

ІНСТИТУТ ГІДРОМЕХАНІКИ  
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

Малюга Володимир Сергійович

УДК 532.5; 533.6

**ДИСЕРТАЦІЯ**

Нестационарні задачі обтікання з урахуванням ефектів випромінювання звуку

01.02.05 - механіка рідини, газу та плазми

Фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня    доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело  
\_\_\_\_\_ В.С.Малюга

Науковий консультант: Вовк Ігор Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ - 2018

Малюга В. С. Нестационарні задачі обтікання з урахуванням ефектів випромінювання звуку. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.05 «Механіка рідини, газу та плазми» - Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню процесів виникнення стійких автоколивань при взаємодії потоку з твердими тілами, а також дослідженню процесів випромінювання звуку потоком. В роботі детально описуються закономірності і механізми виникнення автоколивань і гідродинамічних каналів зворотних зв'язків, розраховуються характеристики звукових полів, що генеруються при натіканні потоку на тверде тіло. Проведено розробку математичних моделей і методів, що дають можливість кількісної оцінки енергетичних та просторових характеристик звукових полів, що виникають при обтіканні потоком твердих перешкод різних форм. Проведено розробку методів описання вихрових джерел звуку в зовнішніх потоках та в потоках в каналах складної геометрії. Проведено розробку техніки розрахунку звукових полів, що базується на сучасних підходах комп'ютерної механіки рідини і дає можливість проводити чисельні розрахунки на кластерних суперкомп'ютерах. Чисельні розрахунки проводились на кластерному суперкомп'ютері Скіт, що знаходиться в Інституті кібернетики НАН України.

Високий інтерес світової наукової спільноти до теми генерації звуків потоками, що набігають на тверді тіла, обумовлений в першу чергу глибокою фізичною змістовністю процесів виникнення звуку, які на даний момент повністю не вирішені, а також численними технічними застосуваннями, наприклад, в авіації і космонавтиці (оцінка рівнів звуків авіаційних і ракетних двигунів і можливе зниження цих рівнів), зниження шумів і збільшення терміну служби вітрогенераторів, зниження шумів примежового шару на підводних човнах. В останній час почали також розвиватися методи діагностики захворювань на основі шумів, що виникають у бронхіальному дереві і кровоносних судинах. Зокрема, в Інституті гідромеханіки НАН України проводилася розробка методів контролю шумів дихання і діагностики за-

хворювання за результатами вимірів. Після проведення ряду експериментів виникла необхідність провести чисельне моделювання процесів генерації звуку в каналах із стенозами (різкими звуженнями каналів) і детально описати механізми генерації таких шумів і тональних звуків. Дана дисертаційна робота проводилась в рамках наукових проєктів, що виконувались в Інституті гідромеханіки НАН України.

В дисертаційній роботі побудовано алгоритм розв'язання поставлених завдань, який належить до числа гібридних методів. Гібридні методи дозволяють розкласти задачу про генерацію звуку потоком на два етапи. На першому етапі розраховується гідродинаміка потоку середовища, на другому етапі – характеристики акустичного поля, генерованого потоком. При чисельному моделюванні динаміки двовимірних течій рідини ми використовували техніку прямого чисельного моделювання (DNS). Необхідна точність розрахунків в даному діапазоні чисел Рейнольдса досягалась шляхом поліпшення розрахункової сітки. У випадку ж тривимірних течій методи DNS використовувались тільки в ламінарних режимах течії. При турбулентних режимах ми використовували техніку LES. Річ у тому, що тривимірні течії являються на порядок більш вимогливими до комп'ютерних ресурсів і, отже, досягти бажаної точності чисельного моделювання шляхом простого збільшення числа вузлів розрахункової сітки не представляється можливим. Для розпаралелювання обчислень використовувалась технологія MPI. Розпаралелювання проводилося за принципом геометричного паралелізму. При проведенні чисельних розрахунків використовувались обчислювальні процедури тулбокса з відкритим кодом OpenFOAM. На другому етапі побудовано нами гібридного методу розв'язувались акустичні задачі. При розв'язанні акустичних задач будувались аналітичні розв'язки.

