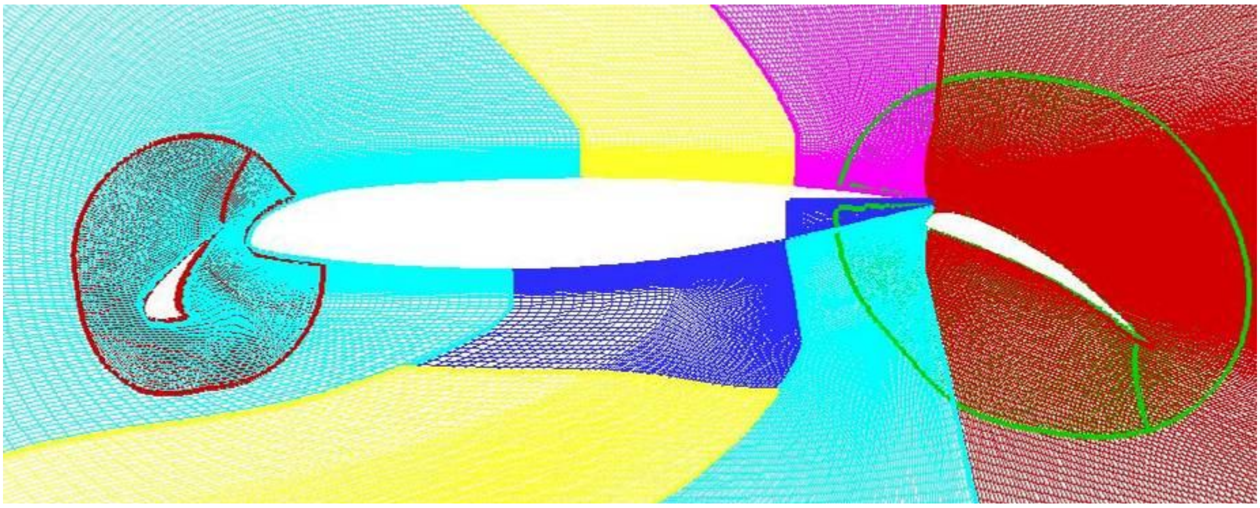


Рисунок 3.6 – Узгодження розрахункових областей

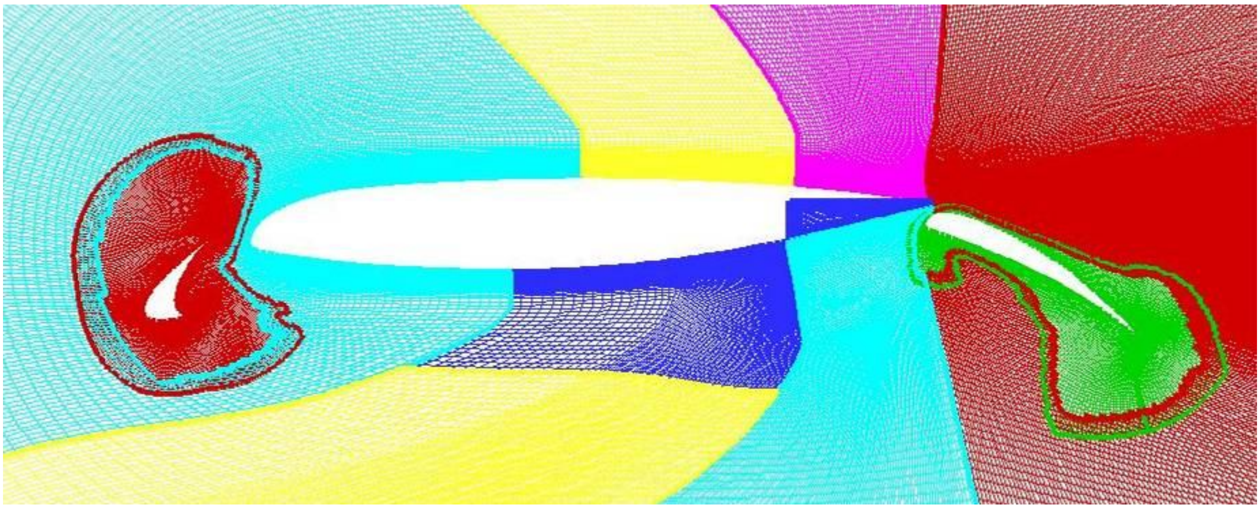


Рисунок 3.7 – Оптимізація багатоблокової сітки

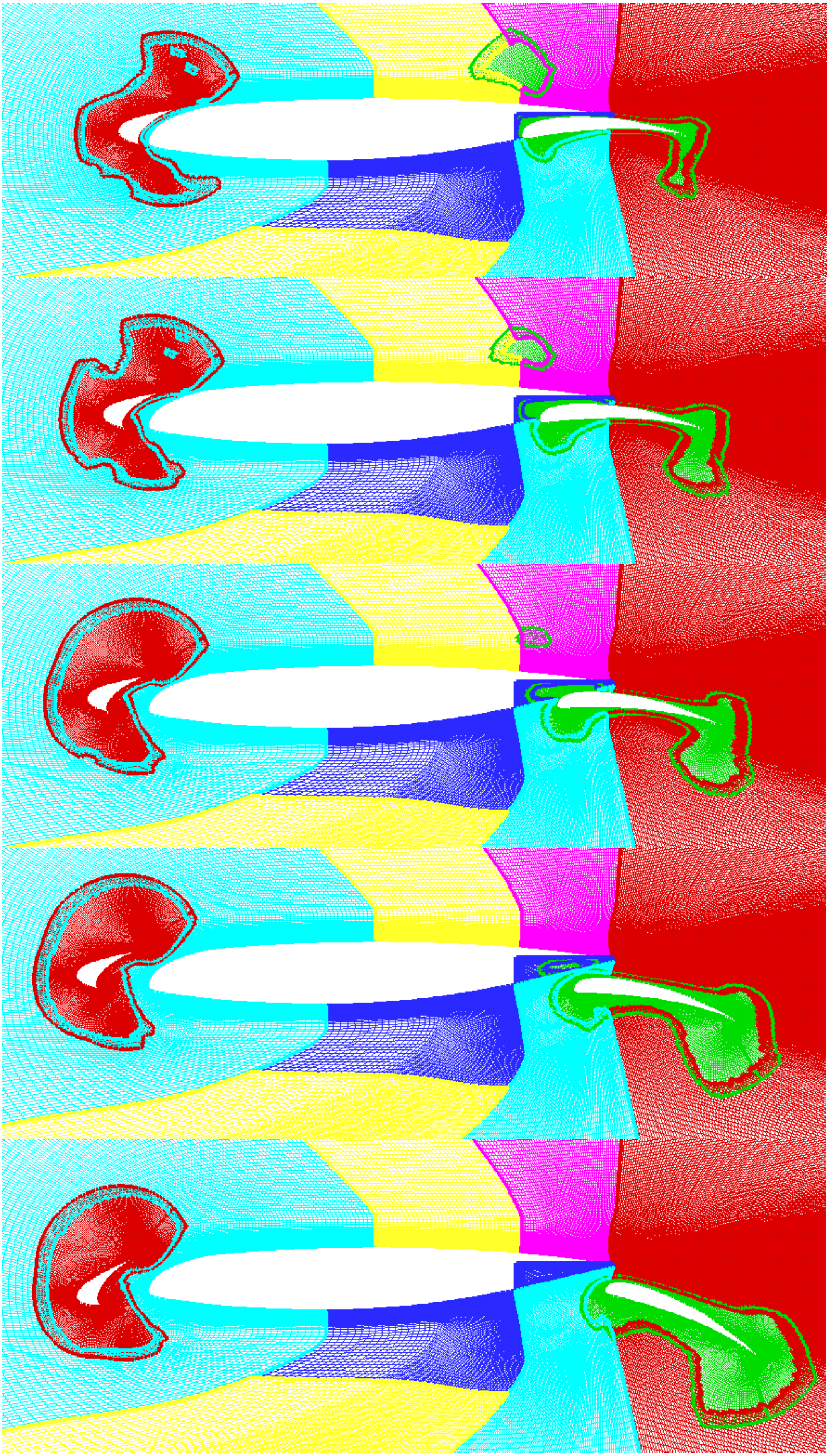
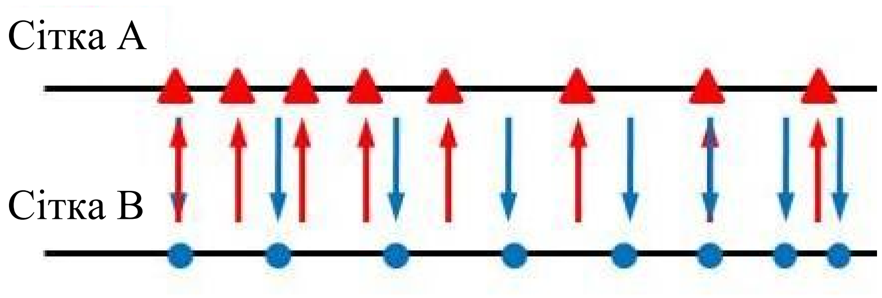
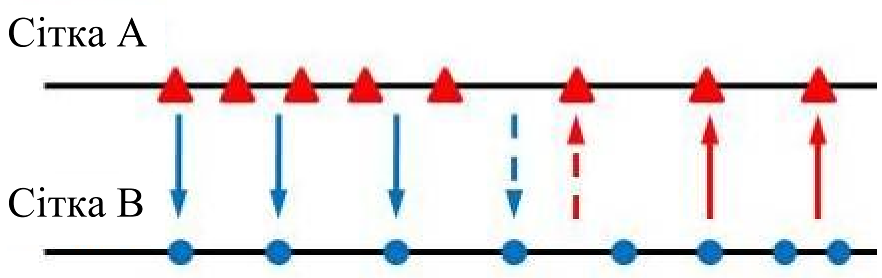


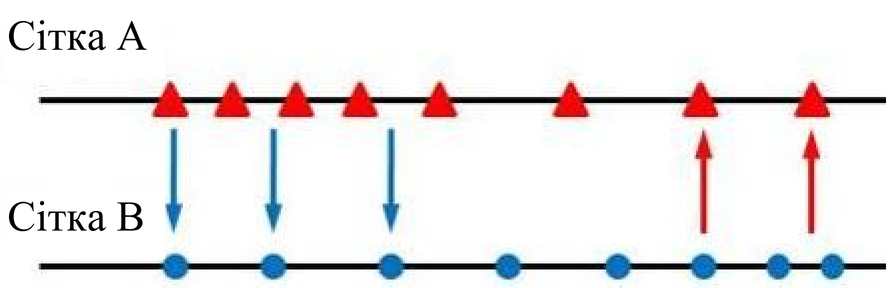
Рисунок 3.8 – Рух окремих блоків



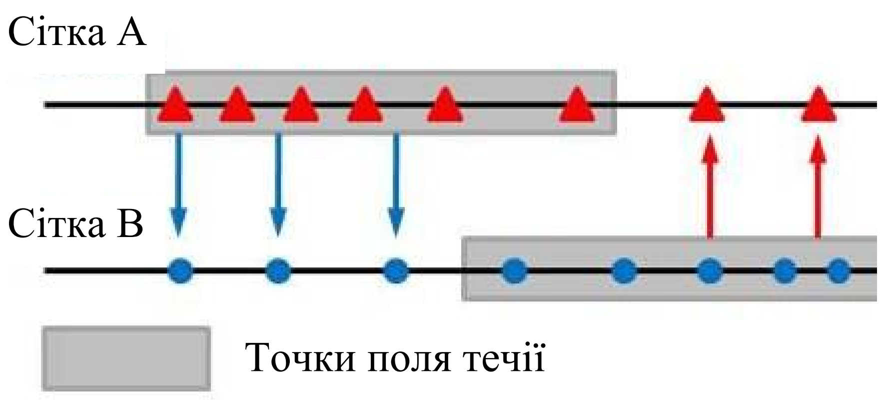
а)



б)

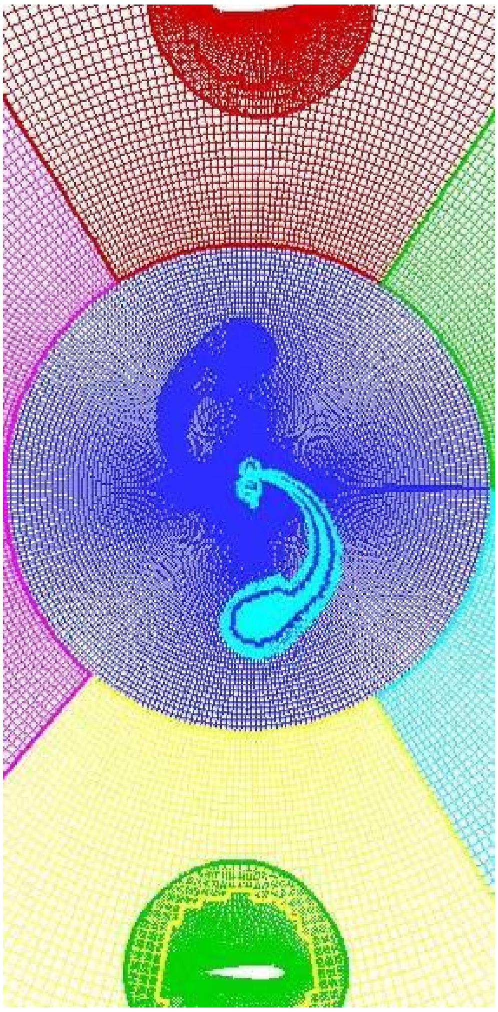


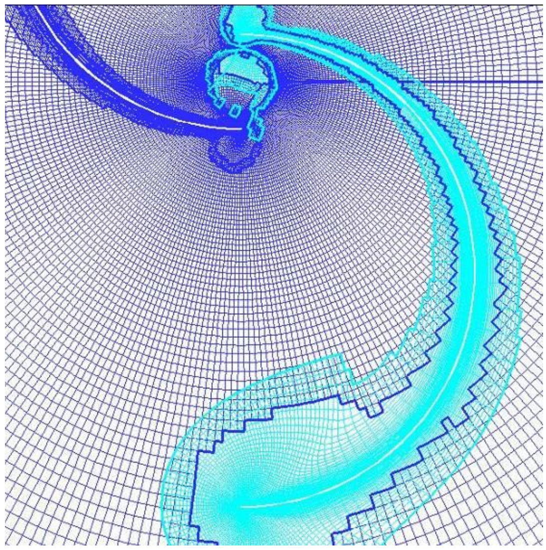
в)



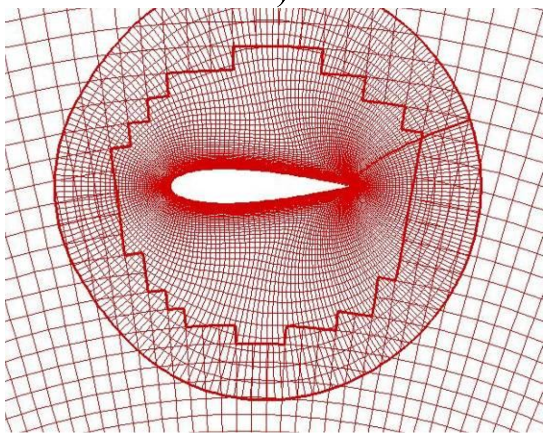
г)

Рисунок 3.9 – Оптимізація багатоблочних структурованих сіток [275]: а – інтерполяція всіх точок сіток А і В; б – виділення осередків з більшою площею; в – видалення інтерпольованої точок, які є частиною донорних комірок; г – виділення вузлів поля течії



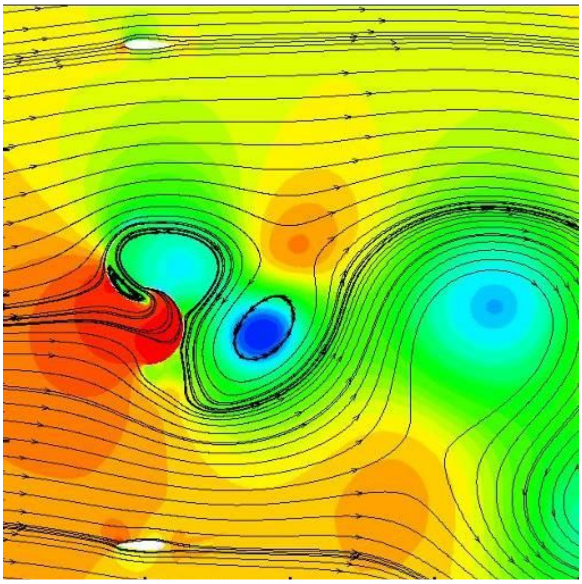


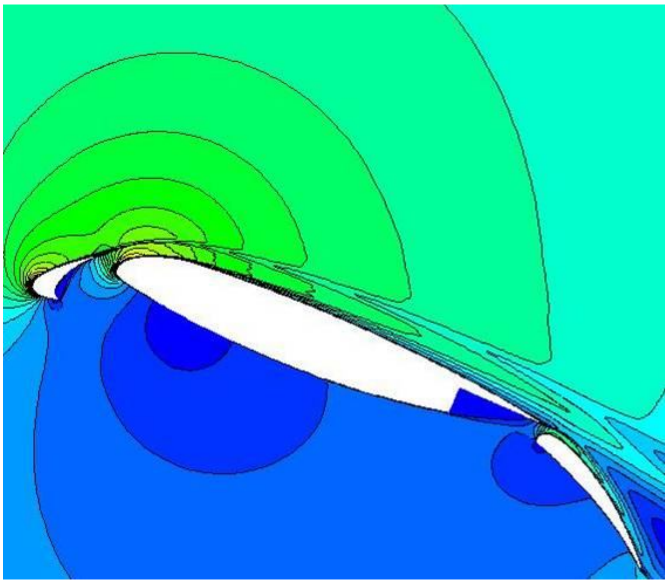
б)



а) в)

Рисунок 3.10 – Багатоблочна пересічна структурована сітка навколо вертикально-осьової вітроенергетичної установки (а), а також поблизу лопаті роторів Савоніуса (б) і Дар'є (в)





а) б)

Рисунок 3.11 – Турбулентне обтікання ротора вертикально-осьової вітроенергетичної установки (а) і трьохелементного профілю (б)

3.12 Висновки до розділу 3

1. Розроблено спеціалізований пакет обчислювальної аеродинаміки на основі рівнянь Нав'є-Стокса, замкнутих диференціальними моделями турбулентності, для розрахунку стаціонарних і нестаціонарних ламінарних, перехідних і турбулентних течій, в який інтегровано блок, що розв’язує рівняння електродинаміки.

2. Для моделювання діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора додатково розв’язувалися рівняння електродинаміки, динаміки плазми та хімічної кінетики. Вплив діелектричного бар'єрного розряду на навколишнє середовище здійснювалося через силу Лоренца, що входить як джерельний член у рівняння Нав'є-Стокса.

3. Розроблено автоматизований препроцесор для розв'язку задач обчислювальної аеродинаміки на базі багатоблочних пересічних структурованих сіток. Реалізовано алгоритм з оптимізації структурованих багатоблочних сіток на випадок їх довільного перетину.

4. Запропоновано модифікацію схеми Rogers-Kwak першого та третього порядку точності для конвективних членів. Основна відмінність модифікованої схеми Rogers-Kwak від класичної полягає в тому, що потоки розраховуються з використанням метричних коефіцієнтів, віднесених на якобіан перетворення координат, на грані контрольного об'єму за значеннями гідродинамічних параметрів в точках.

5. Побудовано неявний алгоритм для модифікованої схеми Rogers-Kwak першого та третього порядку точності. У неявній схемі присутність доданків, пов'язаних із центральною точкою, призводить до посилення діагонального переважання.

6. Чисельний метод розв'язку осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса узагальнено на випадок багатоблочних різномасштабних пересічних структурованих сіток.

7. За допомогою методу контрольного об'єму розроблено чисельний алгоритм розв'язку рівнянь електродинаміки плазми разом з рівняннями динаміки в'язкої нестисливої рідини, включаючи турбулентність, у

криволінійній системі координат на рухомих сітках для моделювання діелектричного бар'єрного розряду.

8. Розроблено чисельний алгоритм розв'язку рівнянь електродинаміки разом з рівняннями динаміки в'язкої нестисливої рідини в криволінійній системі координат.

9. Запропоновано нову взаємно узгоджену систему вихідних рівнянь, що складається з рівняння для електричного потенціалу та рівнянь динаміки частинок плазми, яку записано в довільній криволінійній системі координат. Основною особливістю розробленої чисельно-аналітичної моделі є використання раціональної кількості рівнянь для опису всіх основних нестаціонарних параметрів діелектричного бар'єрного розряду в повітрі. Обрані 14 видів частинок забезпечують високу точність математичного моделювання основних плазмохімічних реакцій, включаючи як поверхневі процеси, так і швидкоплинні явища в просторі (розвиток стримера та електронних лавин).

10. Вводиться несиметрична скінченно-об'ємна апроксимація других похідних для електричного потенціалу в рівняннях для динаміки заряджених частинок плазми з метою збереження фізичного змісту адвекції. Апроксимація проводиться з урахуванням несиметрично «відфільтрованого» значення густини заряджених частинок плазми. Формальна математична апроксимація оператора за допомогою симетричних скінченно-різницевих співвідношень (як для дифузійних доданків) призводить до втрати фізичного змісту даного оператора як адвекції заряджених частинок.

11. Розроблено чисельно-аналітичну модифікацію рівняння Пуассона для електричного поля в криволінійній системі координат для безпосереднього виділення операторів електричного потенціалу, замість опосередкованого впливу через значення густини заряджених частинок в джерельному доданку, з використанням протипоточної апроксимації густини заряджених частинок у других похідних для електричного потенціалу.

12. Реалізовано єдиний неявний чисельний алгоритм для ефективного розв'язку неоднорідної системи вихідних рівнянь.

РОЗДІЛ 4
МОДЕЛЮВАННЯ ЛАМІНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДУ В ЗАДАЧАХ ЗОВНІШНЬОЇ АЕРОДИНАМІКИ

Зона ламінарно-турбулентного переходу може займати значну частину течії, і, як наслідок, впливати на структуру течії та аеродинамічні характеристики.

У даному розділі проведено вивчення фізичних особливостей ламінарно-турбулентного переходу при обтіканні плоскої пластини, кругового циліндра та профілю крила в широкому діапазоні кутів атаки та чисел Рейнольдса на основі нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини з використанням різних моделей турбулентності та γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу.

4.1 Чисельне моделювання ламінарно-турбулентного переходу на плоскій пластині

Експериментальні дослідження ламінарно-турбулентного переходу на плоскій пластині при різних параметрах потоку, що набігає, проведено фірмою Rolls-Royce на початку 1990-х років. Потім ці результати було включено в базу даних Європейського співтовариства з досліджень течій, турбулентності та горіння (European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion – ERCOFTAC) і відомі за назвою T3 серія експериментів [283]. Отримані дані використовують в якості еталонних значень для моделей ламінарно-турбулентного переходу. Вихідні дані для цих експериментів наведено в таблиці 4.1.

У загальному випадку схема розвитку примежового шару на плоскій пластині наведено на рис. 4.1. При невеликих числах Рейнольдса реалізується ламінарний режим обтікання пластини (стаціонарна течія) при якому реалізується шарувата течія без збурень. Ламінарний примежовий шар характеризується низькими значеннями теплопередачі та тертя на стінці. При досягненні деякого критичного числа Рейнольдса в примежовому шарі починають зростати збурювання. Збурювання усередині або зовні ламінарного примежового шару викликають нестійкість течії. Дана область відповідає ламінарно-турбулентному переходу (перехідна область примежового шару). Невеликі збурювання зростають і в остаточному підсумку стають домінуючими. Униз за потоком відбувається втрата стійкості ламінарної течії, і примежовий шар стає повністю турбулентним. Ламінарний примежовий шар на плоскій пластині переходить у турбулентний стан при числі Рейнольдса порядку $10^4 \div 10^6$ залежно від рівня турбулентності потоку, що набігає.

Інтенсивність турбулентності в потоці, що набігає, в експерименті задавалася за допомогою турбулізуючої решітки. Для першого випадку T3A- реалізується примежовий режим ламінарно-турбулентного переходу, оскільки рівень турбулентності нижче 1%. У другому T3A і третьому T3B випадку реалізується вимушений (байпасний) перехід в силу високого рівня турбулентності потоку, що набігає.

Таблиця 4.1 – Параметри експерименту на вході в робочу частину аеродинамічної труби [283]

Індекс експерименту	Швидкість зовнішнього потоку, м/с	Інтенсивність турбулентності, %	Густина повітря, кг/м^3	Динамічний коефіцієнт молекулярної в'язкості, Па·с
T3A-	19.8	0.874	1.2	$1.8 \cdot 10^{-5}$
T3A	5.4	3.3	1.2	$1.8 \cdot 10^{-5}$
T3B	9.4	6.5	1.2	$1.8 \cdot 10^{-5}$

У даній роботі розглядаються три режими обтікання пластини T3A-, T3A, T3B при нульовому градієнті тиску та різному рівні інтенсивності турбулентності в потоці, що набігає.

Розрахункова область представляє собою прямокутню область. Зовнішня межа знаходилася на відстані двадцяти безрозмірних одиниць від краю пластини. Розрахункова сітка містила 400×150 вузлів зі згущенням до поверхні та краю пластини. Максимальне значення $y^+ < 0.1$.

У якості граничних умов на вхідній межі задавався однорідний потік, з параметрами відповідними до експерименту. На вихідній межі ставилася умова Неймана, на поверхні пластини – умова прилипання. В області перед передньою крайкою пластини до вхідної межі задавалася умова симетрії.

Представлено розподіли коефіцієнтів тертя по поверхні плоскої пластини для різних режимів обтікання (рис. 4.2–4.4), які отримано за допомогою моделей турбулентності SA і SALSA і порівнюються з експериментальними даними [283] та результатами чисельного моделювання [225] з використанням моделі турбулентності SST Menter. Зі збільшенням рівня турбулентності в потоці, що набігає, розташування точки переходу зміщується до менших значень числа Рейнольдса.

Коефіцієнт тертя C_f є важливою характеристикою, яка дає інформацію про те, у якому режимі ламінарному, турбулентному або перехідному перебуває примежовий шар. Як правило, для задачі про обтікання плоскої пластини коефіцієнт тертя є функцією локального числа Рейнольдса, яке визначається за формулою

$$\mathrm{Re}_x = \frac{\rho_\infty U_\infty x}{\mu_\infty}, \tag{4.1}$$

де x – відстань від передньої крайки плоскої пластини.

Порівняння результатів показало, що розташування точки початку ламінарно-турбулентного переходу, яке отримано з використанням різних моделей турбулентності, відрізняються між собою. Так для режиму T3A- (природний перехід) модель турбулентності SST показує більш якісні результати при моделюванні ламінарно-турбулентного переходу (рис. 4.2). Розташування точки переходу, що отримано з використанням моделі турбулентності SA, дещо завищено, що пов'язано зі швидким зростанням турбулентності, а за моделлю SALSA дещо занижено.

Такі ж відмінності в поведінці моделей турбулентності спостерігаються та для режиму T3A (рис. 4.3), який відповідає байпасному переходу. Майже стрибкоподібний характер ламінарно-турбулентного переходу, який отримано при використанні моделей турбулентності SA і SALSA, частково пов'язаний з неточністю формул для визначення кінетичної енергії турбулентності та питомої швидкості дисипації, а також з структурними особливостями та обмеженнями цих моделей. Модель турбулентності SST більш якісно відтворює характер ламінарно-турбулентного переходу для даного режиму.

Для режиму T3B (рис. 4.4) модель турбулентності SST призводить до більш раннього переходу поблизу передньої крайки плоскої пластини. У той самий час модель турбулентності SA показує більш якісні результати моделювання ламінарно-турбулентного переходу, ніж моделі SST і SALSA.

При низьких рівнях турбулентності потоку, що набігає, моделі турбулентності SA і SALSA гірше описують ламінарно-турбулентний перехід, ніж модель SST. Однією з причин є те, що дані моделі не здатні передбачити виродження однорідної ізотропної турбулентності (вільної турбулентності) вниз за потоком. До того ж γ-Re_θ модель ламінарно-турбулентного переходу спочатку розроблялася під модель турбулентності SST Menter. У той самий час при високих рівнях турбулентності потоку, що набігає, модель турбулентності SA дозволяє більш якісно описати характер ламінарно-турбулентного переходу. Модель турбулентності SALSA у всіх трьох випадках показує занижені значення коефіцієнта тертя в області переходу.

У якості висновку можна сказати, що обидві моделі турбулентності SA і SST здатні відтворювати природній і вимушений (байпасний) перехід при різних рівнях інтенсивності турбулентності у вільному потоці. Однак γ-Re_θ модель ламінарно-турбулентного переходу на основі SA зазвичай передбачає більш високу швидкість росту турбулентності або більш коротку область переходу, ніж модель переходу на основі SST.

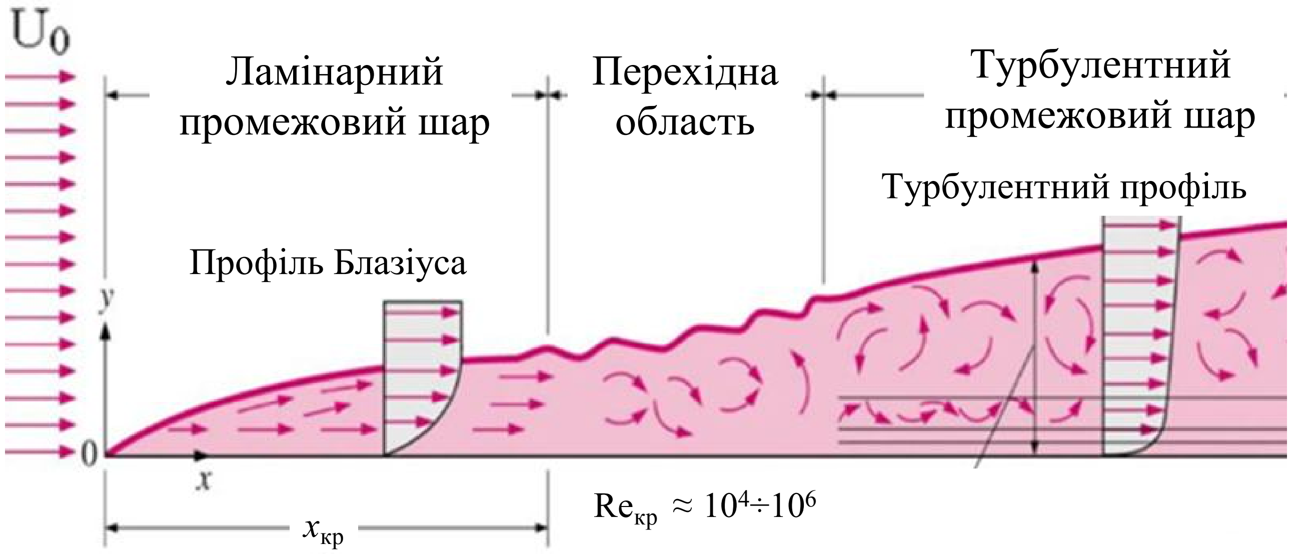


Рисунок 4.1 – Схема обтікання плоскої пластини [218]

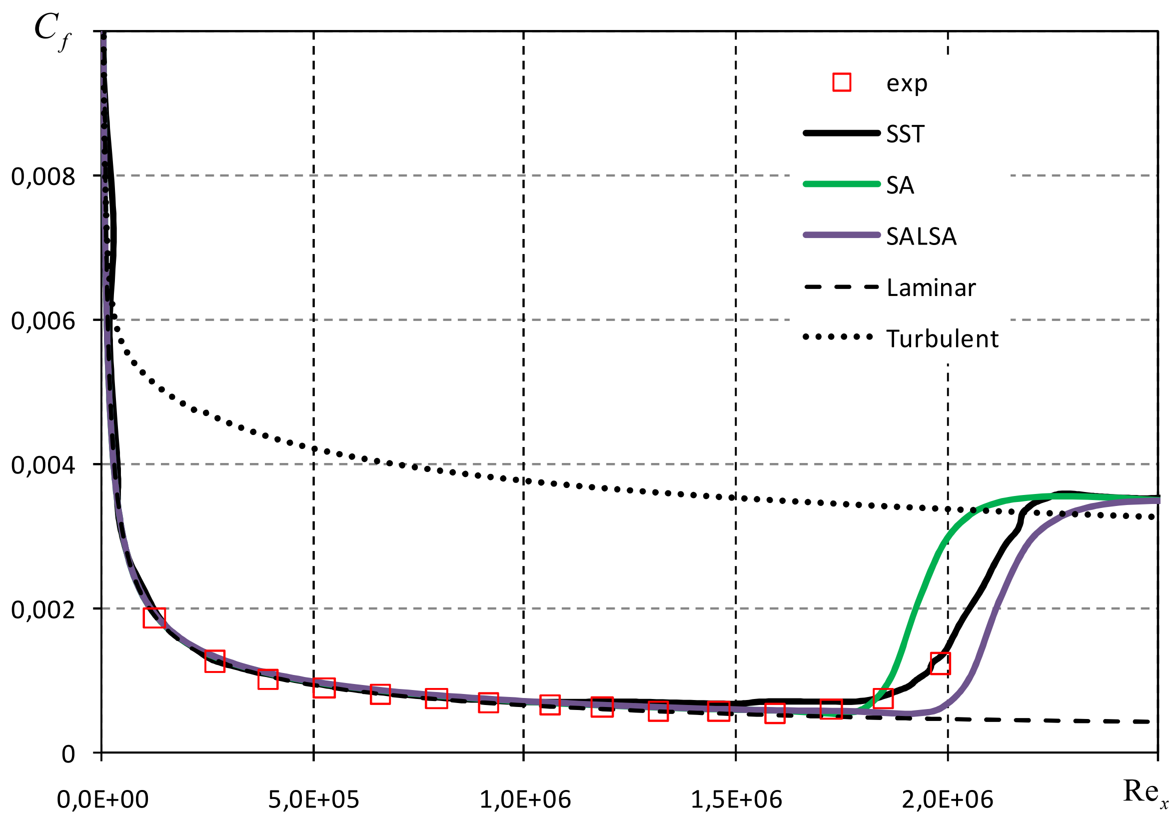


Рисунок 4.2 – Розподіл коефіцієнтів тертя по поверхні пластини для режиму обтікання T3A-: exp [283], SST [225], SA , SALSA, Laminar, Turbulent

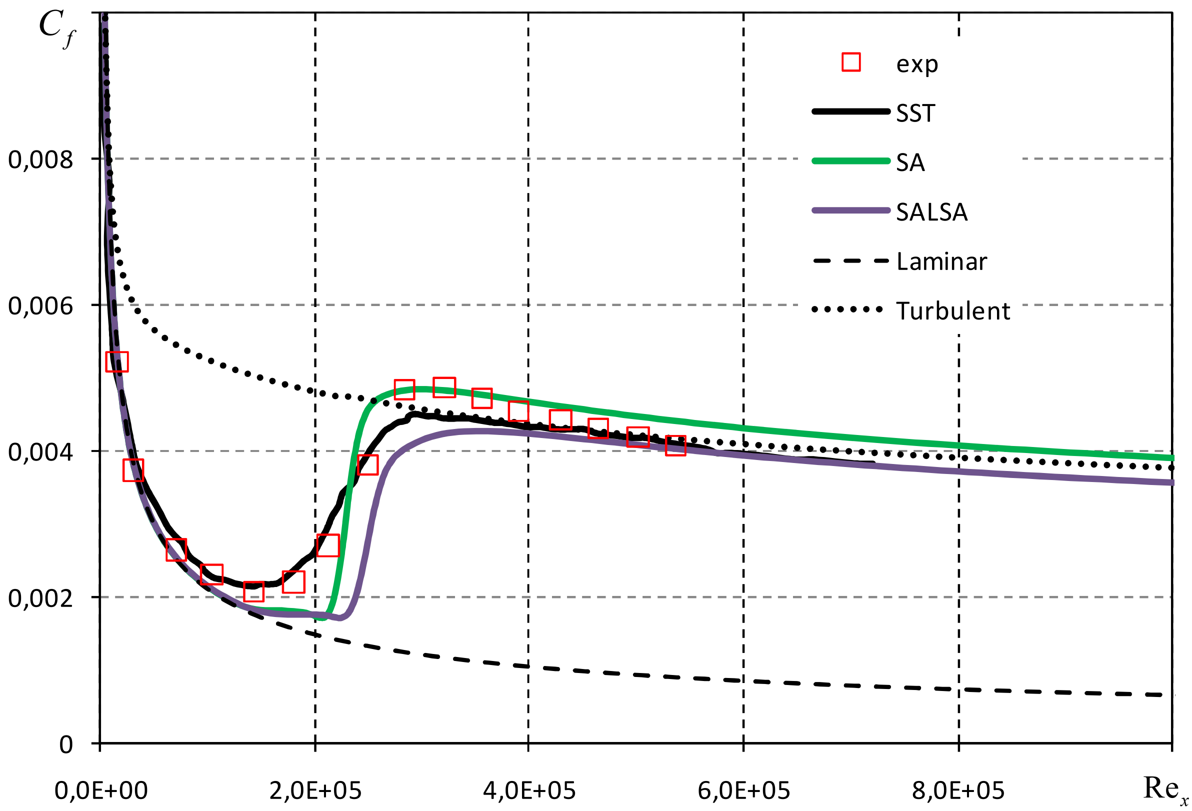


Рисунок 4.3 – Розподіл коефіцієнтів тертя по поверхні пластини для режиму обтікання T3A: exp [283], SST [225], SA , SALSA, Laminar, Turbulent

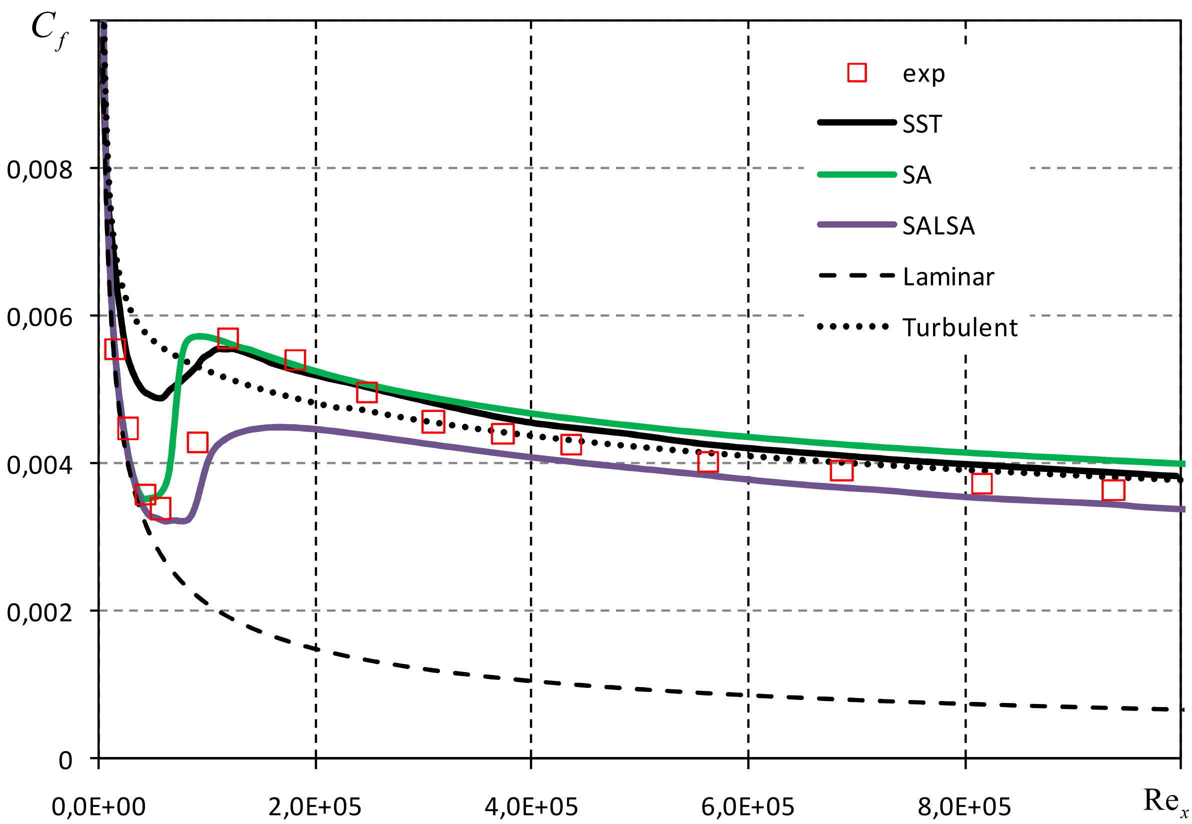


Рисунок 4.4 – Розподіл коефіцієнтів тертя по поверхні пластини для режиму обтікання T3B: exp [283], SST [225], SA, SALSA, Laminar, Turbulent

Модель переходу на основі SST забезпечує кращу кореляцію з експериментальними даними для випадків плоских пластин при нульовому градієнті тиску. У цілому, γ-Re_θ модель ламінарно-турбулентного переходу якісно враховує вплив інтенсивності рівня турбулентності потоку, що набігає, на розташування точки переходу.

4.2 Чисельне моделювання ламінарно-турбулентного переходу при обтіканні кругового циліндра

Чисельне моделювання обтікання циліндра в широкому діапазоні чисел Рейнольдса являє собою складну задачу. Незважаючи на те, що круговий циліндр є простою геометричною фігурою, структура його обтікання при різних числах Рейнольдса являє собою величезний спектр фізичних особливостей. За винятком низьких чисел Рейнольдса, обтікання циліндра характеризується масивним відривом і нестаціонарними явищами в сліді. У цілому циліндр відноситься до погано обтічних тіл і його обтікання, як правило, носить періодичний характер.

Обтікання кругового циліндра нестисливою рідиною сильно залежить від числа Рейнольдса. Можна виділити три режими: ламінарний режим у всій області, ламінарне обтікання циліндра та турбулентний слід, практично все поле течії є турбулентним.

Ламінарна течія у сліді за циліндром при обтіканні нестисливою рідиною характеризується наступними режимами: безвідривне стаціонарне ($\mathrm{Re} < 5$), стаціонарне відривне ($5 < \mathrm{Re} < 45$), що характеризується наявністю в близькому сліді двох симетричних вихорів, і нестаціонарне відривне періодичне ($45 < \mathrm{Re} < 300$). При подальшому збільшенні числа Рейнольдса відбувається перехід до турбулентності. Спочатку турбулізується далекий слід $300 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^3$, потім область ламінарно-турбулентного переходу зміщується вверх за потоком до поверхні циліндра. При числі Рейнольдса $\mathrm{Re} \approx 4 \cdot 10^5$ починає турбулізоватися примежовий шар. У результаті розташування точки відриву зміщується вниз за потоком, що призводить до різкого звуження вихрового сліду. Це явище називається «кризою опору», а число Рейнольдса – критичним числом Рейнольдса Re_{crit}. Усі числа Рейнольдса, які задовольняють умові $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{crit}$ відповідно називаються докритичними. Надалі зі збільшенням числа Рейнольдса відбувається турбулізація примежового шару. У загальному випадку режими обтікання кругового циліндра наведено в таблиці 4.2.

У даній роботі перевагу спільного використання моделі турбулентності SARC з моделлю γ-Re_θ ламінарно-турбулентного переходу було продемонстровано на задачі обтікання кругового циліндра в широкому діапазоні чисел Рейнольдса.

Турбулентне обтікання циліндра потоком нестисливої рідини проводилося для п'яти чисел Рейнольдса 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7 [122, 132]. Розрахунки виконано на сітці типу-О з кількістю вузлів 250×300. Для адекватної роздільної здатності в'язких ефектів у фізичній області вводиться сильно нерівномірна сітка зі згущенням поблизу поверхні циліндра та у сліді. Перший крок сітки від поверхні дорівнює 10^{-6}, кількість точок у примежовому шарі порядку 40. Зовнішня межа розташовано на відстані 65 діаметрів циліндра, крок інтегрування за часом $\Delta t = 0.005$.

Проведено порівняння результатів розрахунків обтікання циліндра з використанням моделі γ-Re_θ ламінарно-турбулентного переходу та без неї.

Обтікання циліндра при числі Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^3$ характеризується ламінарним режимом з наступною турбулізацією сліду (рис. 4.5 а). При відсутності моделі переходу примежовий шар від самого початку є турбулентним (рис. 4.5 б).

При числі Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^4$ зона переміжності зміщується ближче до поверхні циліндра (рис. 4.5 в). Відрив ламінарного примежового шару відбувається при куті $85^\circ \div 90^\circ$. У той самий час при моделюванні обтікання циліндра без моделі ламінарно-турбулентного переходу турбулентний примежовий шар відривається набагато пізніше (рис. 4.5 г).

Таблиця 4.2 – Режими обтікання кругового циліндра

Режим	Опис	Діапазон чисел Рейнольдса
Ламінарний режим	Безвідривне обтікання	$\mathrm{Re} < 5$
Ламінарний режим	Стаціонарний відрив	$5 < \mathrm{Re} < 45$
Ламінарний режим	Нестаціонарний відрив	$45 < \mathrm{Re} < 300$
Перехідний режим	Ламінарний відрив і перехід до турбулентності в далекому сліді	$300 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^3$
Перехідний режим	Ламінарний відрив і перехід до турбулентності в близькому сліді	$5 \cdot 10^3 < \mathrm{Re} < 3 \cdot 10^4$
Докритичний режим	Ламінарний відрив з подальшою турбулізацією потоку	$3 \cdot 10^4 < \mathrm{Re} < 4 \cdot 10^5$
Закритичний режим	Майже повністю ламінарний примежовий шар і турбулентний відрив	$4 \cdot 10^5 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^6$
Надкритичний режим	Майже повністю турбулентний примежовий шар	$\mathrm{Re} > 5 \cdot 10^6$

Ламінарний примежовий шар при числі Рейнольдса 10^5 відривається при куті приблизно 90° з подальшою його турбулізацією (рис. 4.5 д). У цих трьох випадках при числах Рейнольдса 10^3, 10^4, 10^5 має місце відривний перехід.

При числі Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^6$ ламінарно-турбулентний перехід відбувається біля поверхні циліндра (рис. 4.5 ж). Відривається вже турбулентний примежовий шар. Для випадку, коли не використовувалась модель переходу, обтікання циліндра носить стаціонарний характер через надмірну генерацію турбулентної в'язкості (рис. 4.5 з).

На рис. 4.6 представлено зміну зони переміжності та характеру ламінарно-турбулентного переходу від числа Рейнольдса. Зі збільшенням числа Рейнольдса зона ламінарно-турбулентного переходу зміщується вверх за потоком та змінюється характер переходу від відривного до природнього.

Ізополоси турбулентної в'язкості при обтіканні циліндра залежно від числа Рейнольдса наведено на рис. 4.7. Аналіз результатів чисельного моделювання показав, що зростання числа Рейнольдса призводить до збільшення інтенсивності турбулентної в'язкості.

У широкому діапазоні чисел Рейнольдса слід за циліндром характеризується періодичним і асиметричним зривом великомасштабних вихорів, які зносяться вниз за потоком через рівні інтервали часу (рис. 4.8-4.11). Ширина сліду та розміри окремих вихорів мають порядок діаметра циліндра.

Поблизу поверхні циліндра частинки рідини втрачають частину кінетичної енергії, якої вже недостатньо, щоб подолати підвищення тиску в кормовій частині циліндра. Формується зворотна течія, з якої розвивається великий вихор. Через деякий час цей вихор відривається від тіла та спливає вниз за течією. У завихреній зоні за кормовою частиною циліндра, тиск сильно знижений в порівнянні з тиском у незбуреному потоці. На деякій відстані за циліндром формується послідовність вихорів, що обертаються по черзі в різних напрямках.

На рис. 4.8-4.11 наведено контури завихрення при обтіканні циліндра для різних чисел Рейнольдса та моментів часу одного періоду коливання. Наочно видно вихрову доріжку Кармана в сліді за циліндром. Інтенсивність вихорів сильно залежить від числа Рейнольдса. З ростом числа Рейнольдса час періоду коливань зменшується, а інтенсивність вихорів у сліді збільшується (рис. 4.12). За початок відліку часу приймається момент, при якому коефіцієнт лобового опору має мінімальне значення, а коефіцієнт підйомної сили дорівнює нулю.

Чергування зриву вихорів з верхньої та нижньої поверхонь циліндра призводить до коливань підйомної сили. Кілька періодів коливань коефіцієнтів сили лобового опору та підйомної сили циліндра в часі для різних чисел Рейнольдса представлені на рис. 4.8. Коефіцієнти підйомної сили та сили лобового опору визначаються як $C_L = 2L / \left(\rho_\infty U_\infty^2 d\right)$ і $C_D = 2D / \left(\rho_\infty U_\infty^2 d\right)$, де C_L і C_D – підйомна сила та сила лобового опору на одиницю довжини циліндра, відповідно.

Обтікання циліндра на докритичному режимі ($\mathrm{Re} = 10^5$) характеризується відривом ламінарного примежового шару з наступною турбулізацією потоку в сліді (рис. 4.9). При цьому реалізується відривний режим ламінарно-турбулентного переходу. Даний режим відповідає максимальній амплітуді коливань сили лобового опору та підйомної сили (рис. 4.12).

При числі Рейнольдса 10^6 реалізується закритичний режим обтікання циліндра, що характеризується відривом турбулентного примежового шару (рис. 4.10). У результаті того, що турбулентний примежовий шар відривається нижче за потоком, відбувається швидке відновлення тиску в донній області. При цьому спостерігається різке зменшення сили лобового опору й амплітуди коливань аеродинамічних коефіцієнтів, а також періоду коливань (рис. 4.12).

Надкритичний режим обтікання циліндра $\mathrm{Re} = 10^7$ характеризується зростанням коефіцієнта лобового опору й амплітуди коливань підйомної сили. До того ж дещо збільшується період коливань у порівнянні з закритичним режимом. Картина обтікання циліндра при даному числі Рейнольдса (рис. 4.11) близька до тієї, що наведена на рис. 4.6.

Встановлено залежності осереднених коефіцієнтів сили лобового опору та підйомної сили, а також чисел Струхаля від числа Рейнольдса, що отримано за допомогою моделей SA і SARC+TR, які порівнюються з експериментальними даними [276], наведено в таблиці 4.3. Число Струхаля визначається як $St = fd / U_\infty$, де f – частота сходу вихорів, d – діаметр циліндра.

Таблиця 4.3 – Значення осереднених коефіцієнтів сили лобового опору C_D, підйомної сили C_L і чисел Струхаля St для кругового циліндра від числа Рейнольдса

Re	SA			SARC+TR			Експеримент [276]	
	C_D	C_L	St	C_D	C_L	St	C_D	St
10^3	0.92 ± 0.01	± 0.13	0.16	1.01 ± 0.01	± 0.34	0.19	0.9÷1.0	0.18÷0.21
10^4	1.34 ± 0.07	± 1.36	0.22	1.10 ± 0.03	± 0.78	0.19	0.9÷1.2	0.19÷0.21
10^5	0.539	0.0	–	1.13 ± 0.03	± 1.16	0.21	1.0÷1.4	0.18÷0.21
10^6	0.397	0.0	–	0.36 ± 0.01	± 0.38	0.34	0.2÷0.4	0.21÷0.45
10^7	0.313	0.0	–	0.42 ± 0.03	± 0.61	0.32	0.4÷0.7	0.27÷0.33

Крім того було проведено якісне порівняння картини обтікання кругового циліндра при Re = 10^4 з експериментальними даними (рис. 4.13) з альбому течій рідини та газу Ван-Дайка [10].

Застосування моделі ламінарно-турбулентного переходу якісно та кількісно поліпшує результати чисельного моделювання. Показано, що при низьких числах Рейнольдса, коли обтікання циліндра носить ламінарний характер, а слід турбулентний використання моделі турбулентності SA призводить до розвитку турбулентного примежового шару на циліндрі та, як наслідок, до зміни розташування точки відриву. Неправильне розташування точки відриву впливає на розподіл тиску у донній частини циліндра та на інтегральні аеродинамічні характеристики (рис. 4.12). Отримані результати чисельного моделювання обтікання кругового циліндра в широкому діапазоні чисел Рейнольдса якісно узгоджуються з експериментальними даними [276].

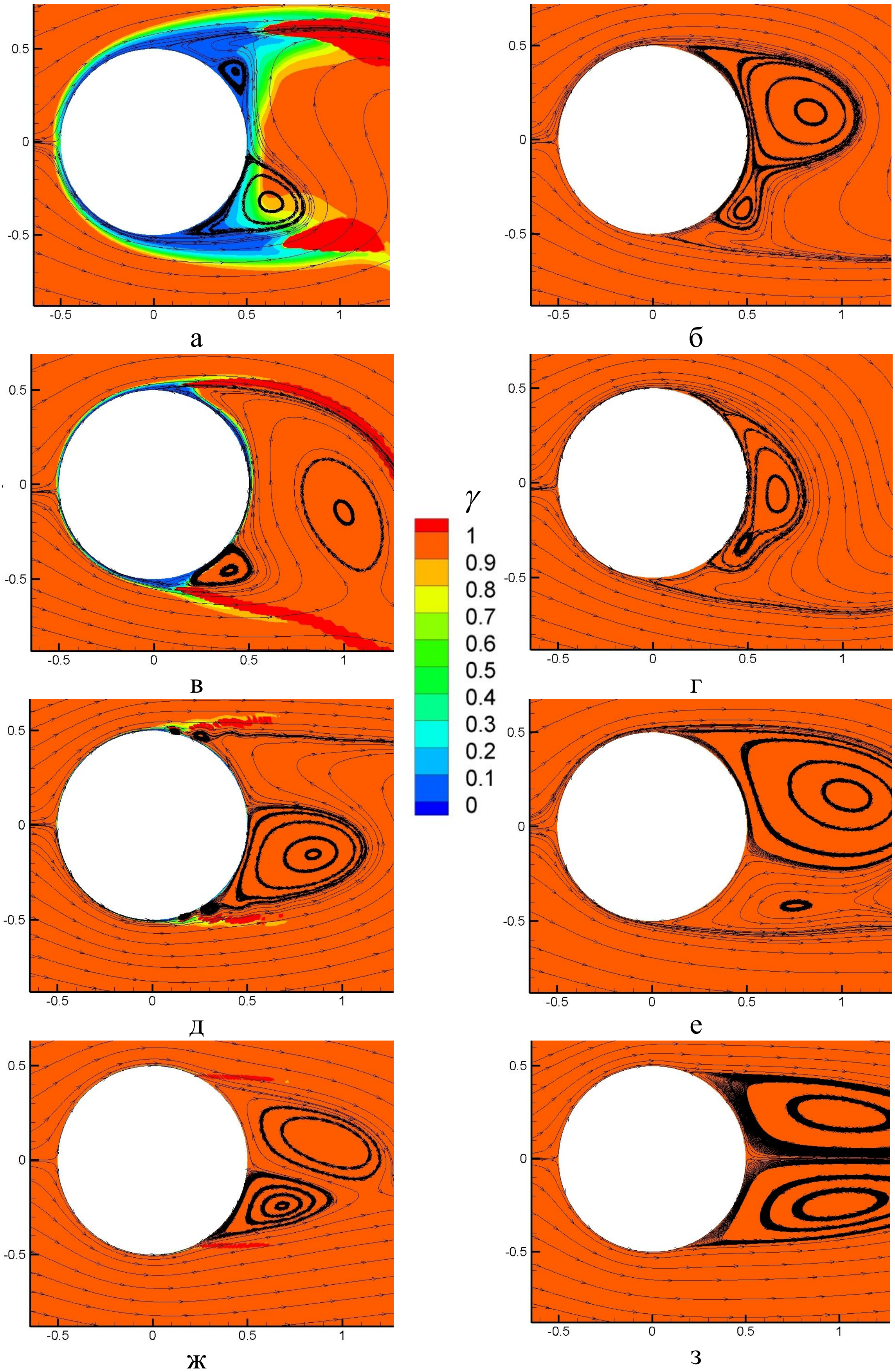


Рисунок 4.5 – Контури переміжності і лінії течії при обтіканні циліндра з моделлю переходу (SARC + TR) (а, в, д, ж) і без неї (SA) (б, г, е, з): а, б – Re = 10^3;   в, г – Re = 10^4;   д, е – Re = 10^5;   ж, з – Re = 10^6

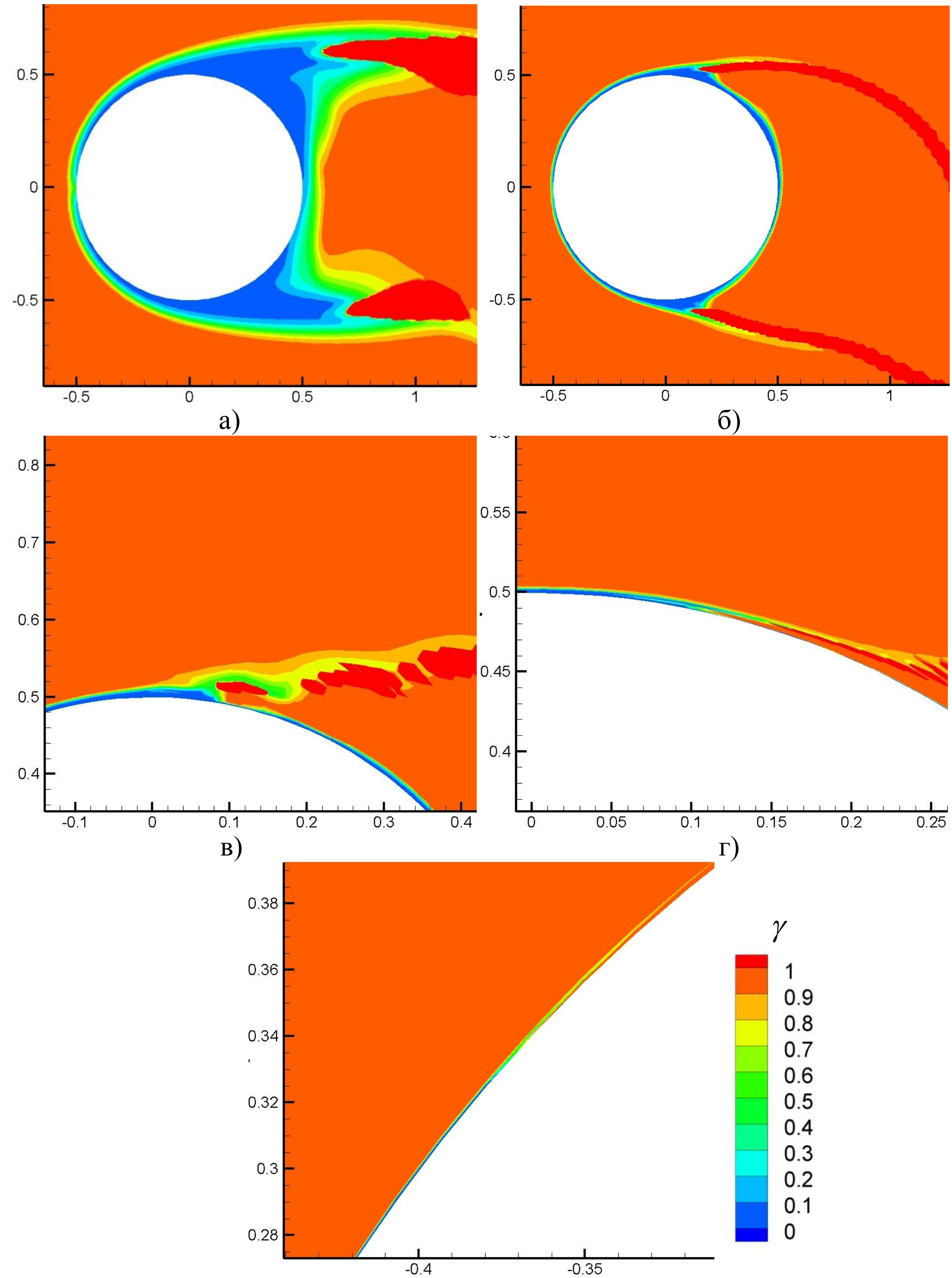
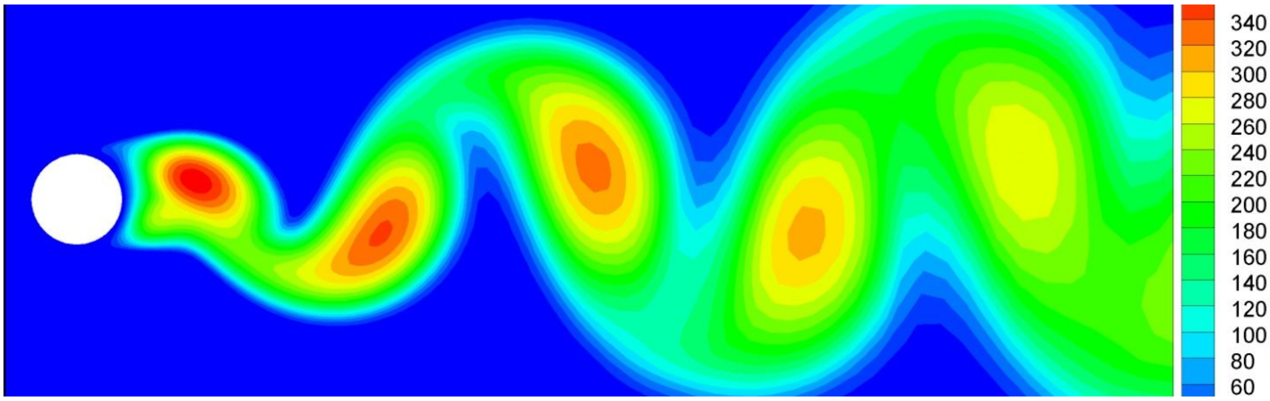
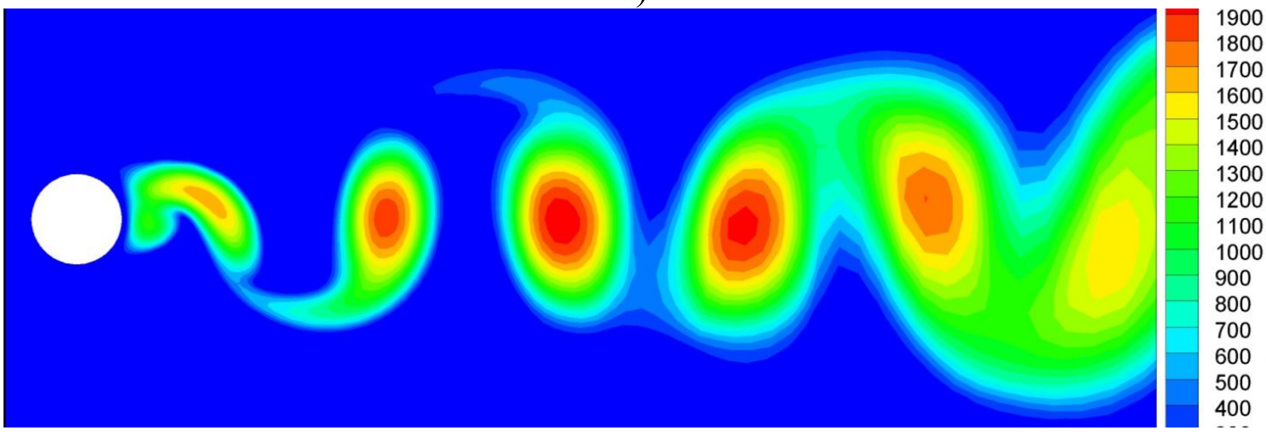


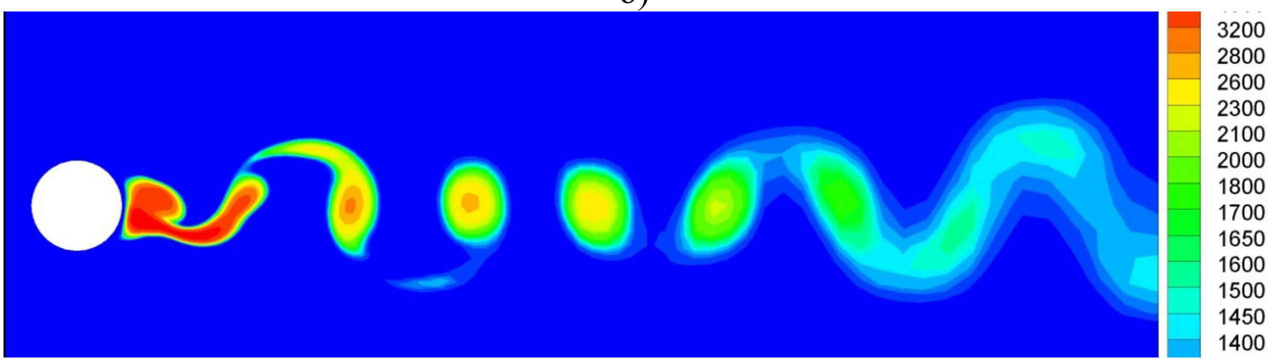
Рисунок 4.6 – Контури переміжності при обтіканні циліндра: а – Re = 10^3, б – Re = 10^4, в – Re = 10^5, г – Re = 10^6, д – Re = 10^7



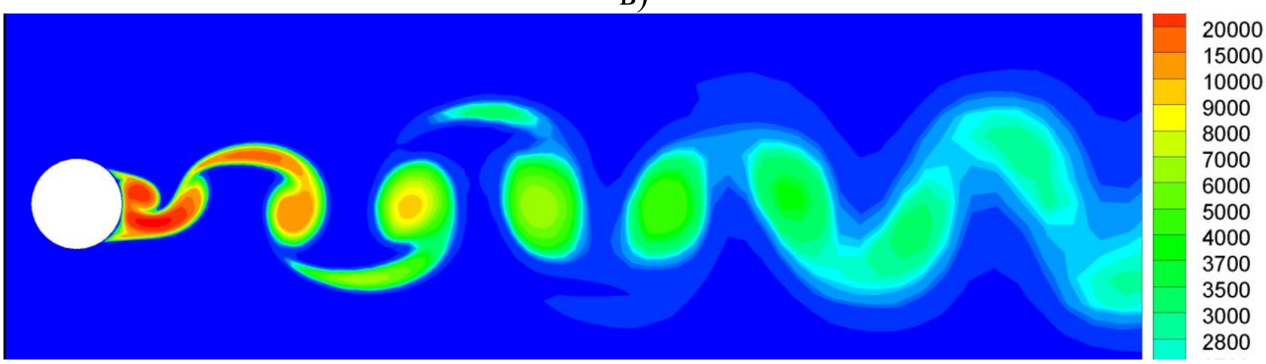
а)



б)



в)



г)

Рисунок 4.7 – Ізополоси турбулентної в'язкості при обтіканні циліндра: а – $Re = 10^4$, б – $Re = 10^5$, в – $Re = 10^6$, г – $Re = 10^7$

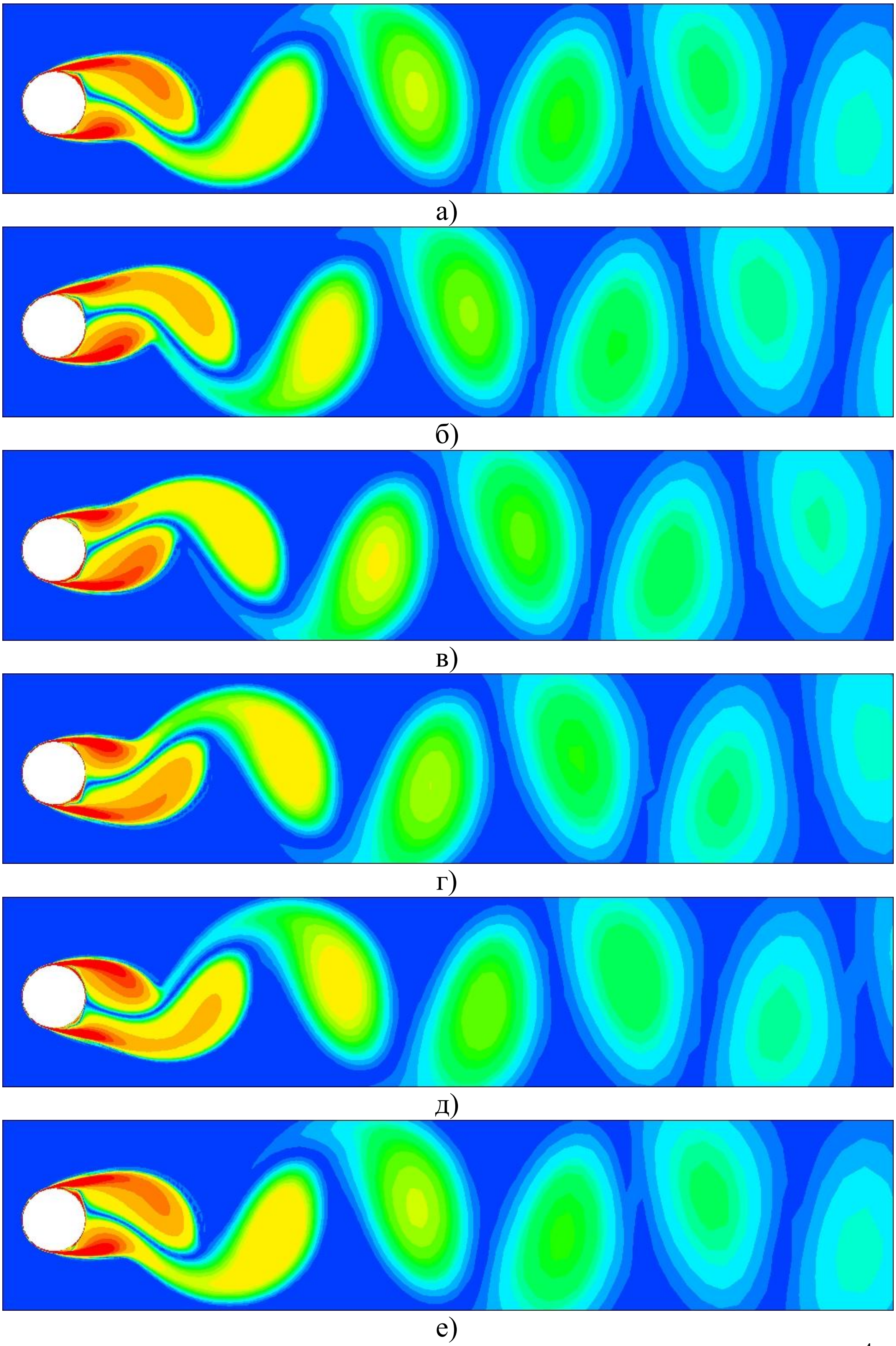
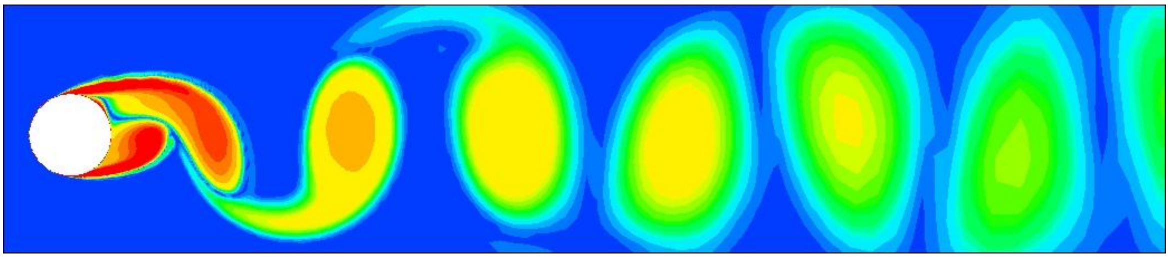
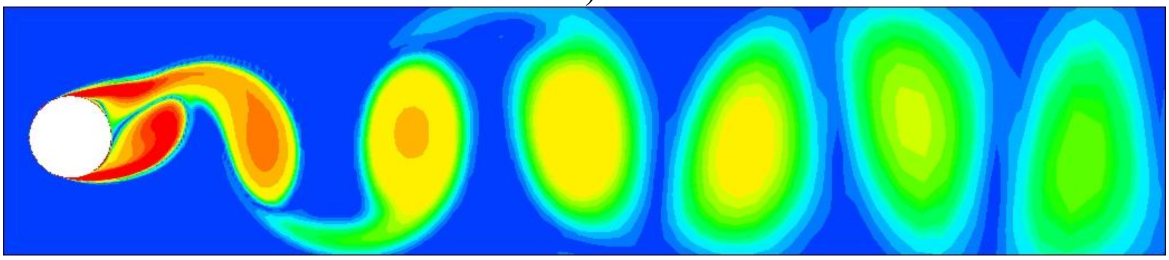


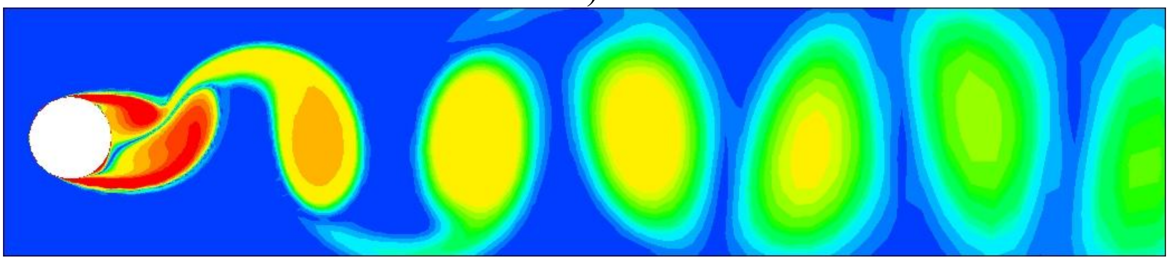
Рисунок 4.8 – Контури завихрення при обтіканні циліндра (Re = 10^4) для моментів часу: а – t = 0; б – t = 0.2T; в – t = 0.4T; г – t = 0.6T; д – t = 0.8T; е – t =T



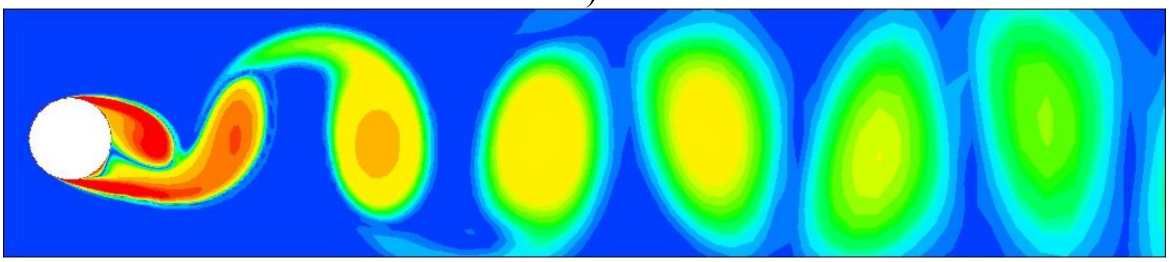
а)



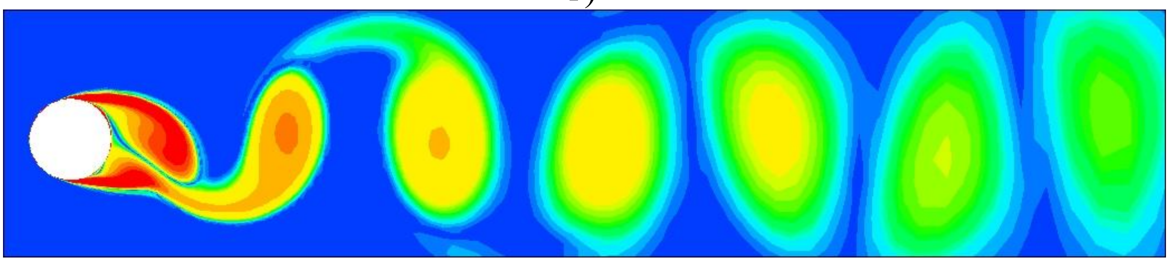
б)



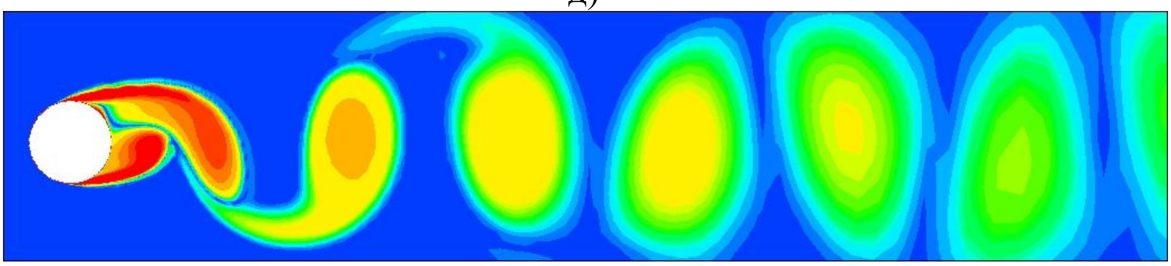
в)



г)

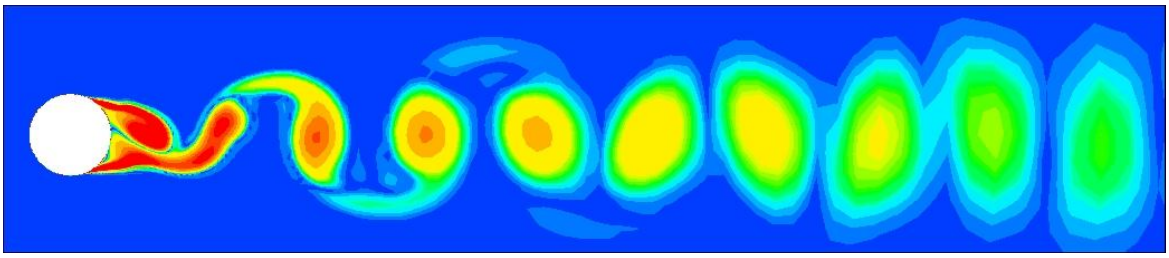


д)

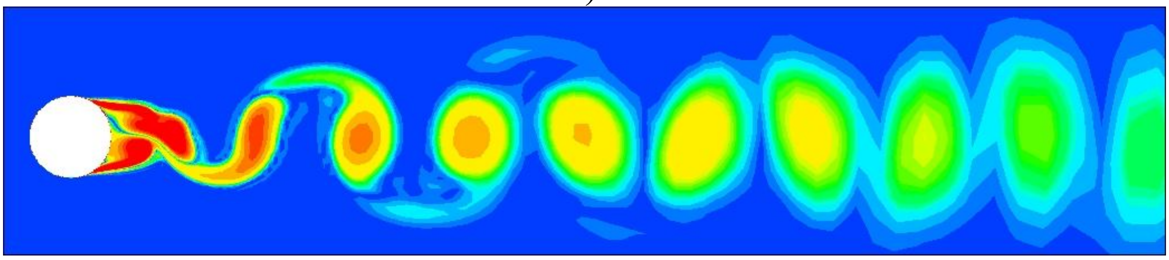


е)

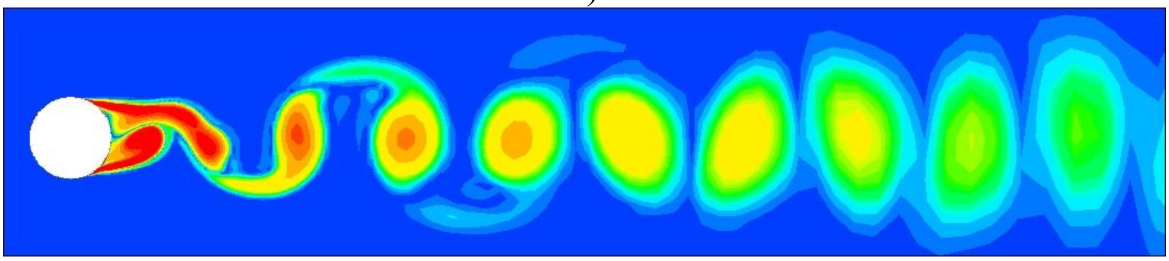
Рисунок 4.9 – Контури завихрення при обтіканні циліндра (Re = 10^5) для моментів часу: а – t = 0; б – t = 0.2T; в – t = 0.4T; г – t = 0.6T; д – t = 0.8T; е – t =T



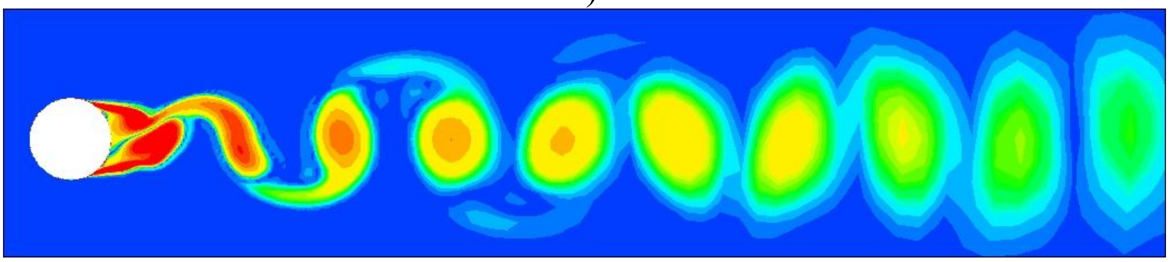
а)



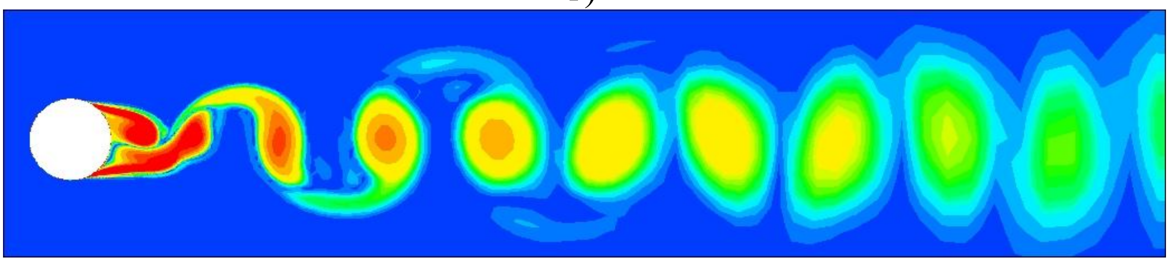
б)



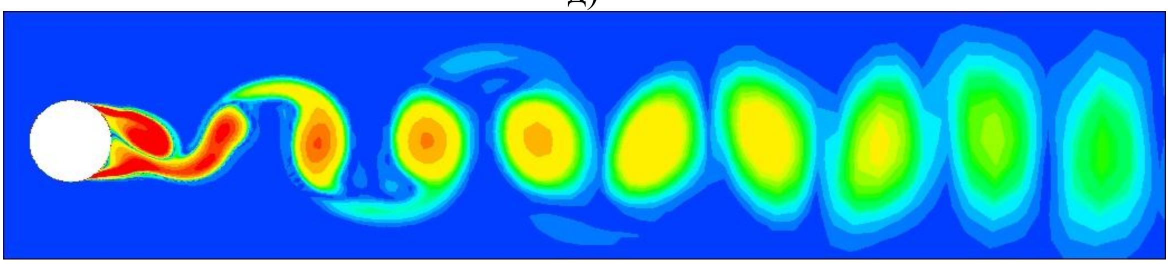
в)



г)

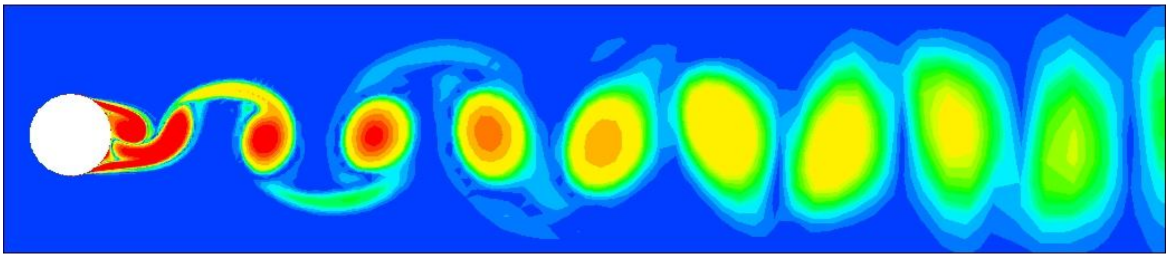


д)

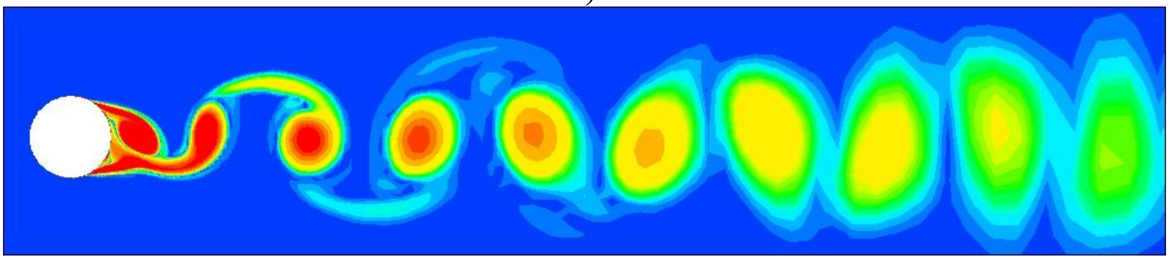


е)

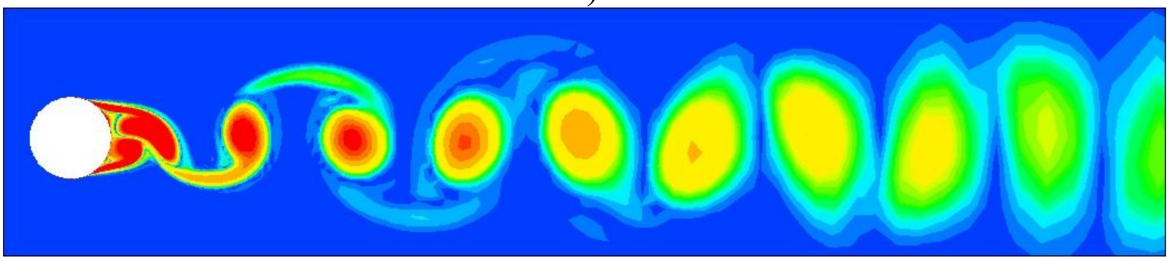
Рисунок 4.10 – Контури завихрення при обтіканні циліндра (Re = 10^6) для моментів часу: а – t = 0; б – t = 0.2T; в – t = 0.4T; г – t = 0.6T; д – t = 0.8T; е – t =T



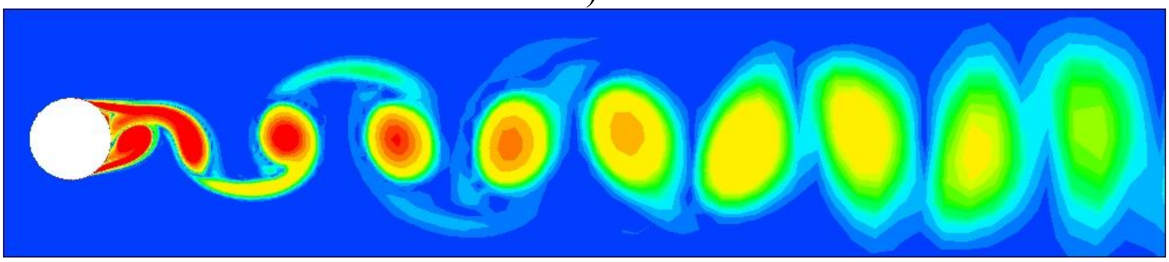
а)



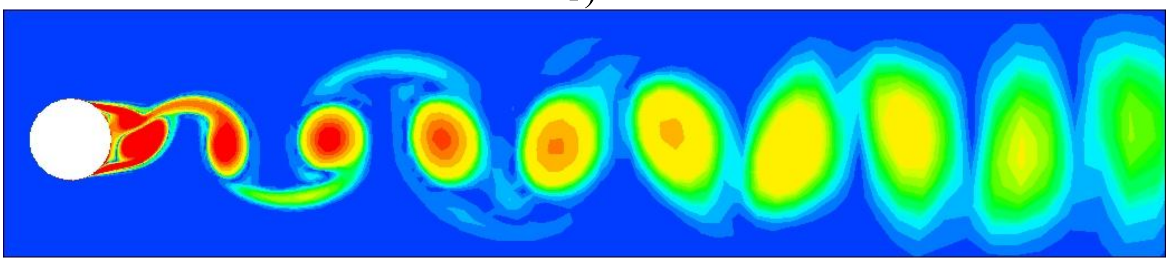
б)



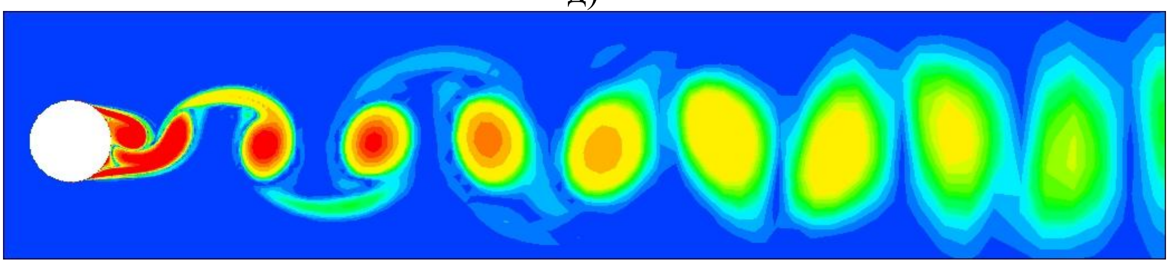
в)



г)

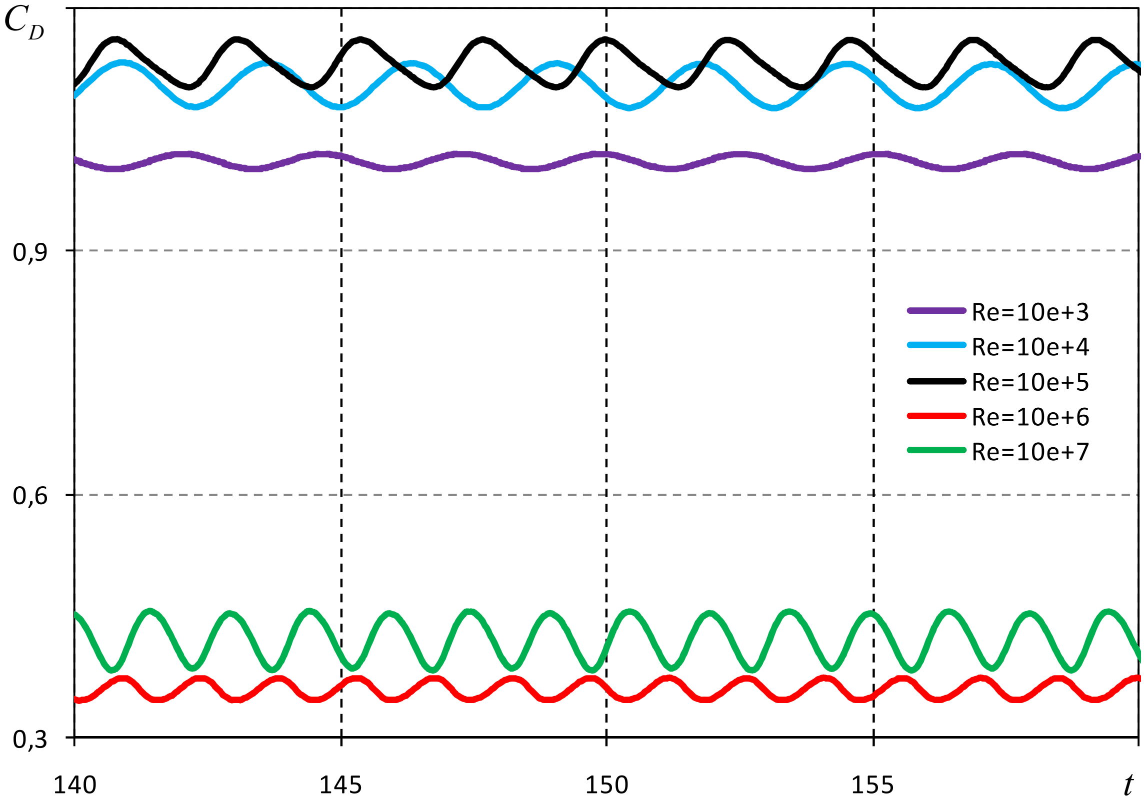


д)

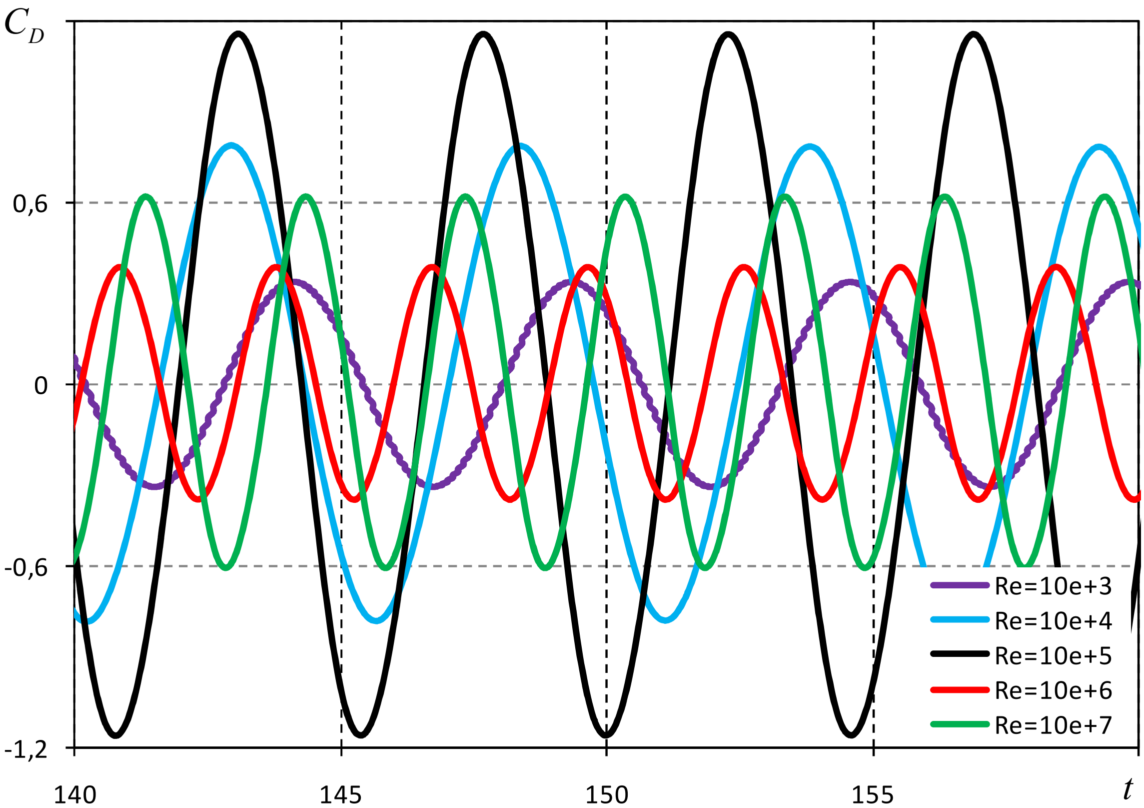


е)

Рисунок 4.11 – Контури завихрення при обтіканні циліндра (Re = 10^7) для моментів часу: а – t = 0; б – t = 0.2T; в – t = 0.4T; г – t = 0.6T; д – t = 0.8T; е – t =T

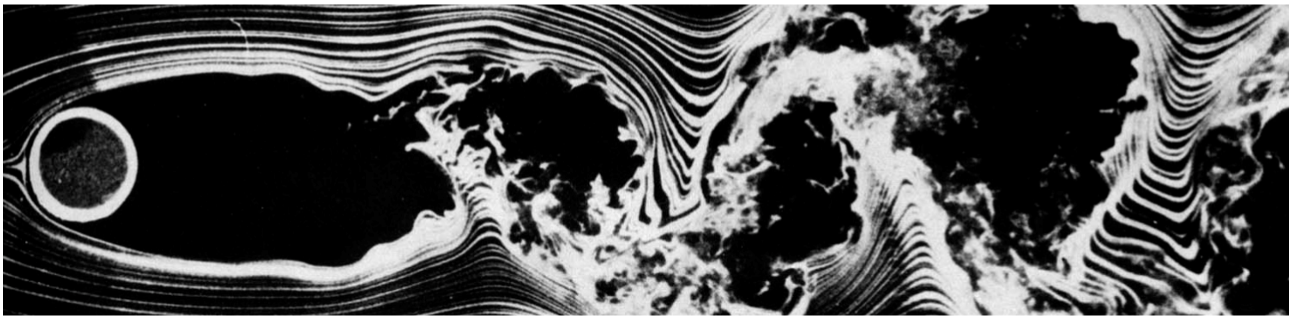


а)

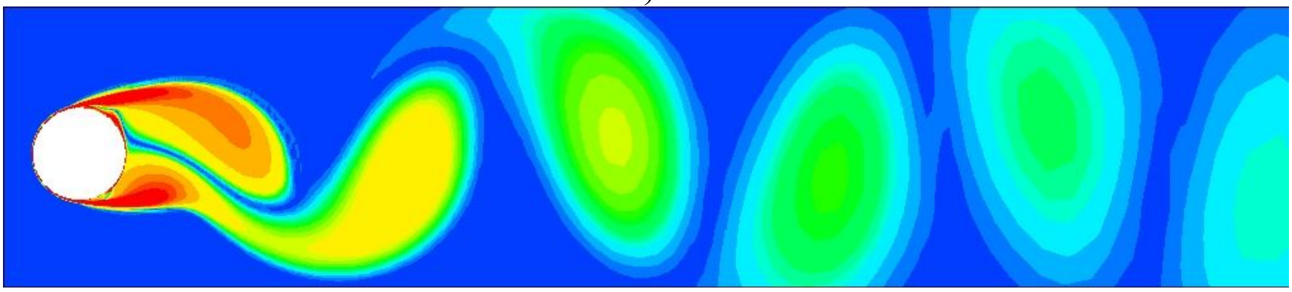


б)

Рисунок 4.12 – Залежність коефіцієнтів сили лобового опору (а) і підйомної сили (б) циліндра в часі



а)



б)

Рисунок 4.13 – Обтікання кругового циліндра при числі Рейнольдса Re = 10^4: а – експеримент [10], б – дана робота

4.3 Чисельне моделювання ламінарно-турбулентного переходу при обтіканні профілю NACA 4412

Ще однієї задачею, на якій проводилося тестування γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу спільно з моделями турбулентності SA і SARC, було докритичне та закритичне обтікання аеродинамічного профілю NACA 4412 турбулентним потоком [122, 132].

Нижче представлено результати розрахунків, які проведено для нерухомого профілю NACA 4412, стосовно до експериментальних даних з роботи A. Wadcock [316] при числі Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1.64 \cdot 10^6$, що визначено за хордою профілю та швидкістю незбуреного потоку ($U_\infty = 29.1$ м/с). Рівень турбулентності потоку, що набігає, дорівнює 0.0087 %. Кут атаки варіювався в діапазоні від 0° до 18°. Робота A. Wadcock [316] була обрана для тестування моделей турбулентності, тому що в ній наведено інтегральні та розподілені параметри при обтіканні профілю.

Розрахунки проведено на сітці типу-О із загальним числом вузлів $1.2 \cdot 10^5$.

У напрямку по нормалі до поверхні в примежовому шарі перебувало порядку 150 точок. Перший крок сітки від поверхні профілю дорівнює $3\cdot10^{-6}$, що забезпечує максимальне значення $y^{+} < 0.1$.

Ізобари при обтіканні профілю NACA 4412 для кутів атаки 12° і 18° наведено на рис. 4.14 і 4.15, відповідно. Результати отримано за допомогою моделей турбулентності SA і SARC з використанням γ-Re_{θ} моделі ламінарно-турбулентного переходу і позначено як SA+TR і SARC+TR, відповідно.

Загальну картину обтікання профілю NACA 4412 для кута атаки 12°, отримано за допомогою моделей SA, SA+TR і SARC+TR практично ідентична між собою (рис. 4.14) і якісно узгоджується з наявними фізичними уявленнями про структуру докритичного обтікання. У той самий час для кута атаки 18°, результати, які отримано на основі моделі SA і SA+TR, призводять до стаціонарного режиму обтікання, що не відповідає експериментальним даним (рис. 4.15 а, б). Використання моделі SARC+TR більш якісно відображає фізичні особливості нестаціонарного обтікання аеродинамічного профілю NACA 4412 при закритичному режимі обтікання з розвиненим відривом потоку (рис. 4.15 в).

Принципові відмінності при використанні γ-Re_{θ} моделі ламінарно-турбулентного переходу спостерігаються на підвітряній частині передньої крайки, де формується ламінарний відрив (рис. 4.16). У точці приєднання потоку відбувається різка турбулізація примежового шару, і подальше обтікання носить приєднаний характер за винятком невеликої відривної зони поблизу задньої крайки. До того ж обтікання навітряної сторони профілю носить повністю ламінарний характер. Застосування моделі турбулентності Spalart-Allmaras без урахування ламінарно-турбулентного переходу (SA) призводить до зайвої генерації турбулентної в'язкості та не дає можливості адекватно описати ці процеси (рис. 4.17). У результаті весь примежовий шар на профілі є турбулентним і без ламінарного відриву поблизу передньої крайки.

Дані відмінності демонструють розподіл коефіцієнтів тиску (рис. 4.18) і, особливо, тертя (рис. 4.19) по поверхні профілю, де наочно видно відрив потоку. Модель SARC+TR дозволяє якісно відтворити ламінарно-турбулентний перехід поблизу передньої крайки профілю, а також розташування точки відриву потоку $x/c = 0.85$ з верхньої поверхні профілю, що відповідає експериментальним даним A. Wadcock [316]. Застосування моделі SARC+TR призводить до найбільшої зони відриву, а за моделлю SA до наявності найменшої відривної зони. Відрив турбулентного примежового шару відбувається при $x/c = 0.9$. Незначне зміщення розташування точки відриву уверх за потоком $x/c = 0.88$ (рис. 4.19) спостерігається при використанні моделі SA+TR.

Зі збільшенням кута атаки на аеродинамічному профілі NACA 4412 відбувається зростання відривної зони. У випадку закритичного обтікання профілю при куті атаки 18° (рис. 4.15) розподіл коефіцієнтів тиску (рис. 4.20) і тертя (рис. 4.21), які отримано за допомогою моделей SA, SA+TR і SARC+TR, сильно відрізняються між собою. Модель SA дає стаціонарну відривну зону (рис. 4.15 а). Використання моделі SA+TR не призводить до якісного поліпшення результатів (рис. 4.15 б). У випадку застосування SARC+TR порушується стаціонарний характер обтікання профілю, і формуються вихори, які зносяться вниз за потоком. Найбільші розміри відривної зони спостерігаються при використанні моделі SARC+TR.

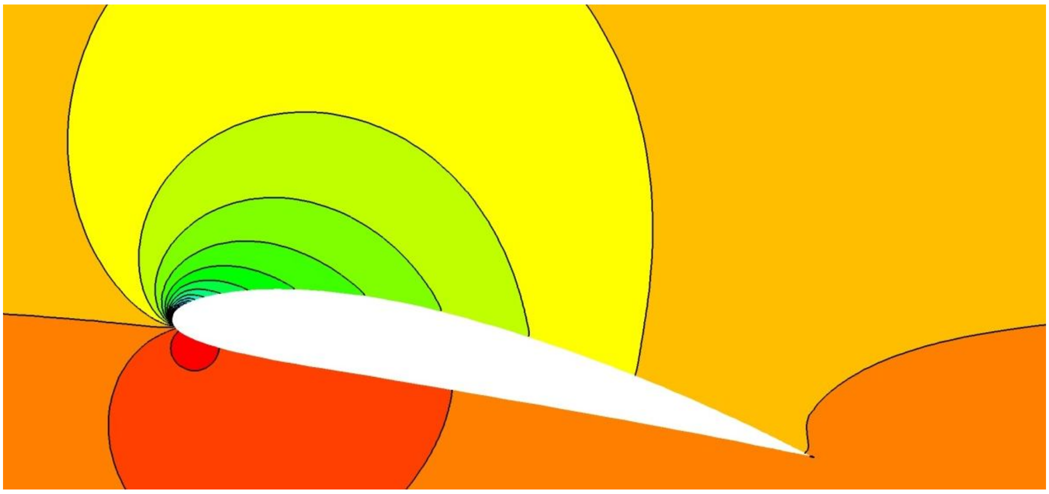
При закритичному режимі обтікання профілю NACA 4412 основну роль відіграє вже не ламінарно-турбулентний перехід, а врахування кривизни ліній течії. Модель турбулентності SARC зменшує генерацію турбулентності в областях великої кривизни ліній течії. Таким чином, досягається реалістична картина обтікання та більш якісне відновлення тиску в області відриву (рис. 4.20). Розподіл коефіцієнта тиску та тертя для моделі SARC+TR отримано шляхом осереднення за часом нестаціонарних коефіцієнтів. Розташування точки відриву відповідає координаті $x/c = 0.15$ (рис. 4.21). У той самий час моделі SA і SA+TR дають зміщені значення координати точки відриву $x/c = 0.58$ і $x/c = 0.6$, відповідно.

Аеродинамічний профіль NACA 4412 при малих кутах атаки має малий опір і високу підйомну силу. Залежності осереднених за часом коефіцієнтів лобового опору C_D і підйомної сили C_L від кута атаки α представлено на рис. 4.22. До кута атаки 12° результати, які отримано з використанням тестуємих моделей, за коефіцієнтами сили лобового опору та підйомної сили близькі між собою та якісно збігаються з експериментальними даними [316]. Максимальна підйомна сила відповідає куту атаки $\alpha = 12^\circ$. Зрив потоку з підвітряної сторони профілю NACA 4412 відбувається при $\alpha = 13^\circ$. У цьому випадку моделі SA і SA+TR показують майже лінійне зростання C_L та C_D. При закритичному режимі обтікання профілю, результати з використанням моделі SARC+TR краще узгодяться з експериментальними даними [6].