З метою верифікації побудованого гібридного чисельного алгоритму проведено чисельний розрахунок звукового поля еолових тонів. На першому етапі на основі чисельного розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса методом скінченних об'ємів отримано основні гідродинамічні характеристики, у тому числі коефіцієнти лобового опору і підйомної сили, а також описано процес

коливання у часі сил, прикладених до циліндра. Описано процес періодичної зміни у часі розподілу тиску на поверхні циліндра. Отримано значення числа Струхалія  $St$  при різних значеннях числа Рейнольдса  $Re$ . Проведено порівняльний аналіз цих даних з теоретичними і експериментальними даними, отриманими іншими авторами. Встановлено, що побудований нами алгоритм чисельного розв'язання задачі дозволяє адекватно описати досліджувану течію в діапазоні  $50 \leq Re \leq 400$ , в якому реалізується режим течії з періодичним відривом вихорів за циліндром. На другому етапі, використовуючи дані про розподіл тиску на поверхні циліндра в якості граничної умови, розв'язано задачу про випромінювання звуку потоком, що набігає на циліндр. Дані чисельних розрахунків підтвердили правильність зроблених припущень. Зокрема показано, що повна акустична потужність еолового тону на вісім порядків менше потужності потоку, що набігає на циліндр. Отримано просторові розподіли звукового поля (діаграми спрямованості) при різних значеннях числа Рейнольдса. Показано, що вісь діаграми спрямованості першої гармоніки еолового тону ( $p_1$ ), що збуджується коливаннями підйомної сили, розташована перпендикулярно напрямку потоку, а вісь діаграми спрямованості другої гармоніки еолового тону ( $p_2$ ), що збуджується коливаннями сили лобового опору, співпадає з напрямком потоку. Встановлено, що  $p_2/p_1 \ll 1$ , проте із зростанням числа Рейнольдса відношення  $p_2/p_1$  зростає.

Розв'язно задачу про генерацію звуку (клинових тонів) затопленим струменем, що натікає на гострий клин. На першому етапі шляхом прямого чисельного розв'язання нестационарної системи рівнянь Нав'є-Стокса розв'язано задачу гідродинаміки про натікання затопленого струменя, сформованого вузьким каналом, на гострий жорсткий клин. Отримано дані про залежності полів завихреності і полів тиску від часу впродовж перехідного процесу і процесу усталених автоколивань струменя. Встановлено, що впродовж перехідного процесу роль гідродинамічного каналу зворотного зв'язку виконують вихрові утворення, що виникли у момент початкового натікання струменя на клин, а потім рухалися проти течії. В процесі усталених автоколивань гідродинамічний канал зворотного зв'язку формується за рахунок

різниці тисків на гранях клину і періодичної зміни їх знаку, що викликає періодичний потік середовища з однієї грані клину на іншу грань і, як наслідок, періодичні поперечні відхилення струменя. Порівняння теоретично оціненої частоти автоколивань струменя з експериментальним значенням показує хорошу відповідність між розрахунковими і експериментальними даними. На другому етапі побудовано аналітичний розв'язок відповідної акустичної задачі і досліджено основні характеристики звукового поля, генерованого таким потоком.

Оскільки утворення і зрив вихорів за циліндром або будь-якими іншими подовженими тілами може призводити до небажаних вібрацій тіла, що обтікається, і навіть до руйнування конструкцій, необхідно мати можливість контролювати процес зриву вихорів, можливість знижувати силу опору тіла і амплітуду коливання сил, прикладених до нього. Одним із способів контролю потоку є розташування плоского спліттера за циліндром. Розв'язано задачу про генерацію автоколивань при обтіканні циліндра з приєднаним з тильного боку плоским спліттером. Досліджено як перехідний процес формування і початку відриву вихорів за циліндром, так і усталені автоколивання потоку, викликані періодичним утворенням і скиданням вихорів за циліндром. Показано, що наявність спліттера, розташованого вздовж потоку, істотно знижує опір циліндра при обтіканні і амплітуду коливання сил, прикладених до нього. Причому із зростанням довжини спліттера середнє значення сили опору монотонно зменшується. В той час, як амплітуди коливання сил, прикладених до тіла, що обтікається, змінюються немонотонно. Показано також, що при повороті спліттера на порівняно невеликий кут  $\alpha = 20^\circ$  процес зриву вихорів з поверхні тіла, що обтікається, також спостерігається, проте такий процес вже не буде досконало регулярним і періодичним. Періодична зміна тиску на сторонах циліндра і спліттера є джерелом звукових коливань дипольного типу, який неодноразово експериментально спостерігався багатьма дослідниками.

Розв'язано задачу про генерацію звуку потоком, що обтікає сферу, в широкому діапазоні значень числа Рейнольдса від ламінарного безвідривного

режиму течії до турбулентних режимів. Хоча дана задача є тривимірною, сучасні методи паралельних обчислень на кластерних суперкомп'ютерах дозволяють отримувати адекватні чисельні розв'язки задачі. При малих числах Рейнольдса застосовується техніка DNS, при великих числах Рейнольдса – техніка LES. Побудований чисельний алгоритм дозволив адекватно описати течію в усіх відомих режимах. Було показано хорошу відповідність отриманих нами результатів з експериментальними і розрахунковими результатами інших авторів. Також був визначений діапазон чисел Рейнольдса, в межах якого в потоці виникають автоколивання і, отже, такий потік може породжувати звук. Було встановлено, що в ламінарному режимі течії амплітуда коливань бічної сили, прикладеної до сфери, приблизно в п'ять разів перевищує амплітуду коливань сили опори. Цей факт дозволяє стверджувати, що, як і у випадку обтікання кругового циліндра, основна частина акустичної енергії генерованої потоком при обтіканні сфери, випромінюватиметься у бічному напрямку. При турбулентних режимах течії вихори, що зриваються, по формі близькі до вихрових кілець. Отримано діаграми спрямованості звукового поля. Знайдені режими потоку, при яких сфера, що обтікається, випромінюватиме як диполь. Показано, що вісь діаграми спрямованості розташована не перпендикулярно напрямку потоку, як у випадку обтікання кругового циліндра, а під деяким кутом нахилу. Цей ефект має місце через те, що вихорі, які по черзі зриваються з поверхні сфери, не будуть антисиметричні, як у випадку обтікання циліндра.

Досліджено течію в'язкої нестисливої рідини в плоскому каналі за наявності в ньому розташованих один за одним двох стенозів (звужень) на основі чисельного розв'язання нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса. Проаналізовано характер течії в області між стенозами в залежності від числа Рейнольдса. Зокрема показано, що в певному діапазоні чисел Рейнольдса з'являються характерні вихрові структури в зсувних шарах на межі струменя і порожнин (ніш), утворених стенозами. В результаті цього виникають стійкі періодичні антисиметричні автоколивання профілю швидкості на виході з отвору другого стенозу, які принципово можуть служити джерелом

звукових коливань в каналі. Визначено залежність чисел Струхалія автоколивань профілю швидкості від числа Рейнольдса. Встановлено, що при відносно малих числах Рейнольдса течія рідини в області між стенозами стаціонарна і характеризується наявністю в міжстенозній області швидкісного струменя, що витікає з вхідного отвору першого стенозу і витікає в отвір другого стенозу. Показано, що при збільшенні числа Рейнольдса, коли енергія в каналі зворотного зв'язку виявляється достатньою, циркуляційні рухи в нішах починають діяти на зсувні шари, в результаті чого вони втрачають стійкість. Втрата стійкості обумовлює запуск процесу утворення в кожному зі зсувних шарів послідовного ряду вихорів, які розташовуються один відносно одного в шаховому порядку. Набігаючи на отвір другого стенозу, ці вихори викликають періодичні антисиметричні коливання в ньому профілю швидкості.

Окремо розраховані і проаналізовані особливості руху середовища в залежності від ширини каналу в міжстенозній частині. Встановлено, що при досить малих числах Рейнольдса і при досить вузькій міжстенозній частині каналу в зсувних шарах в міжстенозній області будуть періодично в часі генеруватися вихрові структури симетричні відносно осі каналу. Також показано, що зі збільшенням ширини міжстенозної частини каналу картина течії принципово змінюється. Вихори, що утворюються в зсувних шарах в міжстенозній області розташовуються один відносно одного в шаховому порядку. Автоколивання профілю швидкості в отворі другого стенозу служать джерелом звукових коливань в каналі.