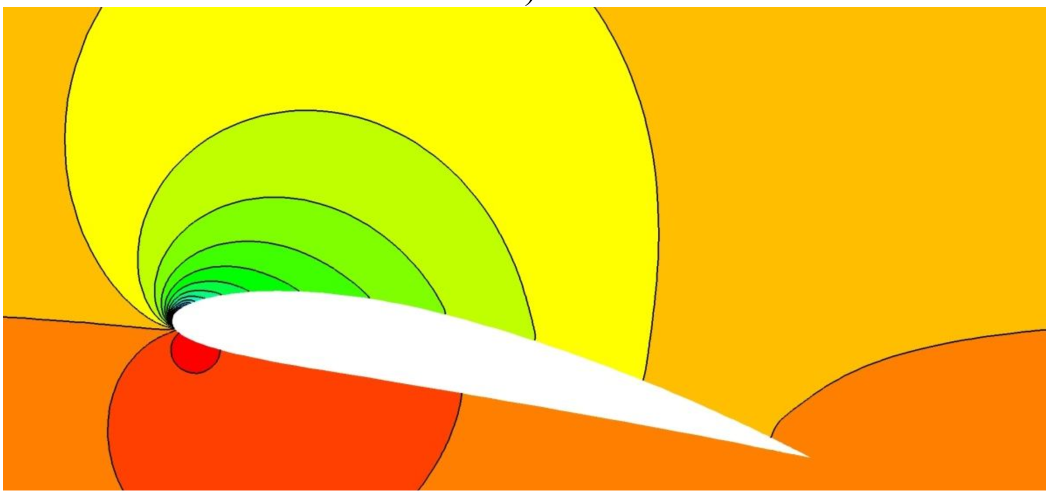
Структура течії при закритичному режимі обтікання профілю характеризується яскраво вираженими нестаціонарними явищами (рис. 4.23-4.27). Періодичний зрив вихрових структур з верхньої підвітряної поверхні профілю відбувається під дією зростаючого вниз за потоком позитивного градієнту тиску. Відрив потоку зароджується на підвітряній стороні поблизу носика профілю, розпадаючись потім на систему вихорів. Для даної течії домінуючим є великомасштабний відрив потоку з великими розмірами вихрових структур.

Залежність коефіцієнтів сили лобового опору та підйомної сили аеродинамічного профілю NACA 4412 в часі наведено на рис. 4.28. У значеннях інтегральних параметрів виявляються істотні осциляції, пов'язані зі зривом вихорів і їх перенесенням над підвітряною поверхнею аеродинамічного профілю.

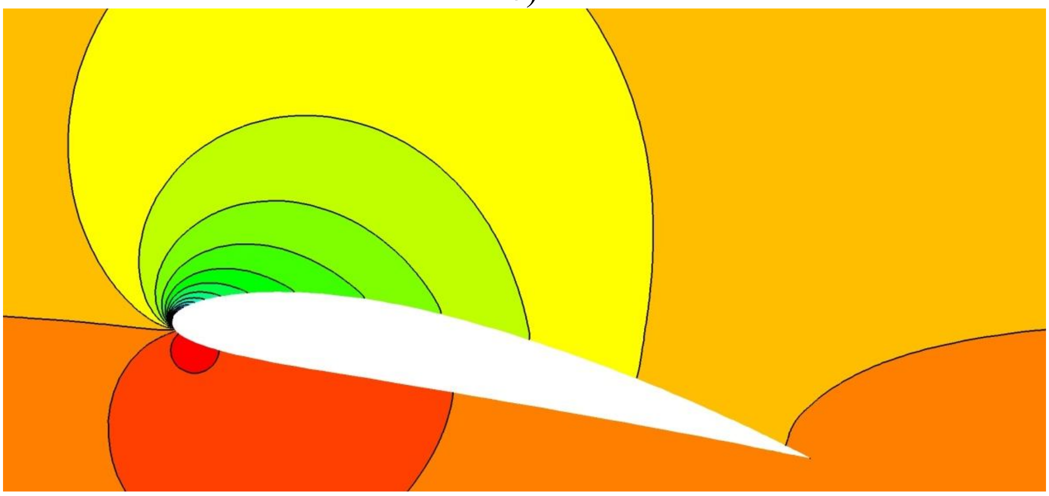
У випадку масивного зриву потоку при закритичному режимі обтікання крилевого профілю NACA 4412 спостерігається різке зростання коефіцієнта лобового опору (рис. 4.28 а) та зниження коефіцієнта підйомної сили (рис. 4.28 б) у порівнянні з докритичним режимом. Модель SARC+TR показує задовільний збіг з експериментальними даними за значеннями осереднених інтегральних характеристик.



а)

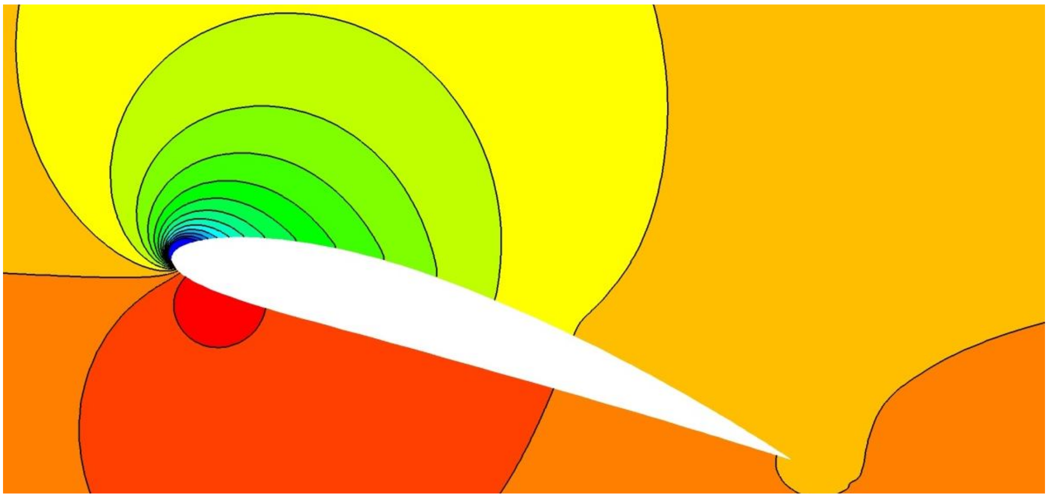


б)

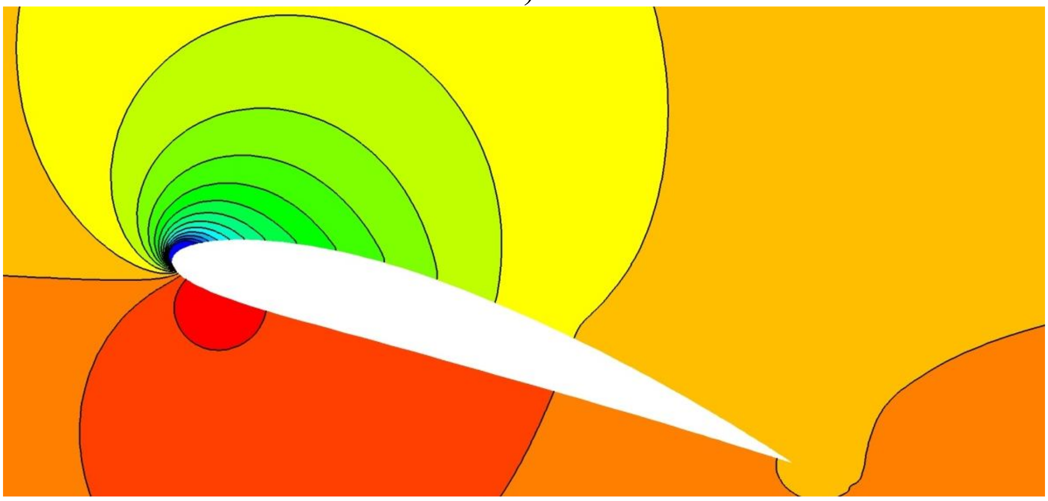


в)

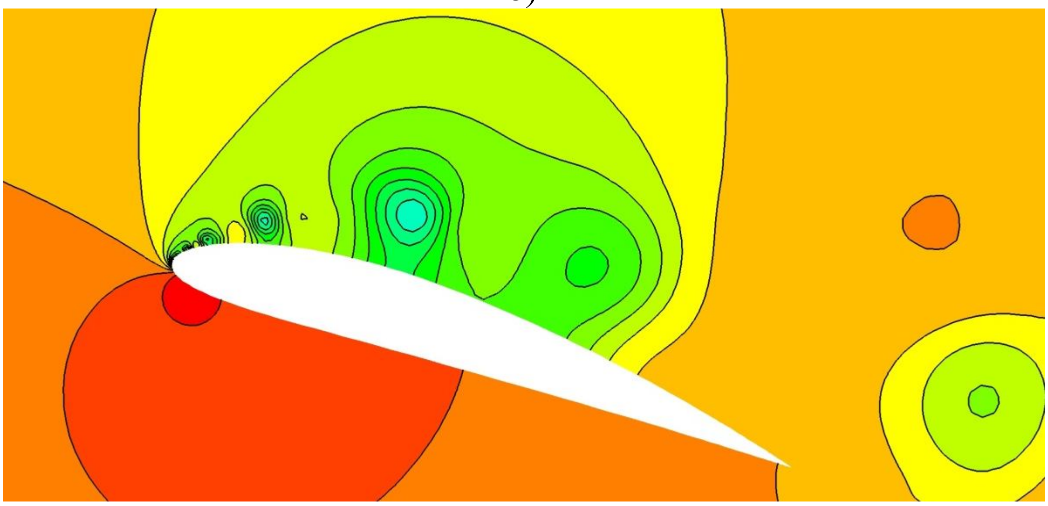
Рисунок 4.14 – Ізобари при обтіканні профілю NACA 4412 для кута атаки 12°: а – SA; б – SA+TR; в – SARC+TR



а)



б)



в)

Рисунок 4.15 – Ізобари при обтіканні профілю NACA 4412 для кута атаки 18°: а – SA; б – SA+TR; в – SARC+TR

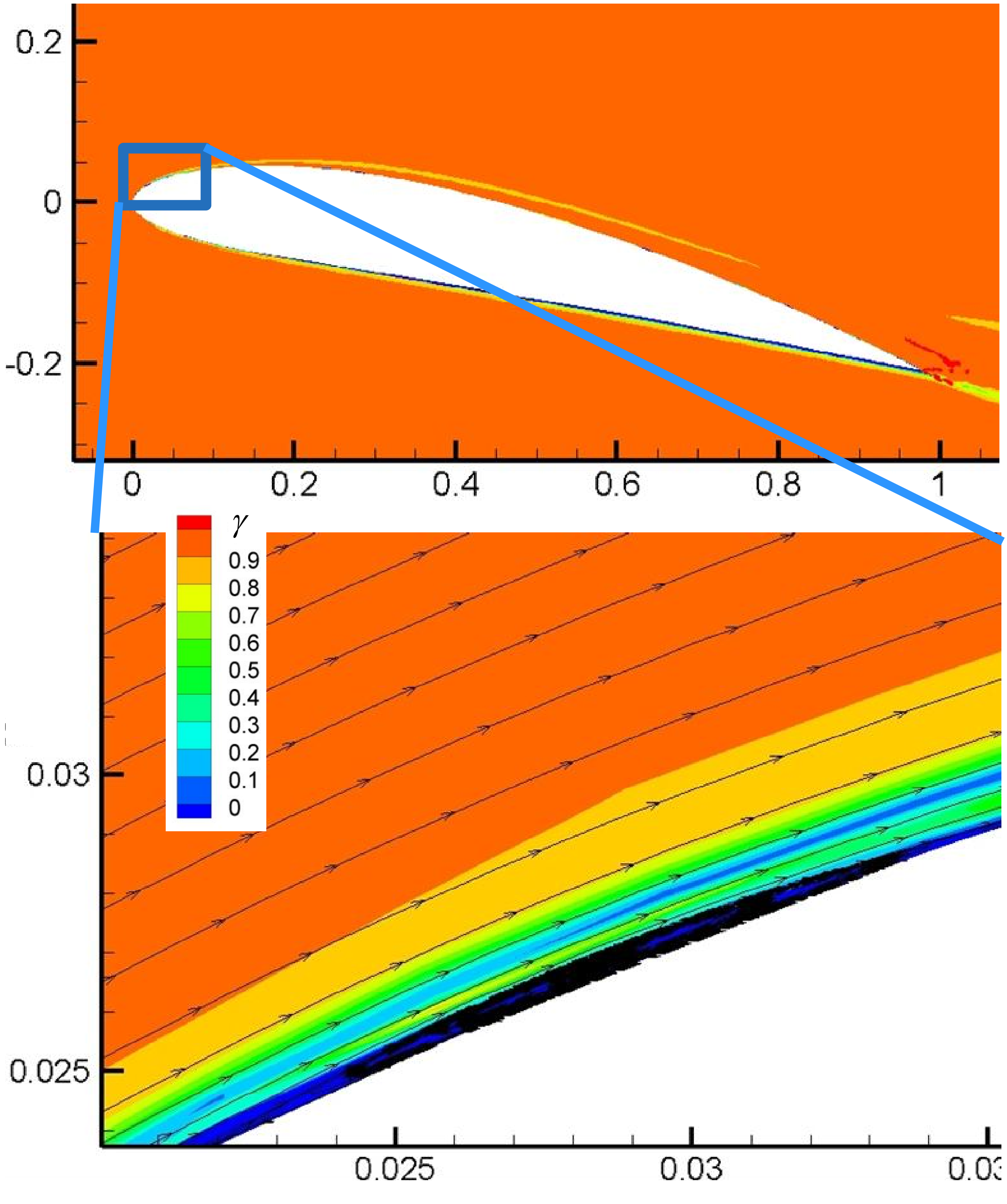


Рисунок 4.16 – Контури переміжності і лінії течії при обтіканні профілю NACA 4412 з моделлю переходу (SA+TR)

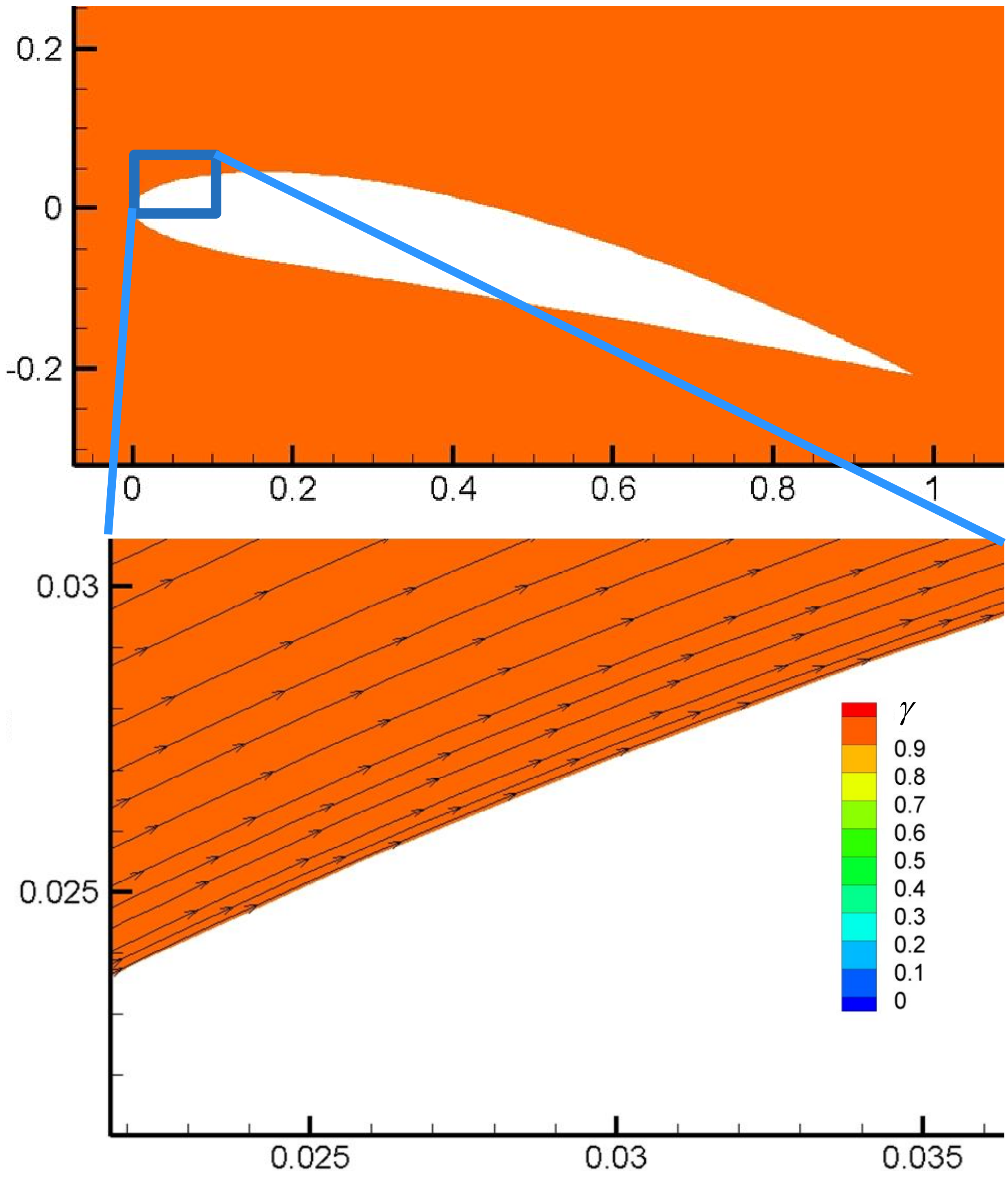


Рисунок 4.17 – Контури переміжності і лінії течії при обтіканні профілю NACA 4412 без моделі переходу (SA)

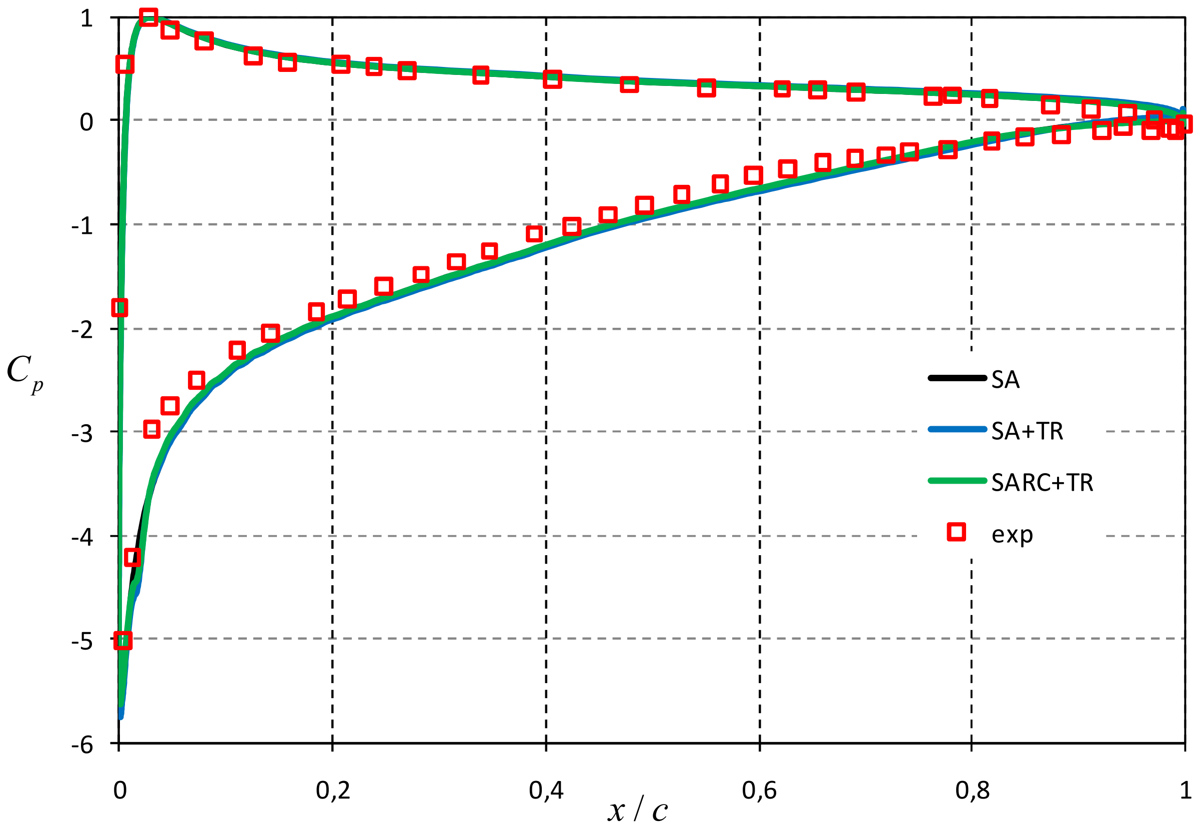


Рисунок 4.18 – Розподіл коефіцієнта тиску по поверхні профілю NACA 4412 при куті атаки 12°

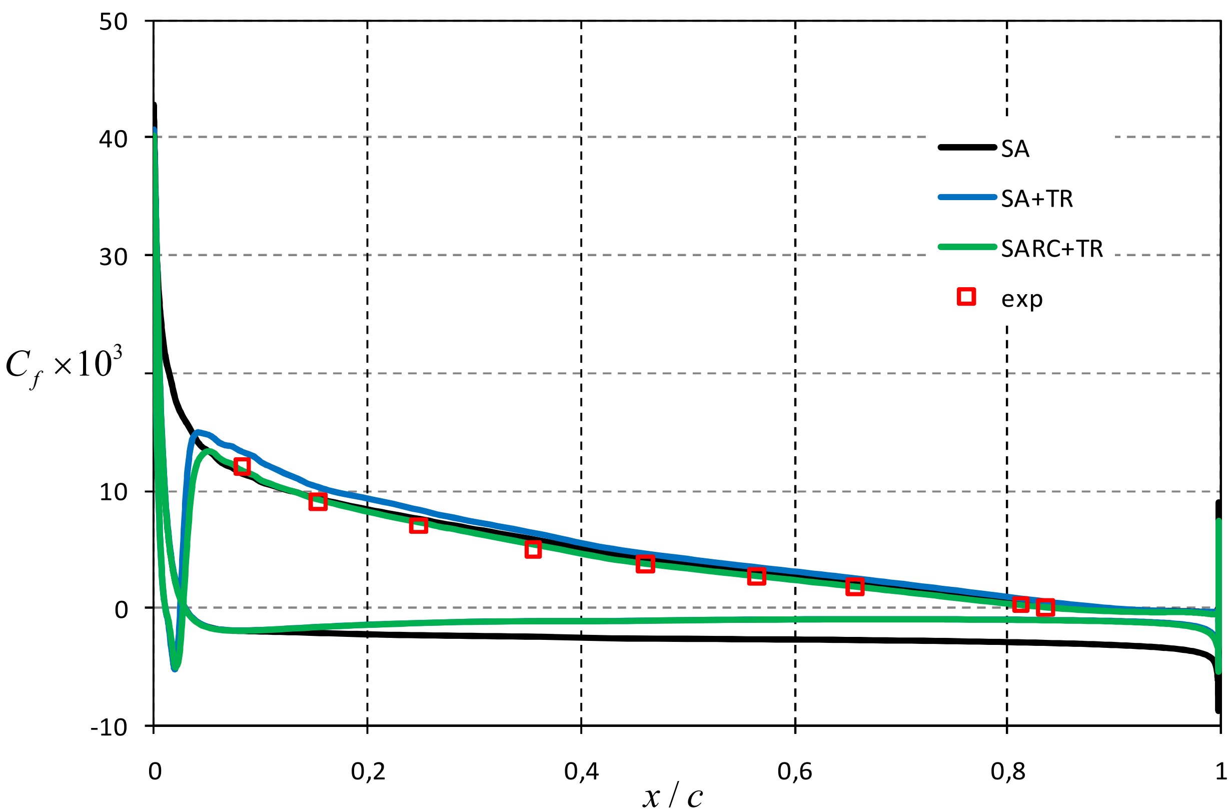


Рисунок 4.19 – Розподіл коефіцієнта тертя по поверхні профілю NACA 4412 при куті атаки 12°

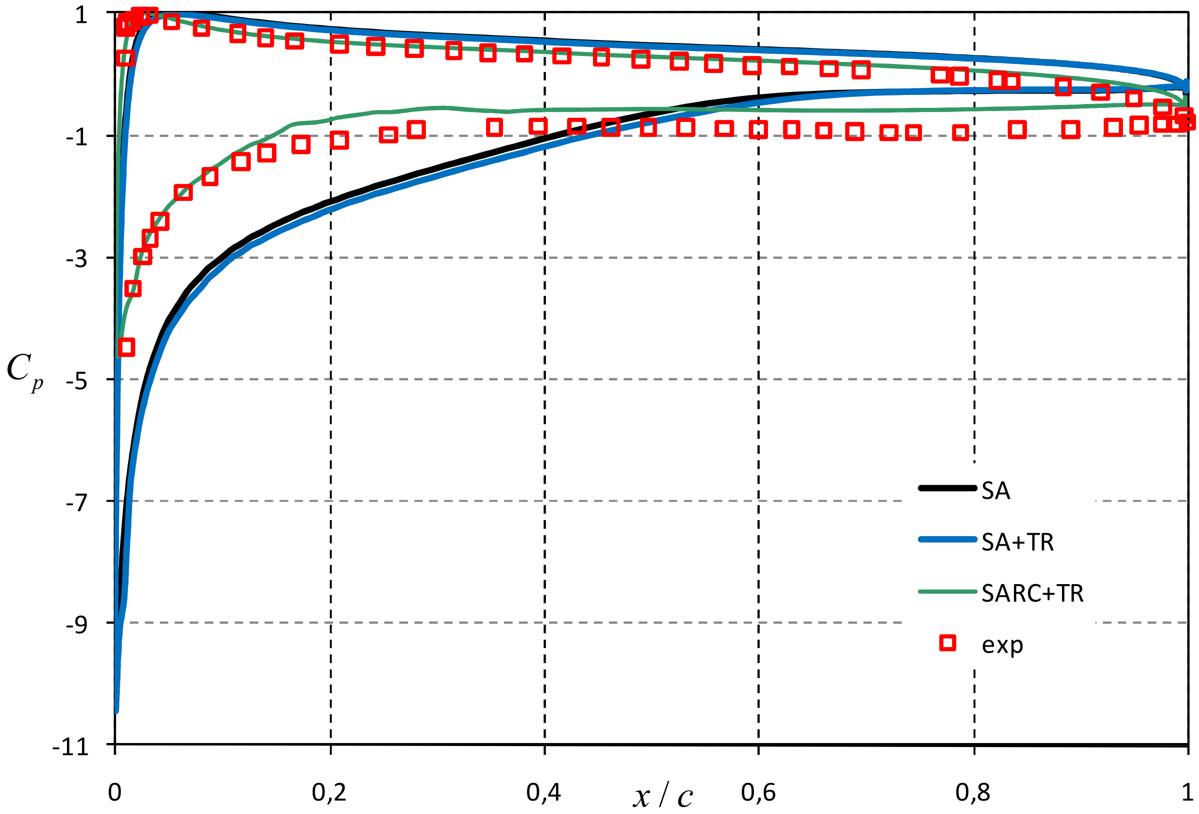


Рисунок 4.20 – Розподіл коефіцієнта тиску по поверхні профілю NACA 4412 при куті атаки 18°

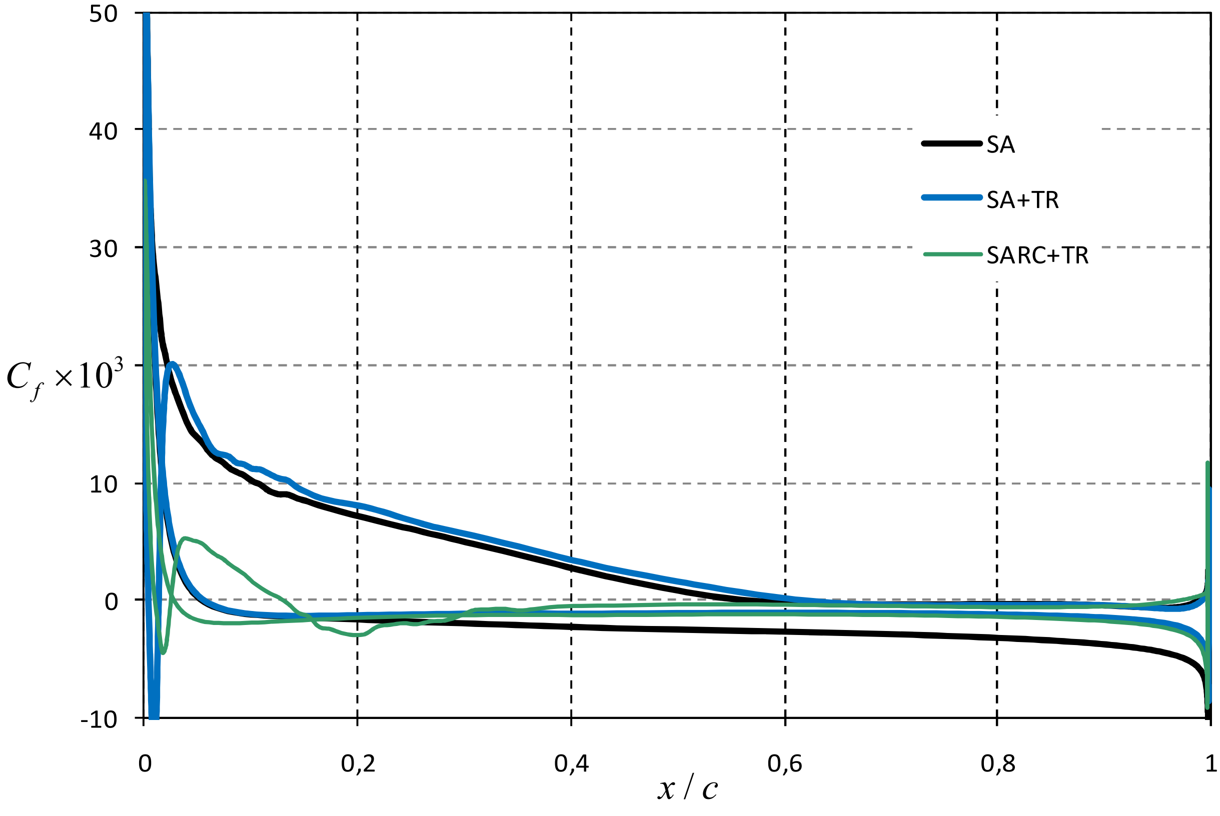
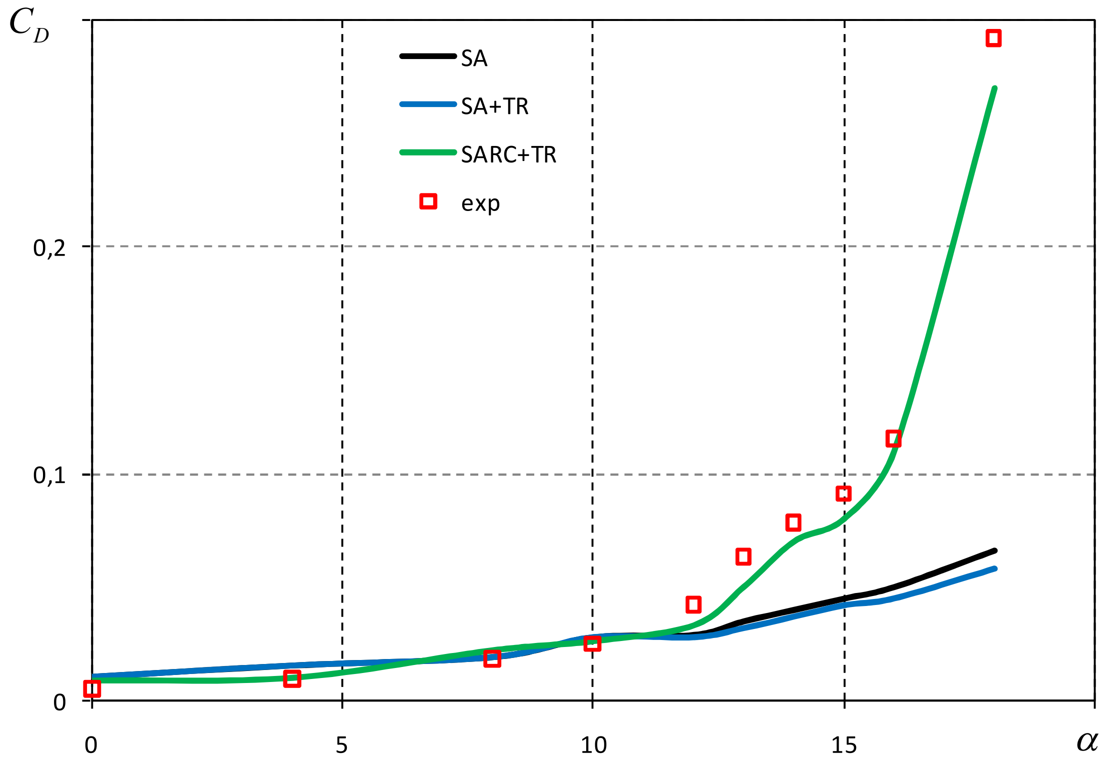
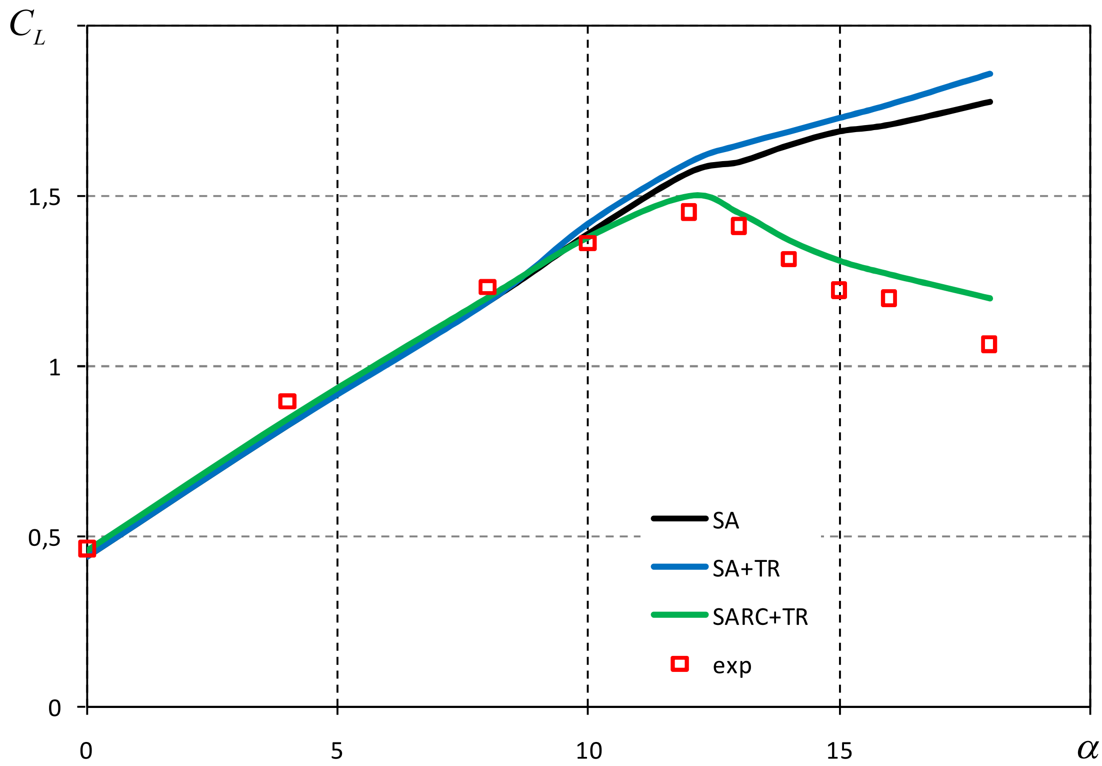


Рисунок 4.21 – Розподіл коефіцієнта тертя по поверхні профілю NACA 4412 при куті атаки 18°

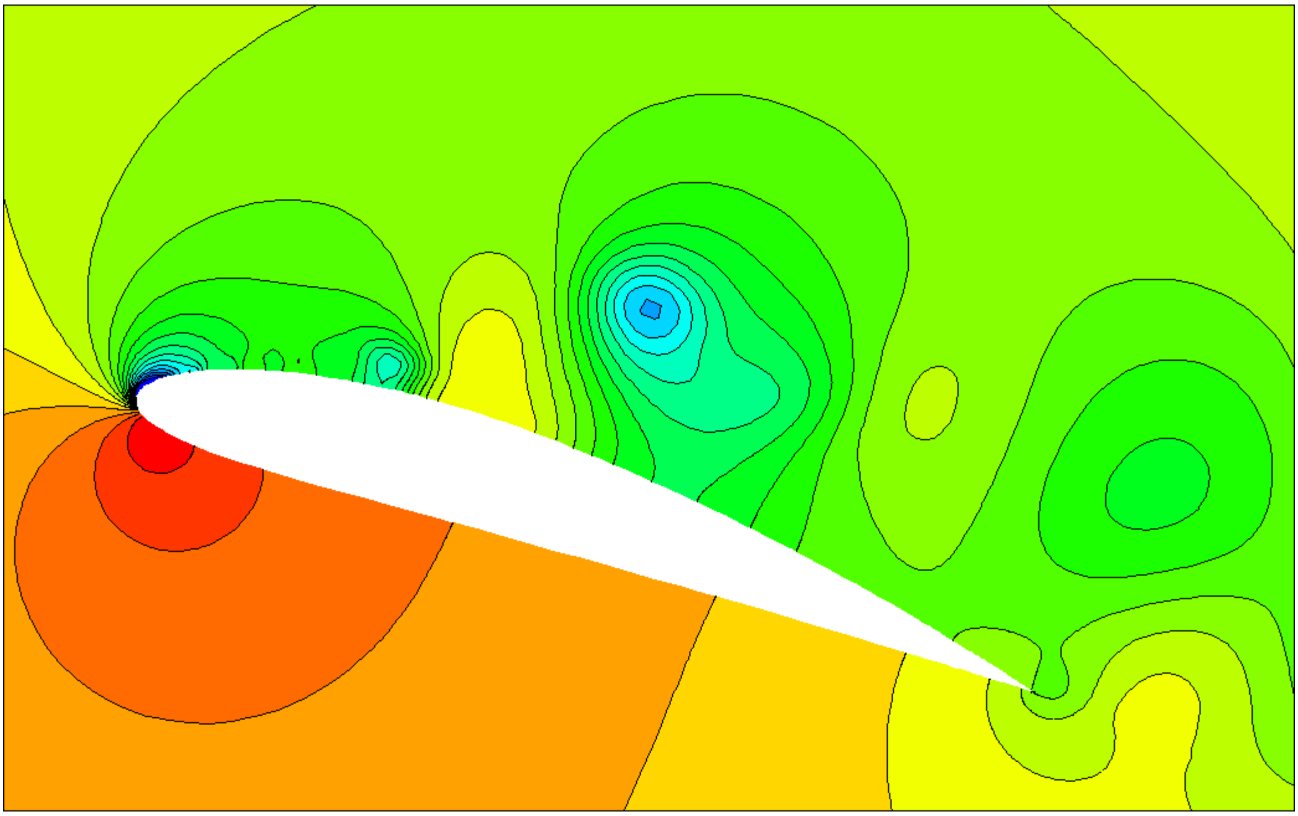


а)

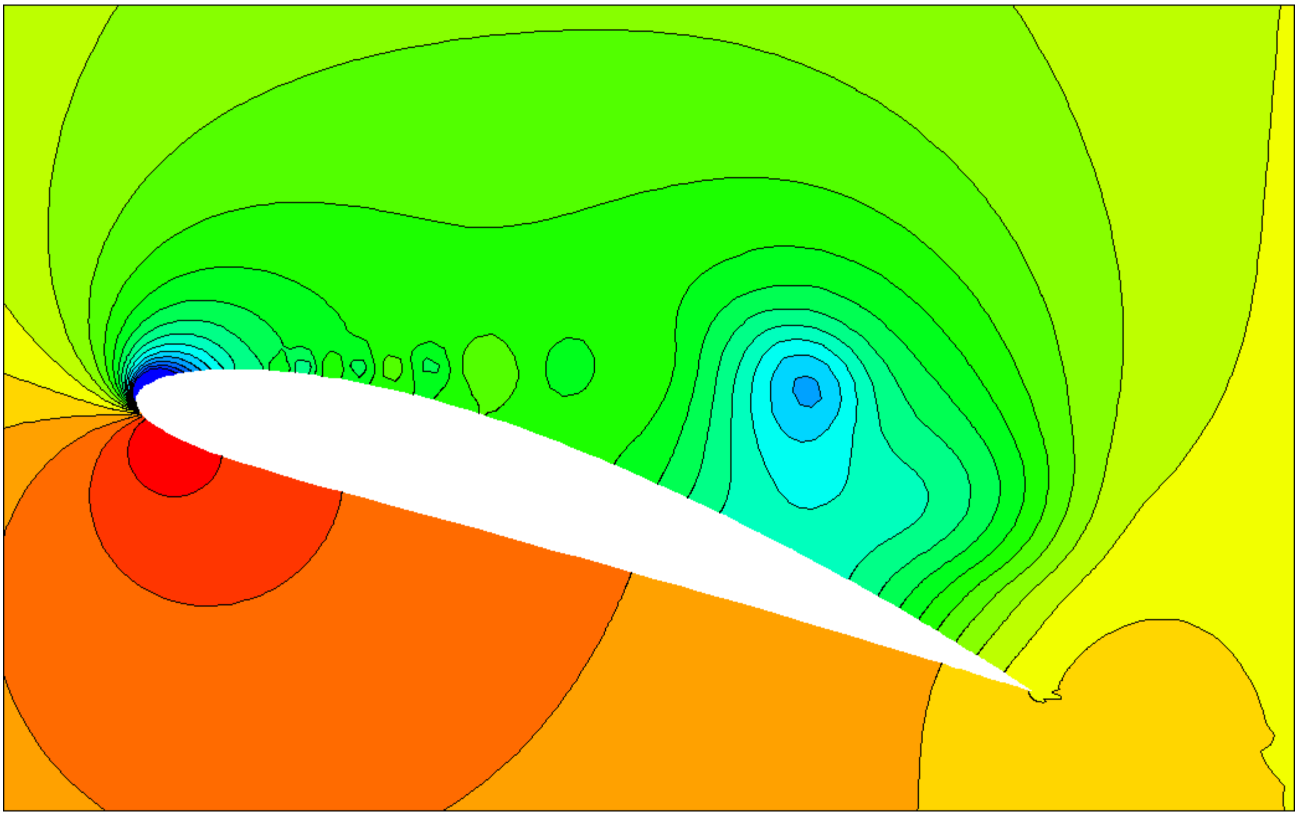


б)

Рисунок 4.22 – Залежність коефіцієнтів сили лобового опору (а) і підйомної сили (б) аеродинамічного профілю NACA 4412 від кута атаки

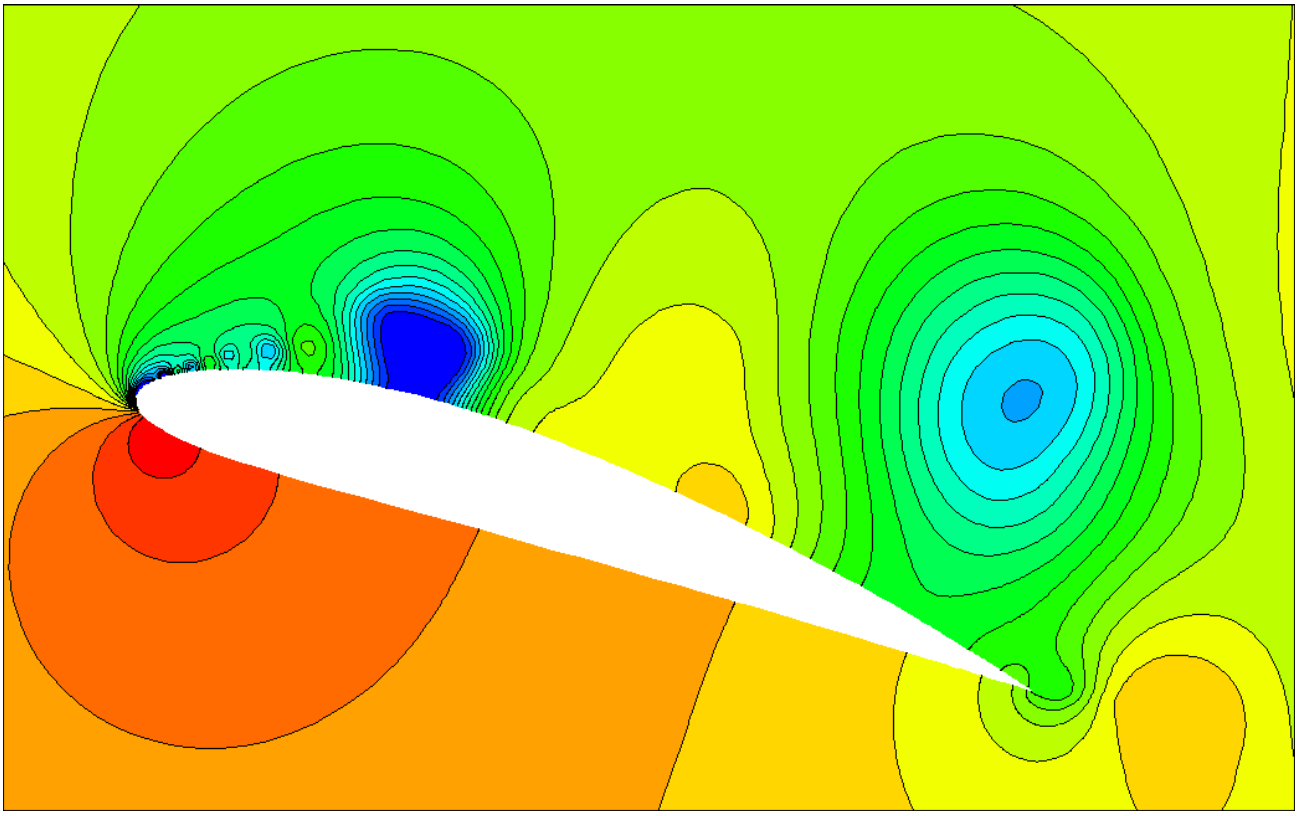


а)

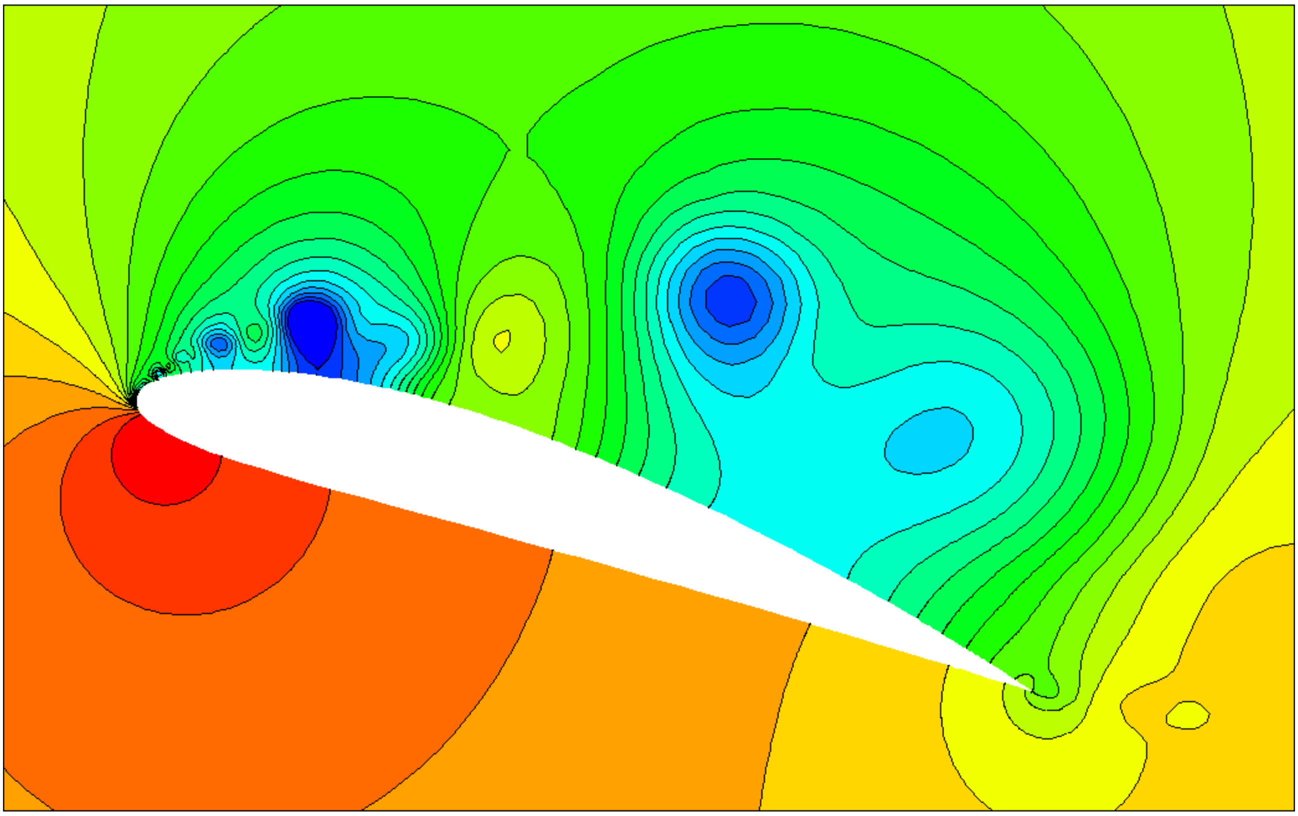


б)

Рисунок 4.23 – Ізобари при обтіканні профілю NACA 4412 для кута атаки 18°: а – t = 222; б – t = 224

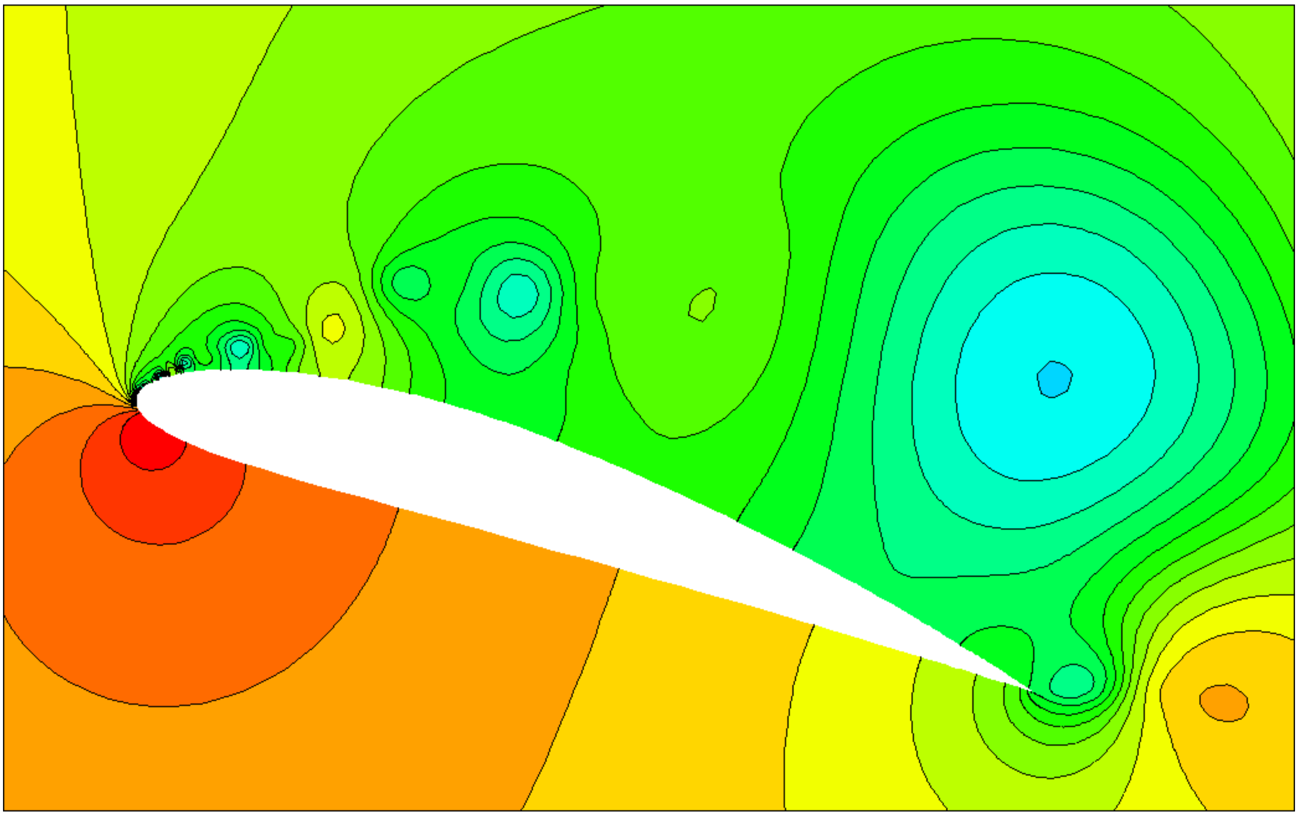


а)

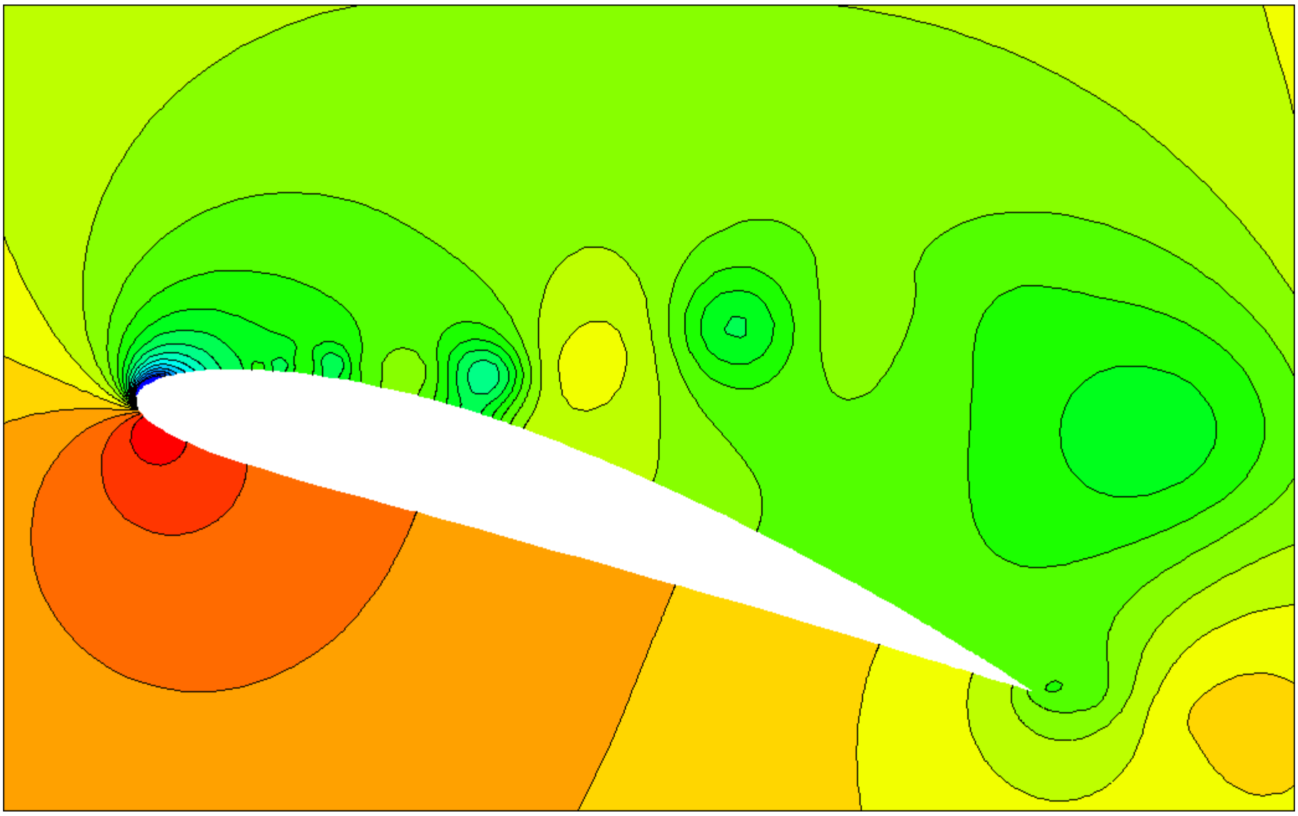


б)

Рисунок 4.24 – Ізобари при обтіканні профілю NACA 4412 для кута атаки 18°: а – t = 226; б – t = 228

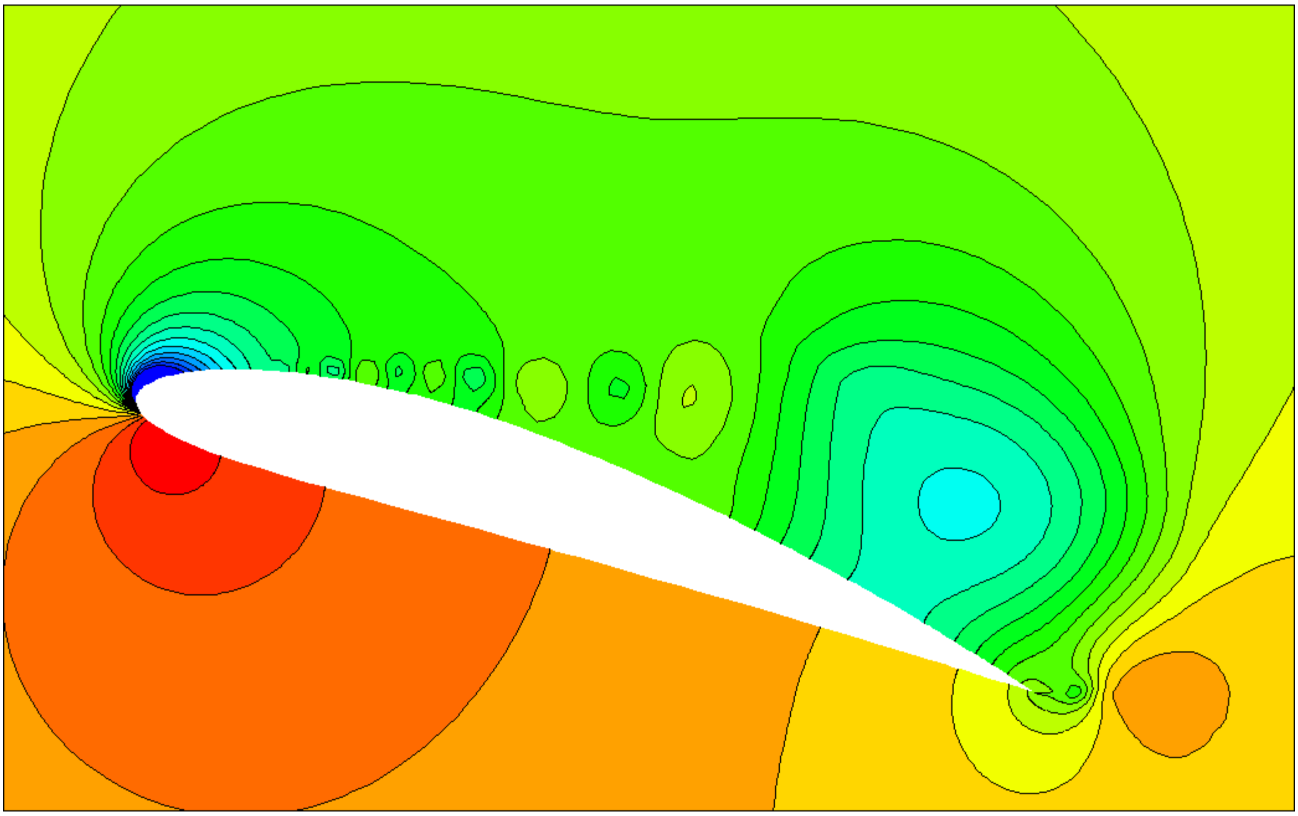


а)

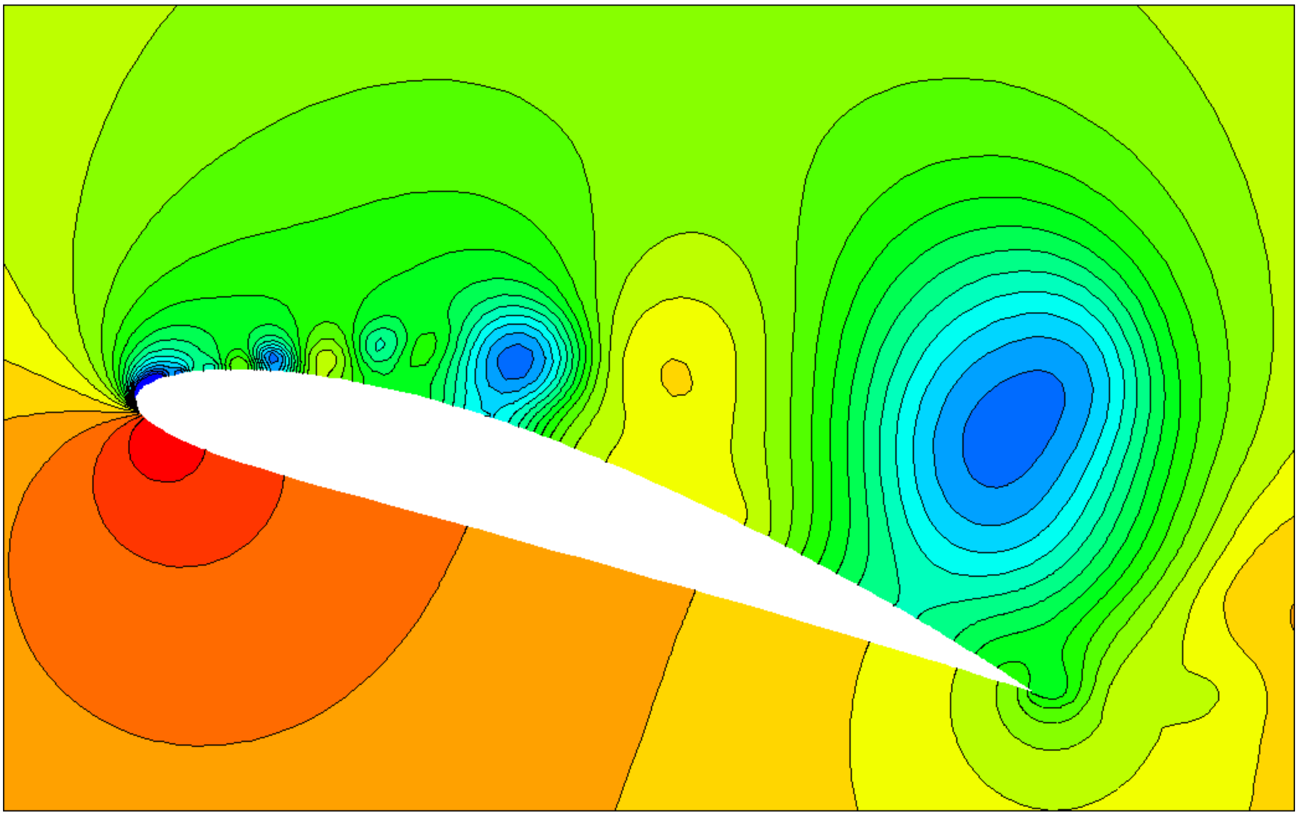


б)

Рисунок 4.25 – Ізобари при обтіканні профілю NACA 4412 для кута атаки 18°: а – t = 230; б – t = 232

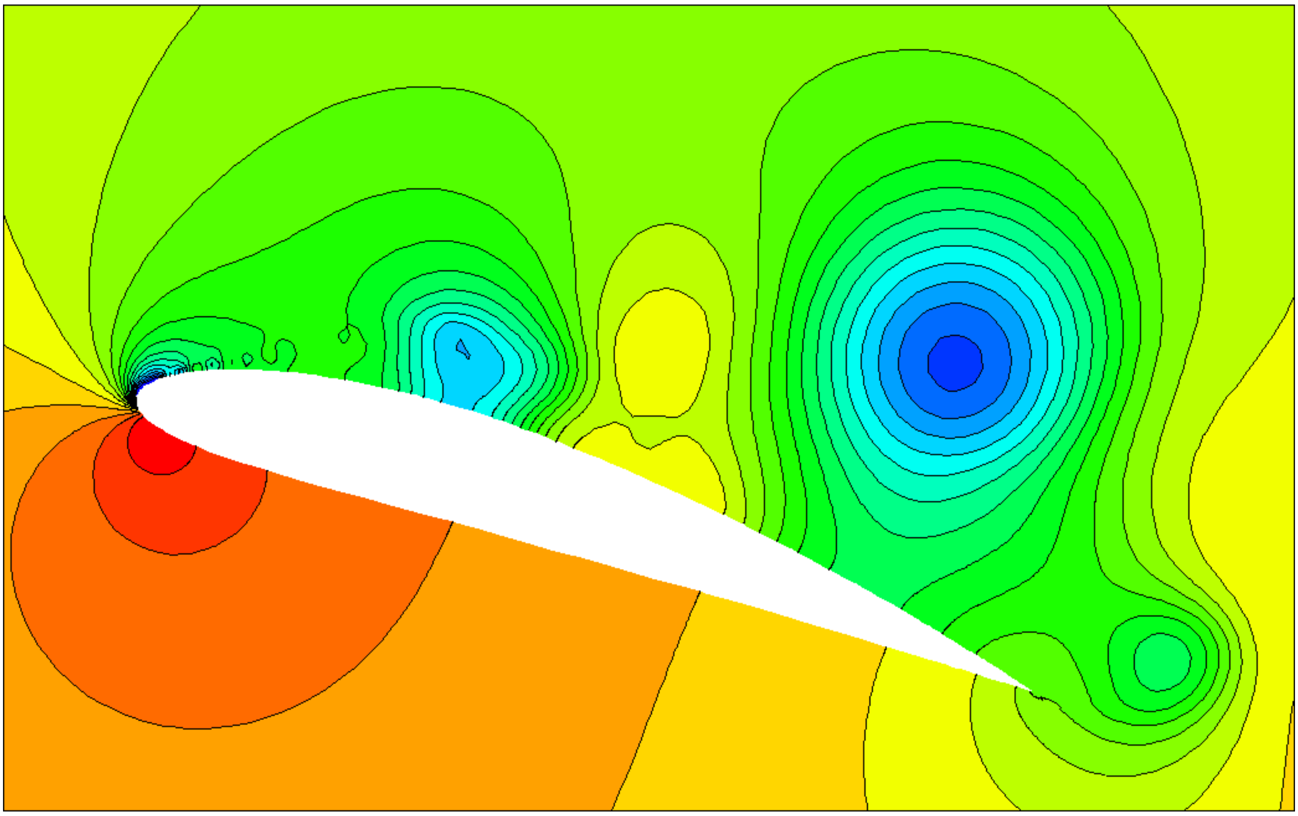


а)

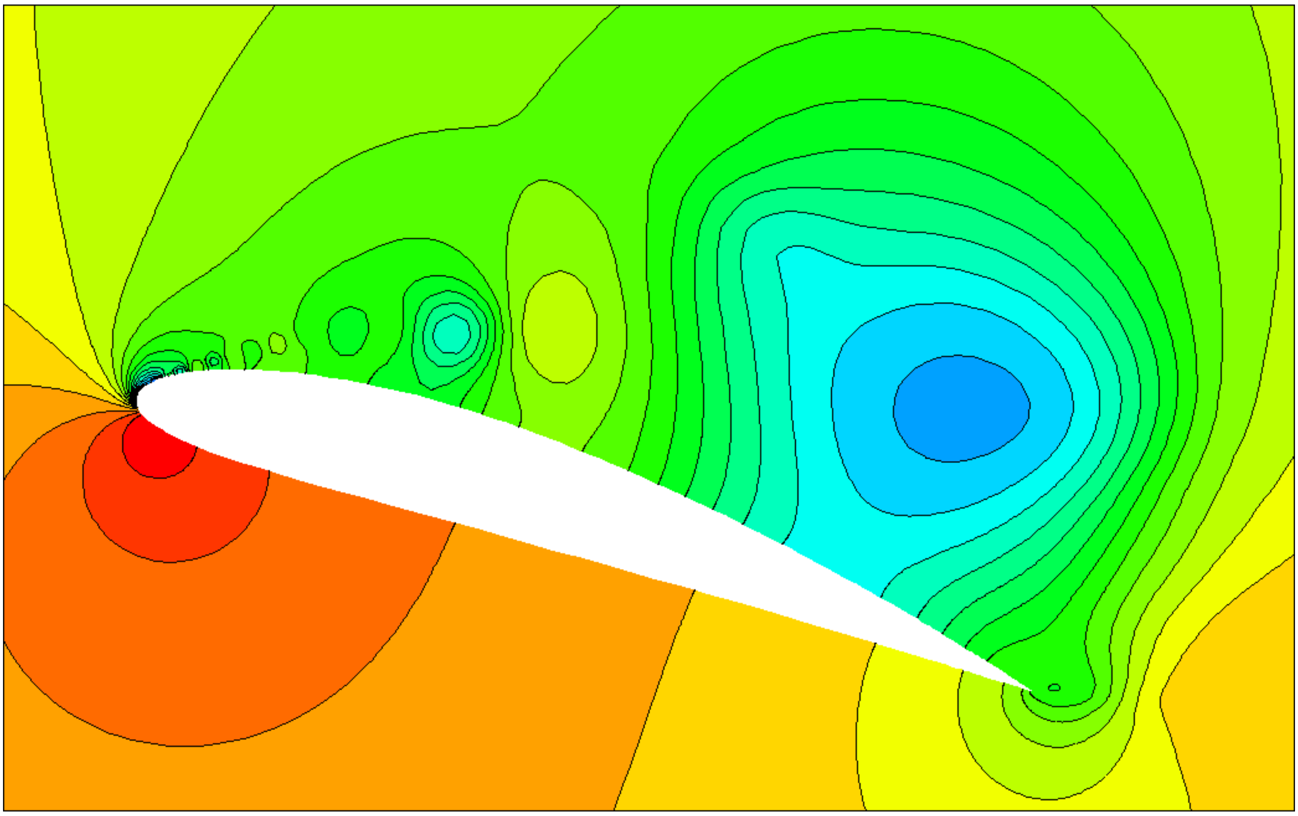


б)

Рисунок 4.26 – Ізобари при обтіканні профілю NACA 4412 для кута атаки 18°: а – t = 234; б – t = 236

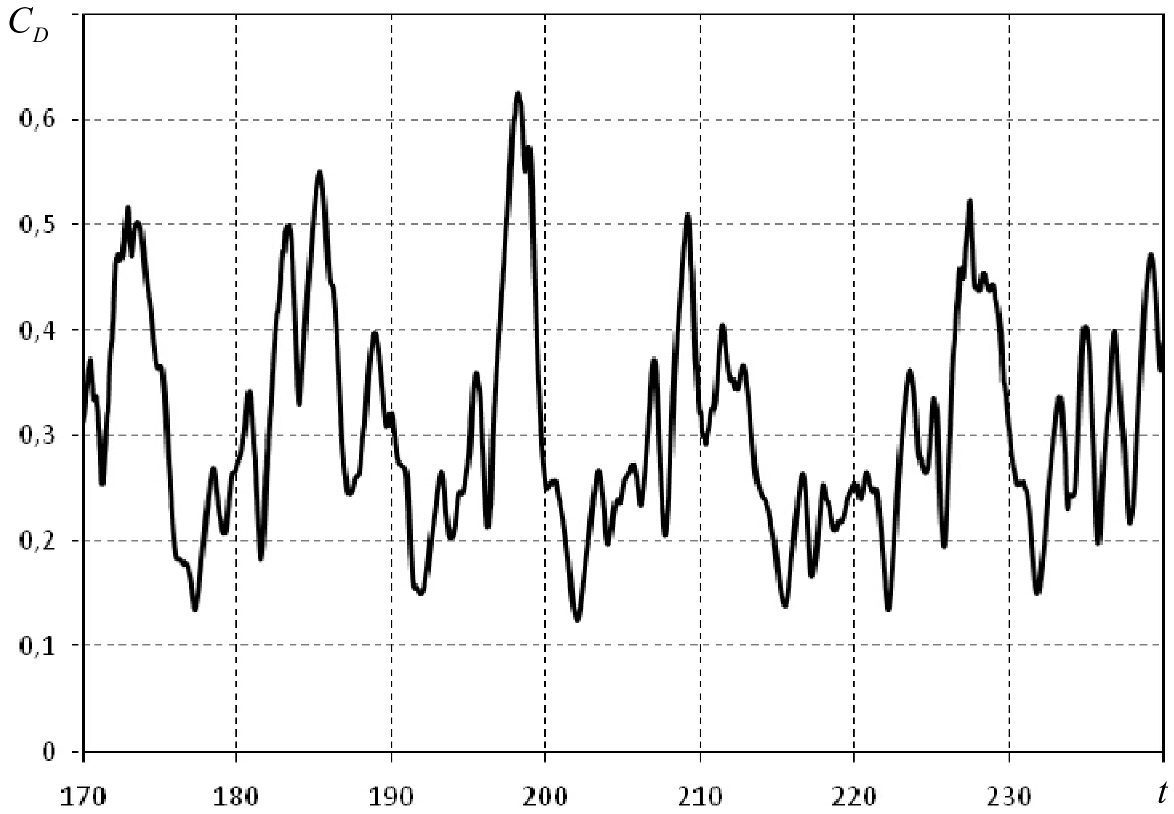


а)

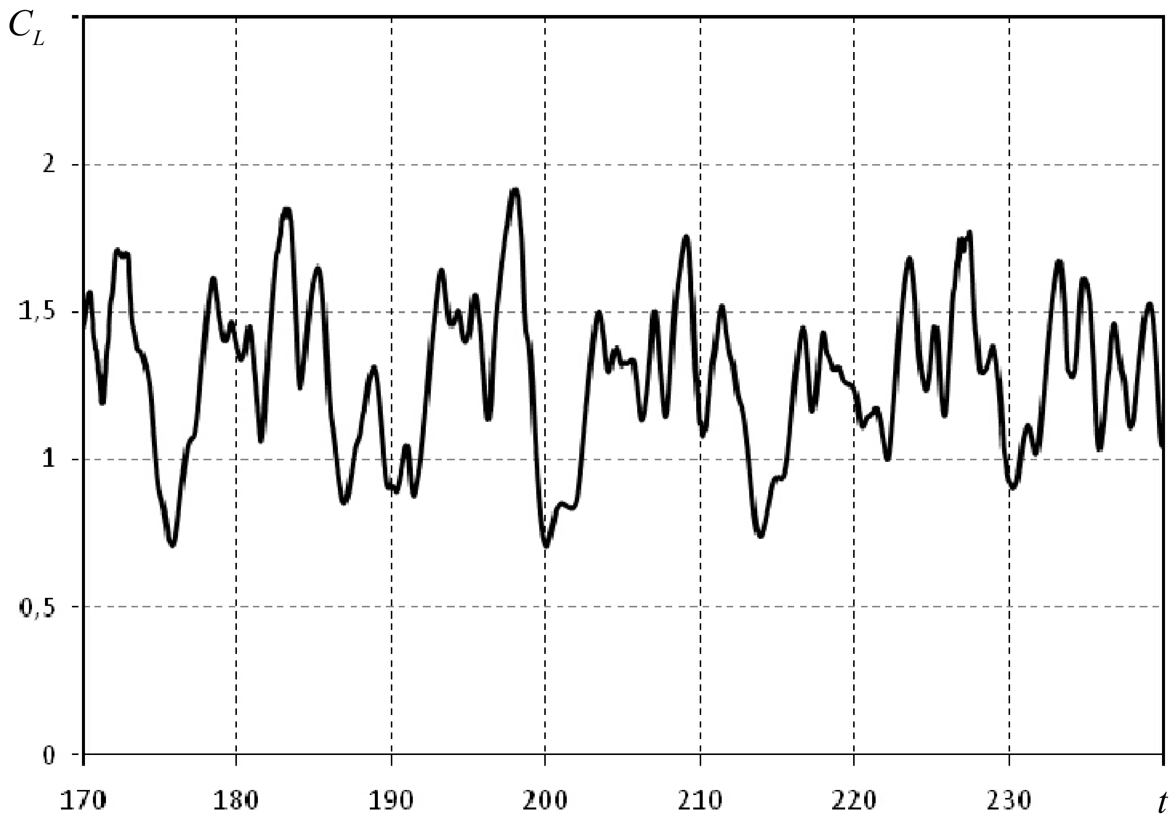


б)

Рисунок 4.27 – Ізобари при обтіканні профілю NACA 4412 для кута атаки 18°: а – t = 238; б – t = 240



а)



б)

Рисунок 4.28 – Залежність коефіцієнтів сили лобового опору (а) і підйомної сили (б) аеродинамічного профілю NACA 4412 в часі

4.4 Висновки до розділу 4

1. Проведено чисельне моделювання турбулентного обтікання плоскої пластини, кругового циліндра та аеродинамічного профілю з урахуванням ламінарно-турбулентного переходу в широкому діапазоні кутів атаки та чисел Рейнольдса.

2. Показано, що застосування диференціальної $\gamma\text{-}Re_\theta$ моделі ламінарно-турбулентного переходу дозволяє врахувати складні явища при обтіканні плоскої пластини та адекватно описати ламінарно-турбулентний перехід.

3. Проведено порівняння результатів розрахунків обтікання циліндра з використанням моделі $\gamma\text{-}Re_\theta$ ламінарно-турбулентного переходу та без неї. Показано, що при низьких числах Рейнольдса, коли обтікання циліндра носить ламінарний характер, а слід турбулентний використання моделі турбулентності SA і SARC призводить до розвитку турбулентного примежового шару на циліндрі та, як наслідок, до зміни розташування точки відриву. Неправильне розташування точки відриву впливає на розподіл тиску у донній частини циліндра та на інтегральні аеродинамічні характеристики.

4. Встановлено, що застосування моделі переходу дозволяє адекватно відтворити ламінарний відрив поблизу передньої крайки профілю NACA 4412 з наступним його приєднанням. Застосування однієї тільки моделі SA призводить до зайвої генерації турбулентної в'язкості.

5. Показано, що застосування $\gamma\text{-}Re_\theta$ моделі ламінарно-турбулентного переходу якісно та кількісно покращує результати чисельного моделювання.

6. Виявлено фізичні особливості обтікання плоскої пластини, кругового циліндра та аеродинамічного профілю на основі чисельного розв'язку нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини з використанням різних моделей турбулентності і $\gamma\text{-}Re_\theta$ моделі ламінарно-турбулентного переходу.

7. Отримано результати обтікання плоскої пластини, кругового циліндра та аеродинамічного профілю NACA 4412 якісно узгоджуються з експериментальними даними в широкому діапазоні чисел Рейнольдса.

8. Вироблено рекомендації щодо застосування різних моделей турбулентності разом з моделлю ламінарно-турбулентного переходу для конкретного класу задач.

РОЗДІЛ 5
АЕРОДИНАМІКА ЕЛЕМЕНТІВ ЕНЕРГЕТИЧНИХ І ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ

У даному розділі розглянуто особливості турбулентного обтікання елементів енергетичних і транспортних систем у широкому діапазоні чисел Рейнольдса та кутів атаки. Проведено чисельне моделювання турбулентного обтікання профілів симетричної та несиметричної форми, багатоелементного профілю в крейсерській, злітно-посадковій та перехідній конфігураціях, а також профілю транспортного засобу поблизу екрану. Аналізуються структура течій, коефіцієнти тиску, тертя, підйомної сили та сили лобового опору. Виконано порівняння отриманих чисельних результатів з наявними експериментальними даними.

5.1 Чисельне моделювання турбулентного обтікання J-профілю

За останнє десятиліття великого поширення набули вертикально-осьові (ВО) вітроенергетичні установки (ВЕУ). У їх конструкціях використовуються добре відомі ротори Савоніуса, Дар'є та їх комбінації. Ротор Савоніуса працює за рахунок сили лобового опору на відміну від ротора Дар'є, що використовує дію підйомної сили.

Подальший прогрес в удосконалюванні ВО ВЕУ може бути пов'язаний із впровадженням аеродинамічних профілів нового типу. Нова форма профілю, так званий J-профіль, виходить, якщо в стандартного профілю вирізати частину несучої поверхні [12]. Передбачається, що дана форма профілю дозволяє працювати лопаті ротора Дар'є, як за рахунок підйомної сили, так і за рахунок сили лобового опору. Застосування J-профілю лопаті може підвищити ефективність роботи ВЕУ в цілому, уникнути виникнення «мертвих зон» і знизити мінімальну швидкість вітру необхідну ротору Дар'є для самозапуску та роботи.

У порівнянні із класичними, надкритичними та багатоелементними профілями J-профіль являє собою нове сімейство профілів, аеродинамічні властивості якого практично не вивчені.

В даний час відсутні результати чисельного моделювання цього класу течій на основі рівнянь Нав'є-Стокса. Є окремі розрізнені дані щодо застосування J-профілю в якості лопаті в експериментальних ВО ВЕУ [315]. Однак це скоріше евристичний підхід, ніж продумана технічна конструкція.

5.1.1 Опис експериментальних досліджень

Експериментальні дослідження моделі лопаті вертикально-осьової ВЕУ, з розімкненим контуром (J-профіль) проводилися в аеродинамічній трубі Т-5, яка знаходиться в лабораторії кафедри аерогідромеханіки і енергомасопереносу Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Дана аеродинамічна труба являє собою установку замкненого типу з відкритою робочою частиною.

Для проведення експериментальних досліджень розроблено і виготовлено вузол кріплення моделей, що дозволяє здійснити виміри аеродинамічних характеристик при круговій продувці (діапазон кутів атаки від 0° до 360°) з інтервалом 10°. З метою верифікації даних продувок здійснювалося не менш двох разів при фіксованому значенні швидкості потоку та куті атаки.

Стосовно досліджуваних моделей модернізовані трикомпонентні аеродинамічні ваги, що дозволяють визначати при круговій продувці лобовий опір, підйомну силу та момент, що діє на модель. Вимірювані параметри перетворювалися в електричні сигнали та оцифровувались.

У натурному експерименті довжина хорди J-профілю становила 0.185 м, а товщина – 0.001 м. Передня частина профілю являє собою частину кола радіусом 0.03 м. У нижній частині окружність сполучалася з кривою, яка формує закриту частину профілю. Швидкість потоку, що набігає, становила 30 м/с. Число Рейнольдса, що розраховано за хордою та швидкістю потоку, що набігає, становило $3.7 \cdot 10^5$. Геометрію J-профілю в безрозмірних величинах наведено на рис. 5.1.

Результати експериментів представлено нижче у вигляді графіків, що відображають залежності аеродинамічних характеристик J-профілю від кута атаки.

5.1.2 Результати чисельного моделювання обтікання J-профілю

В якості базових використовувалися багатоблочні пересічні структуровані сітки (типу Chimera). Такий вид сіток забезпечує роздільну здатність примежових шарів поблизу поверхні та дозволяє будувати сітки навколо тіл складної геометрії. Результат генерації, узгодження та оптимізації розрахункових сіток наведено на рис. 5.2. Розрахункова сітка містила $1.2 \cdot 10^5$ вузлів. Нульовий кут атаки відповідає розташуванню J-профілю на рис. 5.1.

Турбулентне обтікання J-профілю в широкому діапазоні кутів атаки носить нестаціонарний характер (рис. 5.3) [123, 125]. На якість відтворення масивних вихорів і течії в цілому ключову роль відіграє вибір підходу до моделювання турбулентності.

Результати обчислювальних експериментів для нульового кута атаки (рис. 5.3) показали, що підхід, заснований на моделюванні великих вихорів із затримкою (DDES), краще відтворює нестаціонарні фізичні особливості, що виникають при обтіканні J-профілю (рис. 5.3 в, г). У внутрішній порожнині J-профілю формується каскад вихорів, які взаємодіють між собою та вихорами, що сходять із гострої крайки. Утворюється нестаціонарна відривна область, з якої періодично викидаються вихрові структури в область основної течії. Осереднені за часом аеродинамічні характеристики (рис. 5.4) для даного кута атаки також відрізняються, хоча і не так принципово.

Істотні нестаціонарні явища спостерігаються при великих кутах атаки профілю, хоча застосовувані підходи дають дещо різну чисельну реконструкцію структури потоку (рис. 5.3 б, г, е). Так використання моделі SALSA призводить до масивного відриву з формуванням у верхній частині профілю одного великого вихору, сумірного за розмірами з хордою профілю. Наявність масивних вихорів у підвітряній області профілю пов'язано зі слабким відновленням тиску в цій області, що дає завищені значення осередненого коефіцієнта лобового опору (рис. 5.4 а). У той самий час, застосування DDES підходу призводить до формування дещо меншої зони відриву із серією дрібних вихорів більшої інтенсивності (рис. 5.3 г). Така картина обтікання є більш реалістичною та забезпечує краще узгодження з експериментальними даними (рис. 5.4). Загальна тенденція така: чим масивніший відрив, тим більша розбіжність між розрахунковими даними, отриманими за допомогою моделі SALSA і експериментальними даними, особливо для осередненого за часом коефіцієнта лобового опору (рис. 5.4 а).

Детальне вивчення фізики процесу обтікання J-профілю та порівняння моделей турбулентності проведено при куті атаки 90°. Даний кут атаки відповідає розташуванню профілю поперек потоку, відкритою стороною в напрямку потоку, що набігає. Характер обтікання носить нестаціонарний характер з масивними відривними зонами та великомасштабними вихорами в сліді.

У початковий момент часу $t = 0$ (рис. 5.5 а, б) у підвітряній частині J-профілю розташовується великомасштабний вихор ***а***. На верхній і нижній частинах зароджуються вихори ***б*** і ***в***. Результати, отримані за моделлю SALSA (рис. 5.5 а), відрізняються від тих, що отримані за допомогою DDES (рис. 5.5 б), більшими розмірами та меншою інтенсивністю вихорів.

У наступний момент часу $t = 2$ продовжується зростання вихорів ***б*** і ***в*** у підвітряній області профілю (рис. 5.5 в). Вихор ***а*** переміщається вниз за потоком. У той самий час вихор ***а*** (рис. 5.5 г) зміщується вгору та починає взаємодіяти з каскадом вихорів, що зійшли з верхнього краю профілю. Вихори в цій області набагато менші за тих, що отримано з використанням моделі SALSA (рис. 5.5 в). Вихори ***б*** відрізняються за своєю інтенсивністю, хоча за розмірами вони дуже схожі.

У момент часу t = 4 (рис. 5.5 д, е) вихори ***а*** майже повністю залишають розглянуту область. Вихори ***б*** збільшуються в розмірах і зносяться вниз за потоком. Вихори ***в*** продовжують формуватися на гострій крайці J-профілю.

Для моментів часу t = 6 (рис. 5.6 а) і t = 8 (рис. 5.6 в) вихор ***б*** зберігає свою стійку форму та зноситься вниз за потоком. Вихор ***в*** збільшується в розмірах і займає половину довжини хорди профілю. У ті ж моменти часу вихор ***б*** розпадається на каскад дрібних вихорів, які взаємодіють один з одним і основним потоком (рис. 5.6 б, г). Така поведінка вихорів більш властива нестаціонарній структурі турбулентності.

При t = 10–16 (рис. 5.6, 5.7) в районі задньої крайки профілю починає утворюватися вихор ***д.*** Причому для моделі SALSA цей вихор має стабільну структуру, у той час як для DDES він розпадається на десяток більш дрібних вихорів.

Нестаціонарна картина обтікання J-профілю чітко прослідковується й за змінами неосереднених коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили в часі (рис. 5.8). Модель DDES підтримує еволюцію за часом і простором серії великомасштабних вихорів. Модель турбулентності SALSA, як пристінна модель, веде до «розмазування» частини вихрових структур з утворенням одного великого вихору (макровихря). Наявність макровихорів у сліді формує велику область зниженого тиску, що призводить до великого перепаду тиску між навітряною та підвітряною сторонами J-профілю, і, як наслідок, завищеним значенням коефіцієнта лобового опору.

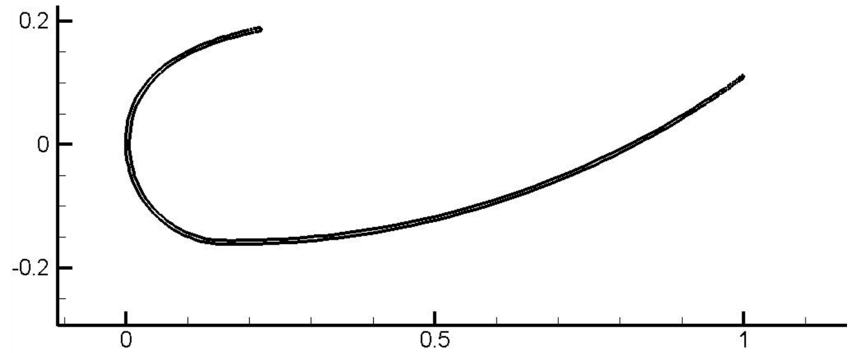
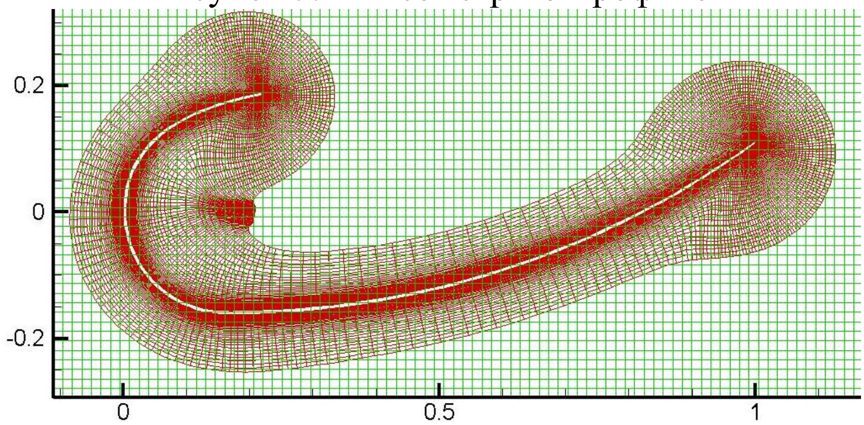
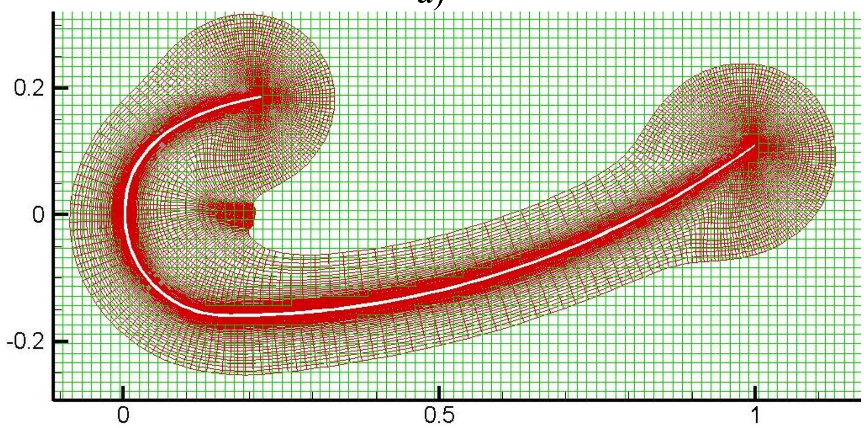


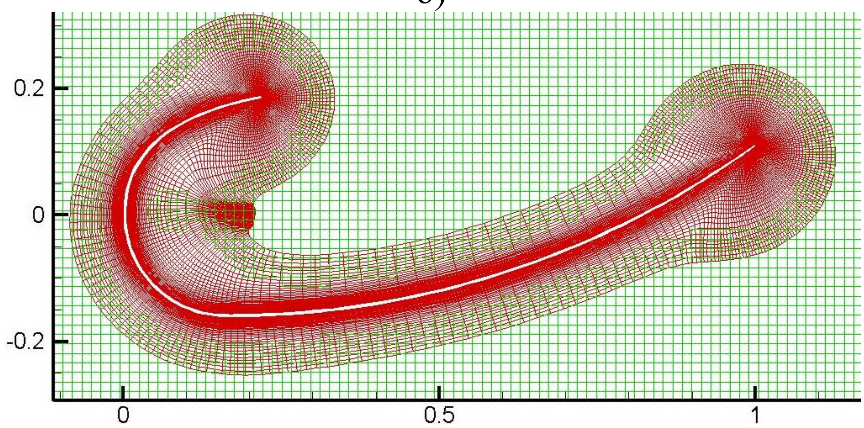
Рисунок 5.1 – Геометрія J-профілю



а)



б)



в)

Рисунок 5.2 – Багатоблочна пересічна структурована сітка (типу Chimera) навколо J-профілю: а – генерація пересічних сіток; б – узгодження розрахункових областей; в – оптимізація багатоблочної сітки

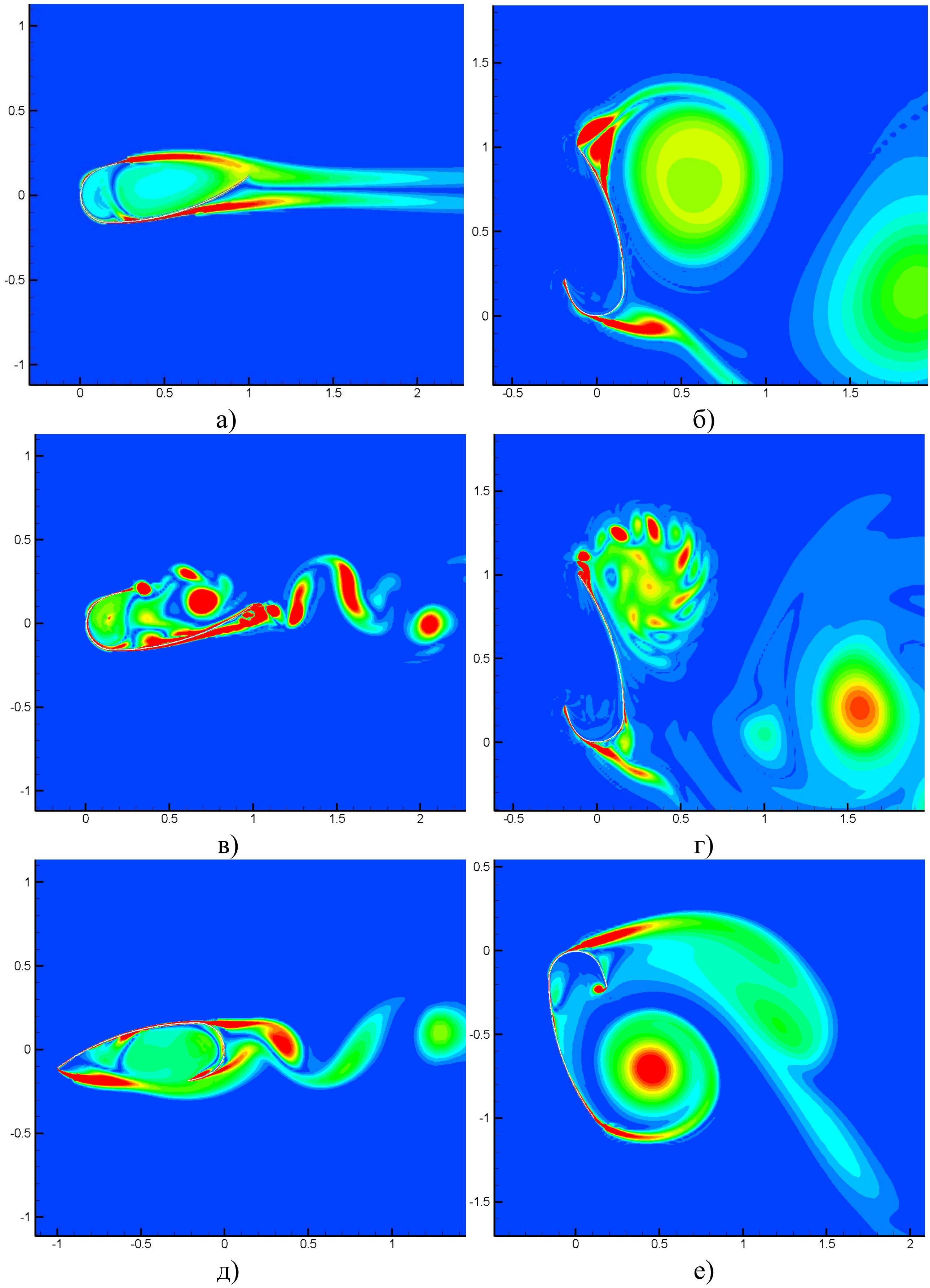
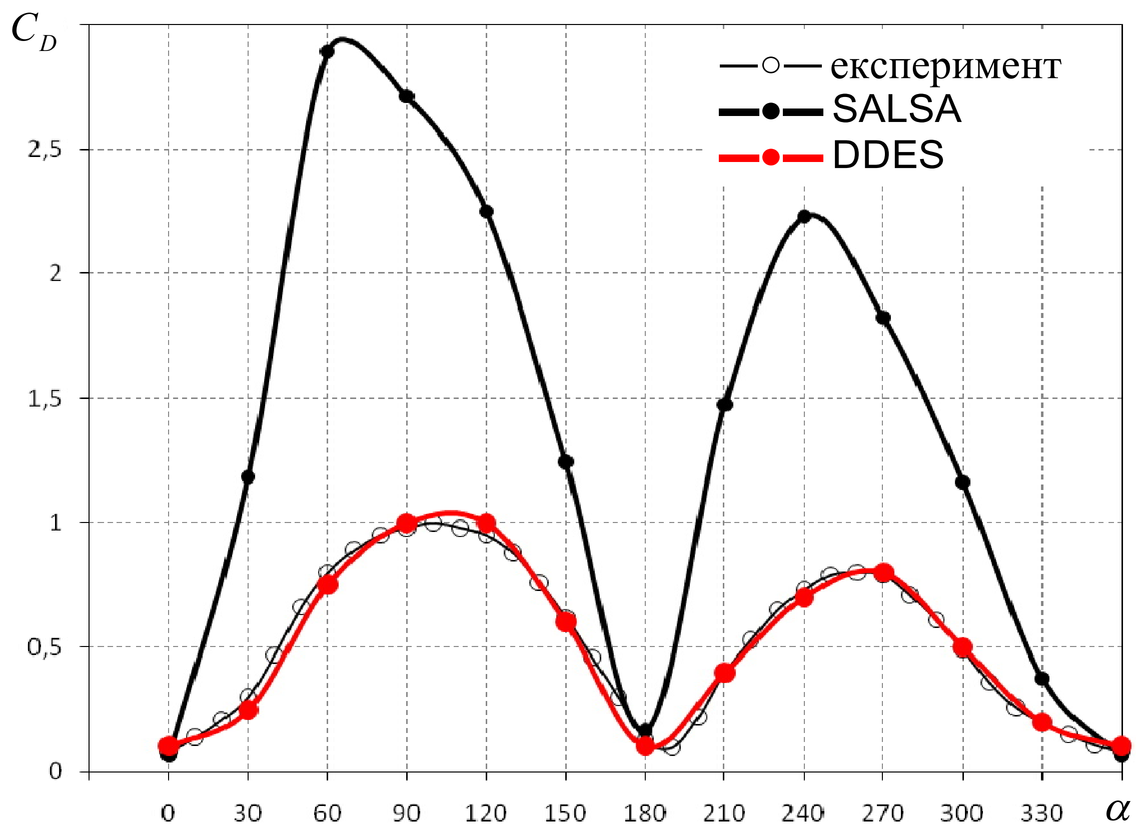
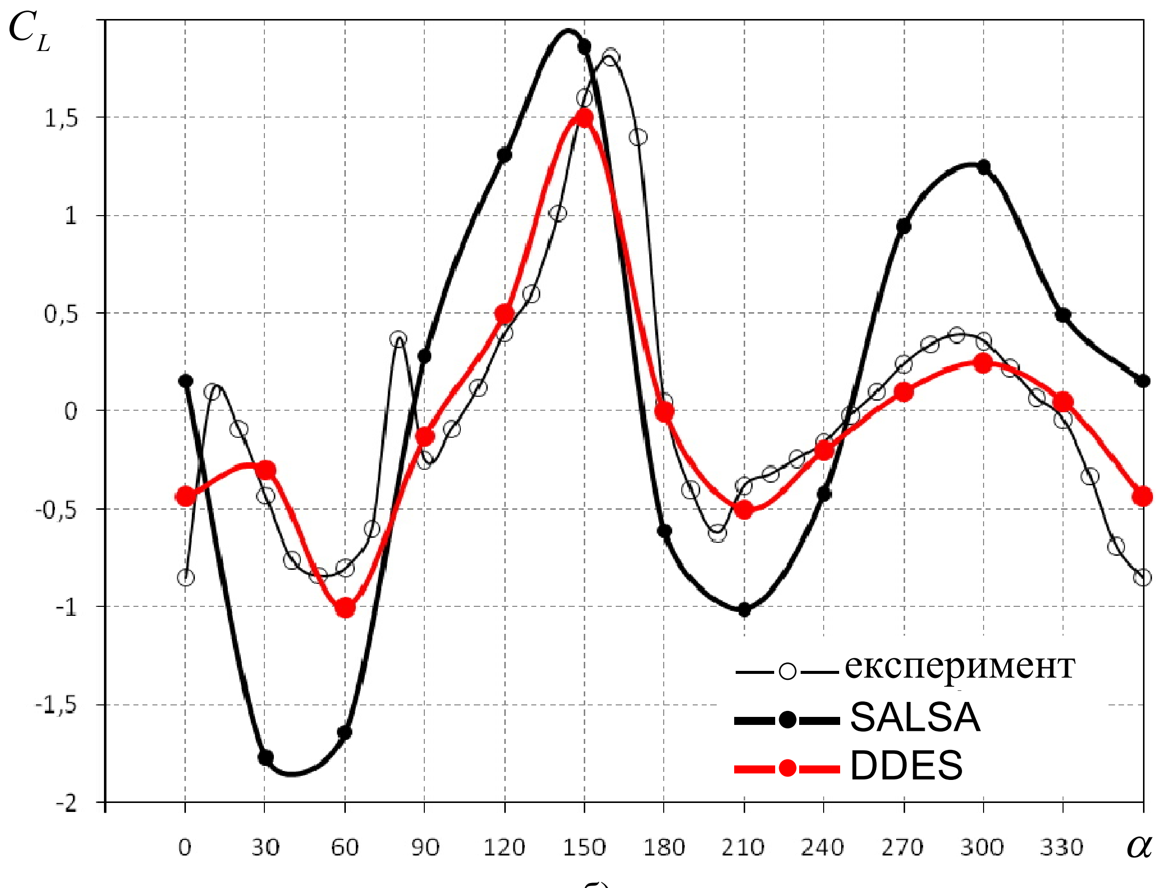


Рисунок 5.3 – Турбулентне обтікання J-профілю при кутах атаки 0° (а), 90° (б, г), 180° (д) і 270 ° (е) моделями турбулентності SALSA (а, б, д, е) і DDES (в, г)



а)



б)

Рисунок 5.4 – Залежність коефіцієнтів лобового опору (а) і підйомної сили (б) J-профілю від кута атаки

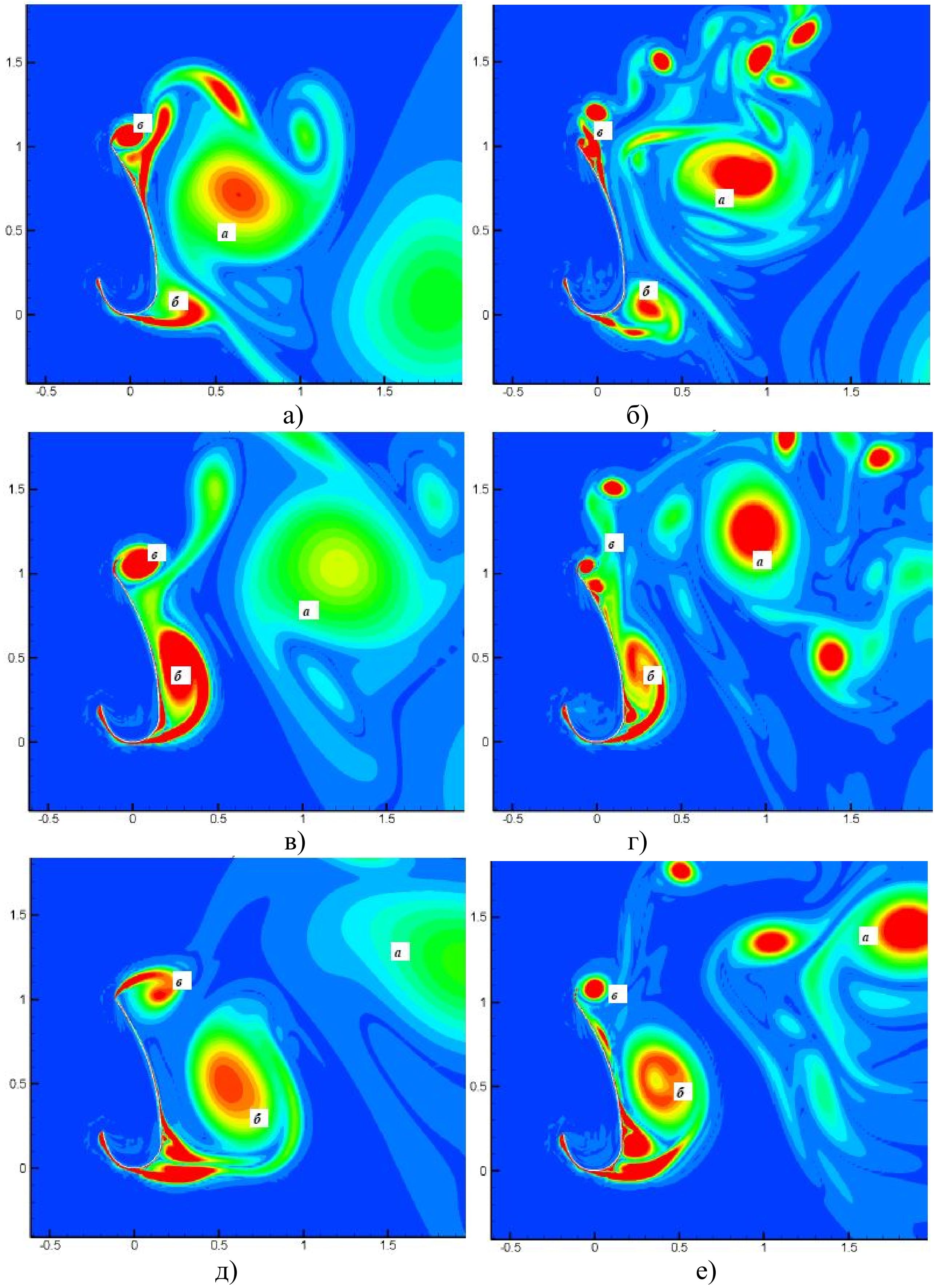


Рисунок 5.5 – Розвиток течії при обтіканні J-профілю (кут атаки 90°) в моменти часу 0 (а, б), 2 (в, г), 4 (д, е) за моделями турбулентності (а, в, д) і DDES (б, г, е)

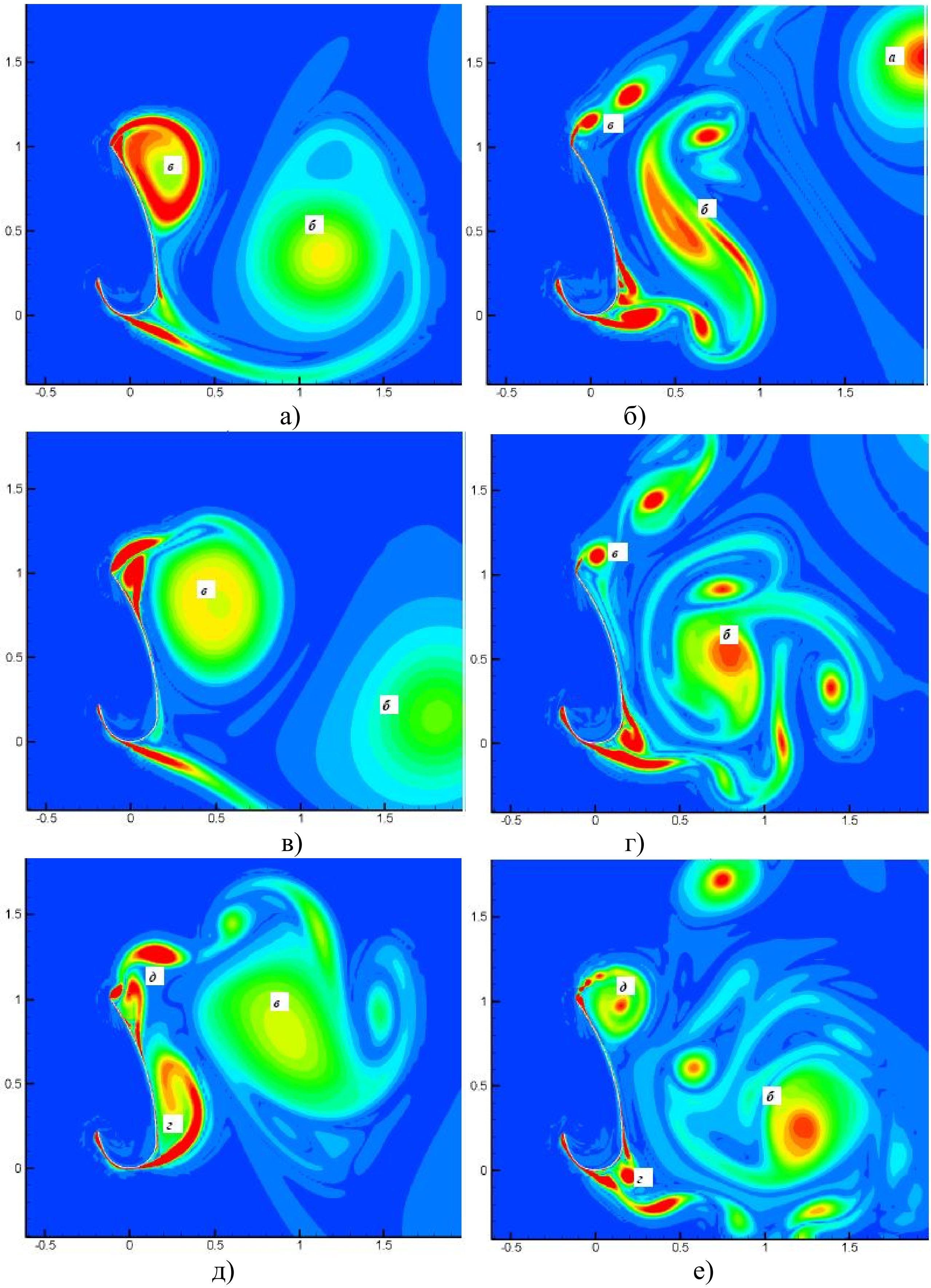


Рисунок 5.6 – Розвиток течії при обтіканні J-профілю (кут атаки 90°) в моменти часу 6 (а, б), 8 (в, г), 10 (д, е) за моделями турбулентності SALSA (а, в, д) і DDES (б, г, е)

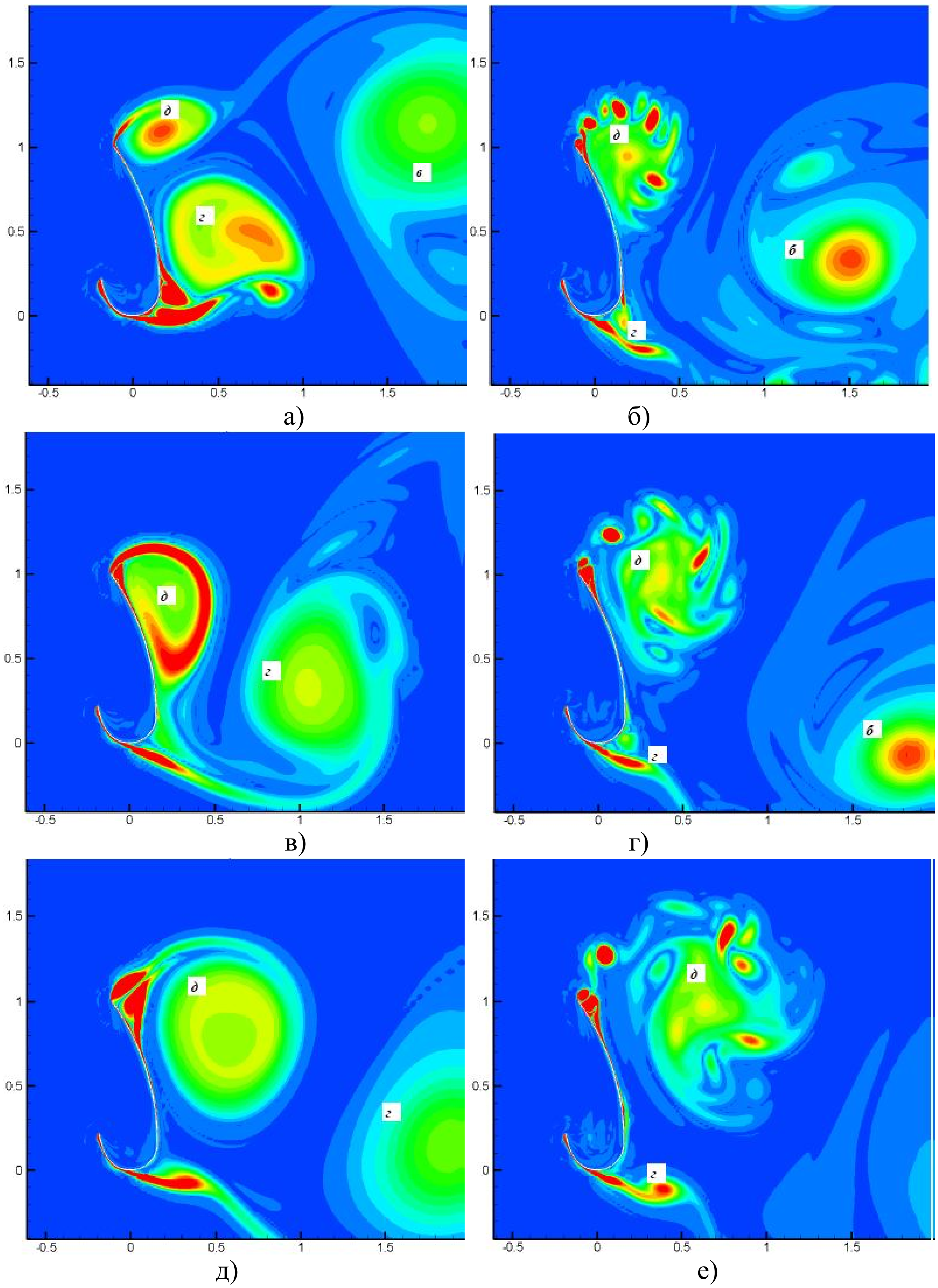
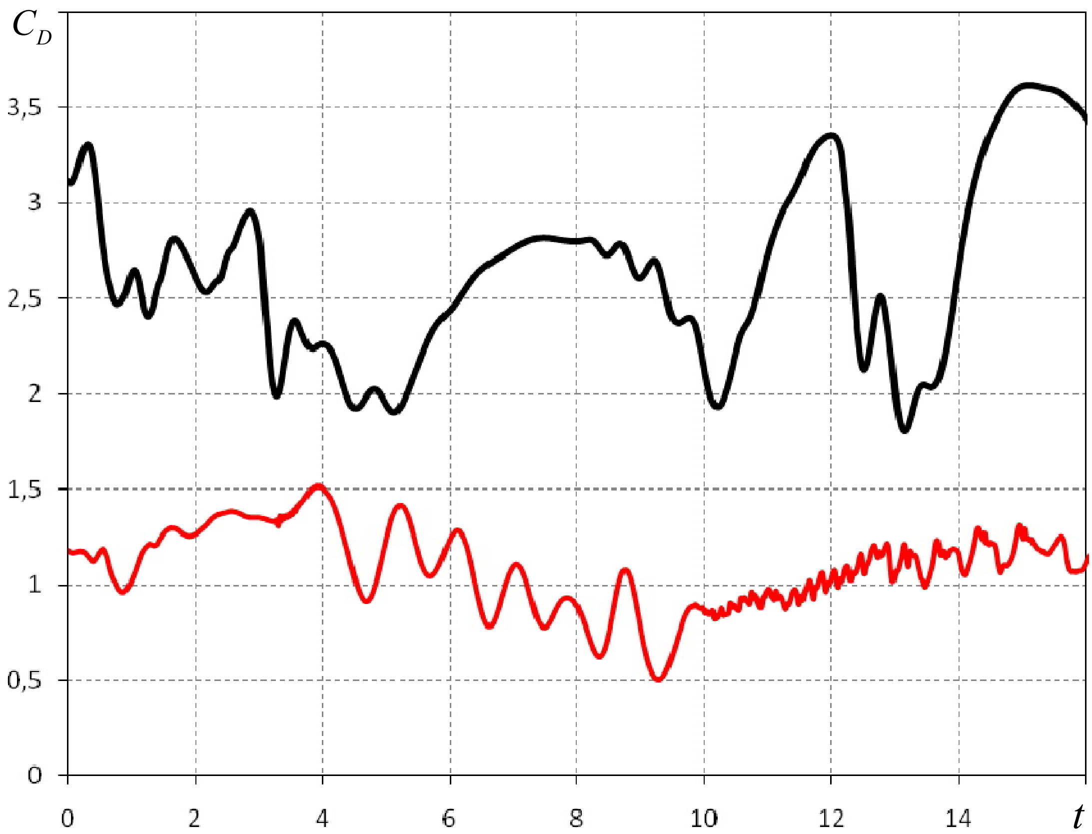
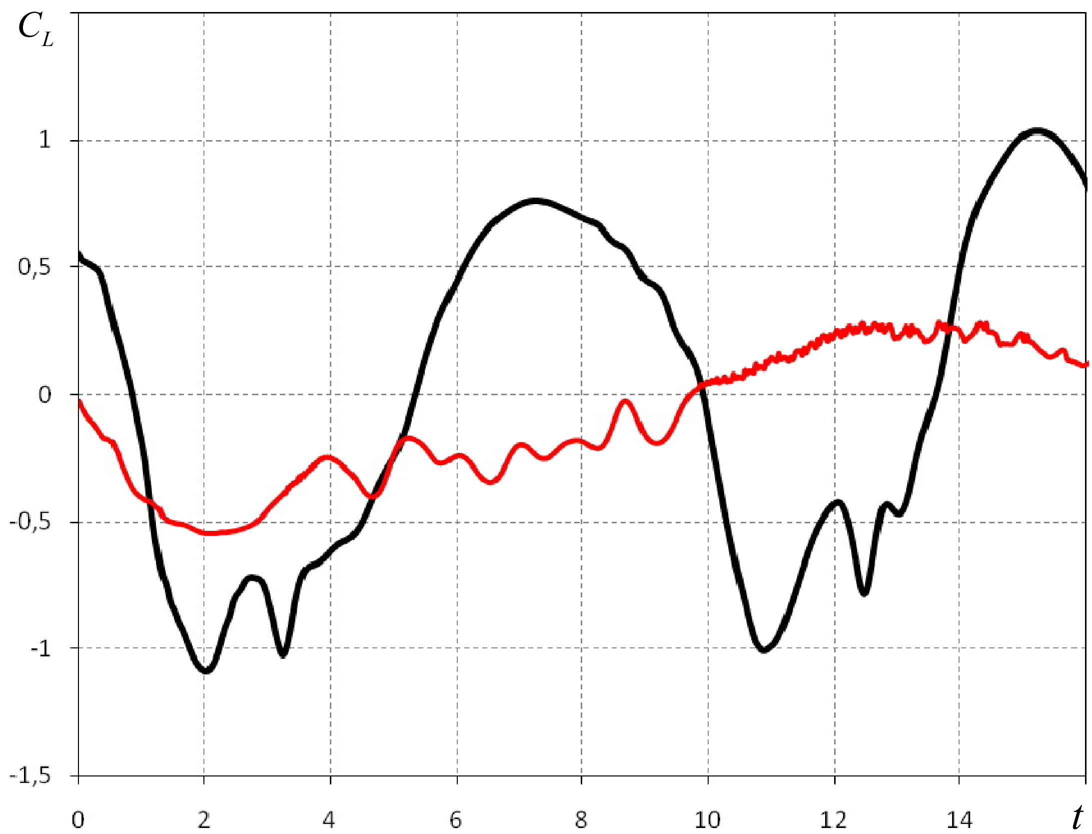


Рисунок 5.7 – Розвиток течії при обтіканні J-профілю (кут атаки 90°) в моменти часу 12 (а, б), 14 (в, г), 16 (д, е) за моделями турбулентності SALSA (а, в, д) і DDES (б, г, е)



а)



б)

Рисунок 5.8 – Зміна коефіцієнтів лобового опору (а) і підйомної сили (б) J-профілю (кут атаки 90°) в часі (▬ – SALSA, ▬ –DDES)

5.2 Математичне моделювання аеродинаміки профілів симетричної та несиметричної форми

У цьому розділі проведено комп'ютерне моделювання аеродинаміки лопатей ротора Дар'є замкненого і розімкнутому контуру симетричної та несиметричної форми [127, 131]. Основною метою даних досліджень було визначення впливу ступеня замкнутості несиметричного J-профілю на його аеродинамічні характеристики та порівняння їх зі значеннями для симетричних профілів, а також з експериментальними даними.