Розглянуто задачу випромінювання звуку потоком рідини в плоскому каналі з двома послідовно розташованими стенозами. У міжстенозній області такої течії може відбуватися самозбудження автотельних коливань середовища, які являються джерелом звукових коливань в каналі. Акустична задача розв'язується для двох областей: для однорідного плоского каналу, що знаходиться вниз за течією від другого стенозу, а також для області з геометричними неоднорідностями, що знаходиться вгору проти потоку від другого стенозу. Для розв'язання цієї задачі застосовується метод часткових

областей.

Розглянуто методи управління потоком і випромінюваною їм звуковою енергією в нерегулярному каналі, що містить два звуження. Показано, що одним з ефективних методів є раціональний вибір геометрії області між звуженнями і розташуванням отворів звужень.

Ключові слова: еолові тони, клинові тони, обтікання сфери, стенози, генерація звуку.

Зміст дисертації відображено в наступних наукових публікаціях:

1. Meleshko V. V., Malyuga V. S., Gomilko A. M. Steady Stokes flow in a finite cylinder. *Proc. R. Soc. Lond. A*. V. 456. 2000. P. 1741–1758
2. Гомилко А. М., Малуґа В. С., Мелешко В. В., Вербрюгген М. Обтекание системы кольцевых дисков потоком Стокса. *Прикл. гідромех.* Т. 3(74), № 1. 2001. С. 20–27.
3. Malyuga V. S., Gomilko A. M. Steady Stokes flow in a trihedral corner. In: Bajer K., Moffatt H.K. (eds) *Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics. Fluid Mechanics and Its Applications*. Springer, Dordrecht. V. 71. 2001. P. 355–360.
4. Malyuga V. S., Meleshko V. V., Speetjens M. F. M., Clercx H. J. H., van Heijst G. J. F. Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container. *Proc. R. Soc. Lond. A*. V. 458. 2002. P. 1867–1885.
5. Gomilko A. M., Malyuga V. S., Meleshko V. V. On steady Stokes flow in a trihedral rectangular corner. *J. Fluid Mech.* V. 476. 2003. P. 159–177.
6. Malyuga V. S. Viscous eddies in a circular cone. *J. Fluid Mech.* V. 522. 2005. P. 101–116.
7. Maire, O., Duchêne, J. C., Grémare, A., Malyuga V. S., Meysman, F.J.R. A comparison of sediment reworking rates by the surface deposit-feeding bivalve *Abra ovata* during summertime and wintertime, with a comparison

- between two models of sediment reworking. *J. Exp. Marine Biol. Ecol.* V. 343. 2007. P. 21–36.
8. Meysman F. R. J., Malyuga V., Boudreau B. P., Middelburg J. J. The influence of porosity gradients on mixing coefficients in sediments. *Geochimica et Cosmochimica Acta.* V. 71. 2007. P. 961-973.
  9. Meysman F. R. J., Malyuga V., Boudreau B. P., Middelburg J. J. Quantifying particle dispersal in aquatic sediments at short time scales: model selection. *Aquatic Biol.* V. 2. 2008. P. 239–254.
  10. Meysman F. R. J., Malyuga V. S., Boudreau B. P., Middelburg J. J. A generalized stochastic approach to particle dispersal in soils and sediments. *Geochimica et Cosmochimica Acta.* V. 72. 2008. P. 3460–3478.
  11. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Малюга В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами. *Прикл. гідромех.* Т. 11, N 4. 2009. С. 17–30.
  12. Вовк И.В., Малюга В. С. Численное моделирование потока в канале с двумя стенозами. Консонанс-2009, Праці акустичного симпозіуму. Київ. 2009. С. 122–127.
  13. Вовк И. В., Малюга В. С. Численное моделирование течения в канале с двумя последовательными сужениями (стенозами). *Допов. НАНУ.* N 4. 2010. С. 53–58.
  14. Малюга В. С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения. *Прикл. гідромех.* Т. 12, N 4. 2010. С. 45-62
  15. Вовк И. В., Малюга В. С. Об одном методе оценки звукового поля эоловых тонов. *Акуст. вісн.* Т. 13, N 2. 2010. С. 3–19.
  16. Малюга В. С. Численный расчет акустического поля эоловых тонов. *Допов. НАНУ.* N 9. 2011. С. 56–61.