Експериментальні дослідження однієї моделі лопаті вертикально-осьової ВЕУ, що має профіль з розімкненим контуром (J1) проводилися в аеродинамічній трубі Т–5, яка перебуває в лабораторії кафедри аерогідромеханіки і енергомасопереносу Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Дана аеродинамічна труба являє собою установку замкненого типу з відкритою робочою частиною.

У натурному експерименті довжина хорди профілю J1 становила 0.185 м, а товщина – 0.001 м. Передня частина профілю являє собою частину окружності радіусом 0.03 м. У нижній частині окружність сполучалася з кривою, яка формує закриту частину профілю. Швидкість потоку, що набігає, становила 30 м/с. При чисельному моделюванні в якості характерного розміру було обрано хорду профілю. Число Рейнольдса розраховано за хордою та швидкістю потоку, що набігає, дорівнює $3.7 \cdot 10^5$.

Геометрію профілів різної форми в безрозмірному вигляді наведено на рис. 5.9. Таке розташування профілів відповідає нульовому куту атаки. За додатний кут атаки приймаємо розташування профілю при повороті його проти годинникової стрілки. На рис. 5.9 а-в представлено J-профілі з різним ступенем закритості. Якщо замкнути J-профіль отримаємо несиметричний замкнутий профіль (рис. 5.9 г). Для порівняння з несиметричними профілями замкнутого і розімкнутого контуру візьмемо близький за товщиною класичний симетричний аеродинамічний профілю NACA 0025.

Надалі для зручності позначимо профілі наступним чином: J0 (рис. 5.9 а), J1 (рис. 5.9 б), J2 (рис. 5.9 в), JC (рис. 5.9 г), NACA 0025 (рис. 5.9 д).

Двовимірні розрахунки проведено з використанням нестаціонарних осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (URANS), які замкнуто диференціальною однопараметричною моделлю турбулентності (SALSA). Отримано картини турбулентного обтікання різних профілів замкнутого і розімкнутому контуру з симетричною і несиметричною формами, встановлено залежності коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили від кута атаки, проведено детальне порівняння полів течії при обтіканні цих профілів.

У даній роботі для чисельного моделювання процесів аеродинаміки профілів застосовуються структуровані сітки. Якщо дозволяє геометрія, то будується одноблочна структурована сітка типу-О (рис. 5.10 а, рис. 5.11). В іншому випадку застосовуються багатоблочні структуровані сітки типу Chimera (рис. 5.10 б, в), які є комбінацією пересічних сіток типу-О і -Н. Розрахункові сітки містили від $1.1 \cdot 10^5$ до $1.4 \cdot 10^5$ вузлів залежно від складності геометрії профілю.

Турбулентне обтікання профілів замкнутого і розімкнутого контурів з симетричною та несиметричною формами при куті атаки −15° носить стаціонарний відривний характер. У внутрішній порожнині розімкнутих профілів формується стаціонарна відривна зона з одним (рис. 5.12 а, в) або двома (рис. 5.12 б) макровихорами. Інтенсивність цих вихорів зменшується зі збільшенням ступеня закритості J-профілю. На підвітряній стороні замкнутих профілів формується стаціонарна відривна зона (рис. 5.12 г, д). Її розміри залежать від форми обтічного профілю. Так для несиметричного профілю (рис. 5.12 г) її розміри мінімальні, тому що форма профілю близька до форми симетричного профілю при нульовому куті атаки. У той самий час обтікання симетричного профілю (рис. 5.12 д) відповідає докритичному режиму обтікання без масивного зриву потоку з верхньої підвітряної поверхні.

Для даного кута атаки коефіцієнти лобового опору різних профілів близькі між собою (рис. 5.16 а). Це обумовлено відсутністю зриву потоку з несучих поверхонь. Невелика відмінність у значеннях є наслідком різної відносної товщини цих профілів.

У той самий час для значень коефіцієнта підйомної сили спостерігається широкий розкид (рис. 5.16 б). Так симетричний замкнутий профіль NACA 0025 поводиться «класично» на докритичних кутах атаки – зі збільшенням кута атаки відбувається зростання підйомної сили та сили лобового опору. При куті атаки −15° несиметричний замкнений профіль JC створює невелику підйомну силу, тому що тиск на верхній і нижній поверхнях практично однаковий за винятком невеликої ділянки поблизу задньої крайки. Для розімкнутого профілю J2 частина несучої поверхні в цій області відсутня, тому коефіцієнт підйомної сили близький до нуля. Для несиметричних профілів J0 і J1 з розімкненим контуром коефіцієнти підйомної сили мають негативні значення. Фактично ці профілі при даному куті атаки працюють як антикрило, тобто створюють не підйомну силу, а притискну. Цей факт пояснюється відсутністю більшої частини верхньої поверхні, що призводить до зменшення швидкості потоку в цій області і як наслідок до збільшення тиску.

При куті атаки −5° картина обтікання розглянутих профілів є стаціонарною (рис. 5.13). Розміри відривної зони у внутрішній порожнині профілю J0 дещо менша, ніж при куті −15° (рис. 5.13 а). Потік, що набігає, притискає відривну зону до внутрішньої поверхні профілю J0. У той самий час у профілю J1 (рис. 5.13 б) вся внутрішня область являє собою один великий макровихор. Для профілю J2 (рис. 5.13 в) картина обтікання близька до тієї, що наведено на рис. 5.12 в. На нижній поверхні несиметричного профілю JC із замкнутим контуром відбувається зростання відривної зони (рис. 5.13 г). Обтікання симетричного профілю NACA 0025 відбувається без відриву потоку (рис. 5.13 д). Така картина обтікання якісно узгоджується з наявними уявленнями про режими обтікання симетричного профілю типу NACA 00XX.

Значення коефіцієнтів лобового опору досліджуваних профілів для даного кута атаки близькі між собою і не сильно відрізняються від значень, отриманих при куті −15° (рис. 5.16 а).

Коефіцієнти підйомної сили профілів мають широкий розкид при куті атаки −5° (рис. 5.16 б). Так для профілю J0 відбувається зростання (за модулем) значень коефіцієнта підйомної сили, а для профілю J1 залишаються майже незмінними. Це пояснюється тим, що тиск на нижній зовнішній поверхні врівноважується тиском на нижній внутрішній поверхні. Для несиметричного профілю J2 з розімкненим контуром зростання (за модулем) значень коефіцієнта підйомної сили обумовлено падінням тиску на нижній поверхні та збільшенням на верхній. Тиск у внутрішній зоні майже сталий та не впливає на перепад тиску на зовнішніх поверхнях. Несиметричний замкнутий профіль JC змінив напрям підйомної сили, а значення за модулем залишилося майже незмінним. Для симетричного профілю NACA 0025 значення коефіцієнта підйомної сили зменшилося майже у два рази в порівнянні зі значеннями при куті атаки −15°.

На підвітряній стороні несиметричних профілів замкнутого і розімкнутого контурів при куті атаки 5° (рис. 5.14 а-г) різко зростає розмір відривної зони. Причому її розмір однаковий як для замкнутого JC (рис. 5.14 г), так і розімкнутих профілів J0, J1, J2 (рис. 5.14 а-в). Істотна відмінність у картині обтікання несиметричних профілів спостерігається для профілю J0 (рис. 5.14 а), тому що потік повітря, що набігає, безпосередньо потрапляє у внутрішню область і практично повністю пригнічує рециркуляційну зону за винятком невеликого вихору в нижній частині профілю. Структура течії навколо профілю NACA 0025 така ж, як і при куті атаки −5° (рис. 5.14 д) у силу симетрії профілю.

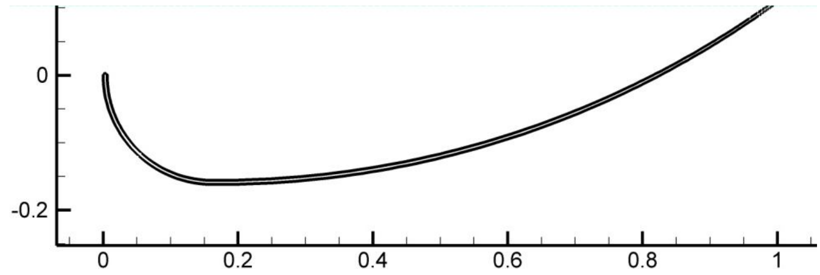
У значеннях коефіцієнту лобового опору особливих змін не спостерігається (рис. 5.16 а), чого не скажеш про коефіцієнти підйомної сили. Великий перепад тиску між навітряною та підвітряною поверхнями несиметричного профілю J0 з розімкненим контуром призводить до більших значень (за модулем) коефіцієнтів підйомної сили. Для інших несиметричних профілів із замкнутим і розімкнутим контурами ці значення практично однакові. Значення коефіцієнта підйомної сили для профілю NACA 0025 однакові за модулем зі значеннями при куті −5°.

Яскраво виражений нестаціонарний характер обтікання несиметричних профілів спостерігається при куті атаки 15° (рис. 5.15 а-г). Потік повітря, що набігає, обтікаючи підвітряну поверхню, різко прискорюється. Відбувається зрив потоку з утворенням періодичних вихрових структур у підвітряній частини профілю. Їх розміри та частота сходу для даного сімейства профілів майже однакова. Структура течії у внутрішній порожнині близька до тієї, що формується при куті атаки 5° (рис. 5.14 а-г), і практично не впливає на потік у підвітряній зоні профілю, а проявляється в зміні інтегральних характеристик. Обтікання симетричного профілю NACA 0025 (рис. 5.15 д) відповідає режиму обтікання даного профілю при куті −15° (рис. 5.12 д).

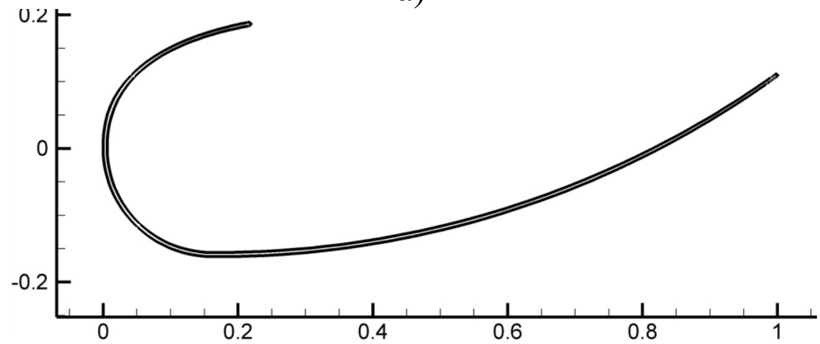
Збільшення кута атаки призводить до різкого зростання коефіцієнта лобового опору у несиметричних профілів. Це пов'язано з наявністю великих вихорових структур в підвітряній області профілів, які призводять до різкого падіння тиску в цій зоні. А великий перепад тиску між навітряною та підвітряною сторонами профілю призводить до високих значень коефіцієнта лобового опору. Причому чим менше ступінь закритості J-профілю, тем вище ці значення за винятком профілю J2. Така ж картина спостерігається за коефіцієнтами підйомної сили. Максимальним за модулем коефіцієнтом підйомної сили є профіль J0, а мінімальним – профіль J2.

Підводячи підсумки можна сказати, що результати чисельного моделювання симетричного профілю NACA 0025 якісно узгоджуються з експериментальними даними в досліджуваному діапазоні кутів атаки. Така розбіжність може бути наслідком істотного впливу тривимірних або кінцевих ефектів в експериментальній моделі. Крім того ахіллесовою п'ятою більшості RANS моделей турбулентності є неадекватне моделювання масивного відриву потоку.

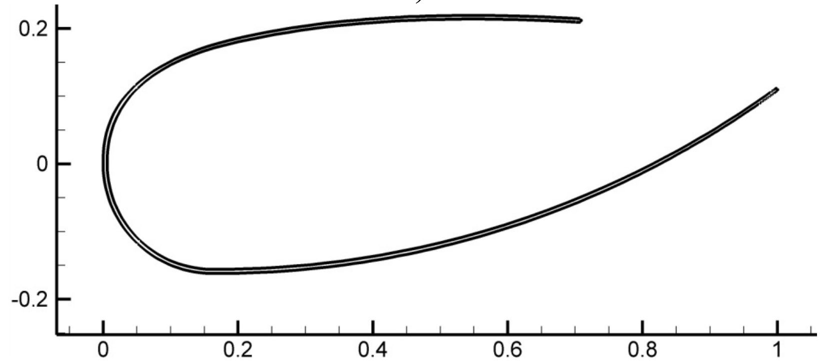
Використання в якості лопаті ротора Дар'є профілю з відносно великою товщиною може привести до зниження ефективності роботи вертикально-осьової ВЕУ через великий лобовий опір. У той самий час несиметричні профілі з розімкненим контуром мають набагато більші значення (за модулем) коефіцієнтів підйомної сили. Тому напрямком подальших досліджень може бути оптимізація форми J-профілю з метою зниження коефіцієнта лобового опору та збільшення коефіцієнта підйомної сили.



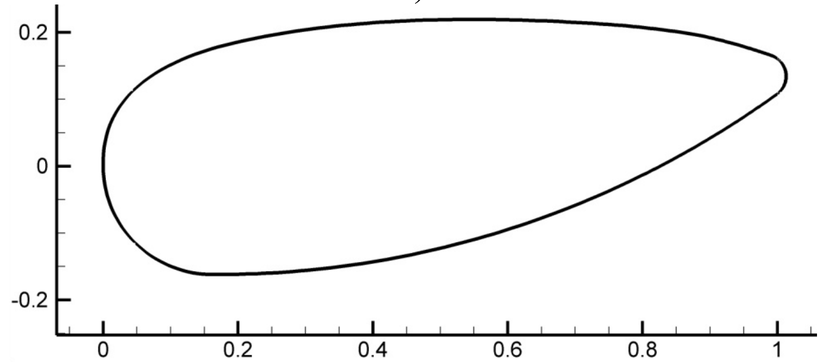
а)



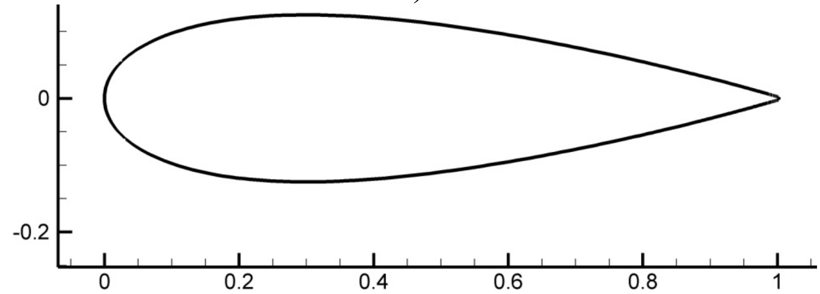
б)



в)

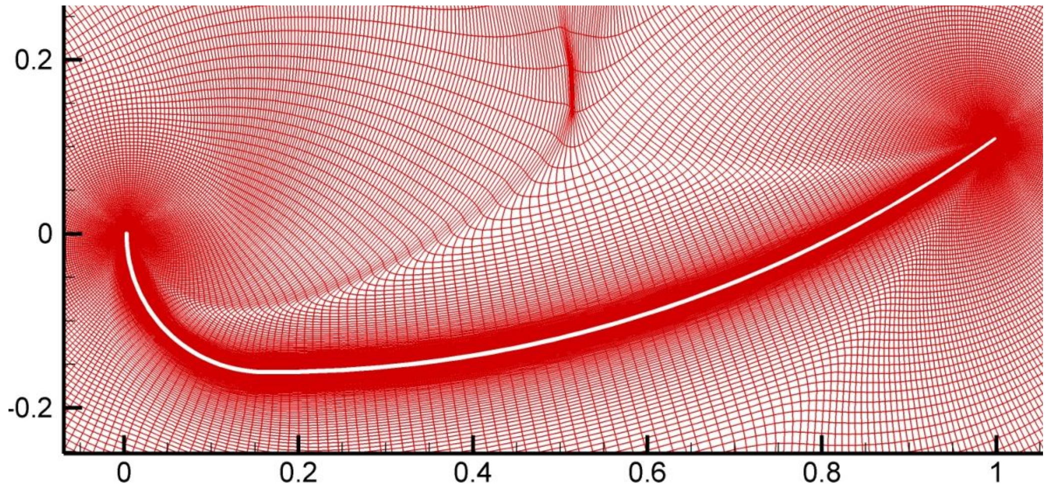


г)

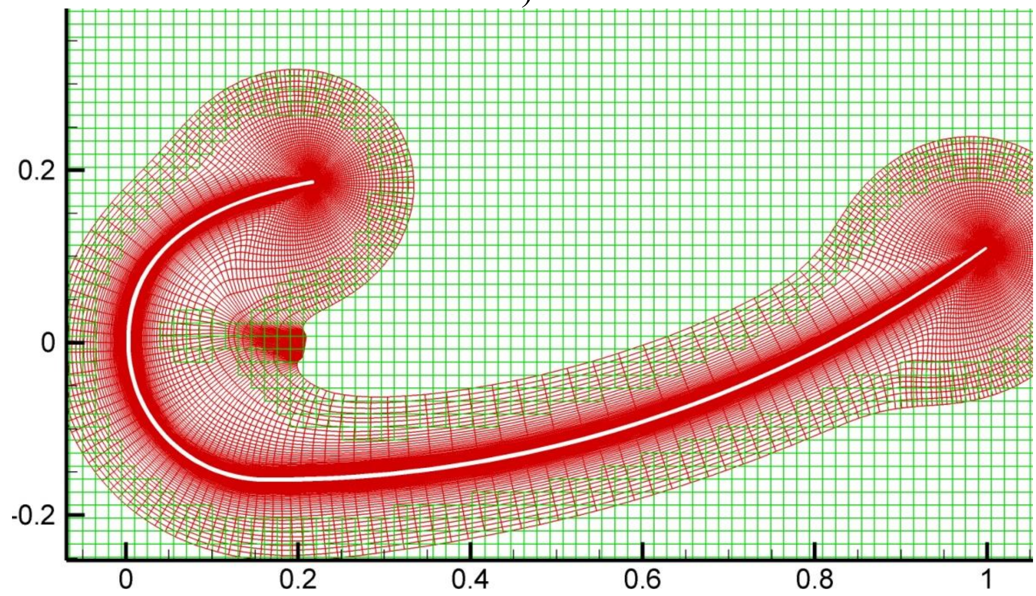


д)

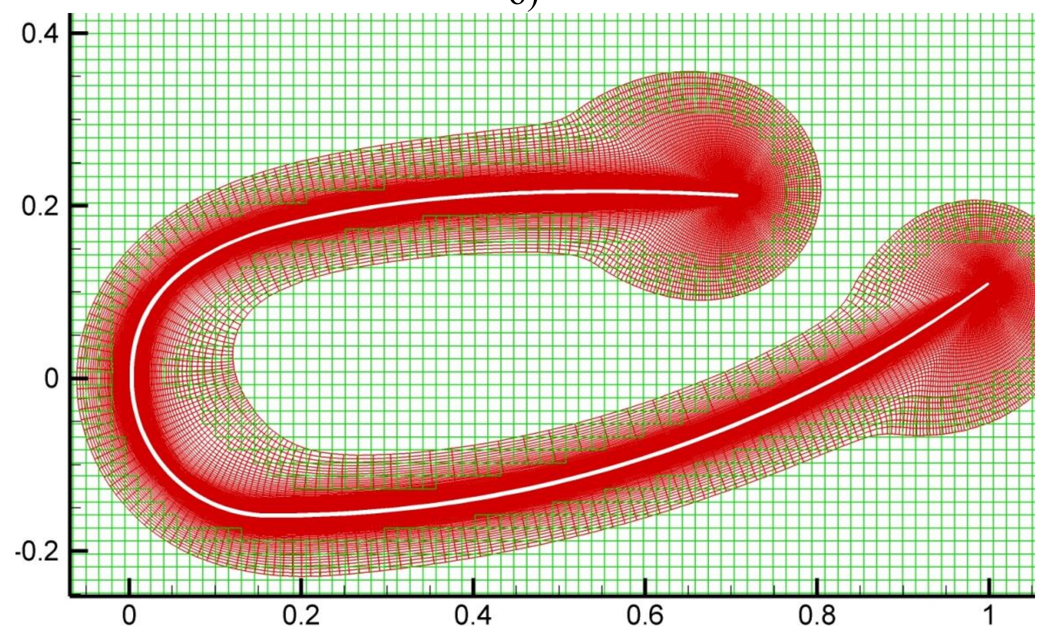
Рисунок 5.9 – Геометрія профілів різної форми: розімкнутий несиметричний J-профіль з різним ступенем закритості (а, б, в); несиметричний (г) і симетричний (д) замкнутий профіль



а)

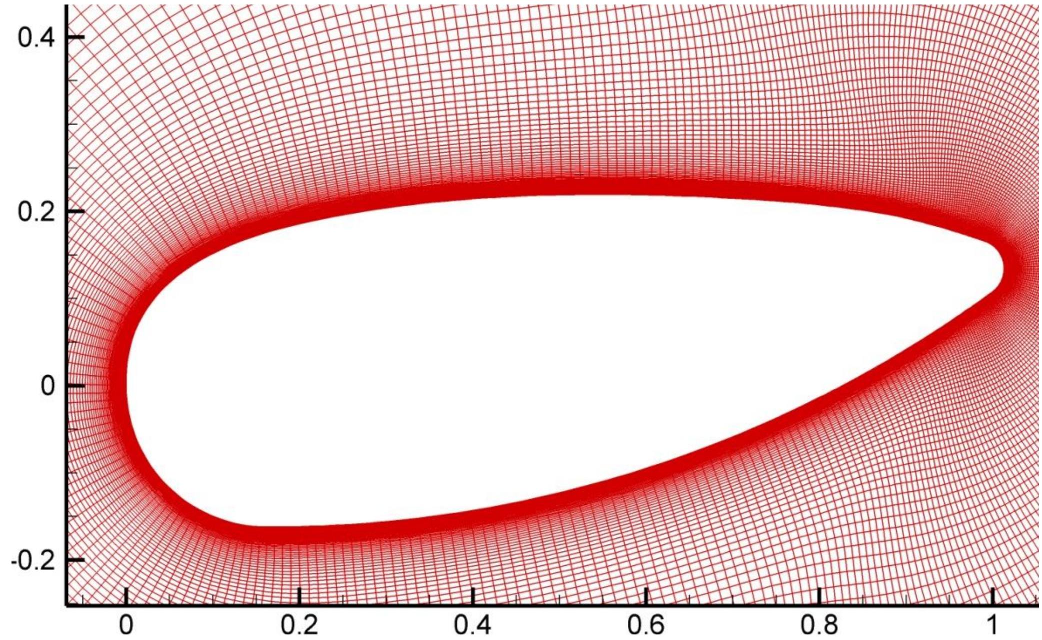


б)

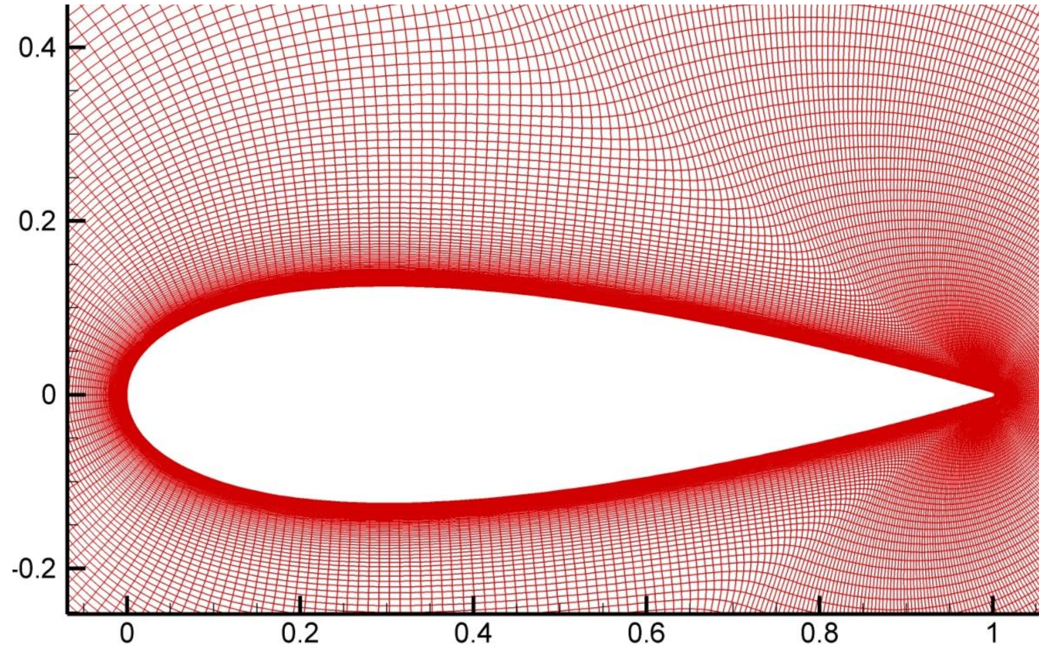


в)

Рисунок 5.10 – Структурована сітка навколо разомкнутого несиметричного J-профілю з різним ступенем закритості: а – J0; б – J1; в – J2

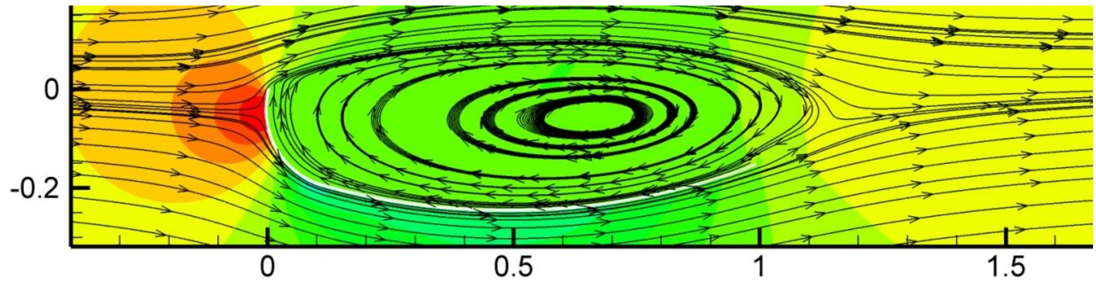


а)

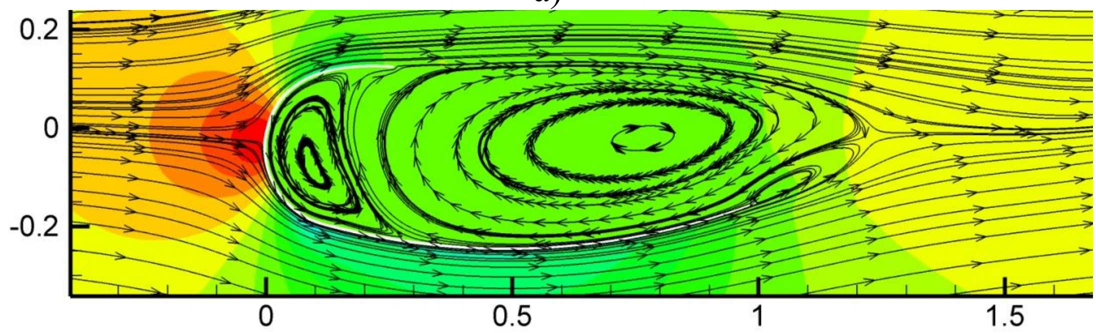


б)

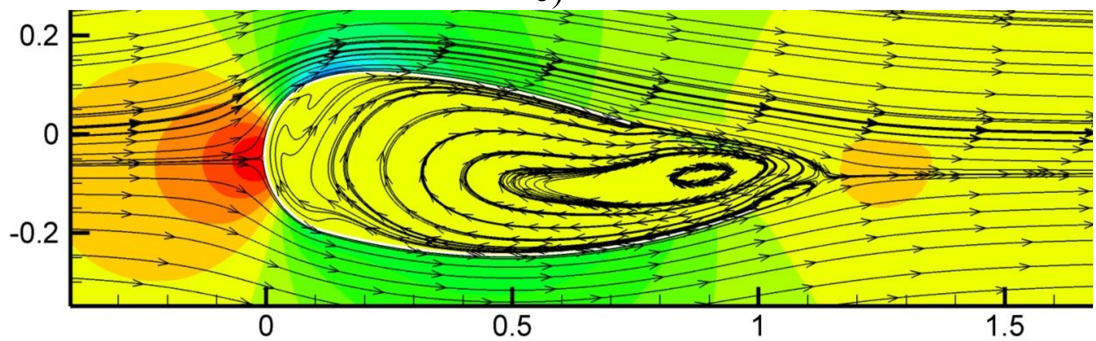
Рисунок 5.11 – Структурована сітка навколо несиметричного (а) і симетричного (б) замкнутого профілю: а – JC; б – NACA0025



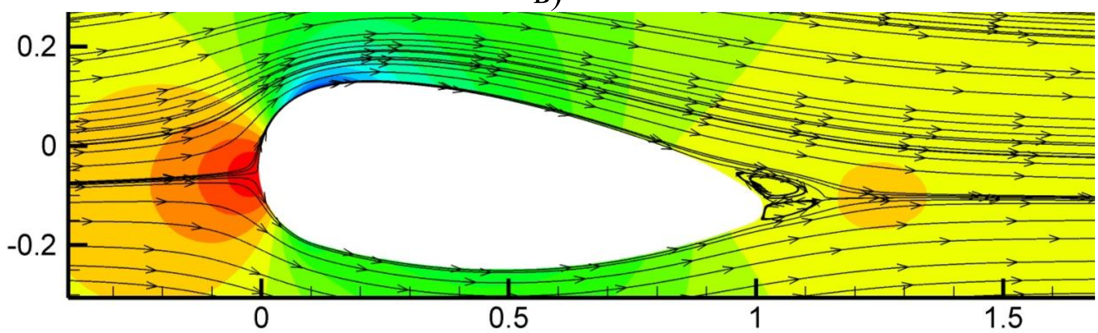
а)



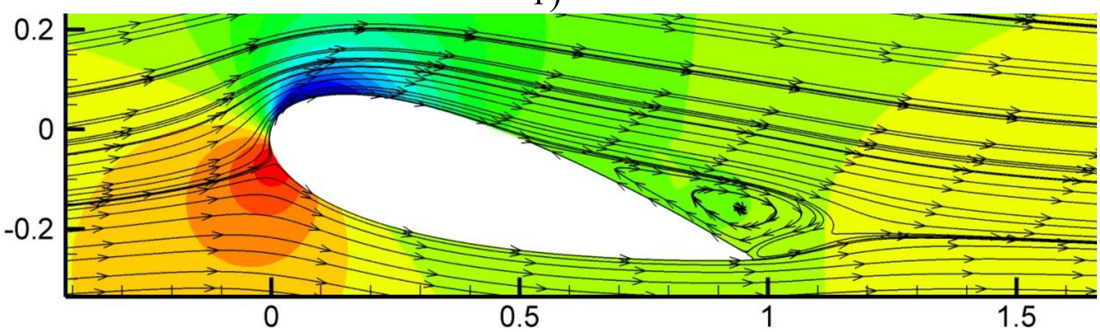
б)



в)

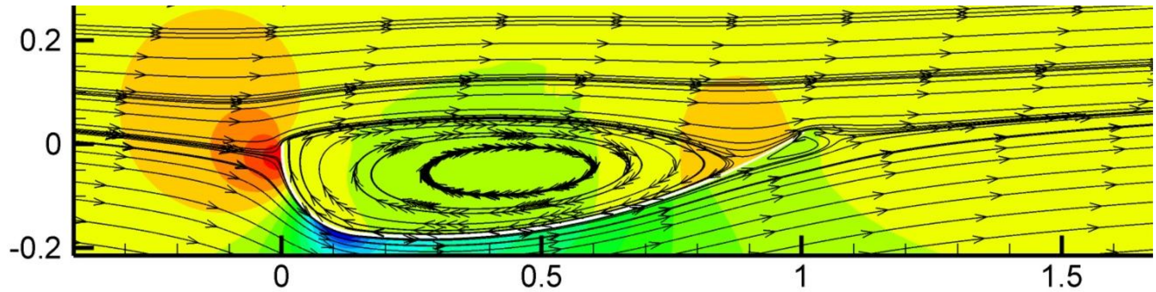


г)

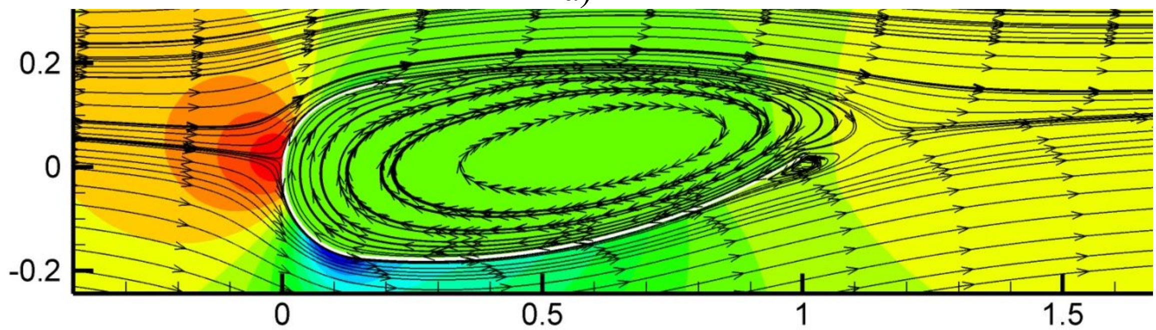


д)

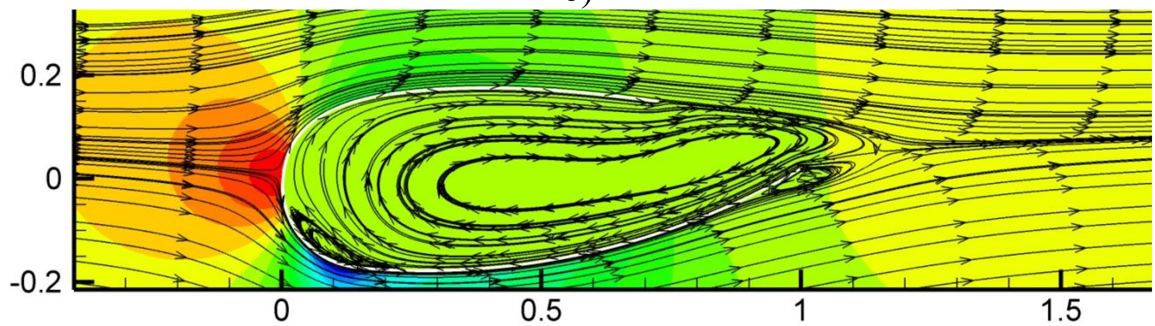
Рисунок 5.12 – Турбулентне обтікання профілів замкненого(г, д) і розімкненого (а, б, в) контуру симетричної і несиметричної форми при куті атаки −15°



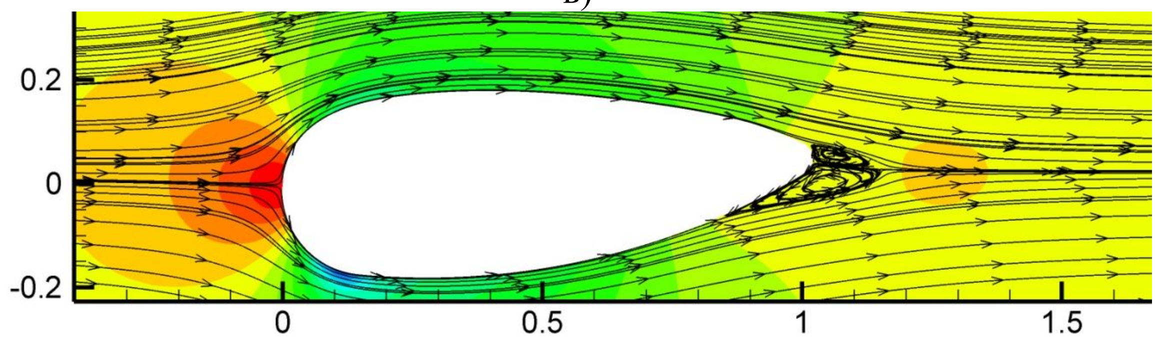
а)



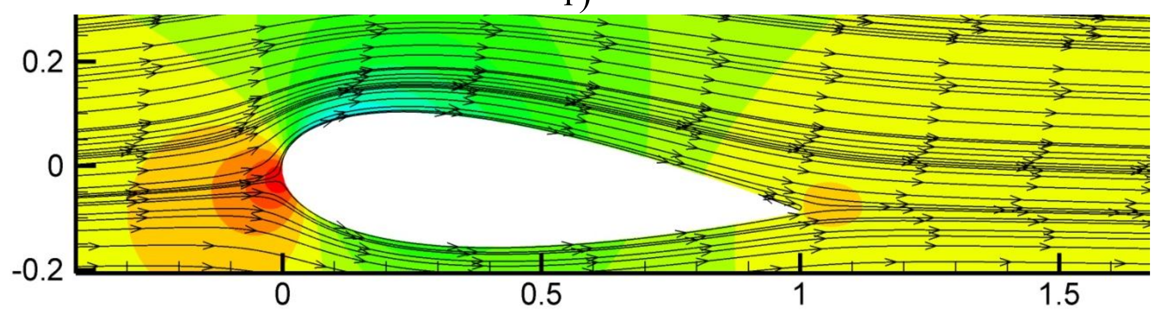
б)



в)

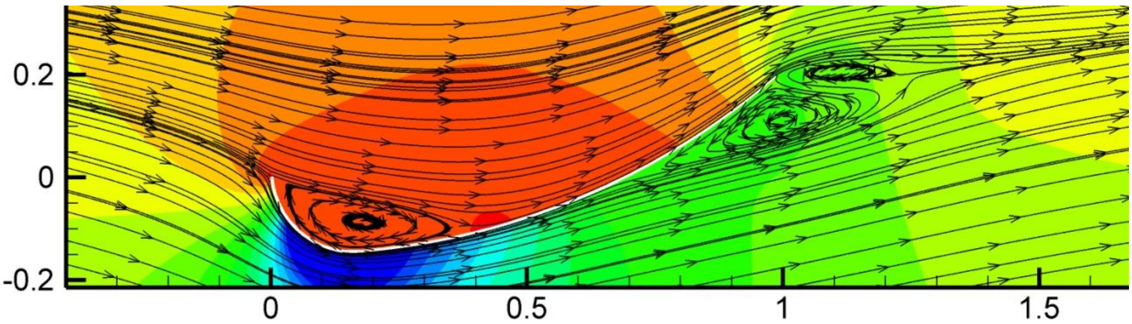


г)

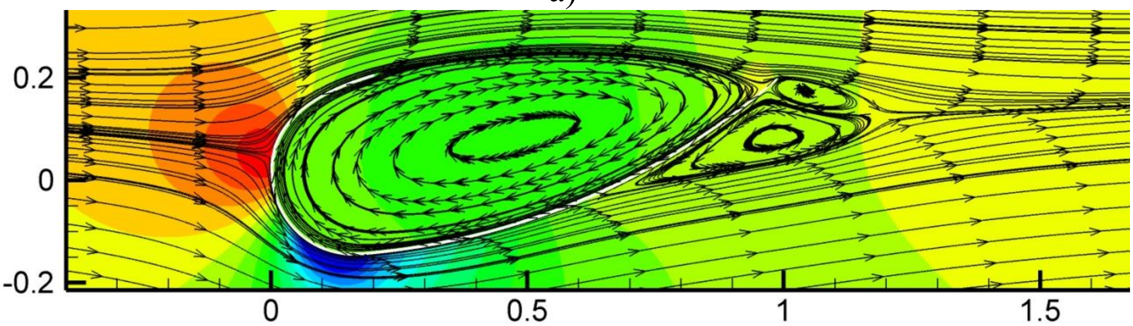


д)

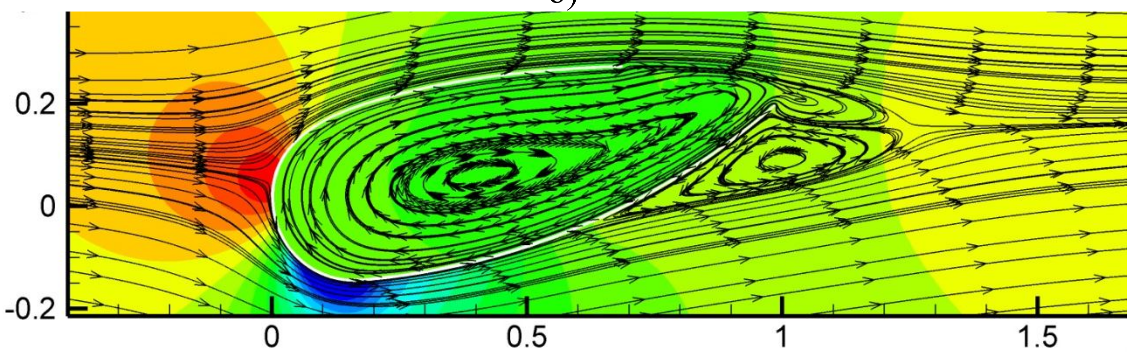
Рисунок 5.13 – Турбулентне обтікання профілів замкненого(г, д) і розімкненого (а, б, в) контуру симетричної і несиметричної форми при куті атаки −5°



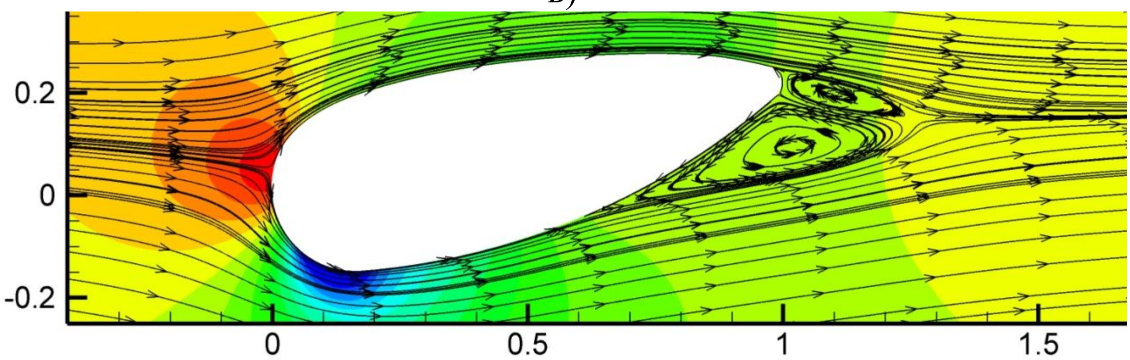
а)



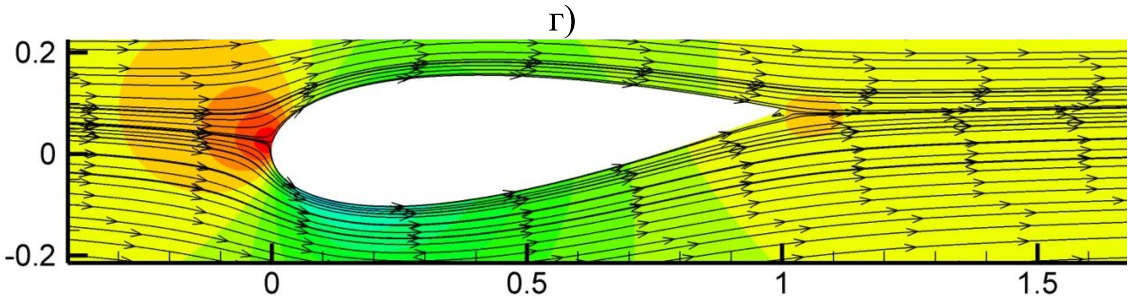
б)



в)

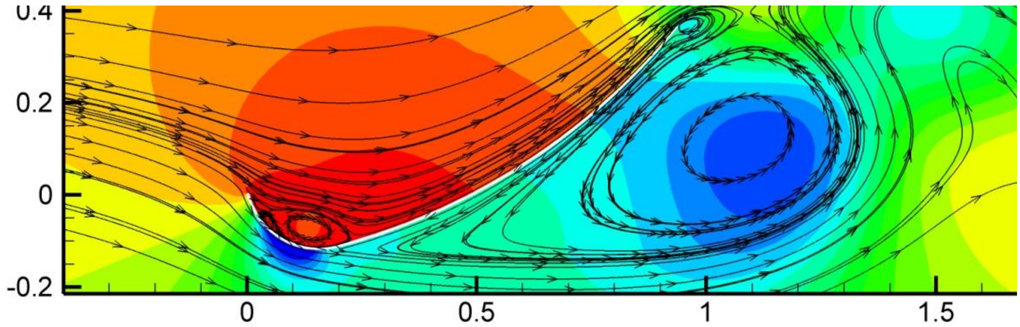


г)

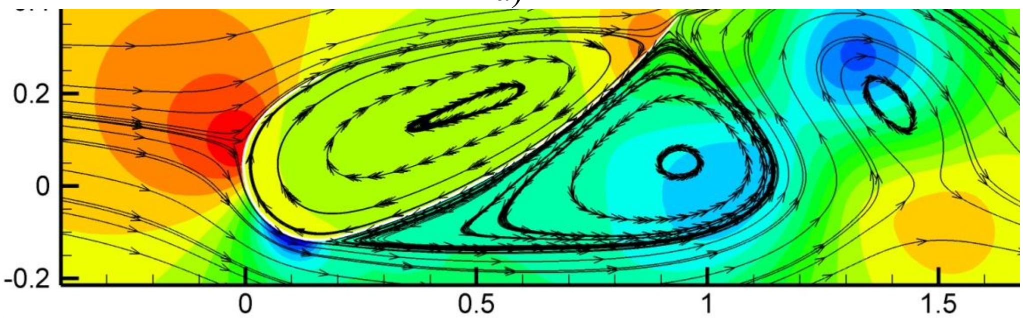


д)

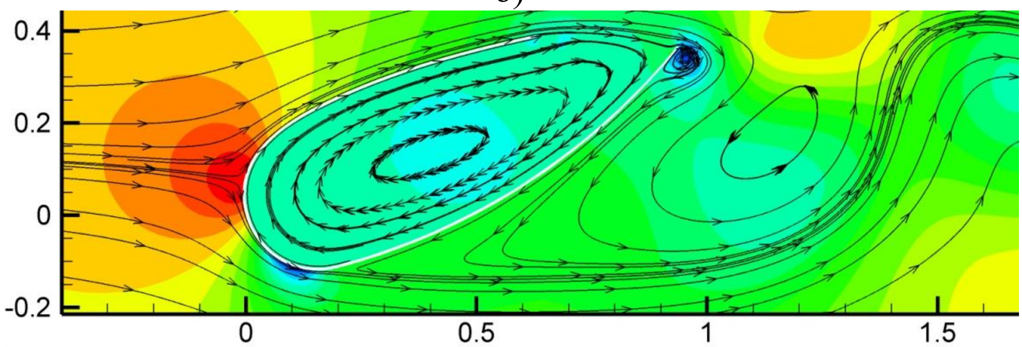
Рисунок 5.14 – Турбулентне обтікання профілів замкненого(г, д) і розімкненого (а, б, в) контуру симетричної і несиметричної форми при куті атаки 5°



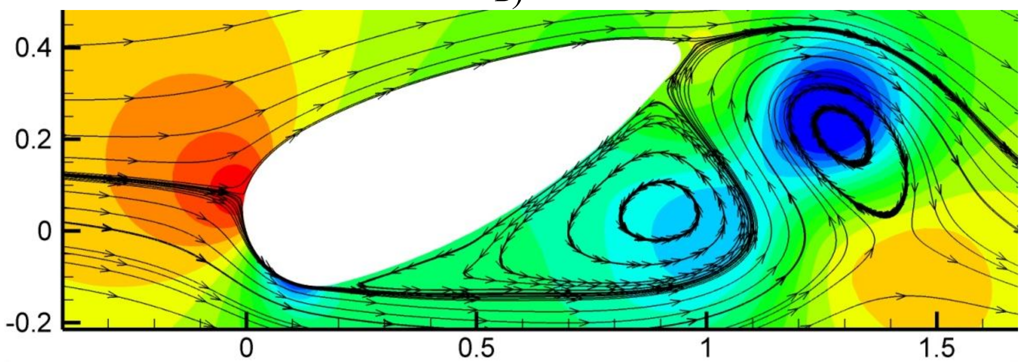
а)



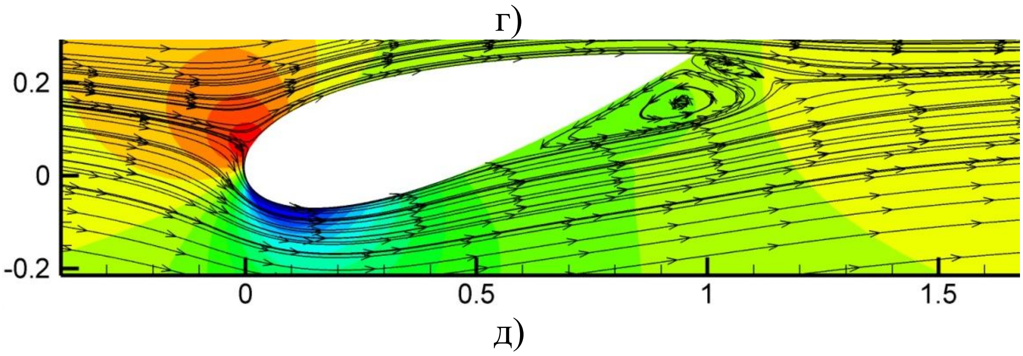
б)



в)

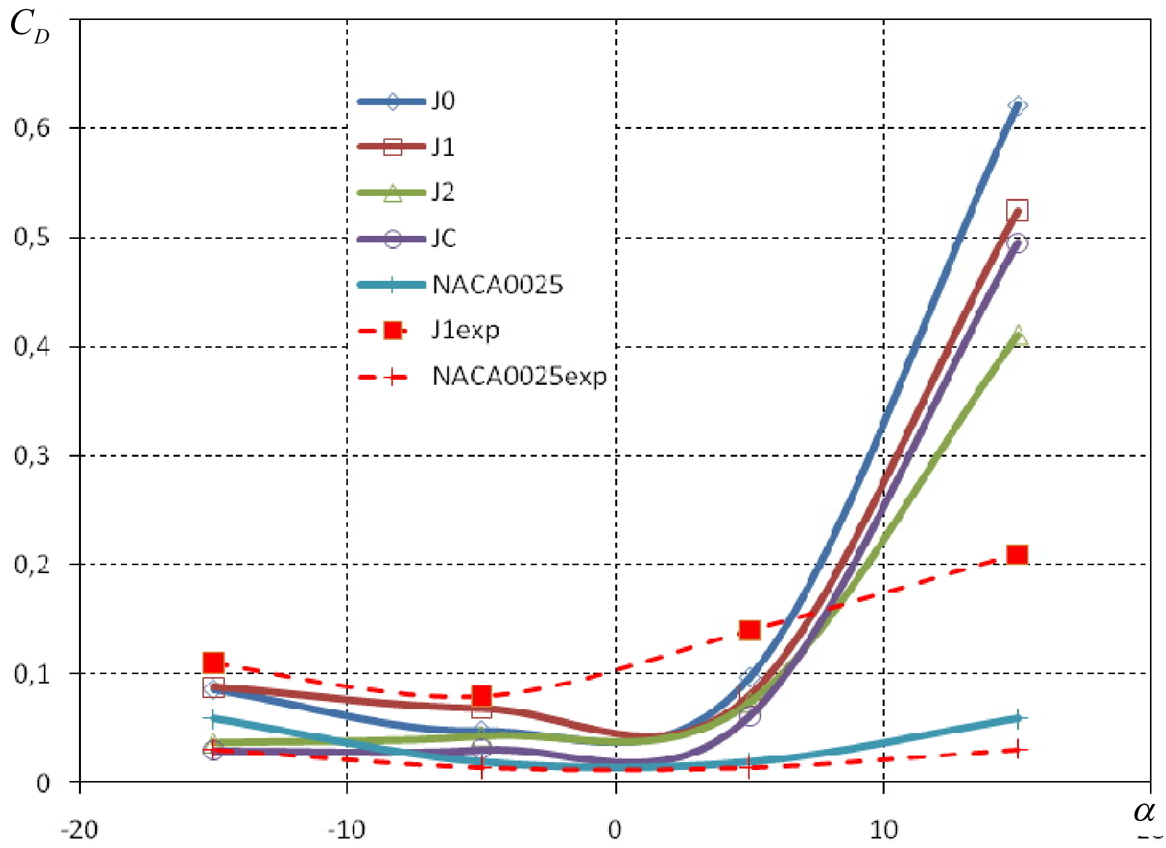


г)

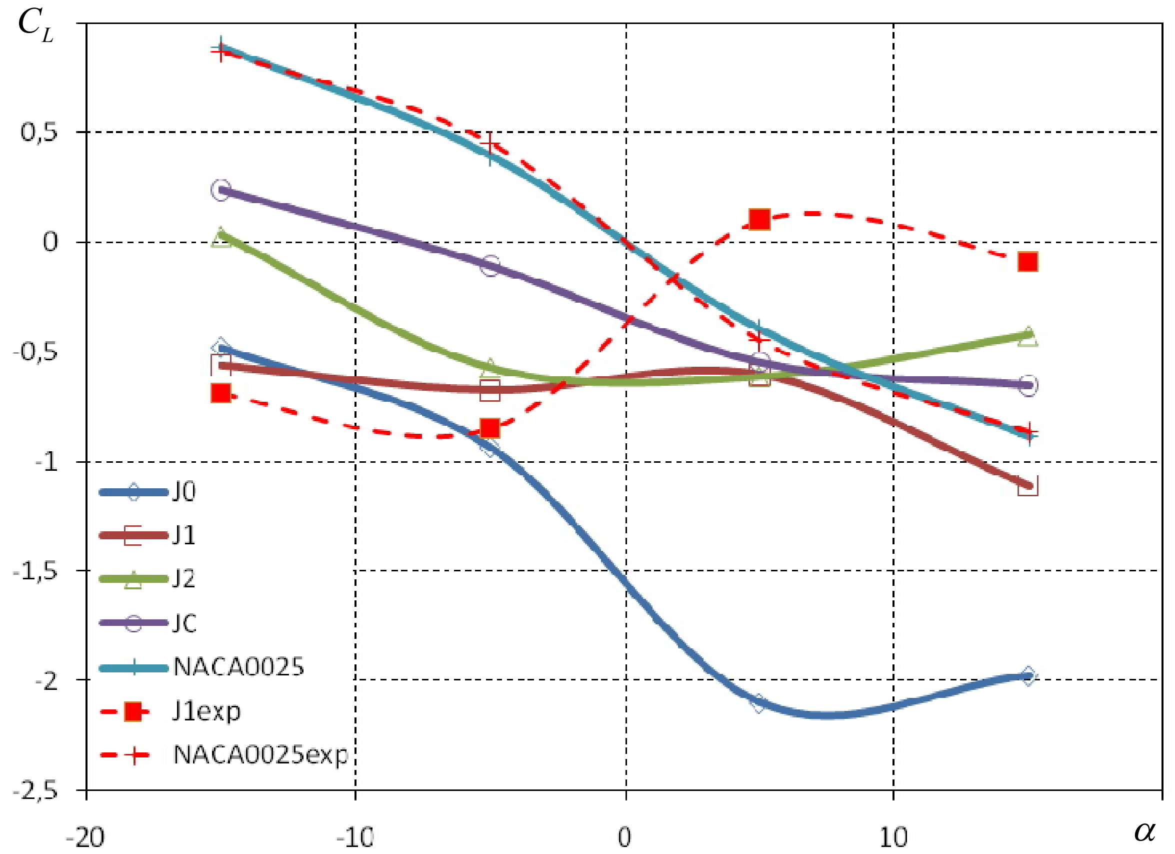


д)

Рисунок 5.15 – Турбулентне обтікання профілів замкненого(г, д) і розімкненого (а, б, в) контуру симетричної і несиметричної форми при куті атаки 15°



а)



б)

Рисунок 5.16 – Залежність коефіцієнтів лобового опору (а) і підйомної сили (б) профілів різної форми від кута атаки (J1exp – [123], NACA0025exp – [286])

5.3 Динаміка та аеродинаміка трьохелементного профілю

У сучасній авіаційній техніці різного призначення широке поширення набули багатоелементні профілі. Складені профілі дозволяють для поточного значення швидкості літака досягати більших значень підйомної сили крила в режимі зліт-посадка, маневрування або гасіння швидкості. При цьому багатоелементні профілі забезпечують менші значення сили опору в режимі горизонтального польоту на крейсерській висоті [291]. Такі значення аеродинамічних характеристик авіаційних профілів досягаються введенням у конструкцію крила передкрилка та закрилка.

Проведення аеродинамічних продувок повномасштабних тривимірних конфігурацій крил, системи крило-фюзеляж при числах Рейнольдса Re, відповідних до польотних режимів, є скрутними з технічної точки зору та дорогими. Інженерні розрахунки та результати, отримані за допомогою продувок при низьких числах Рейнольдса Re для багатоелементних профілів, не можуть бути екстрапольовані для більших чисел Рейнольдса Re. Оскільки зі збільшенням швидкості повітряного потоку змінюється співвідношення між силами інерції та силами в'язкого опору. Це призводить не тільки до зміни загальної картини обтікання крилевого профілю, але й до появи істотних помилок при визначенні значень аеродинамічних характеристик літальних апаратів. Тому останнім часом зріс інтерес до чисельного моделювання турбулентного обтікання профілів, які мають високі значення підйомної сили, при високих числах Рейнольдса [153, 230, 256].

Складність математичного моделювання обтікання багатоелементного профілю пов'язана із багатозв'язністю розрахункової області з криволінійними межами, складними фізичними ефектами, що виникають при обтіканні. До таких відносяться: ефект Коанда, одночасна наявність декількох відривних вихорів (зон), нестаціонарні ефекти, взаємодія турбулентних потоків різної інтенсивності, відрив потоку з гострих крайок, утворення та інтерференція струменевих течій, взаємодія потоків, що сходять, з наростаючим примежовим шаром.

Традиційні чисельні методи, які широко використовуються для опису даного класу течій (рівняння потенціалу або Ейлера з рівнянням примежового шару), досить ефективні з точки зору обчислювальних витрат. Однак ці підходи не здатні враховувати складну структуру течії, що виникає при обтіканні багатоелементного профілю. Для розрахунку такої складної течії необхідно застосування нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса із сучасними диференціальними моделями турбулентності в рамках спеціалізованого пакета програм.

Математичне моделювання турбулентного обтікання багатоелементних профілів є досить складною задачею обчислювальної аеродинаміки [256]. Розв'язку цієї проблеми присвячена велика кількість статей у сучасній науковій літературі [155, 200, 220, 227, 249, 302, 319, 323].

У роботі [220] проведено експериментальні дослідження обтікання трьохелементного аеродинамічного профілю 30P30N для крейсерської конфігурації в діапазоні чисел Рейнольдса від 4.6×10^5 до 1.1×10^6 і кутів атаки від 0° до 12°. Наводяться розподілені аеродинамічні характеристики профілю. Однак відсутні загальні інтегральні дані по всьому трьохелементному профілю та по його окремих компонентах.

У роботі [227] наведено експериментальні та чисельні результати дослідження аеродинамічних і акустичних характеристик профілю 30P30N при числі Маху 0.17 і кутах атаки від 0° до 8°. У дослідженнях основна увага була приділена аналізу акустичного поля, спектральній формі шуму, тональній частоті та місцю розташування джерела шуму. У цій роботі залишилися не розглянутими питання, пов'язані з інтегральними та розподіленими характеристиками багатоелементного профілю при великих числах Рейнольдса та кутах атаки.

В експериментальній роботі [249] проведено виміри поля швидкості навколо профілю 30P30N при $\mathrm{Re} = 1.2 - 1.71\times10^6$ і кутах атаки 3°, 5.5°, 8.5°. Виконано аналіз розподілу коефіцієнта тиску по поверхні багатоелементного профілю, а також акустичного поля в ближньому сліді за елементами профілю.

У роботі [249] не розглядаються великі кути атаки. Інформація з таких кутів вкрай важлива з погляду безпеки польотів. Це пов'язано з тим, що при великих кутах атаки може відбутися зрив потоку повітря із крила літака, що призведе до різкого падіння підйомної сили і як наслідок до звалювання літака в плоский штопор.

У роботі [155] наведено результати чисельного моделювання аеродинаміки профілю 30P30N з використанням гібридного методу RANS-LES на багатоблочних структурованих і неструктурованих сітках. Розглядалася лише одна злітно-посадкова конфігурація при малому куті атаки 5.5°. У цій роботі не наведено дані за інтегральними і розподіленими характеристиках для інших кутів атаки, а також для крейсерської конфігурації профілю 30P30N.

У роботі [200] наведено результати чисельного моделювання турбулентного обтікання профілю 30P30N при числі Маху 0.17. Розглядалися лише малі кути атаки 4°, 5.5°, 8.5°. Число Рейнольдса становило 1.6×10^6, що на порядок менше значень, що відповідають реальним крилам.

У роботі [302] на основі чисельного моделювання в комерційному пакеті ANSYS Fluent зроблено спроби з керування структурою течії навколо профілю 30P30N. Розглядалися різні кути відхилення закрилка при фіксованому куті атаки основного профілю. Однак у цій роботі не було розглянуто інші геометричні конфігурації профілю.

В експериментальній роботі [319] за допомогою анемометрії за зображеннями частинок досліджувалася взаємодія вихорів, що зійшли з передкрилка, із примежовим шаром на основному профілі. Дослідження було проведено при низьких числах Рейнольдса $9.3\times10^3 - 3.05\times10^4$. Дані результати не можуть бути екстрапольовані для високих чисел Рейнольдса порядку 10^7.

У роботі [323] однією з задач, що демонструють можливість розробленого чисельного методу на структурованих пересічних сітках, була задача з вивчення структури течії навколо багатоелементного профілю 30P30N. Розрахунки проведено для злітно-посадкової конфігурації при нульовому куті атаки. Наведено розподіл коефіцієнта тиску по поверхні профілю. Однак у роботі не наводяться дані за інтегральними характеристиками. До того ж розрахунки наведено для однієї конфігурації.

Виходячи з аналізу літературних джерел, можна сказати, що в жодній з розглянутих статей не було проведено порівняння крейсерської та злітно-посадкової конфігурації багатоелементного профілю 30P30N. До того ж всі розрахункові та експериментальні дані наведено лише для низьких чисел Рейнольдса та малих кутів атаки. Все це дає підстави стверджувати, що доцільним є проведення дослідження, яке присвячене порівнянню профілю 30P30N у крейсерській і злітно-посадковій конфігурації при великому числі Рейнольдса та в широкому діапазоні кутів атаки.

Метою дослідження є математичне моделювання фізичних процесів при турбулентному обтіканні багатоелементного профілю 30P30N для крейсерської конфігурації та конфігурації зліт-посадка в широкому діапазоні кутів атаки. Це дасть можливість досліджувати поля тиску, швидкості, миттєві лінії течії, розподіл коефіцієнта тиску по поверхні та значення основних аеродинамічних характеристик профілю. Дана інформація необхідна для отримання якісних оцінок структури обтікання профілю 30P30N і кількісних значень аеродинамічних сил, що діють на крилеву конструкцію, при проведенні конструкторської розробки літальних апаратів різного призначення.

5.3.1 Параметри натурного та обчислювального експериментів

Експериментальне дослідження турбулентного обтікання багатоелементного профілю 30P30N у діапазоні кутів атаки від 0° до 23.393° проведено в NASA і опубліковано в роботах [183, 306]. Трьохелементний профіль 30P30N (рис. 5.17 а, б), складається з передкрилка, основного профілю та закрилка. Розглядається дві конфігурації: крейсерська (конфігурація *A*) і злітно-посадкова (конфігурація *B*) [60, 81, 260]. У злітно-посадковій конфігурації передкрилок і закрилок відхиляються на кут 30° стосовно основного профілю. В експерименті [183, 306] розглянуто тільки злітну-посадкову конфігурацію. Число Рейнольдса, що розраховано за хордою профілю в складеному стані та швидкості незбуреного потоку становило $\mathrm{Re} = 9.0\times10^6$.

Надалі задача була обезрозмірена на характерний розмір перетину крилевого профілю 30P30N – хорду *c* і характерну швидкість U_0 незбуреного потоку повітря. Чисельне моделювання проводилося на розрахунковій сітці, яка складалася з 19 блоків із загальною кількістю 2.1×10^5 вузлів (рис. 5.17 в). Товщина першого шару нерівномірної сітки, розташованого найближче до твердої поверхні, становила 1.0×10^{-6}. Зовнішня межа розрахункової області перебувала на відстані 20 хорд профілю. Згущення вузлів проводилося в напрямку нормалі до поверхні, а також до передніх і задніх крайок елементів профілю. Для адекватної роздільної здатності пристінкових ефектів у примежовому шарі перебувало 50…150 шарів сітки в напрямку нормалі до поверхні крила. Крок інтегрування рівнянь руху суцільного середовища дорівнював $\Delta t = 0.01$.

5.3.2 Результати та обговорення

Трьохелементний профіль 30P30N у крейсерській конфігурації поводиться так як і одноелементний профіль. При малих кутах атаки обтікання профілю носить приєднаний характер (рис. 5.18 а, б, 5.19 а, б), а при кутах 16° і вище (закритичний режим), відрив потоку відбувається поблизу передньої крайки передкрилка (рис. 5.18 в, 5.19 в).

У досліджуваному діапазоні кутів атаки обтікання профілю у злітно-посадковій конфігурації носить стаціонарний характер.

Для кута атаки 0° картина течії характеризується безвідривним режимом за винятком областей, де відрив потоку відбувається з гострих крайок (внутрішня частина передкрилка та область у хвостовій частині основного профілю). У середині цих областей виникають рециркуляційні зони. Про це свідчать лінії течії (рис. 5.20 а), а також ізолінії модуля швидкості (рис. 5.21 а), які побудовано біля трьохелементного профілю 30P30N. Зі збільшенням кута атаки розміри відривної зони на внутрішній поверхні передкрилка зменшуються (рис. 5.21 б, в), а в хвостовій частині основного профілю залишаються майже незмінними.

При куті атаки 8.109° відрив потоку спостерігається поблизу заднької крайки закрилка. Відновлення тиску за точкою відриву при чисельному моделюванні відбувається досить слабко. Про це свідчить розподіл коефіцієнта тиску (рис. 5.22 б). Те ж саме можна сказати і про передкрилок, на внутрішній поверхні якого спостерігається зайве падіння тиску.

Для кута атаки 23.393° наочно видно потік повітря, що утворюється на верхній поверхні основного профілю. Формування цієї течії обумовлено прискоренням потоку між передкрилком і передньою крайкою основного профілю. Наявність зазору між основним профілем і закрилком призводить до інтерференції струменевих течій на верхній поверхні закрилка.

Розподіл коефіцієнта тиску по поверхні профілю для кутів атаки $\alpha = 0°$, 8.109°, 23.393° наведено на рис. 5.22. Отримані результати задовільно співпадають з експериментальними даними.

Отримано залежності коефіцієнтів підйомної сили та сили лобового опору передкрилка, основного профілю, закрилка та профілю в цілому для двох конфігурацій (рис. 5.23).

При обтіканні конфігурації A на куті атаки 17° потік повітря вже не в змозі продавити зростаючий градієнт тиску на верхній підвітряній стороні профілю та відбувається відрив потоку, що призводить до падіння коефіцієнта підйомної сили. Зі збільшенням кута атаки відбувається зростання цієї відривної зони.

Показано, що конфігурація B має більш високі значення коефіцієнта підйомної сили, ніж конфігурація A, особливо на великих кутах атаки. Спостерігається задовільний збіг між розрахунковими й експериментальними даними за коефіцієнтами підйомної сили та сили лобового опору.

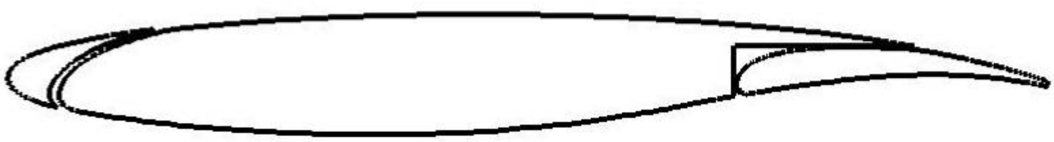
У цілому обтікання трьохелементного профілю характеризується складними фізичними процесами. До них відноситься в'язко-нев'язка взаємодія потоків, що сходять із зовнішньої поверхні передкрилка та проходять в зазор між передкрилком і передньою крайкою основного профілю. Крім того, ще більш складна структура течії виникає при взаємодії потоку, що сходить із верхньої частини основного профілю, з примежовим шаром, що наростає на зовнішній поверхні закрилка, а також з потоком повітря, що проходить через зазор між основним профілем і закрилком. У цьому випадку потік в'язкої рідини, що сходить із верхньої поверхні основного профілю, притискає потік, що проходить через зазор між основним профілем і закрилком, до зовнішньої поверхні останнього. Утворення даного типу струменевої течії пояснюється тим, що потік, що сходить із верхньої поверхні основного профілю, має меншу швидкість, а, отже, більший тиск. Тому реалізується притискання потоку, що проходить через зазор, до зовнішньої поверхні закрилка. Це призводить до безвідривного режиму обтікання багатоелементного профілю при кутах, на яких для одиночного профілю наступав би відрив.

Для демонстрації можливостей розробленої математичної моделі та спеціалізованого пакета обчислювальної аеродинаміки з розв’язку зв’язаних задач на рис. 5.24, 5.25, 5.26 показано динаміку та аеродинаміку трьохелементного профілю 30P30N для різних моментів часу. Візуалізацію картини обтікання виконано за допомогою ізобар. Напрямком подальших досліджень буде детальне вивчення фізичних особливостей динаміки та аеродинаміки трьохелементного профілю 30P30N при його розкритті з крейсерської конфігурації та переході у злітно-посадкову.

Отримані результати якісно узгоджуються з наявними фізичними уявленнями про ефект Коанда, коли потік, що набігає на криволінійну поверхню, відсмоктує повітря в її околі створюючи розрідження, яке притискає потік до поверхні профілю. Завдяки цьому обтікання багатоелементного профілю відбувається без зриву потоку з несучих поверхонь, за винятком невеликих кутових вихорів в областях конструктивного зчленування передкрилка та закрилка з основним профілем.

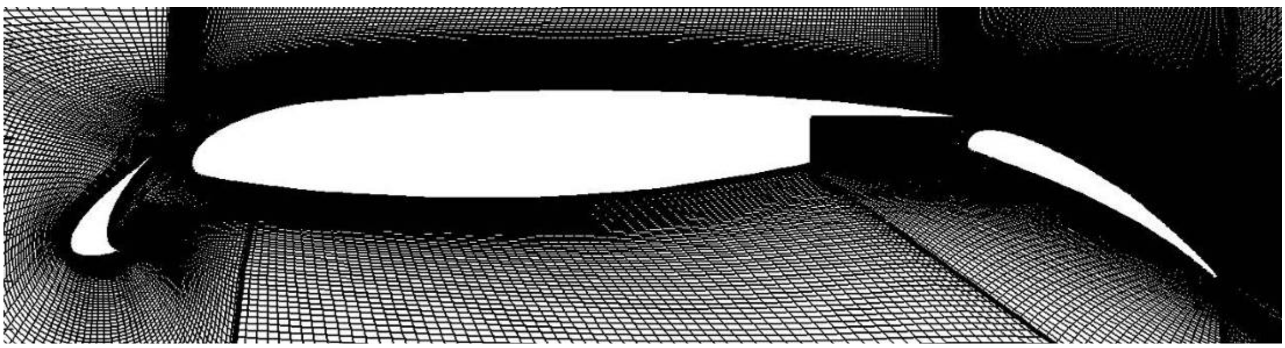
Якість отриманих результатів забезпечується використанням фундаментальних моделей суцільного середовища, високою якістю сучасного моделювання турбулентних течій. Пропонований чисельний алгоритм дозволяє проводити ефективні розрахунки при обтіканні тіл різної геометрії швидкісними потоками газу та рідини.

До напрямків подальших досліджень слід віднести облік впливу тривимірних ефектів на аеродинаміку профілю, оптимізацію аеродинамічної форми профілю з метою поліпшення аеродинамічної якості крила літального апарату при різних швидкісних режимах руху.



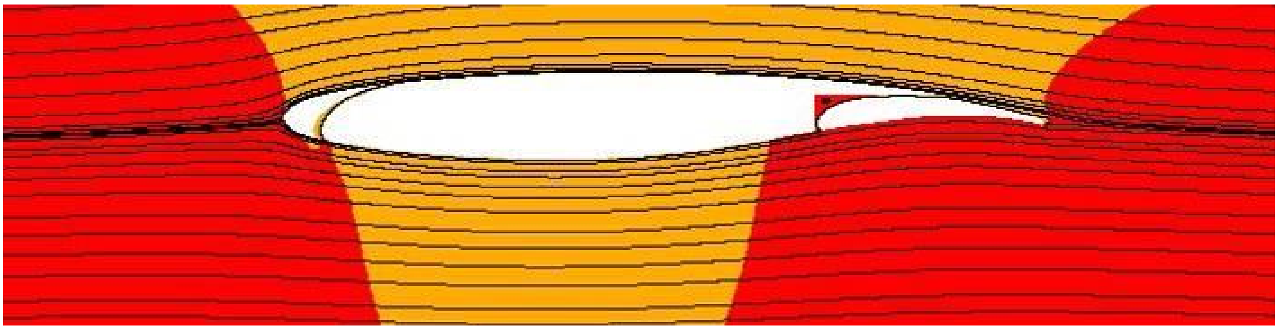
а)

б)

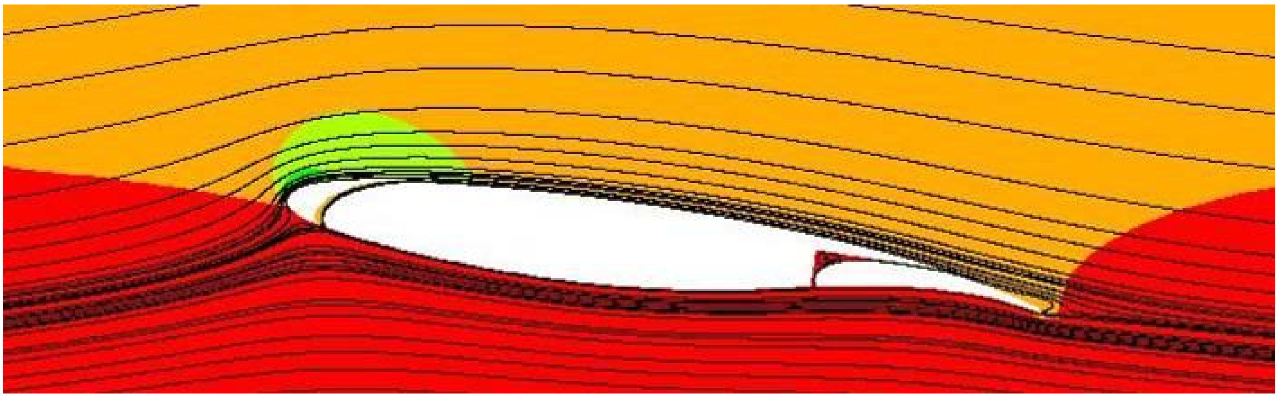


в)

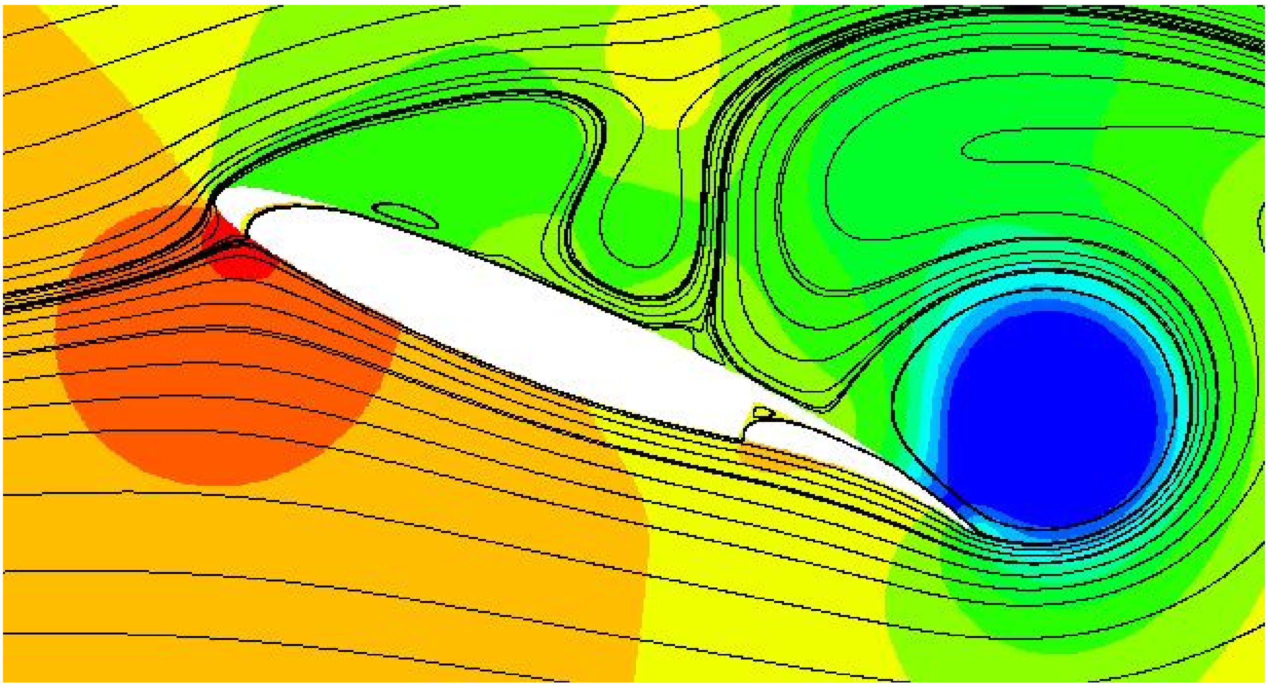
Рисунок 5.17 – Конфігурація трьохелементного профілю 30P30N: а – крейсерська (конфігурація A); б – злітно-посадкова (конфігурація B); в – розрахункова сітка навколо трьохелементного профілю



а)

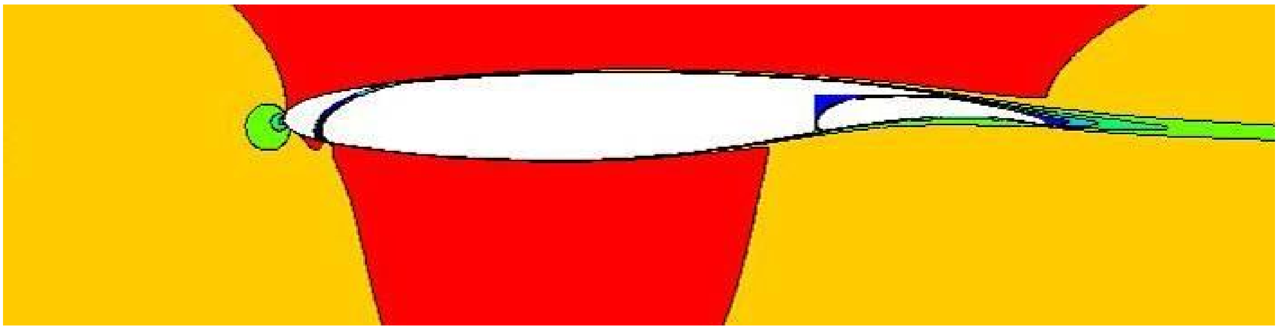


б)

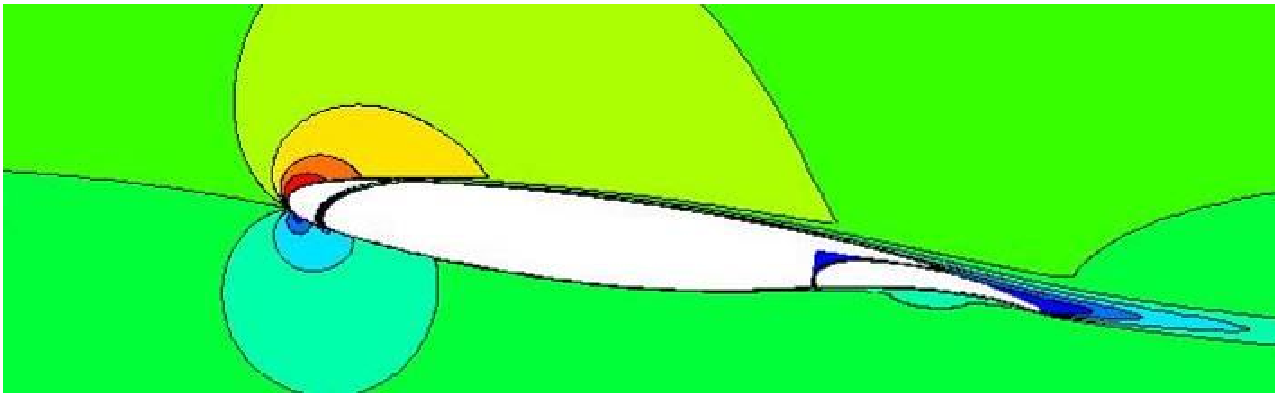


в)

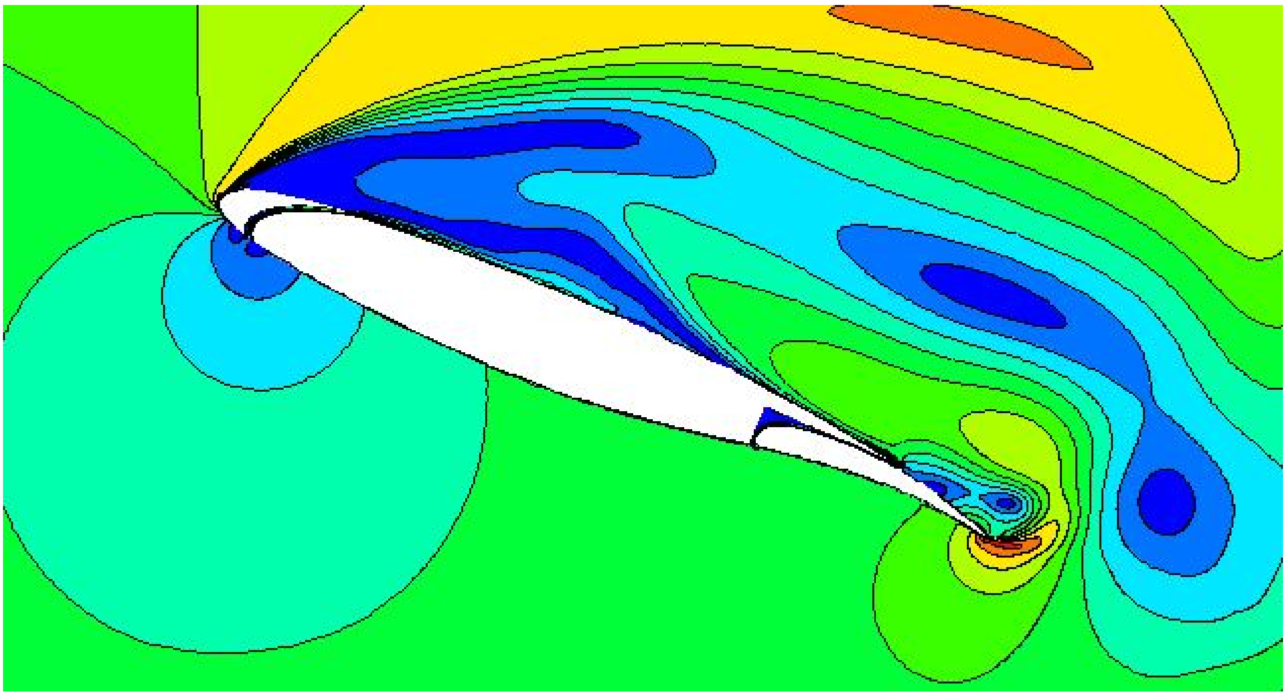
Рисунок 5.18 – Миттєві лінії течії (конфігурація А): а – $\alpha = 0^o$; б – $\alpha = 8.109^o$; в – $\alpha = 23.393°$



а)

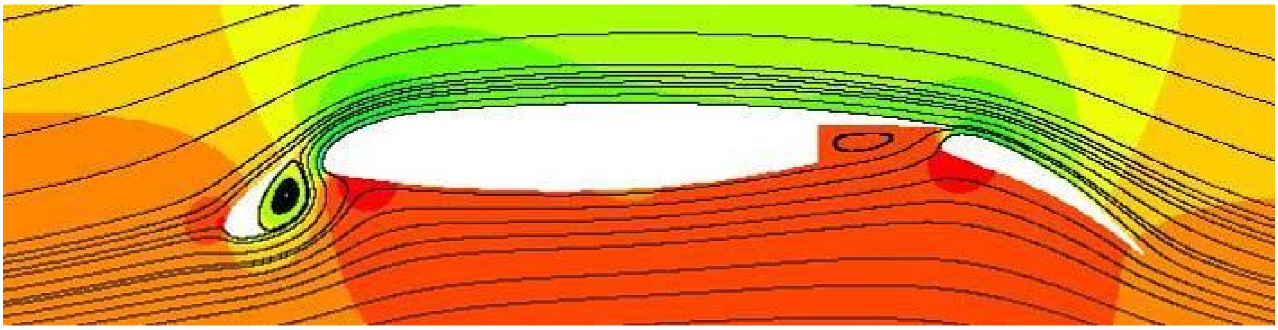


б)

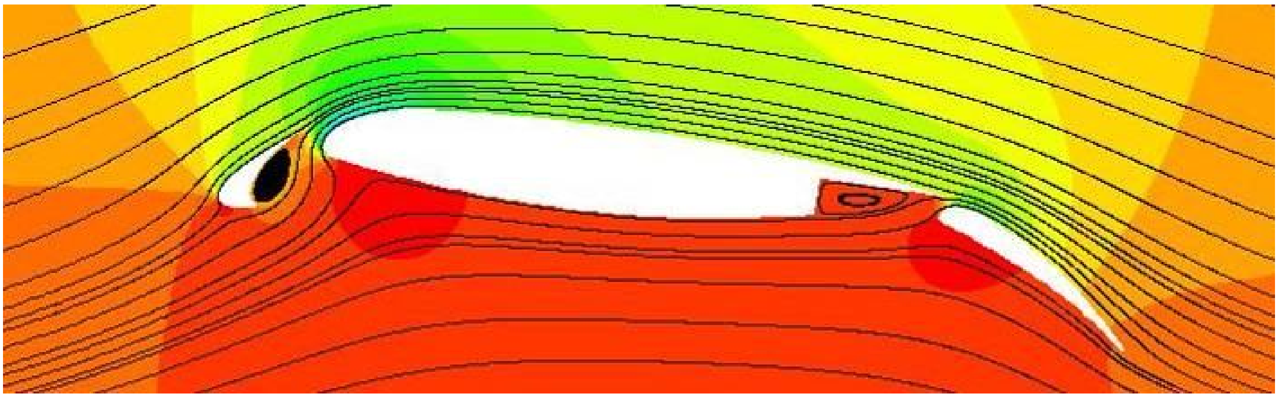


в)

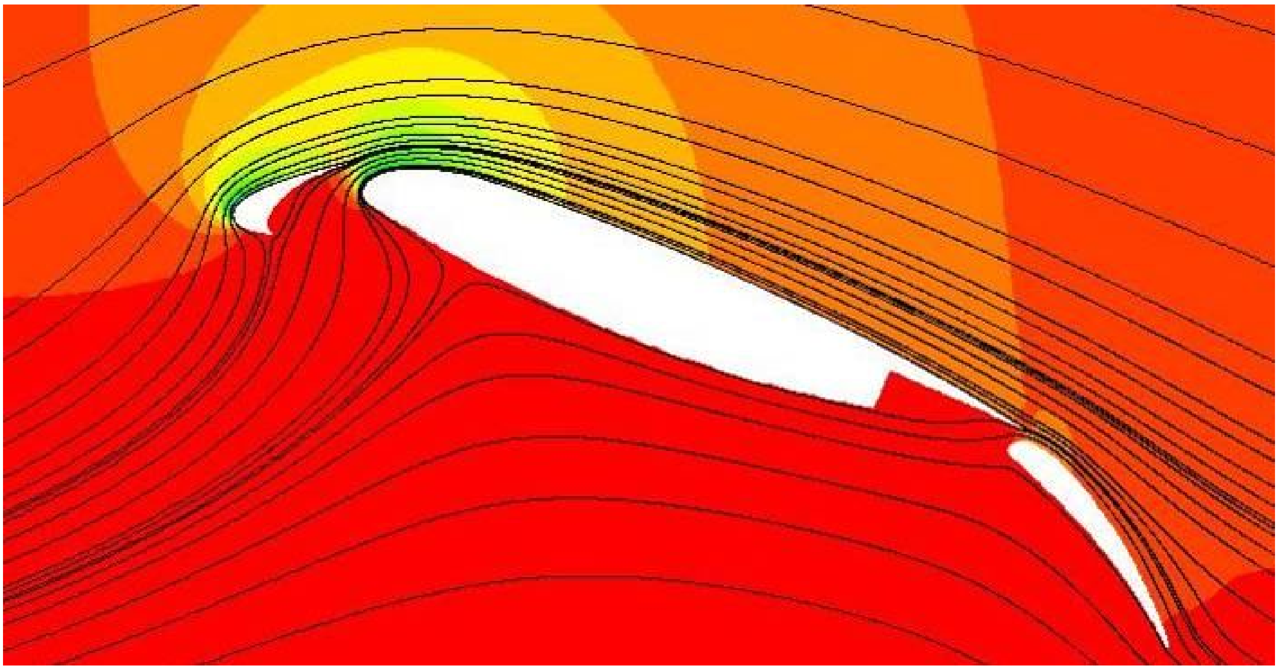
Рисунок 5.19 – Ізолінії модуля швидкості (конфігурація А): а – α = 0º; б – α = 8.109º; в – α = 23.393°



а)

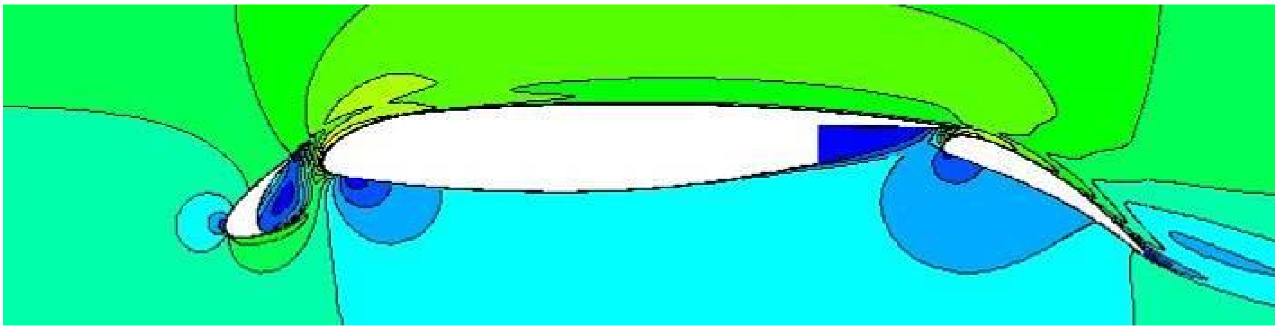


б)

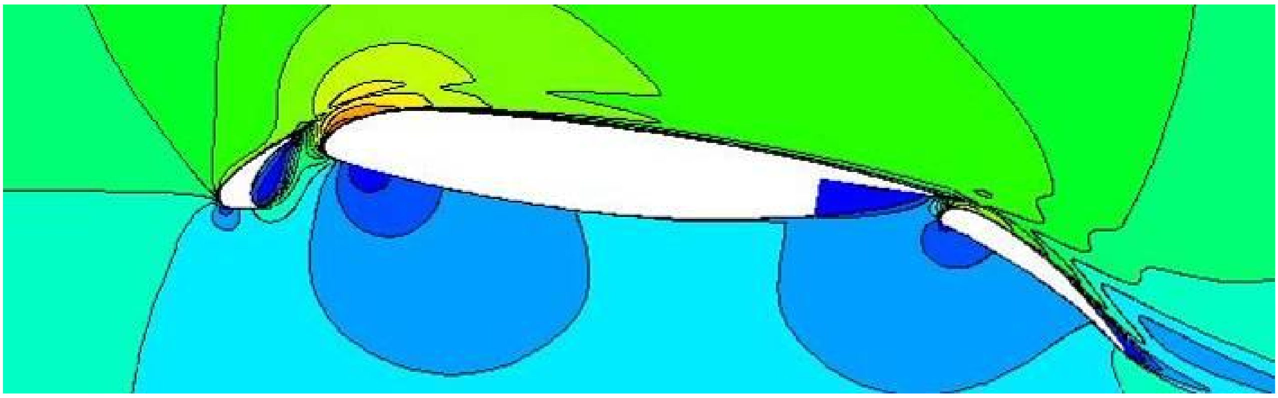


в)

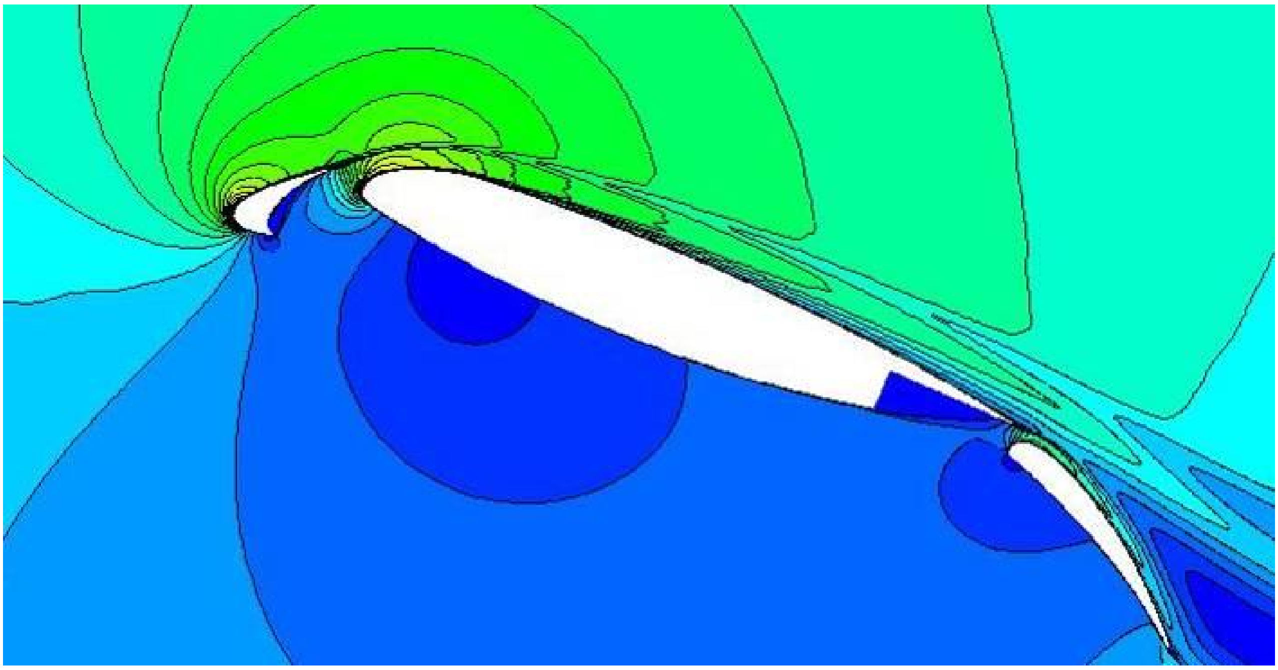
Рисунок 5.20 – Миттєві лінії течії (конфігурація В): а – α = 0º; б – α = 8.109º; в – α = 23.393°



а)

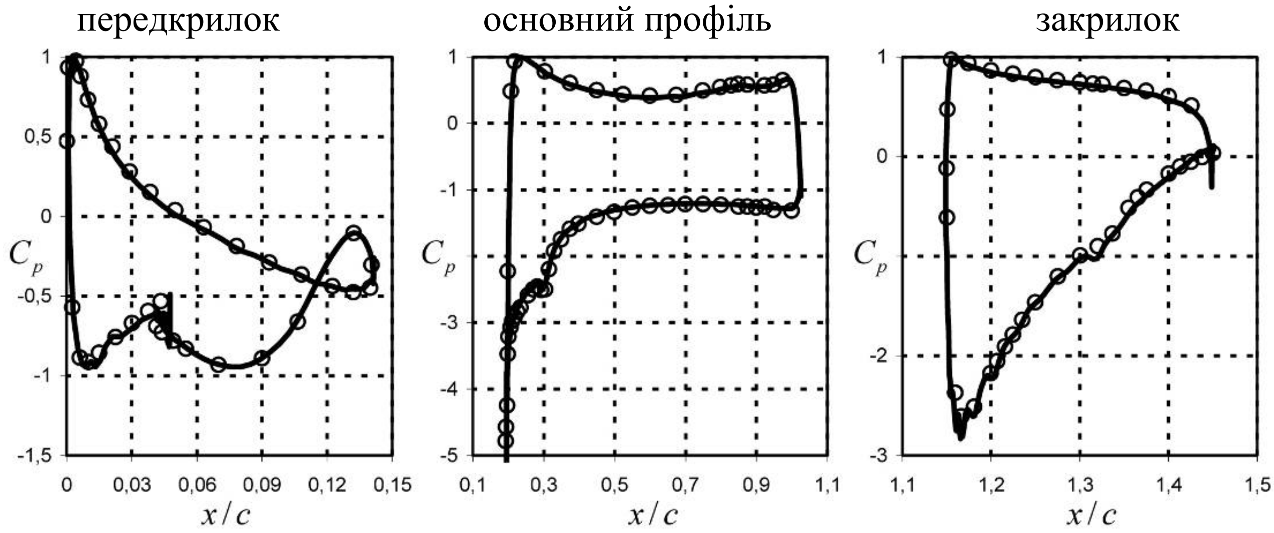


б)

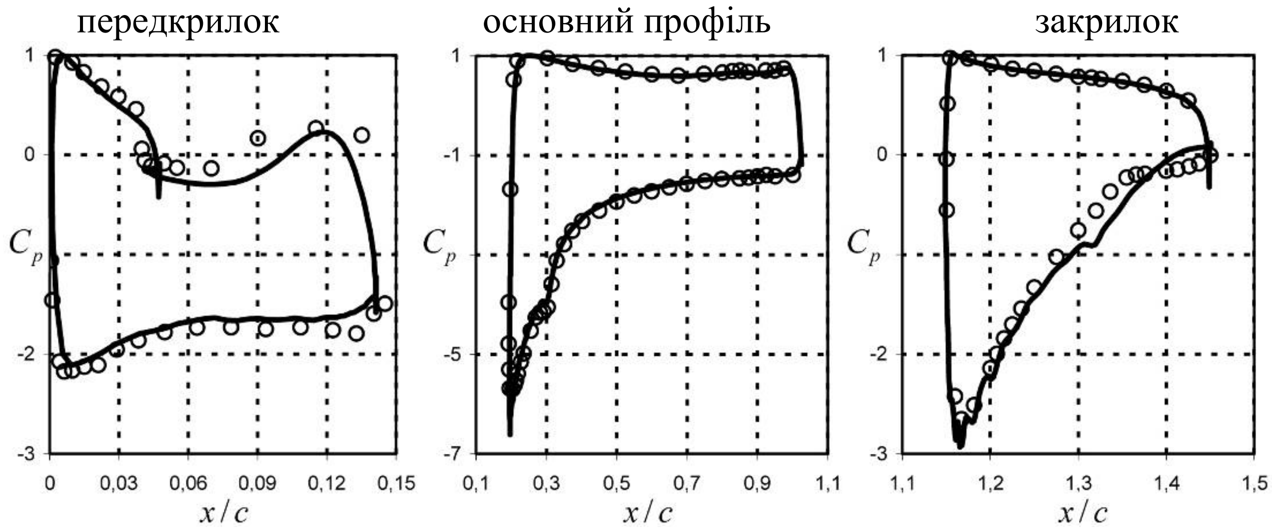


в)

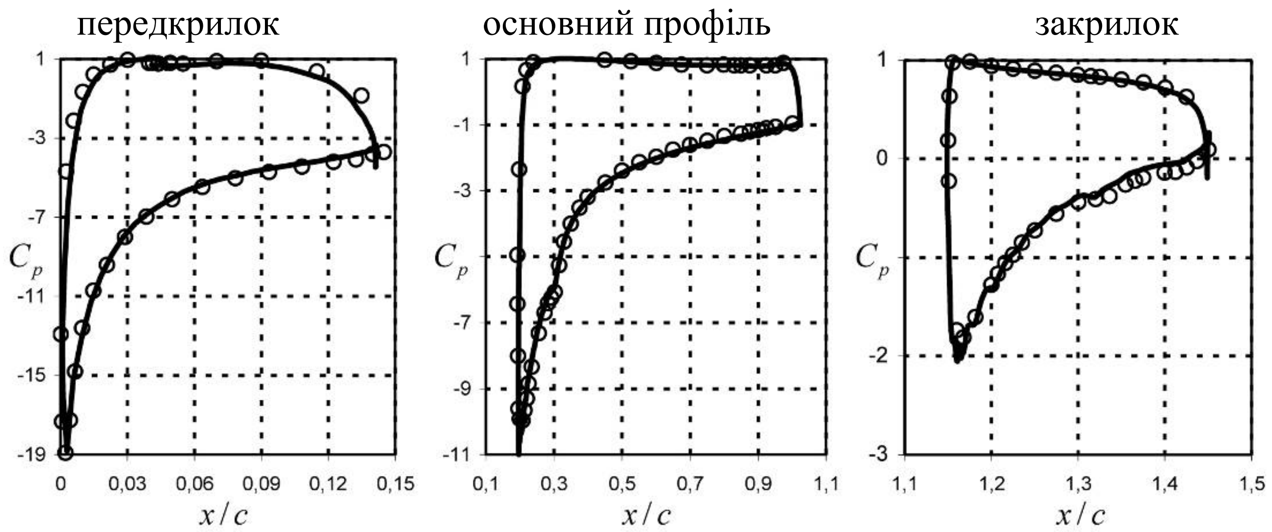
Рисунок 5.21 – Ізолінії модуля швидкості (конфігурація В): а – $\alpha = 0^{o}$; б – $\alpha = 8.109^{o}$; в – $\alpha = 23.393°$



а)



б)



в)

Рисунок 5.22 – Розподіл коефіцієнта тиску C_P по поверхні профілю (конфігурація B) при кутах атаки 0° (а), 8.109° (б) і 23.393° (в) (○ – експеримент [306], ▬ – дана робота)

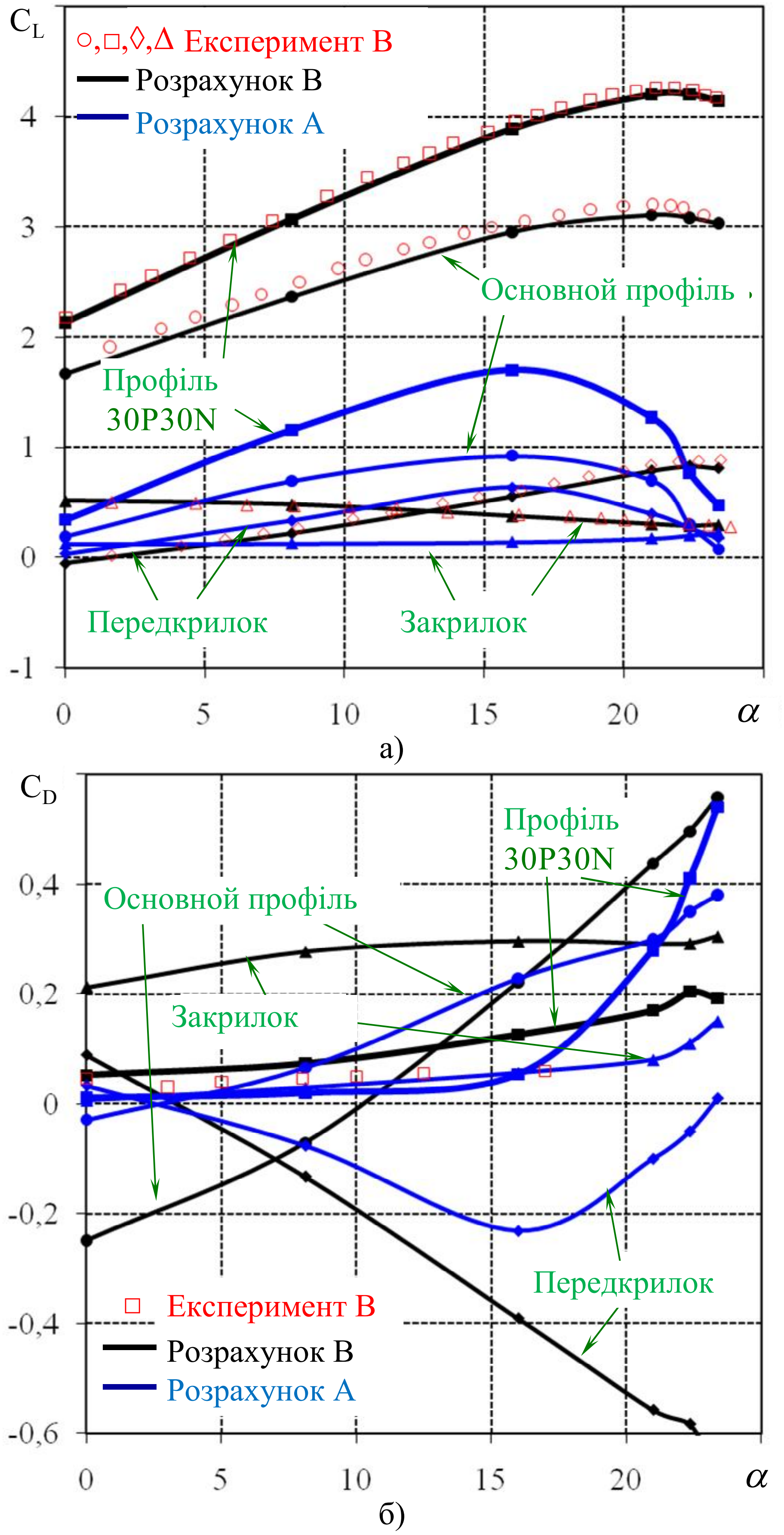


Рисунок 5.23 – Залежність коефіцієнтів підйомної сили (а) і сили лобового опору (б) від кута атаки 30P30N (○, □, ◊, Δ – експеримент [306], ▬ – дана робота)

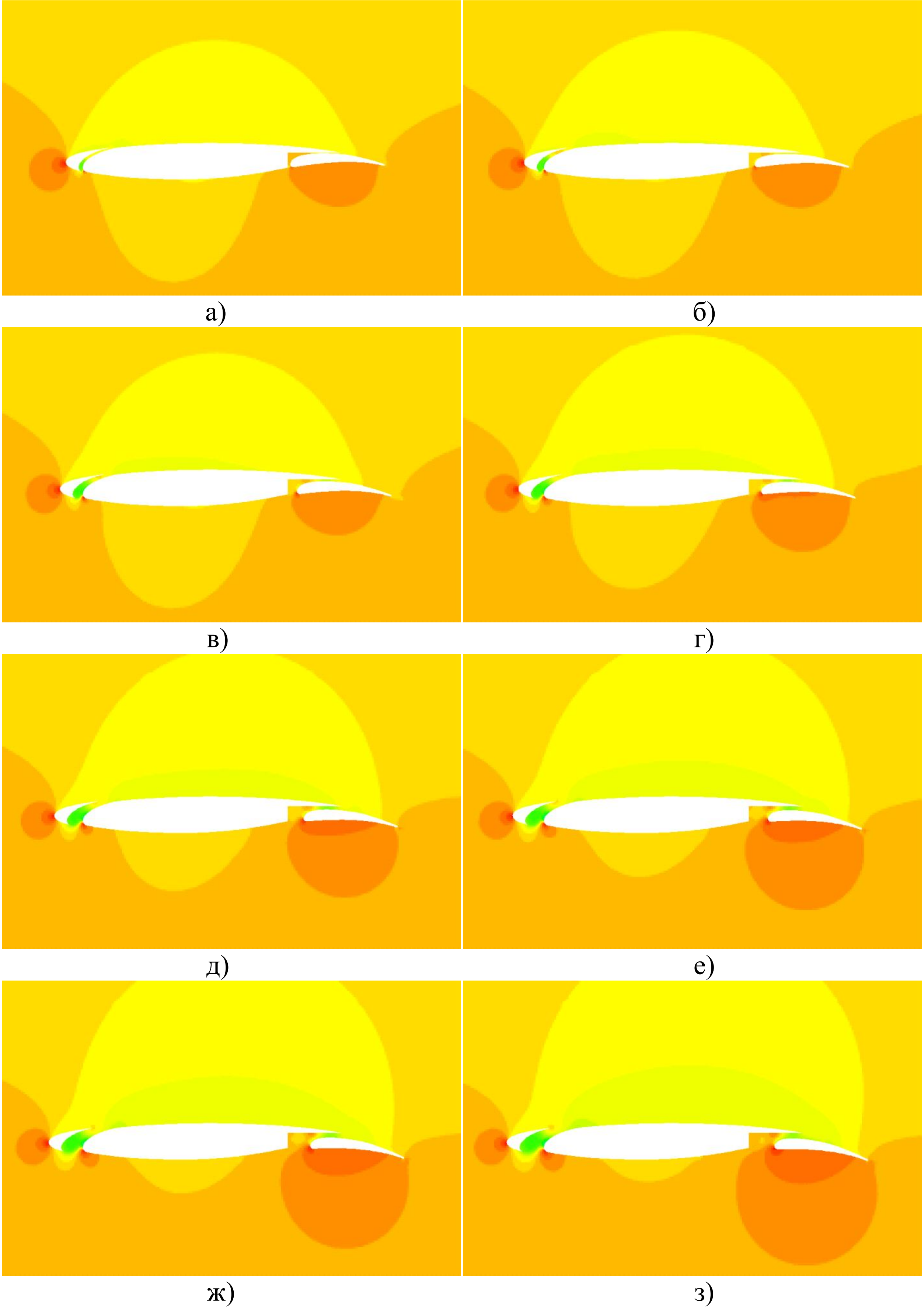


Рисунок 5.24 – Динаміка та аеродинаміка трьохелементного профілю 30P30N для різних моментів часу (ізобари): а – t = 0; б – t = 0.2; в – t = 0.4; г – t = 0.6; д – t = 0.8; е – t = 1.0; ж – t = 1.2; з – t = 1.4

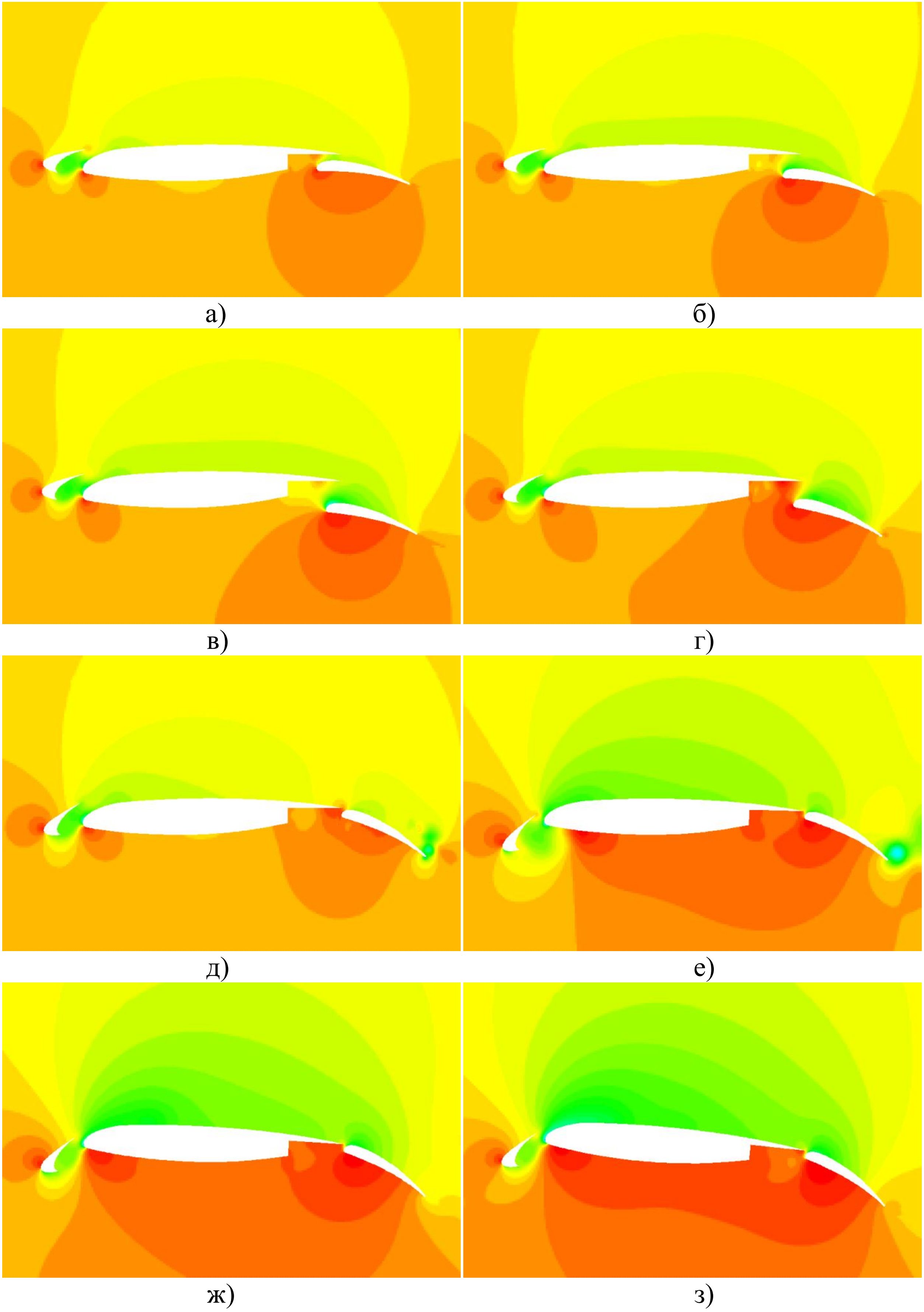


Рисунок 5.25 – Динаміка та аеродинаміка трьохелементного профілю 30P30N для різних моментів часу (ізобари): а – t = 1.6; б – t = 1.8; в – t = 2.0; г – t = 2.2; д – t = 2.4; е – t = 2.6; ж – t = 2.8; з – t = 3.0

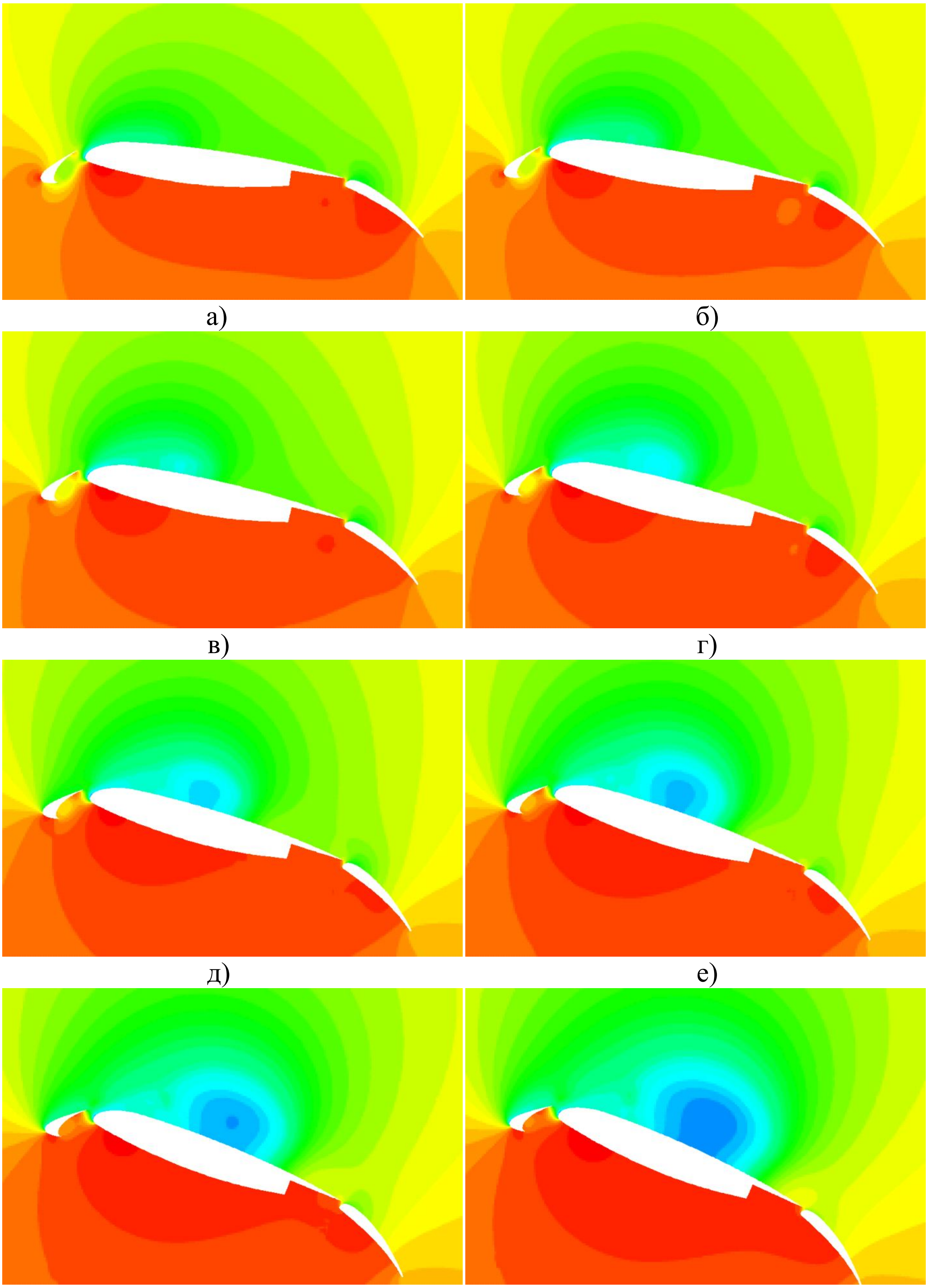


Рисунок 5.26 – Динаміка та аеродинаміка трьохелементного профілю 30P30N для різних моментів часу (ізобари): а – t = 1.6; б – t = 1.8; в – t = 2.0; г – t = 2.2; д – t = 2.4; е – t = 2.6; ж – t = 2.8; з – t = 3.0

5.4 Математичне моделювання обтікання профілю транспортного засобу поблизу екрана турбулентним потоком

Збільшення парку вантажного автотранспорту призводить до зростання споживання дизельного палива. Тому питання економії палива є актуальним в умовах ринкової конкуренції вантажних перевезень. Для автотягача з причепом витрата палива на подолання сили лобового опору при швидкостях порядку 80 км/год стає зіставна з витратою палива на тертя кочення коліс. А при швидкості 110 км/год витрата палива на подолання сили лобового опору становить вже 65% від загальної витрати. Тому зменшення лобового опору на 25% може привести до зниження витрати палива на 10÷15%.

На сьогоднішній день оптимізація аеродинамічної форми автотягачів з причепом проводиться шляхом багаторазових продувок в аеродинамічних трубах. У найближчому майбутньому CFD розрахунки можуть суттєво зменшити число необхідних продувок в аеродинамічних трубах і як наслідок знизити кінцеву вартість виробу.

У загальному випадку при моделюванні обтікання наземного транспорту необхідний облік тривимірних процесів, нестаціонарності поля течії, в'язких ефектів, включаючи турбулентність і її великомасштабну частину. В даний час реалізація такого повного підходу доступна великим фірмам і корпораціям, які використовують суперкомп’ютери або кластери персональних комп'ютерів, а також мають необхідний рівень фінансування розв'язку прикладних задач.

Зростання швидкості руху наземного транспорту привів до необхідності врахування взаємного впливу тіла та екрану один на одного, поля швидкостей навколо самого транспортного засобу та у його далекому сліді. Таким чином, виникла потреба у вивченні процесів формування та розпаду вихорів, а також їх вплив на аеродинамічні характеристики тіл поблизу екрана.

Мотивацією дослідження послужило бажання розширити область застосування розробленого CFD пакета на новий клас задач, а також перевірити припущення про застосовність двовимірної моделі для розрахунків поля течії в площині симетрії транспортного засобу. У випадку позитивного результату –

одержати можливість швидкої оцінки аеродинамічних коефіцієнтів транспортного засобу при зміні його форми.

5.4.1 Короткий опис натурного експерименту

Для комп'ютерного моделювання обтікання транспортного засобу поблизу екрану турбулентним потоком було обрано компонування наземної транспортної системи (Ground Transportation System – GTS), яка відображає геометрію автотягача з причепом (рис. 5.27). Причинами вибору даного компонування послужило те, що вона досліджувалася фахівцями NASA та SANDIA, за нею є достовірні експериментальні дані, а також присутні складні фізичні ефекти з погляду механіки рідини та газу. Експериментальне вивчення наземної транспортної системи проведено в Дослідницькому центрі Еймса (NASA) [299]. У спрощеній компоновці автотягача із причепом не розглядаються дзеркала, колеса, зазор між тягачем і причепом, дрібні елементи конструкції. Експериментальні дані містять у собі набір інтегральних і розподілених характеристик, основні з яких – коефіцієнти тиску та тертя.

5.4.2 Геометричні характеристики моделі та параметри обчислювального експерименту

У якості характерного розміру вибирається довжина GTS моделі, що дорівнює 2.47 м (у безрозмірних величинах дорівнює 1.0). Висота становить 0.44 м (0.182). Переднє закруглення (кабіна водія) являє собою чверть еліпса, малий радіус якого дорівнює 0.22 м (0.08975), а великий – 0.38 м (0.15385). Зазор між екраном і моделлю – 0.07 м (0.0314). Швидкість потоку повітря в аеродинамічній трубі – 78 м/с (1.0). Число Рейнольдса, що розраховано за довжиною та швидкістю потоку, що набігає, дорівнює $1.53\ 10^{7}$.

Розрахункова сітка являє собою сітку типу Chimera, яка складається з двох блоків із загальним числом вузлів 10^{5} (рис. 5.28). Перший блок – це О-сітка, пов'язана з тілом, а другий – прямокутна сітка, яка прилягає до поверхні (екрану). Перший безрозмірний крок розрахункової сітки від поверхні моделі становив 10^{-6}. Безрозмірний крок інтегрування за часом дорівнює 10^{-2}.

5.4.3 Результати та обговорення

У результаті проведених розрахунків [52, 59, 261] турбулентного обтікання профілю автомобіля поблизу екрана виділено фізичні особливості структури течії та виконано аналіз коефіцієнтів тиску, підйомної сили та сили лобового опору. Отримано розподіли полів тиску (рис. 5.29 а), компонент швидкості (рис. 5.29 б), ліній течії у всій області та поблизу автотягача із причепом (рис. 5.30), а також значення інтегральних і розподілених характеристик (рис. 5.31).

Отримана картина обтікання моделі автотягача із причепом носить нестаціонарний характер. Дана модель відноситься до погано обтічних тіл. Розміри відривної зони перевершують довжину транспортної системи в кілька разів.

При обтіканні автотягача із причепом відбувається прискорення потоку в районі кабіни та в зазорі між екраном (рис. 5.29). Над кабіною водія відбувається падіння тиску, що обумовлено різким прискоренням потоку в даній області. Надалі тиск відновлюється і стає майже сталим до краю причепа. У сліді формується протилежно спрямована основному потоку рециркуляційна течія. Вихори у донній частині моделі позмінно сходять із верхньої та нижньої поверхні. Наявність масивних вихорів призводить до зменшення донного тиску. Великий перепад тиску між лобовою та донною частинами тягача призводить до більших значень лобового опору.

У зазорі реалізується рівномірна течія, аналогічна течії в каналі, за винятком невеликої області поблизу кабіни. У донній частині течія за своєю структурою близька до вихрової доріжки Кармана. Відрив потоку виникає у донній частини причепа з гострих крайок, а також у нижній частині кабіни поблизу поверхні. Відрив потоку наочно ілюструють лінії течії (рис. 5.30).

Отримано розподіл коефіцієнта тиску по поверхні моделі (рис. 5.31 а). Помітна відмінність коефіцієнта тиску за експериментальними та розрахунковими даними на верхній поверхні, що пов'язано з двовимірною постановкою задачі, у якій напрямок розтікання потоку обмежено на відміну від тривимірної постановки. Слабке відновлення тиску у донній частини причепа обумовлено властивостями моделі турбулентності Spalart-Allmaras, яка генерує завищені значення турбулентної в'язкості у відривній зоні.

Це ж проявляється і в розподілі коефіцієнта тертя в передній частині моделі (рис. 5.31 б). У той самий час загальний розподіл коефіцієнта тертя задовільно узгоджується з експериментальними даними. Розрахункове значення коефіцієнта сили лобового опору складає 0.37, а отримане експериментальним шляхом – 0.27.

Проведено порівняння результатів чисельного моделювання з розрахунковими даними SANDIA [281] (рис. 5.32, 5.33). Коефіцієнт сили лобового опору тягача із причепом, що отримано за допомогою CFD коду SACCARA, який розроблено в SANDIA, становить 0.42. Спостерігається якісний (рис. 5.32, 5.33) і кількісний збіг результатів з розрахунковими даними SANDIA.

Розроблений спеціалізований пакет обчислювальної аеродинаміки в цілому правильно передає основні параметри обтікання транспортного засобу поблизу поверхні. Варто відзначити, що для більш адекватного відтворення структури обтікання та розрахунку аеродинамічних характеристик профілю автомобіля поблизу екрана необхідно розглядати тривимірну задачу та застосовувати моделі турбулентності, які дозволяють краще передавати параметри течії при наявності масивного відриву потоку.

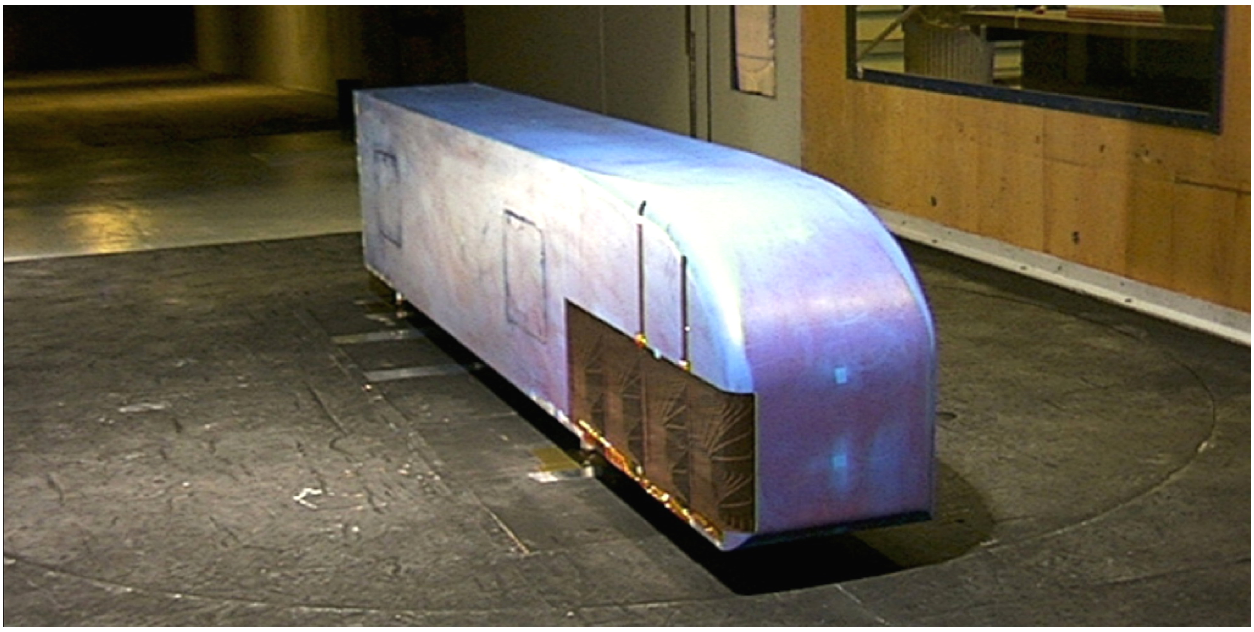
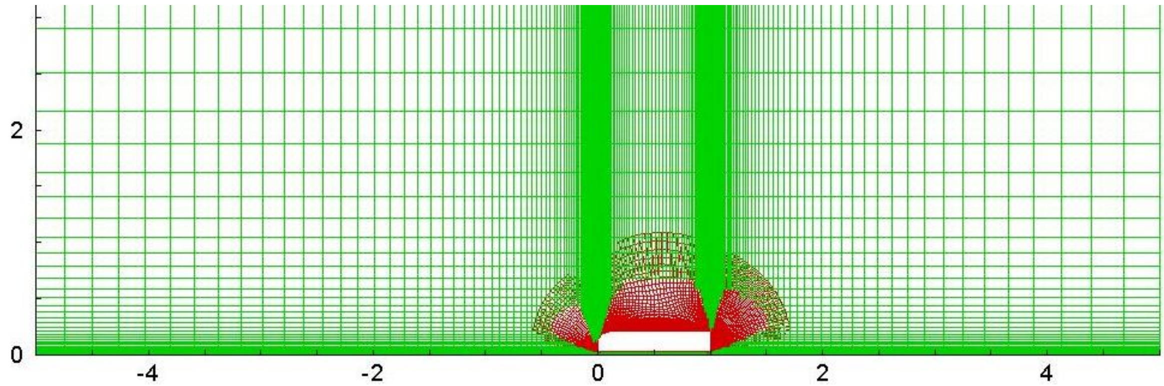
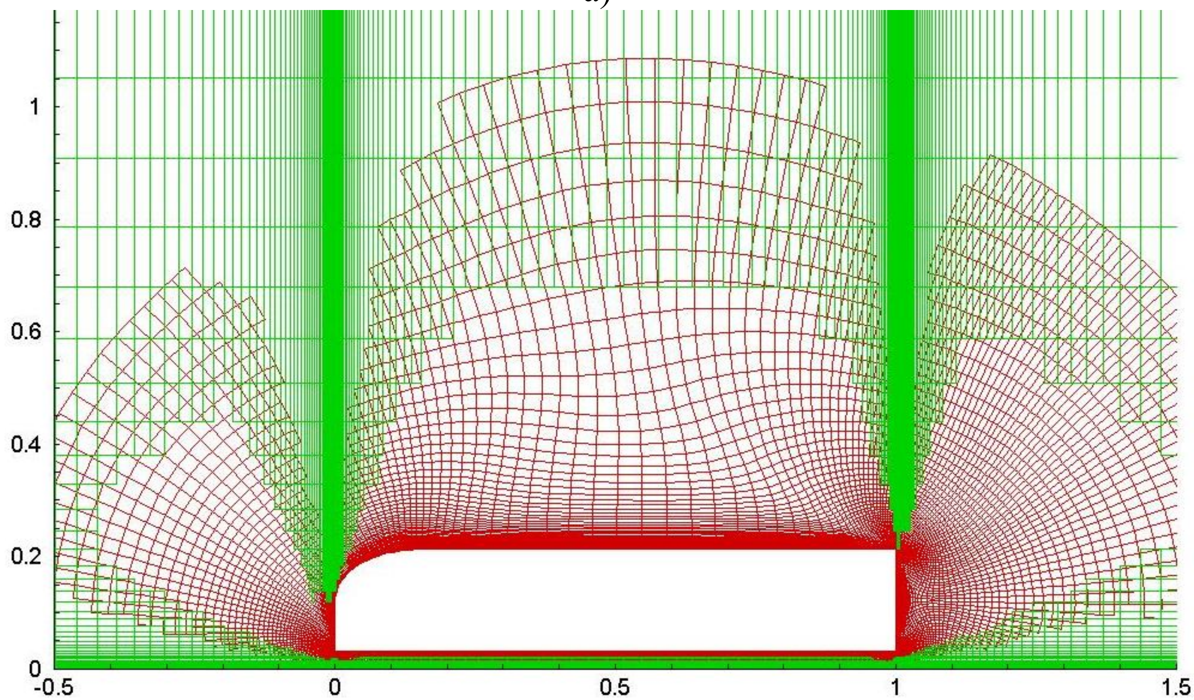


Рисунок 5.27 – Експериментальна модель автотягача з причепом [299]

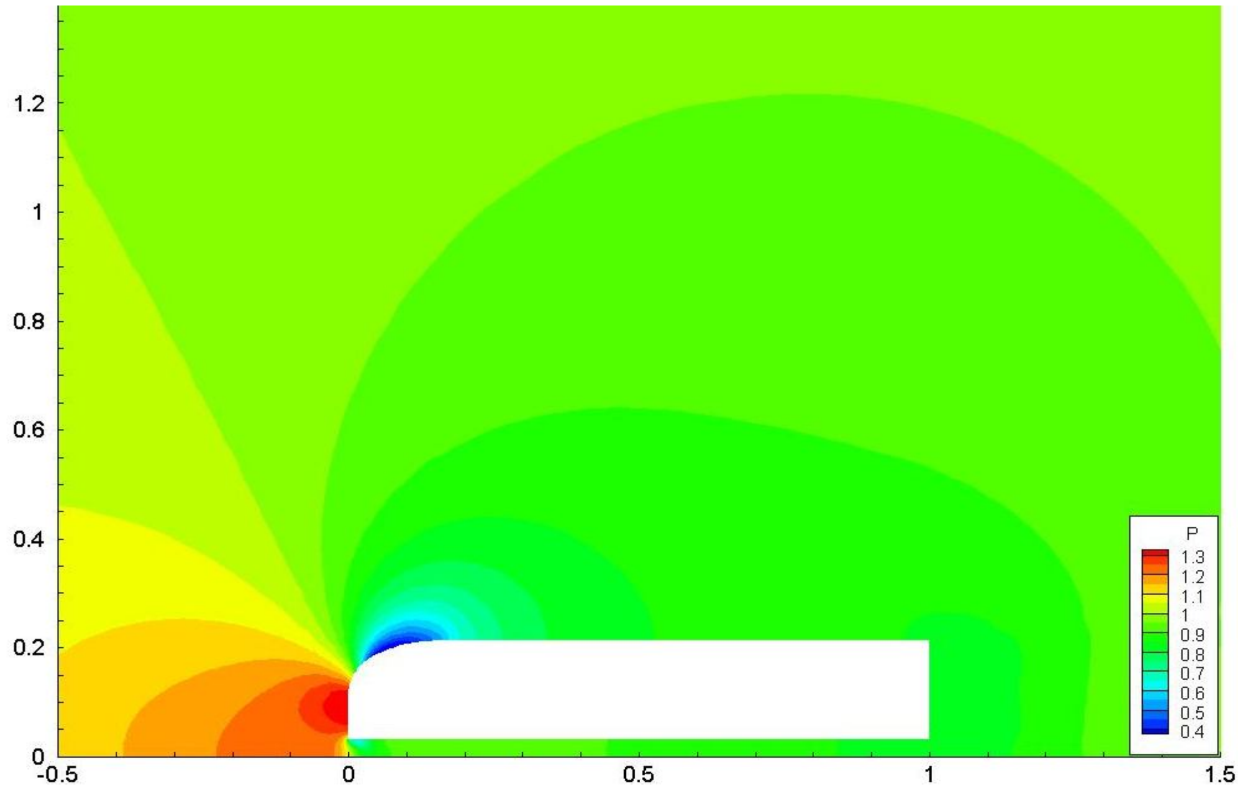


а)

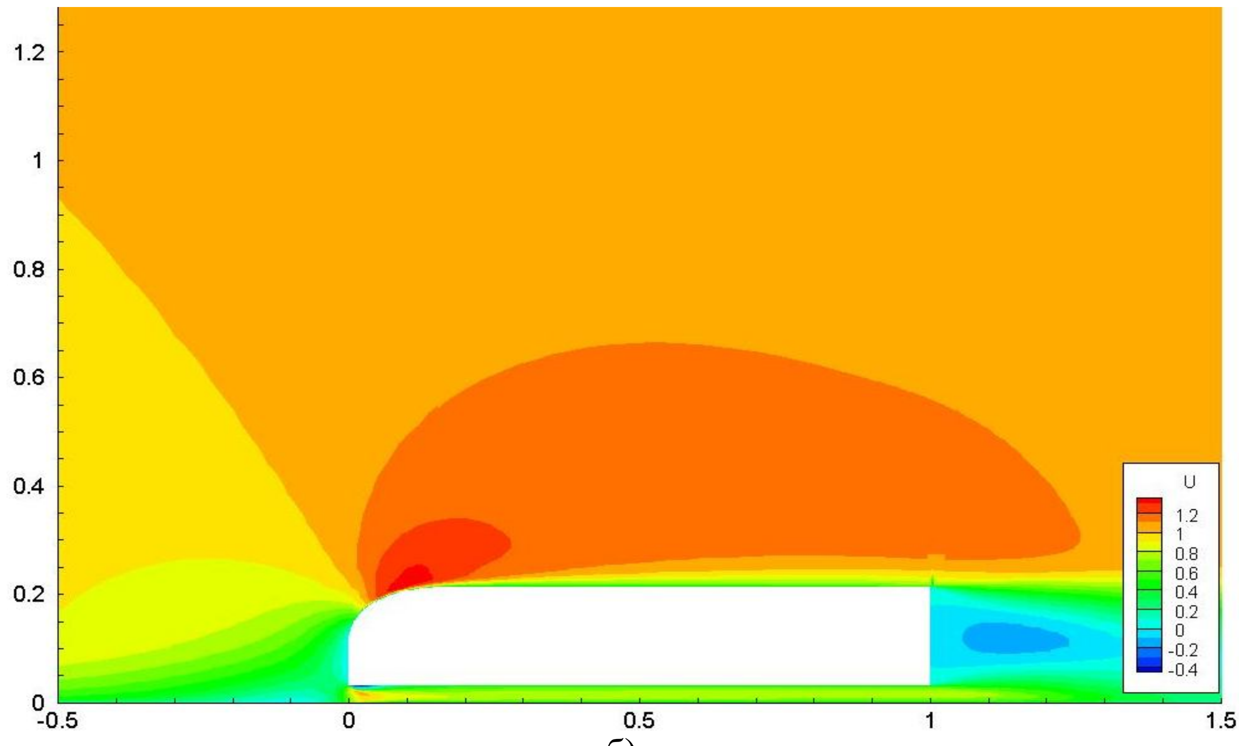


б)

Рисунок 5.28 – Розрахункова сітка в усій області (а) і поблизу автотягача з причепом (б)

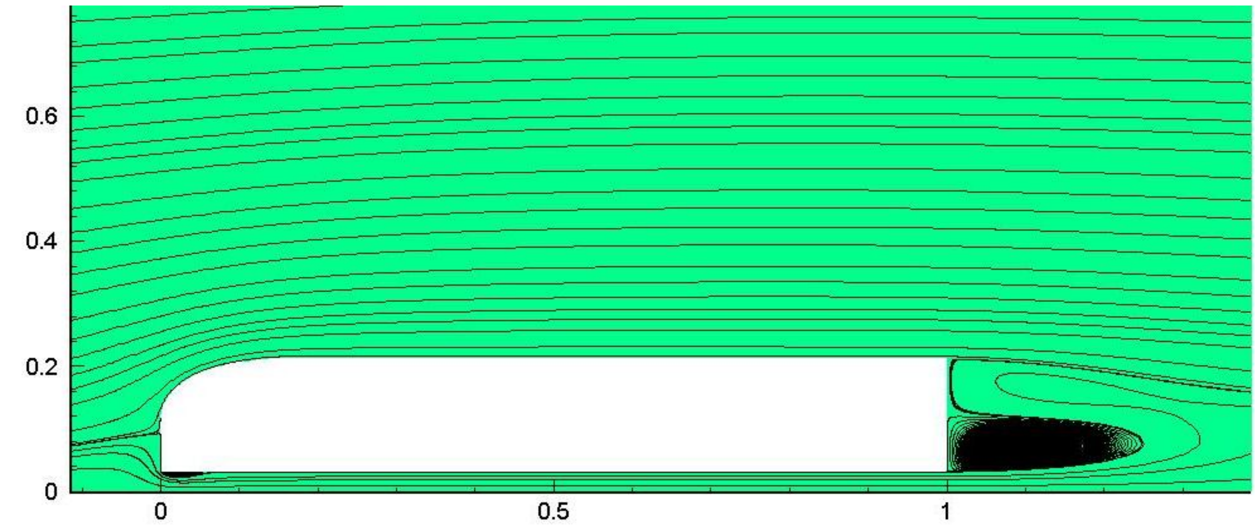


а)

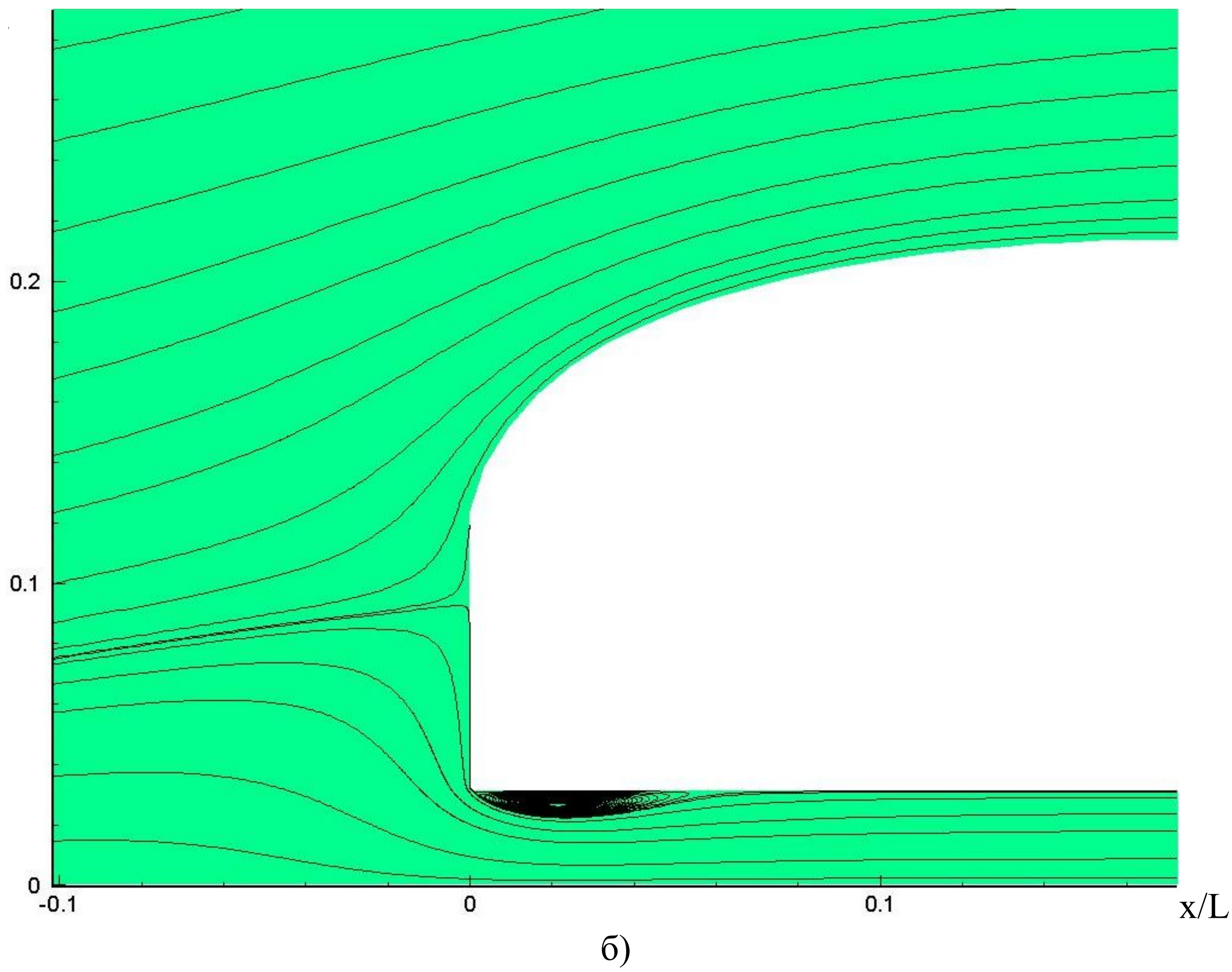


б)

Рисунок 5.29 – Розподіл тиску (а) і x-компоненти вектора швидкості (б) поблизу автотягача з причепом

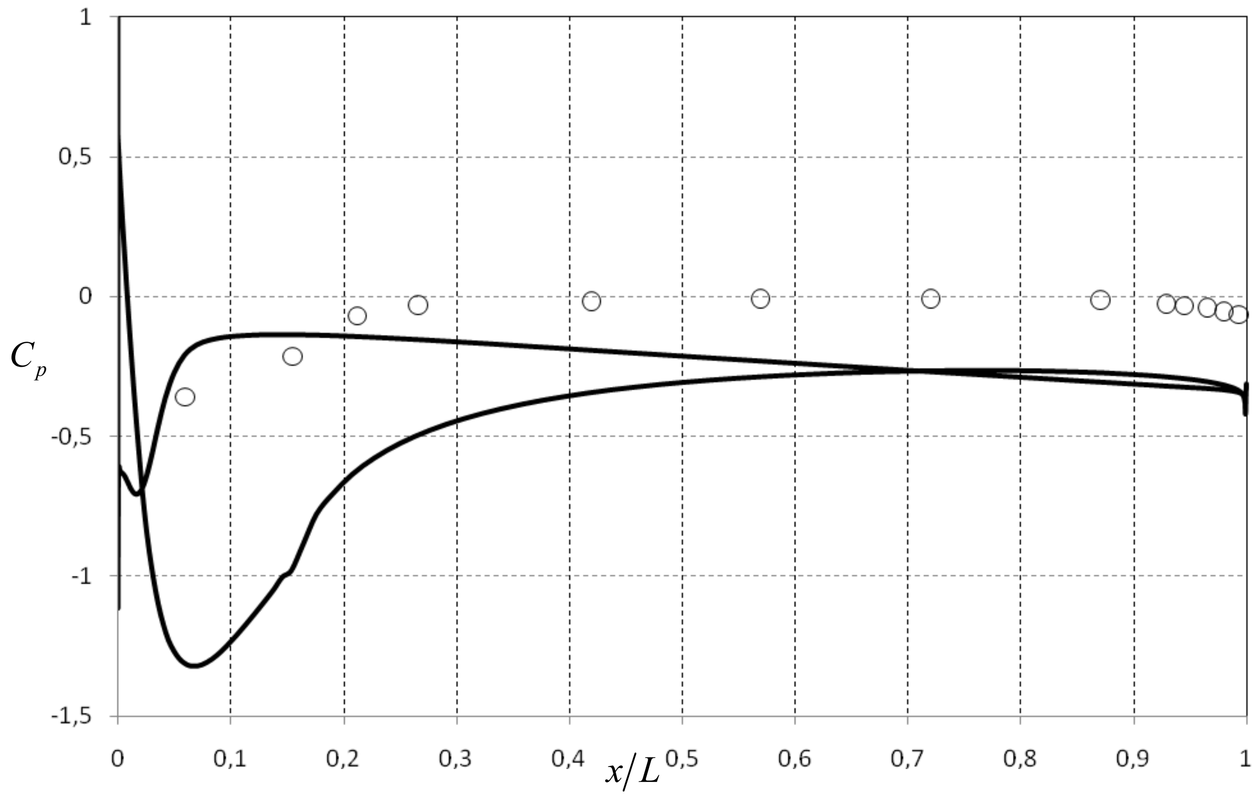


а)

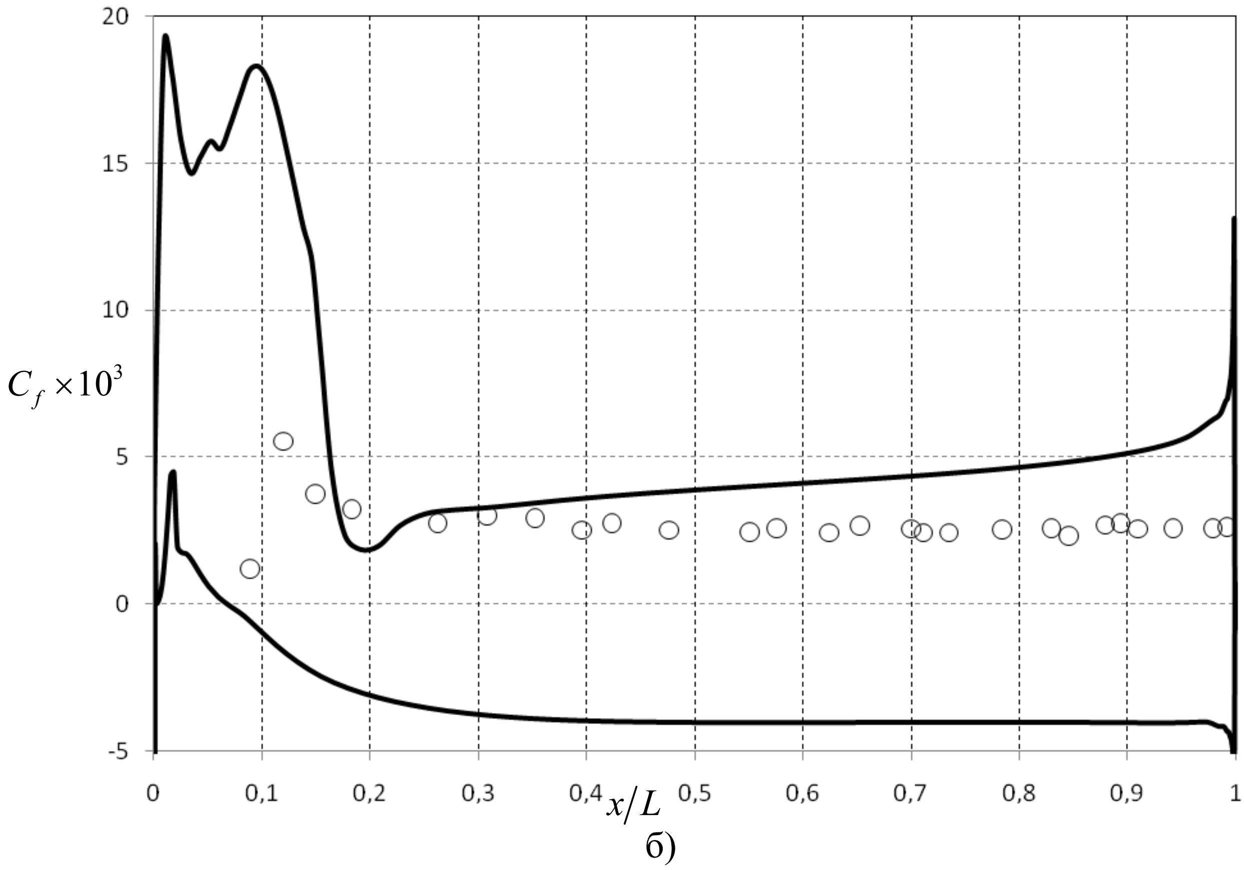


б)

Рисунок 5.30 – Розподіл ліній течії у всій області (а) і поблизу кабіни автотягача з причепом (б)

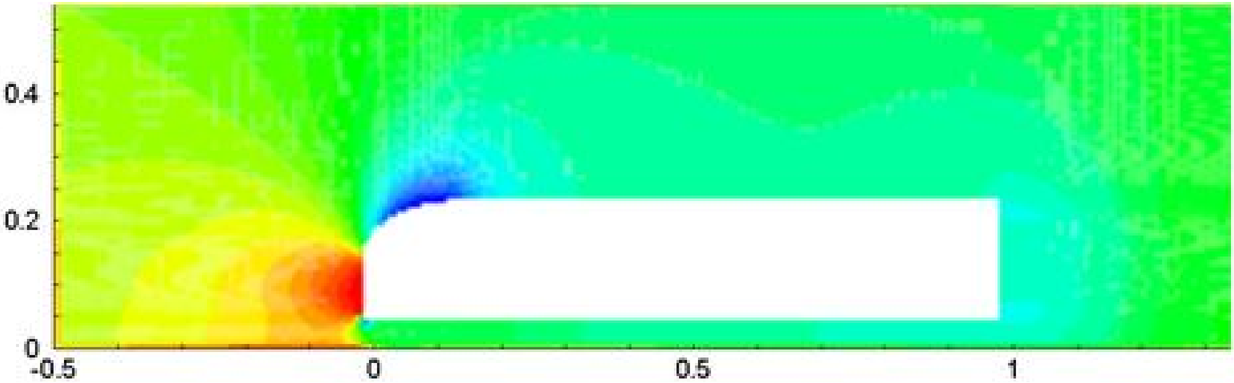


а)

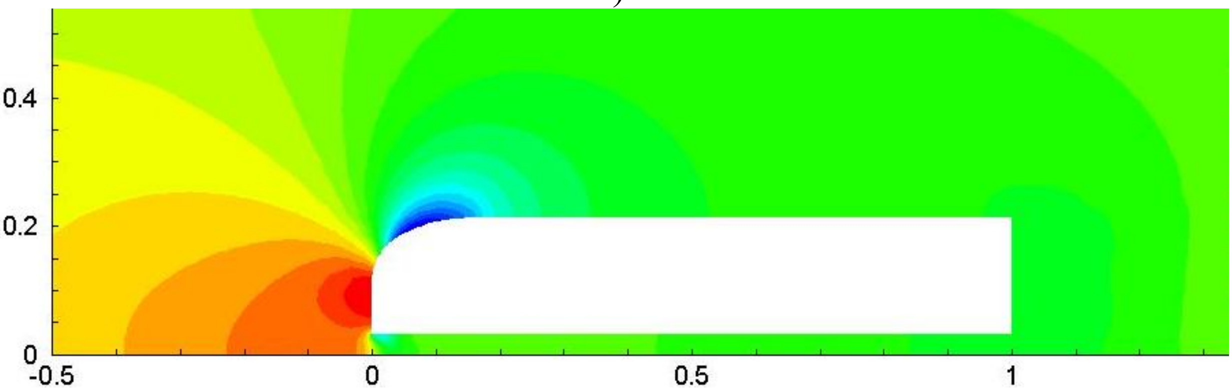


б)

Рисунок 5.31 – Розподіл коефіцієнтів тиску (а) і тертя (б) по верхній і нижній поверхні автотягача з причепом (○ – експеримент (верхня поверхня) [299], ▬ – дана робота)

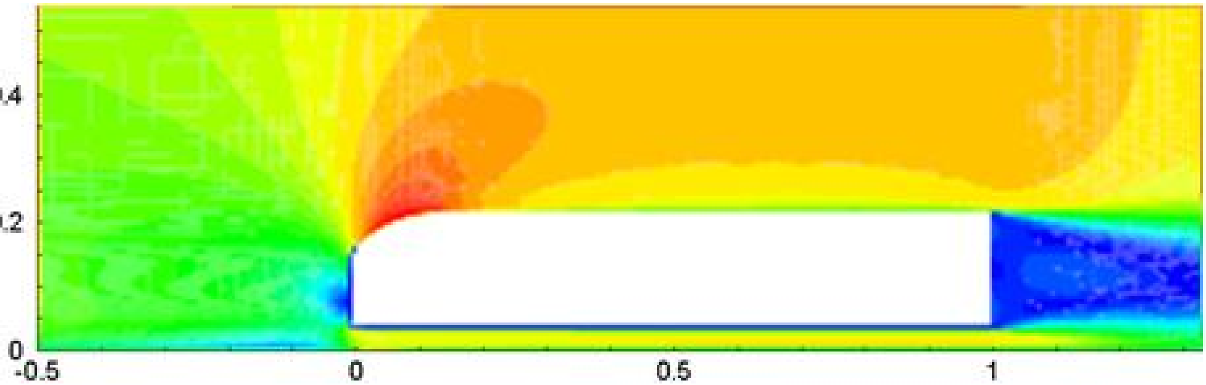


а)

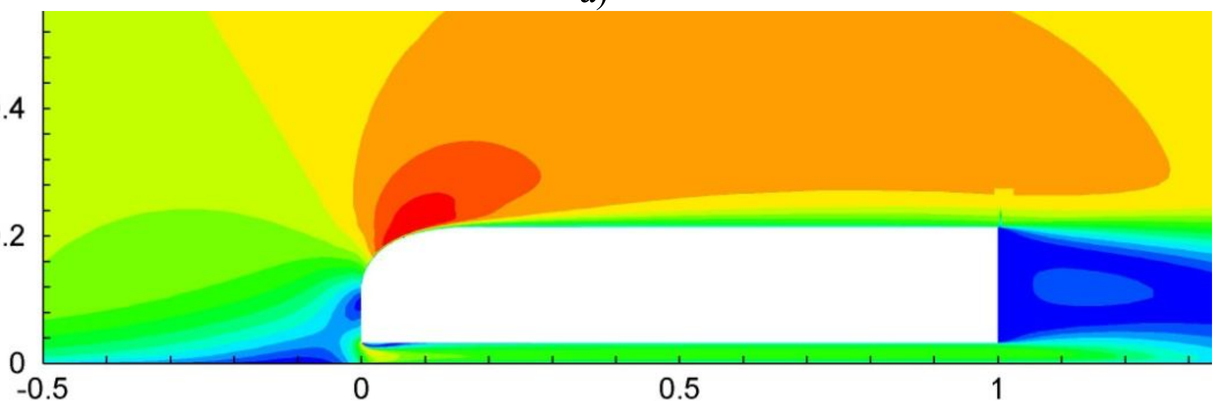


б)

Рисунок 5.32 – Турбулентне обтікання моделі автотягача з причепом. Ізобари (а – розрахунок [281], б – дана робота)



а)



б)

Рисунок 5.33 – Турбулентне обтікання моделі автотягача з причепом. Ізомахі (а – розрахунок [281], б – дана робота)

5.5 Висновки до розділу 5

1. В результаті проведених досліджень аеродинаміки J-профілю отримано нестаціонарні поля течій, а також розраховано значення аеродинамічних характеристик у широкому діапазоні кутів атаки. Показано, що застосування DDES підходу призводить до формування меншої зони відриву із серією дрібних вихорів більшої інтенсивності. Така картина обтікання видається більш реалістичною, забезпечує краще узгодження з експериментальними даними.

2. На основі комп'ютерного моделювання турбулентного обтікання профілів замкнутого та розімкнутого контурів симетричної та несиметричної форми вперше виявлено вплив ступеня замкнутості J-профілю на коефіцієнти лобового опору та підйомної сили, а також на структуру обтікання в цілому.

3. Виділено фізичні особливості структури турбулентного обтікання багатоелементного профілю 30P30N для крейсерської та злітно-посадкової конфігурації в широкому діапазоні кутів атаки. Реконструйовано складну структуру течії, яка виникає при взаємодії потоку, що сходить із верхньої частини основного профілю із примежовим шаром, що наростає на зовнішній поверхні закрилка, а також з потоком повітря, що проходить через зазор між основним профілем і закрилком. Встановлено, що зі збільшенням кута атаки розміри відривної зони на внутрішній поверхні передкрилка зменшуються, а у хвостовій частині основного профілю залишаються практично сталими. Показано, що злітно-посадкова конфігурація має більш високі значення коефіцієнта підйомної сили, ніж крейсерська, особливо на великих кутах атаки. Отримані результати розрахунків якісно узгоджуються з наявними фізичними уявленнями про ефект Коанда та з експериментальними даними інших авторів.

4. Проведено розрахунки турбулентного обтікання контуру транспортного засобу поблизу екрана. Виділено фізичні особливості структури течії навколо транспортного засобу та виконано аналіз коефіцієнтів тиску, тертя, підйомної сили та сили лобового опору. Виконано порівняльний аналіз інтегральних і розподілених аеродинамічних характеристик контуру транспортного засобу з експериментальними даними. Показано можливість застосування розробленого

спеціалізованого CFD пакету до задач аеродинаміки наземного транспорту. Двовимірна постановка задачі дозволяє виявляти основні фізичні ефекти обтікання та одержувати швидкі оцінки впливу форми транспортного засобу на його аеродинамічні характеристики.

РОЗДІЛ 6
ДИНАМІКА ТА АЕРОДИНАМІКА РОТОРІВ ВЕРТИКАЛЬНО-ОСЬОВИХ ВІТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК

На сьогоднішній день конкурентоспроможними порівняно з горизонтально-осьовими (ГО) вітроенергетичними установками (ВЕУ) є вертикально-осьові (ВО) ВЕУ з ротором Дар'є. Однак вони мають істотний недолік – малий стартовий крутний момент, що призводить до проблеми самостартірования. Ротор Савоніуса, навпаки, має високий стартовий крутний момент.

Тому часто на практиці ВЕУ з ротором Дар'є комплектують ротором Савоніуса для забезпечення самозапуску. Але як впливає ротор Савоніуса на аеродинаміку ротора Дар'є на робочому режимі, не досліджувалося ні експериментально, ні теоретично.

У даному розділі на базі розробленого спеціалізованого пакета обчислювальної аеродинаміки виконано дослідження зв’язаної задачі динаміки та аеродинаміки роторів вертикально-осьових вітроенергетичних установок. Проведено серію чисельних розрахунків нестаціонарного обтікання вертикально-осьової вітроенергетичної установки з ортогональними роторами Дар'є та Савоніуса турбулентним потоком вітру для визначення їх характеристик у залежності від зміни діаметра ротора Савоніуса та при різних кутах установки лопаті ротора Дар'є.

6.1 Динаміка та аеродинаміка вертикально-осьової вітроенергетичної установки з роторами Дар'є та Савоніуса

До теперішнього часу основним недоліком ВО ВЕУ є низьке значення коефіцієнта використання енергії вітру. Фізична причина низької ефективності існуючих ВО ВЕУ полягає в явищі динамічного зриву потоку при великих кутах атаки обтікання лопатей ротора ВЕУ. Відрив потоку, що набігає, від поверхні лопати веде до різкого зниження аеродинамічної ефективності, втрат енергії в системі вихорів, що утворюються, за ротором ВО ВЕУ. Механічні способи запобігання зриву потоку призводять, як правило, до подорожчання конструкції ВО ВЕУ та зниження строків її експлуатації.

Основною причиною низької ефективності ВО ВЕУ, є ефекти динамічного зриву потоку. Тому особливу увагу необхідно приділяти математичному моделюванню аеродинаміки вертикально-осьових вітроенергетичних установок для виявлення небажаних режимів експлуатації, що супроводжуються динамічним зривом потоку з лопатей ротора Дар'є.

На сьогоднішній день залишається відкритим питання про взаємовплив роторів Дар'є та Савоніуса. Експлуатація даних роторів в єдиній зв'язці забезпечує запуск ВО ВЕУ при слабкому вітрі або коли ротор Дар'є знаходиться в «мертвих точках» (кутове розташування, при якому стартовий крутний момент дорівнює нулю).

Однак, як показала практика експлуатації ВО ВЕУ з роторами Дар'є, такі «мертві точки», що існують на папері, як правило, відсутні в реальних умовах внаслідок нестаціонарного впливу потоку повітря, що набігає, та турбулентних пульсацій. До того ж, у крайньому випадку, ВО ВЕУ може бути запущена за допомогою генератора, який на кілька секунд переводиться в режим електродвигуна.

Тому для розв'язку проблеми самостартірования ВО ВЕУ з ротором Дар'є більшість виробників комплектують їх ротором Савоніуса для забезпечення самозапуску. Відомо, що ротори Савоніуса (замкнуті та щілинні) мають високі значення стартового коефіцієнта крутного моменту. Однак ефективність роботи ротора Савоніуса різко знижується при коефіцієнтах швидкохідності $\lambda > 1$. І при подальшому збільшенні λ, коефіцієнт потужності може мати від’ємні значення, тобто замість вироблення енергії ротор Савоніуса починає її поглинати. Ротори Дар'є, навпаки, експлуатуються при значеннях коефіцієнта швидкохідності $\lambda > 2$.

Внаслідок різних режимів експлуатації роторів даних типів виникає питання про раціональність використання їх в «жорсткій» зв'язці на робочому (номінальному) режимі.

Як приклад розглядається ВО ВЕУ-0020 потужністю 20 кВт, яка призначена для постачання електроенергії до віддалених невеликих виробничих і житлових об'єктів (рис. 6.1). Основні характеристики ВЕУ-0020 наведено в табл. 6.1.

У даному підрозділі проведено дослідження взаємовпливу аеродинаміки роторів Дар'є та Савоніуса на робочому режимі ВО ВЕУ, а також їх внесок у загальну енергетичну ефективність [129]. Чисельне моделювання проводилося в безрозмірному виді. У якості характерних величин вибиралися швидкість вітру та хорда лопаті.

В роботі розглядається ВО ВЕУ, що складається з ортогонального ротора Дар'є та Савоніуса, лопаті яких мають довжину, що багаторазово перевищує хорду (рис. 6.2). У такому випадку можна знехтувати кінцевими ефектами на лопатях і скористатися гіпотезою про плоскопаралельну структуру течії. Таким чином, задача обтікання ВО ВЕУ допускає двовимірну постановку в площині, що перпендикулярна осі обертання ротору.

За нульовий кут повороту ВО ВЕУ вибирається розташування, коли одна з лопатей ротора Дар'є спрямована назустріч потоку, а друга за потоком. У центрі ВО ВЕУ знаходиться дволопатевий ротор Савоніуса, що представляє собою два півкола, зміщені відносно один одного на величину s. Багатоблочну структуровану пересічну сітку (типу Chimera) навколо ВО ВЕУ з роторами Дар'є та Савоніуса наведено на рис. 6.3.

Реконструкція структури обтікання рухомого ротора ВО ВЕУ потоком повітря, що набігає, виконано за допомогою ізобар і контурів завихрення, що характеризує розміри та інтенсивність вихорів, що сходять з лопатей, для різних кутових положень на четвертому оберті ВО ВЕУ (рис. 6.4-6.7). Отримано значення коефіцієнтів крутного моменту кожної лопаті ротора Дар'є (D1, D2) і роторів у цілому (D) від кута повороту θ (рис. 6.8-6.11).

Таблиця 6.1 – Основні характеристики ВЕУ-0020

	розмірні	безрозмірні
Ротор Дар'є		
– профіль лопаті	NACA 0020	NACA 0020
– діаметр ротора, D	7,2 м	10,17
– радіус ротора, R	3,6 м	5,085
– хорда лопаті, c	0,708 м	1
– довжина лопаті, h	2 м	1
– коефіцієнт швидкохідності, λ	—	3
– кут установки лопаті, β	$-6°,\ -3°,\ 0°,\ +3°,\ +6°$	
Ротор Савоніуса		
– профіль лопаті	півколо	півколо
– радіус лопаті, r	0,45 м	0,64
– довжина лопаті, h	0,3 м	1
– зазор між лопатями, s	0,215 м	0,3
– товщина лопаті, t	0,01 м	0,014
– коефіцієнт швидкохідності, λ	—	0,87
– кутова швидкість обертання, ω	10,83 рад/с	0,583
– швидкість вітру, U	13 м/с	1,0
– кінематична в'язкість повітря, ν	$1{,}47\cdot10^{-5}$ м^2/с	1,0
– число Рейнольдса, Re_c	—	$6{,}5\cdot10^5$

Коефіцієнти використання енергії вітру C_P та крутного моменту C_Q визначаються за допомогою співвідношень (6.1), (6.2), відповідно. Значення розмірного крутного моменту отримують шляхом підстановки розмірних величин у вираз (6.2).

Коефіцієнти використання енергії вітру та крутного моменту визначаються за допомогою співвідношень

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^3 A}, \tag{6.1}$$

$$C_Q = \frac{Q}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 A R}, \tag{6.2}$$

де P – потужність ВЕУ, C_P – коефіцієнт потужності, C_Q – коефіцієнт крутного моменту, $A = 2RH$ – ометаєма ротором площа, H – висота лопаті ротора. Коефіцієнт потужності пов'язаний з коефіцієнтом крутного моменту співвідношенням

$$C_P = C_Q \lambda, \tag{6.3}$$

де $\lambda = \omega R / U_\infty$ – коефіцієнт швидкохідності.

При обертанні ВО ВЕУ виходить на квазістаціонарний режим роботи вже на третьому оберті (рис. 6.8 б). Потік вітру, що набігає, на наведених рисунках спрямований зліва на право (рис. 6.4-6.7).

При куті повороту θ = 30 (рис. 6.4 б) внутрішній простір ВО ВЕУ з ротором Дар'є практично не містить великих вихрових структур, за винятком невеликої області внизу рисунка. Обтікання лопатей ротора Дар'є носить приєднаний характер. У сліді другої лопати спостерігається група вихорів ***д***, що зірвалися з внутрішньої поверхні даної лопаті. Наявність каскаду вихорів ***д*** є наслідком динамічного відриву потоку з другої лопаті ротора Дар'є.

При порівнянні ВО ВЕУ з роторами Дар'є та Савоніуса (рис. 6.4 а) спостерігається підвищена турбулізація внутрішньої області. При куті повороту θ = 30° (рис. 6.4 а) на лопатях ротора Савоніуса формуються два вихори ***а*** і ***б***, які сходять із другої та першої лопаті, відповідно. Інтенсивність і швидкість руху вихору ***а*** суттєво більша, ніж у вихору ***б***. Це є наслідком прискорення вихору ***а*** лопаттю 2, що рухається за потоком, і уповільненням вихору ***б*** першою лопаттю, що обертається назустріч вітру, що набігає. У центральній частині щілинного ротора Савоніуса спостерігається перетікання частини повітря із внутрішньої поверхні другої лопаті на внутрішню поверхню першої, що створює додатковий тиск, а, отже, і крутний момент на валу ротора. У далекому сліді ротора розташований каскад вихорів ***г*** і ***в***, які зійшли з лопатей ротора на попередніх обертах.

Обтікання лопатей ротора Дар'є для кута повороту 60° носить приєднаний характер (рис. 6.4 г). При даному кутовому розташуванні друга лопать ротора Дар'є проходить через вихровий слід від опорної вежі. Дана вихрова структура за своєю інтенсивністю та розмірами набагато менша, ніж та, яку генерують лопаті ротора Савоніуса (рис. 6.4 в). Подальше формування вихорів ***а*** і ***б*** спостерігається при $\theta = 60°$ (рис. 6.4 в). Відбувається зростання вихору ***а*** та подовження ***б*** внаслідок обертання лопатей. Вихори ***в*** і ***г***, втративши значну частину швидкості зсуву в сліді, починають взаємодіяти один з одним, утворюючи надалі один великий макровихор. Для цього кутового розташування перша лопать ротора Савоніуса починає створювати додатній крутний момент (рис. 6.10). Лопаті ротора Дар'є обтікаються потоком повітря без відриву. Відбувається збільшення коефіцієнта крутного моменту першої лопаті, а значення коефіцієнта другої лопаті залишається майже сталим (рис. 6.10-6.11).

Кутове розташування ВО ВЕУ, яке дорівнює 90° (рис. 6.4 д, е), характеризується максимальним значенням коефіцієнта крутного моменту першої лопаті ротора Дар'є та мінімальним значенням другої. Причому для ВО ВЕУ тільки з одним ротором Дар'є коефіцієнти крутного моменту кожної з лопатей мають додатні значення (рис. 6.11).

При куті повороту $\theta = 120°$ (рис. 6.5 а) вихор ***а*** зривається із другої лопаті ротора Савоніуса та починає зноситися вниз за потоком. Вихор ***б*** продовжує деформуватися під впливом лопатей, що обертаються. Крутний момент, що створюється першою лопаттю ротора Савоніуса, досягає максимального значення, в той час як крутний момент від другої лопаті продовжує зменшуватися зі збільшенням кута повороту. На внутрішній поверхні першої лопаті ротора Дар'є починає зароджуватися динамічний зрив потоку. Друга лопать, пройшовши крізь вихрові утворення ***в*** і ***г,*** попадає в незатінену Савоніусом область. Відбувається різке збільшення коефіцієнта крутного моменту до значень, відповідних до кута повороту ротора 60° (рис. 6.10, 6.11). Каскад вихорів ***в*** і ***г*** отримує додатковий імпульс від минаючої крізь них другої лопаті ротора Дар'є та починає інтенсивно перемішуватися. Вихори ***д***, що зійшли з другої лопаті, зносяться вниз за потоком. Друга лопать ВО ВЕУ з одним ротором Дар'є (рис. 6.5 б) виходить із затіненої області опорної вежі набагато швидше, ніж з аеродинамічної тіні ротора Савоніуса (рис. 6.5 а), і генерує більш високий крутний момент (рис. 6.10, 6.11).

Кут повороту ВО ВЕУ дорівнює 150° (рис. 6.5 б). Вихор ***а*** продовжує повільно рухатися вниз за потоком від ротора Савоніуса. Вихор ***б*** починає деформуватися під впливом другої лопаті, яка обертається назустріч потоку. Крутний момент, що генерується першою лопаттю ротора Савоніуса, зменшується, а від другої – приймає від'ємне значення внаслідок збільшення лобового опору (лопать 2 стає майже перпендикулярно потоку вітру, що набігає). Результуючий момент ротора Савоніуса для даного кутового розташування дорівнює нулю.

Вихори ***в*** і ***г***, взаємодіючи між собою, деформуються, змінюють швидкість руху, а також свою інтенсивність. Каскад вихорів ***д*** має найбільшу швидкість серед розглянутих вихорів. Даний факт пояснюється тим, що каскад вихорів ***д*** зірвався із другої лопаті, коли вона йшла за потоком з лінійною швидкістю, що перевищує швидкість потоку, що набігає, в три рази ($\lambda = 3$). При цьому значенні відбувається масивний зрив вихорів із внутрішньої поверхні лопаті, що призводить до різкого падіння крутного моменту в область від'ємних значень (рис. 6.5 в, г). Потік обтікає другу лопать ротора Дар'є без відриву за винятком невеликої області у хвостовій частині. Крутний момент від другої лопаті компенсує від'ємний момент від першої та забезпечує невеликий, але додатний результуючий крутний момент ротора Дар'є та всієї ВО ВЕУ в цілому (рис. 6.10, 6.11).

Для кутового розташування θ = 180° (рис. 6.5 д) картина обтікання ротора Савоніуса не сильно відрізняється від попереднього розташування. Виняток становить лише невелика область на краю першої лопаті, де починає формуватися вихор. У цьому розташуванні крутний момент другої лопаті від'ємний і перевищує за абсолютною величиною крутний момент від першої лопаті. Вихори ***а***, ***в***, ***г***, ***д*** втрачають свою інтенсивність і поступово починають руйнуватися. На поверхні першої лопаті ротора Дар'є відбувається приєднання потоку, яке починається поблизу передньої крайки лопаті, а потім розташування точки відриву зміщується до задньої крайки (рис. 6.5 д, е). Так, при куті повороту 180° сумарний крутний момент ВО ВЕУ близький до нуля.

Картина обтікання ВО ВЕУ при θ = 210° (рис. 6.6 а, б) практично збігається з тією, що ми спостерігали при θ = 30° (рис. 6.5 а, б), за винятком невеликих деталей. Період обтікання дволопатевої ВО ВЕУ з роторами Дар'є та Савоніуса дорівнює 180°. На місці вихору ***а*** формується вихор ***ж***. Вихор ***б*** починає дробитися на дві частини новим вихором, що формується. Вихор ***а*** займає місце одного з вихорів каскаду ***в.*** Відбувається зростання значень коефіцієнта крутного моменту першої лопаті ротора Дар'є, у той час як для другої він приймає від'ємне значення. Результуючий момент на валу ВО ВЕУ більше нуля, що забезпечує можливість вироблення енергії.

При куті повороту θ = 240° (рис. 6.6 в, г) продовжується зростання вихорів ***б*** і ***ж*** на кінцях лопатей ротора Савоніуса. Вихори ***а*** і ***в*** розташовуються на траєкторії руху першої лопаті ротора Дар'є. Вихори ***г*** і ***д***, значно ослабшавши, зносяться в область далекого сліду. Крутний момент першої та другої лопаті ротора Савоніуса приблизно дорівнює нулю. Крутні моменти від першої та другої лопаті ротора Дар'є дорівнюють один одному.

Для кута θ = 270° (рис. 6.6 д) вихори ***б*** і ***ж*** відриваються від лопатей ротора Савоніуса. На місці вихору ***б***, що відірвався**,** починає формуватися вихор ***з***. Перша лопать ротора Дар'є прорізає вихори ***а*** і ***в*** у підвітряній частини траєкторії. При цьому розташуванні ВО ВЕУ додатний крутний момент від роторів Дар'є та Савоніуса створюється лопаттю 2. Причому від ротора Дар'є це значення досягає максимуму (рис. 6.10, 6.11).

Подальше збільшення кута повороту ротора θ = 300° (рис. 6.7 а) призводить до збільшення геометричних розмірів вихору ***з***, а також до подальшого зсуву вихорів ***б*** і ***ж*** униз за потоком. Основний крутний момент від ротора Савоніуса створюється другою лопаттю. Перша лопать ротора Дар'є, пройшовши каскад вихорів ***а*** і ***в*** (рис. 6.7а), знову генерує додатний крутний момент, у той час як аналогічна лопать ВО ВЕУ з одним ротором Дар'є (рис. 6.7 б) увесь час генерувала додатний момент (рис. 6.11). На другій лопаті ротора Дар'є починає формуватися динамічний зрив потоку, що призводить до різкого падіння коефіцієнта крутного моменту.

При досягненні θ = 330° (рис. 6.7 в) вихор ***з*** відділяється від другої лопаті ротора Савоніуса та починає взаємодіяти з першою лопаттю. Вихори ***б*** і ***ж*** повільно зносяться вниз за потоком. Відбувається подальше зменшення коефіцієнта крутного моменту, що створюється ротором Савоніуса. Перша лопать ротора Дар'є продовжує створювати додатний крутний момент. На внутрішній поверхні цієї лопаті чітко видно каскад вихорів ***и***. На даній ділянці траєкторії другі лопаті ротора Дар'є створюють від'ємний і додатний крутний момент відповідно (рис. 6.10, 6.11).

Кутове розташування ВО ВЕУ в 360° (рис. 6.7 д, е) характеризується глобальним падінням коефіцієнта крутного моменту до значення близького до нуля.

У цілому, при обтіканні ВО ВЕУ-0020, що складається з щілинного дволопатевого ротора Савоніуса та дволопатевого ротора Дар'є виникає складна картина течії, що характеризується одночасною наявністю декількох макровихорів у сліді, їх взаємодією з лопатями в підвітряній частини траєкторії, різким розворотом і прискоренням течії, відривом потоку з гострих крайок. Ротор Савоніуса створює область із низькошвидкісним потоком з наявністю великомасштабних вихрових утворень, усередині яких є області зворотної течії. Це призводить до погіршення аеродинаміки ротора Дар'є на підвітряній ділянці траєкторії лопаті. Відмінною рисою роботи даної ВО ВЕУ є відсутність динамічного зриву вихорів на підвітряній ділянці траєкторії лопаті ротора Дар'є. Як показали розрахунки, негативним моментом є наявність ротора Савоніуса в центральній частині ВО ВЕУ, що призводить до істотного затінення підвітряної ділянки траєкторії лопаті ротора Дар'є, а, отже, до зниження крутного моменту, що генерується.

Основний внесок у крутний момент ВО ВЕУ здійснюється за рахунок ротора Дар'є. На частку ротора Савоніуса припадає лише кілька відсотків від загального обсягу виробленого установкою моменту. Обтікання опорної вежі призводить до формування вихрової доріжки Кармана. При відсутності ротора Савоніуса вихори, що зійшли з опорної вежі набагато менші як за розмірами, так і за інтенсивністю. Тому їх взаємодія з лопатями ротора Дар'є не призводить до істотної зміни аеродинамічних характеристик.

Картина течії характеризується істотними нестаціонарними явищами. До них відносяться: динамічний зрив потоку, утворення складної системи вихорів, взаємодія вихорів різних розмірів, швидкостей руху та інтенсивності з поверхнями роторів.

В результаті проведених досліджень встановлено залежності коефіцієнтів крутного моменту від кута повороту кожної лопаті ротора Дар'є та Савоніуса, роторів в цілому, а також всієї ВО ВЕУ (рис. 6.8). Аналіз результатів показав, що взаємодія лопатей ротора Дар'є з макровихорами від ротора Савоніуса в підвітряній частини траєкторії призводить до різкого падіння коефіцієнта крутного моменту. Основний внесок у крутний момент ВО ВЕУ здійснюється за рахунок ротора Дар'є. На частку ротора Савоніуса припадає лише кілька відсотків від загального обсягу виробленого установкою моменту. Встановлено, що відсутність ротора Савоніуса в конструкції ВО ВЕУ призводить до поліпшення аеродинамічних характеристик ротора Дар'є. Порівняння АДХ двох ВО ВЕУ показало (рис. 6.12), що коефіцієнт крутного моменту більше у ВЕУ з одним тільки ротором Дар'є. Осереднені за один оберт коефіцієнти крутного моменту мають наступні значення – 0.161 і 0.141. Приріст становить 14 %.

6.2 Обтікання вертикально-осьової вітроенергетичної установки з різними геометричними характеристиками ротора Савоніуса

В даному підрозділі проведено чисельне моделювання аеродинаміки ВО ВЕУ з роторами Дар'є та Савоніуса на робочому режимі. Виконано порівняльну оцінку аеродинаміки ВО ВЕУ з роторами Дар'є та Савоніуса при різному заповненні внутрішньої частини ВЕУ.

Діаметр ротора Савоніуса змінюється в діапазоні, наведеному в таблиці 6.2. При відсутності ротора Савоніуса в центральній частині ВО ВЕУ розташовується опорна вежа, що представляє в перерізі круговий циліндр.

Таблиця 6.2 – Діаметр внутрішньої частини ВО ВЕУ

Конструкція внутрішньої частини ВО ВЕУ	Діаметр	
	безрозмірний	відносний
– опорна вежа (циліндр)	0,20	0,06
– ротор Савоніуса	0,72	0,25
– ротор Савоніуса	1,44	0,50
– ротор Савоніуса	2,16	0,75
– ротор Савоніуса	2,88	1,00

Математичне моделювання аеродинаміки ВО ВЕУ (рис. 6.1, 6.2) проведено при різному відносному діаметрі внутрішньої частини (рис. 6.13-6.16). Отримано значення коефіцієнтів крутного моменту ВО ВЕУ з роторами Дар'є (D) і Савоніуса (S) від кута повороту та різного відносного діаметру внутрішньої частини (рис. 6.17-6.19).

Розглянемо картину обтікання ВО ВЕУ з роторами Дар'є та Савоніуса на четвертому оберті (рис. 6.13-6.16).

При куті повороту $\theta = 30°$ (рис. 6.13 а-г) на лопатах ротора Савоніуса формуються два вихори ***а*** і ***б***, які сходять із другої та першої лопаті, відповідно. Інтенсивність і швидкість руху вихору ***а*** значно більша, ніж у вихору ***б***. Це є наслідком прискорення вихору ***а*** лопаттю 2, що рухається за потоком та уповільненням вихору ***б*** першою лопаттю, що обертається назустріч вітру, що набігає. У центральній частині щілинного ротора Савоніуса спостерігається перетікання частини повітря з внутрішньої поверхні другої лопаті на внутрішню поверхню першої, що створює додатковий тиск, а, отже, і крутний момент на валу ротора. У далекому сліді ротора розташований каскад вихорів ***г*** і ***в***, які зійшли з лопаті ротора на попередніх обертах. Для даного кутового розташування сумарний крутний момент, що створюється лопатями ротора Савониуса, від’ємний (рис. 6.17-6.18). Обтікання лопатей ротора Дар'є носить приєднаний характер. У сліді другої лопаті спостерігається група вихорів ***д***, що зірвалася з внутрішньої поверхні даної лопаті на закритичному режимі обтікання. Наявність каскаду вихорів ***д*** є наслідком динамічного відриву потоку із другої лопаті ротора Дар'є. Кути атаки першої та другої лопаті, що розраховано за швидкостями потоку, що набігає, для даного кутового розташування становлять $-7°$ і$°13°$, відповідно. Значення коефіцієнта крутного моменту другої лопаті вище, ніж у першої (рис. 6.17-6.18).

Зі збільшенням діаметру ротора Савоніуса розміри вихорів, що сходять з ротора, а також їх інтенсивність зростають (наприклад, вихор ***г***). До того ж площа прохідного перетину ВО ВЕУ стає меншою, а збурювання, розповсюджувані від Савоніуса, стають більшими. При порівнянні ВО ВЕУ з роторами Дар'є та Савоніуса (рис. 6.13) спостерігається підвищена турбулізація внутрішньої області при збільшенні діаметру ротора Савоніуса. При відсутності ротора Савоніуса (рис. 6.13 д) внутрішній простір ВО ВЕУ з ротором Дар'є практично не містить великих вихрових структур, за винятком невеликої області внизу рисунка.

Починаючи з кута повороту $\theta = 30°$ і до кута $\theta = 45°$ спостерігається характерний провал за значеннями коефіцієнта крутного моменту другої лопаті ротора Дар'є при відсутності ротора Савоніуса в центральній частині ВО ВЕУ або при малих його діаметрах. Цей факт можна пояснити тим, що при більших діаметрах Савоніуса швидкість потоку повітря в його сліді менша, ніж при незбуреному потоці, а, отже, і місцеві кути атаки лопаті менші та не перевищують закритичних кутів.

Для кутового розташування θ = 60° перша лопать ротора Савоніуса починає створювати додатний крутний момент (рис. 6.17-6.18). Відбувається збільшення коефіцієнта крутного моменту першої лопаті, а значення коефіцієнта другої лопаті залишається майже сталим.

Причому для ВО ВЕУ (θ = 90°) тільки з одним ротором Дар'є коефіцієнти крутного моменту кожної з лопатей мають додатні значення (рис. 6.20). Збільшення діаметру ротора Савоніуса призводить до падіння коефіцієнта крутного моменту (рис. 6.17-6.18). Це пояснюється взаємодією другої лопаті з каскадом вихорів ***в*** і ***г***, що зійшли з лопатей ротора Савоніуса. До того ж на мінімум крутного моменту другої лопаті ротора Дар'є доводиться максимум крутного моменту ротора Савоніуса.

При куті повороту θ = 120° (рис. 6.14) вихор ***а*** зривається з другої лопаті ротора Савоніуса та зноситься вниз за потоком. Вихор ***б*** продовжує деформуватися під впливом лопатей, що обертаються. Крутний момент, що створюється першою лопаттю ротора Савоніуса, досягає максимального значення, у той час як крутний момент від другої лопаті продовжує зменшуватися зі збільшенням кута повороту (рис. 6.18). На внутрішній поверхні першої лопати ротора Дар'є починає зароджуватися динамічний зрив потоку. Кут атаки даної лопаті в цьому розташуванні дорівнює −18°. Друга лопать, пройшовши крізь вихрові утворення ***в*** і ***г,*** попадає в незатінену Савоніусом область. Відбувається різке збільшення коефіцієнта крутного моменту до значень, відповідних до кута повороту ротора 60° (рис. 6.17-6.19). Каскад вихорів ***в*** і ***г*** одержує додатковий імпульс від другої лопаті ротора Дар'є, яка проходить крізь них, та починає інтенсивно перемішуватися. Вихори ***д***, що зійшли з другої лопаті, зносяться вниз за потоком. Друга лопать ВО ВЕУ з одним ротором Дар'є (рис. 6.14 д) виходить із затіненої області опорної вежі набагато швидше, ніж з аеродинамічної тіні ротора Савоніуса (рис. 6.14 а-г), і генерує більш високий крутний момент (рис. 6.19).

При цьому куті повороту 150° відбувається масивний зрив вихорів із внутрішньої поверхні лопаті, що призводить до різкого падіння крутного моменту в область від'ємних значень (рис. 6.17-6.19). Потік обтікає другу лопать ротора Дар'є без відриву за винятком невеликої області у хвостовій частині. Крутний момент від другої лопаті компенсує від'ємний момент від першої та забезпечує невеликий, але додатний результуючий крутний момент ротора Дар'є та всієї ВО ВЕУ в цілому (рис. 6.17-6.19).

Картина обтікання ВО ВЕУ при $\theta = 210°$ (рис. 6.16) практично збігається з тією, що ми спостерігали при $\theta = 30°$ (рис. 6.13), за винятком невеликих деталей. Період обтікання дволопатевої ВО ВЕУ з роторами Дар'є та Савоніуса дорівнює 180°. На місці вихору ***а*** формується вихор ***ж***. Вихор ***б*** починає дробитися на дві частини новим вихором, що формується. Вихор ***а*** займає місце одного з вихорів каскаду ***в.*** Відбувається зростання значень коефіцієнта крутного моменту першої лопаті ротора Дар'є, в той час як для другої він приймає від'ємне значення. Результуючий момент на валу ВО ВЕУ більше нуля, що забезпечує можливість вироблення енергії.

При куті повороту $\theta = 240°$ крутний момент першої та другої лопаті ротора Савоніуса приблизно дорівнює нулю. Крутні моменти від першої та другої лопаті ротора Дар'є рівні між собою.

Для кута $\theta = 270°$ додатний крутний момент від роторів Дар'є та Савоніуса створюється лопаттю 2. Причому від ротора Дар'є це значення досягає максимуму (рис. 6.17-6.19).

Подальше збільшення кута повороту ротора $\theta = 300°$ (рис. 6.16) призводить до збільшення геометричних розмірів вихору ***з***, а також до подальшого зсуву вихорів ***б*** і ***ж*** униз за потоком. Основний крутний момент від ротора Савоніуса створюється другою лопаттю. Перша лопать ротора Дар'є, пройшовши каскад вихорів ***а*** і ***в*** (рис. 6.16 а-г), знову генерує додатний крутний момент, у той час як аналогічна лопать ВО ВЕУ з одним ротором Дар'є (рис. 6.16 д) увесь час генерувала додатний момент (рис. 6.19). На другій лопаті ротора Дар'є починає формуватися динамічний зрив потоку, що призводить до різкого падіння коефіцієнта крутного моменту.

При досягненні $\theta = 330°$ відбувається подальше зменшення коефіцієнта крутного моменту, створюваного ротором Савоніуса. Перша лопать ротора Дар'є продовжує створювати додатний крутний момент. Кут атаки другої лопаті становить 14°. На даній ділянці траєкторії другі лопаті ротора Дар'є створюють від’ємний і додатний крутні моменти відповідно (рис. 6.17-6.19).

Порівняння аеродинамічних характеристик (АДХ) п'яти ВО ВЕУ показало, що коефіцієнт крутного моменту більше у ВЕУ з одним тільки ротором Дар'є. Осереднені за один оберт коефіцієнти крутного моменту наведено в таблиці 6.3.

Основний внесок в осереднений крутний момент ВО ВЕУ здійснюється за рахунок лопатей ротора Дар'є, причому в навітряній частині траєкторії лопаті (рис. 6.17-6.19). Коли в центральній частині ВО ВЕУ розташовується ротор Савоніуса, він зменшує прохідний перетин для повітря, а, отже, зменшується ефективна площа, що ометається (табл. 6.4).

Таблиця 6.3 – Залежність коефіцієнта крутного моменту ВО ВЕУ від діаметра внутрішньої частини ВО ВЕУ

Конструкція внутрішньої частини ВО ВЕУ	Діаметр		Осереднені коефіцієнт крутного моменту
	безрозмірний	відносний	
– опорна вежа	0,20	0,06	0,161
– ротор Савоніуса	0,72	0,25	0,146
– ротор Савоніуса	1,44	0,50	0,144
– ротор Савоніуса	2,16	0,75	0,142
– ротор Савоніуса	2,88	1,00	0,141

Таблиця 6.4 – Відношення діаметра внутрішньої частини ВО ВЕУ до діаметру ротора Дар'є

Конструкція внутрішньої частини ВО ВЕУ	Діаметр внутрішньої частини ВО ВЕУ, безрозмірний	Діаметр ротора Дар'є, безрозмірний	Відношення діаметра внутрішньої частини ВО ВЕУ до діаметру ротора Дар'є, %
– опорна вежа	0,20	10,17	1,96
– ротор Савоніуса	0,72	10,17	7,08
– ротор Савоніуса	1,44	10,17	14,16
– ротор Савоніуса	2,16	10,17	21,24
– ротор Савоніуса	2,88	10,17	28,32

6.3 Аеродинаміка вертикально-осьової вітроенергетичної установки при різних кутах установки лопаті ротора Дар'є

В даному підрозділі дисертації проведено чисельне моделювання аеродинаміки ВО ВЕУ з роторами Дар'є та Савоніуса на робочому режимі (рис. 6.20-6.23). Досліджувався вплив кута установки лопаті ротора Дар'є на енергетичну ефективність ВЕУ (рис. 6.24-6.26).

Кут установки лопаті має додатне значення, якщо передня крайка лопаті спрямована на зовнішню область, і від’ємне, якщо навпаки. Кут атаки лопаті від’ємний, коли потік повітря натікає на зовнішню поверхню лопаті.

При обертанні по колу лопаті ротора Дар'є місцевий кут атаки α та абсолютна швидкість U_a є функціями двох змінних: поточного кутового розташування θ та кутової швидкості обертання ω. Отже, місцевий кут атаки може бути визначений за формулою (6.4)

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{U_\infty \sin\theta}{\omega R + U_\infty \cos\theta}\right) + \beta = -\arctan\left(\frac{\sin\theta}{\lambda + \cos\theta}\right) + \beta, \qquad (6.4)$$

Визначення аеродинамічних характеристик роторів Дар'є на основі аналітичних методів ускладнюється тим фактом, що лопать, яка описує криволінійну траєкторію, поводиться не так, як лопать, що здійснює рух по прямій. Тому статичні експерименти в аеродинамічній трубі не завжди дають точне відображення роботи лопаті ротора Дар'є. До того ж швидкість вітру на навітряній частині траєкторії лопаті більша, ніж на підвітряній в силу вилучення частини кінетичної енергії з потоку. Зменшення швидкості вітру в підвітряній частини траєкторії лопаті призводить до збільшення «місцевого» значення коефіцієнта швидкохідності (за умови сталої кутової швидкості обертання ротора ω), а, отже, і кутів атаки.

Проаналізуємо поля течії при обертанні роторів Дар'є та Савоніуса вертикально-осьової вітроенергетичної установки.

При куті повороту ВО ВЕУ $\theta = 30°$ (рис. 6.20) обтікання першої лопаті ротора Дар'є носить приєднаний характер незалежно від кута установки лопаті. У сліді другої лопаті спостерігається група вихорів ***д***, що зірвалися з внутрішньої поверхні даної лопаті на закритичному режимі обтікання (рис. 6.20 а-в). При від'ємних кутах установки лопаті розміри вихорів, що сходять із ротора Дар'є, а також їх інтенсивність зростають (вихор ***д***). При цьому спостерігається підвищена турбулізація внутрішньої області ВО ВЕУ. Наявність каскаду вихорів ***д*** є наслідком динамічного відриву потоку із другої лопаті ротора Дар'є. При від'ємних кутах установки першої лопаті створюється крутний момент (рис. 6.24 а, б), в той час як для нульового та додатних кутів установки (рис. 6.25 а, б, 6.26), крутний момент поки від'ємний. Це пояснюється малими кутами атаки лопаті при $\beta = 0^{\circ}, +3^{\circ}, +6^{\circ}$ і як наслідок незначними значеннями підйомної сили, яка вносить основний вклад у крутний момент. Кути атаки першої лопаті, які розраховано за швидкістю потоку, що набігає, для даного кутового розташування становлять −13°, −10°, −7°, −4°, −1°, відповідно. Значення коефіцієнта крутного моменту другої лопаті вище, ніж у першій (рис. 6.24-6.26).

При куті повороту ротора Дар'є θ = 60° і кутах установки профілю -6° та -3° спостерігається максимум у значеннях коефіцієнта крутного моменту (рис. 6.24 а, б). Для роторів Дар'є з кутами установки профілю $\beta = 0^{\circ}, +3^{\circ}, +6^{\circ}$ триває зростання крутного моменту. Починаючи з кута повороту θ = 30° і до кута θ = 45° спостерігається провал за значеннями коефіцієнта крутного моменту другої лопаті ротора Дар'є при куті установки лопаті $\beta = 0^{\circ}$ (рис. 6.25а).