17. Вовк И. В., Малюга В. С. Звуковое поле, генерируемое потоком в канале со стенозами. *Прикл. гидромех.* Т. 14, N 1. 2012. С. 23–48.
18. Голіченко О. Л., Малюга В. С. Мелешко В. В. Асимптотична поведінка коефіцієнтів розв'язку задачі стаціонарної Стоксової течії в скінченному циліндрі. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. науки.* N 1. 2012. С. 61–64.
19. Вовк І. В., Малюга В. С. Обтікання сфери в'язкою нестисливою рідиною. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. науки.* N 3. 2013. С. 102–105.
20. Малюга В. С. Численное моделирование обтекания сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости. *Прикл. гидромех.* Т. 15, N 3. 2013. С. 43–67.
21. Голіченко О. Л., Малюга В. С. Рух рідини в скінченному, круговому циліндрі. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. наук.* N 2. 2013. С. 51–56.
22. Krasnopolskaya T. S., Malyuga V. S., Golichenko O. L. Mixing and coherent structures in two and three dimensional containers. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM).* V. 3. 2013. P. 403–411.
23. Вовк И. В., Малюга В. С. Возбуждение звука при обтекании сферы. Консонанс-2013, Праці акустичного симпозиуму. Київ. 2013. Р. 65–70.
24. Малюга В. С. Генерация звука потоком, обтекающим сферу. *Доп. НАНУ.* N 11. 2014. С. 46–52.
25. Вовк И. В., Малюга В. С. Контроль излучения звука потоком в нерегулярном канале. *Доп. НАНУ.* N 1. 2015. С. 50–55.
26. Голіченко О. Л., Малюга В. С. Особливості перемішування рідини в скінченному циліндрі. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. наук.* N 2. 2015. С. 55–60.
27. Вовк І. В., Грінченко В. Т., Малюга В. С. Автоколивання струменя, що натікає на клин. Механізм виникнення зворотного зв'язку. *Нелінійні коливання.* Т. 18, N 3. 2015. С. 323–331.

28. Вовк І. В., Малюга В. С. Генерація автоколебаний струї, натекаючої на клин. *Доп. НАНУ*. N 12. 2015. С. 41–48.
29. Малюга В. С. Характеристики звукового поля, що генерується при обтіканні сфери. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. науки*. N 4. 2015. С. 87–92.
30. Vovk I. V., Grinchenko V. T., Malyuga V. S. Self-induced oscillations of a jet flowing over the wedge. The mechanism of appearance of the feedback. *J. Math. Sci.* V. 220. 2017. P. 265–272.
31. Вовк І. В., Малюга В. С. Генерація автоколебаний при обтекании цилиндра с плоским сплиттером. *Доп. НАНУ*. N 11. 2017. P. 30–36.

Malyuga V. S. Unsteady flow problems with allowance for effects of sound radiation. - Qualifying scientific work on the rights of manuscripts.

Thesis for the doctor's degree in physical and mathematical sciences in specialty 01.02.05 "Mechanics of fluid, gas and plasma Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the study of the stable self-oscillations generation in the course of the interaction between the flow and solid bodies, as well as to the study of the sound radiation processes by the flow. The regularities and mechanisms of the self-oscillations generation and the hydrodynamic feedback channels are described in detail. The characteristics of the sound fields generated when the flow dashes against a solid body are estimated. The mathematical models and methods for accurate estimation of the energy and spatial characteristics of the sound fields generated when the flow interacts with solid obstacles of various forms are developed. We develop the methods for description of the vortex sound sources in both the external flows and the internal flows in channels of complex geometry. We also develop the technique for estimation of the sound fields generated by the flow. The technique is based on the modern approaches of computer fluid mechanics and allows us to perform numerical calculations at cluster supercomputers. The numerical calculations of this thesis were carried out

at the cluster supercomputer Scit which is located at the Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