При куті повороту ВО ВЕУ θ = 120° і $\beta = -6^{\circ}, -3^{\circ}$ (рис. 6.21 а, б) на внутрішній поверхні лопаті ротора Дар'є чітко спостерігається розвинений динамічний зрив потоку (каскад вихорів ***е***). У цьому випадку коефіцієнт крутного моменту першої лопаті менше нуля. Для $\beta = 0^{\circ}$ він тільки починає зароджуватися, а при $\beta = +3^{\circ}, +6^{\circ}$ він і зовсім відсутній. Для цих трьох кутів коефіцієнти крутного моменту першої лопаті додатні. Кути атаки першої лопаті для $\beta = -6^{\circ}, -3^{\circ}, 0^{\circ}, +3^{\circ}, +6^{\circ}$ становлять −25°, −22°, −19°, −16°, −13°, відповідно та починають зменшуватися в абсолютних величинах. Друга лопать, пройшовши крізь вихрові утворення ***в*** і ***г,*** потрапляє в незатінену Савоніусом область. Відбувається збільшення коефіцієнта крутного моменту (рис. 6.24-6.26). Каскад вихорів ***в*** і ***г*** одержує додатковий імпульс від другої лопаті ротора Дар'є, що проходить крізь них, та починає інтенсивно перемішуватися. Вихори ***д***, що зійшли з другої лопаті, зносяться вниз за потоком.

Кут повороту ВО ВЕУ 150° коефіцієнт крутного моменту менше нуля (рис. 6.24, 6.25 а). Хоча на першій лопаті при $\beta = +3^{\circ}, +6^{\circ}$ і не виникає відрив потоку, однак кути атаки занадто малі для виникнення підйомної сили, і як наслідок, крутного моменту. Крутний момент від другої лопаті при $\beta = 0^{\circ}, +3^{\circ}, +6^{\circ}$ додатний, причому зі збільшенням кута установки його значення збільшуються в силу збільшення кута атаки.

При куті повороту 180° коефіцієнти крутного моменту ротора Дар'є при $\beta = -6^{\circ}, -3^{\circ}, 0^{\circ}$ від'ємні, а для значень $\beta = +3^{\circ}, +6^{\circ}$ – додатні. Причому зі збільшенням кута установки лопаті ці значення збільшуються.

Картина обтікання ВО ВЕУ при θ = 210° (рис. 6.22) практично збігається з тієї, що ми спостерігали при θ = 30° (рис. 6.20), за винятком невеликих деталей. Період обтікання дволопатевого ВО ВЕУ з роторами Дар'є та Савоніуса дорівнює 180°. На місці вихору ***а*** формується вихор ***ж***. Вихор ***б*** починає дробитися на дві частини новим вихором, що формується. Вихор ***а*** займає місце одного з вихорів каскаду ***в.*** Відбувається зростання значень коефіцієнта крутного моменту першої лопаті ротора Дар'є у той час як для другої він поки що від'ємний. Результуючий момент на валу ВО ВЕУ більше нуля, що забезпечує можливість вироблення енергії. Кути атаки першої лопаті, які розраховано за швидкістю потоку, що набігає, для $\beta = -6^\circ, -3^\circ, 0^\circ, +3^\circ, +6^\circ$ становлять 7°, 10°, 13°, 16°, 19°. При кутах атаки 19° і вище на даному типі профілю лопаті повинен виникати динамічний зрив потоку. Однак цього не відбувається. Справа в тому, що кут атаки ми розраховуємо виходячи з передумови сталості швидкості вітру. У реальності швидкість потоку, що набігає, у підвітряній частини траєкторії лопаті менша в силу вилучення частини кінетичної енергії на навітряній ділянці. Таким чином, реальні коефіцієнти швидкохідності стають більшими, а кути атаки зменшуються при тому ж кутовому розташуванні.

При куті повороту $\theta = 240°$ відбувається падіння коефіцієнта крутного моменту першої лопаті, внаслідок взаємодії з макровихорами від ротора Савоніуса та попередньої лопаті ротора Дар'є. Кути атаки першої лопаті, які розраховано за швидкістю потоку, що набігає, дорівнюють 13°, 16°, 19°, 22°, 25°. Останні три кути відповідають закритичному режиму обтікання, який повинен супроводжуватися динамічним зривом вихорів.

При кутовому розташуванні ВО ВЕУ $\theta = 270°$ додатний крутний момент від ротора Дар'є створюється двома лопатями за винятком варіанта, що відповідає $\beta = -3^\circ$.

Подальше збільшення кута повороту ротора θ = 300° (рис. 6.23) призводить до збільшення геометричних розмірів вихору ***з***, а також до подальшого зсуву вихорів ***б*** і ***ж*** униз за потоком. Перша лопать ротора Дар'є при $\beta = 0^\circ, +3^\circ, +6^\circ$, пройшовши каскад вихорів ***а*** і ***в*** (рис. 6.23 в-г), продовжує генерувати додатний крутний момент (рис. 6.25, 6.26). Причому, чим більше кут установки, тим вище значення коефіцієнта крутного моменту. Величина крутного моменту прямо пов'язана з підйомною силою, яка залежить від кута атаки. Кути атаки першої лопаті для $\beta = -6^{\circ}, -3^{\circ}, 0^{\circ}, +3^{\circ}, +6^{\circ}$ становлять 8°, 11°, 14°, 17°, 20°. Тобто, чим більший кут атаки (на докритичних режимах), тем вище значення коефіцієнта підйомної сили, і, як наслідок, крутного моменту. На другій лопаті ротора Дар'є (рис. 6.23 а-в) розбудовується динамічний зрив потоку, що призводить до різкого падіння коефіцієнта крутного моменту.

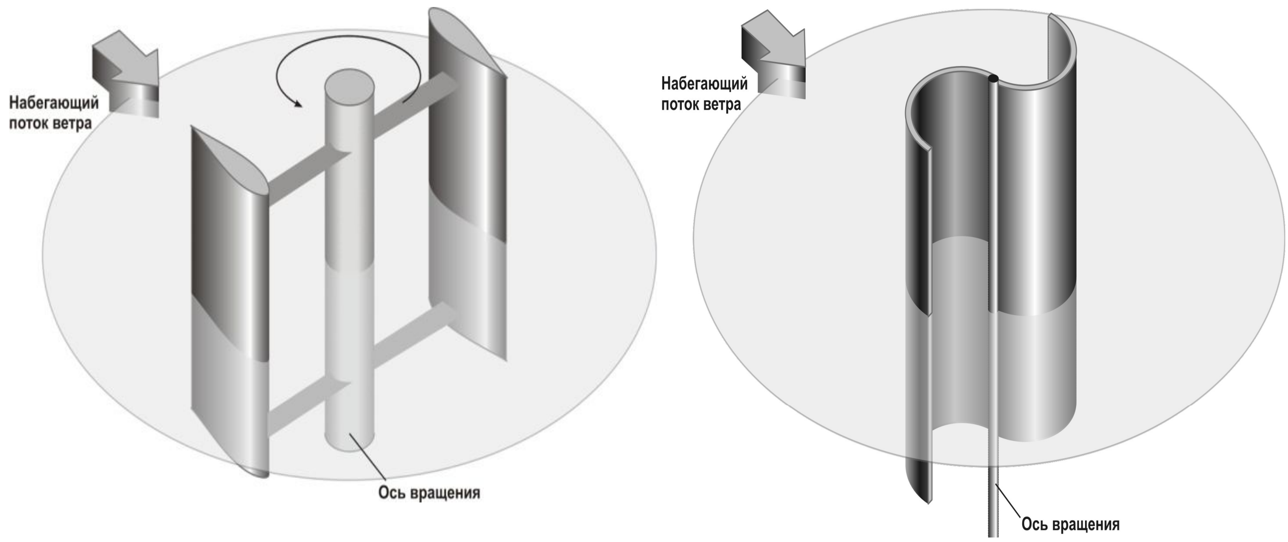
При досягненні $\theta = 330°$ перша лопать ротора Дар'є ($\beta = 0^{\circ}, +3^{\circ}, +6^{\circ}$) продовжує створювати додатний крутний момент. Кути атаки першої лопаті для $\beta = -6^{\circ}, -3^{\circ}, 0^{\circ}, +3^{\circ}, +6^{\circ}$ складають 1°, 4°, 7°, 10°, 13°. На даній ділянці траєкторії тільки перша лопать ротора Дар'є створюють додатний крутний момент.

Осереднені за один оберт коефіцієнти крутного моменту та потужності наведено в таблиці 6.5. Порівняння аеродинамічних і енергетичних характеристик п'яти ВО ВЕУ показало, що осереднені за часом коефіцієнти крутного моменту та потужності зростають при збільшенні кута установки лопаті ротора Дар'є. Неосереднений коефіцієнт крутного моменту ВО ВЕУ із дволопатевим ротором Дар'є при $\beta = +3^{\circ}, +6^{\circ}$ завжди додатний. Для цих двох ВО ВЕУ обтікання лопатей ротора Дар'є відбувається без динамічного зриву потоку. Наявність макровихорів та інших вихрових структур у внутрішній області ВО ВЕУ призводить до перерозподілу кінетичної енергії рівномірного вітрового потоку та виникненню локальних енергетичних зон. Тому проектувати ВО ВЕУ з роторами Дар'є треба так, щоб уникати явища динамічного зриву вихорів з аеродинамічних поверхонь.

Таблиця 6.5 – Залежність осереднених за часом коефіцієнтів крутного моменту і потужності ВО ВЕУ від кута установки лопаті ротора Дар'є

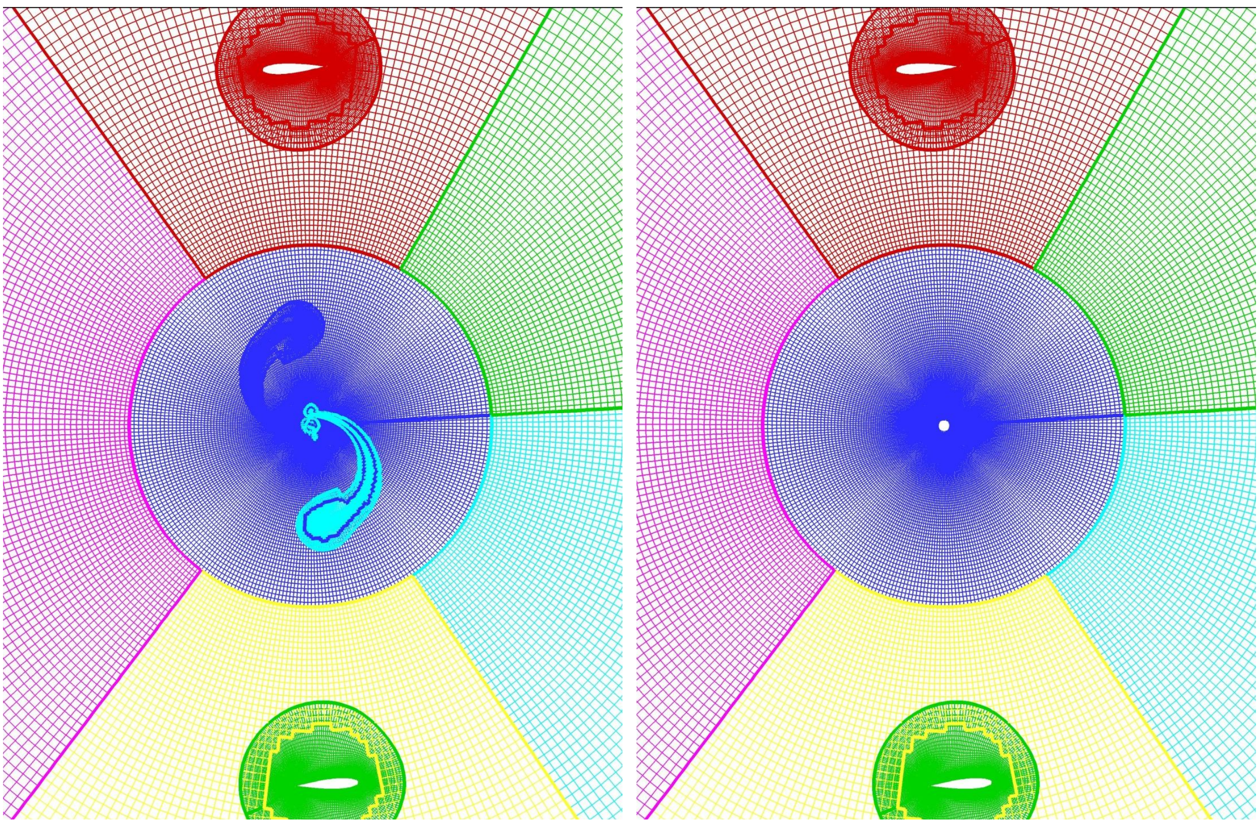
Кут установки лопаті, β	Осереднений за часом коефіцієнт крутного моменту, $\overline{C}_Q$	Осереднений за часом коефіцієнт потужності, $\overline{C}_P$
−6	0,103	0,309
−3	0,023	0,069
0	0,145	0,435
+3	0,177	0,531
+6	0,180	0,540

Рисунок 6.1 – Вертикально-осьова ВЕУ-0020 з роторами Дар'є і Савоніуса



а) б)

Рисунок 6.2 – Розрахункові схеми для роторів Дар’є (а) і Савоніуса (б)



а) б)

Рисунок 6.3 – Багатоблочна пересічна структурована сітка (типу Chimera) навколо ВО ВЕУ з роторами Савоніуса і Дар’є (а) і ротором Дар’є (б)

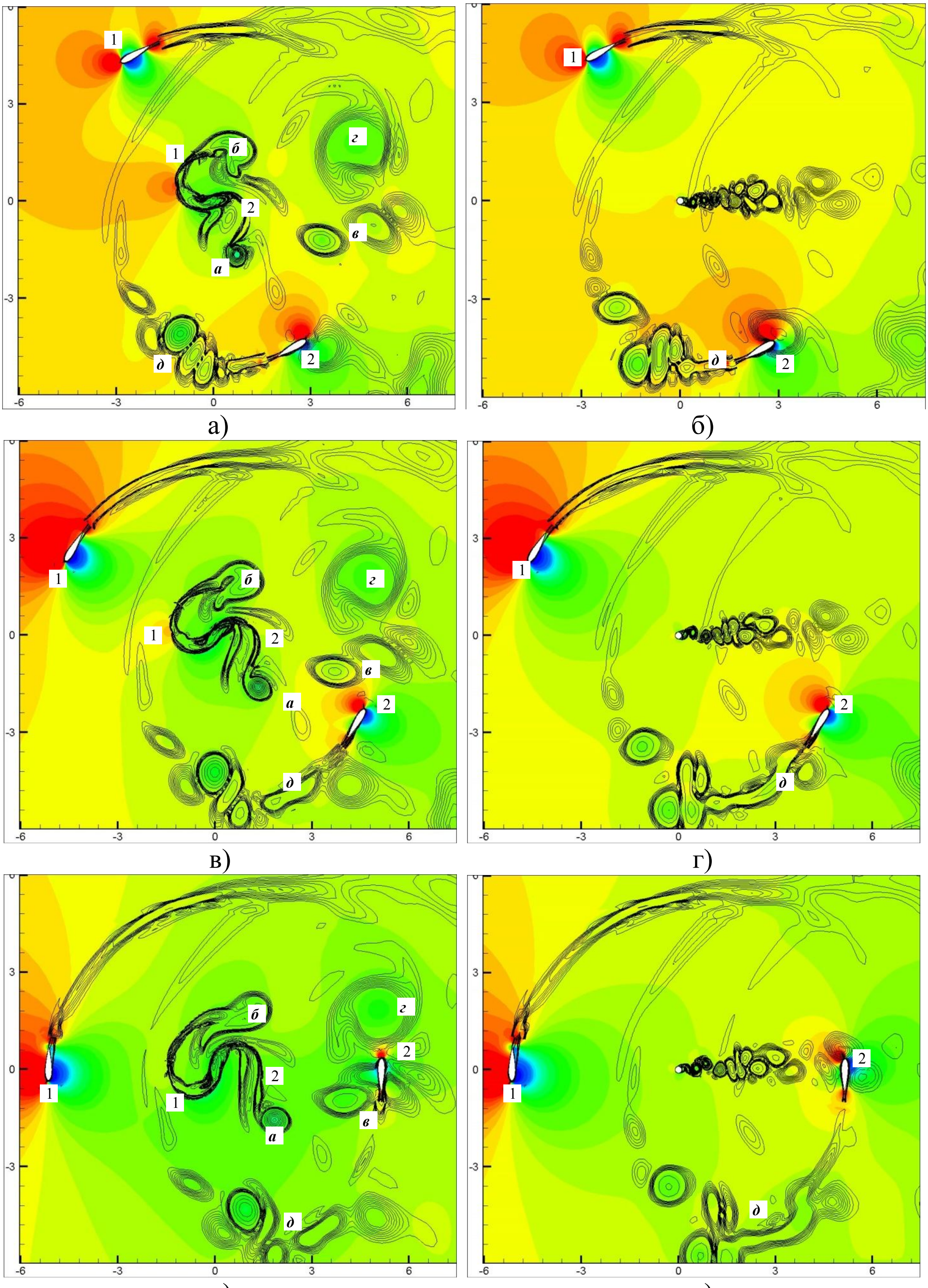


Рисунок 6.4 – Розвиток течії при обтіканні роторів ВО ВЕУ. Ізобари і контури завихрення для кутових положень: а, б – θ = 30°; в, г – θ = 60°; д, е – θ = 90°

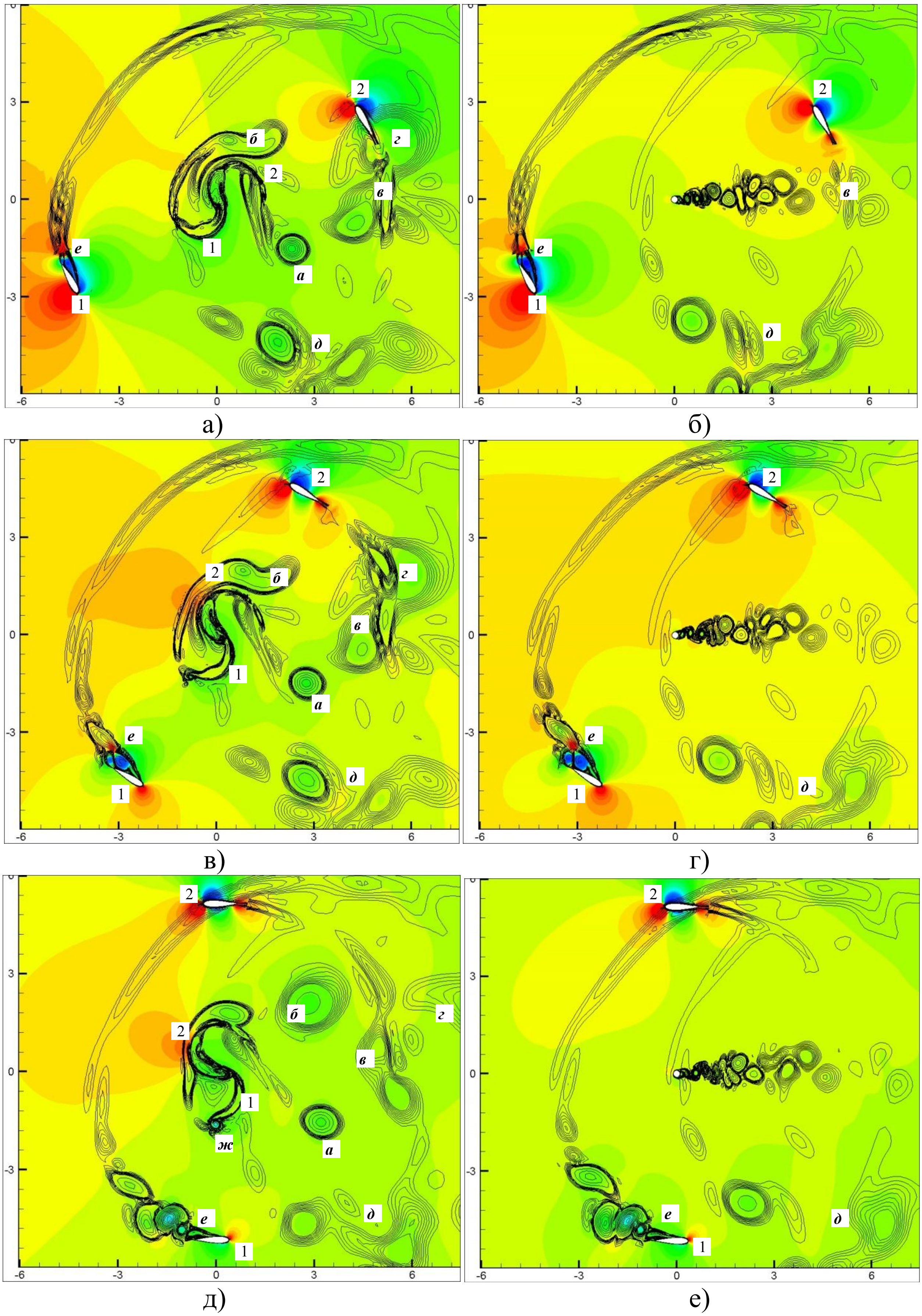


Рисунок 6.5 – Розвиток течії при обтіканні роторів ВО ВЕУ. Ізобари і контури завихрення для кутових положень: а, б – θ = 120°; в, г – θ = 150°; д, е – θ = 180°

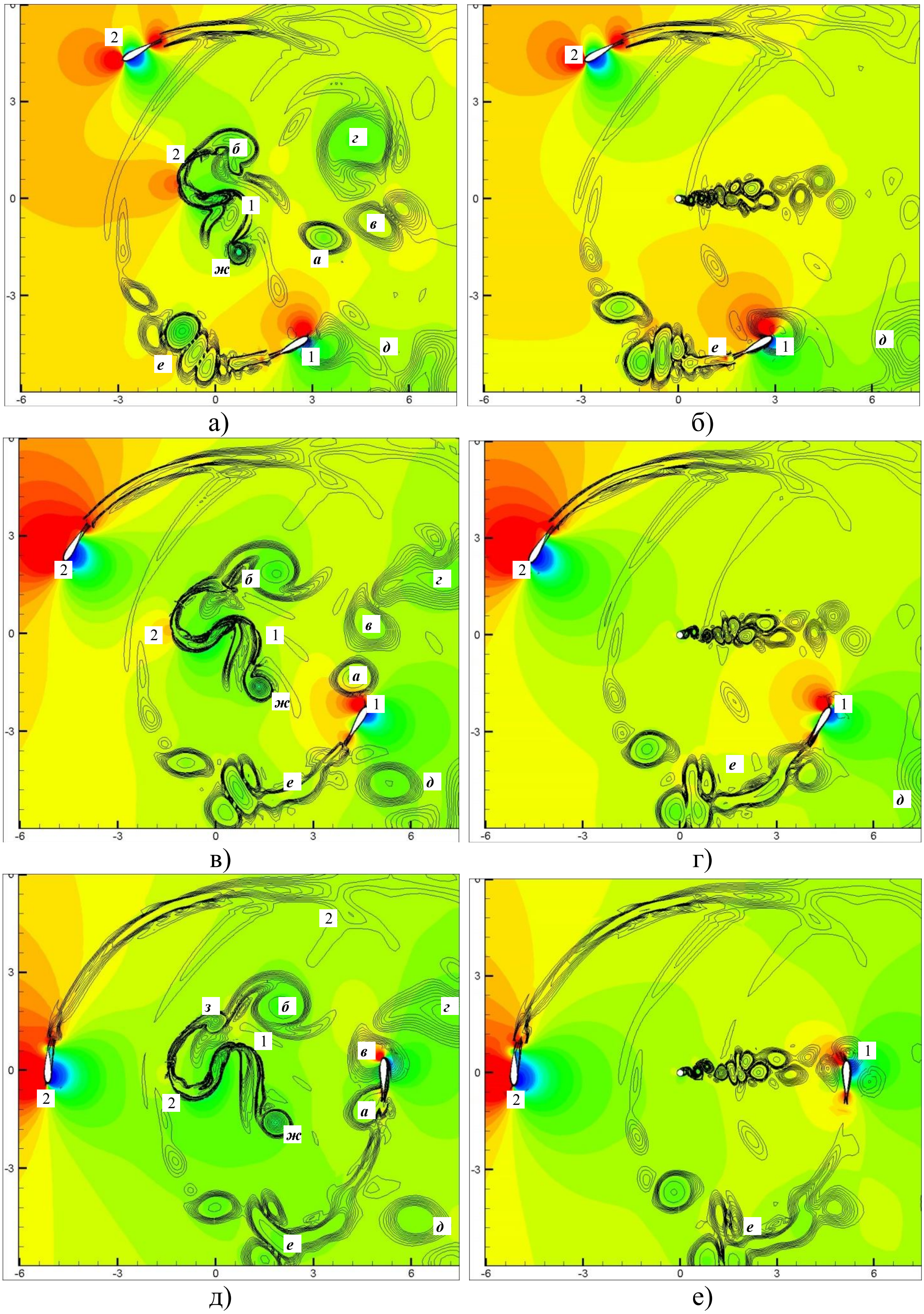


Рисунок 6.6 – Розвиток течії при обтіканні роторів ВО ВЕУ. Ізобари і контури завихрення для кутових положень: а, б – θ = 210°; в, г – θ = 240°; д, е – θ = 270°

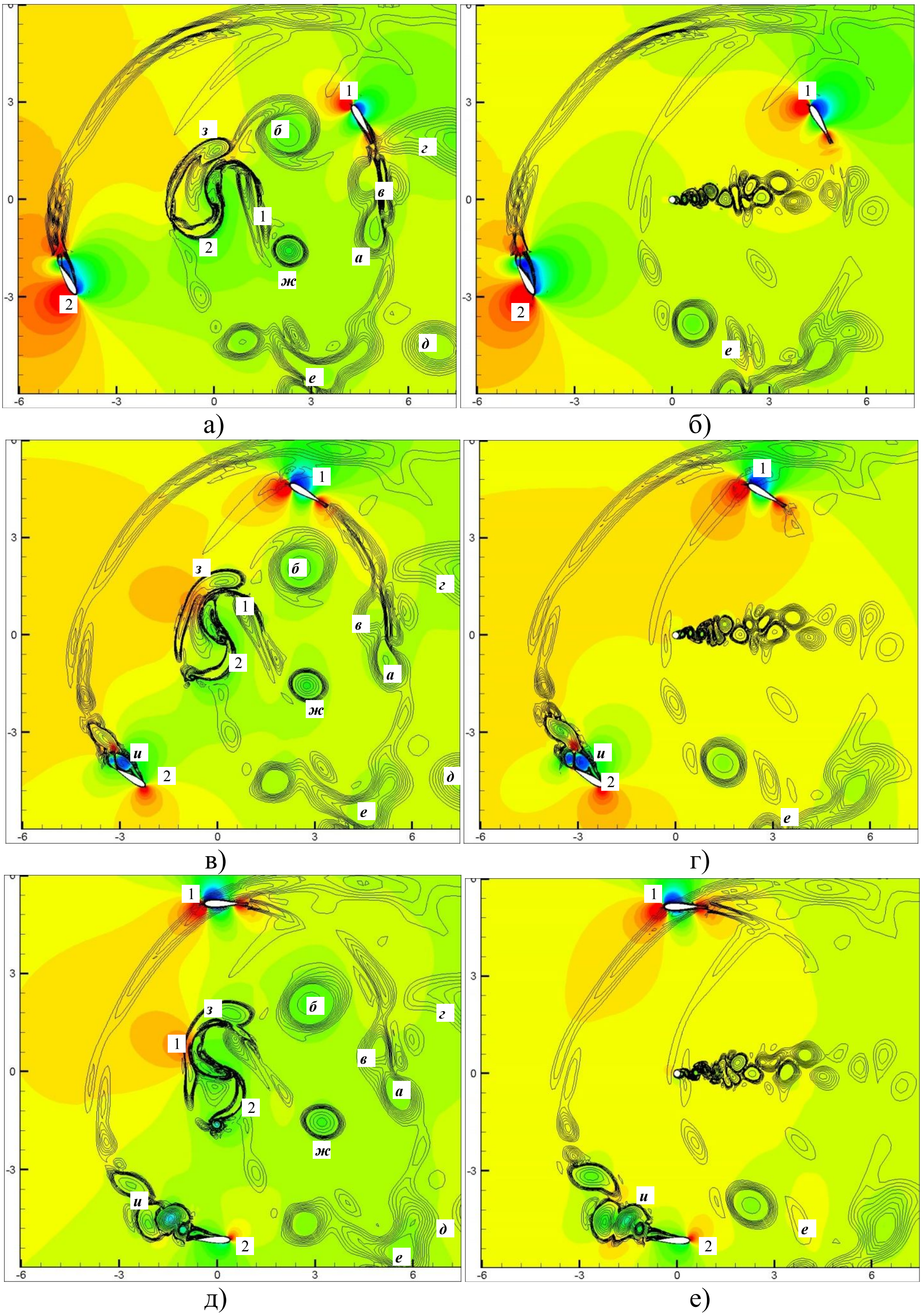
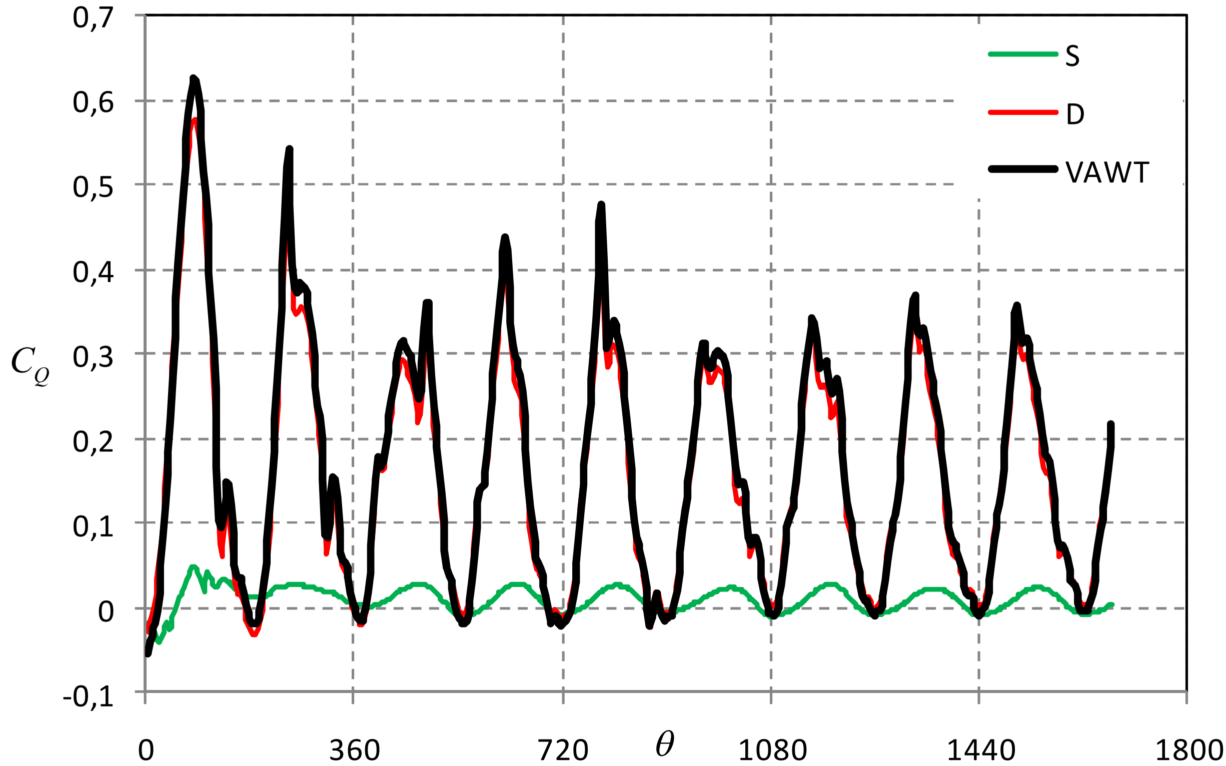
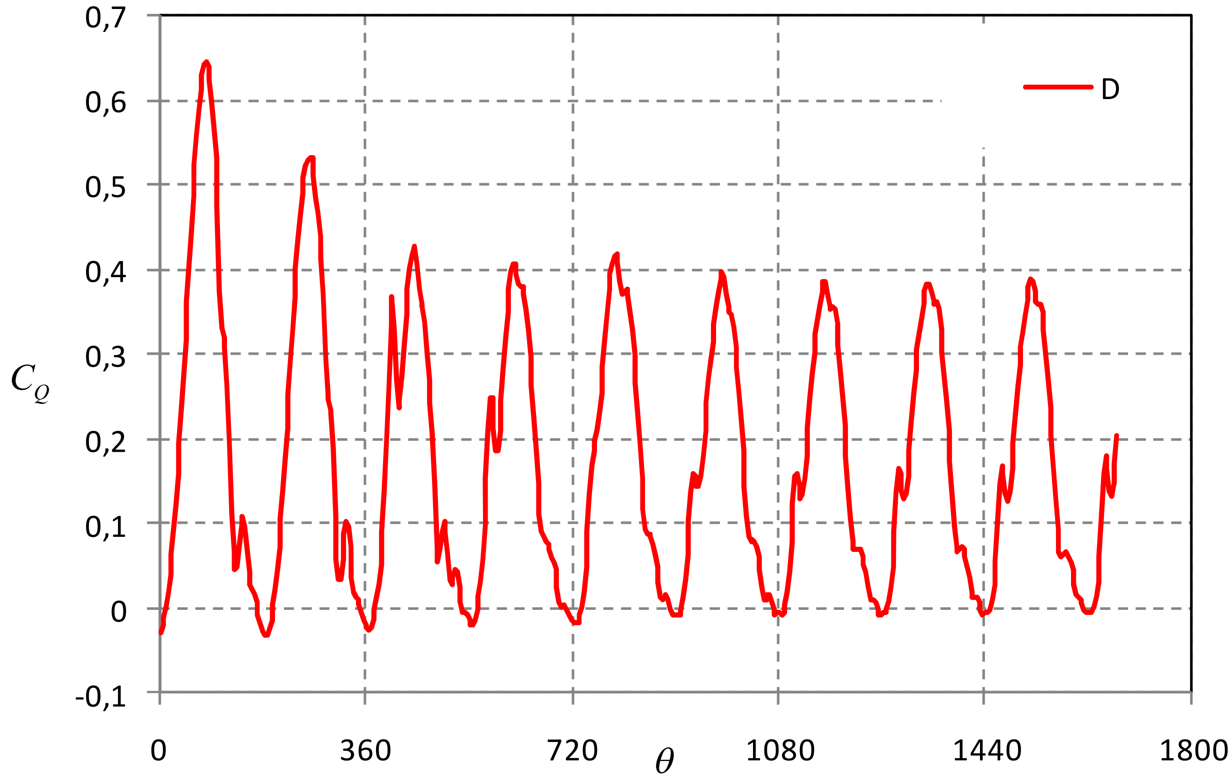


Рисунок 6.7 – Розвиток течії при обтіканні роторів ВО ВЕУ. Ізобари і контури завихрення для кутових положень: а, б – θ = 300°; в, г – θ = 330°; д, е – θ = 360°

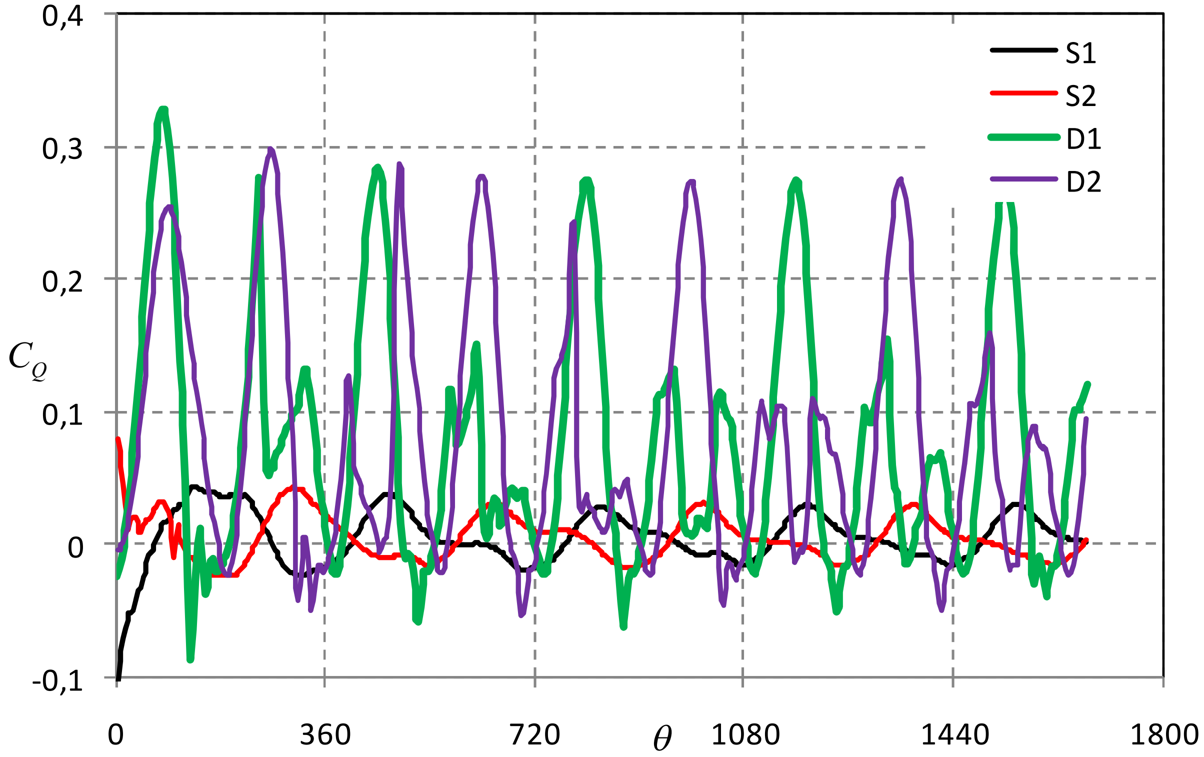


а)

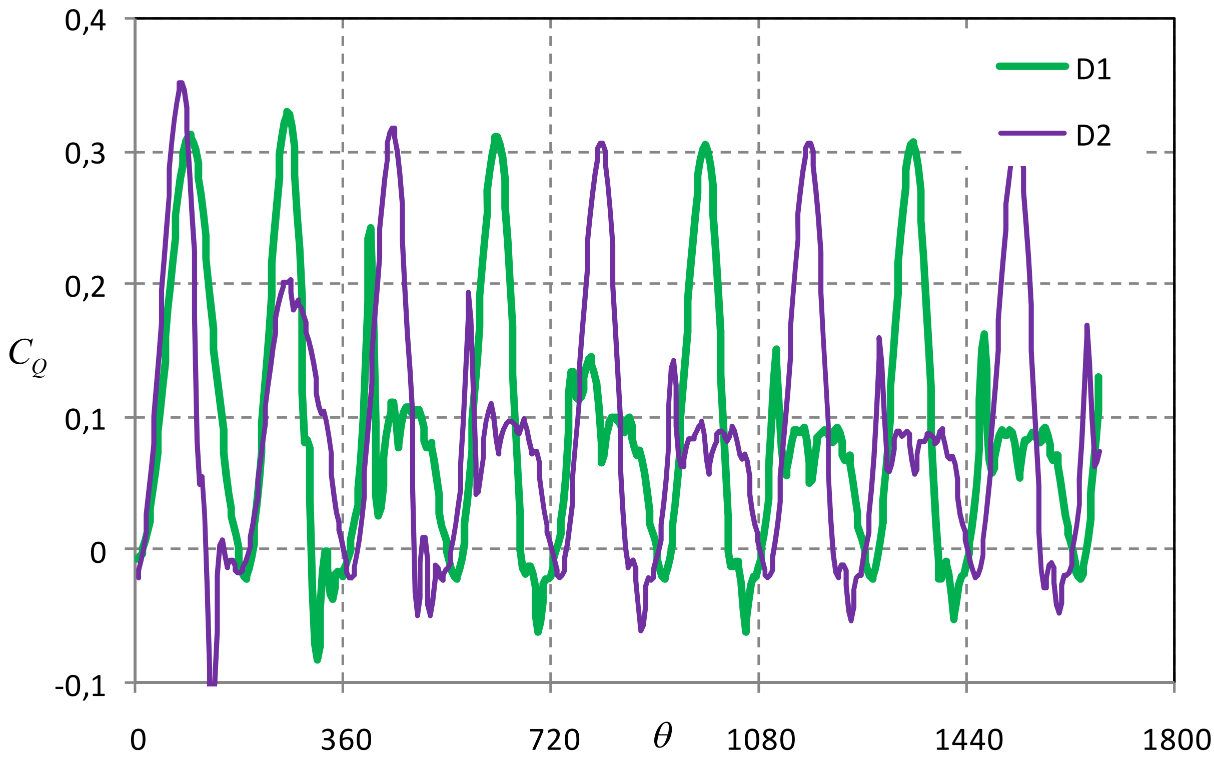


б)

Рисунок 6.8 – Зміна коефіцієнтів крутного моменту ВО ВЕУ з роторами Дар'є (D) і Савоніуса (S) (а) і ротором Дар'є (D) (б) від кута повороту



а)



б)

Рисунок 6.9 – Зміна коефіцієнтів крутного моменту кожної лопаті ВО ВЕУ з роторами Дар'є (D) і Савоніуса (S) (а) і ротором Дар'є (D) (б) від кута повороту

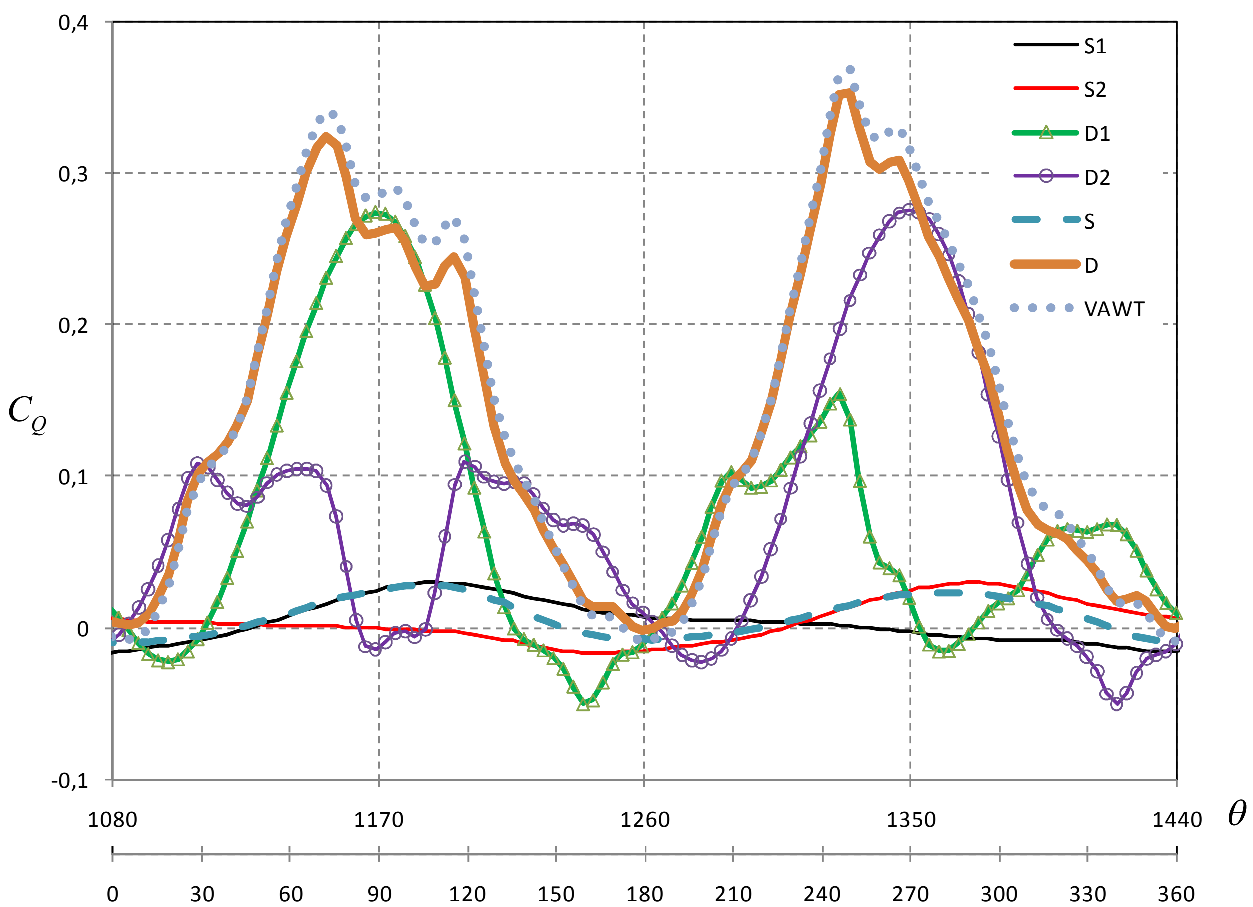


Рисунок 6.10 – Зміна коефіцієнтів крутного моменту C_Q кожної лопаті ротора Савоніуса (S1, S2), Дар’є (D1, D2) і роторів в цілому (S, D), а також ВО ВЕУ (VAWT) від кута повороту θ на четвертому оберті

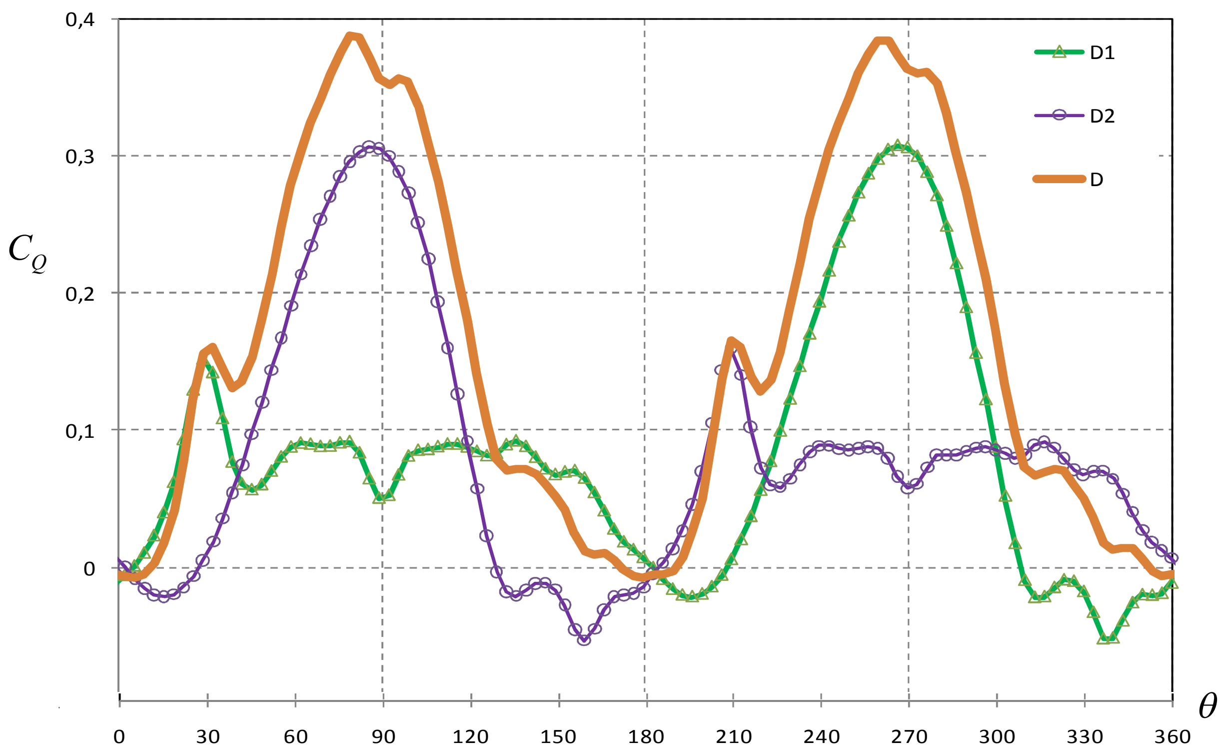


Рисунок 6.11 – Зміна коефіцієнтів крутного моменту C_Q кожної лопаті ротора Дар’є (D1, D2) і ротора в цілому (D) від кута повороту θ на четвертому оберті

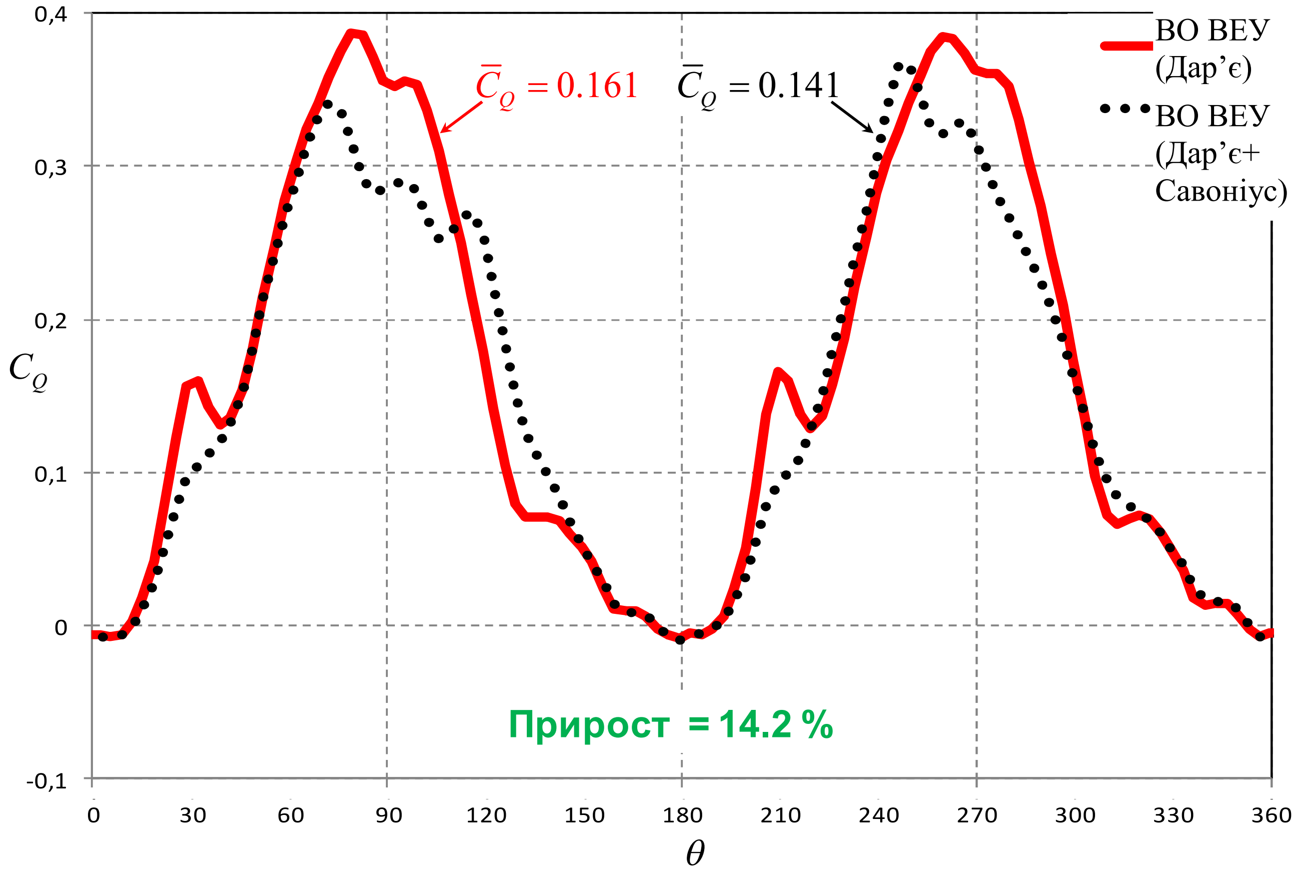
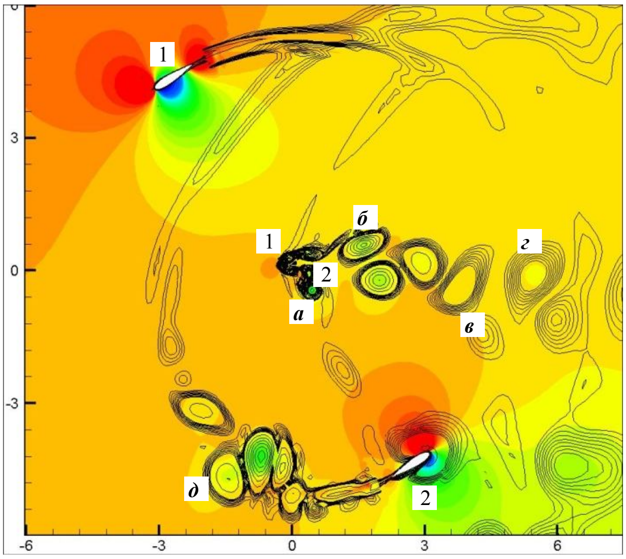
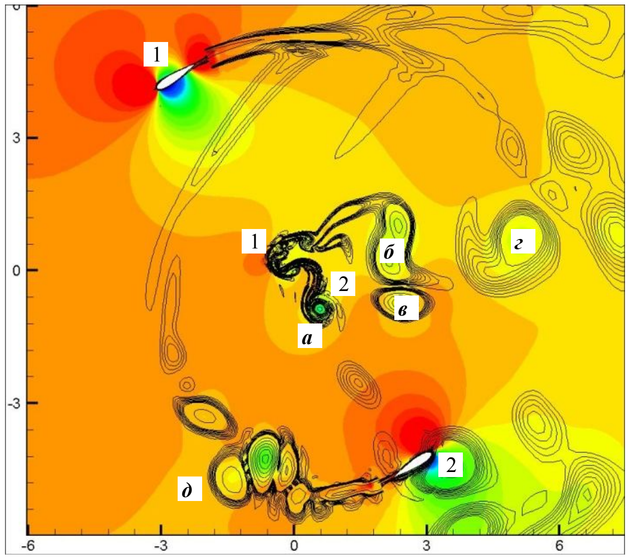


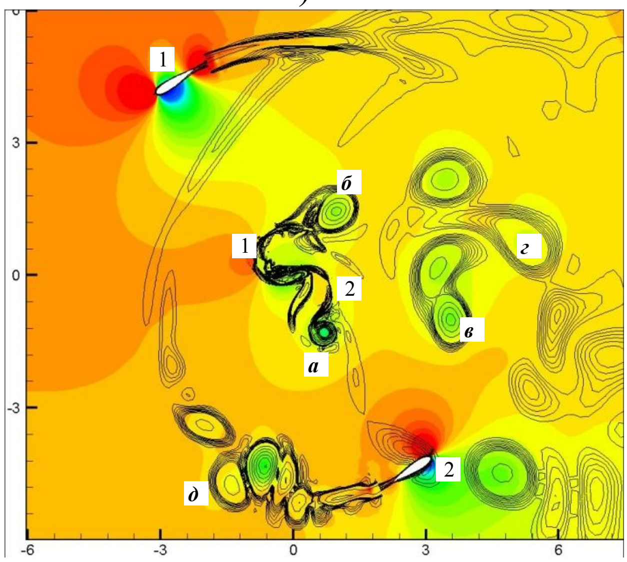
Рисунок 6.12 – Зміна коефіцієнтів крутного моменту ВО ВЕУ з одним ротором Дар'є, а також з роторами Дар'є та Савоніуса від кута повороту



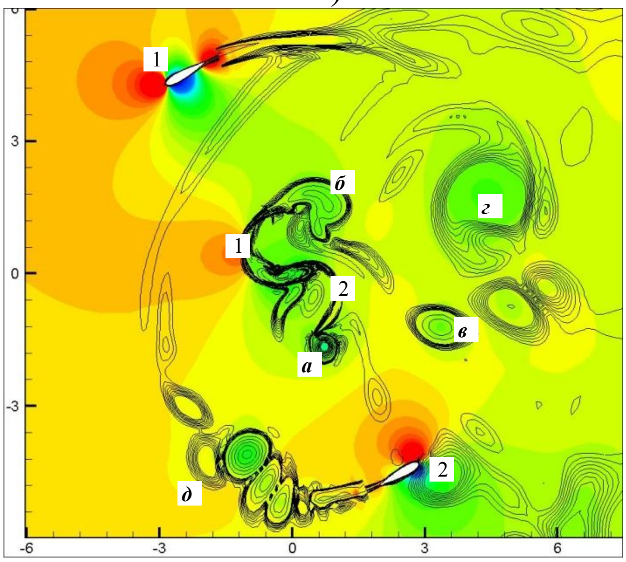
а)



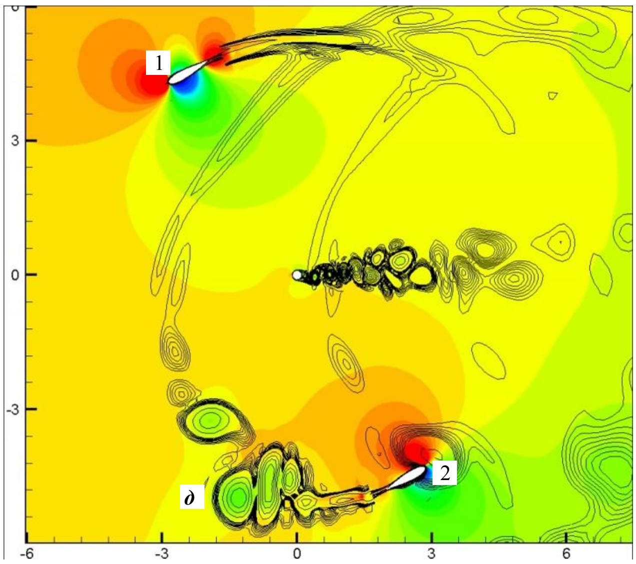
б)



в)



г)



д)

Рисунок 6.13 – Структура течії при обтіканні ВО ВЕУ з роторами Дар'є і Савоніуса при куті повороту θ = 30° і різному відносному діаметрі внутрішньої частини: а – d = 0,25; б – d = 0,50; в – d = 0,75; г – d = 1; д – d = 0,06

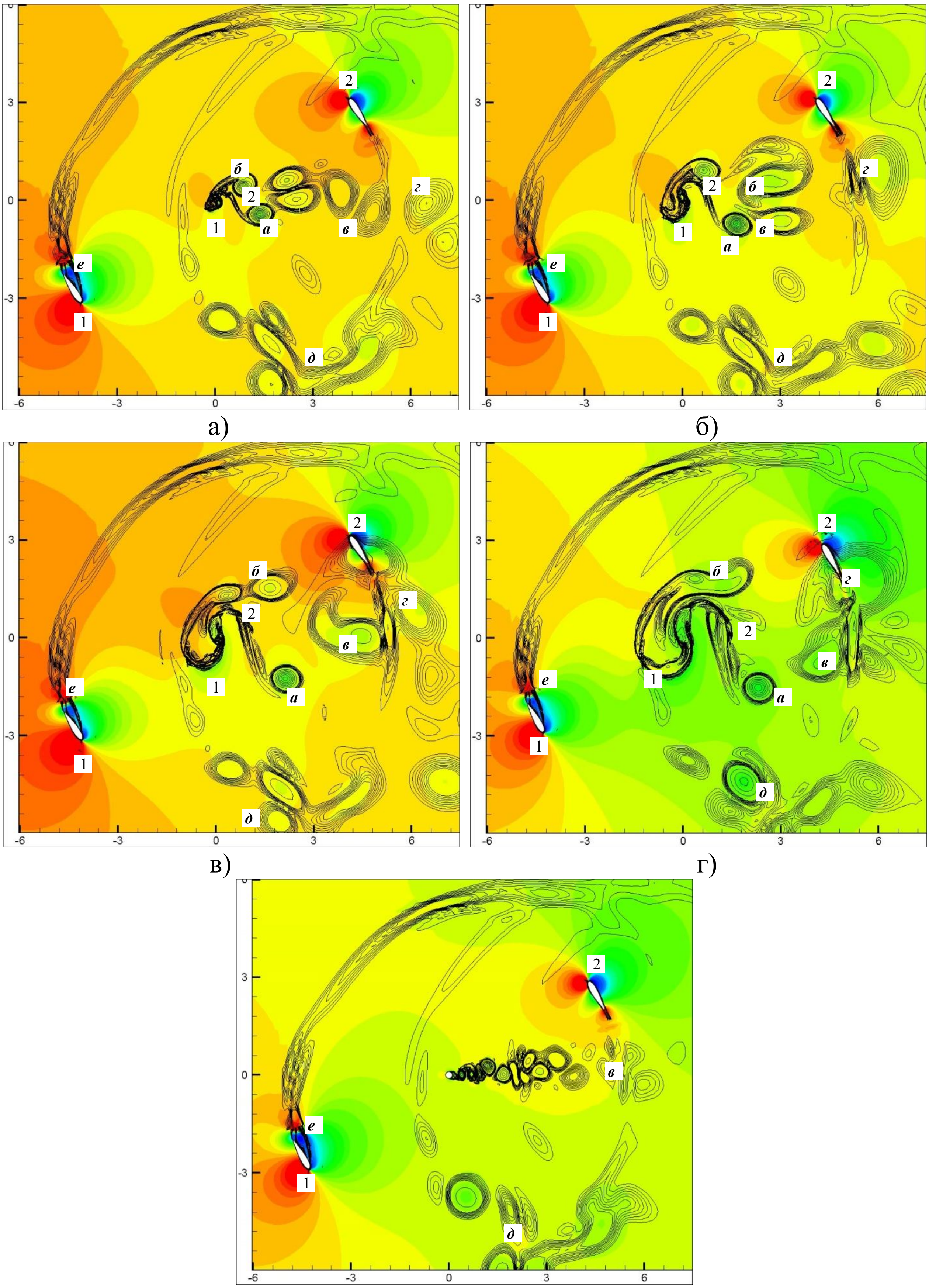
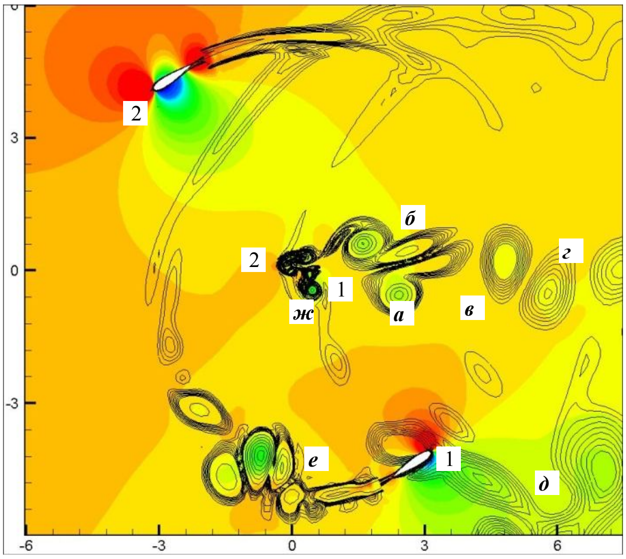
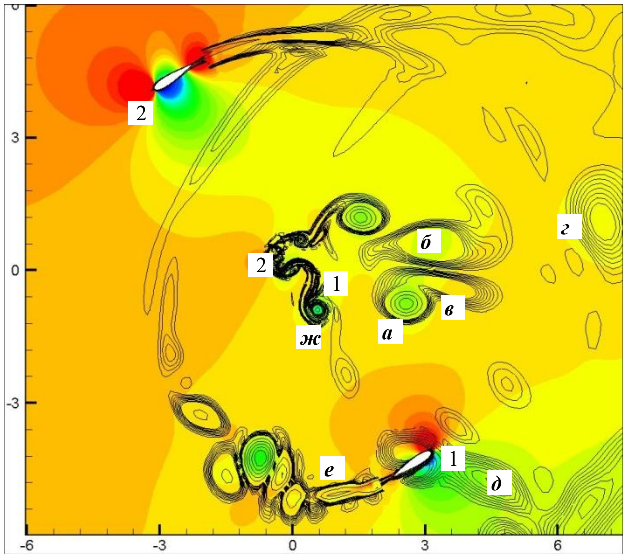


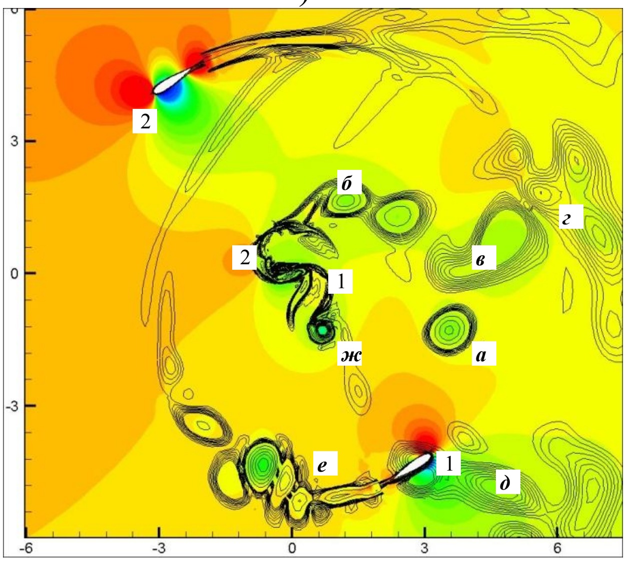
Рисунок 6.14 – Структура течії при обтіканні ВО ВЕУ з роторами Дар’є і Савоніуса при куті повороту θ = 120° і різному відносному діаметрі внутрішньої частини: а – d = 0,25; б – d = 0,50; в – d = 0,75; г – d = 1; д – d = 0,06



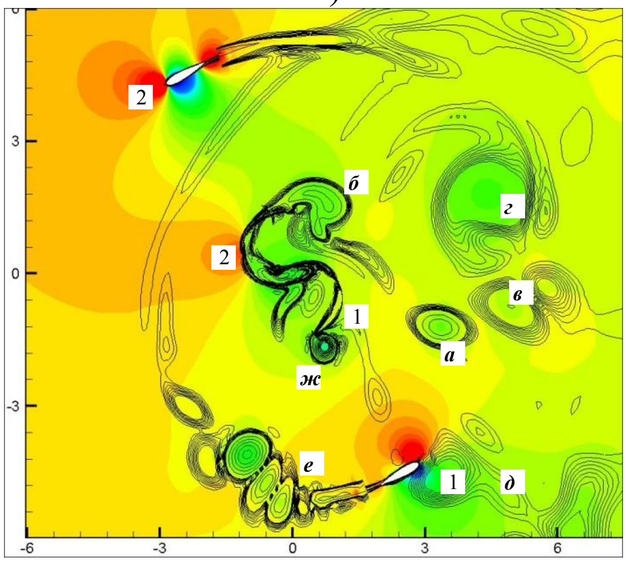
а)



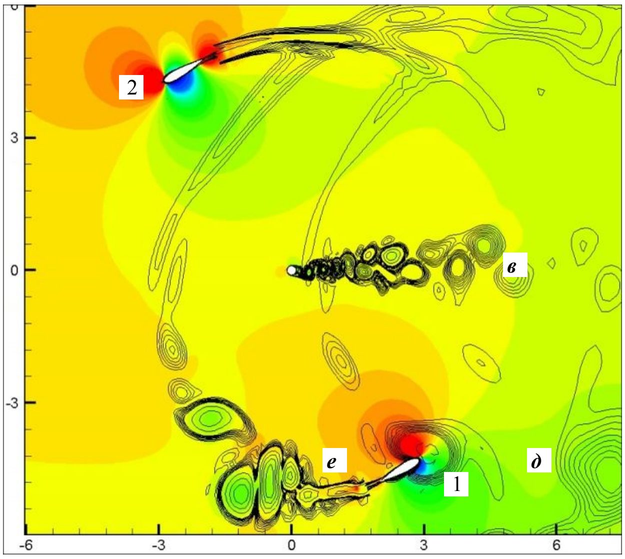
б)



в)

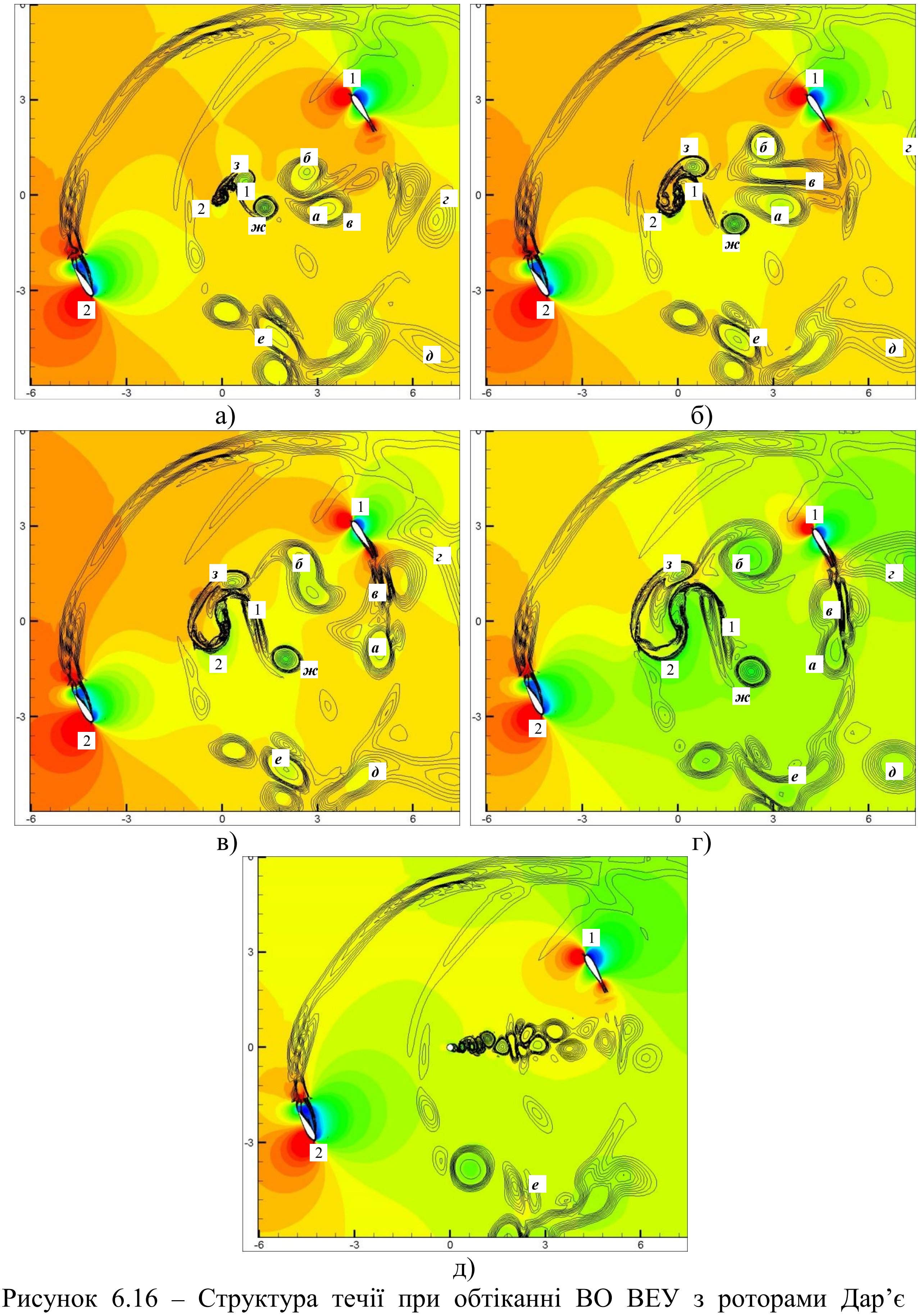


г)



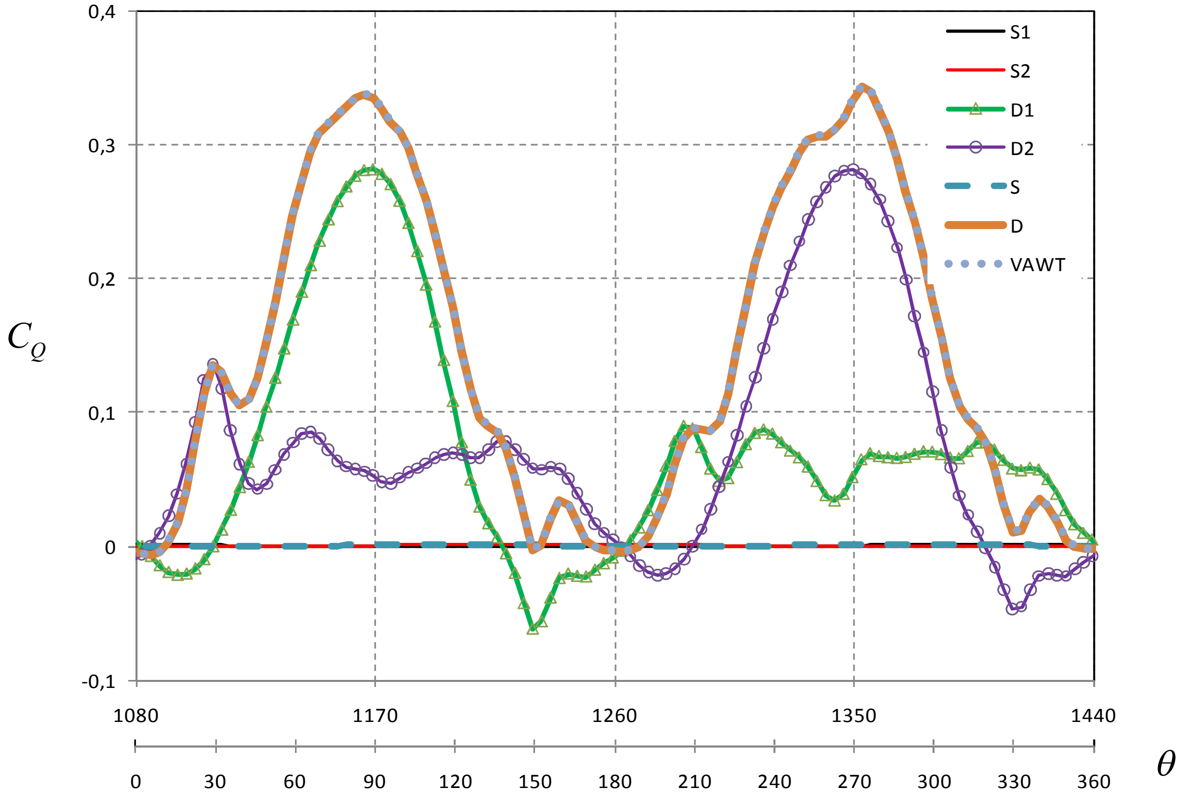
д)

Рисунок 6.15 – Структура течії при обтіканні ВО ВЕУ з роторами Дар’є і Савоніуса при куті повороту θ = 210° і різному відносному діаметрі внутрішньої частини: а – d = 0,25; б – d = 0,50; в – d = 0,75; г – d = 1; д – d = 0,06

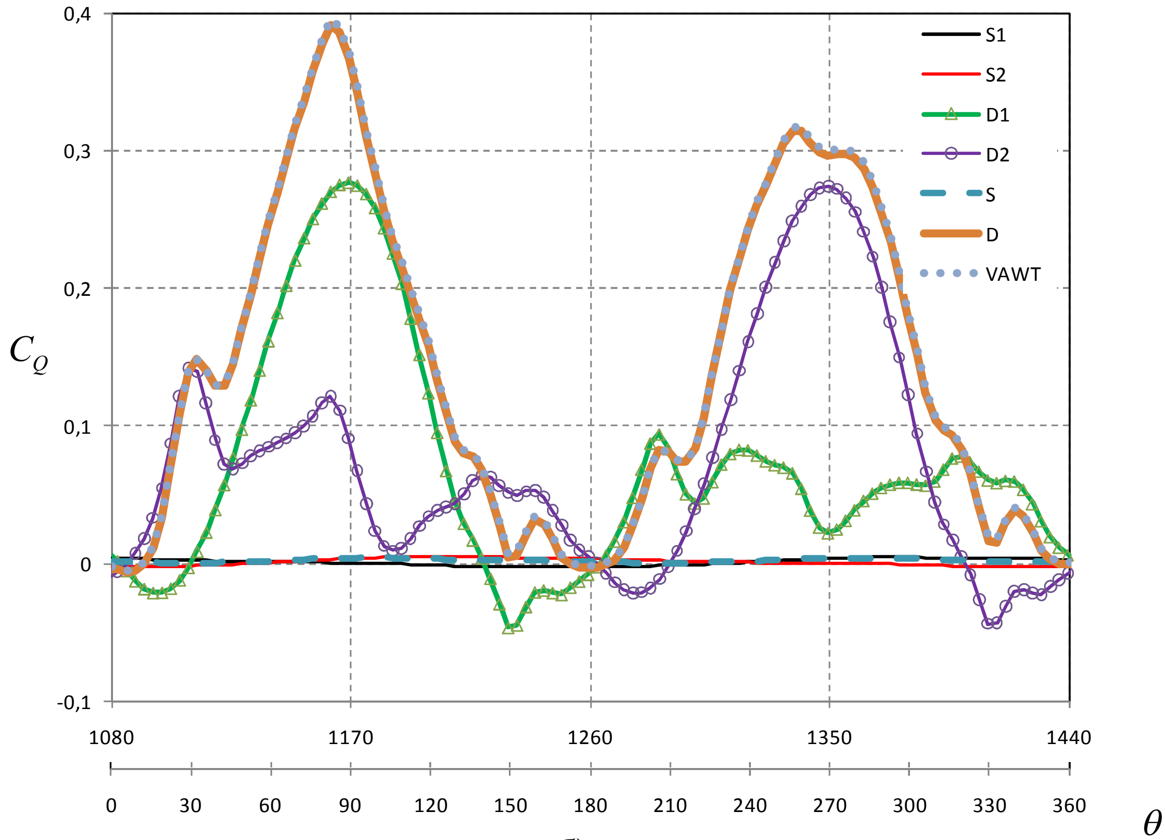


а) б) в) г) д)

Рисунок 6.16 – Структура течії при обтіканні ВО ВЕУ з роторами Дар’є і Савоніуса при куті повороту θ = 300° і різному відносному діаметрі внутрішньої частини: а – d = 0,25; б – d = 0,50; в – d = 0,75; г – d = 1; д – d = 0,06

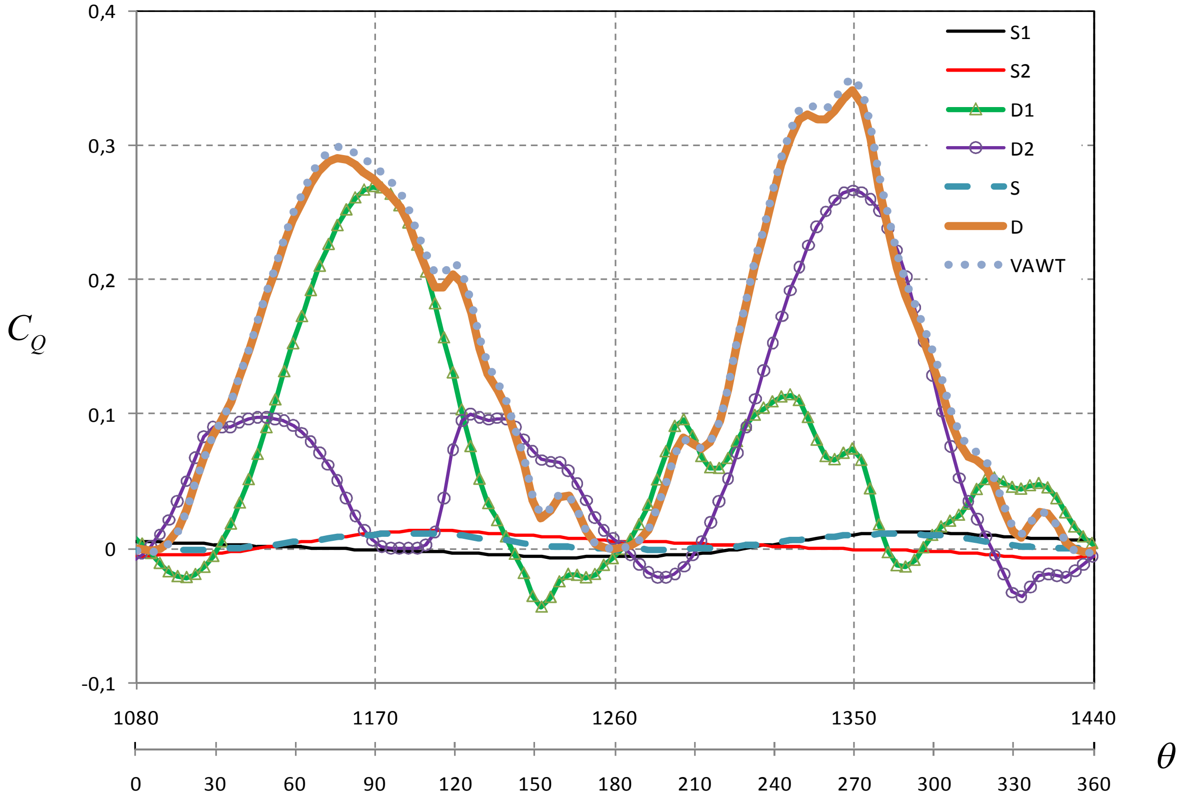


а)

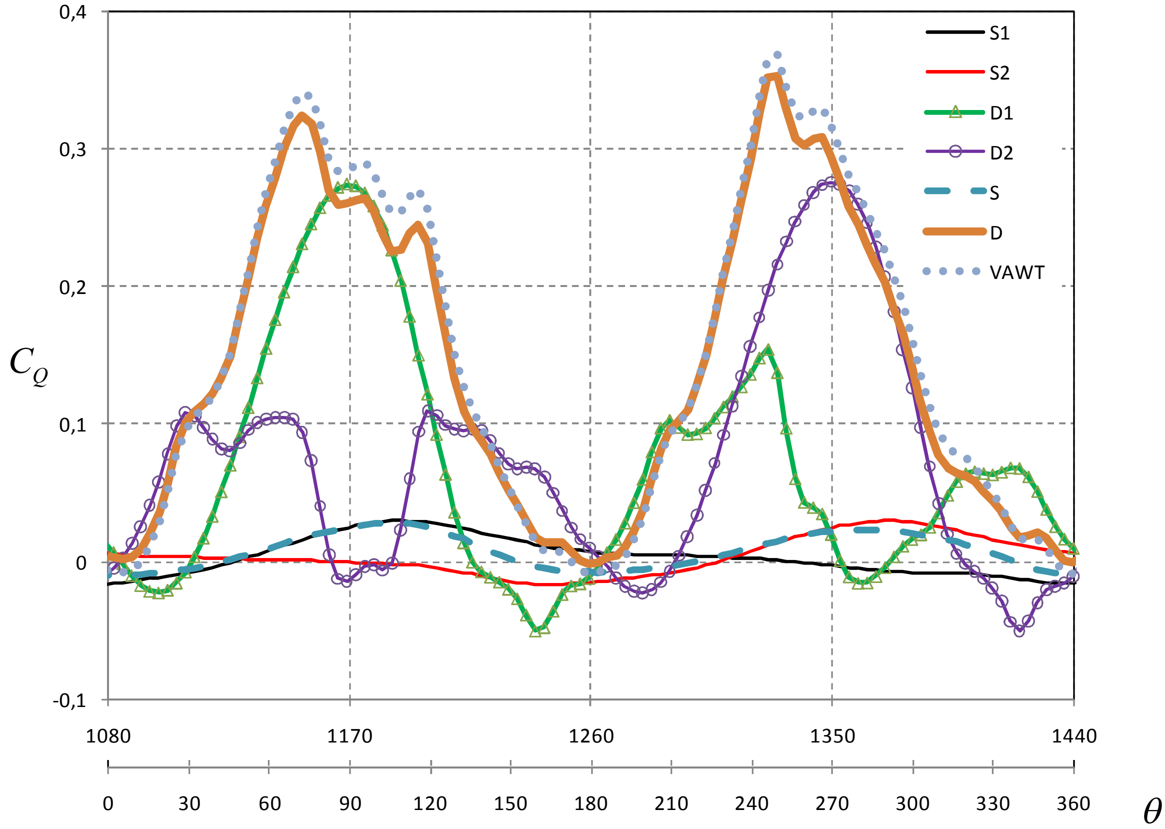


б)

Рисунок 6.17 – Зміна коефіцієнтів крутного моменту C_Q кожної лопаті ротора Савоніуса (S1, S2), Дар'є (D1, D2) і роторів в цілому (S, D), а також ВО ВЕУ (VAWT) від кута повороту θ на четвертому обороті і різному відносному діаметрі внутрішньої частини: а – d = 0,25; б – d = 0,50



а)



б)

Рисунок 6.18 – Зміна коефіцієнтів крутного моменту C_Q кожної лопаті ротора Савоніуса (S1, S2), Дар'є (D1, D2) і роторів в цілому (S, D), а також ВО ВЕУ (VAWT) від кута повороту θ на четвертому обороті і різному відносному діаметрі внутрішньої частини: а – d = 0,75; б – d = 1

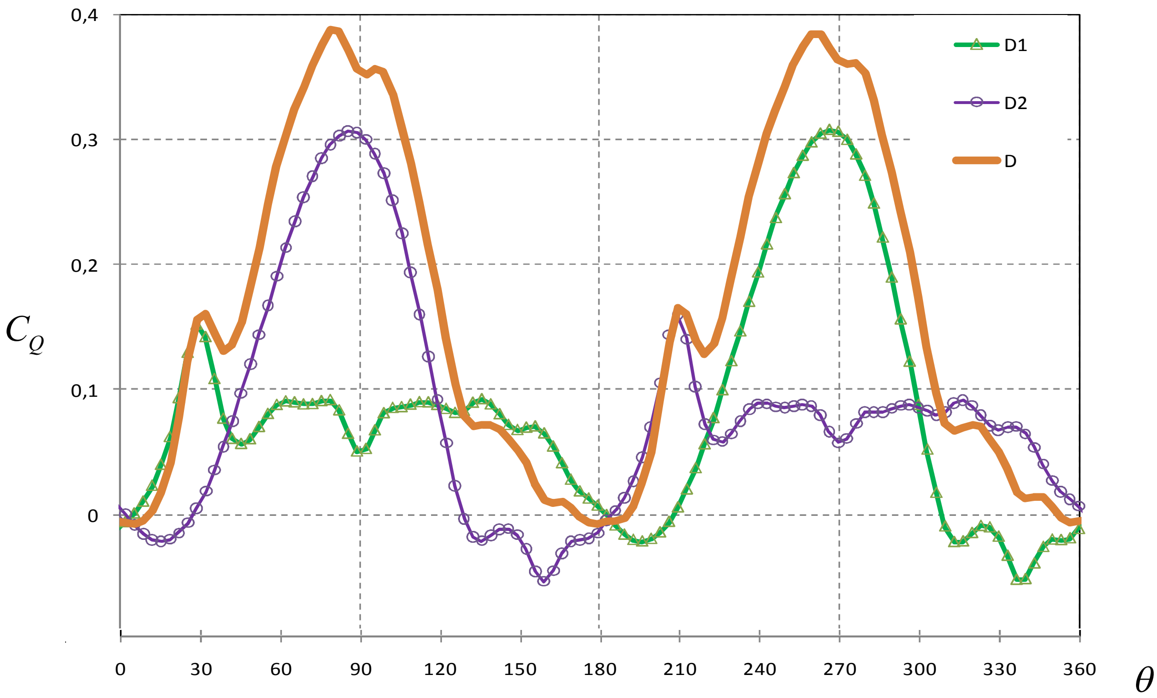


Рисунок 6.19 – Зміна коефіцієнтів крутного моменту C_Q кожної лопаті ротора Дар'є (D1, D2) і ротора в цілому (D) від кута повороту θ на четвертому оберті і відносному діаметрі внутрішньої частини d = 0,06

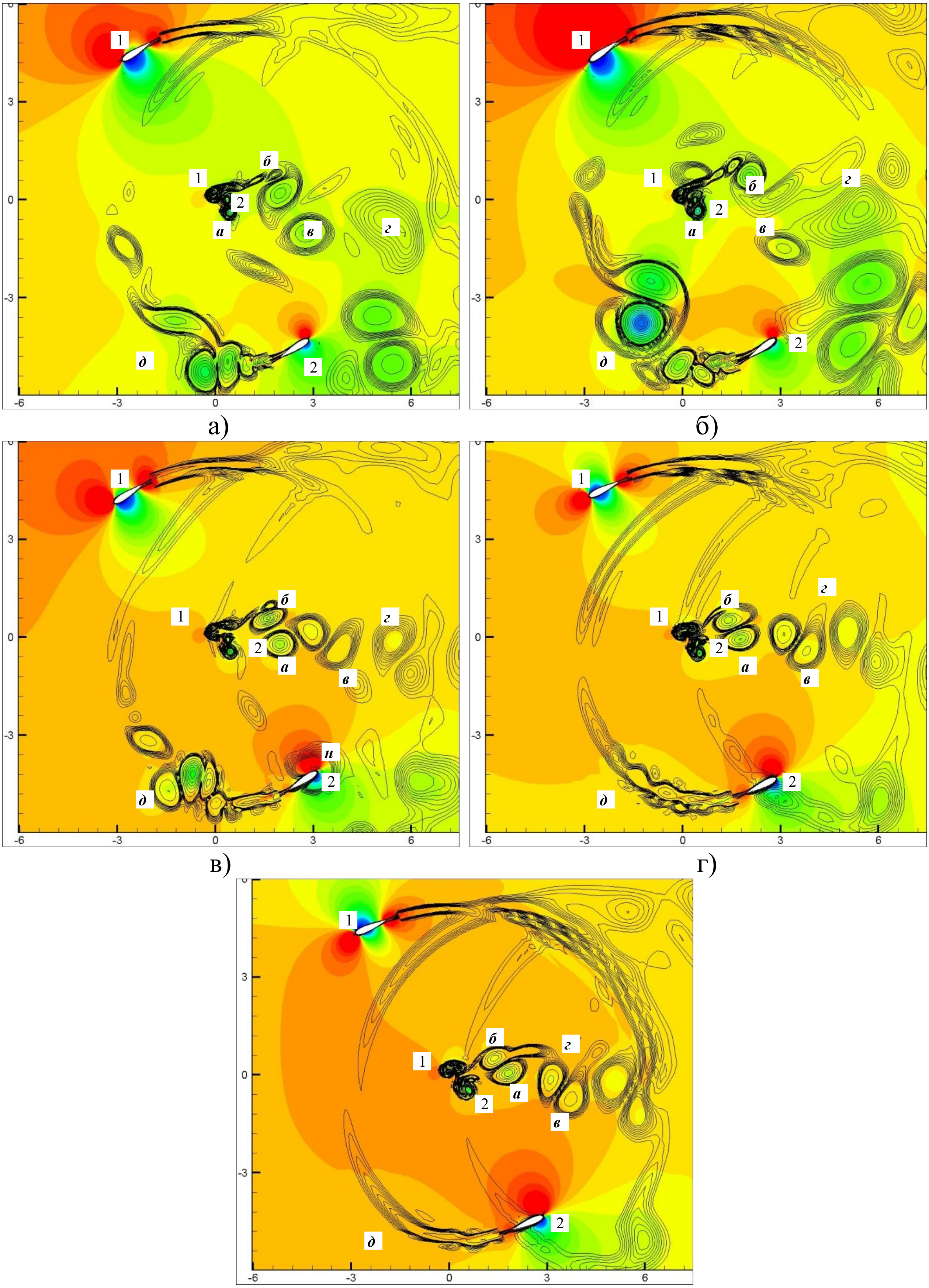


Рисунок 6.20 – Структура течії при обтіканні ВО ВЕУ з роторами Дар’є і Савоніуса при куті повороту θ = 30° і різному куті установки лопаті: а – β = −6°; б – β = −3°; в – β = 0°; г – β = +3°; д – β = +6°

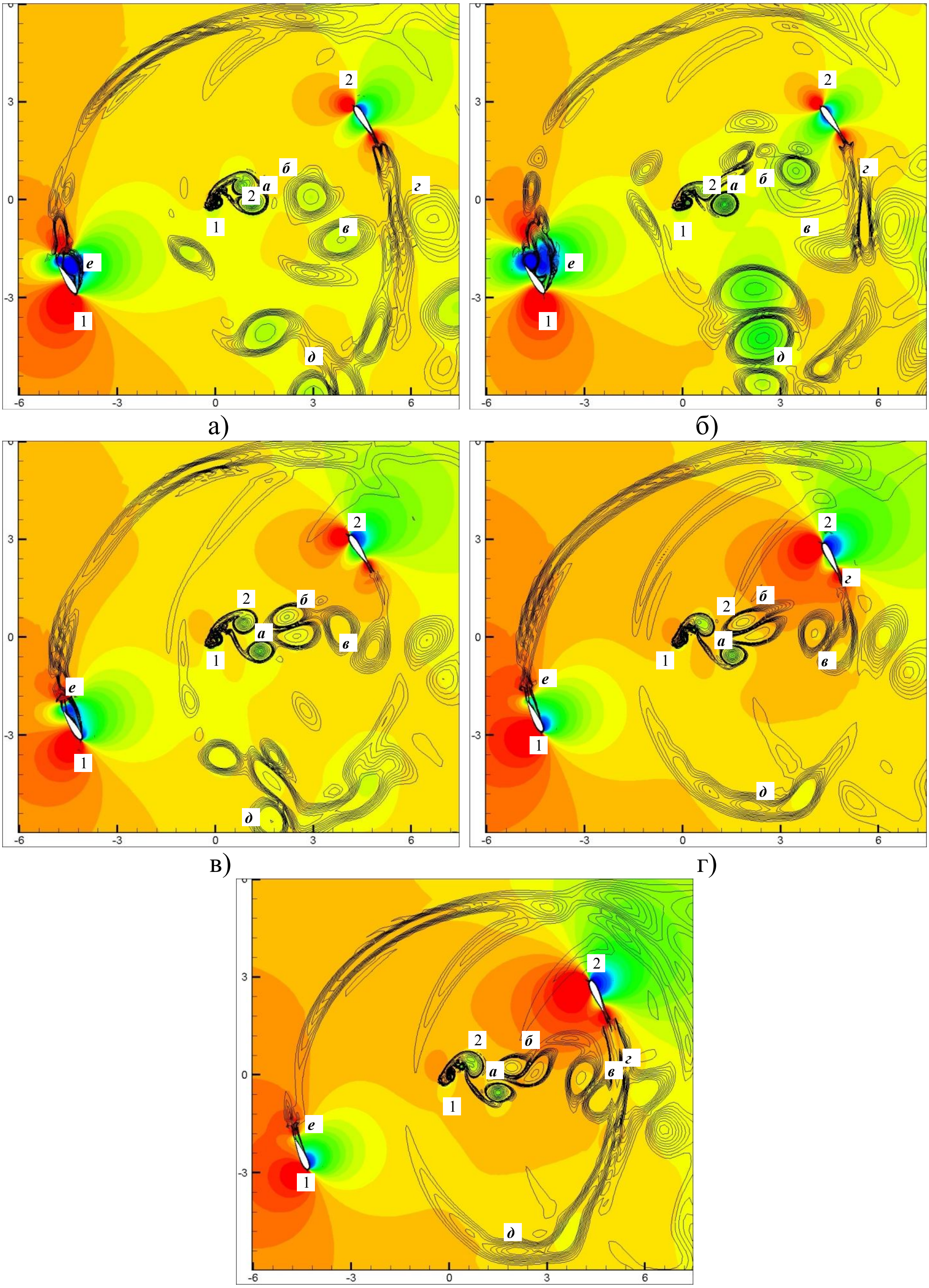


Рисунок 6.21 – Структура течії при обтіканні ВО ВЕУ з роторами Дар’є і Савоніуса при куті повороту $\theta = 120°$ і різному куті установки лопаті: а – $\beta = -6°$; б – $\beta = -3°$; в – $\beta = 0°$; г – $\beta = +3°$; д – $\beta = +6°$

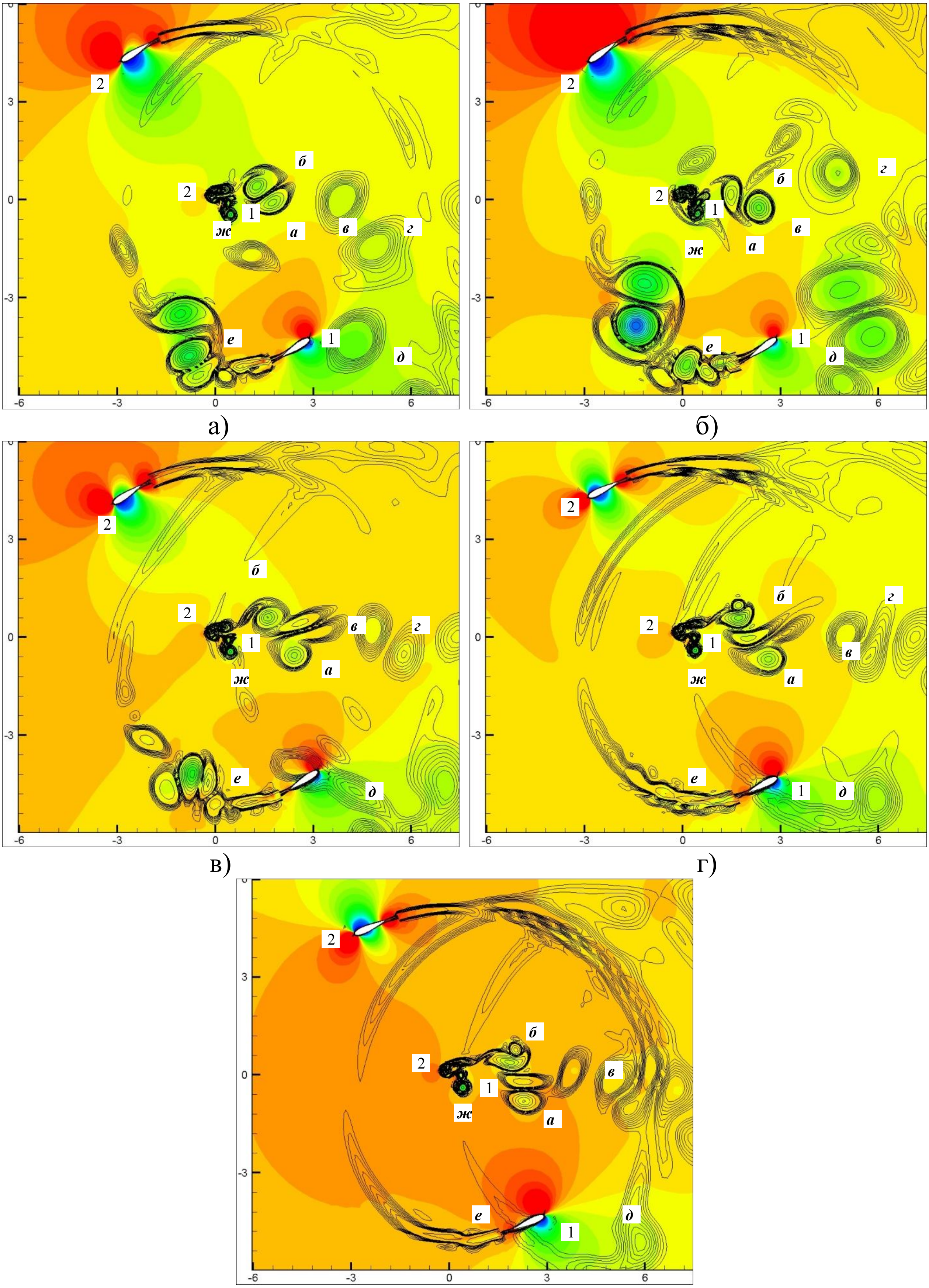


Рисунок 6.22 – Структура течії при обтіканні ВО ВЕУ з роторами Дар’є і Савоніуса при куті повороту θ = 210° і різному куті установки лопаті: а – β = −6°; б – β = −3°; в – β = 0°; г – β = +3°; д – β = +6°

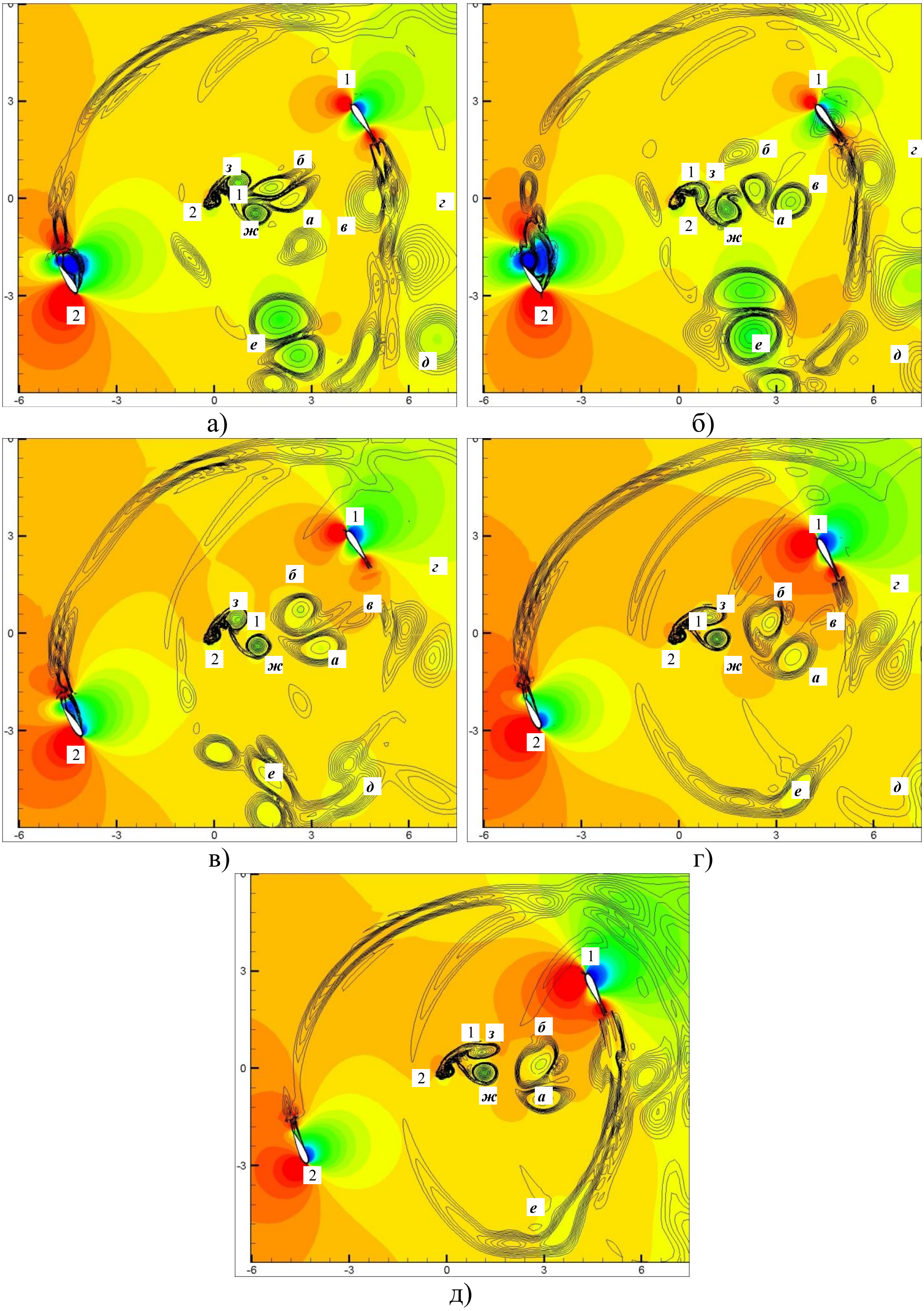
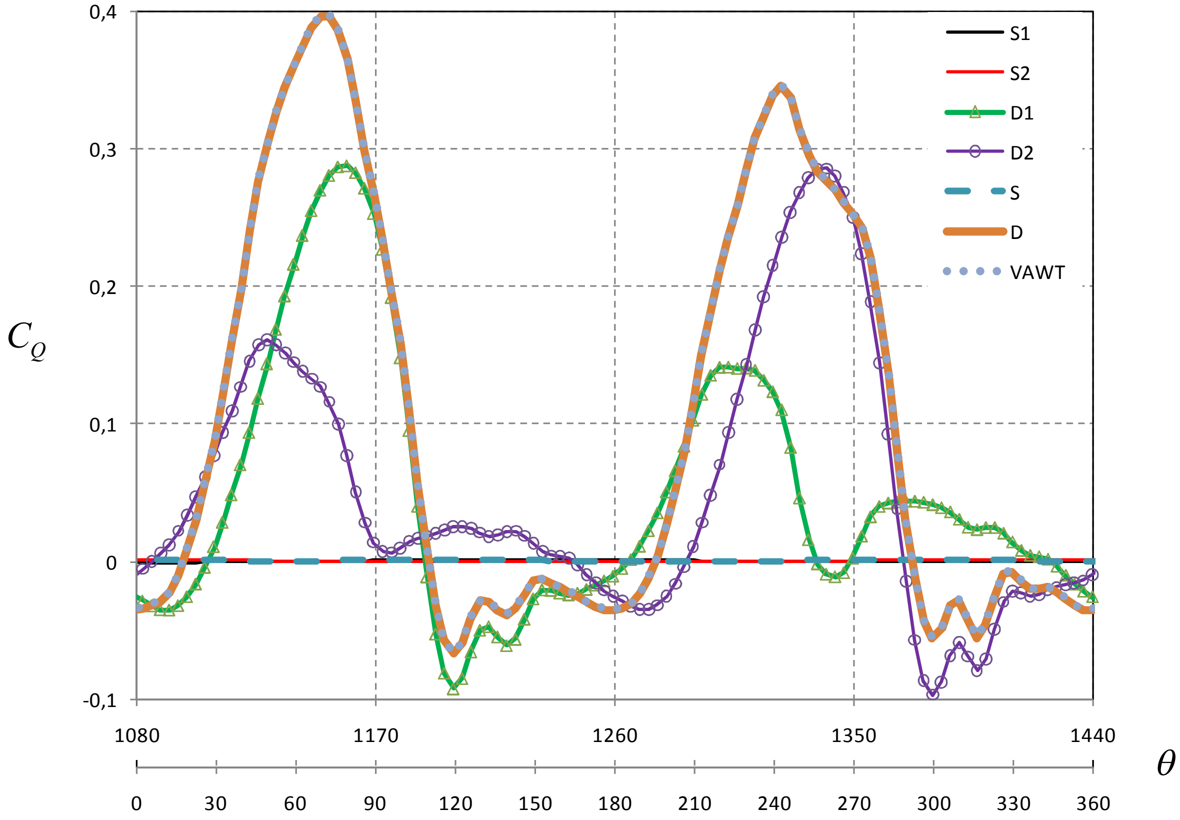
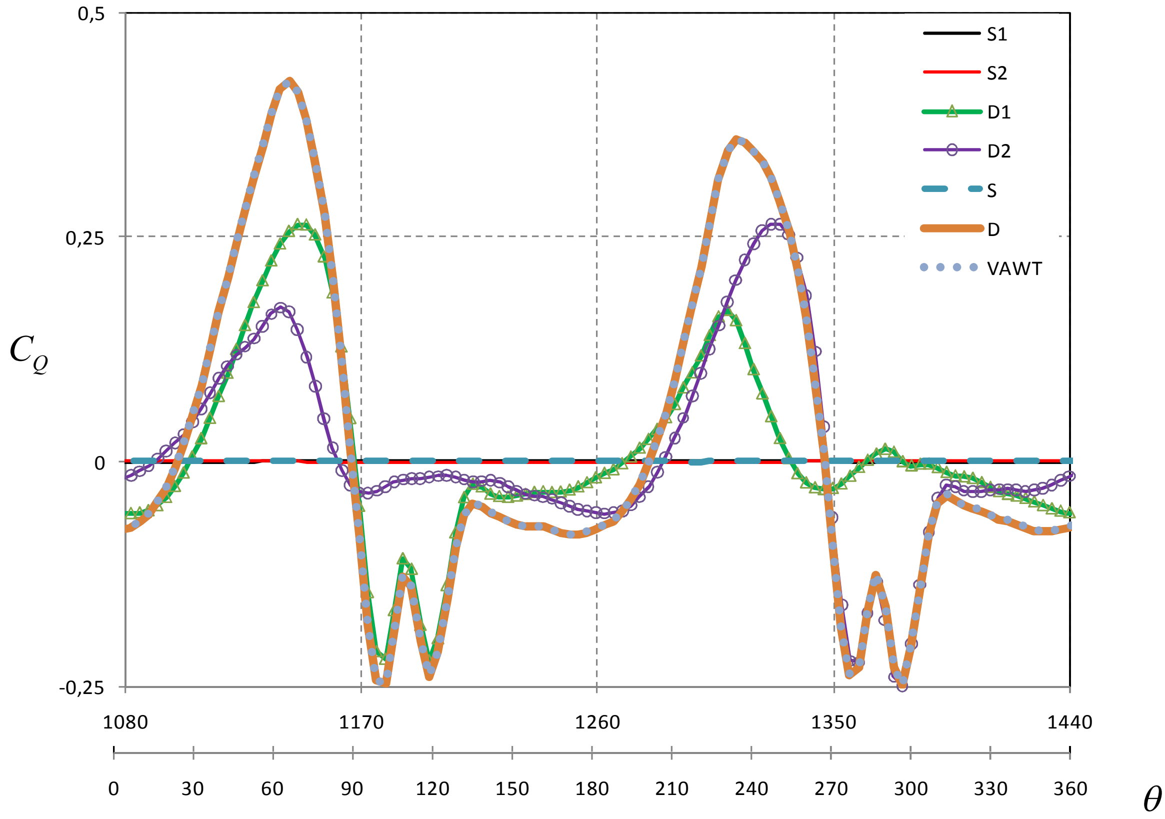


Рисунок 6.23 – Структура течії при обтіканні ВО ВЕУ з роторами Дар’є і Савоніуса при куті повороту $\theta = 300°$ і різному куті установки лопаті: а – $\beta = -6°$; б – $\beta = -3°$; в – $\beta = 0°$; г – $\beta = +3°$; д – $\beta = +6°$

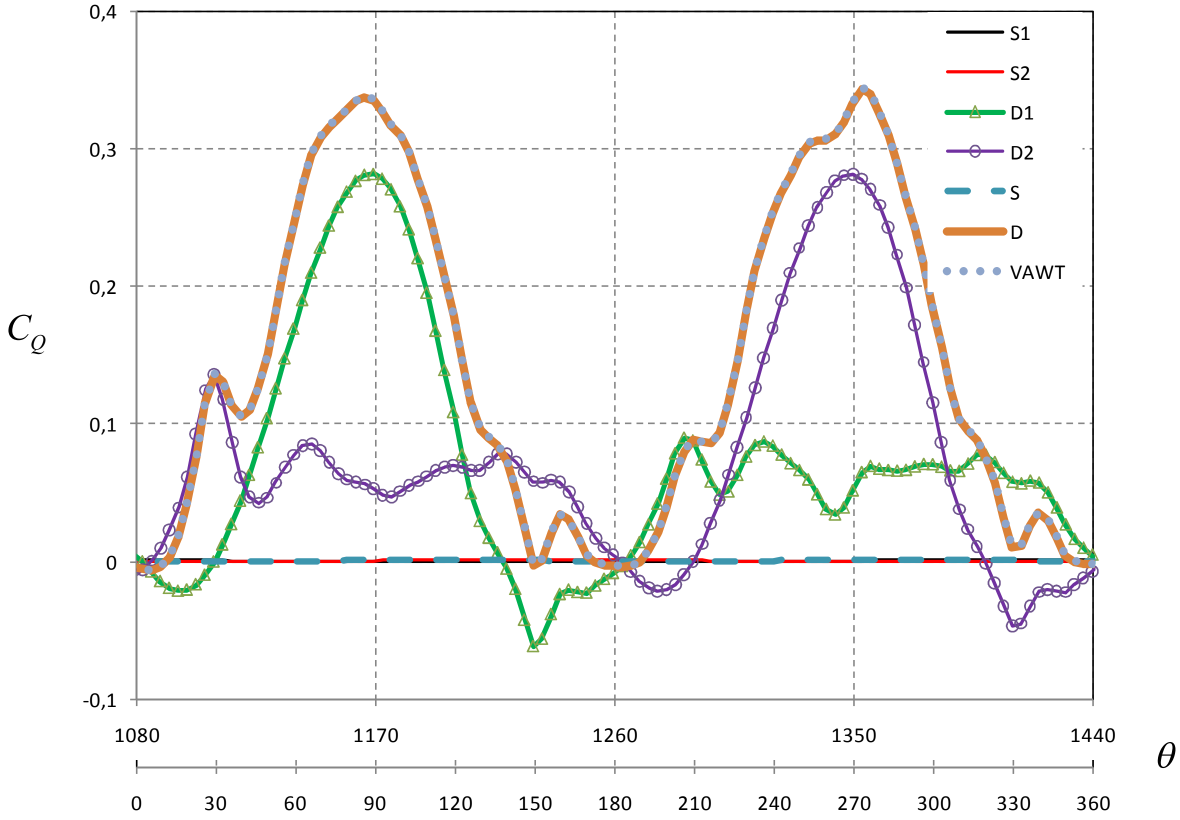


а)

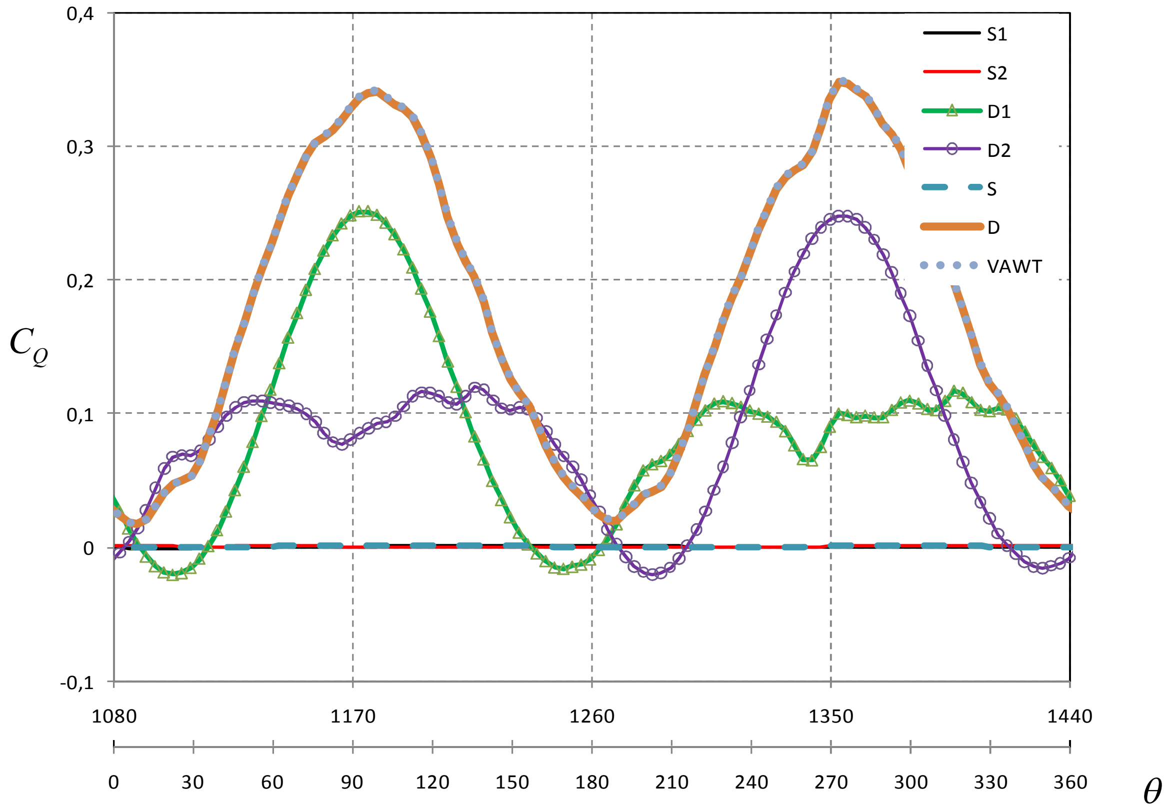


б)

Рисунок 6.24 – Зміна коефіцієнтів крутного моменту C_Q кожної лопаті ротора Савоніуса (S1, S2), Дар'є (D1, D2) і роторів в цілому (S, D), а також ВО ВЕУ (VAWT) від кута повороту θ на четвертому оберті і різному куті установки лопаті: а – β = −6°; б – β = −3°



а)



б)

Рисунок 6.25 – Зміна коефіцієнтів крутного моменту C_Q кожної лопаті ротора Савоніуса (S1, S2), Дар'є (D1, D2) і роторів в цілому (S, D), а також ВО ВЕУ (VAWT) від кута повороту θ на четвертому оберті і різному куті установки лопаті: а – β = 0°; б – β = +3°

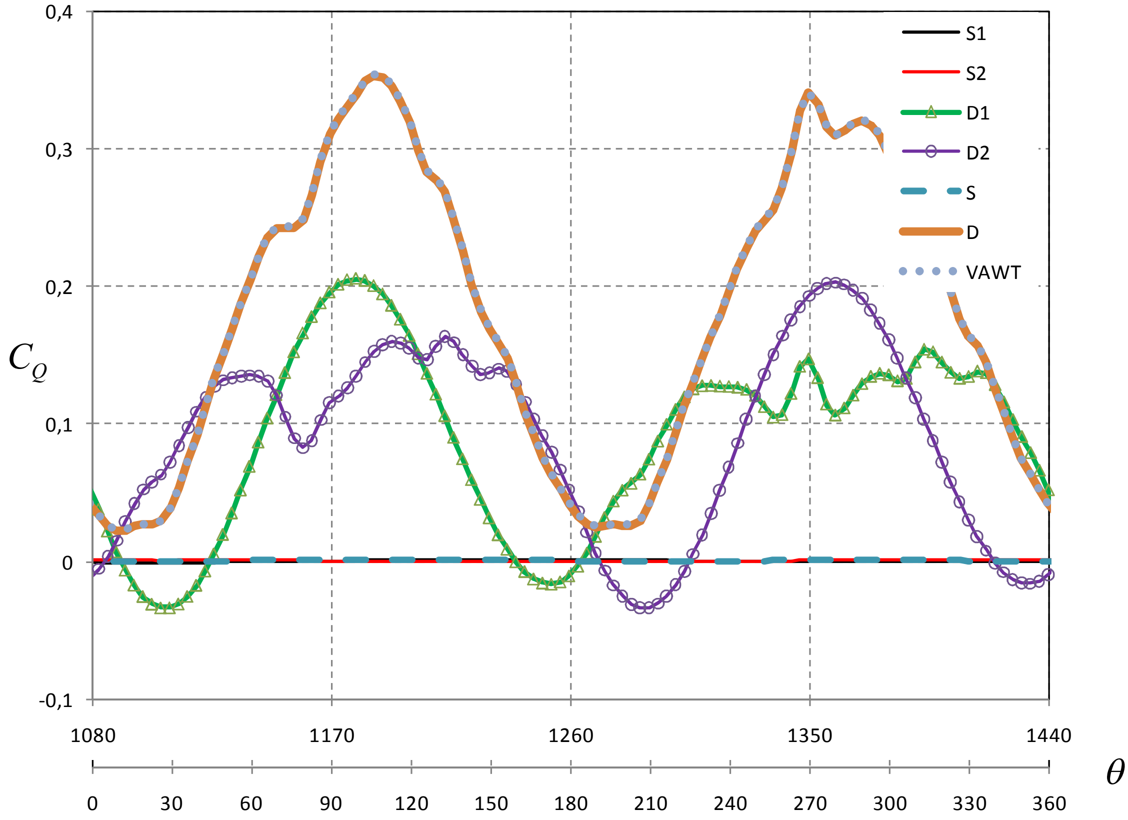


Рисунок 6.26 – Зміна коефіцієнтів крутного моменту C_Q кожної лопаті ротора Дар'є (D1, D2) і ротора в цілому (D) від кута повороту θ на четвертому оберті і куті установки лопаті β = +6°

6.4 Обтікання турбулентним потоком трилопатевого ротора Дар'є

У зв'язку зі створенням вертикально-осьових вітроенергетичних установок останнім часом розпочато комплексне дослідження різних характеристик, пов'язаних з роботою таких установок [1–3].

Серед них важливе місце займає дослідження фізичних процесів, що відбуваються при роботі ротора ВЕУ. Незважаючи на деякий матеріал, отриманий по роботі вертикально-осьових роторів [32, 148], їх роботу вивчено недостатньо повно, що пояснюється як складністю фізичних процесів, що відбуваються при обтіканні ротора ВЕУ, так і просто невеликим часом вивчення таких установок. У раніше проведеній роботі [148], були наведені аеродинамічні спектри, які отримано при значеннях швидкохідності $\lambda = 4 \div 12$. Однак у деяких проектах робочий діапазон швидкохідності лежить в околиці значень $\lambda = 3$. Тому метою цієї роботи було вивчення структури потоку, що обтікає модель ротора при невеликих значеннях швидкохідності та порівняння з експериментальними даними [148].

6.4.1 Опис обладнання та апаратури в натурному експерименті

Дослідження структури потоку, що обтікає модель ротора ВЕУ, було проведено в гідродинамічній трубі ГТ-400, опис якої наведено в роботі [141]. Основні характеристики моделі: діаметр D = 0.195 м, профіль перетину лопатей NACA 0018, кількість лопатей N = 3, хорда лопатей b = 0.026 м, кут установки лопатей $\gamma = 0$.

За допомогою електродвигуна та редуктора частота обертання моделі могла варіюватися від 15 до 25 об/хв. Швидкість водяного потоку за допомогою засувки змінювалася від 2 до 7.5 см/с.

Гідродинамічні спектри було отримано фотографуванням, причому струмки підфарбованої рідини випускалися зі спеціальних гребінок, розташованих як паралельно, так і перпендикулярно осі обертання моделі ротора ВЕУ. Підфарбовані струмки випускалися також з кінцевих частин лопатей моделі ротора ВЕУ.

6.4.2 Опис обчислювального експерименту

У даній роботі виконано чисельне моделювання обтікання трилопатевого ротора Дар'є [124] при наступних параметрах:

– Кутова швидкість обертання – $\omega = 2$ рад/с;

– Швидкість водяного потоку – U = 0.065 м/с;

– Кінематична в'язкість води (t = 15 ºC) – $\nu = 1.15x10^{-6}$ м^2/с;

– Коефіцієнт швидкохідності – $\lambda = 3$;

– Число Рейнольдса Re = Ub/ν = 1470.

6.4.3 Аналіз поля течії навколо трилопатевого ротора Дар'є

Після виходу трилопатевого ротора Дар'є на періодичний режим обтікання (період становить 120º) виділено етапи зародження, розвитку, зриву та дисипації вихорів на різних ділянках траєкторії лопаті. Значення кута $\theta = 0^o$ відповідає розташуванню ротора, коли перша лопать розташована перпендикулярно потоку, що набігає, у навітряній частині траєкторії.

Виходячи з аналізу контурів завихрення (рис. 6.27), при куті повороту першої лопаті $\theta = 0^o$ (місцевий кут атаки лопаті становить $\alpha = -19^o$) на внутрішній поверхні відбувається динамічний зрив потоку. Примежовий шар відривається поблизу задньої крайки, і розташування точки відриву зміщується в напрямку передньої крайки лопаті. Це призводить до зриву вихору з носової частини лопаті та подальшого руху уздовж хорди в напрямку до задньої крайки. На передній крайці першої лопаті формуються вихори, які потім зміщуються уздовж поверхні (рис. 6.27 а-в).

При куті повороту ротора 80º відбувається придушення динамічного зриву вихорів і починається приєднання потоку (рис. 6.27 г) (починається поблизу передньої крайки та зміщується в напрямку задньої крайки). Зрив вихорів із внутрішньої поверхні першої лопаті спостерігається доти, поки кутове розташування ротора не наблизиться до 90º.

На початку підвітряної ділянки траєкторії $\theta = 90^o$ і до кутового розташування ротора $\theta = 120^o$ обтікання потоком лопаті 1 носить приєднаний характер (рис. 6.27 д). Відрив потоку починається при кутовому розташуванні ротора $\theta = 120^o$, що відповідає місцевому куту атаки лопаті $\alpha = 17^o$ (рис. 6.27 е). Як і у випадку динамічного зриву із внутрішньої поверхні, вихори зриваються з передньої крайки лопаті та починають рух уздовж поверхні (рис. 6.27 е–ж). При куті повороту ротора $\theta = 120^o$ (рис. 6.27 ж) розташування першої лопаті відповідає розташуванню лопаті 3 при $\theta = 0$. Потік повторно приєднується до поверхні лопаті 2, коли кут повороту ротора складе $\theta = 310^o$ (рис. 6.27 з). У сліді починає формуватися періодична течія, за структурою, що нагадує вихрову доріжку Кармана за циліндром.

При коефіцієнті швидкохідності $\lambda = 3$ динамічний зрив потоку з лопаті ротора Дар'є спостерігається на більшій частині траєкторії. Він характеризується відривом потоку з передньої крайки лопаті та формуванням великих вихрових структур, які зносяться вздовж хорди.

Зміна абсолютної швидкості по колу обертання лопаті призводить до більшої області динамічного зриву в тій частині траєкторії, де швидкості лопаті та потоку мають один напрямок. У цій зоні потік, що набігає, зносить вихори в напрямку руху лопаті. На другій половині траєкторії, потік переносить вихори в сторону протилежну руху лопаті. У цьому випадку тривалість динамічного зриву потоку менша, ніж у попередньому.

Основною причиною домінування динамічного зриву вихорів на більшій частині траєкторії лопаті є низьке число Рейнольдса $Re = 1470$, що відповідає початковому етапу переходу від ламінарного режиму обтікання до турбулентного.

У результаті проведеного в роботі [2] фізичного експерименту отримано миттєві картини обтікання трилопатевого ротора Дар'є. Фотографії, отримано при зйомці з торця працюючої моделі ротора ВЕУ, що ілюструють процеси формування та дифузії вихорів, що зійшли з кінців лопатей, при різних кутових розташуваннях лопаті та значенні швидкохідності $\lambda = 3$ (рис. 6.28-6.31). Проаналізуємо картини візуалізації течії при роботі ротора Дар'є в умовах динамічного зриву потоку на основі натурного і обчислювального експериментів.

Миттєва картина течії характеризується наявністю системи великих вихорів, які обертаються протилежно один до одного. При коефіцієнті швидкохідності $\lambda = 3$ спостерігається асиметрія між різними ділянками траєкторії лопаті.

Вихори, що зійшли з лопатей, які рухаються назустріч потоку, в більшості мають більшу інтенсивність, ніж вихори, що зійшли з лопатей, які рухаються за потоком. Це пояснюється тим, що відносна швидкість потоку на цій ділянці траєкторії лопаті вища, ніж на протилежній. Нижче за потоком видно сліди згущень вихорів з лопатей, що рухаються за потоком, після деякої їх дифузії.

Візуалізація структури течії для різних азимутальних положень моделі ротора наведено на рис. 6.28-6.31. Так, на рис. 6.28 у передній частині моделі ротора ВЕУ видно згущення вихорів, що зійшли з першої лопаті. Нижче за потоком видно згущення вихорів, що зійшли з попередніх лопатей.

Автори роботи [2] відзначають, що при проведенні справжніх випробувань якість наявних барвників було недостатньо високою, на що в майбутньому слід звернути особливу увагу. Позитивний ефект був виявлений при випусканні барвників не з торців, як це було при проведенні попередньої роботи, а з отворів, розташованих на відстані 0.02 напіврозмаху лопатей ротора.

Спостерігається асиметрія в розмірах і швидкостях руху вихорів між верхньою і нижньою (щодо осі X) частинами ротора. Нижня область характеризується наявністю великих вихрових структур, які є наслідком динамічного зриву потоку з внутрішньої поверхні лопаті. У верхній частині – вихорами середньої інтенсивності в сліді за лопаттю. Це пояснюється тим, що в першому випадку, вихори підштовхуються лопатями, що рухаються за потоком, а в другому випадку, вони, навпаки, пригальмовуються, за рахунок дії в'язких ефектів.

Система вихорів, що утворюється, впливає на структуру течії поблизу лопаті ротора Дар'є. Вихори, що зірвалися з лопаті, яка йде попереду, турбулізують потік для лопаті, розташованої за нею.

Протягом одного оберту, швидкість потоку щодо профілю лопаті змінюється циклічно за величиною і напрямком. В інженерних методиках абсолютна швидкість потоку, що набігає, приймається рівною векторній сумі швидкостей лопаті і вітру. Насправді ця швидкість залежить також від швидкості вихорів, що зійшли з лопатей і опорної вежі ротора. Нестаціонарні ефекти, викликані взаємодією системи вихорів з лопаттю, відіграють істотну роль при визначенні аеродинамічних сил, що діють на ротор.

В цілому картина течії поблизу ротора Дар'є характеризується істотними нестаціонарними явищами. До них відносяться: динамічний зрив потоку, утворення складної системи вихорів, підвищення рівня турбулентності в затіненій області, взаємодія вихорів різних розмірів, швидкостей руху та інтенсивності з твердими поверхнями роторів ВО ВЕУ. Отримана картина течії якісно узгоджується з наявними експериментальними даними.

При наявності складних взаємопов'язаних нестаціонарних ефектів для розрахунку аеродинамічних сил, що діють на ротори ВО ВЕУ, слід застосовувати методики, здатні адекватно передати реальну структуру течії.

Отримані матеріали дозволять глибше розібратися у фізичних процесах, що відбуваються при роботі вертикально-осьового ротора, однак їх недостатньо для уточнення вже існуючих схем і вибору раціональних конструкцій ВЕУ.

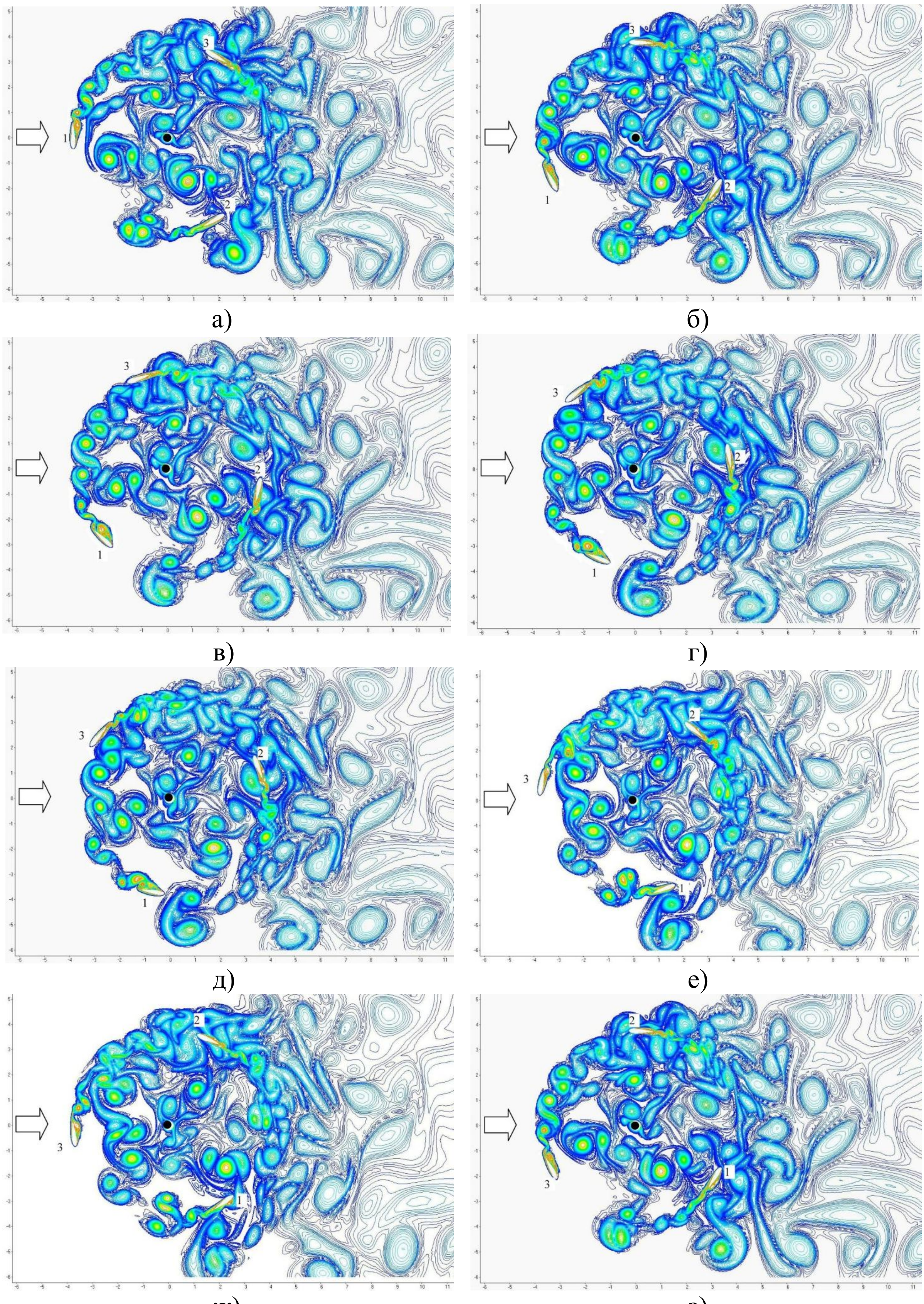
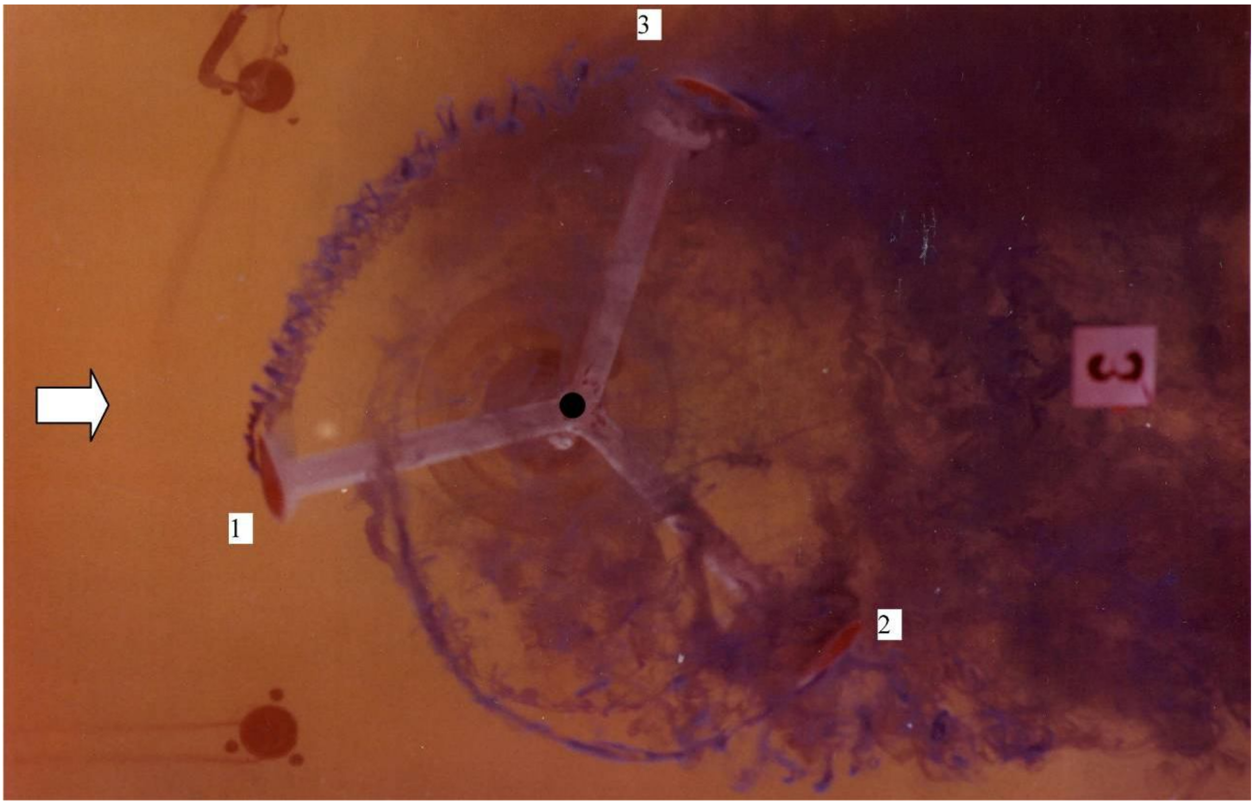
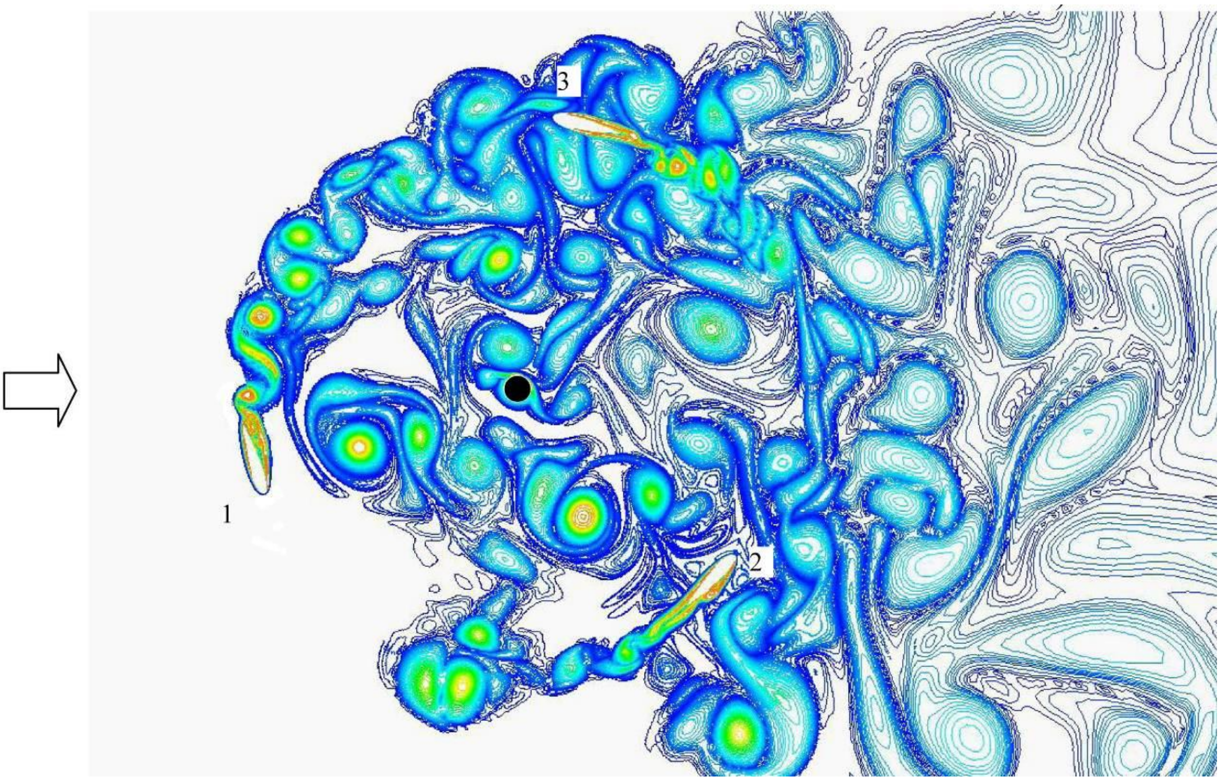


Рисунок 6.27 – Контури завихрення при обертанні ротора Дар'є ($\lambda = 3$): а – θ=0º; б – θ=20º; в – θ=40º; г – θ=60º; д – θ=80º; е – θ=100º; ж – θ=120º; з – θ=140º

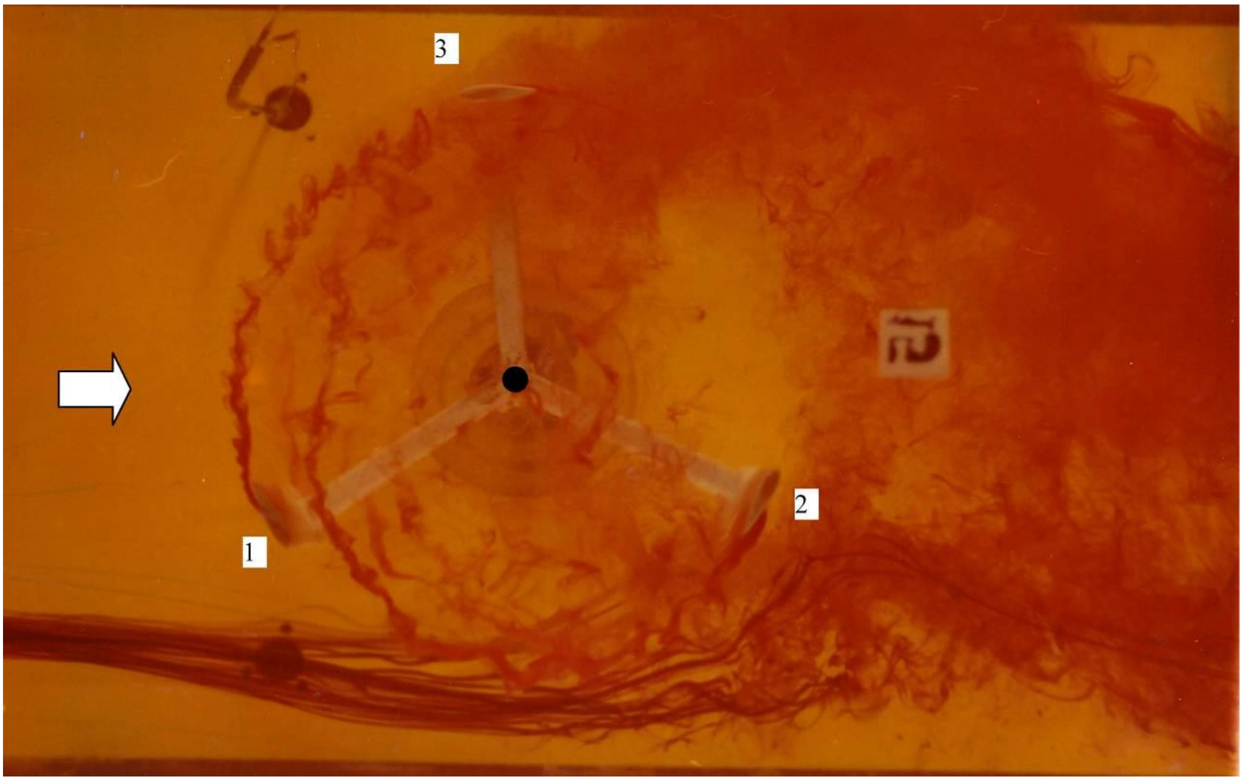


а)

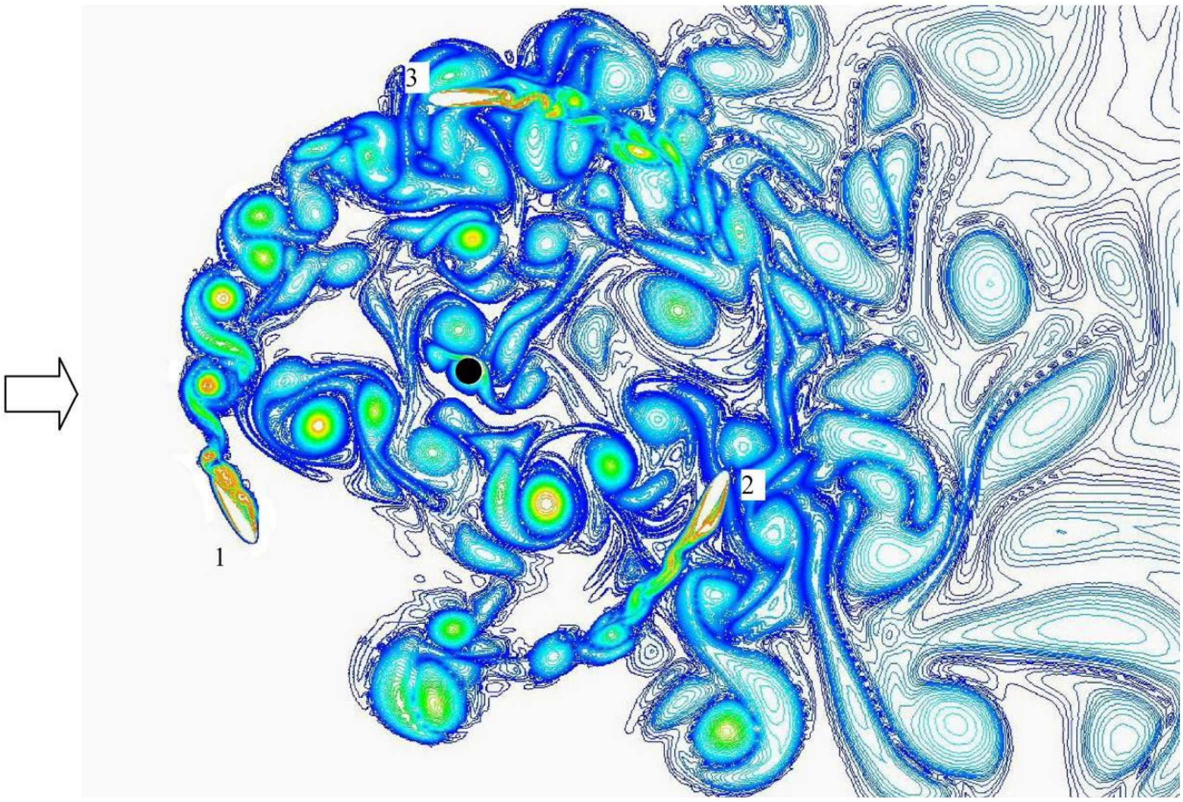


б)

Рисунок 6.28 – Візуалізація течії при роботі трилопатевого ротора Дар’є для коефіцієнта швидкохідності $\lambda = 3$ на основі натурного (а) і обчислювального (б) експериментів ($\theta = 20^{\circ}$)

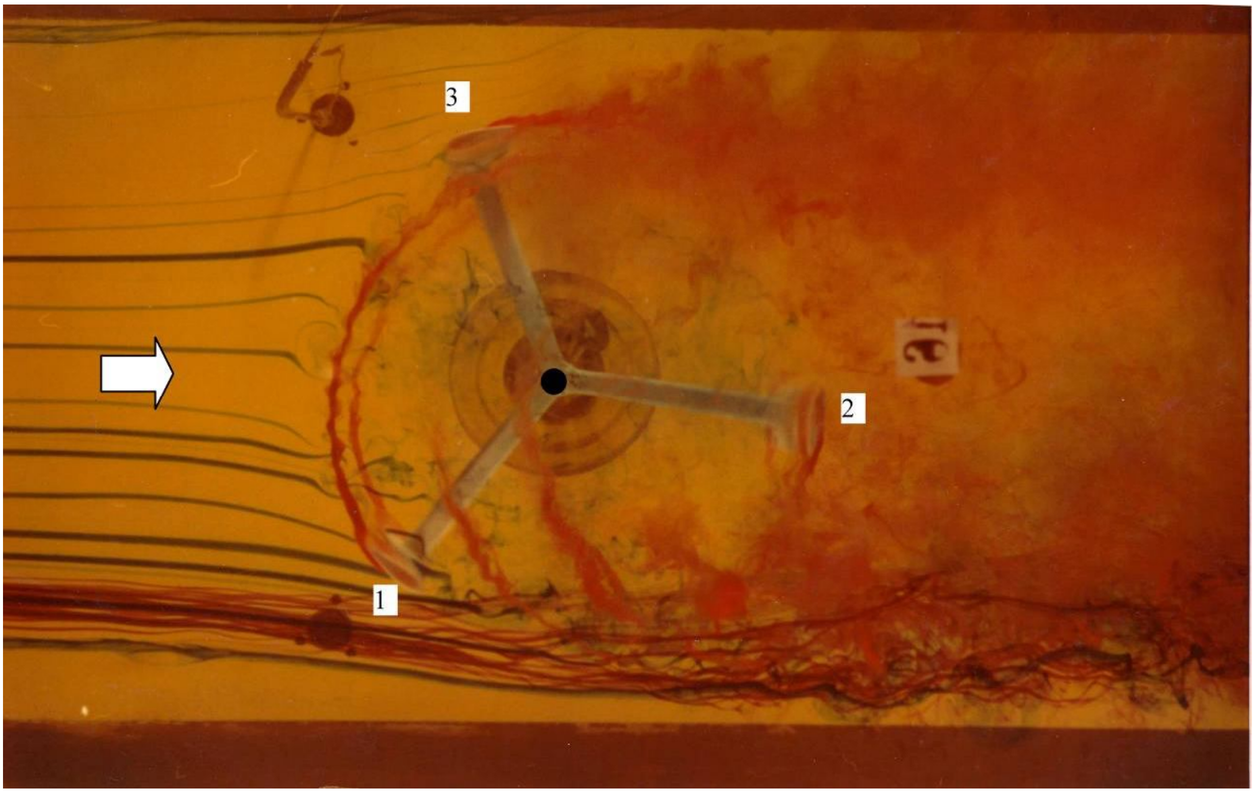


а)

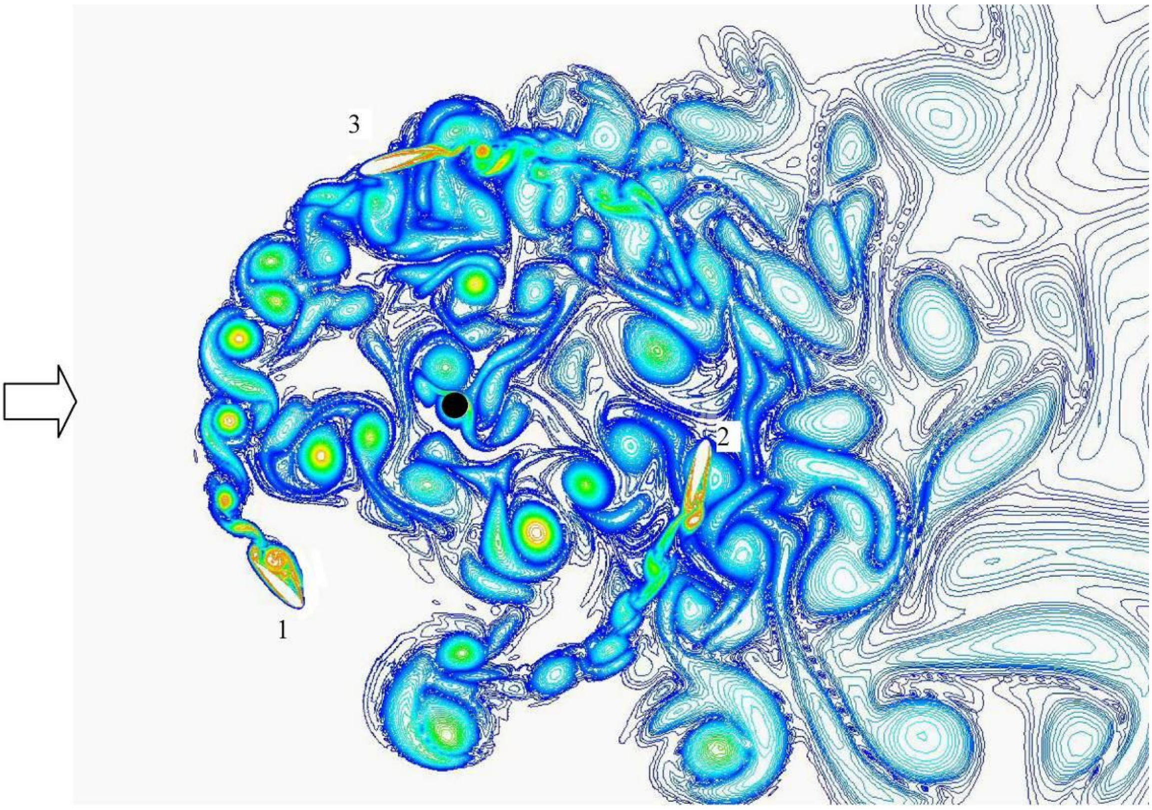


б)

Рисунок 6.29 – Візуалізація течії при роботі трилопатевого ротора Дар’є для коефіцієнта швидкохідності λ = 3 на основі натурного (а) і обчислювального (б) експериментів (θ = 30º)

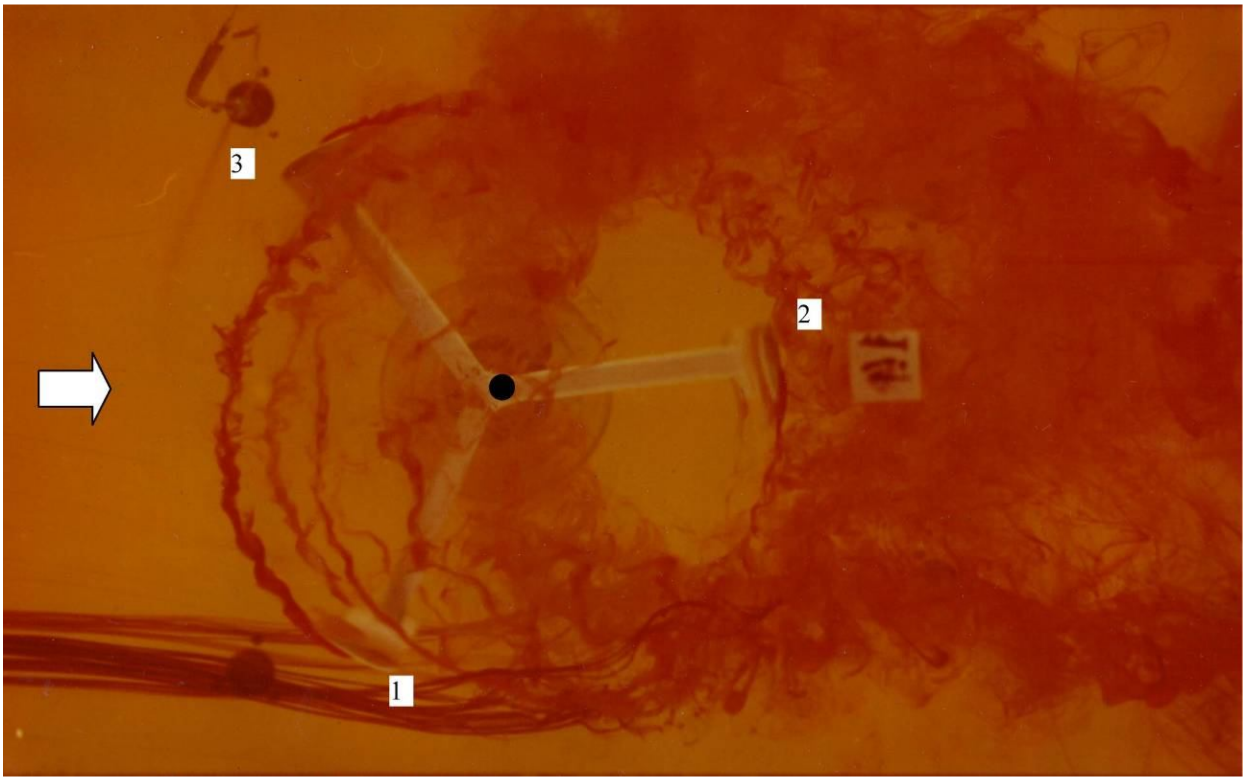


а)

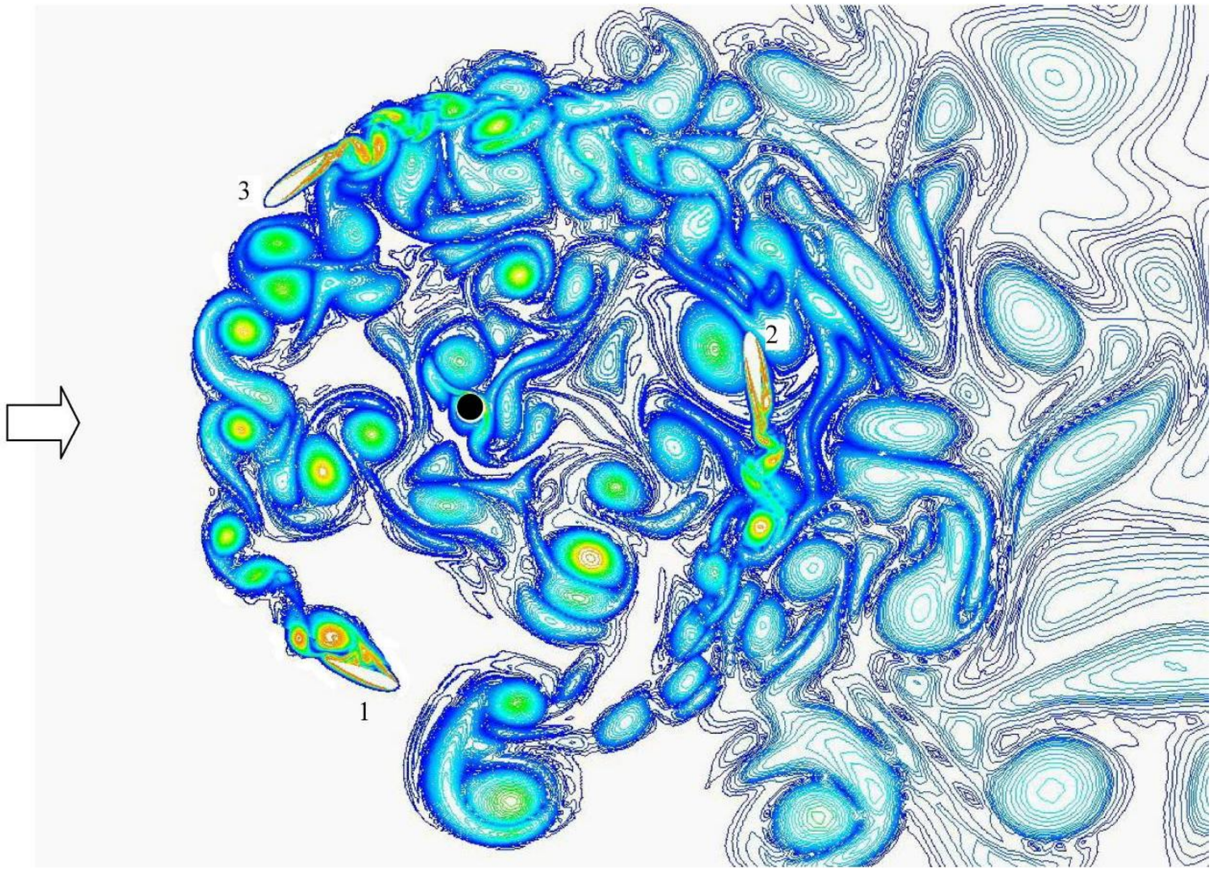


б)

Рисунок 6.30 – Візуалізація течії при роботі трилопатевого ротора Дар’є для коефіцієнта швидкохідності $\lambda = 3$ на основі натурного (а) і обчислювального (б) експериментів ($\theta = 45^{o}$)



а)



б)

Рисунок 6.31 – Візуалізація течії при роботі трилопатевого ротора Дар’є для коефіцієнта швидкохідності $\lambda = 3$ на основі натурного (а) і обчислювального (б) експериментів ($\theta = 60^{o}$)

6.5 Висновки до розділу 6

1. Проведено серію чисельних розрахунків нестаціонарного обтікання вертикально-осьової вітроенергетичної установки з роторами Дар'є та Савоніуса турбулентним потоком вітру.

2. В результаті математичного моделювання аеродинаміки ВО ВЕУ виконано реконструкцію структури течії навколо роторів Савоніуса та Дар'є з урахуванням взаємовпливу, виділено основні стадії формування вихрової структури при обтіканні роторів.

3. Проведено якісні та кількісні оцінки впливу ротора Савоніуса на сумарні аеродинамічні та енергетичні характеристики вертикально-осьової вітроенергетичної установки з роторами Дар'є та Савоніуса.

4. У результаті проведених досліджень розраховано неосереднені коефіцієнти крутного моменту окремих лопатей ротора, а також ВО ВЕУ в цілому від кутового розташування.

5. Показано, що основний внесок у крутний момент ВО ВЕУ здійснюється за рахунок ротора Дар'є в основному на навітряній ділянці траєкторії, на частку ротора Савоніуса припадає лише декілька відсотків від загального обсягу виробленого установкою моменту.

6. Встановлено, що наявність ротора Савоніуса в центральній частині ВО ВЕУ призводить до істотного затінення підвітряної ділянки траєкторії лопаті ротора Дар'є, а, отже, до зниження крутного моменту, що генерується. Зменшення діаметру ротора Савоніуса призводить до збільшення аеродинамічних характеристик ротора Дар'є та енергетичних характеристик всієї ВО ВЕУ.

7. Порівняння аеродинамічних характеристик двох ВО ВЕУ показало, що коефіцієнт крутного моменту більше у ВЕУ з одним тільки ротором Дар'є. Приріст становить 14%.

8. У результаті проведених досліджень встановлено вплив кута установки профілю лопаті ротора Дар'є на аеродинамічну та енергетичну ефективність вертикально-осьової вітроенергетичної установки. Неосереднений коефіцієнт

крутного моменту ВО ВЕУ із дволопатевим ротором Дар'є при $\beta = +3^{\circ}, +6^{\circ}$ завжди додатний і обтікання лопаті відбувається без динамічного зриву потоку.

9. Виконано чисельне моделювання нестаціонарного обтікання вітровим потоком трилопатевого ротора Дар'є. Наведено реконструкцію структури течії при роботі трилопатевого роторів Дар'є для коефіцієнта швидкохідності $\lambda = 3$ на основі натурного та обчислювального експериментів. Отримані результати задовільно узгоджуються з наявними експериментальними даними.

РОЗДІЛ 7
ЗВ'ЯЗАНІ ЗАДАЧІ ПЛАЗМОВОЇ АЕРОДИНАМІКИ

У розділі проведено серію обчислювальних експериментів з моделювання нестаціонарних процесів низькотемпературної нерівноважної плазми діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора, а також її вплив на керування структурою потоку повітря. Виконано детальне вивчення стадій зародження, розвитку та гасіння катодоспрямованого стримера при роботі плазмового актуатора. Проведено параметричні дослідження фізичних і геометричних характеристик плазмових актуаторів та їх вплив на генерацію потоків повітря. Показано можливості керування потоком повітря на плоскій пластині та циліндрі при роботі плазмового актуатора на основі діелектричного бар'єрного розряду.

7.1 Моделювання одиночного мікророзряду. Катодоспрямований стример

З метою верифікації розробленої чисельно-аналітичної математичної моделі проведено тестові розрахунки діелектричного бар'єрного розряду під час роботи плазмового актуатора в нерухомому повітрі в умовах атмосферного тиску [75].

В якості робочого газу розглядається повітря з фіксованою часткою азоту $N_2/N_{air} = 0.78$ і кисню $O_2/N_{air} = 0.22$ при нормальному тиску на рівні моря $p = 101325$ Н/м² (1 атм.). Температура повітря приймається сталою та дорівнює $T = 300K$. Загальна кількість молекул азоту та кисню в одиниці об'єму становить $N_{air} = 2.447 \cdot 10^{25}\ 1/м^3$.

Вихідні дані відповідають експериментальним роботам [193, 197]. Діелектрик являє собою керамічний матеріал Macor з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon_r = 6$ та товщиною $d = 2{,}1$ мм. Відносна діелектрична проникність повітря $\varepsilon_r = 1{,}0006$. Електроди являють собою смужки міді.

Довжина відкритого електрода становить 5 мм, а ізольованого – 25 мм. До верхнього електрода прикладалася напруга амплітудою $\varphi_{\max} = 7$ кВ [193] і $\varphi_{\max} = 12$ кВ [197], частотою 5 кГц і 200 Гц, відповідно. Розглядається чверть періоду коливання прикладеної напруги для демонстрації можливостей розробленої нової математичної моделі.

В експерименті діелектрична поверхня складалася із дрібних сегментів, що дало можливість виміряти розподіл напруги по поверхні діелектрика.

Для адекватного опису зародження, розвитку та проходження стримера використовувався змінний крок інтегрування за часом ($\Delta t = 10^{-7} \div 10^{-12}$ с). Початок координат збігається з правим краєм відкритого електрода. Багатоблочна сітка, що описує геометрію розрахункової області поблизу плазмового актуатора, складається з 5 блоків: один для повітряної області ($1 \cdot 10^4$ вузлів), а чотири для області діелектрика (по $1 \cdot 10^4$ вузлів). Мінімальний крок сітки поблизу правого краю відкритого електрода $1 \cdot 10^{-5}$ м.

На рисунках 7.1-7.3 показано зміну густини різних хімічних елементів **n** плазми діелектричного бар'єрного розряду в просторі та за часом при $\varphi_{\max} = 7$ кВ [193] і частоті 5 кГц, а також густина результуючого об'ємного заряду ρ та компоненти сили Лоренца f_x, f_y, віднесені до одиниці об'єму. Тут же наведено розподіли сумарного $\varphi = \varphi_{el} + \varphi_{\rho,\sigma}$ і прикладеного φ_{el} електричного потенціалів, розподіл потенціалу від об'ємного та поверхневого зарядів $\varphi_{\rho,\sigma}$, а також модуля напруженості електричного поля $|E|$.

Мікророзряд виникає тоді, коли прикладена напруга перевищує напругу пробою для даного міжелектродного простору. Механізм формування та розвитку окремого мікророзряду складається із трьох послідовних стадій (рис. 7.1-7.3).

На першій стадії зі збільшенням прикладеної напруги φ_{el} (рис. 7.1 д) відбувається зростання напруженості електричного поля поблизу правого краю відкритого електрода (рис. 7.1 ж). Це призводить до часткової іонізації повітря в цій області (рис. 7.1 а) за рахунок формування електронних лавин. На цій стадії концентрація заряджених частинок настільки мала, що результуючий об'ємний заряд практично не впливає на зовнішнє електричне поле від електродів (рис. 7.1 г-е).

Чотирнадцять рисунків групи (а) являють собою розподіл густини частинок плазми в порядку розташування компонент вектора $\mathbf{n} = \left[n_{\mathrm{N}_4^+},\ \ n_{\mathrm{N}_2^+},\ \ldots,\ \ n_e \right]^T$ для моменту часу $2{,}500677 \cdot 10^{-5}$ с. Кількісні значення розподілів параметрів наведено в таблиці 7.1.

Електрони, прискорюючись в електричному полі, іонізують молекули азоту та кисню поблизу правого краю відкритого електрода, формуючи електронні лавини, а при попаданні на поверхню електрода поглинаються анодом. Коли напруженість електричного поля досягає величини порядку 10^7 В/м, у прианодному шарі відбувається значне зростання густини результуючого заряду ρ_c, утвореного позитивними іонами азоту та кисню (рис. 7.1 б). Перша стадія мікророзряду тривала $2{,}5007 \cdot 10^{-5}$ с

На другій стадії процесу відбувається лавинно-стримерний перехід, при якому електричне поле просторового заряду головки лавини досягає зовнішнього поля. У цьому випадку потенціал від об'ємного заряду $\varphi_{\rho,\sigma}$ досягає величини прикладеної напруги φ_{el}, що призводить до формування катодоспрямованого стримера.

Надалі повітря іонізується завдяки сильному власному полю стримерної голівки (рис. 7.2 і 7.3), що призводить до розвитку стримера ($t = 2{,}500850 \cdot 10^{-5}$ с і $t = 2{,}504733 \cdot 10^{-5}$ с). Катодоспрямований стример починає поширюватися від анода та рухається над поверхнею діелектрика. Усередині каналу стримера густина результуючого заряду близька до нуля й істотна лише на поверхні, особливо в голівці стримера (рис. 7.2 б і 7.3 б). У результаті напруженість усередині стримерного каналу значно нижча, ніж поза стримером (рис. 7.2 ж і 7.3 ж), що якісно узгоджується з наявними фізичними уявленнями.

На рис. 7.2 ж видно як потенціал об'ємного та поверхневого зарядів $\varphi_{\rho,\sigma}$ спотворює розподіл прикладеного потенціалу (рис. 7.2 д). За результатами чисельного моделювання розраховано радіус стримерного каналу $10^{-4} \div 10^{-3}$ м, густина частинок у ньому $10^{19} \div 10^{20}$ м$^{-3}$, ступінь іонізації повітря $10^{-6} \div 10^{-5}$. Швидкість росту катодоспрямованого стримера порядку 10^{6} м/с, що задовільно узгоджується з наявними експериментальними даними [44, 45]. Тривалість другої стадії відповідає часу зародження та поширення стримера, і приблизно дорівнює $4{,}3 \cdot 10^{-8}$ с.

При розвитку стримера поверхня діелектрика заряджається, оскільки об'ємний заряд, що утворюється, при русі в електричному полі зустрічає перешкоду у вигляді поверхні діелектрика та осідає на ній. Адсорбований заряд спотворює поле розрядного проміжку. У результаті чого напруженість електричного поля в повітрі поблизу електродів слабшає (рис. 7.3 ж), що призводить до згасання розряду. Позитивний заряд на поверхні діелектрика забезпечують в основному іони азоту N_4^+ та кисню O_4^+. Розподіл поверхневого заряду на діелектрику (рис. 7.4) наведено для різних моментів часу (1 – $2{,}500772 \cdot 10^{-5}$ с, 2 – $2{,}500850 \cdot 10^{-5}$ с, 3 – $2{,}501045 \cdot 10^{-5}$ с, 4 – $2{,}502314 \cdot 10^{-5}$ с, 5 – $2{,}504733 \cdot 10^{-5}$ с, 6 – $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ с).

На третій стадії основну роль відіграють процеси дифузії та дрейфу заряджених частинок до діелектричної поверхні та відкритого електрода. Тривалість останньої стадії мікророзряду порядку $2{,}495 \cdot 10^{-5}$ с.

Отримано розподіл електричного потенціалу по поверхні діелектрика при максимальній напрузі, яку прикладено до електродів, 7 і 12 кВ (рис. 7.5). Суцільною лінією (▬) позначено результати цієї роботи, а експериментальні дані ○ – [193], □ – [197]. Різке падіння напруги на діелектрику обумовлено довжиною поширення стримера і, як наслідок, падінням густини поверхневого заряду. Так, при максимальних значеннях прикладеної напруги 7 і 12 кВ довжина поширення стримера складає L = 0,01 м и L = 0,015 м, відповідно. Результати чисельного моделювання показують задовільний збіг з експериментальними даними.

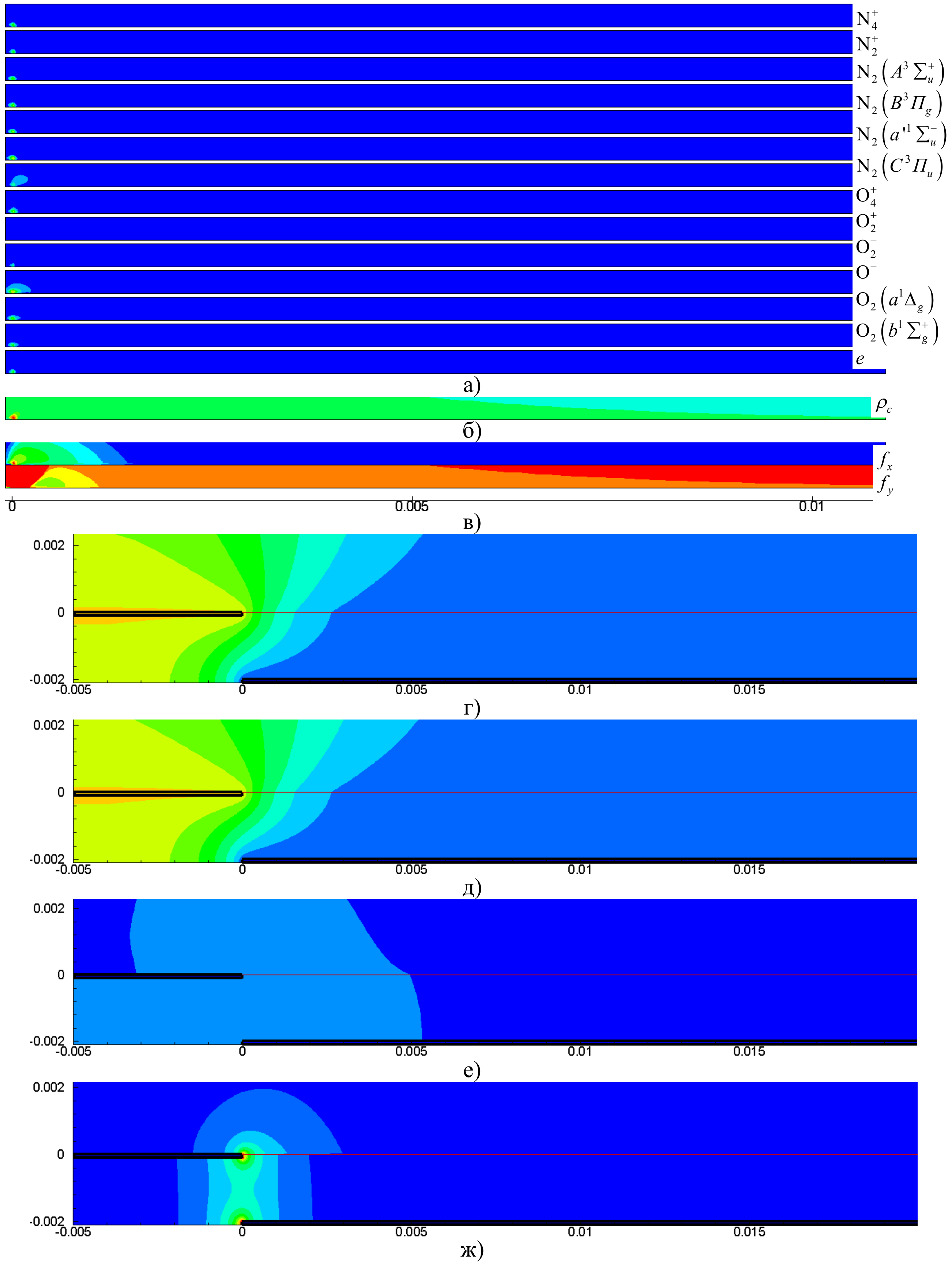


Рисунок 7.1 – Розподіл густини хімічних елементів плазми (а), об'ємного заряду (б), компонент сили Лоренца (в), сумарного (г) та прикладеного (д) електричного потенціалів, потенціалу від об'ємного і поверхневого зарядів (е), а також модуля напруженості електричного поля (ж)

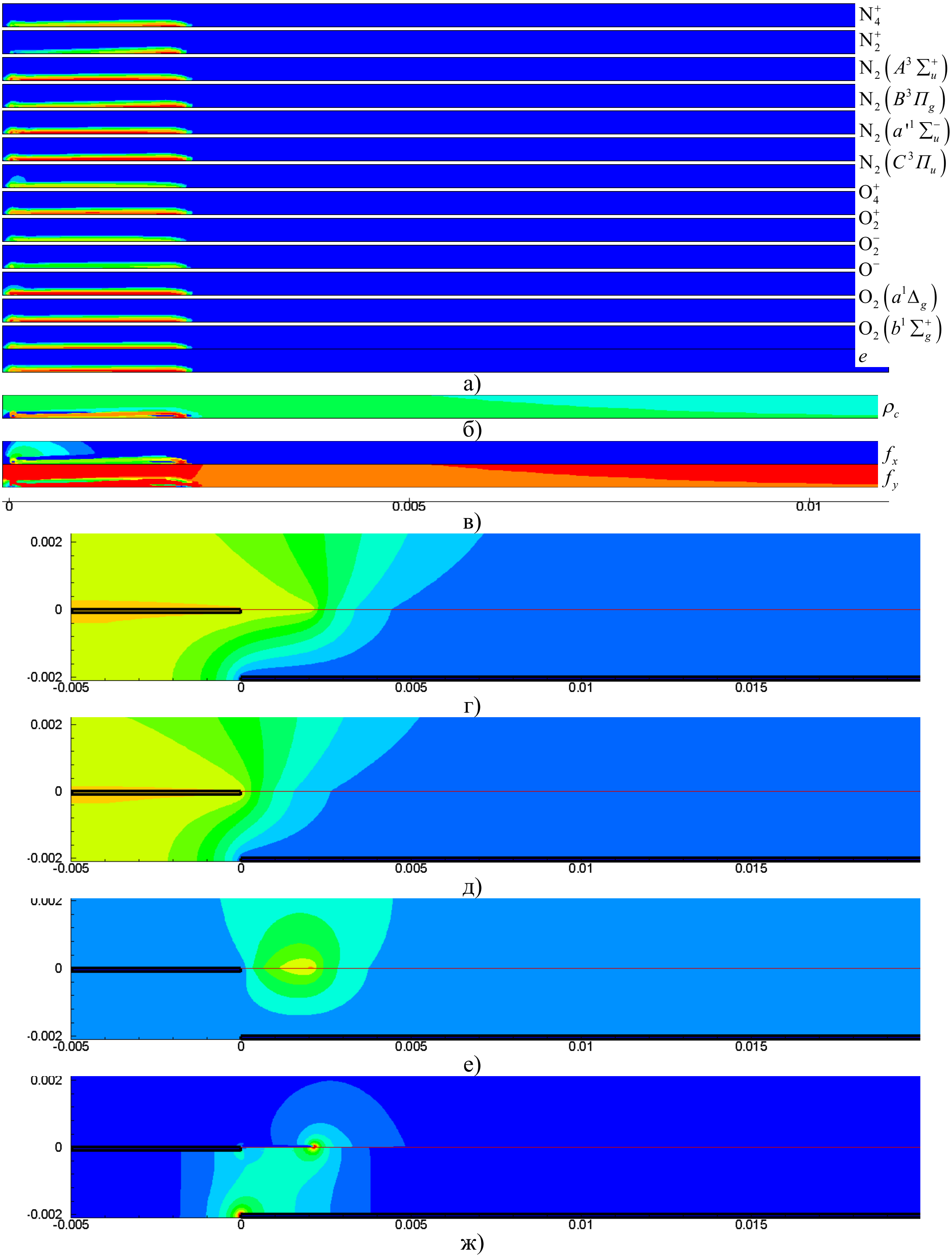


Рисунок 7.2 – Розподіл густини хімічних елементів плазми (а), об'ємного заряду (б), компонент сили Лоренца (в), сумарного (г) та прикладеного (д) електричного потенціалів, потенціалу від об'ємного і поверхневого зарядів (е), а також модуля напруженості електричного поля (ж)

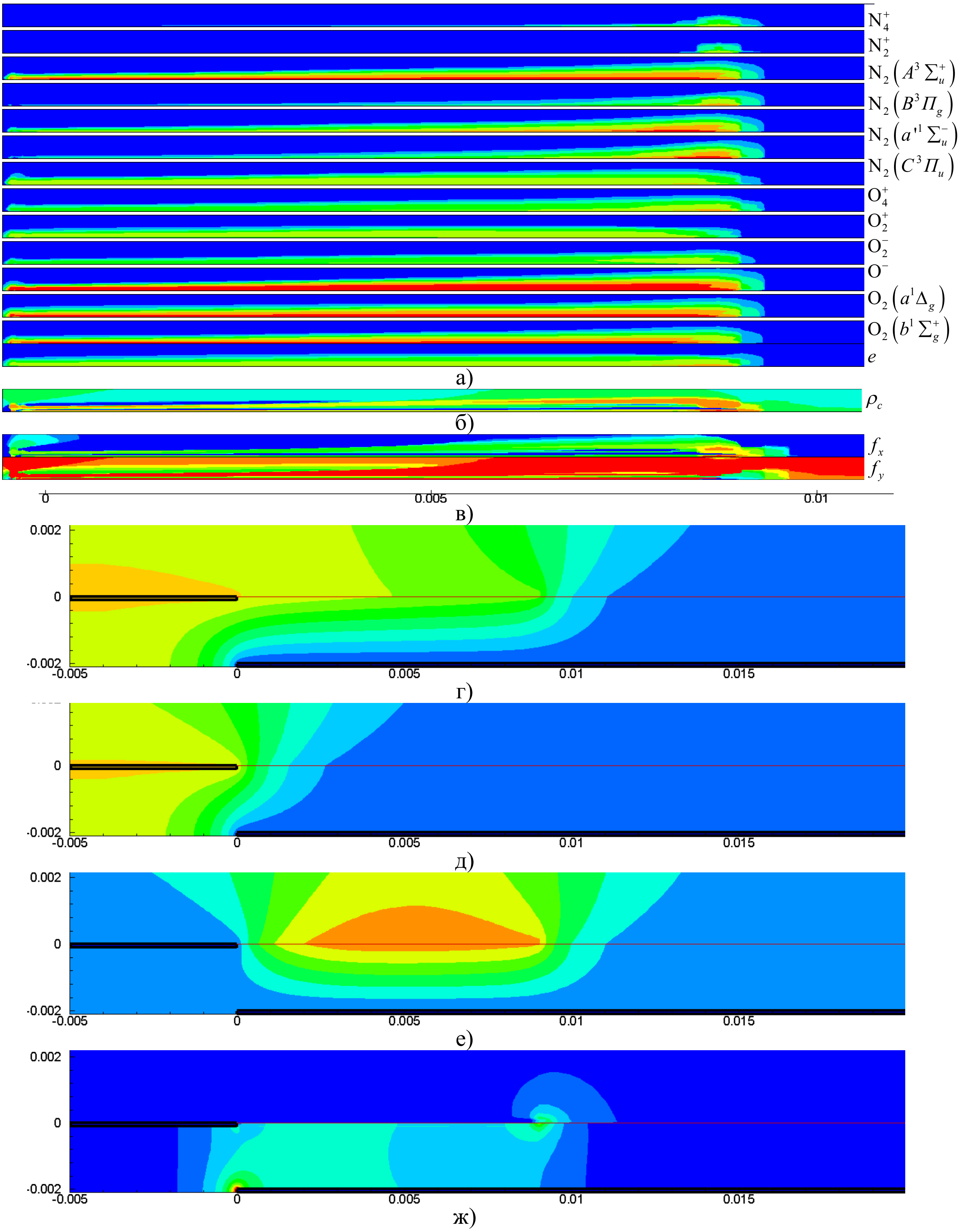


Рисунок 7.3 – Розподіл густини хімічних елементів плазми (а), об'ємного заряду (б), компонент сили Лоренца (в), сумарного (г) та прикладеного (д) електричного потенціалів, потенціалу від об'ємного і поверхневого зарядів (е), а також модуля напруженості електричного поля (ж)

Таблиця 7.1 – Кількісні значення розподілу параметрів

$n, \dfrac{1}{\text{м}^3}$	$\rho, \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$	$f_x, \dfrac{\text{Н}}{\text{м}^3}$	$f_y, \dfrac{\text{Н}}{\text{м}^3}$	$\dfrac{\varphi}{\varphi^{\max}}, \dfrac{\varphi_{el}}{\varphi^{\max}}$	$\dfrac{\varphi_{\rho,\sigma}}{\varphi^{\max}}$	$\lvert E \rvert, \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$
1e+21 1e+20 1e+19 1e+18 1e+17 1e+16	1 0,05 0,01 0,005 0 -0,005 -0,01	1e+7 1e+6 1e+5 1e+4 1e+3 1e+2 1e+1 0	0 -1e+1 -1e+2 -1e+3 -1e+4 -1e+5 -1e+6 -1e+7	0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0	,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1	1e+7 9e+6 8e+6 7e+6 6e+6 5e+6 4e+6 3e+6 2e+6 1e+6

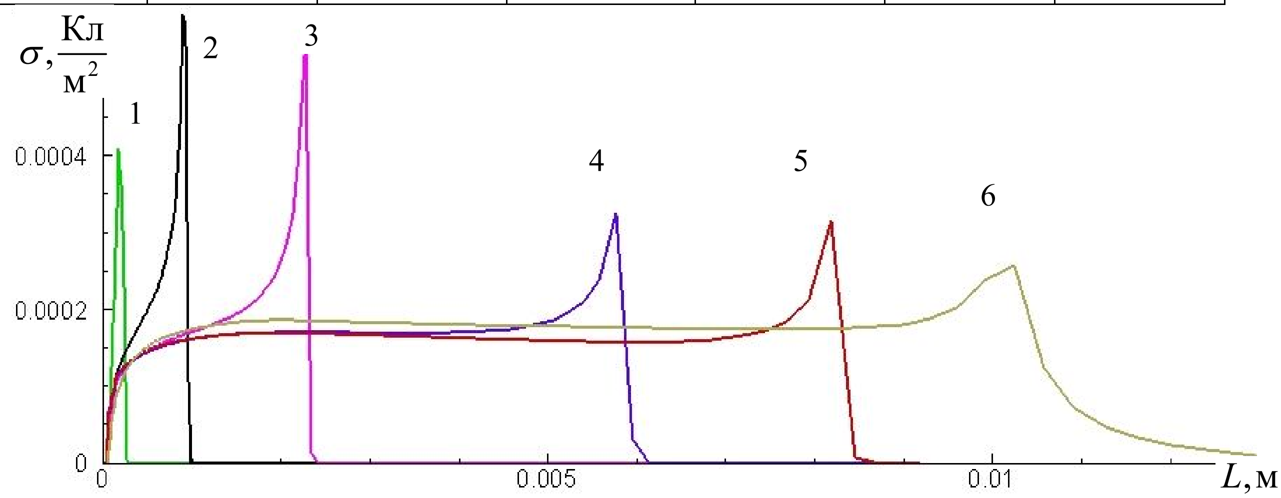


Рисунок 7.4 – Розподіл поверхневого заряду на діелектрику для різних моментів часу (1 – $2{,}500772 \cdot 10^{-5}$ с, 2 – $2{,}500850 \cdot 10^{-5}$ с, 3 – $2{,}501045 \cdot 10^{-5}$ с, 4 – $2{,}502314 \cdot 10^{-5}$ с, 5 – $2{,}504733 \cdot 10^{-5}$ с, 6 – $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ с).

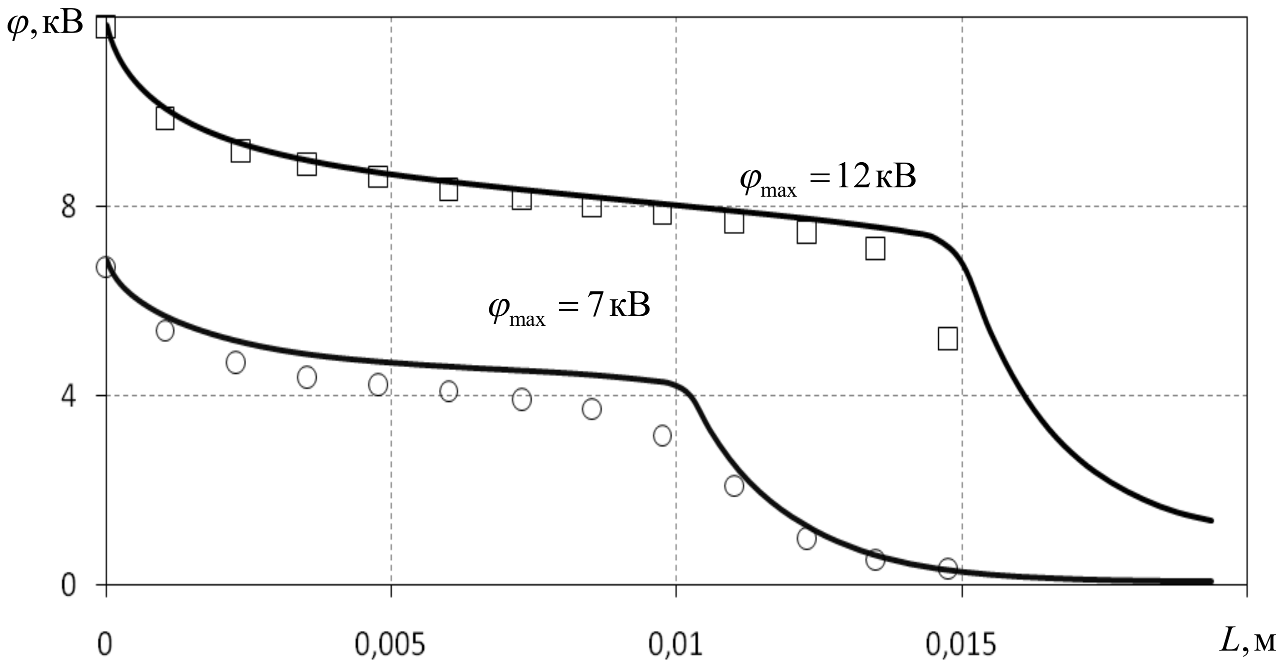


Рисунок 7.5 – Розподіл електричного потенціалу по поверхні діелектрика (▬ – дана робота, ○ – експеримент [193], □ – експеримент [197])

7.2 Моделювання низькотемпературної плазми діелектричного бар'єрного розряду

В даному пункті розглядається поведінка нерівноважної низькотемпературної плазми діелектричного бар'єрного розряду, яка виникає при роботі плазмового актуатора на плоскій пластині. Однією з основних задач є дослідження внеску заряджених частинок плазми в компоненти сили Лоренца залежно від часу.

Плазмовий актуатор являє собою два мідних електроди розділених діелектриком товщиною d = 2,1 мм. У якості діелектрика виступає керамічний матеріал Macor з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon_r = 6$. Довжина відкритого та ізольованого електродів становить 5 мм і 25 мм, відповідно. До верхнього електрода прикладалася напруга амплітудою $\varphi_{\max} = 5$ кВ і частотою 5 кГц. Розглядається кілька періодів коливання прикладеної напруги.

Для адекватного опису зародження, розвитку та проходження стримера використовувався змінний крок інтегрування за часом ($\Delta t = 10^{-7} \div 10^{-12}$ с). Початок координат збігається з правим краєм відкритого електрода. Багатоблочна сітка, що описує геометрію розрахункової області поблизу плазмового актуатора, складається з 5 блоків: один для повітряної області ($1 \cdot 10^4$ вузлів), а чотири для області діелектрика (по $1 \cdot 10^4$ вузлів). Мінімальний крок сітки поблизу правого краю відкритого електрода $1 \cdot 10^{-5}$ м.

Діелектричний бар'єрний розряд має складну просторово-часову структуру і розвивається як розряд дифузійного (таунсендовського) або іскрового (стримерного) типу в залежності від полярності прикладеної напруги.

Миттєві картини розподілу густини хімічних елементів плазми діелектричного бар'єрного розряду в просторі для трьох моментів часу одного циклу коливання прикладеної напруги наведено на рис. 7.6, 7.10, 7.14. Дані моменти часу відповідають фазі розвитку катодоспрямованого стримера ($t = 8.27 \cdot 10^{-4}$ с), а також максимальним значенням х-компоненти сили Лоренца в ході одного циклу коливання прикладеної напруги ($t = 8.42 \cdot 10^{-4}$ с і $t = 9.43 \cdot 10^{-4}$ с).

Тут також наведено густина результуючого об'ємного заряду ρ та компоненти сили Лоренца. Крім того на рис. 7.7, 7.8, 7.9, 7.11, 7.12, 7.13, 7.15, 7.16, 7.17 наведено розподіли сумарного, прикладеного електричного потенціалів, а також розподіли потенціалу від об'ємного та поверхневого зарядів і модуля напруженості електричного поля. Кількісні значення розподілів параметрів наведено в таблиці 7.2.

На кожному з напівперіодів коливання прикладеної напруги відбувається гасіння плазми. Для підтримки ДБР необхідно постійна зміна в часі прикладеної напруги. В процесі роботи, плазма в розряді з'являється над поверхнею діелектрика кожні півциклу прикладеної змінної напруги (рис. 7.6, 7.14).

Коли відкритий електрод стає позитивним (виступає в ролі анода), то такий напівперіод має назву «зворотний хід». У цьому випадку електронна лавина починається з діелектричної поверхні над ізольованим електродом і рухається в напрямку до відкритого електрода. Це призводить до зародження катодоспрямованого стримера поблизу правого краю відкритого електрода.

На стадії формування та розвитку катодоспрямованого стримера (рис. 7.6) відбувається сильна іонізація повітря з формуванням високої густини заряджених частинок порядку 10^{20} 1/м^3 у стримерному каналі. При цьому сила Лоренца, що виникає, зосереджена в примежовому шарі товщиною менше 1 мм. Заряджені частинки плазми створюють власний електричний потенціал, який можна порівняти за значенням з прикладеною напругою (рис. 7.7, 7.8). Осадження позитивних іонів на поверхню діелектрика призводить до накопичення поверхневого заряду (рис. 7.9 б).

Плазма розвивається над поверхнею діелектрика з нерівномірною швидкістю. Коли формується (запалюється) ДБР, раптово з'являється відносно щільна плазма над поверхнею діелектрика. Після цієї події, яка називається «розпалюванням» або «формуванням» розряду, густина плазми дещо зменшується, після чого розряд починає розширюватися над ізольованим електродом (стадія розвитку).

Перерозподіл позитивних іонів плазми в області відбувається на стадії гасіння стримера. Позитивні іони азоту та негативні іони кисню практично повністю рекомбінують. Залишаються лише в значній мірі позитивні іони кисню O_4^+, які й вносять основний внесок у силу Лоренца. При цьому позитивні значення x-компоненти сили Лоренца спостерігаються в значно більшій області, ніж на стадії формування та розвитку катодоспрямованого стримера. У цьому випадку товщина активної зони становить порядку 3 мм.

Плазма відновлюється під дією електричного поля кожен раз, коли поле змінює свій напрямок. Для підтримки ДБР необхідна змінна напруга та його поведінка визначається в першу чергу накопиченням заряду на поверхні над ізольованим електродом.

Коли напруга, яку прикладено до відкритого електрода, має негативне значення (відкритий електрод виступає в ролі катода), то такий напівперіод має назву «прямий хід». У цьому випадку, коли різниця потенціалів досить велика, відкритий електрод під дією іон-електронної емісії випускає електрони і виникаюча електронна лавина рухається в напрямку до ізольованого електрода.

У результаті її проходження та прилипання електронів до атомів та молекул кисню формуються негативні іони кисню O_2^- і O^-. Вони надають основний внесок у формування позитивно спрямованої x-компоненти сили Лоренца. Позитивні іони групуються в прикатодній області відкритого електрода. Їх взаємодія з відкритим електродом призводить до рекомбінації. У результаті негативна складова x-компоненти сили Лоренца має невелике значення та зосереджена в області біля правого краю відкритого електрода.

Тому що ізольований електрод покритий діелектриком, то електрони та негативні іони накопичуються на поверхні діелектрика та протидіють зовнішньому електричному полю. У цьому випадку заряд замикає себе на поверхні, поки величина прикладеної напруги безперервно зростає. Після зниження напруженості електричного поля нижче межі іонізації електронні лавини перестають утворюватися. Якщо величина прикладеної напруги не збільшується, щоб підтримати достатню різницю потенціалів між відкритим електродом і діелектричною поверхнею, то розряд згасає.

Фази запалювання ДБР на прямому та зворотному ході близькі між собою та характеризуються великою густиною плазми в області відкритого електрода. Однак структура плазми для двох фаз розширення суттєво відрізняється. Під час прямого ходу, коли відкритий електрод є більш негативним, ніж поверхня діелектрика, то він виступає в ролі електронного емітера. Тому висока густина плазми спостерігається поблизу краю відкритого електрода.

Така можливість, однак, відсутня протягом фази розширення при зворотному ході, коли поверхня діелектрика є більш негативною, ніж відкритий електрод, накопичені електрони в результаті прямого ходу відриваються від діелектричної поверхні та призводять до утворення розряду. Тому форма плазмової області для прямого та зворотного ходу подібна, хоча і відрізняється.

Негативні іони та електрони, осідаючи на поверхню діелектрика, призводять до нейтралізації позитивного заряду та накопиченню негативного (рис. 7.17 б). Тому що стример поширюється дещо далі над поверхнею ізольованого електрода, ніж електронна лавина, то і позитивний заряд зберігається в даній області.

Інтегральні значення компонентів сили Лоренца по області плазми в залежності від часу для одного періоду коливання прикладеної напруги (рис. 7.18) наведено на рис. 7.19, 7.20.

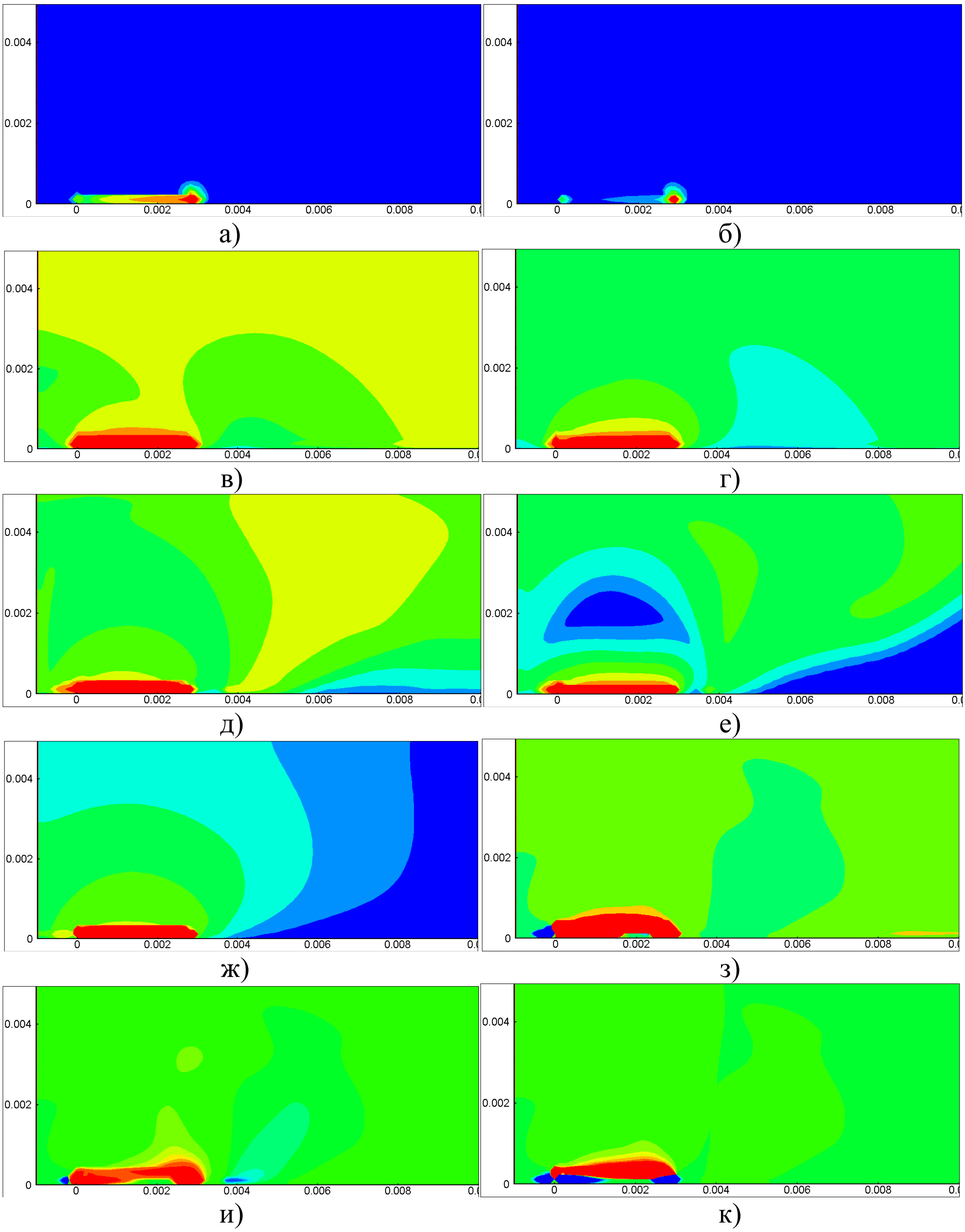
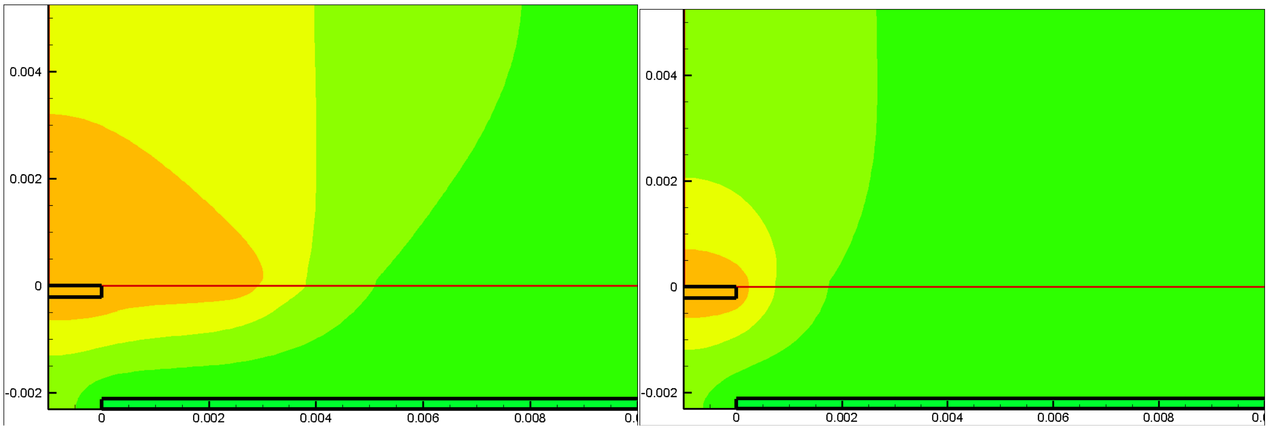
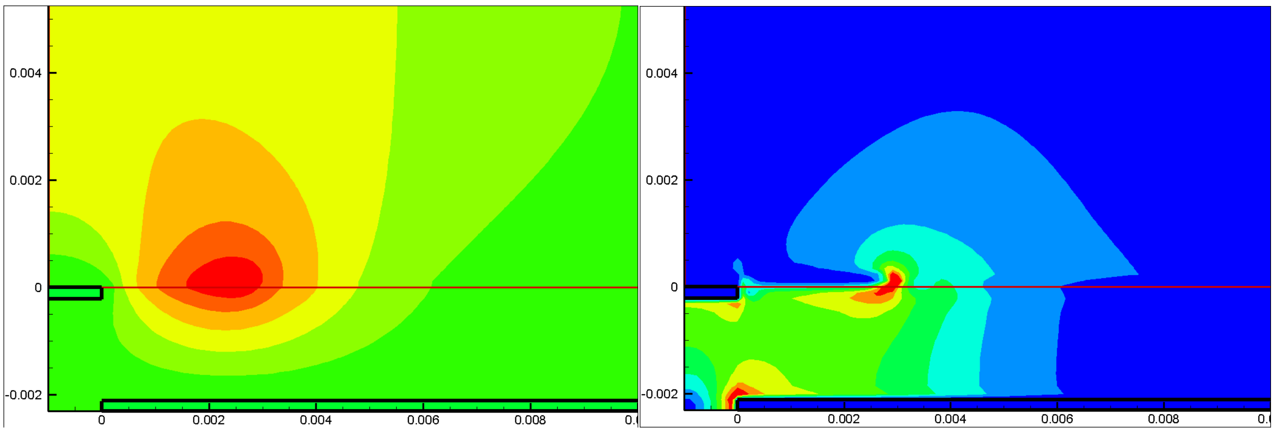


Рисунок 7.6 – Розподіл густини хімічних елементів плазми (а – N_4^+, б – N_2^+, в – O_4^+, г – O_2^+, д – O_2^-, е – O^-, ж – e), об'ємного заряду (з) і компонент сили Лоренца (и – F_x, к – F_y) в момент часу $t = 8{,}27 \cdot 10^{-4}$ с



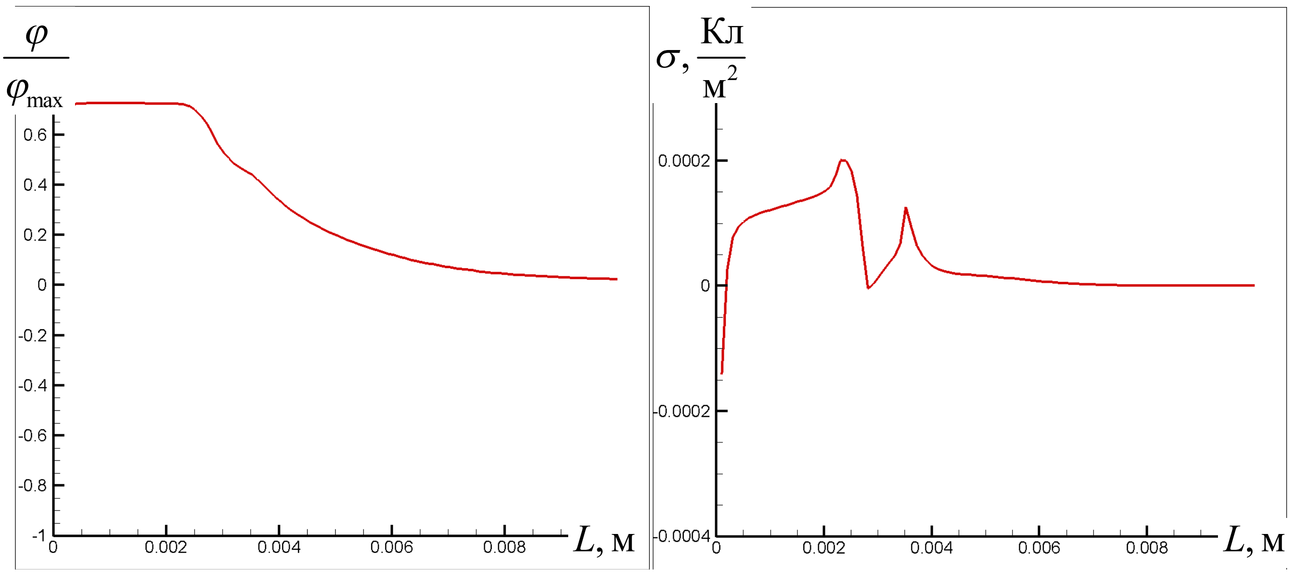
а) б)

Рисунок 7.7 – Розподіл сумарного (а) і прикладеного (б) електричного потенціалу в момент часу t = 8,27·10^{-4} с



а) б)

Рисунок 7.8 – Розподіл потенціалу від об'ємного і поверхневого зарядів (а), і модуля напруженості електричного поля (б) в момент часу t = 8,27·10^{-4} с



а) б)

Рисунок 7.9 – Розподіл електричного потенціалу (а) і заряду (б) на поверхні діелектрика в момент часу t = 8,27·10^{-4} с

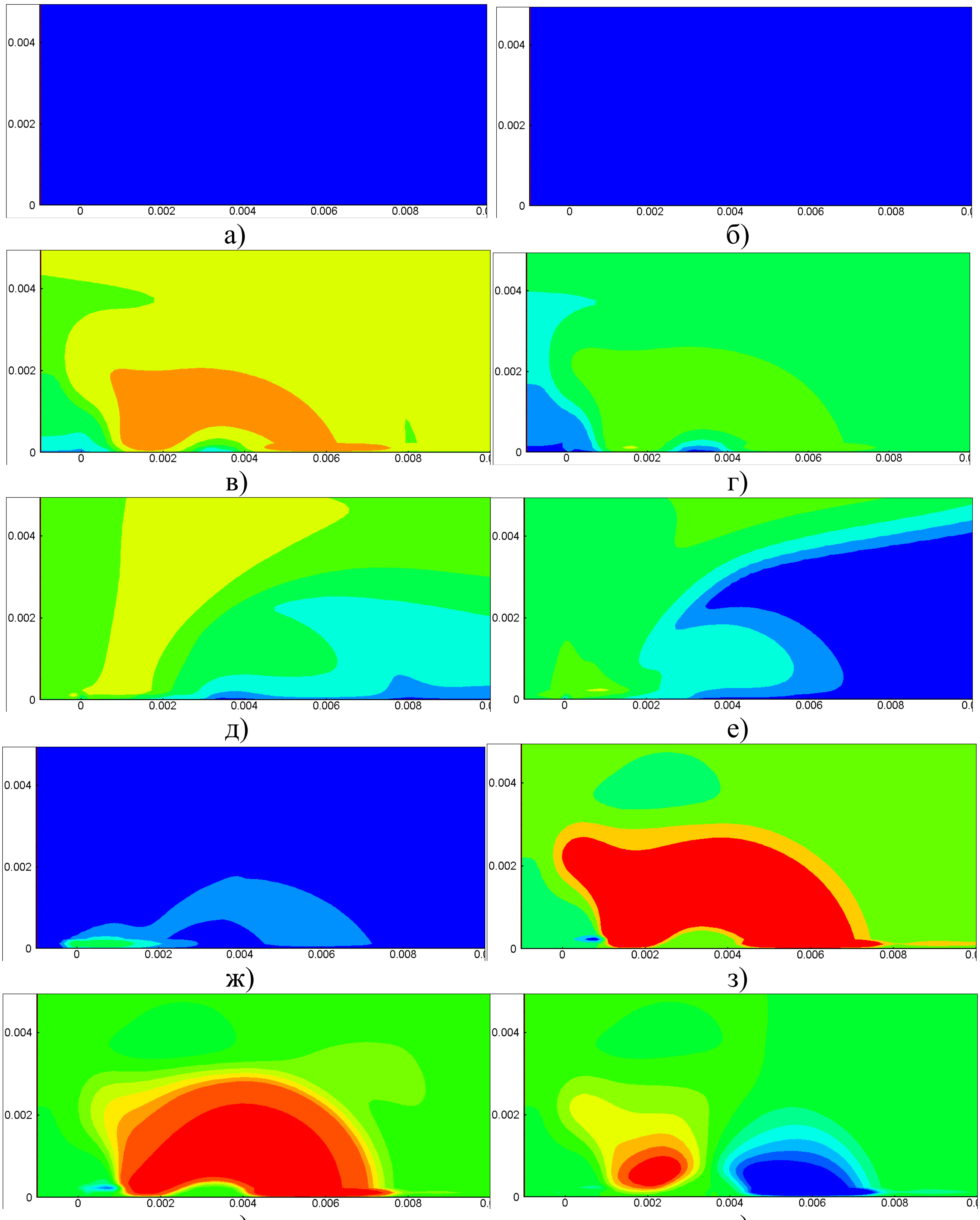
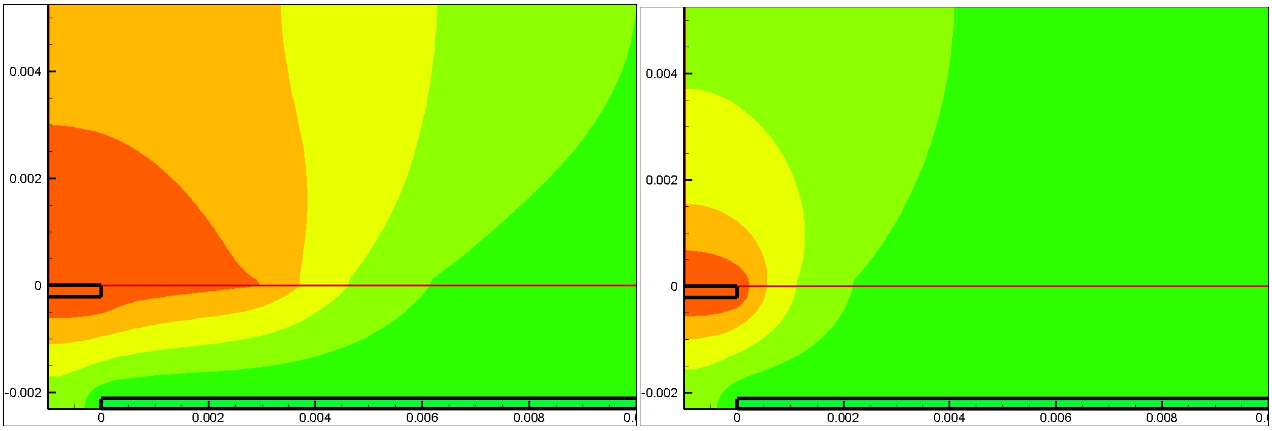
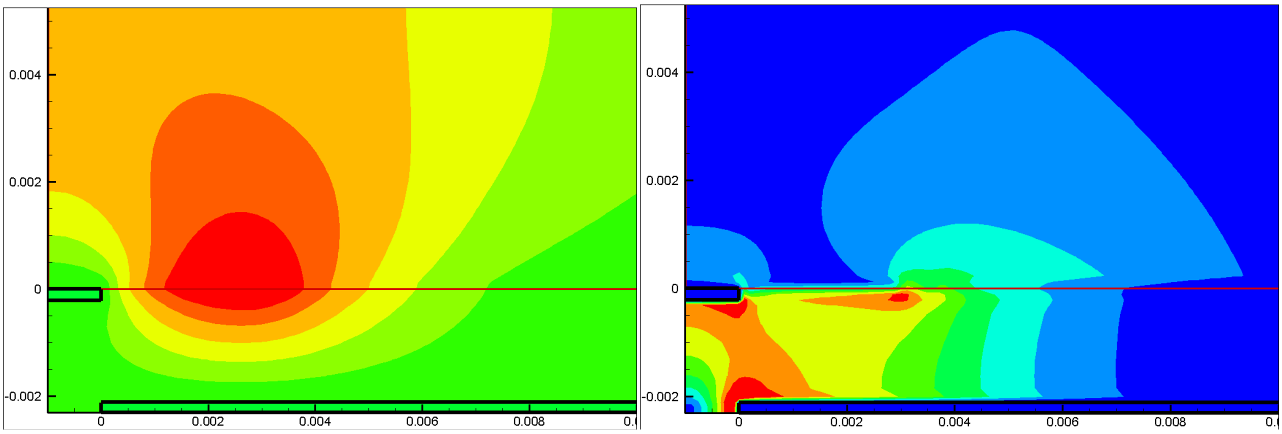