The high interest of the world scientific community in the topic of the sound generation by flows past solid bodies is determined, in the first place, to the deep physical content of the sound generation processes, which at the moment are not completely investigated, as well as to numerous technical applications. For example, in aviation and astronautics (estimation of the level of aviation and rocket engine sounds and possible reduction of these levels), noise reduction and increasing the life time of wind turbines, noise reduction in the boundary layer of submarines etc. In recent years the disease diagnostics technique based on the noise that occurs in the bronchial tree and blood vessel are developed. In particular, in the Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine the methods for respiration noise control and the technics for disease diagnostics from the results of measurements have been developed. After performing a number of experiments, it became necessary to carry out the numerical simulation of sound generation processes in ducts with stenoses (sharp narrowing of the duct) and to describe in detail the mechanisms of generation of such noise and tone sounds. This thesis work was performed within the framework of the scientific projects carried out at the Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine.

The algorithm of solution of the formulated problems, which belongs to the class of hybrid methods, is constructed in this dissertation work. The hybrid methods allow us to decompose the problem of sound generation by a flow into two stages. At the first stage, the hydrodynamics of the medium flow is calculated, at the second stage the characteristics of the acoustic field generated by the flow are evaluated. For numerical simulation of dynamics of two-dimensional fluid flows we used the direct numerical simulation (DNS) technique. The required accuracy of calculations in the considered range of Reynolds number was achieved by improving the computational grid. In the case of three-dimensional flows, the DNS methods were used only in laminar flow regimes. In turbulent regimes, we used the LES technique. The reason is that the three-dimensional problems require an order of magnitude more computer resources and consequently it is

impossible to achieve the required accuracy of numerical simulation by simply increasing the number of nodes in the computational grid. The MPI technology was used for parallel computing. The parallelization was carried out on the principle of geometry parallelism. When performing numerical calculations we used the computational procedures of the open source toolbox OpenFOAM. At the second stage of the constructed hybrid method the acoustic problems were solved. For this purpose, the analytical solutions of the acoustic problems were constructed.

For the purpose of verification of the constructed hybrid numerical algorithm, the sound field of the Aeolian tones was numerically calculated. At the first stage, based on the numerical solution of the Navier-Stokes equations by the finite volume method, the basic hydrodynamic characteristics were obtained, including the drag coefficient and the lift force coefficient, and also the process of time variation of the forces applied to the cylinder was described. The process of periodic-in-time change of the pressure distribution over the cylinder surface was described. The values of Strouhal number  $St$  at different values of Reynolds number  $Re$  were obtained. The comparison analysis of the presented data with the theoretical and experimental data obtained by other authors was conducted. It was established that the constructed algorithm of numerical solution of the problem allows us to adequately describe the flow under consideration in the range  $50 \leq Re \leq 400$ , in which the flow regime with periodic vortex shedding behind the cylinder implements. At the second stage, using the data of the pressure distribution over the cylinder surface as the boundary condition, the problem of sound radiation by the flow around the cylinder is solved. The results of the numerical calculations confirmed the correctness of the assumptions on which our model was based. In particular, it was shown that the total acoustic power of the Aeolian tone was eight orders of magnitude smaller than the power of the flow around the cylinder. The spatial distributions of the sound field (directivity diagram) at various values of Reynolds number are obtained. It is shown that the axis of the directivity diagram of the first harmonic of the Aeolian tone ( $p_1$ ) excited by the oscillations of the lifting force is perpendicular to the flow direction. The axis of the directivity diagram of the second harmonic of the

Aeolian tone ( $p_2$ ) excited by the oscillations the drag force coincides with the flow direction. It was established that  $p_2/p_1 \ll 1$ , but with increasing Reynolds number the relation  $p_2/p_1$  increases.

The problem of sound generation (wedge tones) by a submerged jet running against a sharp wedge is solved. At the first stage, using the methods of direct numerical simulation of the nonstationary system of the Navier-Stokes equations, we solve the hydrodynamical problem of a submerged jet formed in a narrow duct running against sharp wedge. The dependence of the vorticity and pressure fields on time during the transient process as well as the process of steady self-oscillations of the jet are studied. It was established that during the transient process the role of the hydrodynamic feedback channel is performed by the vortices that arose at the moment of the initial stroke of the jet at the wedge and then moved against the flow. During the steady self-oscillations the hydrodynamic feedback channel is formed by the difference in pressure on the wedge faces and the periodic change in its sign, causing a periodic flow of media from one face of the wedge to another face and, as a consequence, periodic lateral deviation of the jet. The comparison of the theoretically estimated frequency of the jet self-oscillations with the experimental values shows a good correspondence between computational and experimental data. At the second stage the analytical solution of the corresponding acoustic problem was constructed and the main characteristics of the sound field generated by the flow were investigated.

Since the vortex formation and shedding behind a cylinder or any other elongated bodies can lead to undesirable vibrations of the body and even to the destruction of structures, it is necessary to have possibility to control the process of vortex shedding, to have possibility to reduce the drag force value and the amplitude of variation of the forces applied to the body. One of the methods for controlling the flow is placement of a flat splitter behind the cylinder. The problem of the self-oscillations generation in the flow past a cylinder with a flat splitter attached to the rear side is solved. We study both the transient process of initial vortex formation and shedding behind a cylinder as well as the steady self-sustained oscillations of the flow caused by the periodic formation and shedding

of vortices behind a cylinder. It is shown that the presence of a splitter, oriented along the flow, significantly reduces both the drag force and the oscillation amplitude of forces applied to the cylinder. Moreover, with increasing splitter length the average value of the drag force monotonically decreases. While the amplitudes of fluctuations of the forces applied to the body change nonmonotonically. It is also shown that when the splitter is rotated at the comparatively small angle  $\alpha = 20^\circ$ , the process of vortex shedding from the body surface is also observed, however such a process will no longer be perfectly regular and periodic. The periodic variation of pressure on the sides of the cylinder and the splitter is the source of sound oscillations of the dipole type, which has been experimentally observed by many researchers.

The problem of sound generation by the flow past a sphere is solved in the wide range of the Reynolds number from the laminar regime without separation to the turbulent regimes. Although the problem is three-dimensional, the modern methods of parallel computations at cluster supercomputers allow us to obtain adequate numerical solutions of the problem. At small Reynolds numbers the DNS technique is used, at large Reynolds numbers the technique of LES. The constructed numerical algorithm allowed us to adequately describe the flow in all known regimes. It was shown that our results are in good agreement with the experimental and computational results of others authors. The range of Reynolds numbers within which self-sustained oscillations arise in the flow and therefore the flow can generate sound was determined. It was found that in the laminar regime the amplitude of oscillation of the lateral force applied to the sphere is approximately five times greater than the amplitude of oscillation of the drag force. This fact allows us to assert that, as in the case of flow past a circular cylinder, the main part of the acoustic energy generated by the flow past a sphere will radiate in the lateral direction. In the turbulent flow regimes the vortices shed from the sphere are close in shape to vortex rings. The directivity diagrams of the sound field were obtained. The flow regimes at which the sphere radiate as a dipole were found. It was shown that the axis of the directivity diagram is not perpendicular to the flow direction, as in the case of a circular

cylinder, but has a certain angle of inclination. This effect arises from the fact that the vortices shed from the spherical surface are not symmetrical, as in the case of the flow past a cylinder.

The flow of viscous incompressible fluid in a plane duct with two stenoses (narrowing) located sequentially was studied on the basis of the numerical solution of the nonstationary Navier-Stokes equations. Nature of the flow in the region between the stenoses, depending on the Reynolds number, is analyzed. In particular, it was shown that in a certain range of Reynolds number the vortical structures appear in the shear layers between the jet and the cavities (niches) formed by the stenoses. As a result the stable periodic antisymmetric self-sustained oscillations of the velocity profile at the outlet of the opening of the second stenosis arise. These oscillations can fundamentally serve as a source of sound vibrations in the channel. The dependence of Strouhal number of self-sustained oscillations of the velocity profile on the Reynolds number is determined. It is established that at relatively small Reynolds numbers the flow in the region between the stenoses is stationary and is characterized by presence of a high-speed jet, which flows in through the inlet of the first stenosis and flows out through the orifice of the second stenosis. It was shown that when the Reynolds number increases and the energy in the feedback channel becomes sufficient, the circulation movements in the niches begin to act on the shear layers and as a result they lose stability. The loss of stability initiates the process of formation of vortex series in each of the shear layers. These vortex series are arranged in a chess manner relative to each other. Running into the opening of the second stenosis, these vortices cause periodic antisymmetric oscillations of the velocity profile in the orifice.