Рисунок 7.10 – Розподіл густини хімічних елементів плазми (а – N_4^+, б – N_2^+, в – O_4^+, г – O_2^+, д – O_2^-, е – O^-, ж – e), об'ємного заряду (з) і компонент сили Лоренца (и – F_x, к – F_y) в момент часу $t = 8{,}42 \cdot 10^{-4}$ с



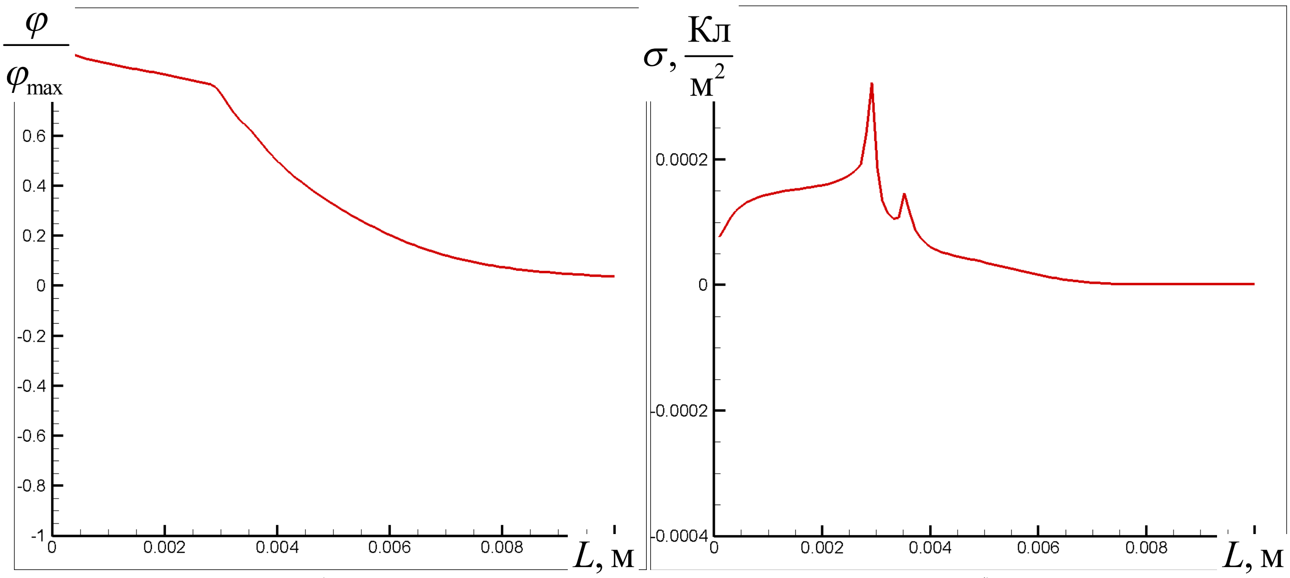
а) б)

Рисунок 7.11 – Розподіл сумарного (а) і прикладеного (б) електричного потенціалу в момент часу t = 8,42·10^{-4} с



а) б)

Рисунок 7.12 – Розподіл потенціалу від об'ємного і поверхневого зарядів (а), і модуля напруженості електричного поля (б) в момент часу t = 8,42·10^{-4} с



а) б)

Рисунок 7.13 – Розподіл електричного потенціалу (а) і заряду (б) на поверхні діелектрика в момент часу t = 8,42·10^{-4} с

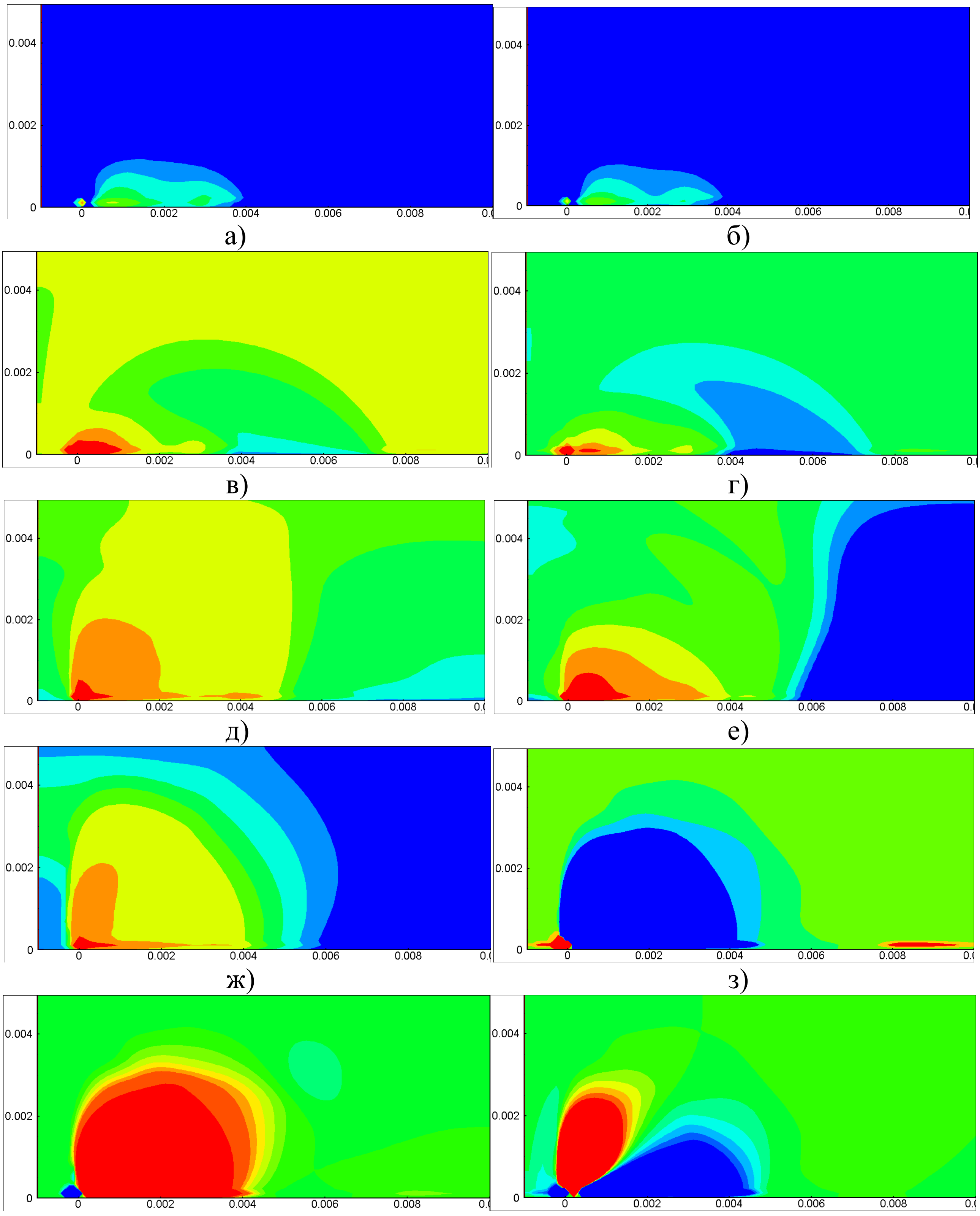
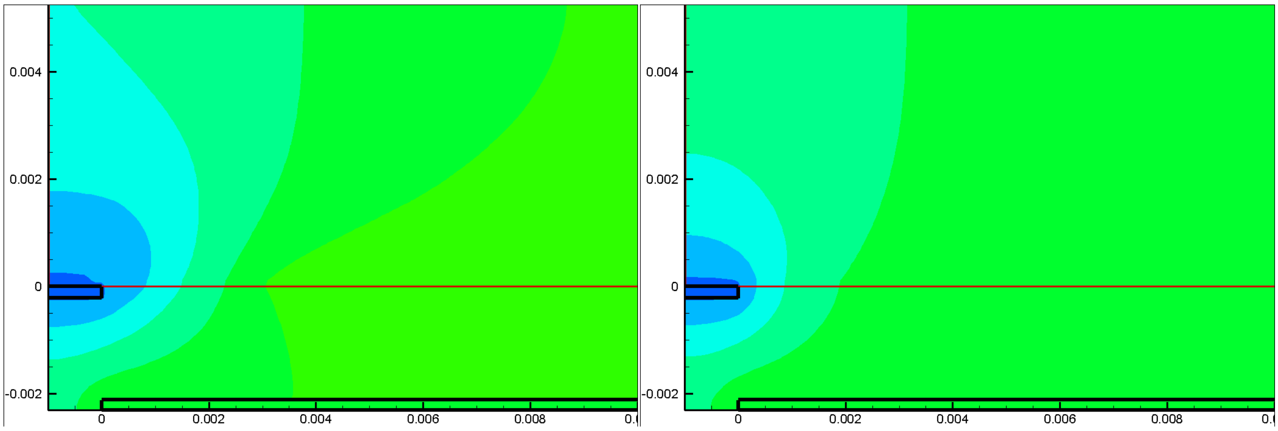
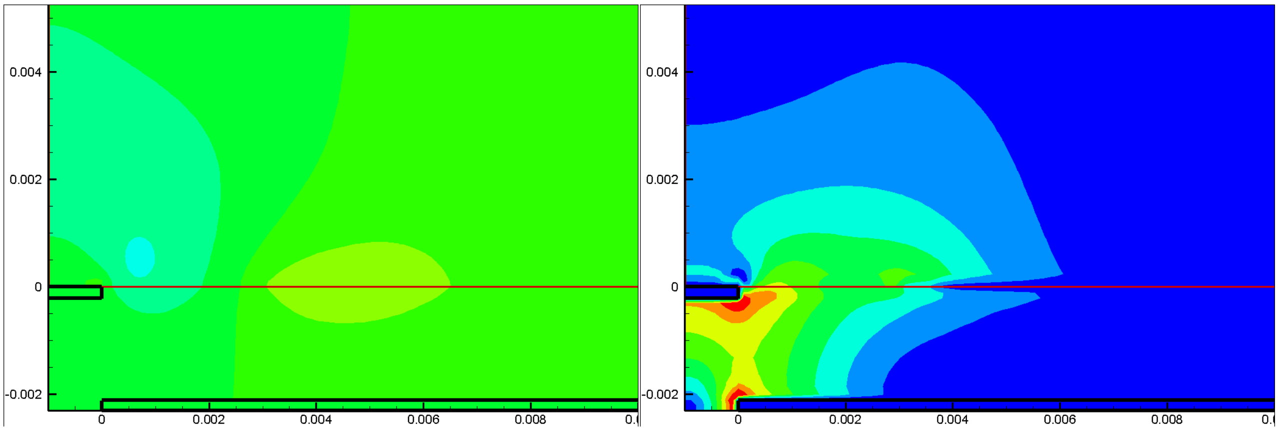


Рисунок 7.14 – Розподіл густини хімічних елементів плазми (а – N_4^+, б – N_2^+, в – O_4^+, г – O_2^+, д – O_2^-, е – O^-, ж – e), об'ємного заряду (з) і компонент сили Лоренца (и – F_x, к – F_y) в момент часу $t = 9{,}43 \cdot 10^{-4}$ с



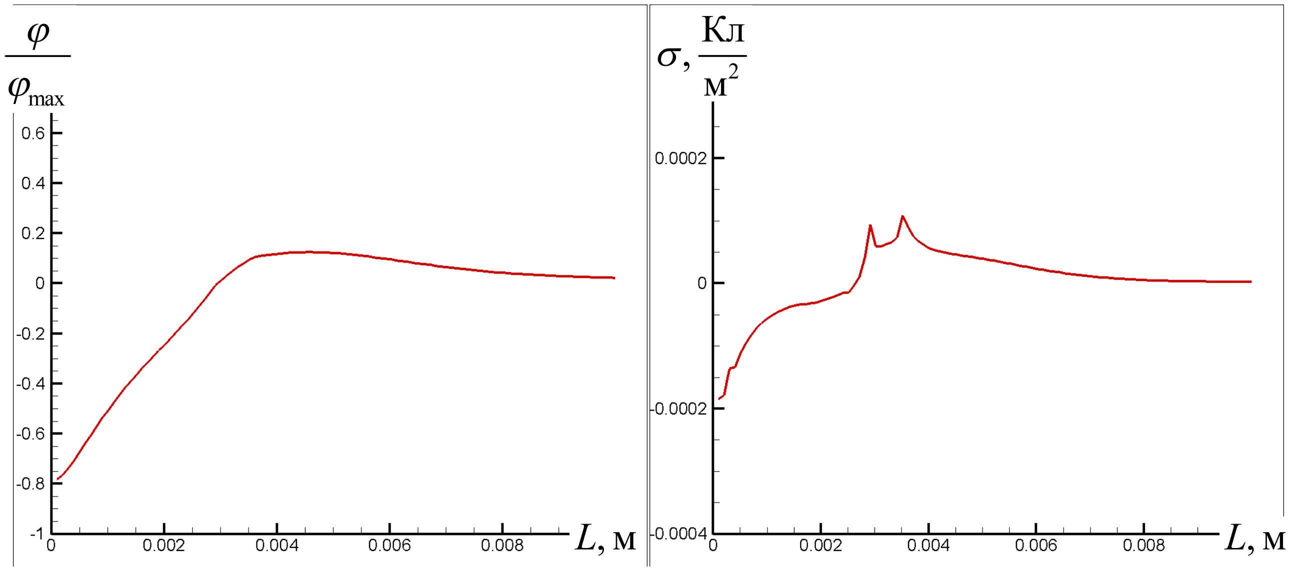
а) б)

Рисунок 7.15 – Розподіл сумарного (а) і прикладеного (б) електричного потенціалу в момент часу t = 9,43·10^{-4} с



а) б)

Рисунок 7.16 – Розподіл потенціалу від об'ємного і поверхневого зарядів (а), і модуля напруженості електричного поля (б) в момент часу t = 9,43·10^{-4} с



а) б)

Рисунок 7.17 – Розподіл електричного потенціалу (а) і заряду (б) на поверхні діелектрика в момент часу t = 9,43·10^{-4} с

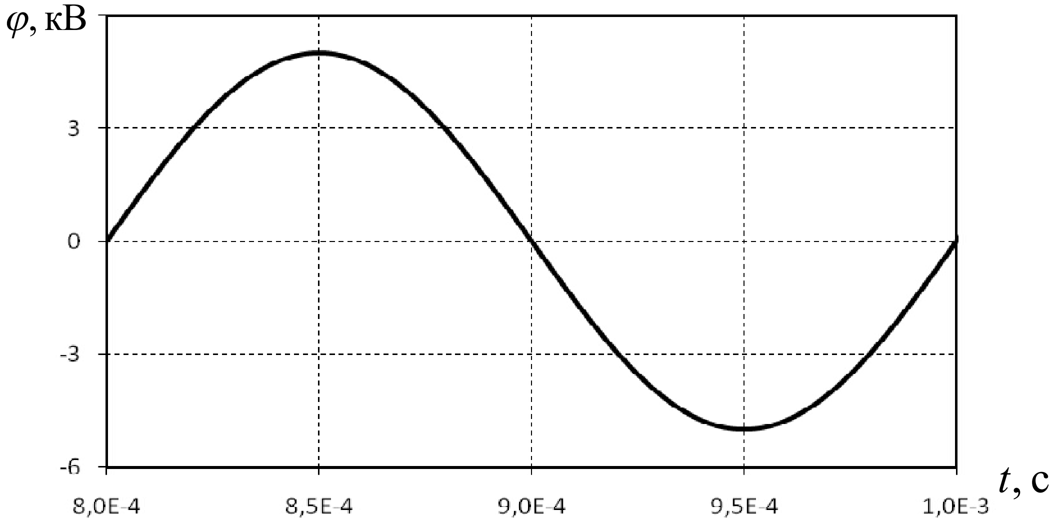


Рисунок 7.18 – Залежність амплітуди прикладеної напруги в часі за один період коливання прикладеної напруги

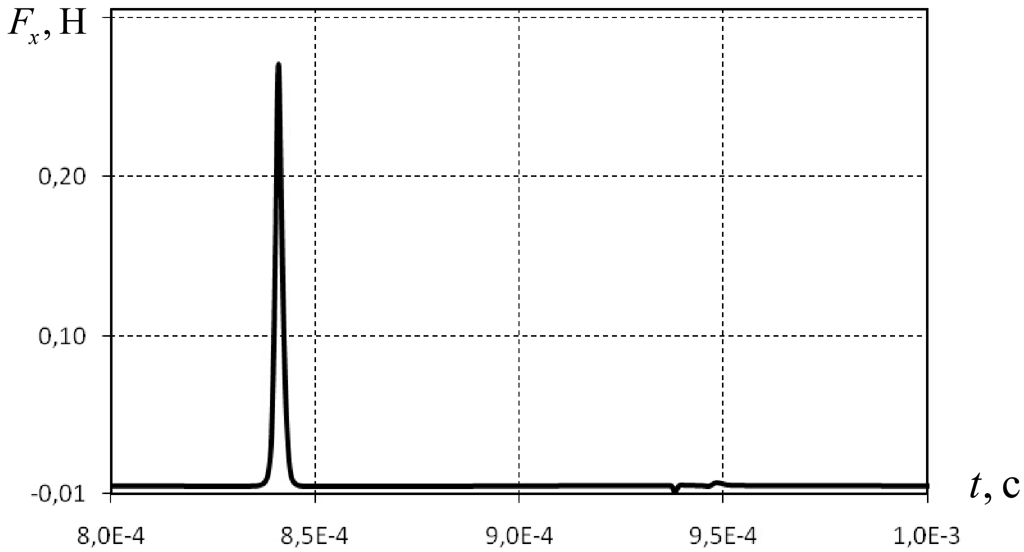


Рисунок 7.19 – Залежність x-компоненти сили Лоренца F_x в часі за один період коливання прикладеної напруги

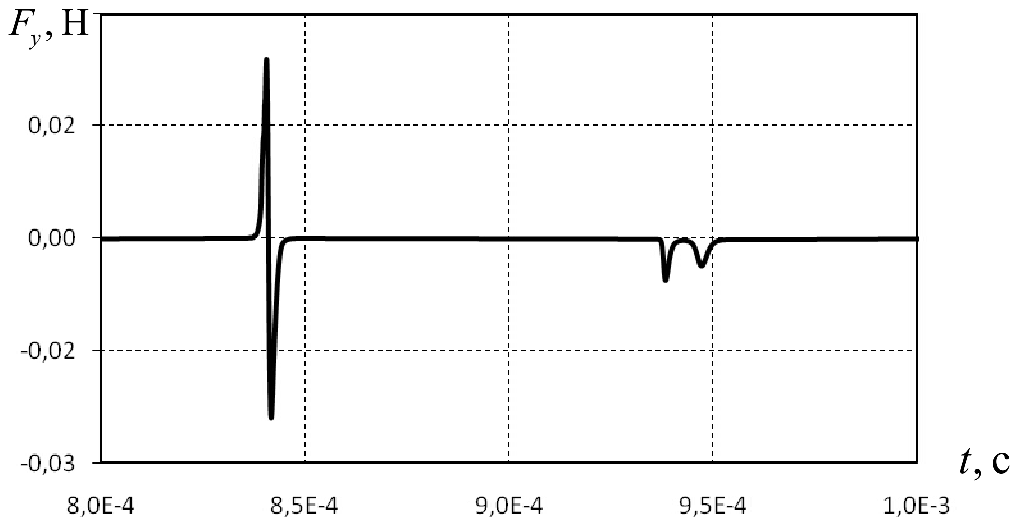


Рисунок 7.20 – Залежність y-компоненти сили Лоренца F_y в часі за один період коливання прикладеної напруги

Таблиця 7.2 – Кількісні значення розподілів параметрів

$n, 1/м^3$	ρ, Кл/м^3	F_x, Н	F_y, Н	$\varphi/\varphi_{\max}$, $\varphi_{el}/\varphi_{\max}$	$\lvert E \rvert$, В/м
1e+21 1e+20 1e+19 1e+18 1e+17 1e+16	1 0,05 0,01 0,005 0 -0,005 -0,01	1e-1 1e-2 1e-3 1e-4 1e-5 1e-6 1e-7 0	1e-2 1e-3 1e-4 1e-5 -1e-5 -1e-4 -1e-3 -1e-2	1,0 0,8 0,6 0,4 0,2 0 -0,2 -0,4 -0,6 -0,8 -1,0	1e+7 9e+6 8e+6 7e+6 6e+6 5e+6 4e+6 3e+6 2e+6 1e+6

Встановлено вплив заряджених частинок плазми на формування x-компоненти сили Лоренца в часі (рис. 7.21). Основний внесок у її формування на позитивному напівперіоді надають іони кисню O_4^+. Наявність кисню в атмосфері необхідна для утворення негативних іонів (O_2^-, O^-) за допомогою приєднання електронів до кисню. Негативні іони створюють імпульс у напрямку, протилежному дії позитивних іонів. Для негативного напівперіоду коливання прикладеної напруги основний внесок здійснюється за рахунок негативних іонів кисню, зокрема O^-. Кілька періодів коливання амплітуди прикладеної напруги, а також залежності компонент сили Лоренца від часу наведено на рис. 7.22, 7.23, 7.24.

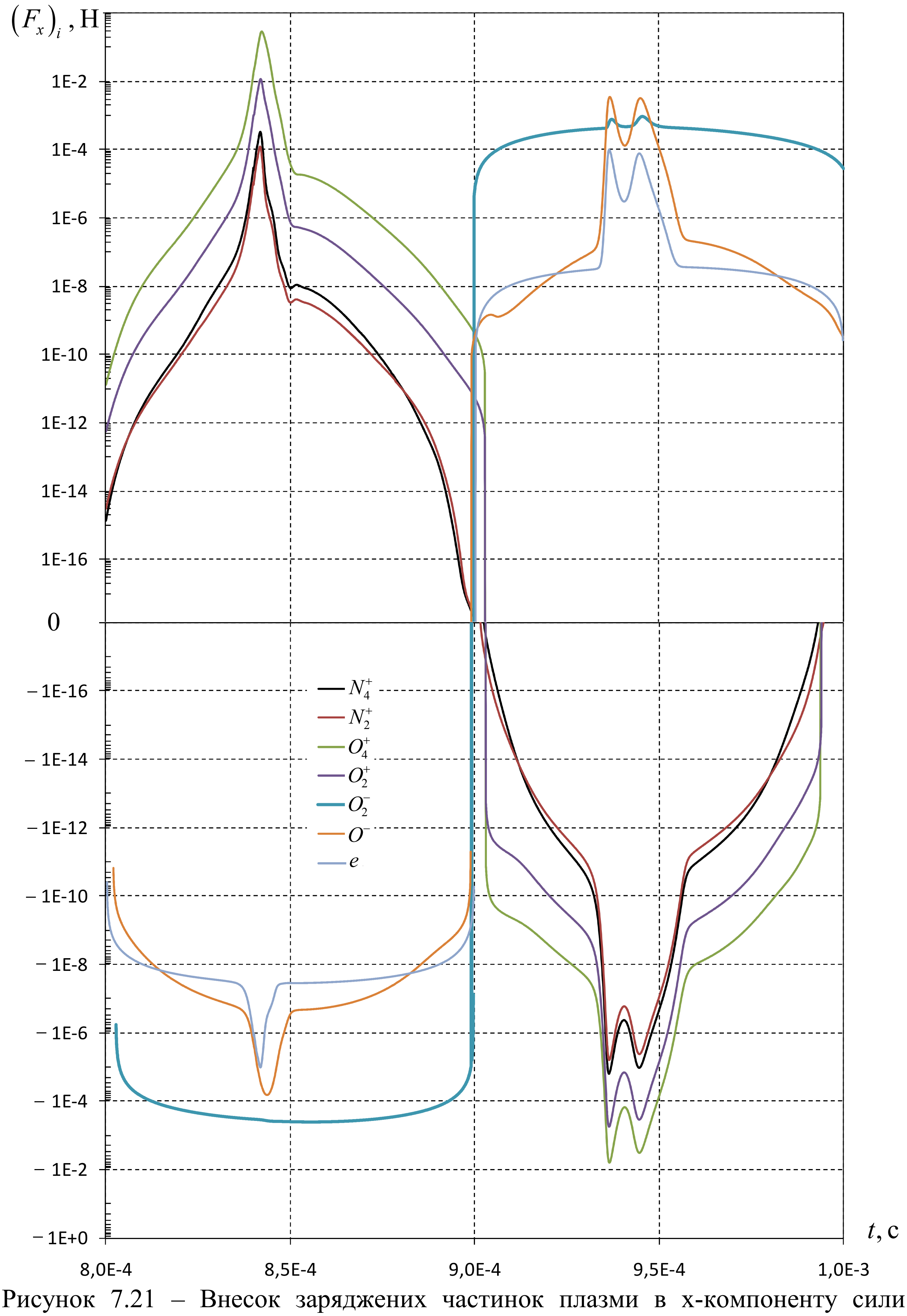


Рисунок 7.21 – Внесок заряджених частинок плазми в x-компоненту сили Лоренца F_x в залежності від часу

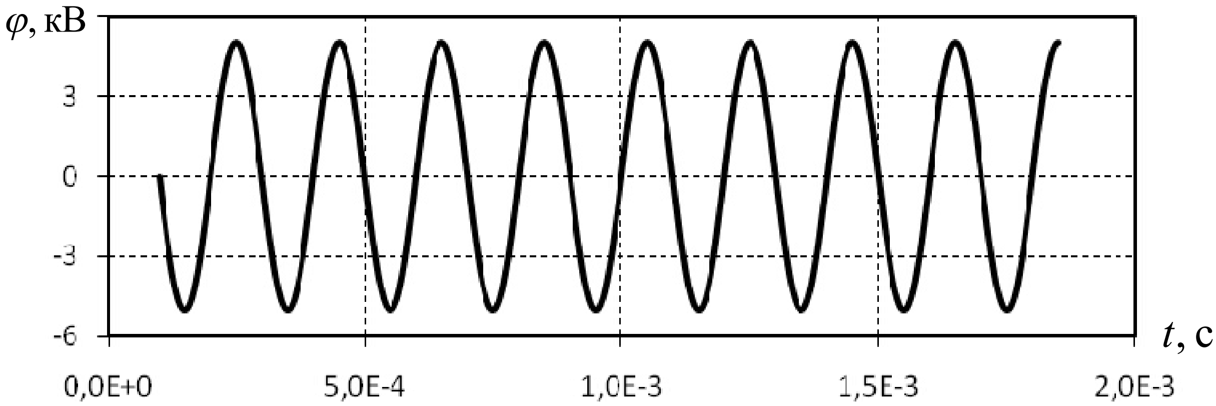


Рисунок 7.22 – Залежність амплітуди прикладеної напруги від часу

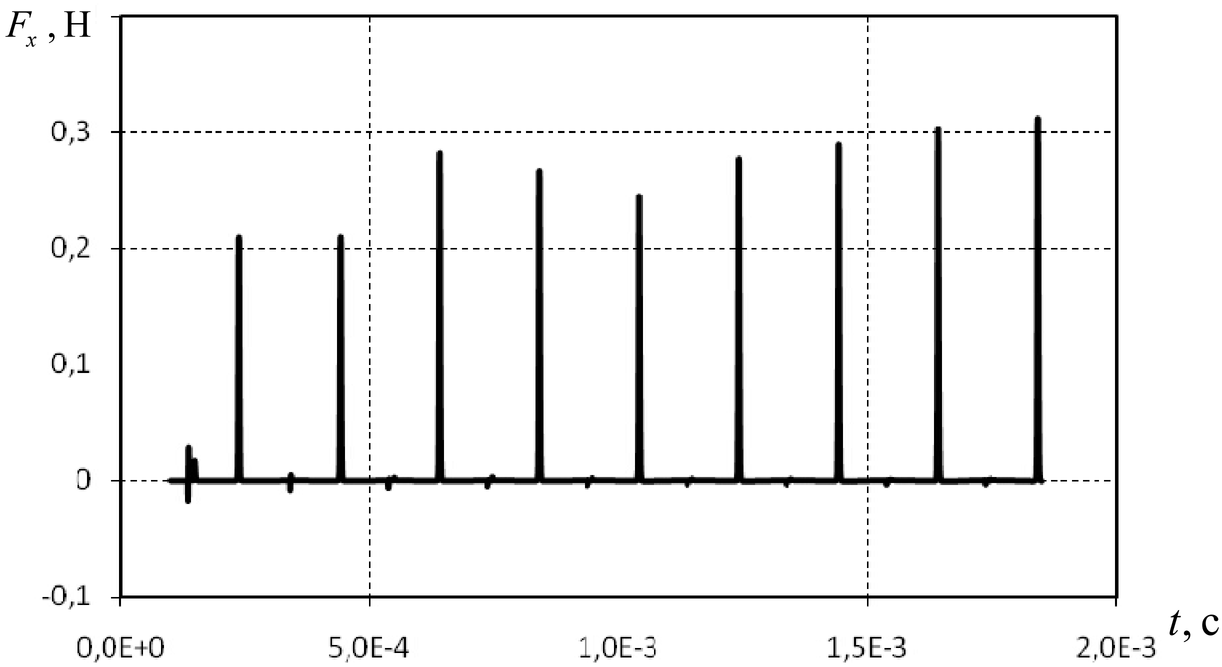


Рисунок 7.23 – Залежність x-компоненти сили Лоренца F_x від часу

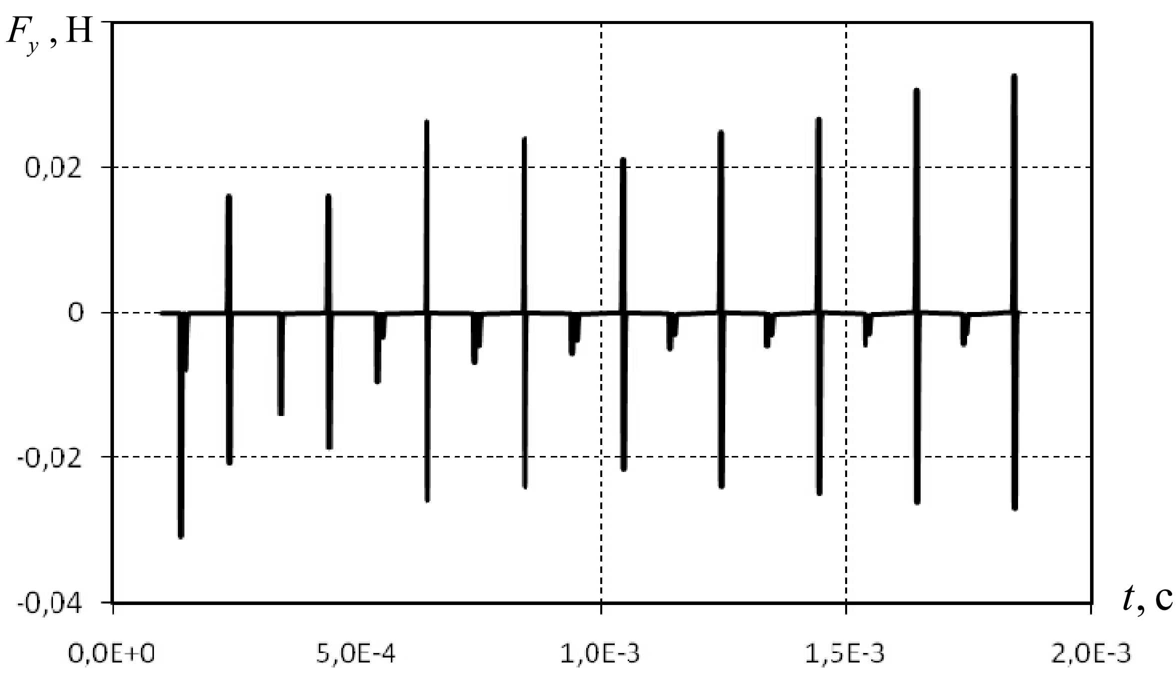


Рисунок 7.24 – Залежність y-компоненти сили Лоренца F_y від часу

7.3 Плазмовий актуатор на пластині

У роботі [191] виконано експериментальне вивчення впливу діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора на навколишнє середовище (повітря, що знаходиться у спокої). Геометричні характеристики плазмового актуатора наведено на рис. 7.25. Початок координат збігається з лівим краєм відкритого електрода. Електроди являють собою смужки міді товщиною $t_e = 0,07\,мм$. Відкритий електрод шириною $L_1 = 5\,мм$ приклеювався до верхньої сторони акрилової діелектричної підкладки, а ізольований електрод шириною $L_2 = 15\,мм$, був занурений на глибину $y_e = 3\,мм$ в діелектрик. Довжина електродів становила $160\,мм$, що забезпечувала відсутність тривимірних ефектів у серединній області ПА, де відбувалися експериментальні вимірювання. Зазор x_e між електродами дорівнював нулю. До верхнього електроду прикладалася напруга $\varphi_{\max} = 14\,кВ$ із частотою $\omega = 10\,кГц$, а нижній був заземлений. Відносна діелектрична проникність повітря $\varepsilon_{r1} = 1,0006$, акрилу $\varepsilon_{r2} = 3,1$.

Плазмовий актуатор розміщувався в камері з органічного скла для візуалізації течії повітря поблизу електродів за допомогою PIV (Particle Image Velocimetry) технології. За допомогою PIV обмірювані розподіли компонентів вектора швидкості $\vec{U}$ в перетинах $x = 15\,мм$ (у безрозмірних одиницях $\bar{x} = 1,5$) і $x = 20\,мм$ ($\bar{x} = 2,0$), а також встановлено кут розкриття струменя повітря, що утворився в результаті впливу плазмового актуатора на повітря, що знаходиться у спокої, який дорівнює $\approx 12^{\circ}$.

Математичне моделювання ДБР при роботі плазмового актуатора проводилося в безрозмірному вигляді [57]. У якості характерних величин використовувалися $L = 0,01\,м$, $U = 3\,м/с$, $\rho_{\infty} = 1,225\,кг/м^3$, $\rho_{c\max} = 0,0075\,Кл/м^3$, $\varphi_{\max} = 14\,кВ$, $\nu_{\infty} = 1.47 \cdot 10^{-5}\,м^2/с$. Після обезрозмірювання отримаємо: $\bar{L}_1 = 0,5$, $\bar{L}_2 = 1,5$, $\bar{x}_e = 0$, $\bar{y}_e = 0,3$, $\bar{t}_e = 0,007$,

$\overline{\lambda}_D = 0,017$, $\overline{\rho}_{c\ \max} = 1$, $\overline{\varphi}_{\max} = 1$, $\overline{\omega} = 33,3$. У правій частині рівнянь Нав'є-Стокса (2.2), які записано у безрозмірному вигляді, з'являються два критерії подібності: перший характеризує відношення сил інерції до сил в'язкості $\mathrm{Re} = LU / \nu_\infty$, а другий – відношення електричних сил до сил інерції $D_c = \rho_{c\max} \cdot E_{\max} \cdot L / \rho_\infty \cdot U^2$. У нашому випадку $\mathrm{Re} = 2040$, а $D_c = 9,52$.

Розрахункова сітка (рис. 7.26) генерувалася як для області повітря, так і в зоні діелектрика. Число вузлів сітки становило 2×10^5 і 3×10^5 відповідно. Мінімальний крок за простором становив 10^{-5}. Крок інтегрування $\Delta \overline{t} = 0,1$.

У результаті розв'язку рівняння для об'ємної густини заряду отримано розподіл електричного потенціалу та напруженості електричного поля в розрахунковій області (рис. 7.27). Максимальна зміна електричного потенціалу спостерігається в області між двома електродами. Експериментально встановлено [191], що в цій зоні концентрація плазми має максимальне значення.

Розподіл густини заряджених частинок наведено на рис 7.28. Густина заряду досягає максимальної величини в області над лівим кутом ізольованого електрода. Тонкий шар плазми, що сформувався на поверхні вище ізольованого електрода, захоплює невелику ділянку в околиці правого краю відкритого електрода (рис. 7.28). Такий розподіл густини заряду відповідає плазмовому профілю, що спостерігається в експериментах [186, 191].

Отримано розподіл ліній течії та x-компоненти вектора швидкості $\vec{U}$ в обчислювальній області (рис. 7.29). У результаті впливу ПА утворюється потік повітря, який починається поблизу правого краю відкритого електрода. Взаємодія індукованого розрядом потоку з навколишнім в’язким газом (повітрям) призводить до народження поступово згасаючого із часом вихору.

Повітря всмоктується в область над ізольованим електродом, отримує імпульс за рахунок сили Лоренца, здебільшого, у продольному напрямку x, прискорюється та викидається із цієї області, поступово сповільнюючись і розширюючись.

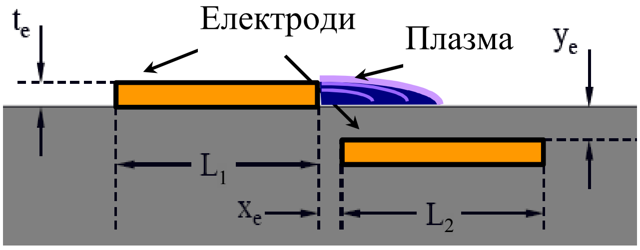


Рисунок 7.25 – Геометричні характеристики плазмового актуатора

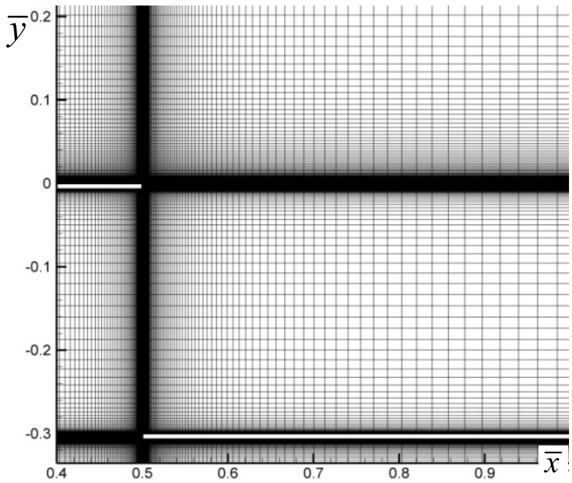


Рисунок 7.26 – Розрахункова сітка біля плазмового актуатора

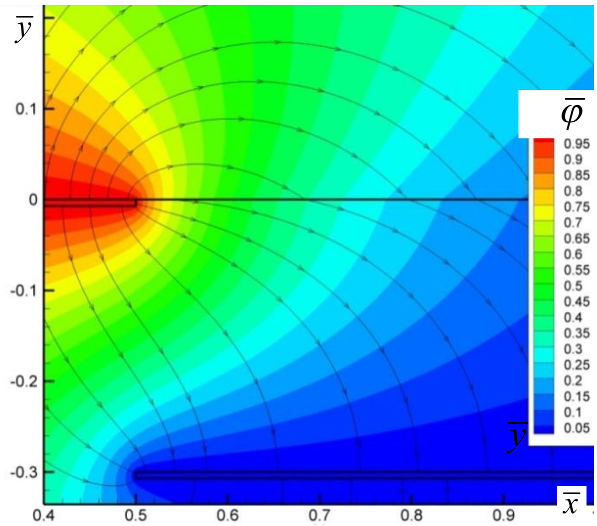


Рисунок 7.27 – Розподіл електричного потенціалу

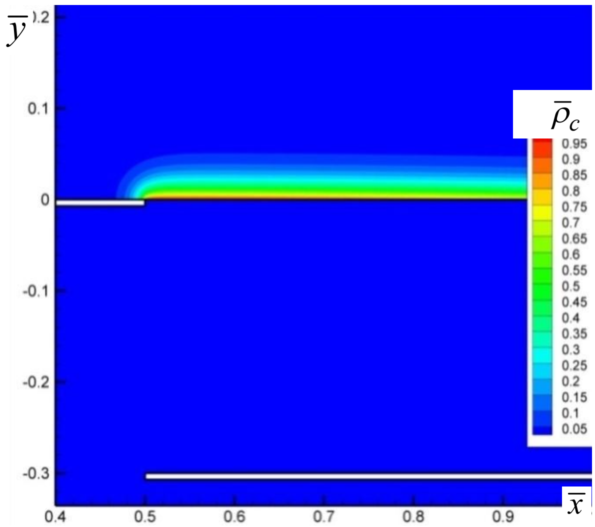
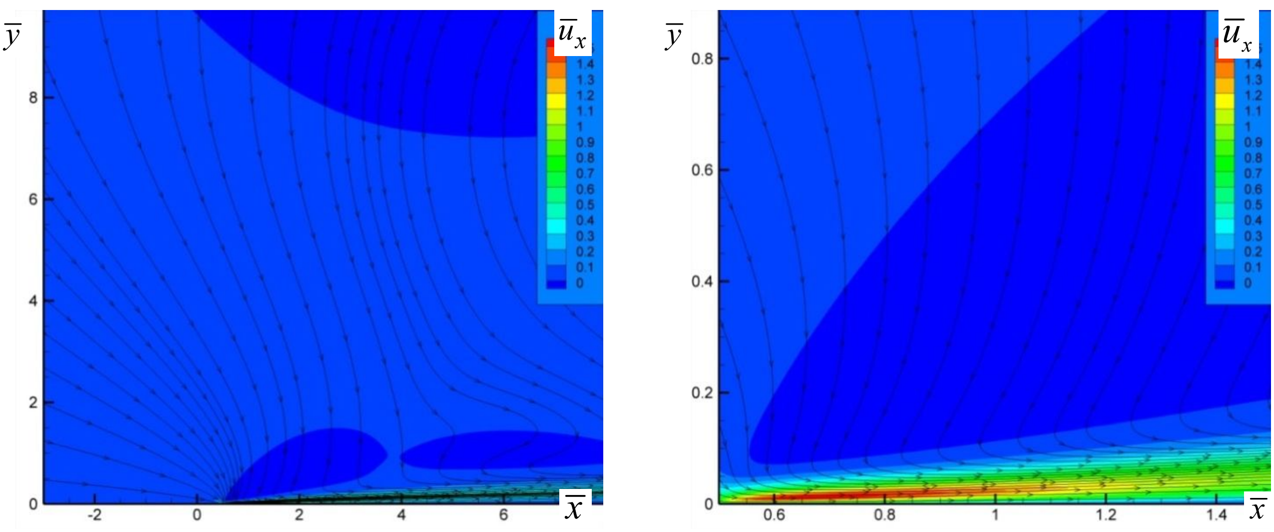


Рисунок 7.28 – Розподіл густини заряджених частинок



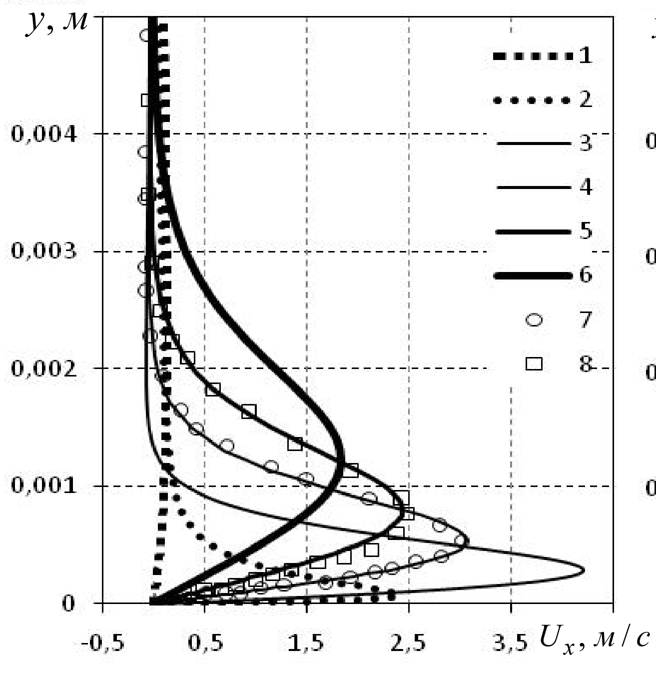
а) б)

Рисунок 7.29 – Розподіл ліній течії та x-компоненти вектора швидкості в обчислювальній області в цілому (а) та поблизу плазмового актуатора (б)

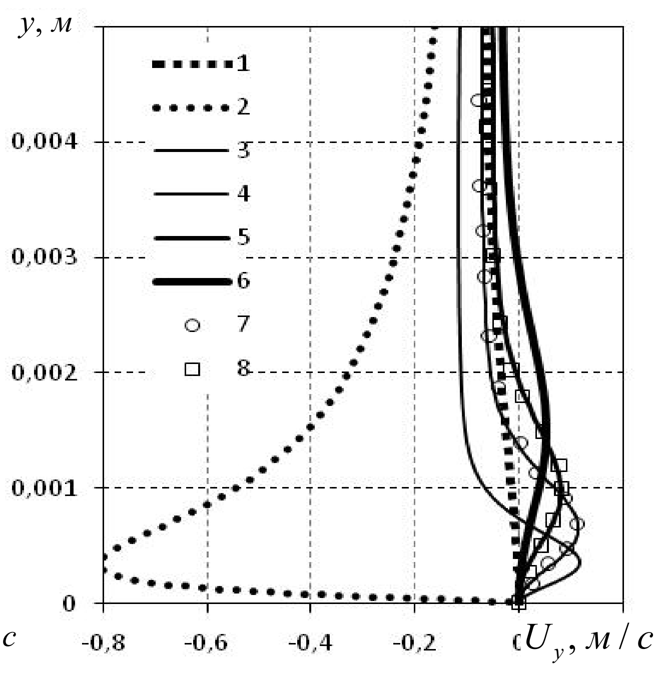
За густиною ліній течії можна судити про інтенсивність течії в пристінній області. Кут розкриття течії за результатами розрахунків становить $11{,}3^{\circ}$, що якісно узгоджується з експериментальними даними.

У результаті обчислювального експерименту побудовано профілі компонент вектора швидкості $\vec{U}$ у різних перетинах розрахункової області (рис. 7.30). Видно, що в перетині $\overline{x}=0$ компоненти вектора швидкості близькі до нуля, а в перетині, $\overline{x}=0{,}5$, який відповідає правому краю відкритого електрода, спостерігається різке збільшення (за модулем) поперечної швидкості.

Це пояснюється тим фактом, що в даній зоні за рахунок прискорення електричним полем частинок плазми починає формуватися реактивна течія повітря. При $\overline{x}=0{,}7$ потік має максимальну швидкість $U=4{,}5$ м/с ($\overline{U}=1{,}5$). Надалі течія починає сповільнюватися та товщати. Так, при $\overline{x}=1{,}0$ значення x-компоненти вектора швидкості вже 4,2 м/с, а при $\overline{x}=1{,}5$ – 3,0 м/с. Результати чисельного моделювання показують задовільний збіг за профілями швидкості в різних перетинах потоку повітря з експериментальними даними.



а)



б)

Рисунок 7.30 – Профілі x- (а) і y - компонент вектора швидкості $\vec{U}$ (б) в перетинах $\overline{x}=0(1)$, $\overline{x}=0{,}5(2)$, $\overline{x}=1{,}0(3)$, $\overline{x}=1{,}5(4,\ 7)$, $\overline{x}=2{,}0(5,\ 8)$, $\overline{x}=2{,}5(6)$ (1–6 – розрахунок; 7, 8 – експеримент [191])

7.4 Параметричні дослідження плазмового актуатора на пластині

У даній роботі проведено параметричні дослідження плазмового актуатора на основі діелектричного бар'єрного розряду, розташованого на плоскій пластині. В якості вихідних даних були взяті параметри плазмового актуатора з експериментальної роботи [199].

Основними параметрами, які досліджувалися в даному розділі та впливають на роботу плазмового актуатора, є амплітуда прикладеної напруги $\varphi_{\max}$ та товщина діелектричного шару a.

Плазмовий актуатор складається із двох плоских прямокутних електродів довжиною L = 20 мм, зроблених з алюмінієвої фольги товщиною $t = 0.1$ мм. Зазор між ізольованим і відкритим електродами дорівнював нулю. У якості діелектрика використовувався поліметилметакрилат (ПММА), у просторіччі оргскло (плексиглас, акрилове скло), з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon_r = 3.0$. Плазмовий актуатор розташовувався на плоскій діелектричній поверхні, товщиною в кілька міліметрів. У роботі [199] до відкритого електрода прикладалася змінна електрична напруга амплітудою 8÷25 кВ і частотою f = 1 кГц.

В результаті досліджень розглянуто вплив основних параметрів плазмового актуатора на індуковану швидкість іонного вітру в нерухомому в'язкому середовищі (повітрі).

Амплітуда прикладеної напруги. Залежність максимальної швидкості повітря, що генерується, плазмовим актуатором, від амплітуди прикладеної напруги наведено на рис. 7.31.

При зростанні амплітуди прикладеної напруги відбувається збільшення напруженості електричного поля, і, отже, сили Лоренца. Збільшення амплітуди прикладеної напруги призводить до зростання максимальної швидкості повітря над поверхнею діелектрика. З подальшим збільшенням амплітуди напруги максимальна швидкість носить асимптотичний характер.

Товщина діелектричного шару. Залежність максимальної швидкості від амплітуди прикладеної напруги для трьох різних товщин діелектрика наведено на рис. 7.32. Товщина діелектрика a варіювалася від 1 до 3 мм (a = 1, 2, 3 мм). Отримані дані для трьох товщин діелектрика носять асимптотичний характер. При фіксованій амплітуді напруги плазмовий актуатор з більш тонким шаром генерує більшу швидкість повітря. Очевидно, що зменшення товщини призводить до зростання напруженості електричного поля та, відповідно, швидкості повітря, що генерується. Але при товщині діелектрика a = 1 мм і амплітуді напруги φ_{max} = 17 кВ в експерименті спостерігається філаментація плазми, і діелектричний бар'єрний розряд стає нестабільним. У цьому випадку плазма починає концентруватися в декількох точках, що призводить до механічного руйнування матеріалу [199]. У даній роботі руйнування діелектрика не враховувалося. Застосування плазмових актуаторів з більшою товщиною діелектрика дає можливість прикладати напругу з більшою амплітудою без стадії філаментації плазми.

Результати чисельного моделювання порівнювалися з експериментальними даними [199]. Спостерігається задовільне узгодження розрахункових та експериментальних даних.

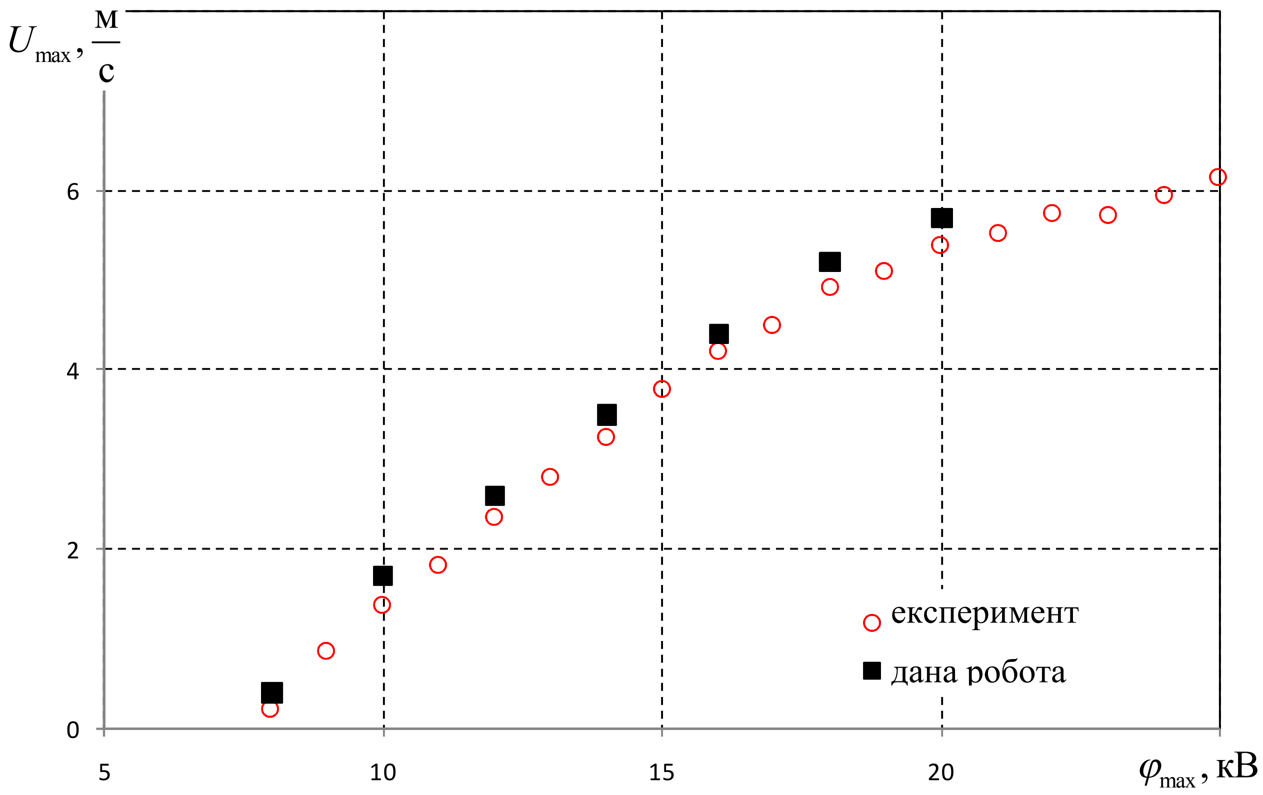


Рисунок 7.31 – Залежність максимальної швидкості повітря, що генерується плазмовим актуатором, від амплітуди прикладеної напруги

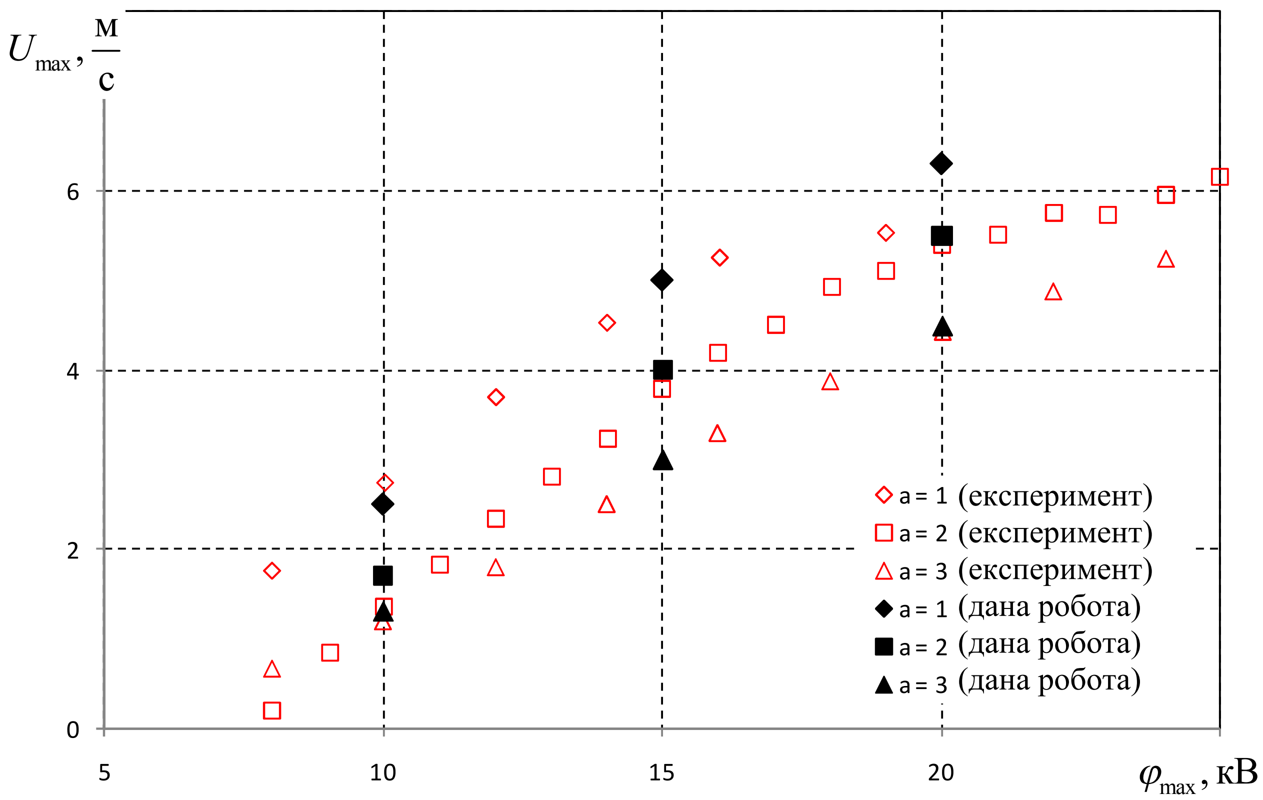


Рисунок 7.32 – Залежність максимальної швидкості від амплітуди прикладеної напруги для трьох різних товщин діелектрика

7.5 Плазмовий актуатор на циліндрі

Для розв'язку задачі про керування відривом потоку розглядалися плазмові актуатори, розташовані на циліндрі. Усі вихідні дані для цієї роботи взяті з [304]. Модель являла собою циліндр, зроблений із кварцу (D =100 мм), із чотирма плазмовими актуаторами, розташованими як показано на рис. 7.33. До плазмових актуаторів прикладалась змінна напруга амплітудою $\varphi = 11.5$ кВ та частотою 10 кГц. Стінки циліндра були зроблені у формі діелектричного бар'єра товщиною 2.5 мм. Відкритий електрод було виготовлено з мідної фольги шириною 5.6 мм і товщиною 0.04 мм. Ширина ізольованого електрода була 25.4 мм, а товщина – 0.04 мм. Внутрішній діелектрик являв собою 5 шарів каптона товщиною 0.125 мм.

У даній роботі математичне моделювання ДБР при роботі плазмового актуатора проводилося в безрозмірному вигляді. У якості характерних величин використовувалися $L = 0.1$ м, $U = 1$ м/с, $\rho_\infty = 1.225$ кг/м^3, $\rho_{c\max} = 0.0075$ Кл/м^3, $\varphi_{\max} = 11500$ В, $\nu_\infty = 1.47 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

У результаті проведеного чисельного експерименту [46] отримано розподіл електричного потенціалу та густини заряджених частинок поблизу електродів і в області у цілому (рис. 7.34). Максимальні значення густини результуючого просторового заряду спостерігались в областях з максимальною напруженістю електричного поля.

У результаті впливу чотирьох плазмових актуаторів на нерухоме повітря утворюється течія на тильній стороні циліндра (рис. 7.35). Рух повітря призводить до падіння тиску в даній області, і потік притискається до поверхні циліндра. Виникає щось подібне ефекту Коанда. У сліді формується реактивний потік, який призводить до виникнення рушійної сили.

Отримано зміну в часі коефіцієнта рушійної сили (опору) циліндра (рис. 7.36). Осереднений за часом коефіцієнт рушійної сили дорівнює −0.04.

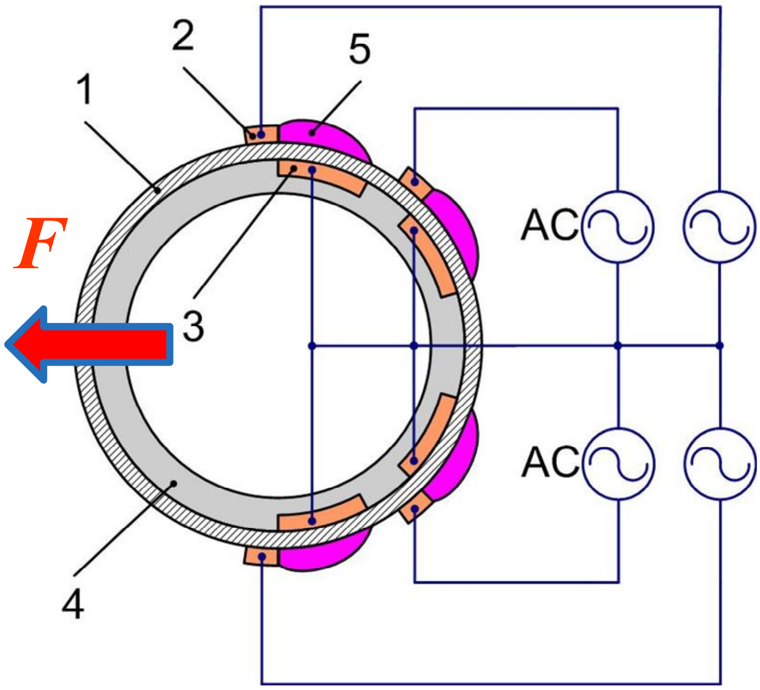
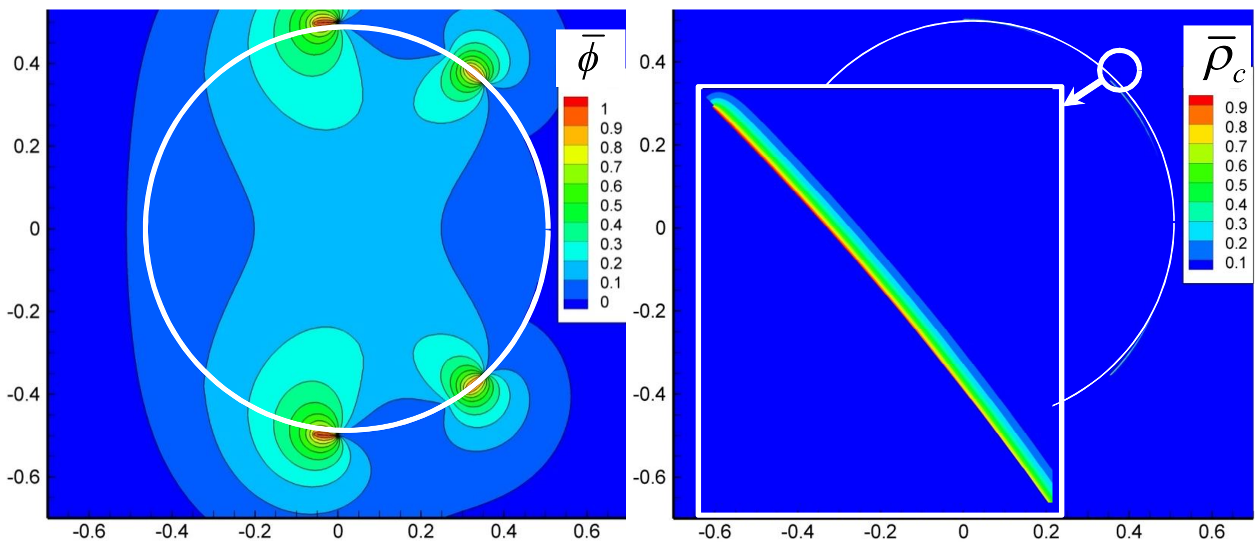


Рисунок 7.33 – Модель циліндра з чотирма плазмовими актуаторами [304] (1 – циліндр, 2 – відкритий електрод, 3 – ізольований електрод, 4 – внутрішній ізолятор, 5 – області плазми, що утворюється)



а) б)

Рисунок 7.34 – Розподіл електричного потенціалу (а) і густини заряджених частинок (б) в області

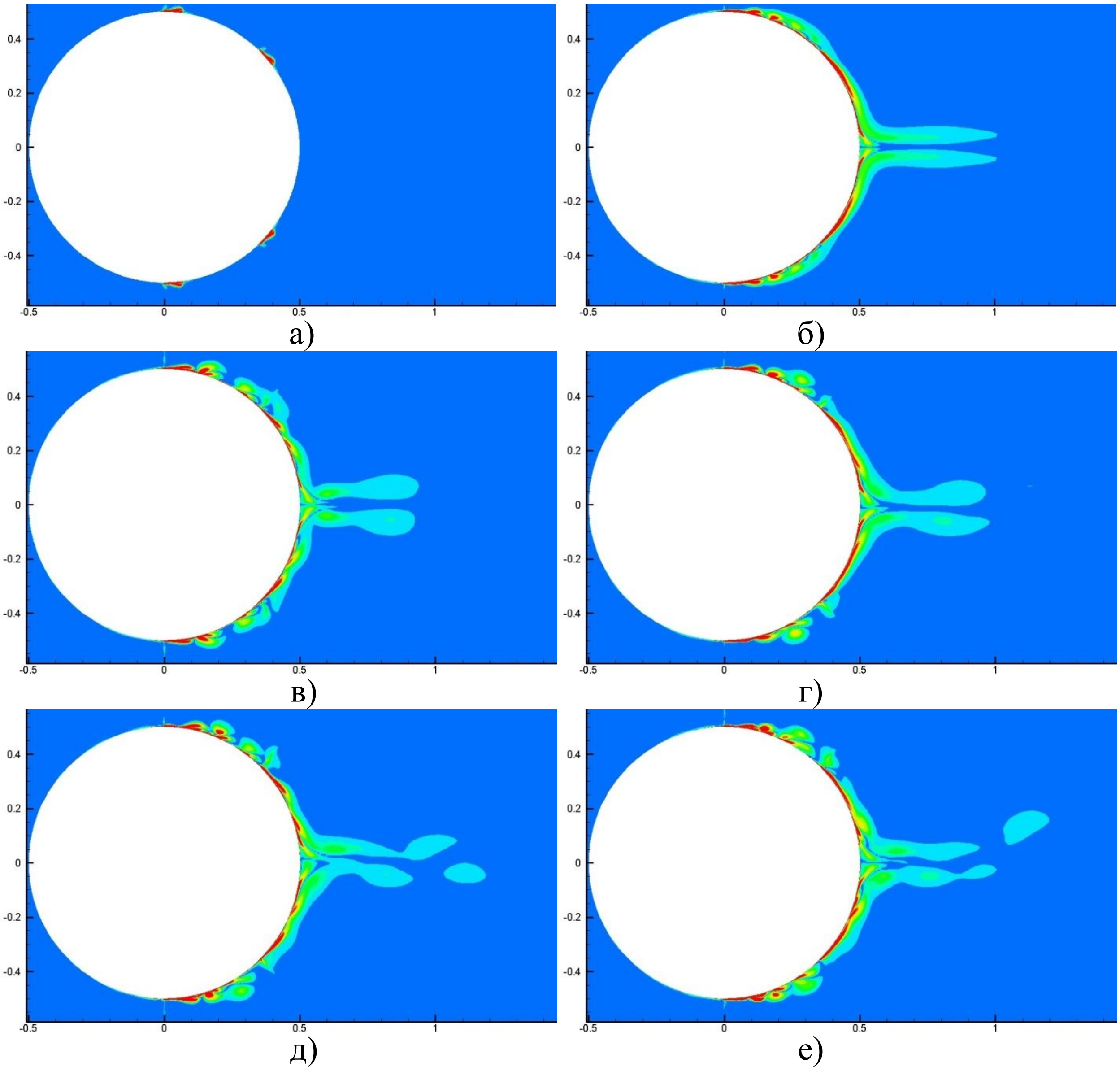


Рисунок 7.35 – Індукований плазмовим актуатором потік повітря на циліндрі: а – t = 0; б – t = 5; в – t = 10; г – t = 15; д – t = 20; е – t = 25

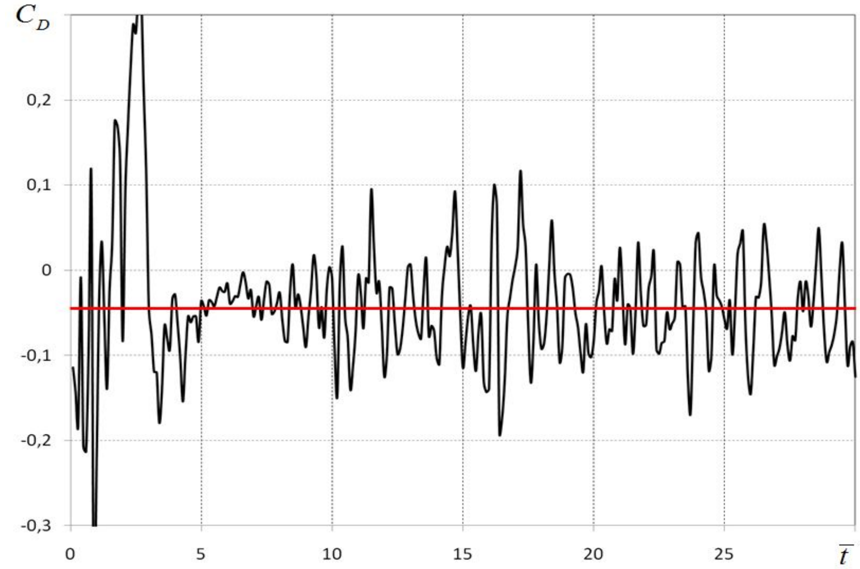


Рисунок 7.36 – Зміна в часі коефіцієнта рушійної сили (опору) циліндра

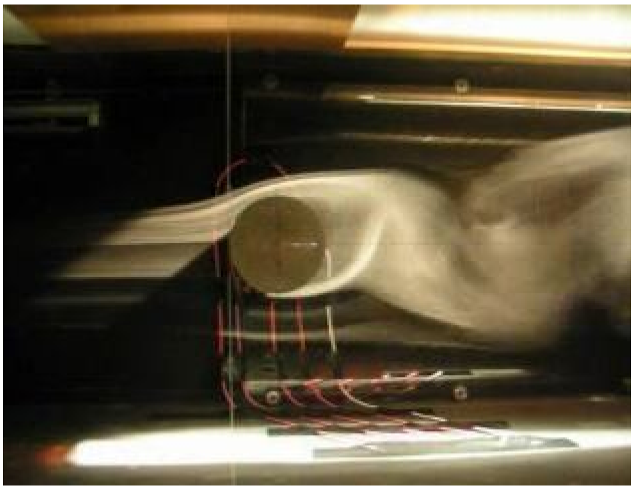
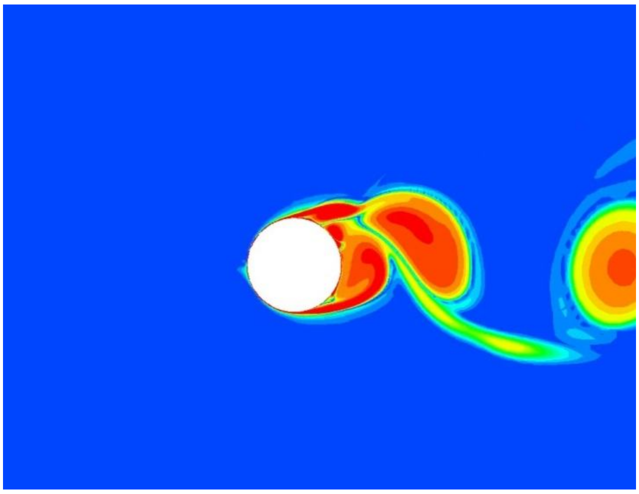
7.6 Керування відривом потоку на циліндрі за допомогою чотирьох плазмових актуаторів

У даній роботі проведено чисельне моделювання впливу діелектричного бар'єрного розряду при роботі чотирьох плазмових актуаторів на потік повітря, що обтікає циліндр, при числі Рейнольдса $\mathrm{Re} = 30000$ [262]. Для візуалізації структури течії в експерименті застосовувалася димова візуалізація потоку, а в даній роботі використовувалися ізолінії модуля завихрення.

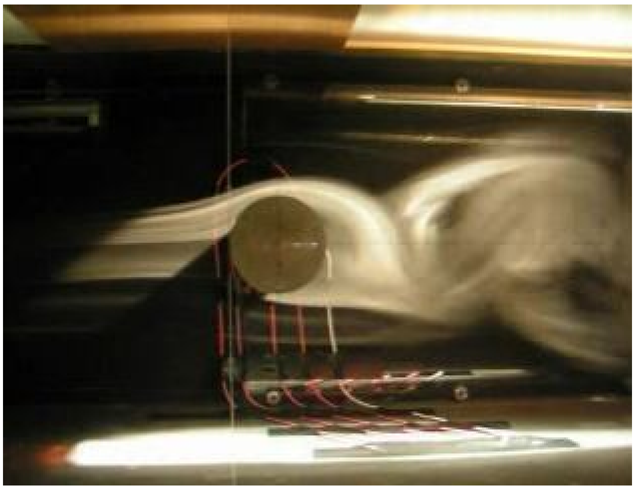
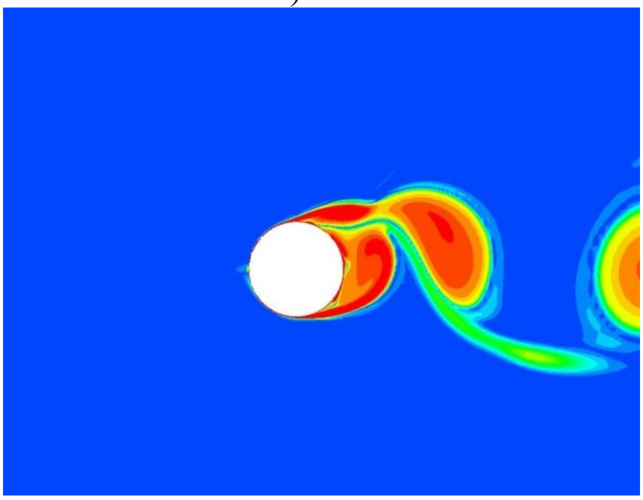
Турбулентне обтікання циліндра характеризується наявністю в сліді вихрової доріжки Кармана (рис. 7.37-7.40). Внаслідок дії сил в'язкості поблизу поверхні циліндра частинки рідини втрачають частку кінетичної енергії, якої вже недостатньо, щоб подолати підвищення тиску в кормовій частині циліндра. Біля точки відриву формується зворотна течія, з якої розбудовується великий вихор. Через деякий час цей вихор відривається від тіла та спливає вниз за течією. У завихреній зоні за кормовою частиною циліндра, тиск сильно знижений в порівнянні з тиском у незбуреному потоці. На деякій відстані за циліндром формується послідовність вихорів, що обертаються по черзі в різних напрямках.

Увімкнення чотирьох плазмових актуаторів ($\varphi_{\max} = 11.5$ кВ), розташованих на поверхні циліндра ±90°, ±135°, призводить до придушення вихрової доріжки Кармана, і обтікання циліндра носить приєднаний характер (рис. 7.41).

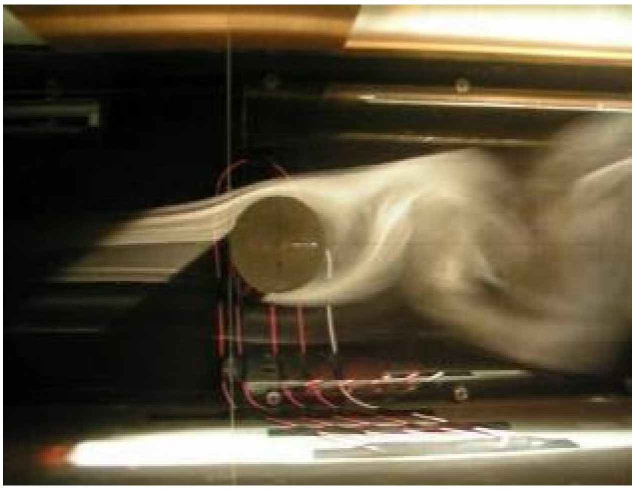
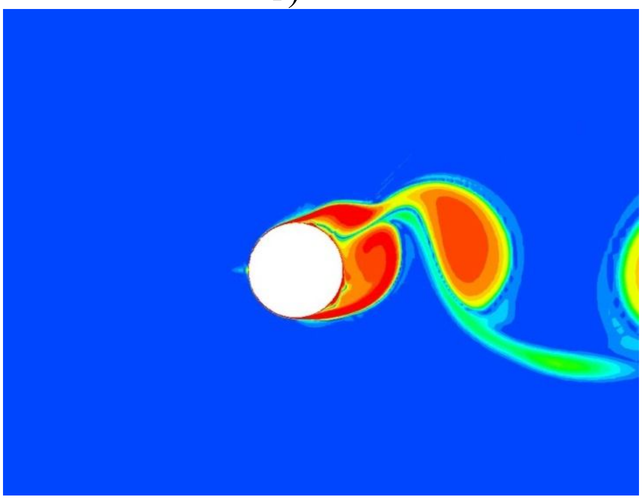
На рис. 7.42 наведено розподіли коефіцієнта тиску для різних режимів обтікання кругового циліндра. Суцільна лінія відповідає потенційному безциркуляційному обтіканню $C_P = 1 - 4\sin^2\theta$ [31]. Тут відбувається повне відновлення донного тиску, що за умови нехтування силами тертя моделлю ідеальної рідини призводить до парадокса Даламбера – нульовій силі опору. У в'язких течіях тертя вносить порівняно невеликий безпосередній внесок у лобовий опір, однак наявність тертя веде до відриву потоку та істотного перерозподілу тиску на поверхні циліндра. Для розвиненої доріжки Кармана значення коефіцієнта тиску знаходяться у зоні, позначеній штриховими лініями на рис. 7.42.

а) б)

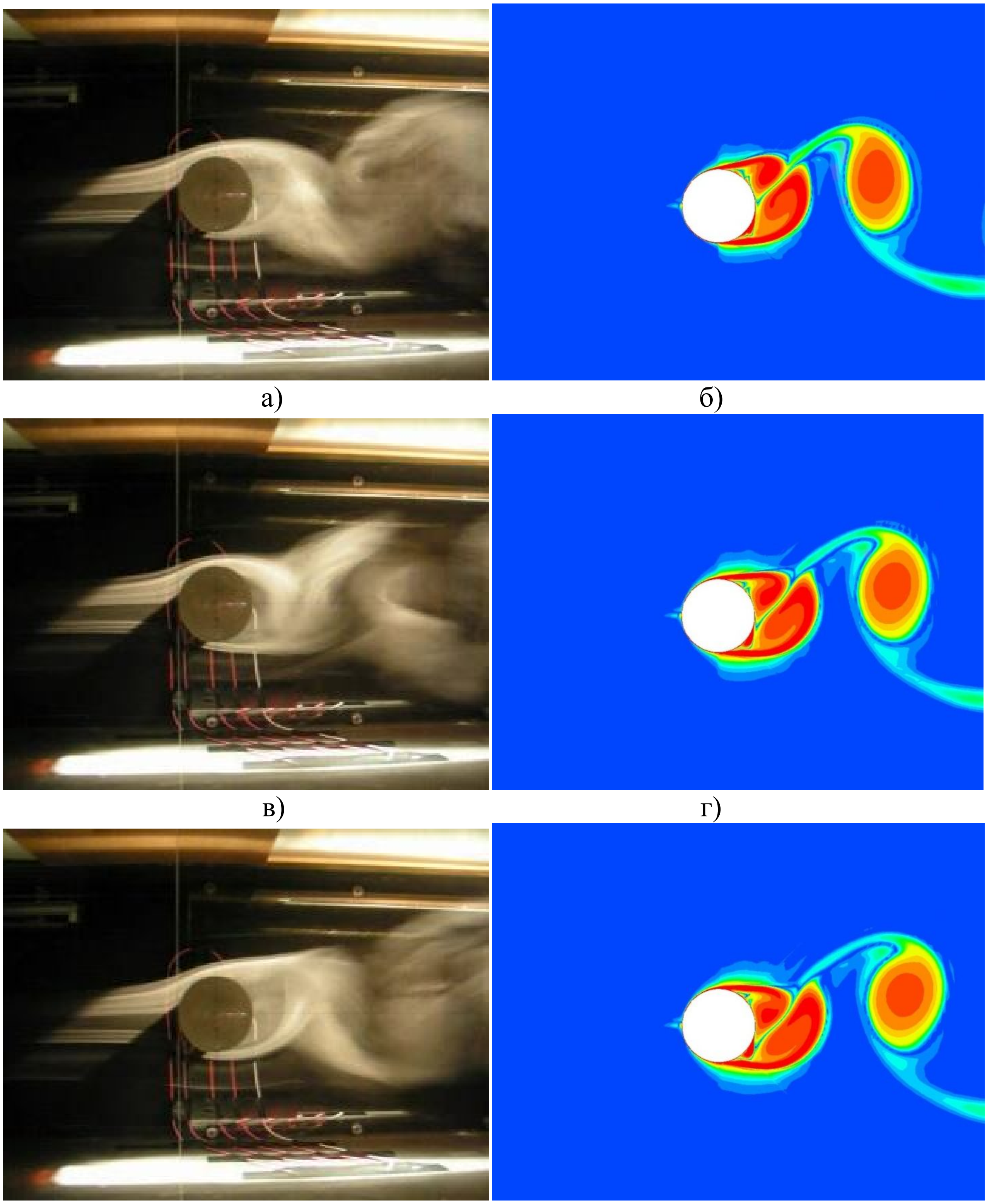



в) г)

д) е)

Рисунок 7.37 – Турбулентне обтікання циліндра з вимкненими плазмовими актуаторами для моментів безрозмірного часу $t = 39{,}5$ (а, б), $t = 39{,}6$ (в, г), $t = 39{,}7$ (д, е) (а, в, д – експеримент [304], б, г, е – дана робота)



а) б)

в) г)

д) е)

Рисунок 7.38 – Турбулентне обтікання циліндра з вимкненими плазмовими актуаторами для моментів безрозмірного часу t = 39,8 (а, б), t = 39,9 (в, г), t = 40,0 (д, е) (а, в, д – експеримент [304], б, г, е – дана робота)

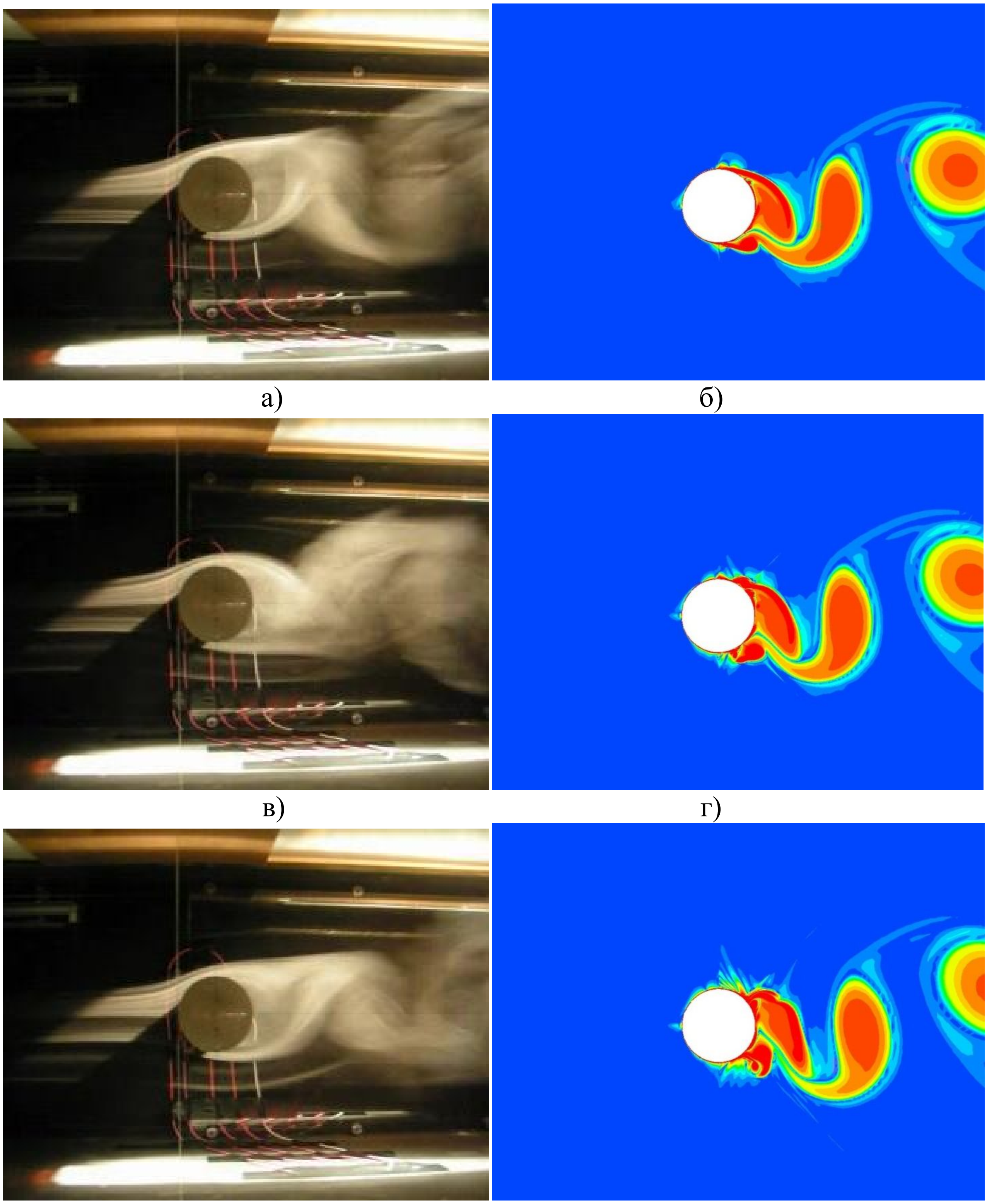


Рисунок 7.39 – Турбулентне обтікання циліндра з увімкненими плазмовими актуаторами для моментів безрозмірного часу $t = 40{,}1$ (а, б), $t = 40{,}2$ (в, г), $t = 40{,}3$ (д, е) (а, в, д – експеримент [304], б, г, е – дана робота)

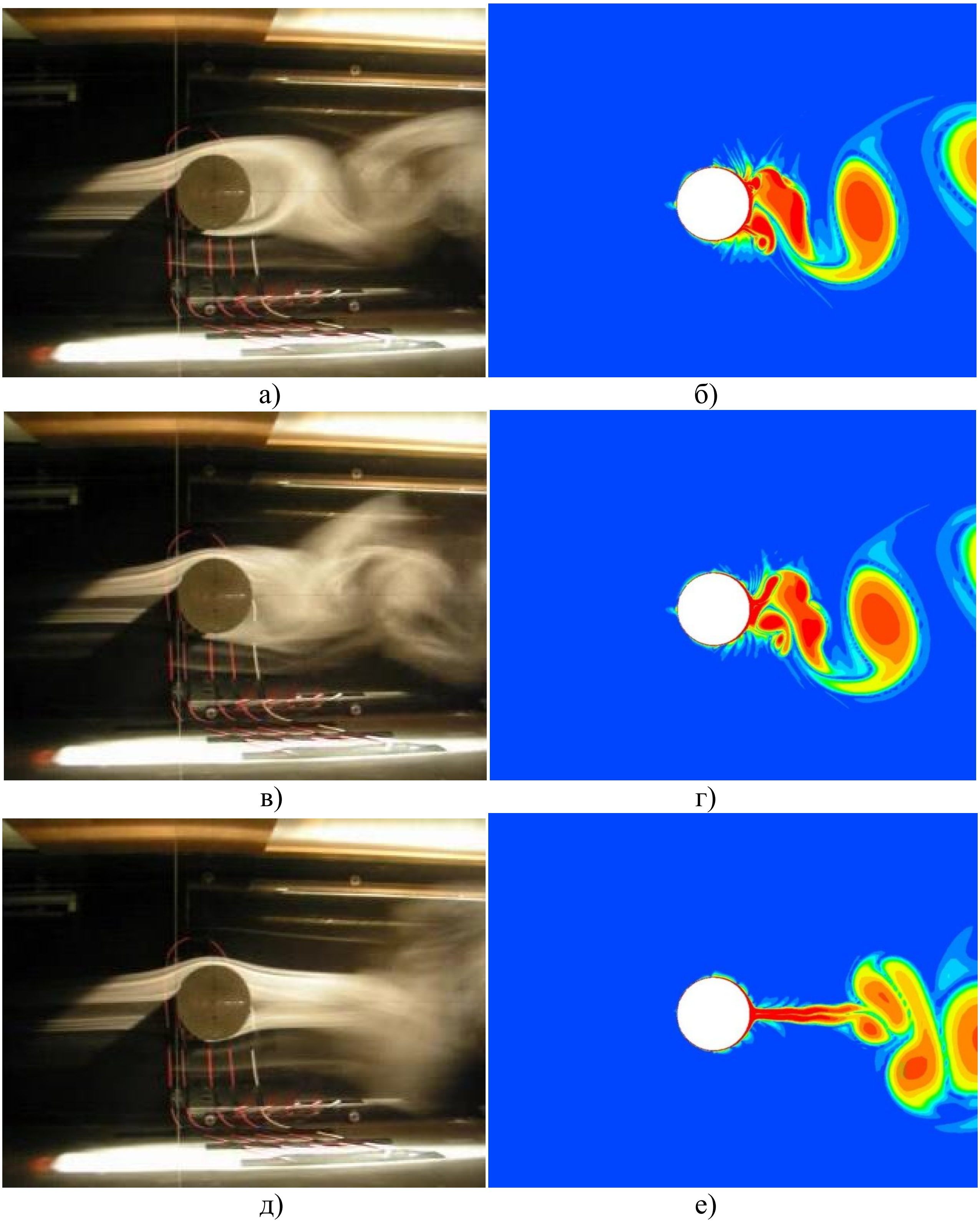
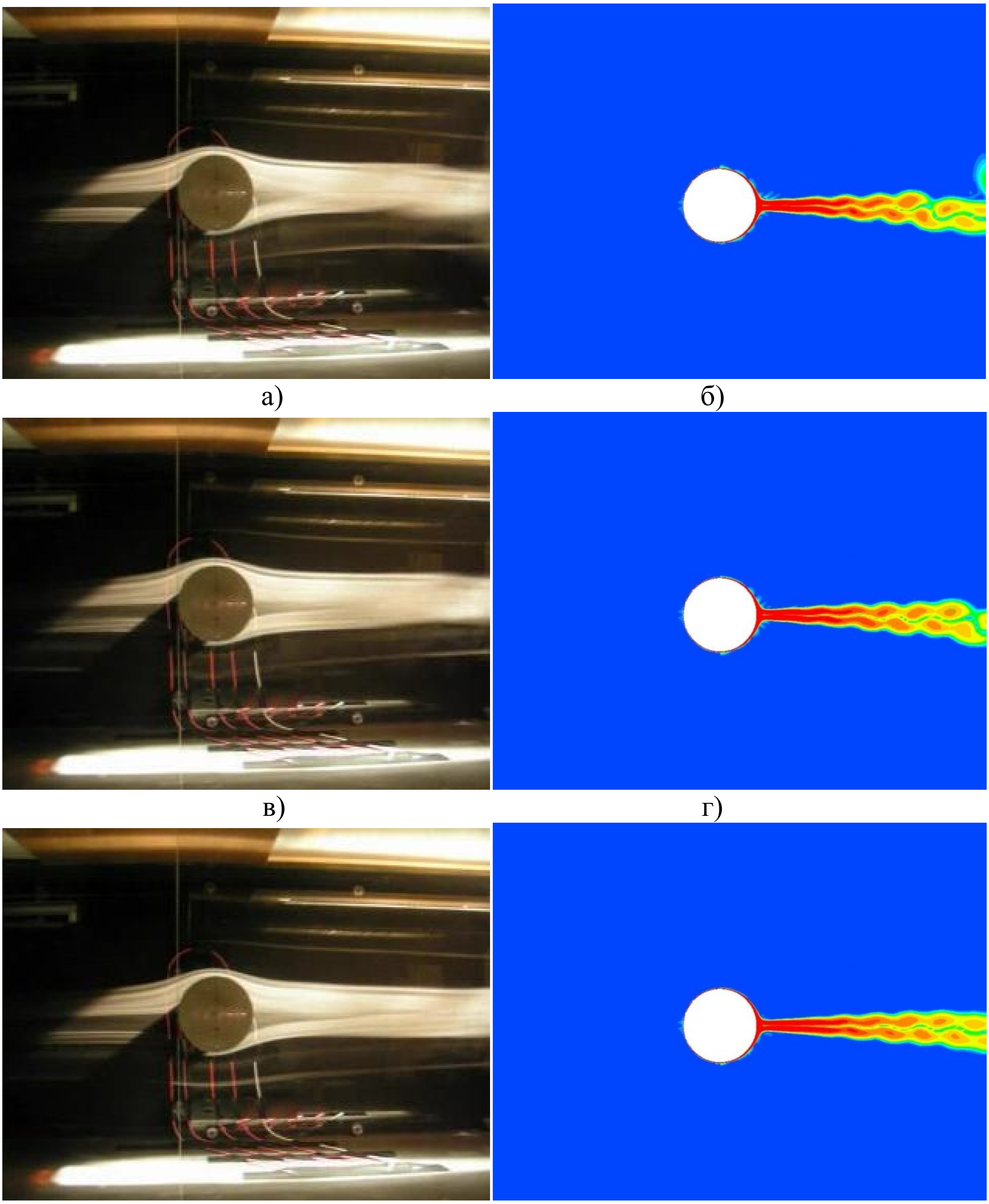


Рисунок 7.40 – Турбулентне обтікання циліндра з увімкненими плазмовими актуаторами для моментів безрозмірного часу t = 40,4 (а, б), t = 40,5 (в, г), t = 41,0 (д, е) (а, в, д – експеримент [304], б, г, е – дана робота)



а) б)

в) г)

д) е)

Рисунок 7.41 – Турбулентне обтікання циліндра з увімкненими плазмовими актуаторами для моментів безрозмірного часу t = 42,0 (а, б), t = 43,0 (в, г), t = 44,0 (д, е) (а, в, д – експеримент [304], б, г, е – дана робота)

Придушення вихрової доріжки Кармана за допомогою плазмових актуаторів призводить до практично повного відновлення донного тиску та, відповідно, суттєвого зниження лобового опору (••• лінія на рис. 7.42).

Залежність коефіцієнта сили лобового опору кругового циліндра від часу наведено на рис. 7.43. Видно, що увімкнення плазмових актуаторів призводить до різкого падіння коефіцієнта сили лобового опору. Залежно від числа Рейнольдса, режиму обтікання (ламінарне, перехідне, турбулентне) та інтенсивності роботи плазмових актуаторів значення коефіцієнта сили лобового опору C_D може зменшуватися від 2 до 10 разів.

Отримані результати обтікання циліндра для випадку з вимкненими та увімкненими плазмовими актуаторами задовільно збігаються з експериментальними даними [304] (рис. 7.37-7.41).

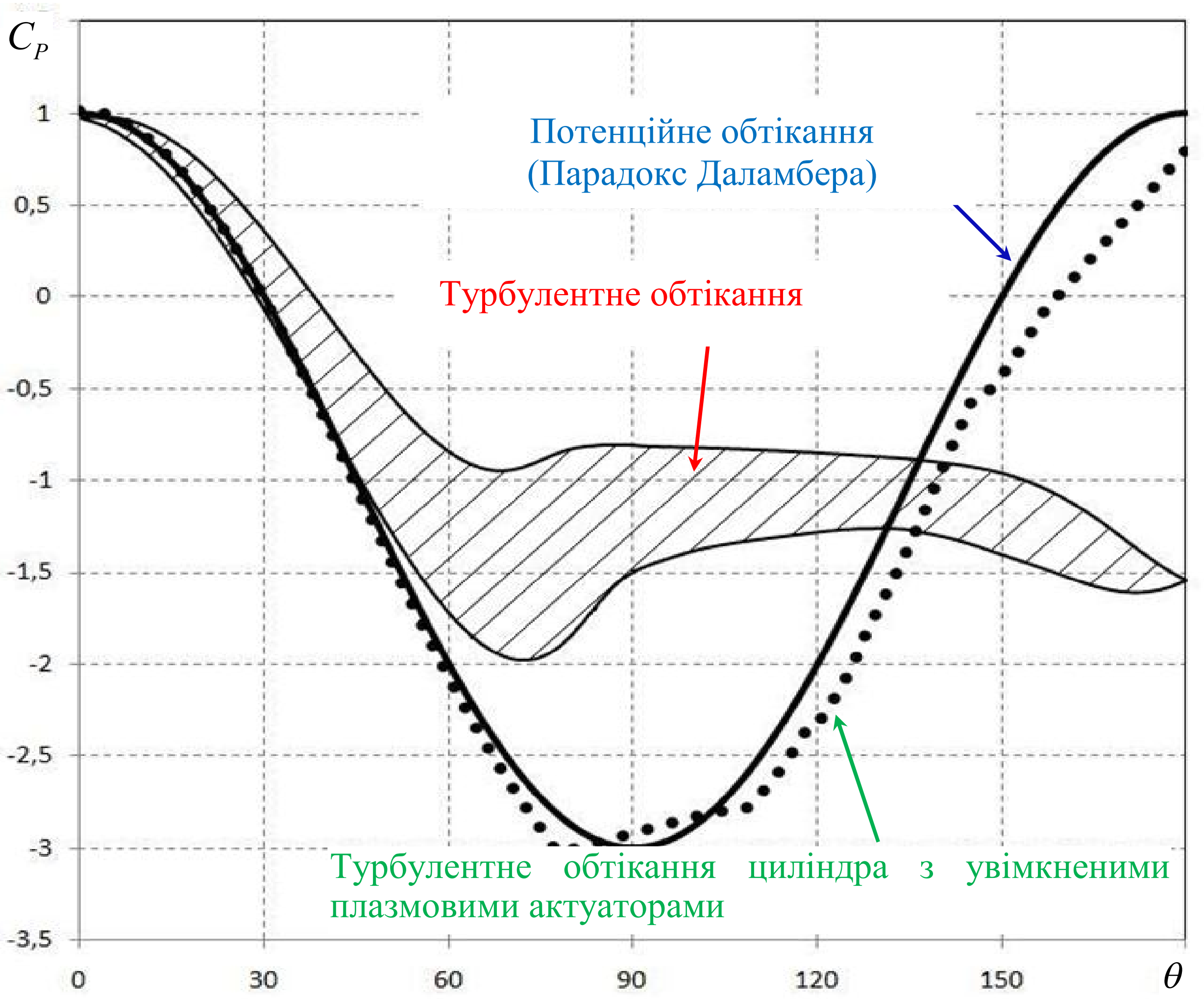


Рисунок 7.42 – Розподіл коефіцієнта тиску для різних режимів обтікання кругового циліндра

Рисунок 7.43 – Залежність коефіцієнта сили лобового опору кругового циліндра від часу

7.7 Висновки до розділу 7

1. На основі розробленого підходу проведено серію обчислювальних експериментів з моделювання нестаціонарних процесів низькотемпературної нерівноважної плазми діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора, а також її вплив на керування структурою потоку повітря.

2. Розглянуто механізм формування та розвитку окремого мікророзряду. Проведено детальне вивчення стадій зародження, розвитку та гасіння катодоспрямованого стримера при роботі плазмового актуатора в нерухомому повітрі при атмосферному тиску. Для адекватного опису зародження, розвитку та проходження стримера використовувався змінний крок інтегрування за часом. При цьому виконано аналіз і розглянуто миттєві картини розподілу густини різних хімічних елементів плазми діелектричного бар'єрного розряду, густини об'ємного заряду, компоненти сили Лоренца, сумарного і прикладеного електричного потенціалів, потенціалу від об'ємного та поверхневого зарядів, а також модуля напруженості електричного поля в просторі та в часі. Отримані результати якісно узгоджуються з експериментальними даними.

3. Встановлено вплив структури частинок плазми та густини заряджених частинок на зміну сили Лоренца в часі. Показано, що основний внесок в формування сили Лоренца на позитивному напівперіоді коливання прикладеної напруги надають іони кисню O_4^+. Для випадку негативного напівперіоду основний внесок здійснюється за рахунок негативно заряджених іонів кисню, зокрема O^-.

4. В результаті проведеного чисельного моделювання впливу плазмового актуатора на нерухоме повітря виконано аналіз поля течії, розподілу потенціалу, напруженості електричного поля, густини результуючого заряду, а також компонент вектора швидкості в обчислювальній області. Отримані результати задовільно узгоджуються з експериментальними даними.

5. Проведено параметричні дослідження фізичних і геометричних характеристик плазмових актуаторів та їх вплив на генерацію потоків повітря. Показано, що зі збільшенням амплітуди прикладеної напруги відбувається

зростання швидкості повітря, яка носить асимптотичний характер. Зменшення товщини діелектрика призводить до збільшення швидкості повітря, що генерується.

6. Вперше продемонстровано виникнення рушійної сили циліндра в результаті впливу чотирьох плазмових актуаторів на основі діелектричного бар'єрного розряду на повітря, що знаходиться в стані покою.

7. Показано можливість зменшення коефіцієнта опору циліндра за допомогою плазмового актуатора за рахунок придушення вихрової доріжки Кармана. Отримані результати якісно узгоджуються з експериментальними даними.

8. Запропонована методика враховує фізичні особливості розглянутого класу задач і має високу обчислювальну ефективність. Даний підхід застосовується до моделювання динаміки низькошвидкісних потоків рідини та газу при наявності електричного поля.

ВИСНОВКИ

У дисертації наведено розв'язок актуальної наукової проблеми, пов'язаної з взаємодією різних фізичних полів у зв’язаних задачах динаміки рідини, газу та низькотемпературної плазми. Вивчено фізичні особливості широкого класу відривних течій за допомогою розробленого спеціалізованого пакету обчислювальної аеродинаміки та електродинаміки. Досліджено нестаціонарні процеси низькотемпературної плазми діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора, а також її вплив на структуру повітряних течій з метою керування відривом потоку.

Основні наукові та практичні результати проведених досліджень полягають у наступному:

1. Побудовано нову фізично обґрунтовану математичну модель для дослідження аеродинаміки, електродинаміки, динаміки плазми та хімічної кінетики при моделюванні взаємодії суцільного в’язкого середовища з плазмою діелектричного бар'єрного розряду. Постановка задачі базується на розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса, замкнутих диференціальною моделлю турбулентності, а також моделлю ламінарно-турбулентного переходу і рівнянь, що описують просторово-часову структуру низькотемпературної плазми діелектричного бар'єрного розряду, включаючи нестаціонарні електродинамічні процеси, кінетичні явища та плазмохімічні реакції. Вперше повну γ-Re_θ модель ламінарно-турбулентного переходу адаптовано для використання разом з моделями турбулентності Spalart-Allmaras, SARC і SALSA.

2. Розроблено модифікацію схеми Rogers-Kwak першого і третього порядку точності для конвективних членів. Основна відмінність модифікованої схеми Rogers-Kwak від класичної полягає в тому, що потоки розраховуються з використанням метричних коефіцієнтів на грані контрольного об'єму за значеннями гідродинамічних параметрів в точках. Описано неявний алгоритм для модифікованої схеми Rogers-Kwak першого і третього порядку точності.

3. Побудовано нову взаємно узгоджену систему вихідних рівнянь, що складається з рівняння для електричного потенціалу і рівнянь динаміки

частинок плазми. Основною особливістю розробленої чисельно-аналітичної моделі є використання раціональної кількості рівнянь для опису всіх основних нестаціонарних параметрів діелектричного бар'єрного розряду в повітрі. Обрані 14 видів частинок забезпечують високу точність математичного моделювання основних плазмохімічних реакцій, включаючи як поверхневі процеси, так і швидкоплинні явища в просторі (розвиток стримера і електронних лавин).

Вперше введено несиметричну скінченно-об'ємну апроксимацію других похідних для електричного потенціалу в рівняннях для динаміки заряджених частинок плазми з метою збереження фізичного змісту адвекції. Розроблено модифікований чисельно-аналітичний дискретний аналог рівняння Пуассона електричного поля для безпосереднього виділення операторів електричного потенціалу, замість опосередкованого впливу через значення густини заряджених частинок у джерельному доданку, з використанням протипотокової апроксимації густини заряджених частинок у других похідних.

4. Створено спеціалізований програмний пакет для розв’язку зв’язаних задач аеродинаміки, динаміки твердого тіла, електродинаміки та динаміки частинок плазми.

5. Виявлено фізичні особливості обтікання плоскої пластини, кругового циліндра та аеродинамічного профілю на основі чисельного розв'язку нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини з використанням різних моделей турбулентності (SA, SARC і SALSA) і γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу. Показано, що застосування диференціальної γ-Re_θ моделі ламінарно-турбулентного переходу дозволяє врахувати складні фізичні явища та кількісно поліпшити результати чисельного моделювання.

6. Вперше виявлено вплив ступеня замкнутості J-профілю на коефіцієнти сили лобового опору та підйомної сили, а також на структуру обтікання в цілому. Встановлено, що зі збільшенням кута атаки розміри відривної зони на внутрішній поверхні передкрилка багатоелементного профілю 30P30N зменшуються, а у хвостовій частині основного профілю залишаються практично сталими. Чисельними розрахунками відтворено факт того, що злітно-посадкова конфігурація має більш високі значення коефіцієнта підйомної сили, ніж

крейсерська, особливо на великих кутах атаки. Виділено фізичні особливості структури течії навколо наземного транспортного засобу та виконано аналіз коефіцієнтів тиску, тертя, підйомної сили та сили лобового опору. Показано можливість застосування розробленого спеціалізованого CFD пакета до задач аеродинаміки наземного транспорту.

7. Проведено серію чисельних розрахунків нестаціонарного обтікання вертикально-осьової вітроенергетичної установки з роторами Дар'є та Савоніуса турбулентним потоком вітру. Вперше встановлено, що наявність ротора Савоніуса в центральній частині вертикально-осьової вітроенергетичної установки призводить до істотного затінення підвітряної ділянки траєкторії лопаті ротора Дар'є, а, отже, до зниження крутного моменту, що генерується. Показано, що основний внесок у крутний момент вертикально-осьової вітроенергетичної установки здійснюється за рахунок ротора Дар'є в основному на навітряній ділянці траєкторії.

8. Проведено серію обчислювальних експериментів з моделювання нестаціонарних процесів низькотемпературної плазми діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора, а також її вплив на керування структурою потоку повітря. Вперше встановлено вплив структури частинок плазми та густини заряджених частинок на зміну сили Лоренца в часі. Показано, що основний внесок в формування сили Лоренца на позитивному напівперіоді коливання прикладеної напруги надають іони кисню O_4^+. Для негативного напівперіоду основний внесок здійснюється за рахунок негативно заряджених іонів кисню, зокрема O^-. Проведено параметричні дослідження фізичних і геометричних характеристик плазмових актуаторів та їх вплив на генерацію потоків повітря. Показано, що зі збільшенням амплітуди прикладеної напруги відбувається зростання швидкості повітря, яка носить асимптотичний характер. Зменшення товщини діелектрика призводить до збільшення швидкості повітря, що генерується.

9. Вперше продемонстровано виникнення рушійної сили циліндра в результаті впливу чотирьох плазмових актуаторів на основі діелектричного бар'єрного розряду на повітря, що знаходиться в стані покою. Показано можливість зменшення коефіцієнта опору циліндра за допомогою плазмових актуаторів за рахунок придушення вихрової доріжки Кармана.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ананов Г. Г., Беликов Г. А. Экспериментальное определение аэродинамических нагрузок, действующих в сечении модели лопасти ВЭУ с вертикальной осью вращения. *Отчет НИО-5.* 1989. № 2185. 55 с.

2. Ананов Г. Г., Зарубина В. А., Афанасьева Т. А. Исследование структуры потока, обтекающего модель трехлопастного ротора ВЭУ в гидродинамической трубе ГТ-400. *Отчет НТЦ Аэрокомплекс.* 1990. № 28. 46 с.

3. Ананов Г. Г., Сорокин А. Н., Зарубина В. А. Исследование поля скорости вокруг модели вертикально-осевого ротора. *Отчет НТЦ Аэрокомплекс.* 1990. № 20. 64 с.

4. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1. 392 с. Т. 2. 336 с.

5. Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Физика молнии и молниезащиты. Москва: Физматлит, 2001. 320 с.

6. Белов И. А., Исаев С. А. Циркуляционное движение жидкости в прямоугольной каверне при средних и высоких числах Рейнольдса. *Журнал прикладной механики и технической физики.* 1982. № 1. С. 41–45.

7. Белов И. А., Исаев С. А., Коробков В. А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1989. 256 с.

8. Блинова Л. А., Шур М. Л. Метод масштабирования сжимаемости для расчета нестационарных течений вязкого газа в широком диапазоне изменения характерных чисел Маха. *Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики*. 1991. № 2. С. 34–39.

9. Быстров Ю. А., Исаев С. А., Кудрявцев Н. А., Леонтьев. А. И. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб. СПб.: Судостроение, 2005. 392 с.

10. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 184с.

11. Владимирова Н. Н., Кузнецов Б. Г., Яненко Н. Н. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой

жидкости. *Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики*. 1966. № 5. С. 186–192.

12. Волков Н. И. Аэродинамика ортогональных ветродвигателей (некоторые математические модели и численная реализация). Сумы: Мрія-1, 1996. 198 с.

13. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики. *Математический сборник*. 1959. Т. 47(89), № 3. С. 271–306.

14. Гончаров В. А., Кривцов В. М., Чарахчьян А. А. Численная схема моделирования дозвуковых течений вязкого сжимаемого. *ЖВМ и МФ*. 1988. Т. 28, № 12. С. 1858–1866.

15. Госмен А. М., Пан В. М., Ранчел А. К. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М.: Мир, 1972. 323 с.

16. Дзензерский В. А. Приходько А. А., Хачапуридзе Н. М., Редчиц Д. А. Моделирование нестационарных турбулентных течений при обтекании подвижных тел сложной геометрии на основе уравнений Навье-Стокса. *Вісник Харківського національного університету.* 2009. Вип. 11, № 847. С. 283–286.

17. Дзензерский В. А., Жулай Ю. А., Хачапуридзе Н. М., Ворошилов А. С., Редчиц Д. А. Определение эффективности наложения вибронагрузки на инструмент для расширения труб. *Импульсные процессы в механике сплошных сред:* зб. тез IX міжнародної наукової конференції (м. Миколаїв, 15-19 серпня 2011 р.). Миколаїв 2011. С. 329–332.

18. Дзензерский В. А., Моисеенко С. В., Редчиц Д. А., Хачапуридзе Н. М. Моделирование диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора в подвижной сплошной среде. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики:* труды XVI международного симпозиума (м. Херсон, 8-16 червня 2013 р.). Херсон. 2013. С. 151–154.

19. Дзензерский В. А., Приходько А. А., Редчиц Д. А. Математическое моделирование связанных задач динамики и аэродинамики роторов ветроагрегатов Дарье и Савониуса. *Актуальні проблеми механіки суцільного*

середовища і міцності конструкцій: тези доповідей науково-технічної конференції пам'яті академіка НАНУ В. І. Мосаковського (м. Дніпропетровськ, 17-19 жовтня 2007 р.). Дніпропетровськь. 2007. С. 386–387.

20. Дзензерский В. А., Приходько А. А., Редчиц Д. А. Связанные задачи динамики и аэродинамики роторов ветроагрегатов Дарье и Савониуса. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики:* зб. тезисов докладов XIII международного симпозиума (м. Херсон, 11-16 июня 2007 р.). Херсон. 2007. С. 134–138.

21. Дзензерский В. А., Редчиц Д. А., Хачапуридзе Н. М., Моисеенко С. В. Аэродинамика трехэлементного профиля 30P30N в крейсерской и взлетно-посадочной конфигурации. *Вісник Дніпропетровського университету.* 2013. Т. 21. № 5, Вип. 17. Т. 2. С. 59–68.

22. Дзензерский В. А., Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Хачапуридзе Н. М. Математическое моделирование аэродинамики вертикально-осевой ветроэнергетической установки с роторами Дарье и Савониуса. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2012. Вип. 19. С. 96–111.

23. Дзензерский В. А., Хачапуридзе Н. М., Редчиц Д. А. Аэродинамика роторов вертикально-осевых ветроэнергетических установок Дарье и Савониуса. *Нетрадиційні і поновлювані джерела енергії як альтернатива первинних джерел енергії в регіоні:* зб. наук. статей V міжнародної науково-практичної конференції (м. Львів, 2-3 квітня 2009 р.). Львів. 2009. С. 176–180.

24. Дзензерский В. А., Хачапуридзе Н. М., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Численное моделирование турбулентного обтекания многоэлементного профиля. *Методы дискретных особенностей в задачах матфизики:* зб. тез XV международного симпозиума (м. Херсон, 13-18 червня 2011 р.). Херсон. 2011. С. 167–170.

25. Дзензерский В. А., Хачапуридзе Н. М., Редчиц Д. А., Пахомова Ю. А. Численное моделирование нестационарных турбулентных несжимаемых течений при обтекании тел сложной геометрии. *Методы дискретных*

особенностей в задачах матфизики: зб. тез XIV международного симпозиума (м. Херсон, 8-12 червня 2009 р.). Херсон. 2009. С. 283–286.

26. Дзензерский В. А., Хачапуридзе Н. М., Редчиц Д. А., Пахомова Ю. А. Математическое моделирование аэродинамики вертикально-осевых ветроэнергетических установок на основе уравнений Навье-Стокса. *Математичні проблеми технічної механіки* зб. тез. Х міжнародної наукової конференції (м. Дніпродзержинськ, 19-22 квітня 2010 р.). Дніпродзержинськ. 2010. С. 95.

27. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно–разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики. *Уч. зап. ЦАГИ.* 1972. Т. 3, № 6. С. 68–77.

28. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.

29. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Теоретическая физика, том II. М.: Наука, 1988. 512 с.

30. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368 с.

31. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

32. Лятхер В. М., Милитеев А. Н., Милитеев Д. Н. Аэродинамические нагрузки на элементы ветроагрегатов с вертикальной осью вращения. *Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт.* 1986. № 4. С. 65-73.

33. Моисеенко С. В., Шульженко М. А., Редчиц Д. А. Математическое моделирование аэродинамики транспортного средства вблизи экрана. *Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделюванні об'єктів, явищ і процесів:* тези III всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Миколаїв, 17-19 жовтня 2018 р.). Миколаїв. 2018. С. 23–24.

34. Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.

35. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 352 с.

36. Полевой О. Б., Редчиц Д. А. Оценка аэродинамических и тепловых нагрузок на корпус капсулы HYPERLOOP в вакуумированном путепроводе. *Региональный межвузовский сборник научных работ.* 2019. Вып. 4 (123). С. 3–12.

37. Полевой О. Б., Редчиц Д. А. Оценка аэродинамических и тепловых нагрузок на корпус капсулы HYPERLOOP в вакуумированном путепроводе. *Информационные технологии в металлургии и машиностроении:* зб. тезисов научно-технической конференции (м. Дніпро, 26-28 березня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 68.

38. Полевой О. Б., Редчиц Д. А., Скосарь В. Ю., Тарасов С. В., Бурылов С. В., Хачапуридзе Н. М. Транспортная система HYPERLOOP – проблемы и перспективы. *Информационные технологии в металлургии и машиностроении:* зб. тезисов научно-технической конференции (м. Дніпро, 26-28 березня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 15.

39. Приходько А. А., Редчиц Д. А. Численное моделирование дозвукового обтекания осциллирующего профиля на основе уравнений Навье-Стокса *Техническая механика*. 2006. № 1. С. 104–114.

40. Приходько А. А., Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарного обтекания роторов ветроэнергетических установок на основе уравнений Навье-Стокса. *Модели и методы аэродинамики:* материалы седьмой международной школы-семинара (г. Евпатория, 5-14 июня 2007 р.). Евпатория. 2007. С. 201–202.

41. Приходько А. А., Редчиц Д. А., Самсонова О. В. Аэродинамика роторов ветроагрегатов: программно-методическое обеспечение на основе уравнений Навье-Стокса и результаты расчетов. *Передовые космические технологии на благо человечества:* тезисы докладов международной конференции (м. Дніпропетровськ, 18-20 квітня 2007 р.). Дніпропетровськ. 2007. С. 31.

42. Пуллиам Т. Х., Стегер Дж. Л. Расчет трехмерных течений сжимаемого газа с помощью неявного разностного метода. *Аэрокосмическая техника*. 1980. Т. 18, № 4. С. 24-36.

43. Развитие теории нелинейных систем и разработка моделей левитационного транспорта: отчет о НИР (промежуточ.): 41-69 / Институт транспортных систем и технологий НАН Украины; рук. Дзензерский В.А.; исполн.: Редчиц Д.А. и др. Днепр, 2018. 74 с. № ГР 0116U008318.

44. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1992. 536 с.

45. Райзер Ю.П., Базелян Э.М. Искровой разряд. Москва: МФТИ, 1997. 320 с.

46. Редчиц Д. А Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью диэлектрического барьерного разряда. *Вісник Харківського національного університету.* 2013. №1063. С. 144-159.

47. Редчиц Д. А Управление отрывом потока на цилиндре с помощью плазменных актуаторов. *Конференция по аэродинамике: зб. тез XXIII научно-технической конференции* (м. Москва, 1-2 березня 2012 р.). Москва. 2012. С. 112.

48. Редчиц Д. А. Аэродинамика вращающейся лопасти ротора Дарье. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2007. Вип. 11, Т. 2. С. 205–220.

49. Редчиц Д. А. Аэродинамика ротора Савониуса. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2009. Вип. 13, Т. 1. С. 27–41.

50. Редчиц Д. А. Аэродинамика трехлопастного ротора Савониуса. *Вестник двигателестроения.* 2009. Вип. 13, № 3. С. 71–76.

51. Редчиц Д. А. Компьютерное моделирование гидромеханики слабоионизированной плазмы. *Комп'ютерна гідромеханіка:* зб. тез доповідей науково-практичної конференції (м. Київ, 30 вересня-1 жовтня 2014 р.). Київ. 2014. С. 31–32.

52. Редчиц Д. А. Компьютерное моделирование обтекания профиля транспортного средства вблизи экрана турбулентным потоком. *Информационные технологии в металлургии и машиностроении:* зб. тез

научно-технической конференции (м. Дніпропетровськ, 29-31 березня 2016 р.). Дніпропетровськ. 2016. С. 37.

53. Редчиц Д. А. Компьютерное моделирование обтекания турбулентным потоком транспортного средства вблизи экрана. *Комп'ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 29-30 вересня 2016 р.). Київ. 2016. С. 52–53.

54. Редчиц Д. А. Математическая модель диэлектрического барьерного разряда в воздухе *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2014. Вып. 3 (50). С. 429–436.

55. Редчиц Д. А. Математическое моделирование аэродинамики роторов ветроэнергетических установок. *Конференція молодих вчених та спеціалістів:* зб. тез доповідей щорічної науково-технічної конференції (м. Київ, 15-16 січня 2014 р.). Київ. 2014. С. 111.

56. Редчиц Д. А. Математическое моделирование аэродинамических процессов при обтекании вертикально-осевых ветроэнергетических установок. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2009. Вип. 2 (35). С. 374–378.

57. Редчиц Д. А. Математическое моделирование диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2011. Вып. 3 (42). С. 359–365.

58. Редчиц Д. А. Математическое моделирование диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу:* матеріали IV міжнародної наукової конференції (м. Дніпропетровськ, 1-3 листопада 2012 р.). Дніпропетровськ. 2012. С. 80–83.

59. Редчиц Д. А. Математическое моделирование обтекания транспортного средства вблизи экрана. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 24-26 травня 2016 р.). Херсон. 2016. С. 270–273.

60. Редчиц Д. А. Математическое моделирование обтекания трехэлементного профиля 30P30N. *Комп’ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 29-30 вересня 2010 р.). Київ. 2010. С. 34–35.

61. Редчиц Д. А. Математическое моделирование отрывных течений на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса. *Научные ведомости Белгородского государственного университета.* 2009. №13 (68). С. 118–146.

62. Редчиц Д. А. Математическое моделирование плазмы диэлектрического барьерного разряда в воздухе *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2015. Вып. 3 (54). С. 452–458.

63. Редчиц Д. А. Математическое моделирование слабоионизированной плазмы диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Сучасний стан та проблеми двигунобудування:* матеріали міжнародної науково-технічної конференції (м. Миколаїв, 19-21 листопада 2014 р.). Миколаїв. 2014. С. 247–250.

64. Редчиц Д. А. Математическое моделирование физических особенностей турбулентного обтекания многоэлементного профиля. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2010. Вип. 3 (39). С. 398–403.

65. Редчиц Д. А. Моделирование воздействия диэлектрического барьерного разряда на находящийся в покое воздух. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2012. Вип. 18. С. 161–174.

66. Редчиц Д. А. Моделирование нестационарного обтекания роторов ветроэнергетических установок. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу:* матеріали II міжнародної наукової конференції (м. Дніпропетровськ, 13-15 листопада 2008 р.). Дніпропетровськ. 2008. С. 61– 64.

67. Редчиц Д. А. Моделирование нестационарного обтекания роторов ветроэнергетических установок. *XIII міжнародний конгрес двигунобудівників:* зб. тез доповідей (м. Харків, 14-19 вересня 2008 р.). Харків. 2008. С. 111.

68. Редчиц Д. А. Применение методов математического моделирования динамики и аэродинамики к проектированию ветроэнергетических установок. *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх*

обслуговування: матеріали всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Херсон, 13-14 вересня 2018 р.). Херсон. 2018. С. 233–238.

69. Редчиц Д. А. Разработка автоматизированного препроцессора для вычислительной гидродинамики. *Вісник Дніпропетровського университета.* 2012. Т. 20, № 5, Вип. 16, Т. 1. С. 32–43.

70. Редчиц Д. А. Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью плазменных актуаторов. *Информационные технологии в управлении сложными системами:* сборник докладов научной конференции (м. Дніпропетровськ, 19-20 червня 2013 г.). Дніпропетровськ. 2013. С. 153.

71. Редчиц Д. А. Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью четырех плазменных актуаторов. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2013. Вип. 3 (42). С. 286–291.

72. Редчиц Д. А. Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью плазменных актуаторов. *Техническая механика.* 2014, № 2. С.106–119.

73. Редчиц Д. А. Управление отрывом потока воздуха с помощью плазменных актуаторов. *Комп'ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 1-2 жовтня 2012 р.). Київ. 2012. С. 22–23.

74. Редчиц Д. А. Численно-аналитическая модель диэлектрического барьерного разряда. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу:* матеріали V міжнародної наукової конференції (м. Дніпропетровськ, 6-8 листопада 2014 р.). Дніпропетровськ. 2014. С. 77–80.

75. Редчиц Д. А. Численное моделирование диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Техническая механика.* 2014, № 4. С. 102–117.

76. Редчиц Д. А. Численное моделирование закритического обтекания профиля турбулентным несжимаемым потоком. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2007. Вип. 11, Т. 1. С. 12–24.

77. Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарных турбулентных отрывных течений при обтекании ротора Савониуса. *Авиационно-космическая техника и технология.* 2008. №5. С. 53–58.

78. Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарных турбулентных отрывных течений при обтекании роторов Дарье и Савониуса. *Комп'ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 30 вересня-1 жовтня 2008 р.). Київ. 2008. С. 43.

79. Редчиц Д. А. Численное моделирование обтекания ротора Дарье вертикально-осевой ветроэнергетической установки. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2008. Вип. 12. С. 157–172.

80. Редчиц Д. А. Численное моделирование плазмы диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування:* матеріали V всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Херсон, 1-3 жовтня 2014 р.). Херсон. 2014. С. 107–111.

81. Редчиц Д. А. Численное моделирование турбулентного обтекания трехэлементного профиля 30P30N. *Информационные технологии в управлении сложными системами:* зб. тез наукової конференції (м. Дніпропетровськ, 24 червня 2011 р.). Дніпропетровськ. 2011. С. 61–64.

82. Редчиц Д. А. Численное моделирование управления отрывом потока при обтекании цилиндра с помощью плазменных актуаторов. *Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях:* зб. тез науково-практичної конференції з міжнародною участю (м. Харків, 24-27 квітня 2012 р.). Харків. 2012. С. 378–379.

83. Редчиц Д. А. Численное моделирование физических процессов при турбулентном обтекании транспортного средства. *Диференціальні рівняння та проблеми аерогідромеханіки й тепломасопереносу:* зб. тез доповідей всеукраїнської наукової конференції (м. Дніпро, 28-30 вересня 2016 р.). Дніпро. 2016. С. 86–87.

84. Редчиц Д. А., Белоусова Т. П., Выгоднер И. В., Ляхович Т. П., Моисеенко С. В. Автоматизированный препроцессор для задач вычислительной аэродинамики. *Региональный межвузовский сборник научных работ.* 2018. Вып. 4 (117). С. 61–71.

85. Редчиц Д. А., Гладун С. Н. Расчет эффекта Магнуса с помощью уравнений Навье-Стокса. *Людина і космос:* зб. тез доповідей IX міжнародної молодіжної науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 18-20 квітня 2007 р.). Дніпропетровськ. 2007. С. 41.

86. Редчиц Д. А., Гуржий А. А. Численное моделирование эффекта Магнуса при обтекании кругового цилиндра невозмущенным потоком вязкой жидкости. *Прикладная гидромеханика.* 2012. Т. 14, № 1. С. 63–71.

87. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В Численное моделирование диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез п'ятої міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 28-30 травня 2013). Херсон. 2013. С. 154–156.

88. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Аэродинамика роторов вертикально-осевых ветроэнергетических установок. *Безпека життєдіяльності на транспорті і виробництві - освіта, наука, практика:* зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 14-16 вересня 2017 р.). Херсон. 2017. С. 368–373.

89. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Компьютерное моделирование динамики и электродинамики плазмы диэлектрического барьерного разряда. *Информационные технологии в металлургии и машиностроении:* зб. тез научно-технической конференции (м. Дніпропетровськ, 24- 26 березня 2015 р.). Дніпропетровськ. 2015. С. 36.

90. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Математическое моделирование дозвукового турбулентного обтекания колеблющегося профиля NACA 0015. *Прикладні питання математичного моделювання.* 2018. №. 2. С. 133–145.

91. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Моделирование аэродинамики роторов ветроэнергетических установок. *Pontus Euxinus:* зб. тез VII міжнародної конференції (м. Севастополь, 24-27 травня 2011 р.). Севастополь. 2011. С. 200.

92. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Турбулентное обтекание трехэлементного профиля. *Математические проблемы технической механіки:*

зб. тез міжнародної конференції (м. Дніпропетровськ, 13-15 квітня 2011 р.). Дніпропетровськ. 2011. С. 137.

93. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Численное моделирование аэродинамики ветроэнергетической установки с роторами Дарье и Савониуса. *Pontus Euxinus:* зб. тез. VIII міжнародної конференції (м. Севастополь, 1-4 жовтня 2013 р.). Севастополь. 2013. С. 166.

94. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Численное моделирование обтекания турбулентным потоком транспортного средства вблизи экрана. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2016. Вып. 3 (58). С. 398–402.

95. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Алёшин Д. О. Численное моделирование процессов динамики и аэродинамики роторов вертикально-осевых ветроэнергетических установок. *Удосконалювання енергоустановок методами математичного і фізичного моделювання:* XVII міжнародна науково-технічна конференція (м. Харків, 07-11 жовтня 2019 р.). Харків. 2019. С. 23.

96. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Пахомова Ю. А. Математическое моделирование процессов аэродинамики и электродинамики при работе плазменных актуаторов. *Dynamical System Modelling and Stability Investigation:* proc. of international conference report (м. Київ, 29-30 травня 2013 р.). Київ. 2013. P. 189.

97. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Пахомова Ю. А. Математическое моделирование турбулентного обтекания трехэлементного профиля 30P30N. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез доповідей шостої міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 27-29 травня 2014 р.). Херсон. 2014. С. 208–211.

98. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Пахомова Ю. А. Численное моделирование управления отрывом потока при обтекании цилиндра с помощью плазменных актуаторов. *Тараповские чтения:* зб. тез міжнародної конференції (м. Харків, 30-31 травня 2012 р.). Харків. 2012. С. 92.

99. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Пахомова Ю.А. Моделирование турбулентного обтекания трехэлементного профиля 30P30N. *Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях:* зб. тез. міжнародної конференції (м. Харків, 17-22 квітня 2011 р.). Харків. 2011. С. 89–90.

100. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Полевой О.Б. Современная вычислительная аэрогидродинамика: суперкомпьютеры, программное обеспечение, молодые ученые. *Экологические проблемы Азово-Черноморского региона и комплексное управление прибрежной зоной:* зб. тез науково-практичної молодіжної конференції (м. Севастополь, 29 вересня-5 жовтня 2014 р.). Севастополь. 2014. С. 143–146.

101. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Чашина И. Б., Выгоднер И. В. Обтекание цилиндра и аэродинамического профиля с учетом ламинарно-турбулентного перехода *Вестник Днепровского национального университета.* 2019. Вып. 23, Т. 27. С. 77–84.

102. Редчиц Д. А., Пахомова Ю. А. Математическое моделирование аэродинамики роторов вертикально-осевых ветроэнергетических установок. *Dynamical System Modelling and Stability Investigation:* proc. of international conference report (м. Київ, 29 травня 2009 р.). Київ. 2009. P. 229.

103. Редчиц Д. А., Пахомова Ю. А. Численное моделирование обтекания трехэлементного профиля. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу:* матеріали III міжнародної наукової конференції (м. Дніпропетровськ, 4-6 листопада 2010 р.). Дніпропетровськ. 2010. С. 67–69.

104. Редчиц Д. А., Полевой О. Б. Математическое моделирование сопряженных задач вычислительной аэродинамики. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* міжнародна науково-практична конференція (м. Херсон, 26–28 травня 2015 р.). Херсон. 2015. С. 217–220.

105. Редчиц Д. А., Полевой О. Б. Применение уравнений Навье-Стокса для решения прикладных задач аэрогидродинамики. *П’ятнадцята міжнародна*

*наукова конференція імені академіка М. Кравчука:*зб. тез доповідей (м. Київ, 15-17 травня 2014 р.). Київ. 2014. С. 262.

106. Редчиц Д. А., Польовий О. Б., Моисеенко С. В. Управление вихревой дорожкой Кармана с помощью плазменных актуаторов. *Вісник Дніпропетровського университету.* 2013. Т.21, № 5, Вип. 17, Т. 1.С. 63–80.

107. Редчиц Д. А., Приходько А. А. Аэродинамика роторов Дарье и Савониуса. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2007. № 5. С. 26–31.

108. Редчиц Д. А., Приходько А. А. Численное моделирование нестационарных турбулентных отрывных несжимаемых течений на основе уравнений Навье-Стокса. *Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень*. 2007. № 1. С. 261–279.

109. Редчиц Д. А., Приходько А. А. Математическое моделирование и исследование динамической системы нестационарный поток-ротор ветроагрегата. *Dynamical System Modelling and Stability Investigation:* proc. of international conference report (м. Київ, 22-25 травня 2007 р.). Київ. 2007. С. 229.

110. Редчиц Д. А., Приходько А. А. Численное моделирование обтекания роторов ветроагрегатов турбулентным потоком. *Людина і космос:* зб. тез доповідей IX міжнародної молодіжної науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 18-20 квітня 2007 р.). Дніпропетровськ. 2007. С. 42.

111. Редчиц Д. А., Тарасов А.С. Математическое моделирование аэродинамики и динамики ветроэнергетической установки с роторами Дарье и Савониуса. *Конференція молодих вчених та спеціалістів:* зб. тез доповідей щорічної науково-технічної конференції (м. Київ, 15-16 січня 2014 р.). Київ. 2014. С. 112.

112. Редчиц Д. А., Тарасов С. В Аэродинамика вертикально-осевой ветроэнергетической установки с роторами Дарье и Савониуса. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2012. Вып. 3 (42). С. 303–309.

113. Редчиц Д. А., Тарасов С. В. Компьютерное моделирование аэродинамики симметричных и несимметричных профилей. *Комп'ютерна*

гідромеханіка: зб. тез науково-практичної конференції (м. Київ, 26-27 вересня 2018 р.). Київ. 2018. С. 48–49.

114. Редчиц Д. А., Тучина У. Н., Моисеенко С. В. Численное моделирование нестационарных потоков холодной плазмы. *Космические технологии: настоящее и будущее:* зб. тезисов 7-й международной конференции (м. Дніпро, 21-24 травня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 66.

115. Редчиц Д. А., Щеглов Г. А, Марчевский И. К. Численное моделирование диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора. *Сучасні енергетичні установки на транспорті і технології та обладнання для їх обслуговування:* матеріали IV всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Херсон, 9-11 жовтня 2013 р.). Херсон. 2013. С. 307–311.

116. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.

117. Сокол Г. И., Приходько А. А., Редчиц Д. А., Назаренко О. А. Влияние аэродинамического и акустического полей ветроагрегата на атмосферу Земли. *Дніпровська орбіта – 2007*: матеріали наукових читань (м. Дніпропетровськ, 29-30 жовтня 2007 р.). Дніпропетровськ. 2007. С. 113–119.

118. Сокол Г. И., Приходько А. А., Редчиц Д. А., Назаренко О. А., Пахомова Ю. А Генерирование инфразвуковых волн вертикально-осевыми ветроагрегатами в атмосфере Земли. *Вісник Дніпропетровського університету. Ракетно-космічна техніка.* 2007. Вип. 11, Т. 2. С. 226–230.

119. Стрелец М. Х., Шур М. Л. Метод масштабирования сжимаемости для расчета стационарных течений вязкого газа при произвольных числах Маха. *ЖВМ и МФ.* 1988. Т. 28, № 2. С. 254–266.

120. Тарасов С. В., Редчиц Д. А, Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Аэродинамика ветроэнергетической установки с роторами Дарье и Савониуса. *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування:* матеріали міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 12-13 вересня 2019 р.). Херсон. 2019. С. 141.

121. Тарасов С. В., Редчиц Д. А, Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Математическое моделирование турбулентного обтекания симметричных и

несимметричных профилей. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2018. Вып. 3(66), Т. 1. С. 171–177.

122. Тарасов С. В., Редчиц Д. А, Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Численная реконструкция турбулентного обтекания цилиндра и аэродинамического профиля с учетом ламинарно-турбулентного перехода. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2019. Вып. 2(69), Т. 3. С. 172–178.

123. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Абрамовский Е. Р., Гладенко В. П., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Экспериментальное и численное изучение физических особенностей турбулентного обтекания J-лопасти ротора Дарье. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2017. Т. 25, № 5, Вип. 21, Т. 1. С. 12–26.

124. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Костюков И. Ю. Воспроизведение обтекания трехлопастного ротора Дарье. *Техническая механика.* 2012. № 4. С. 67–75.

125. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Аэродинамика J-профиля в турбулентном потоке воздуха при круговой продувке. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2017. Вып. 3 (62), Т. 2.С. 208–214.

126. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Математическое моделирование аэродинамики J-лопасти ротора Дарье вертикально-осевой ветроэнергетической установки. *Информационные технологии в металлургии и машиностроении:* зб. тезисов научно-технической конференции (м. Дніпро, 28-30 березня 2017 р.). Дніпро. 2017. С. 83.

127. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Математическое моделирование аэродинамики профилей симметричной и несимметричной формы. *Информационные технологии в металлургии и машиностроении:* зб. тезисов научно-технической конференции (м. Дніпро, 27-29 березня 2018 р.). Дніпро. 2018. С. 95.

128. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Математическое моделирование процессов ламинарно-турбулентного перехода в задачах внешней аэродинамики. *Сучасні інформаційні та інноваційні*

технології на транспорті. зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 28-30 травня 2019 р.). Херсон. 2019. С. 258–260.

129. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Численное моделирование процессов аэродинамики вертикально-осевой ветроэнергетической установки. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2017. Т. 24, № 5. Вип. 26. С. 153–167.

130. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Численное моделирование процессов аэродинамики J -лопасти ротора Дарье. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 23-25 травня 2017 р.). Херсон. 2017. С. 241–243.

131. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Численное моделирование аэродинамики профилей симметричной и несимметричной формы. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 29-31 травня 2018 р.). Херсон. 2018. С. 258–260.

132. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С., Чашина И. Б. Моделирование ламинарно-турбулентного перехода в задачах вычислительной аэродинамики. *Информационные технологии в металлургии и машиностроении:* зб. тезисов научно-технической конференции (м. Дніпро, 26-28 березня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 79.

133. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Польовий О. Б. Обчислювальна гідродинаміка на службі вітроенергетики. *Світогляд.* 2010. № 6. С. 33–40.

134. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Тарасов А. С. Математическое моделирование аэродинамики ветроэнергетической установки с роторами Дарье и Савониуса. *Информационные технологии в металлургии и машиностроении:* материалы научно-технической конференции (м. Дніпропетровськ, 26-28 березня 2013 р.). Дніпропетровськ. 2013. С. 57–58.

135. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Математическое моделирование аэродинамики симметричных и

несимметричных профилей. *Міжнародна конференція з математичного моделювання:* матеріали XIX міжнародної конференції (м. Херсон, 17-21 вересня 2018 р.). Херсон. 2018. С. 31.

136. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Математическое моделирование турбулентного обтекания цилиндра и аэродинамического профиля с учетом ламинарно-турбулентного перехода. *Міжнародна конференція з математичного моделювання:* матеріали XX міжнародної конференції (м. Херсон, 16-20 вересня 2019 р.). Херсон. 2019. С. 98.

137. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в задачах аэрогидромеханики. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій:* тези міжнародної науково-технічної конференції пам’яті академіка В. І. Моссаковського (м. Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 276–277.

138. Тарасов С. В., Яскевич Э. П., Редчиц Д. А., Костюков И. Ю. Математическое моделирование поля течения вокруг одиночной лопасти. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2010. Вип. 14, № 5, Т. 1. С. 152–164.

139. Тарасов С.В., Редчиц Д. А., Полевой О. Б., Чашина И. Б., Моисеенко С. В. Вычислительная гидродинамика на службе ветроэнергетики. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2016. Т.24, № 5, Вип. 20, Т. 1.С. 38–48.

140. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.

141. Тетервжов Я. И. Описание гидродинамической трубы ГТ-400. *Отчет НИО.* 1976. № 5. 43 с

142. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. М. Мир. 1991. Т. 1. С.501. Т. 2. С. 552.

143. Фрост У., Моулден Т. Турбулентность. Принципы и применения. М.: Мир, 1980. 535 с.

144. Хартвич П. М., Су Ч. Х. Односторонняя схема высокой точности для расчета несжимаемых трехмерных течений по уравнениям Навье-Стокса. *Аэрокосмическая техника.* 1990. № 7. С. 95–105.

145. Чжен П. Отрывные течения. М.: Мир, 1972-1973. Т. 3. 280 с. 298 с. 331 с.

146. Чжен П. Управление отрывом потока. М.: Мир, 1979. 552 с.

147. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.

148. Яскевич Э. П., Белобаба А.Т. Исследование структуры потока, обтекающего модель ротора ветроэнергетической установки. *Отчет НИР*. 1989. № 05-2163. 71 с.

149. Abe T., Takagaki M. Momentum coupling and flow induction in a DBD plasma actuator. *AIAA Paper*. 2009. No. 1622. 8 p.

150. Advanced Method of Boundary-Layer Control Based on Localized Plasma Generation. *FINAL REPORT Project*. 2009. No. UKE2-1508A-KV-05. 34 p.

151. Anderson J. Computational Fluid Dynamics. McGraw-Hill Education, 1995. 576 p.

152. Anderson W. K., Rausch R. D., Bonhaus D. L. Implicit multigrid algoritms for incompressible turbulent flows on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*. 1996. Vol. 128, No. 2. P. 391–408.

153. Anderson W. K., Bonhaus D. L., McGhee R. J., Walker B. S. Navier-Stokes computations and experimental comparisons for multielement airfoil configurations. *J. of Aircraft.* 1995. Vol. 32, No. 6. P. 1246–1253.

154. Asghar A., Jumper E. J. Phase Synchronization of Vortex Shedding from Multiple Cylinders Using Plasma Actuators. *AIAA Paper*. 2003. No. 1028. 9 p

155. Ashton N., West A., Mendonca F. Flow dynamics past a 30P30N three-element airfoil using improved delayed detached-eddy simulation. *AIAA Journal*. 2017. Vol. 54, No. 11. P. 3657–3666.

156. Aziz K., Hellums J. D. Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection. *Physics of Fluid.* 1967. Vol. 10, No. 2. P. 314–324.

157. Balcon N. Atmospheric pressure Radio Frequency discharges, diagnostic and numerical modeling: Doctoral dissertation. Australian National University, 2007.

158. Baldwin B. S., Barth T. J. A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows. *AIAA Paper.* 1991. No. 112. P. 39–78.

159. Baldwin B. S., Lomax H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper*. 1978. No. 257. P. 139–148.

160. Benek J. A., Buning P. G., Steger J. L. A 3-D embedding technique. *AIAA Paper.* 1985. No. 1523. 9 p.

161. Benek J. A., Steger J. L., Dougherty F. C. A flexible grid embedding technique with application to the Euler equations. *AIAA Paper.* 1983. No. 1944. 12 p.

162. Benjamin J. C., Maziar A., Benjamin S. C. An Investigation on the Application of DBD Plasma Actuators as Pressure Sensors. *AIAA Paper*. 2009. No. 651. 8 p.

163. Berry M., Chan T., Demmel J., Donato J., Dongarra, J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C, Van der Vorst H. Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia. USA, 1994. 195 p.

164. Boeuf J. P. Plasma display panels: physics, recent developments and key issues. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2003. Vol. 36, No. 6. P. 53–79.

165. Bogdanov E. A., Kolobov V. I., Kudryavtsev A. A., Tsendin L. D. Scaling laws for oxygen discharge plasmas. *Technical Physics*. 2002. Vol. 47, No. 8. P. 946–954.

166. Bogdanov E. A., Kudryavtsev A. A., Kuranov, A. I., Kozlov I. A., Tkachenko. T. V. 2D Simulation of DBD Plasma Actuator in Air. *AIAA Paper.* 2008. No. 1377. 16 p.

167. Bogdanov E. A., Kudryavtsev A. A., Tsendin L. D, Arslanbekov R. R., Kolobov V. I., Kudryavtsev V. V. Substantiation of the two-temperature kinetic model by comparing calculations within the kinetic and fluid models of the positive column plasma of a dc oxygen discharge. *Technical Physics.* 2003. Vol. 48, No. 8. P. 983–994.

168. Bonhaus D. L., Anderson W. K., Mavriplis D. J. Numerical study to assess sulfur hexafluoride as a medium for testing multielement airfoils. *NASA Technical Paper.* 1995. No. 3496. 31 p.

169. Bourdon A., Pasko V. P., Liu N. Y., Celestin S., Segur P., Marode E. Efficient models for photoionization produced by non-thermal gas discharges in air based on radiative transfer and the Helmholtz equations. *Plasma Source Sci. Technol.* 2007. Vol. 16, No. 3. P. 722–733.

170. Boussinesq J. Essai sur la theorie des l'eaux courantes. M*em. Sav. Etr. Acad. Sc. Paris.* 1877. 23 p.

171. Bradshaw P., Ferriss P. H., Atwell N. P. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equations. *Journal of Fluid Mechanics*. 1963. Vol. 28. P. 593–616.

172. Briley W. R., McDonald H. Solution of the multidimensional Navier-Stokes equations by a generalized implicit method. *Journal of Computation Physics*. 1977. Vol. 24, No.4. P. 372–397.

173. Briley W. R., McDonald H., Shamreth S. J. A low Mach number Euler formulation and application to time–iterative LBI schemes. *AIAA Journal*.1983. Vol. 21. № 10. P. 1464–1469.

174. Brown D. L., William D. Overture – Object-oriented tools for overset grid applications. *AIAA Paper*. 1999. No. 3130. 16 p.

175. Capitelli M., Bardsley J.N. Nonequilibrium Processes in Partially Ionized Gases. New York & London: Plenum Press, 1990. 695 p.

176. Capitelli M., Ferreira C.M., Gordiets B.F., Osipov A.I. Plasma kinetics in atmospheric gases. Berlin: Springer, 2000. 300 p.

177. Caretto L. S., Gosman A. D., Patankar S. V., Spalding D. B. Two calculation procedures for steady three-dimensional flows with recirculation. *Proceedings of the 3rd Int. Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Paris, Franc. 1972. P. 60.

178. Castellanos A. Electrohydrodynamics. Wien & New York: Springer Verlag, 1998. 363 p.

179. Cebeci T. The laminar boundary layer on a circular cylinder started impulsively from rest. *Journal of Computational Physics.* 1979. Vol. 31. P. 153–172.

180. Cebeci T., Smith A. A finite solution of the incompressible turbulent boundary–layer equations by an eddy viscosity concept. *Proc. AFOSR–IFR–Stanford Conference.* 1969. Vol. 1. P. 23–56.

181. Chan R. K.-C., Street R. L. A computer study of finite-amplitude water waves. *Journal of Computation Physics*. 1970. Vol. 6. P. 68–94.

182. Chan R. K.-C., Street R. Lt., Strelkoff T. Computer studies of finite-amplitude water waves. *Tech. Rep. of Dep. of Civil Eng*. 1969. No. 104. 126 p.

183. Chin V., Peters D., Spaid F., McGhee R. J. Flowfield measurements about a multi-element airfoil at high Reynolds numbers. *AIAA Journal*. 1993. Vol. 5, No. 4. P. 12–23.

184. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computation Physics.* 1967. Vol. 2. P. 12–26.

185. Coder J. M., Maughmer M. D. One-Equation Transition Closure for Eddy-Viscosity Turbulence Models in CFD. *AIAA Paper.* 2012. No. 672. 9 p.

186. Corke T. Cavalieri D., Matlis E. Boundary Layer Instability on a Sharp Cone at Mach 3.5 with Controlled Input. *AIAA Journal*. 2002. Vol. 40, No. 5. 6 p.

187. Corke T., Jumper E., Post M., Orlov D. Application of weakly ionized plasmas as wing flow control devices. *AIAA Paper*. 2002. No. 350. 9 p.

188. Corke T., Mertz B., Pate M. Plasma Flow Control Optimized Airfoil. *AIAA Paper.* 2006. No. 1208. 12 p.

189. Durbin P. A. An intermittency model for bypass transition. I*nt. J. Heat Fluid Flow.* 2012. Vol. 36. P. 1–6.

190. Durbin P. A., Mansour N. N., Yang Z. Eddy viscosity transport model for turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1972. Vol. 44. P. 78–99.

191. Durscher R., Roy S. Induced flow from serpentine plasma actuators acting in quiescent air. *AIAA Paper*. 2011. No. 957. 11 p.

192. Enloe C., McHarg M., Font, G. I., McLaughlin T. Plasma-induced force and self-induced drag in the dielectric barrier discharge aerodynamic plasma actuator. *AIAA Paper*. 2009. No. 1622. 8 p.

193. Enloe C., McLaughlin T., Gregory J., Medina R., Miller W. Surface potential and electric field structure in the aerodynamic plasma actuator. *AIAA Paper*. 2008. No. 1103. 11 p.

194. Enloe C., McLaughlin T., VanDyken R., Fischer J. Plasma structure in the aerodynamic plasma actuator. *AIAA Paper*. 2004. No. 844. 8 p.

195. Enloe C., McLaughlin T., VanDyken R., Kachner K. D., Jumper E. J., Corke T. C. Mechanisms and Responses of a Single Dielectric Barrier Plasma Actuator: Plasma Morphology. *AIAA Journal*. 2004. Vol. 42, No. 3. P. 589–594.

196. Font G. Boundary Layer Control with Atmospheric Plasma Discharges. *AIAA Journal*. 2006. Vol. 44, No. 7. P. 121–131.

197. Font G., Enloe C., Newcomb J., Teague, A., Vasso A. Effects of oxygen content on the behavior of the dielectric barrier discharge aerodynamic plasma actuator. *AIAA Paper*. 2010. No. 545. 16 p.

198. Font G., Morgan W. L. Plasma Discharges in Atmospheric Pressure Oxygen for Boundary Layer Separation Control. *AIAA Paper*. 2005. No. 4632. 8 p.

199. Forte M., Jolibois J., Moreau E., Touchard G., Cazalens M. Optimization of a dielectric barrier discharge actuator by stationary and non-stationary measurements of the induced flow velocity–application to airflow control. *AIAA Paper*. 2006. No. 2863. 9 p.

200. Gao J., Li X., Lin D. Numerical simulation of the noise from the 30P30N highlift airfoil with spectral difference method. *AIAA Paper*. 2017. No. 3363. 16 p.

201. Gatski T. B., Speziale C. G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 1993. Vol. 254. P. 59–78.

202. Germano M. Turbulence: the filtering approach. *Journal of Fluid Mechanics*. 1992. Vol. 238. P. 325–336.

203. Golubovskii Yu., Maiorov V. A., Behnke J., Behnke J. F. B. Influence of interaction between charged particles and dielectric surface over a homogeneous

barrier discharge in nitrogen. *Journal of Physics D. Applied Physics*. 2002. Vol. 35, No. 8. P. 751–761.

204. Gordiets B. F., Ferreira C. M. Kinetic Model of a Low-Pressure N2-O2 flowing glow discharge. *IEEE Transactions on plasma science*. 1995. Vol. 23, No. 4. P. 750–768.

205. Gorski J. J. TVD solution of the incompressible Navier-Stokes equations with an implicit multigrid scheme. *AIAA Paper*. 1988. No. 3699. 12 p.

206. Grundmann S. Transition control using dieletric barrier discharge actuators. Doctoral dissertation. TU-Darmstadt, Darmstadt, 2008.

207. Hagelaar G. J., Pitchford L. C. Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models. *Plasma Sources Sci. Technol.* 2005. Vol. 44, No. 6. P. 722–733.

208. Hall K. D. Potential flow model for plasma actuation as a lift enchancement device. Master's thesis. University of Notre Dame, 2004.

209. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface. *Physics of Fluids*. 1965. Vol. 8, No. 12. P. 2182–2189.

210. Harten A. A high resolution scheme for the computation of wear solution of hyperbolic conservation laws. *Journal of Computation Physics*. 1983. Vol. 49. P. 357–393.

211. Harten A. Preliminary result on the extension of ENO schemes to two-dimensional problems in nonlinear hyperbolic problems. *Lect. Notes in Math.* 1987. Vol. 14. P. 23–40.

212. Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes *.Journal of SIAM*. 1987. Vol. 24, No. 2. P. 279–309.

213. Harten A., Osher S., Engquist B., Chakravarthy S. R. Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes. *Appl. Numerical Math.* 1986. Vol. 21, No. 3. P. 347–377.

214. Herbert T., Bertololli F. P. Stability analysis of nonparallel boundary layers. *J. Bull Am. Phys. Soc.* 1987. Vol. 32. P. 2079–806.

215. High-lift aerodynamics. AGARD CP-515. Banff, Alberta, Canada. 1993. 491 p.

216. Hilbun W., Case B. Preliminary Development of a Computational Model of a Dielectric Barrier Discharge. *AIAA Paper*. 2005. No. 1176. 9 p.

217. Hsu C. H., Hartwich P. M. Incompressible Navier-Stokes solutions for a sharp-edged double-delta wing. *AIAA Paper*. 1987. No. 206. 11 p.

218. https://jaimeirastorza.wordpress.com/2017/03/17/elegance-in-flight-book-review/transition-laminar-turbulent-flow/ (дата звернення: 17.03.2017).

219. Hultgren L. S., Ashpis D. E. Demonstration of separation delay with glow-discharge plasma actuators. *AIAA Paper.* 2003. No. 1025. 11 p.

220. Jawahar H., Azarpeyvand M., Silva C. Experimental investigation of flow around three-element high-lift airfoil with morphing fillers. *AIAA Paper*. 2017. No. 3364. 23 p.

221. Johnson D. A., King L. S. A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulent boundary layers. *AIAA Journal*. 1985. Vol. 23, No. 11. P. 1684–1699.

222. Johnson R. A., Belk D. M. Multigrid approach to overset grid communication. *AIAA Journal*. 1995. Vol. 33, No. 12. P. 2305–2308.

223. Koren B. A robust upwind discretization method for advection, diffusion and source terms. *Numerical Methods for Advection-Diffusion Problems*. 1993. Vol. 11, No. 11. P. 117–137.

224. Kossyi A. Yu., Matveyev A. A,. Silakov V. P. Kinetic scheme of the non-equilibrium discharge in nitrogen-oxygen mixtures. *Plasma Sources Science and Technology.* 1992. Vol. 1, No. 3. P. 207–220.

225. Langtry R. B., Menter F. R. Correlation-Based Transition Modeling for Unstructured Parallelized Computational Fluid Dynamics Codes. *AIAA Journal*. 2009. Vol. 47, No. 12. P. 2984–2906.

226. Launder B. E., Morse A., Rodi W., Spalding D.B. Prediction of free shear flows–A comparison of the performance of six turbulence models. *Free Turbulent Shear Flows*. 1973. Vol. 1. P. 361–422.

227. Li L., Liua P., Guo H., Hou Y., Geng, X., Wang J. Aeroacoustic measurement of 30P30N high-lift configuration in the test section with Kevlar cloth and perforated plate. *Aerospace Science and Technology*. 2017. Vol. 70. P. 590–599.

228. Likhanskii A. The role of the photoionization in the numerical modeling of the DBD plasma actuator. *AIAA Paper*. 2009. No. 841. 14 p

229. Likhanskii A., Shneider M., Macheret S., Miles R. Modeling of interaction between weakly ionized near-surface plasmas and gas flow. *AIAA Paper*. 2006. No. 1204. 12 p.

230. Lin J. C., Robinson S., McGhee R. J. Separation control on high Reynolds number multielement airfoils. *AIAA J.* 1992. Vol. 2, No. 2. P. 45–66.

231. Liou M.-S. A sequel to AUSM: AUSM+. *Journal of Computation Fluids*. 1996. No. 2. P. 364–382.

232. Liou M.-S., Steffen C. J. A new flux splitting scheme. *Journal of Computation Physics.* 1993. No. 1. P. 23–39.

233. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially nonoscillatory schemes. *Journal of Computation Physics*. 1994. No. 1. P. 200 –212.

234. Macheret S. O., Schneider M. N., Miles R. B. Magnetohydrodynamic and Electrohydrodynamic Control of Hypersonic Flows of Weakly Ionized Plasmas. *AIAA Journal*. 2004. Vol. 42, No. 7. P. 1378–1387.

235. Massines F., Rabehi A., Decomps P. Experimental and theoretical study of a glow discharge at atmospheric pressure controlled by dielectric barrier. *Journal of Applied Physics.* 1998. No. 83. P. 2950–2957.

236. Matveyev A. A., Silakov V. P. Theoretical study of the role of ultraviolet radiation of the non-equilibrium plasma in the dynamics of the microwave discharge in molecular nitrogen. *Plasma Sources Science and Technology*. 1999. Vol. 8, No. 1. P. 162–178.

237. Mayle R. E. The role of laminar turbulent transition in gas turbine engines. *Journal of Turbomachinery.* 1991. Vol. 113. P. 509–537.

238. Mayle R., Schultz A. The path to predicting bypass transition. *Journal of Turbomachinery*. 1997. Vol. 119. P. 405–411.

239. Meakin R. L. Object X-rays for cutting holes in composite overset structured grids. *AIAA Paper.* 2001. No. 2537. 7 p.

240. Menter F. R. Two-equation eddy-viscocity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*. 1994. Vol. 32, No. 8. P. 1598–1605.

241. Menter F. R., Langtry R. B., Völker S. Transition Modelling for General Purpose CFD Codes. *Journal of Numerical Mathematics*. 2006. Vol. 4. P. 277–303.

242. Menter F. R., Smirnov P. E., Liu T., Avancha R. One-Equation Local Correlation-Based Transition Model. *Flow Turbulence Combust.* 2015. Vol. 95, No. 4. P. 583–619.

243. Moreau E. Airflow control by non-thermal plasma actuators. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2007. Vol. 40, No. 3. P. 605–636.

244. Moreau E., Labergue A., Touchard G. DC aпd pulse surface corona discharge along a PMMA flat plate iп air: electrical properties aпd discharge-iпduced ioпic wiпd. *Journal of Advanced Oxidation Technologies*. 2005. Vol. 8, No. 2. P. 595-604.

245. Nemec M. Optimal Shape Design Of Aerodynamic Configurations: A Newton-Krylov Approach: Doctoral dissertation. University of Toronto, 2007.

246. Nishida H., Abe T. Validation study of numerical simulation of discharge plasma on DBD plasma actuator. *AIAA Paper*. 2011. No. 3913. 12 p.

247. Nudnova M., Kindusheva S., Aleksahdrov N., Starikovskiy A. Rate of plasma thermalization of pulsed nanosecond surface dielectric barrier discharge. *AIAA Paper*. 2010. No. 465. 15 p.

248. Opaits D. Experimental Investigation of DBD Plasma Actuators Driven by Repetitive High Voltage Nanosecond Pulses with DC or Low-Frequency Sinusoidal Bias. *AIAA Paper*. 2007. No. 4532. 12 p.

249. Pascioni K., Cattafesta L., Choudhari M. An experimental investigation of the 30P30N multi-element high-lift airfoil. *AIAA Paper*. 2014. N. 3062. 16 p.

250. Patankar S. V., Spalding D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. Jo*urnal Heat and Mass Transfer*. 1972. No. 15. P. 1787–1806.

251. Phelps A.V., Petrovi´c Z. Lj. Cold-cathode discharges and breakdown in argon: surface and gas phase production of secondary electrons. *Plasma Sources Science and Technology.* 1999. No. 8. P. 21–44.

252. Pietsch G. Peculiarities of Dielectric Barrier Discharges. *Contributions to Plasma Physics*. 2001. Vol. 41, No. 6. P. 620−628.

253. Post M., Corke T. Separation Control of High Angle of Attack Airfoil Using Plasma Actuators. *AIAA Journal*. 2004. Vol. 42, No. 11. P. 2177–2189.

254. Post M., Corke T. Separation Control Using Plasma Actuators–Stationary and Oscillating Airflows. *AIAA Paper*. 2004. No. 841. 14 p.

255. Prikhod'ko A. A., Redtchits D. A. Numerical modeling of a viscous incompressible unsteady separated flow past a rotating cylinder. *Fluid Dynamics*. 2009. Vol. 44, No. 6. P. 823–829.

256. Proceedings of the fifth Symposium on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows. NASA-CR-193000. Long Beach, CA, USA. 1992. 474 p.

257. Rai M. M. Navier-Stokes simulation of blade-vortex interaction using high-order accurate upwind schemes. *AIAA Paper*. 1987. No. 543. 15 p.

258. Redchyts D. Numerical simulation of wind turbine rotors aerodynamics. *PAMM*. 2008. Vol. 7, No 1. P. 2100049–2100050.

259. Redchyts D. O. Computational fluid dynamics: supercomputers, program tools, young scientists. *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування:* матеріали VII Міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 22-23 вересня 2016 р.). Херсон. 2016. С. 81–82.

260. Redchyts D. O., Gourjii A. A., Moiseienko S. V., Bilousova T. P. Aerodynamics of the turbulent flow around a multi-element airfoil in cruse configuration and in takeoff and landing configuration. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2019. Vol. 5, No 7 (101). P. 36–41.

261. Redchyts D. O., Shkvar E. A. Moiseienko S. V. Computational Simulation of Turbulent Flow Around Tractor-Trailers. *Fluid Dynamics and Materials Processing.* 2020. Vol. 16, No 1. P. 91–103

262. Redchyts D. O., Shkvar E. A. Moiseienko S. V. Control of Karman Vortex Street by using Plasma Actuators. *Fluid Dynamics and Materials Processing*. 2019. Vol. 15, No 5. P. 509–525.

263. Redchyts D., Zinchenko A., Prykhodko O. Numerical simulation of Darrieus and Savonius wind turbine aerodynamics. *International Congress on Industrial and Applied Mathematics*: proc. of 6th international congress (Zurich, Switzerland, 16-20 July 2007). Zurich. 2007. C. 134–138.

264. Rivir R., White A., Carter C., Ganguly B. AC and pulsed plasma flow control. *AIAA Paper*. 2004. No. 847. 8 p.

265. Roe P. L. Approximate riemann schemes. J*ournal of Computational Physics*. 1981. Vol. 43. P. 357–372.

266. Roe P. L. Characteristic-based schemes for the Euler equations. *Annual review of fluid mechanics*. 1986. Vol. 18. P. 337–365.

267. Roe P. L. Some contributions to the modeling of discontinuous flows *Applied Mathematics.* 1985. Vol. 22. P. 163–193.

268. Roe P. L., Pike J. Efficient construction and utilization of approximate Riemann solutions. *Computation methods in applied sciences and engineering*. 1984. Vol. 6. P. 499–518.

269. Rogers S. E. Comparison of implicit schemes for the incompressible Navier-Stokes equations and artificial compressibility. *AIAA Journal*. 1995. Vol. 33, No. 11. P. 2066–2072.

270. Rogers S. E. Kwak D. An upwind differencing scheme for the steady-state incompressible Navier-Stokes equations. *NASA-TM*. 1988. No. 101051. 27 p.

271. Rogers S. E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal Numerical Mathematics*. 1991. Vol. 8. P. 43–64.

272. Rogers S. E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations. *AIAA Journal.* 1990. Vol. 28, No. 2. P. 253–262.

273. Rogers S. E., Kwak D. Stedy and unstedy solutions of the incompressible Navier-Stokes Equations. *AIAA Journal*. 1991. Vol. 29, No. 4. P. 603–610.

274. Rogers S. E., Menter F., Durbin P. A., Mansour N. N. A comparison of turbulence models in computing multi-element airfoil flows. *AIAA Paper*. 1994. No. 291. 14 p.

275. Rogers S. E., Suhs N. E., Dietz W. E. PEGASUS 5: An Automated Preprocessor for Overset-Grid Computational Fluid Dynamics. *AIAA Journal*. 2003. Vol. 41, No. 6. P. 1037–1045.

276. Roshko A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics.* 1961. Vol. 10, No. 3. P. 345–356.

277. Roth J. R., Sherman D. M., Wilkinson S. P. Boundary Layer Flow Control with a One Atmosphere Uniform Glow Discharge Surface Plasma. *AIAA Paper*. 1998. No. 328. 17 p.

278. Roy S., Gaitonde D. V. Modeling surface discharge effects of atmospheric RF on gas flow control. *AIAA Paper*. 2005. No. 160. 9 p.

279. Rung T., Bunge U., Schatz M., Thiele F. Restatement of the Spalart-Allmaras eddy-viscosity model in strain-adaptive formulation. *AIAA Journal*. 2003. Vol. 4, No. 7. P. 1396–1399.

280. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia: PA, USA, 2003. 184 p.

281. Salari K. McWherter-Payne M Computational Flow Modeling of a Simplified Integrated Tractor-Trailer Geometry. SANDIA report. 2003. No. 3383. 49 p.

282. Santhanakrishnan A., Jakob J. D. On Plasma Synthetic Jet Actuators. *AIAA Paper*. 2006. No. 317. 14 p.

283. Savill A. M. Some Recent Progress in the Turbulence Modeling of By-Pass Transition. Near-Wall Turbulent Flows. NewYork: Elsevier, 1993. 829 p.

284. Segur P., Bourdon A., E. Marode E., Bessieres D., Paillol J. H. The use of an improved Eddington approximation to facilitate the calculation of photoionization in streamer discharges. *Plasma Source Sci. Technol.* 2006. Vol. 15, No. 4. P. 111–131.

285. Sentman D. D., Stenbaek-Nielsen H. C., McHarg M. G., Morrill J. S. Plasma chemistry of sprite streamers. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*. 2008. Vol. 113, No. 11. P. 1–33.

286. Sheldahl R. E., Klimas P. C. Aerodynamic characteristics of seven symmetrical airfoil sections through 180-degree angle of attack for use in aerodynamic analysis of vertical axis wind turbines. SAND-80-2114. USA. 1981. 124 p.

287. Sheng C. Predictions of JVX rotor performance in hover and airplane mode using high-fidelity unstructured grid CFD solver. Proceedings of the AHS 70th annual forum. Montreal, Canada, 2014. 15 p.

288. Shu C. W. TVB uniformly high-order schemes for conservation laws. *Math. Comput*. 1987. No. 179. P. 105–121.

289. Shur M. L, Strelets M. K., Travin A. K., Spalart P. R. Turbulence modeling in rotating and curved channels: Assessing the Spalart-Shur correction. *AIAA Journal*. 2000. Vol. 38, No. 5. P. 784–792.

290. Shyy W., Jayaraman B., Andersson A. Modeling of glow discharge-induced fluid dynamics. Journal of applied physics. 2002. Vol. 92. P. 6434–6443.

291. Smith A. High-Lift Aerodynamics. *AIAA J. of Aircraft*. 1975. Vol. 12, No. 6. P. 501–530.

292. Smith A. M., Gamberoni N. Transition, pressure gradient and stability theory. *Douglas Aircraft Co. Report* . 1956. No. ES26388. 48 p.

293. Son E. E., Son K. E. Plasma and Thermal Actuators for Flow Control. *AIAA Paper*. 2008. No. 1376. 7 p.

294. Spalart P. R., Rumsey C. L. Effective Inflow Conditions for Turbulence Models in Aerodynamic Calculations. *AIAA Journal*. 2007. Vol. 45, No. 10. P. 2544–2558.

295. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow. *AIAA Paper*. 1992. No. 112. 28 p.

296. Spalart P. R., Jou W. H., Strelets M., Allmaras S. R.. Comments on the feasibility of wings and on a hybrid RANS/LES approach. Proc. of first AFOSR International Conf. on DNS/LES. Columbus (USA). 1997. P. 137–147.

297. Spalart P. R., Shur M. On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. *Aerospace science and technology Journal*. 1997. Vol. 1, No 5. P. 297–366.

298. Stabnikov A. S., Garbaruk A. V. Comparative analysis of transition models at different farfield turbulence intensities. *Journal of Physics: Conference Series.* 2017. Vol. 929. P. 1–7.

299. Storms B. L., Ross J. C., Heineck J. T., Walker S. M., Driver D. M., Zilliac G. G. An Experimental Study of the Ground Transportation System (GTS) Model in the NASA Ames 7- by 10-Ft Wind Tunnel. *NASA-TM.* 2001. No. 209621. 26 p.

300. Suzen Y. B., Huang, P. G., Jacob J. D. Numerical simulations of plasma based flow control applications. *AIAA Paper*. 2005. No 4633. 11 p.

301. Suzen Y., Huang P. Modeling of flow transition using an intermittency transport equation. *Journal of Fluids Engineering*. 2000. Vol. 122. P. 273–284.

302. Tang G., Agarwal R. Active control of flow over a three-element airfoil in unbounded flow and in ground effect. *AIAA Paper*. 2018. No. 791. 22 p.

303. Tannehill J. C., Anderson A. D., Pletcher R. H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer (Second Edition). New York: Taylor & Francis, 1997. 785 p.

304. Thomas F. O., Kozlov A. I,. Corke T. C. Plasma Actuators for Cylinder Flow Control and Noise Reduction. *AIAA Journal*. 2008. Vol. 46, No 8. P. 1921–1931.

305. Turkel E. Review of preconditioning methods for fluid dynamics. *Applied Numerical Mathematics.* 1993. Vol. 24. P. 257–284.

306. Valarezo W. O., Dominik C. J., McGhee R. J., Goodman W. L. High Reynolds number configuration development of a high-lift airfoil. *AGARD, High-Lift System Aerodynamics.* 1992. No. 94N18424. 8 p.

307. Van Albada G. D., van Leer B., Roberts W. W. A comparative study of computational methods to cosmic das dynamics. *Astron Astrophys*. 1982. Vol. 108. P. 76-84.

308. Van der Vorst H. A. Iterative Methods for Large Linear Systems. Utrecht, Netherlands. 2002. 195 p.

309. Van Dyken R., McLaughlin T. E. Parametric investigations of a single dielectric barrier plasma actuators. *AIAA Paper.* 2004. No. 846. 12 p

310. Van Ingen J. L. A Suggested Semi-empirical Method for the Calculation of the Boundary Layer Transition Region. Delft: TH Delft, 1956. 120 p.

311. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*. 1974. Vol. 14, No. 4. P. 361–370.

312. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. A second-order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*. 1979. Vol. 32. P. 101–136.

313. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. III Upstream-centered finite difference schemes for ideal compressible flow. Journal of Computational Physics. 1977. Vol. 23. P. 263–275.

314. Van Leer B., Lee W.-T., Roe P. Characteristic time-stepping or local preconditioning of the Euler equations. *AIAA Paper*. 1991. No. 1552. 23 p.

315. Vertical Axis Wind Turbines: Products and application. URL: http://www.cygnus-power.com (Last accessed: 17.04.2017).

316. Wadcock A. J. Investigation of low-speed turbulent separated flow around airfoils. *NASA-CR*. 1987. No. 177450. 66 p.

317. Walters D. K., Cokljat D. A Three-Equation Eddy-Viscosity Model for Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulations of Transitional Flows. J. Fluids Eng. 2008. Vol. 130, No. 12. P. 14–28.

318. Walters D. K., Leylek. J. H. A New Model for Boundary-Layer Transition Using a Single-Point RANS Approach. *Journal of Turbomachinery.* 2004. Vol. 126. No. 1. P. 193–202.

319. Wang J., Kim K. Wake/shear layer interaction for low-Reynolds-number flow over multi-element airfoil. *Experiments in Fluids*. 2019. Vol. 60. No. 11. P. 15–39.

320. Wang Z. J. A fully automated Chimera methodology for multiple moving body problems. *AIAA Paper.* 1998. 217 p.

321. Whitfield D. L., Taylor L. K. Numerical solution of the two-dimensional time-dependent incompressible Euler equations. *NACA-CR*. 1994. No. 195775. 65 p.

322. Wilcox D. C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models *AIAA Journal*. 1988. Vol. 26, No. 11. P. 1299–1310.

323. Xu J. Xu., Cai J., Liu Q., Qu K. Simulations by enhanced implicit-hole-cutting method on overset grids. *Journal of Aircraft.* 2014. Vol. 51, No. 5. P. 15–39.

324. Yakhot V., Orzag S. A. Renormalization group analysis of turbulence. Basic theory. *Journal Scientific Computation*. 1986. Vol. 14, No. 4. P. 92–101.

325. Zhelezniak M. B., Mnatsakanyan A. K., Sizykh S.V. Photoionization of nitrogen and oxygen mixtures by radiation from a gas discharge. *High Temperature Sci.* 1982. Vol. 20. P. 357–362.

326. Zijlema M. On the construction of third-order accurate TVD scheme using Leonards normalized variable diagram with application to turbulent flows in general domains. *Delft University of Technology: Technical Report DUT-TWI*. 1994. No. 104. P. 25.

327. Zijlema M., Wesseling P. Higher order flux-limiting methods for steadystate, multidimensional, convection-dominated flow. *Delft University of Technology: Technical Report DUT-TWI*. 1995. No. 131. P. 28.

ДОДАТОК А
МАТРИЦЯ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЖЕРЕЛЬНИХ ДОДАНКІВ

Лінеаризація джерельного члена $\left(\partial\hat{\mathbf{S}}/\partial\mathbf{n}\right)^{n+1,m}$ в рівнянні (3.128) призводить до формування матриці 14×14. Для зручності позначення похідних проведемо заміну вектора $\mathbf{n}$ на вектор $\mathbf{x}$, а вектор джерельних доданків позначимо $\mathbf{f}$, тобто $\mathbf{n}\equiv\mathbf{x}$ і $\hat{\mathbf{S}}\equiv\dfrac{1}{J}\mathbf{f}$, де $k=14$,

$$\mathbf{n}=\Big[n_{N_4^+},\ n_{N_2^+},\ n_{N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right)},\ n_{N_2\left(B^3\Pi_g\right)},\ n_{N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right)},\ n_{N_2\left(C^3\Pi_u\right)},$$
$$n_{O_4^+},\ n_{O_2^+},\ n_{O_2^-},\ n_{O^-},\ n_O,\ n_{O_2\left(a^1\Delta_g\right)},\ n_{O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right)},\ n_e\Big]^T\equiv\left[x_1,x_2,\ldots x_k\right]^T,$$

$$\mathbf{S}=\Big[S_{N_4^+},\ S_{N_2^+},\ S_{N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right)},\ S_{N_2\left(B^3\Pi_g\right)},\ S_{N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right)},\ S_{N_2\left(C^3\Pi_u\right)},$$
$$S_{O_4^+},\ S_{O_2^+},\ S_{O_2^-},\ S_{O^-},\ S_O,\ S_{O_2\left(a^1\Delta_g\right)},\ S_{O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right)},\ S_e\Big]^T\equiv\left[f_1,f_2,\ldots f_k\right]^T.$$

У результаті отримаємо матрицю лінеаризації джерельних доданків у вигляді

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_k}\end{bmatrix}.$$

Елементи матриці $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}$ в точці i,j розрахункової сітки наведено нижче. У точках $i\pm1, j\pm1$ у матриці $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}$ залишаються лише ненульовими доданки виду $\partial Z/\partial n_{14}$, пов'язані з модулем вектора потоку електронів $\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{e}}\right|$.

$1 - N_4^+$

$$S_{N_4^+} = k_{11} n_{N_2(A)} n_{N_2(a')} + k_{12} n_{N_2(A)} n_{N_2(B)} + k_{13} n_{N_2(A)} n_{N_2(C)} + k_{14} n_{N_2(a')}^2 + k_{15} n_{N_2(a')} n_{N_2(C)} +$$
$$+ k_{16} n_{N_2(B)}^2 + k_{17} n_{N_2(C)}^2 - k_{33} n_e n_{N_4^+} + k_{71} n_{N_2^+} n_{N_2}^2 - k_{73} n_{N_4^+} n_{N_2} - k_{74} n_{N_4^+} n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -k_{33} n_e - k_{73} n_{N_2} - k_{74} n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = k_{71} n_{N_2}^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = k_{11} n_{N_2(a')} + k_{12} n_{N_2(B)} + k_{13} n_{N_2(C)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = k_{12} n_{N_2(A)} + 2k_{16} n_{N_2(B)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_5} = k_{11} n_{N_2(A)} + 2k_{14} n_{N_2(a')} + k_{15} n_{N_2(C)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_6} = k_{13} n_{N_2(A)} + k_{15} n_{N_2(a')} + 2k_{17} n_{N_2(C)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_7} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_8} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_9} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{10}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{11}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{13}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{14}} = -k_{33} n_{N_4^+}$$

$2-\ N_2^+$

$$S_{N_2^+}=\alpha_1\left|\mathbf{\Gamma_e}\right|+k_{10}n_e n_{N_2(A)}-k_{35}n_e n_{N_2^+}-k_{37}n_e^2 n_{N_2^+}-k_{39}n_e n_{N_2^+}n_{N_2}-k_{40}n_e n_{N_2^+}n_{O_2}-k_{43}n_{N_2^+}n_{O_2^-}-$$
$$-k_{44}n_{N_2^+}n_{O^-}-k_{71}n_{N_2^+}n_{N_2}^2+k_{73}n_{N_4^+}n_{N_2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=k_{73}n_{N_2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=-k_{35}n_e-k_{37}n_e^2-k_{39}n_e n_{N_2}-k_{40}n_e n_{O_2}-k_{43}n_{O_2^-}-k_{44}n_{O^-}-k_{71}n_{N_2}^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3}=k_{10}n_e$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_5}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_6}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_7}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_8}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_9}=-k_{43}n_{N_2^+}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_{10}}=-k_{44}n_{N_2^+}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_{11}}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_{12}}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_{13}}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_{14}}=\frac{\partial Z_2}{\partial x_{14}}+k_{10}n_{N_2(A)}-k_{35}n_{N_2^+}-2k_{37}n_e n_{N_2^+}-k_{39}n_{N_2^+}n_{N_2}-k_{40}n_{N_2^+}n_{O_2}$$

$$3-\ N_2\left(A^3\Sigma_u^+\right)$$

$$S_{N_2(A)}=\alpha_3\left|\mathbf{\Gamma_e}\right|-k_{10}n_en_{N_2(A)}-k_{11}n_{N_2(A)}n_{N_2(a')}-k_{12}n_{N_2(A)}n_{N_2(B)}-k_{13}n_{N_2(A)}n_{N_2(C)}-$$

$$-k_{29}n_{O_2^-}n_{N_2(A)}-\left(k_{56}+k_{57}+k_{58}\right)n_{N_2(A)}n_{O_2}+k_{60}n_{N_2(B)}+k_{61}n_{N_2(B)}n_{N_2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3}=-k_{10}n_e-k_{11}n_{N_2(a')}-k_{12}n_{N_2(B)}-k_{13}n_{N_2(C)}-k_{29}n_{O_2^-}-\left(k_{56}+k_{57}+k_{58}\right)n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4}=-k_{12}n_{N_2(A)}+k_{60}+k_{61}n_{N_2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_5}=-k_{11}n_{N_2(A)}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_6}=-k_{13}n_{N_2(A)}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_7}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_8}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_9}=-k_{29}n_{N_2(A)}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_{10}}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_{11}}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_{12}}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_{13}}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_{14}}=\frac{\partial Z_3}{\partial x_{14}}-k_{10}n_{N_2(A)}$$

$4-\ N_2\left(B^3\Pi_g\right)$

$$S_{N_2(B)}=\alpha_4\left|\mathbf{\Gamma_e}\right|-k_{12}n_{N_2(A)}n_{N_2(B)}-k_{16}n_{N_2(B)}^2-k_{30}n_{O_2^-}n_{N_2(B)}-$$
$$-k_{59}n_{N_2(B)}n_{O_2}-k_{60}n_{N_2(B)}-k_{61}n_{N_2(B)}n_{N_2}+k_{62}n_{N_2(a')}n_{N_2}+k_{64}n_{N_2(C)}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2}=0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3}=-k_{12}n_{N_2(B)}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4}=-k_{12}n_{N_2(A)}-2k_{16}n_{N_2(B)}-k_{30}n_{O_2^-}-k_{59}n_{O_2}-k_{60}-k_{61}n_{N_2}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_5}=k_{62}n_{N_2}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_6}=k_{64}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_7}=0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_8}=0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_9}=-k_{30}n_{N_2(B)}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_{10}}=0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_{11}}=0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_{12}}=0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_{13}}=0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_{14}}=\frac{\partial Z_4}{\partial x_{14}}$$

$$5 - N_2\left(a'^1\Sigma_u^-\right)$$

$$S_{N_2(a')} = \alpha_5\left|\mathbf{\Gamma}_\mathbf{e}\right| - k_{11}n_{N_2(A)}n_{N_2(a')} - k_{14}n_{N_2(a')}^2 - k_{15}n_{N_2(a')}n_{N_2(C)} -$$
$$-k_{62}n_{N_2(a')}n_{N_2} - k_{63}n_{N_2(a')}n_{O_2} + k_{65}n_{N_2(C)}n_{N_2}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3} = -k_{11}n_{N_2(a')}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_5} = -k_{11}n_{N_2(A)} - 2k_{14}n_{N_2(a')} - k_{15}n_{N_2(C)} - k_{62}n_{N_2} - k_{63}n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_6} = -k_{15}n_{N_2(a')} + k_{65}n_{N_2}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_7} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_8} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_9} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_{10}} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_{11}} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_{13}} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_{14}} = \frac{\partial Z_5}{\partial x_{14}}$$

$6 - N_2\left(C^3\Pi_u\right)$

$$S_{N_2(C)} = \alpha_6\left|\mathbf{\Gamma_e}\right| - k_{13}n_{N_2(A)}n_{N_2(C)} - k_{15}n_{N_2(a')}n_{N_2(C)} - k_{17}n_{N_2(C)}^2 -$$
$$-k_{64}n_{N_2(C)} - k_{65}n_{N_2(C)}n_{N_2}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_3} = -k_{13}n_{N_2(C)}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_5} = -k_{15}n_{N_2(C)}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_6} = -k_{13}n_{N_2(A)} - k_{15}n_{N_2(a')} - 2k_{17}n_{N_2(C)} - k_{64} - k_{65}n_{N_2}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_7} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_8} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_9} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_{10}} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_{11}} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_{13}} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_{14}} = \frac{\partial Z_6}{\partial x_{14}}$$

$7 - O_4^+$

$$S_{O_4^+} = -k_{34} n_e n_{O_4^+} - k_{49} n_{O_2^-} n_{O_4^+} - k_{51} n_{O_2^-} n_{O_4^+} n_{O_2} + k_{72} n_{O_2^+} n_{O_2}^2 - k_{75} n_{O_4^+} n_{O_2} -$$
$$-k_{76} n_{O_4^+} n_{O_2(a)} - k_{77} n_{O_4^+} n_{O_2(b)}$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_7} = -k_{34} n_e - k_{49} n_{O_2^-} - k_{51} n_{O_2^-} n_{O_2} - k_{75} n_{O_2} - k_{76} n_{O_2(a)} - k_{77} n_{O_2(b)}$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_8} = k_{72} n_{O_2}^2$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_9} = -k_{49} n_{O_4^+} - k_{51} n_{O_4^+} n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_{10}} = 0$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_{11}} = 0$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_{12}} = -k_{76} n_{O_4^+}$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_{13}} = -k_{77} n_{O_4^+}$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x_{14}} = -k_{34} n_{O_4^+}$$

$8 - O_2^+$

$$S_{O_2^+} = \alpha_2 \left|\mathbf{\Gamma_e}\right| + k_{9a} n_e n_{O_2(a)} + k_{9b} n_e n_{O_2(b)} - k_{36} n_e n_{O_2^+} - k_{38} n_e^2 n_{O_2^+} - k_{41} n_e n_{O_2^+} n_{N_2} - k_{42} n_e n_{O_2^+} n_{O_2} -$$
$$-\left(k_{45} + k_{46}\right) n_{O_2^-} n_{O_2^+} - \left(k_{47} + k_{48}\right) n_{O^-} n_{O_2^+} - k_{50} n_{O^-} n_{O_2^+} n_{O_2} - k_{72} n_{O_2^+} n_{O_2}^2 + k_{74} n_{N_4^+} n_{O_2} +$$
$$+ k_{75} n_{O_4^+} n_{O_2} + k_{76} n_{O_4^+} n_{O_2(a)} + k_{77} n_{O_4^+} n_{O_2(b)}$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_1} = k_{74} n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_7} = k_{75} n_{O_2} + k_{76} n_{O_2(a)} + k_{77} n_{O_2(b)}$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_8} = -k_{36} n_e - k_{38} n_e^2 - k_{41} n_e n_{N_2} - k_{42} n_e n_{O_2} - \left(k_{45} + k_{46}\right) n_{O_2^-} -$$
$$-\left(k_{47} + k_{48}\right) n_{O^-} - k_{50} n_{O^-} n_{O_2} - k_{72} n_{O_2}^2$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_9} = -\left(k_{45} + k_{46}\right) n_{O_2^+}$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_{10}} = -\left(k_{47} + k_{48}\right) n_{O_2^+} - k_{50} n_{O_2^+} n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_{11}} = 0$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_{12}} = k_{9a} n_e + k_{76} n_{O_4^+}$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_{13}} = k_{9b} n_e + k_{77} n_{O_4^+}$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_{14}} = \frac{\partial Z_8}{\partial x_{14}} + k_{9a} n_{O_2(a)} + k_{9b} n_{O_2(b)} - k_{36} n_{O_2^+} - 2k_{38} n_e n_{O_2^+} - k_{41} n_{O_2^+} n_{N_2} - k_{42} n_{O_2^+} n_{O_2}$$

$9 - O_2^-$

$$S_{O_2^-} = k_{19} n_e n_{O_2}^2 + k_{20} n_e n_{O_2} n_{N_2} + k_{22} n_e n_O n_{O_2} - k_{23} n_{O_2^-} n_{N_2} - k_{24} n_{O_2^-} n_{O_2} -$$
$$-k_{27} n_{O_2^-} n_{O_2(a)} - k_{28} n_{O_2^-} n_{O_2(b)} - k_{29} n_{O_2^-} n_{N_2(A)} - k_{30} n_{O_2^-} n_{N_2(B)} - k_{43} n_{O_2^-} n_{N_2^+} - \left(k_{45} + k_{46}\right) n_{O_2^-} n_{O_2^+} -$$
$$-k_{49} n_{O_2^-} n_{O_4^+} - k_{51} n_{O_2^-} n_{O_4^+} n_{O_2} - k_{78} n_{O_2^-} n_O + k_{79} n_{O^-} n_{O_2(a)}$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_2} = -k_{43} n_{O_2^-}$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_3} = -k_{29} n_{O_2^-}$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_4} = -k_{30} n_{O_2^-}$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_7} = -k_{49} n_{O_2^-} - k_{51} n_{O_2^-} n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_8} = -\left(k_{45} + k_{46}\right) n_{O_2^-}$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_9} = -k_{23} n_{N_2} - k_{24} n_{O_2} - k_{27} n_{O_2(a)} - k_{28} n_{O_2(b)} - k_{29} n_{N_2(A)} - k_{30} n_{N_2(B)} - k_{43} n_{N_2^+} -$$
$$-\left(k_{45} + k_{46}\right) n_{O_2^+} - k_{49} n_{O_4^+} - k_{51} n_{O_4^+} n_{O_2} - k_{78} n_O$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_{10}} = k_{79} n_{O_2(a)}$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_{11}} = k_{22} n_e n_{O_2} - k_{78} n_{O_2^-}$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_{12}} = -k_{27} n_{O_2^-} + k_{79} n_{O^-}$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_{13}} = -k_{28} n_{O_2^-}$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial x_{14}} = k_{19} n_{O_2}^2 + k_{20} n_{O_2} n_{N_2} + k_{22} n_O n_{O_2}$$

$10 - O^{-}$

$$S_{O^-} = \eta_{18}\left|\mathbf{\Gamma_e}\right| + k_{21}n_e n_O n_{O_2} - k_{25}n_{O^-}n_O - k_{26}n_e n_{O^-} - k_{31}n_{O^-}n_{O_2(a)} - k_{32}n_{O^-}n_{O_2(b)} -$$

$$-k_{44}n_{O^-}n_{N_2^+} - \left(k_{47} + k_{48}\right)n_{O^-}n_{O_2^+} - k_{50}n_{O^-}n_{O_2^+}n_{O_2} + k_{78}n_{O_2^-}n_O - k_{79}n_{O^-}n_{O_2(a)}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_2} = -k_{44}n_{O^-}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_7} = 0$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_8} = -\left(k_{47} + k_{48}\right)n_{O^-} - k_{50}n_{O^-}n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_9} = k_{78}n_O$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_{10}} = -k_{25}n_O - k_{26}n_e - k_{31}n_{O_2(a)} - k_{32}n_{O_2(b)} - k_{44}n_{N_2^+} - \left(k_{47} + k_{48}\right)n_{O_2^+} -$$

$$-k_{50}n_{O_2^+}n_{O_2} - k_{79}n_{O_2(a)}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_{11}} = k_{21}n_e n_{O_2} - k_{25}n_{O^-} + k_{78}n_{O_2^-}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_{12}} = -k_{31}n_{O^-} - k_{79}n_{O^-}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_{13}} = -k_{32}n_{O^-}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_{14}} = \frac{\partial Z_{10}}{\partial x_{14}} + k_{21}n_O n_{O_2} - k_{26}n_{O^-}$$

$11-O$

$$S_O=\eta_{18}\left|\mathbf{\Gamma_e}\right|-k_{21}n_en_On_{O_2}-k_{25}n_{O^-}n_O+k_{26}n_en_{O^-}+k_{31}n_{O^-}n_{O_2(a)}+$$

$$+k_{32}n_{O^-}n_{O_2(b)}+2k_{36}n_en_{O_2^+}+k_{44}n_{O^-}n_{N_2^+}+2k_{46}n_{O_2^-}n_{O_2^+}+\left(k_{47}+3k_{48}\right)n_{O^-}n_{O_2^+}+$$

$$+k_{50}n_{O^-}n_{O_2^+}n_{O_2}-\left(k_{52}+k_{53}\right)n_O^2n_{N_2}-\left(k_{54}+k_{55}\right)n_O^2n_{O_2}+2k_{58}n_{N_2(A)}n_{O_2}+$$

$$+2k_{59}n_{N_2(B)}n_{O_2}+2k_{63}n_{N_2(a')}n_{O_2}-k_{78}n_{O_2^-}n_O+k_{79}n_{O^-}n_{O_2(a)}+2k_{80}n_en_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2}=k_{44}n_{O^-}$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_3}=2k_{58}n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_4}=2k_{59}n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_5}=2k_{63}n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_6}=0$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_7}=0$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_8}=2k_{36}n_e+2k_{46}n_{O_2^-}+\left(k_{47}+3k_{48}\right)n_{O^-}+k_{50}n_{O^-}n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_9}=2k_{46}n_{O_2^+}-k_{78}n_O$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_{10}}=-k_{25}n_O+k_{26}n_e+k_{31}n_{O_2(a)}+k_{32}n_{O_2(b)}+k_{44}n_{N_2^+}+\left(k_{47}+3k_{48}\right)n_{O_2^+}+k_{50}n_{O_2^+}n_{O_2}+k_{79}n_{O_2(a)}$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_{11}}=-k_{21}n_en_{O_2}-k_{25}n_{O^-}-2\left(k_{52}+k_{53}\right)n_On_{N_2}-2\left(k_{54}+k_{55}\right)n_On_{O_2}-k_{78}n_{O_2^-}$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_{12}}=k_{31}n_{O^-}+k_{79}n_{O^-}$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_{13}}=k_{32}n_{O^-}$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_{14}}=\frac{\partial Z_{11}}{\partial x_{14}}-k_{21}n_On_{O_2}+k_{26}n_{O^-}+2k_{36}n_{O_2^+}+2k_{80}n_{O_2}$$

$$12 - O_2\left(a^1\Delta_g\right)$$

$$S_{O_2(a)} = \alpha_7\left|\mathbf{\Gamma_e}\right| - k_{9a}n_e n_{O_2(a)} - k_{27}n_{O_2^-}n_{O_2(a)} -$$

$$-k_{31}n_{O^-}n_{O_2(a)} + k_{52}n_O^2 n_{N_2} + k_{54}n_O^2 n_{O_2} + k_{56}n_{N_2(A)}n_{O_2} - k_{66}n_{O_2(a)}n_{N_2} -$$

$$-k_{67}n_{O_2(a)}n_{O_2} - k_{68}n_{O_2(a)}n_O - k_{70}n_{O_2(a)}^2 - k_{76}n_{O_4^+}n_{O_2(a)} - k_{79}n_{O^-}n_{O_2(a)}$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} = k_{56}n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_7} = -k_{76}n_{O_2(a)}$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_8} = 0$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_9} = -k_{27}n_{O_2(a)}$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_{10}} = -k_{31}n_{O_2(a)} - k_{79}n_{O_2(a)}$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_{11}} = 2k_{52}n_O n_{N_2} + 2k_{54}n_O n_{O_2} - k_{68}n_{O_2(a)}$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_{12}} = -k_{9a}n_e - k_{27}n_{O_2^-} - k_{31}n_{O^-} - k_{66}n_{N_2} - k_{67}n_{O_2} - k_{68}n_O - 2k_{70}n_{O_2(a)} - k_{76}n_{O_4^+} - k_{79}n_{O^-}$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_{13}} = 0$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_{14}} = \frac{\partial Z_{12}}{\partial x_{14}} - k_{9a}n_{O_2(a)}$$

$13 - O_2\left(b^1\Sigma_g^+\right)$

$$S_{O_2(b)} = \alpha_8\left|\mathbf{\Gamma_e}\right| - k_{9b}n_e n_{O_2(b)} - k_{28}n_{O_2^-}n_{O_2(b)} - k_{32}n_{O^-}n_{O_2(b)} +$$
$$+k_{53}n_O^2 n_{N_2} + k_{55}n_O^2 n_{O_2} + k_{57}n_{N_2(A)}n_{O_2} - k_{69}n_{O_2(b)}n_{O_2} - k_{77}n_{O_4^+}n_{O_2(b)}$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} = k_{57}n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_7} = -k_{77}n_{O_2(b)}$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_8} = 0$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_9} = -k_{28}n_{O_2(b)}$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_{10}} = -k_{32}n_{O_2(b)}$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_{11}} = 2k_{53}n_O n_{N_2} + 2k_{55}n_O n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_{13}} = -k_{9b}n_e - k_{28}n_{O_2^-} - k_{32}n_{O^-} - k_{69}n_{O_2} - k_{77}n_{O_4^+}$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x_{14}} = \frac{\partial Z_{13}}{\partial x_{14}} - k_{9b}n_{O_2(b)}$$

$14 - e$

$$S_e = (\alpha_1 + \alpha_2)|\mathbf{\Gamma_e}| + k_{9a} n_e n_{O_2(a)} + k_{9b} n_e n_{O_2(b)} + k_{10} n_e n_{N_2(A)} + k_{11} n_{N_2(A)} n_{N_2(a')} + k_{12} n_{N_2(A)} n_{N_2(B)} + \\ + k_{13} n_{N_2(A)} n_{N_2(C)} + k_{14} n^2_{N_2(a')} + k_{15} n_{N_2(a')} n_{N_2(C)} + k_{16} n^2_{N_2(B)} + k_{17} n^2_{N_2(C)} - \eta_{18} |\mathbf{\Gamma_e}| - k_{19} n_e n^2_{O_2} - k_{20} n_e n_{O_2} n_{N_2} - \\ - (k_{21} + k_{22}) n_e n_O n_{O_2} + k_{23} n_{O_2^-} n_{N_2} + k_{24} n_{O_2^-} n_{O_2} + k_{25} n_{O^-} n_O + k_{26} n_e n_{O^-} + k_{27} n_{O_2^-} n_{O_2(a)} + k_{28} n_{O_2^-} n_{O_2(b)} + \\ + k_{29} n_{O_2^-} n_{N_2(A)} + k_{30} n_{O_2^-} n_{N_2(B)} + k_{31} n_{O^-} n_{O_2(a)} + k_{32} n_{O^-} n_{O_2(b)} - k_{33} n_e n_{N_4^+} - k_{34} n_e n_{O_4^+} - k_{35} n_e n_{N_2^+} - \\ - k_{36} n_e n_{O_2^+} - k_{37} n_e^2 n_{N_2^+} - k_{38} n_e^2 n_{O_2^+} - k_{39} n_e n_{N_2^+} n_{N_2} - k_{40} n_e n_{N_2^+} n_{O_2} - k_{41} n_e n_{O_2^+} n_{N_2} - k_{42} n_e n_{O_2^+} n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_1} = -k_{33} n_e$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_2} = -k_{35} n_e - k_{37} n_e^2 - k_{39} n_e n_{N_2} - k_{40} n_e n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_3} = k_{10} n_e + k_{11} n_{N_2(a')} + k_{12} n_{N_2(B)} + k_{13} n_{N_2(C)} + k_{29} n_{O_2^-}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} = k_{12} n_{N_2(A)} + 2k_{16} n_{N_2(B)} + k_{30} n_{O_2^-}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_5} = k_{11} n_{N_2(A)} + 2k_{14} n_{N_2(a')} + k_{15} n_{N_2(C)}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_6} = k_{13} n_{N_2(A)} + k_{15} n_{N_2(a')} + 2k_{17} n_{N_2(C)}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_7} = -k_{34} n_e$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_8} = -k_{36} n_e - k_{38} n_e^2 - k_{41} n_e n_{N_2} - k_{42} n_e n_{O_2}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_9} = k_{23} n_{N_2} + k_{24} n_{O_2} + k_{27} n_{O_2(a)} + k_{28} n_{O_2(b)} + k_{29} n_{N_2(A)} + k_{30} n_{N_2(B)}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_{10}} = k_{25} n_O + k_{26} n_e + k_{31} n_{O_2(a)} + k_{32} n_{O_2(b)}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_{11}} = -(k_{21} + k_{22}) n_e n_{O_2} + k_{25} n_{O^-}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_{12}} = k_{9a} n_e + k_{27} n_{O_2^-} + k_{31} n_{O^-}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_{13}} = k_{9b} n_e + k_{28} n_{O_2^-} + k_{32} n_{O^-}$$

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_{14}} = \frac{\partial Z_{14}}{\partial x_{14}} + k_{9a} n_{O_2(a)} + k_{9b} n_{O_2(b)} + k_{10} n_{N_2(A)} - k_{19} n^2_{O_2} - k_{20} n_{O_2} n_{N_2} - \\ - (k_{21} + k_{22}) n_O n_{O_2} + k_{26} n_{O^-} - k_{33} n_{N_4^+} - k_{34} n_{O_4^+} - k_{35} n_{N_2^+} - k_{36} n_{O_2^+} - 2k_{37} n_e n_{N_2^+} - \\ - 2k_{38} n_e n_{O_2^+} - k_{39} n_{N_2^+} n_{N_2} - k_{40} n_{N_2^+} n_{O_2} - k_{41} n_{O_2^+} n_{N_2} - k_{42} n_{O_2^+} n_{O_2}$$

ДОДАТОК Б
СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Редчиц Д. А., Приходько А. А. Аэродинамика роторов Дарье и Савониуса. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2007. № 5. С. 26–31 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

2. Редчиц Д. А. Аэродинамика вращающейся лопасти ротора Дарье. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2007. Вип. 11, Т. 2. С. 205–220.

3. Редчиц Д. А. Численное моделирование закритического обтекания профиля турбулентным несжимаемым потоком. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2007. Вип. 11, Т. 1. С. 12–24.

4. Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарных турбулентных отрывных течений при обтекании ротора Савониуса. *Авиационно-космическая техника и технология.* 2008. № 5. С. 53–58.

5. Редчиц Д. А. Численное моделирование обтекания ротора Дарье вертикально-осевой ветроэнергетической установки. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2008. Вип. 12. С. 157–172.

6. Дзензерский В. А. Приходько А. А., Хачапуридзе Н. М., Редчиц Д. А. Моделирование нестационарных турбулентных течений при обтекании подвижных тел сложной геометрии на основе уравнений Навье-Стокса. *Вісник Харківського національного університету.* 2009. Вип. 11, № 847. С. 283–286 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

7. Редчиц Д. А. Аэродинамика ротора Савониуса. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2009. Вип. 13, Т. 1. С. 27–41.

8. Редчиц Д. А. Математическое моделирование аэродинамических процессов при обтекании вертикально-осевых ветроэнергетических установок. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2009. Вип. 2 (35). С. 374–378.

9. Редчиц Д. А. Математическое моделирование отрывных течений на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса. *Научные ведомости Белгородского государственного университета.* 2009. №13 (68). С. 118–146.

10. Prikhod'ko A. A., Redtchits D. A. Numerical modeling of a viscous incompressible unsteady separated flow past a rotating cylinder. *Fluid Dynamics*. 2009. Vol. 44, No. 6. P. 823–829 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

11. Редчиц Д. А. Математическое моделирование физических особенностей турбулентного обтекания многоэлементного профиля. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2010. Вип. 3 (39). С. 398–403.

12. Тарасов С. В., Яскевич Э. П., Редчиц Д. А., Костюков И. Ю. Математическое моделирование поля течения вокруг одиночной лопасти. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2010. Вип. 14, № 5, Т. 1. С. 152–164 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

13. Редчиц Д. А. Математическое моделирование диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2011. Вып. 3 (42). С. 359–365.

14. Редчиц Д. А., Гуржий А. А. Численное моделирование эффекта Магнуса при обтекании кругового цилиндра невозмущенным потоком вязкой жидкости. *Прикладная гидромеханика.* 2012. Т. 14, № 1. С. 63–71 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків,*

аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків).

15. Редчиц Д. А. Разработка автоматизированного препроцессора для вычислительной гидродинамики. *Вісник Дніпропетровського университета.* 2012. Т. 20, № 5, Вип. 16, Т. 1. С. 32–43.

16. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Костюков И. Ю. Воспроизведение обтекания трехлопастного ротора Дарье. *Техническая механика.* 2012. № 4. С. 67–75 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

17. Редчиц Д. А. Моделирование воздействия диэлектрического барьерного разряда на находящийся в покое воздух. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2012. Вип. 18. С. 161–174.

18. Дзензерский В. А., Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Хачапуридзе Н. М. Математическое моделирование аэродинамики вертикально-осевой ветроэнергетической установки с роторами Дарье и Савониуса. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2012. Вип. 19. С. 96–111 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

19. Редчиц Д. А Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью диэлектрического барьерного разряда. *Вісник Харківського національного університету.* 2013. №1063. С. 144–159.

20. Редчиц Д. А. Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью четырех плазменных актуаторов. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2013. Вип. 3 (42). С. 286–291.

21. Дзензерский В. А., Редчиц Д. А., Хачапуридзе Н. М., Моисеенко С. В. Аэродинамика трехэлементного профиля 30P30N в крейсерской и взлетно-посадочной конфигурации. *Вісник Дніпропетровського университету.* 2013. Т. 21. № 5, Вип. 17. Т. 2. С. 59–68 (*здобувачу належить участь у постановці*

задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків).

22. Редчиц Д. А., Польовий О. Б., Моисеенко С. В. Управление вихревой дорожкой Кармана с помощью плазменных актуаторов. *Вісник Дніпропетровського университету.* 2013. Т.21, № 5, Вип. 17, Т. 1. С. 63–80.

23. Редчиц Д. А. Математическая модель диэлектрического барьерного разряда в воздухе *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2014. Вып. 3 (50). С. 429–436.

24. Редчиц Д. А. Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью плазменных актуаторов. *Техническая механика.* 2014, № 2. С.106–119.

25. Редчиц Д. А. Численное моделирование диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Техническая механика.* 2014, № 4. С. 102–117.

26. Редчиц Д. А. Математическое моделирование плазмы диэлектрического барьерного разряда в воздухе *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2015. Вып. 3 (54). С. 452–458.

27. Тарасов С.В., Редчиц Д. А., Полевой О. Б., Чашина И. Б., Моисеенко С. В. Вычислительная гидродинамика на службе ветроэнергетики. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2016. Т.24, № 5, Вип. 20, Т. 1.С. 38–48 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

28. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Численное моделирование обтекания турбулентным потоком транспортного средства вблизи экрана. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2016. Вып. 3 (58). С. 398–402 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

29. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Численное моделирование процессов аэродинамики вертикально-осевой ветроэнергетической установки. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності*

конструкцій. 2017. Т. 24, № 5. Вип. 26. С. 153–167 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

30. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Абрамовский Е. Р., Гладенко В. П., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Экспериментальное и численное изучение физических особенностей турбулентного обтекания J-лопасти ротора Дарье. *Вісник Дніпропетровського університету.* 2017. Т. 25, № 5, Вип. 21, Т. 1. С. 12–26 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

31. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Аэродинамика J-профиля в турбулентном потоке воздуха при круговой продувке. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2017. Вып. 3 (62), Т. 2.С. 208–214 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

32. Редчиц Д. А., Белоусова Т. П., Выгоднер И. В., Ляхович Т. П., Моисеенко С. В. Автоматизированный препроцессор для задач вычислительной аэродинамики. *Региональный межвузовский сборник научных работ.* 2018. Вып. 4 (117). С. 61–71.

33. Тарасов С. В., Редчиц Д. А, Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Математическое моделирование турбулентного обтекания симметричных и несимметричных профилей. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2018. Вып. 3 (66), Т. 1. С. 171–177 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

34. Redchyts D. O., Gourjii A. A., Moiseienko S. V., Bilousova T. P. Aerodynamics of the turbulent flow around a multi-element airfoil in cruse configuration and in takeoff and landing configuration. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2019. Vol. 5, No 7 (101). P. 36–41 (*здобувачу належить*

участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків).

35. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Чашина И. Б., Выгоднер И. В. Обтекание цилиндра и аэродинамического профиля с учетом ламинарно-турбулентного перехода *Вестник Днепровского национального университета.* 2019. Вып. 23, Т. 27. С. 77–84 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

36. Redchyts D. O., Shkvar E. A. Moiseienko S. V. Control of Karman Vortex Street by using Plasma Actuators. *Fluid Dynamics and Materials Processing.* 2019. Vol. 15, No 5. P. 509–525 (*здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків*).

37. Redchyts D. O., Shkvar E. A. Moiseienko S. V. Computational Simulation of Turbulent Flow Around Tractor-Trailers. F*luid Dynamics and Materials Processing.* 2020. Vol. 16, No 1. P. 91–103 (здобувачу належить участь у постановці задачі, проведення чисельних розрахунків, аналіз, обговорення та співставлення експериментальних та чисельних розрахунків).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

38. Redchyts D., Zinchenko A., Prykhodko O. Numerical simulation of Darrieus and Savonius wind turbine aerodynamics. *International Congress on Industrial and Applied Mathematics*: proc. of 6th international congress (Zurich, Switzerland, 16-20 July 2007). Zurich. 2007. C. 134–138.

39. Redchyts D. Numerical simulation of wind turbine rotors aerodynamics. PAMM. 2008. Vol. 7, No 1. P. 2100049–2100050.

40. Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарных турбулентных отрывных течений при обтекании роторов Дарье и Савониуса. *Комп'ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 30 вересня-1 жовтня 2008 р.). Київ. 2008. С. 43.

41. Редчиц Д. А. Математическое моделирование обтекания трехэлементного профиля 30P30N. *Комп’ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 29-30 вересня 2010 р.). Київ. 2010. С. 34–35.

42. Дзензерский В. А., Хачапуридзе Н. М., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Численное моделирование турбулентного обтекания многоэлементного профиля. *Методы дискретных особенностей в задачах матфизики:* зб. тез XV международного симпозиума (м. Херсон, 13-18 червня 2011 р.). Херсон. 2011. С. 167–170.

43. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Пахомова Ю. А. Численное моделирование управления отрывом потока при обтекании цилиндра с помощью плазменных актуаторов. *Тараповские чтения:* зб. тез міжнародної конференції (м. Харків, 30-31 травня 2012 р.). Харків. 2012. С. 92.

44. Редчиц Д. А. Управление отрывом потока воздуха с помощью плазменных актуаторов. *Комп’ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 1-2 жовтня 2012 р.). Київ. 2012. С. 22–23.

45. Редчиц Д. А. Математическое моделирование диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу:* матеріали IV міжнародної наукової конференції (м. Дніпропетровськ, 1-3 листопада 2012 р.). Дніпропетровськ. 2012. С. 80–83.

46. Дзензерский В. А., Моисеенко С. В., Редчиц Д. А., Хачапуридзе Н. М. Моделирование диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора в подвижной сплошной среде. *Методы дискретных особенностей в задачах математической физики:* труды XVI международного симпозиума (м. Херсон, 8-16 червня 2013 р.). Херсон. 2013. С. 151–154.

47. Редчиц Д. А., Щеглов Г. А, Марчевский И. К. Математическое моделирование аэродинамики ротора вертикально-осевой ветроэнергетической установки. *Сучасні енергетичні установки на транспорті і технології та обладнання для їх обслуговування:* матеріали IV всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Херсон, 9-11 жовтня 2013 р.). Херсон. 2013. С. 307–311.

48. Редчиц Д. А., Полевой О. Б. Применение уравнений Навье-Стокса для решения прикладных задач аэрогидродинамики. *П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені ак. Кравчука:*зб. тез доповідей (м. Київ, 15-17 травня 2014 р.). Київ. 2014. С. 262.

49. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Пахомова Ю. А. Математическое моделирование турбулентного обтекания трехэлементного профиля 30P30N. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез доповідей шостої міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 27-29 травня 2014 р.). Херсон. 2014. С. 208–211.

50. Редчиц Д. А. Компьютерное моделирование гидромеханики слабоионизированной плазмы. *Комп'ютерна гідромеханіка:* зб. тез доповідей науково-практичної конференції (м. Київ, 30 вересня-1 жовтня 2014 р.). Київ. 2014. С. 31–32.

51. Редчиц Д. А. Численно-аналитическая модель диэлектрического барьерного разряда. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу:* матеріали V міжнародної наукової конференції (м. Дніпропетровськ, 6-8 листопада 2014 р.). Дніпропетровськ. 2014. С. 77–80.

52. Редчиц Д. А. Численное моделирование плазмы диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування:* матеріали V всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Херсон, 1-3 жовтня 2014 р.). Херсон. 2014. С. 107–111.

53. Редчиц Д. А. Математическое моделирование слабоионизированной плазмы диэлектрического барьерного разряда в воздухе. *Сучасний стан та проблеми двигунобудування:* матеріали міжнародної науково-технічної конференції (м. Миколаїв, 19-21 листопада 2014 р.). Миколаїв. 2014. С. 247–250.

54. Редчиц Д. А., Полевой О. Б. Математическое моделирование сопряженных задач вычислительной аэродинамики. *Сучасні інформаційні та*

інноваційні технології на транспорті: міжнародна науково-практична конференція (м. Херсон, 26–28 травня 2015 р.). Херсон. 2015. С. 217–220.

55. Редчиц Д. А. Компьютерное моделирование обтекания профиля транспортного средства вблизи экрана турбулентным потоком. *Информационные технологии в металлургии и машиностроении:* зб. тез научно-технической конференции (м. Дніпро, 29-31 березня 2016 р.). Дніпро. 2016. С. 37.

56. Редчиц Д. А. Математическое моделирование обтекания транспортного средства вблизи экрана. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 24-26 травня 2016 р.). Херсон. 2016. С. 270–273.

57. Редчиц Д. А. Численное моделирование физических процессов при турбулентном обтекании транспортного средства. *Диференціальні рівняння та проблеми аерогідромеханіки й тепломасопереносу:* зб. тез доповідей всеукраїнської наукової конференції (м. Дніпро, 28-30 вересня 2016 р.). Дніпро. 2016. С. 86–87.

58. Редчиц Д. А. Компьютерное моделирование обтекания турбулентным потоком транспортного средства вблизи экрана. *Комп'ютерна гідромеханіка:* тези науково-практичної конференції (м. Київ, 29-30 вересня 2016 р.). Київ. 2016. С. 52–53.

59. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Численное моделирование процессов аэродинамики J-лопасти ротора Дарье. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 23-25 травня 2017 р.). Херсон. 2017. С. 241–243.

60. Редчиц Д. А., Моисеенко С. В. Аэродинамика роторов вертикально-осевых ветроэнергетических установок. *Безпека життєдіяльності на транспорті і виробництві – освіта, наука, практика:* зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 14-16 вересня 2017 р.). Херсон. 2017. С. 368–373.

61. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Численное моделирование аэродинамики профилей симметричной и несимметричной формы. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті:* зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 29-31 травня 2018 р.). Херсон. 2018. С. 258–260.

62. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Математическое моделирование аэродинамики симметричных и несимметричных профилей. *Міжнародна конференція з математичного моделювання:* матеріали XIX міжнародної конференції (м. Херсон, 17-21 вересня 2018 р.). Херсон. 2018. С. 31.

63. Редчиц Д. А. Применение методов математического моделирования динамики и аэродинамики к проектированию ветроэнергетических установок. *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування:* матеріали всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Херсон, 13-14 вересня 2018 р.). Херсон. 2018. С. 233–238.

64. Редчиц Д. А., Тарасов С. В. Компьютерное моделирование аэродинамики симметричных и несимметричных профилей. *Комп'ютерна гідромеханіка:* зб. тез науково-практичної конференції (м. Київ, 26-27 вересня 2018 р.). Київ. 2018. С. 48–49.

65. Редчиц Д. А., Тучина У. Н., Моисеенко С. В. Численное моделирование нестационарных потоков холодной плазмы. *Космические технологии: настоящее и будущее:* зб. тезисов 7-й международной конференции (м. Дніпро, 21-24 травня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 66.

66. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Моисеенко С. В., Тарасов А. С. Математическое моделирование процессов ламинарно-турбулентного перехода в задачах внешней аэродинамики. *Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті.* зб. тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 28-30 травня 2019 р.). Херсон. 2019. С. 258–260.

67. Тарасов С. В., Редчиц Д. А, Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Аэродинамика ветроэнергетической установки с роторами Дарье и Савониуса.

Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування: матеріали міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 12-13 вересня 2019 р.). Херсон. 2019. С. 141.

68. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в задачах аэрогидромеханики. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій:* тези міжнародної науково-технічної конференції пам’яті академіка В. І. Моссаковського (м. Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 276–277.

69. Тарасов С. В., Редчиц Д. А., Тарасов А. С., Моисеенко С. В. Математическое моделирование турбулентного обтекания цилиндра и аэродинамического профиля с учетом ламинарно-турбулентного перехода. *Міжнародна конференція з математичного моделювання:* матеріали XX міжнародної конференції (м. Херсон, 16-20 вересня 2019 р.). Херсон. 2019. С. 98.