The features of the fluid motion were calculated and analyzed for various values of the duct width in the inter-stenotic domain. It was established that at rather small Reynolds numbers and at a rather narrow inter-stenotic part of the duct the vortex structures symmetrical with respect to the duct axis are periodically generated in the shear layers in the inter-stenotic region. It is shown that the flow changes dramatically with increase in the width of the inter-stenotic

part of the duct. The vortices formed in the shear layers in the inter-stenotic region are arranged in a chess manner relative to each other. The self-sustained oscillations of the velocity profile in the orifice of the second stenosis is a source of sound vibrations in the channel.

The problem of sound generation by the flow in a plane duct with two successive stenoses is considered. Excitation of the self-sustained oscillations, which are the source of sound vibrations in the duct, may occur in the inter-stenotic region. The acoustic problem is solved for two domains: for the homogeneous plane duct situated downstream from the second stenosis and for the domain with geometric inhomogeneity situated upstream from the second stenosis. The method of partial domains was used for solution of this problem.

The methods of controlling both the flow and the sound energy emitted by the flow in an irregular duct containing two narrowing are considered. It is shown that one of the effective methods is the rational choice of the domain geometry between the stenoses and the location of apertures of the stenoses.

Key words: Aeolian tones, wedge tones, flow past a sphere, stenosis, sound generation.

The content of the thesis is represented in 31 scientific publications.

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>20</b>
<b>1 Алгоритм чисельного розв’язання задач про випромінювання звуку потоком, що набігає на тверду перешкоду</b>	<b>49</b>
1.1 Ідея методу . . . . .	49
1.2 Огляд існуючих методів прямого чисельного моделювання (DNS)	51
1.3 Методи DNS, використані для описання течій на першому етапі побудованого алгоритму . . . . .	57
1.4 Основні положення підходу LES . . . . .	68
1.5 Описання чисельних методів, що використовуються в технології LES . . . . .	72
1.6 Моделювання стінки . . . . .	78
1.7 Ідентифікація вихорів . . . . .	81
1.8 Ідентифікація інтерфейсу . . . . .	86
<b>2 Чисельний розрахунок звукового поля еолових тонів</b>	<b>94</b>
2.1 Вступ до розділу . . . . .	94
2.2 Постановка гідродинамічної задачі і чисельний метод її розв’язання . . . . .	96
2.3 Результати розрахунку течії. Верифікація отриманих результатів . . . . .	100
2.4 Постановка акустичної задачі і її аналітичний розв’язок . . . .	111
2.5 Розрахунок звукового поля . . . . .	113
2.6 Висновки до розділу . . . . .	117

	18
<b>3 Генерація звуку струменем, що натікає на клин</b>	<b>120</b>
3.1 Вступ до розділу . . . . .	120
3.2 Постановка задачі гідродинаміки і її чисельний розв'язок . . .	122
3.3 Автоколивання струменя, що натікає на клин. Механізм виникнення зворотного зв'язку . . . . .	125
3.4 Розрахунок звукового поля . . . . .	136
3.5 Висновки до розділу . . . . .	145
<b>4 Генерація автоколивань при обтіканні циліндра з плоским спліттером</b>	<b>147</b>
4.1 Вступ до розділу . . . . .	147
4.2 Постановка задачі та алгоритм її чисельного розв'язання . . .	148
4.3 Аналіз чисельних результатів . . . . .	150
4.4 Розв'язок акустичної задачі . . . . .	166
4.5 Висновки до розділу . . . . .	169
<b>5 Генерація звуку потоком, що набігає на сферу</b>	<b>170</b>
5.1 Вступ до розділу . . . . .	170
5.2 Постановка задачі . . . . .	181
5.3 Результати розрахунку течії. Верифікація отриманих результатів . . . . .	183
5.4 Розрахунок звукового поля . . . . .	193
5.5 Висновки до розділу . . . . .	199
<b>6 Особливості руху середовища в каналах зі стенозами</b>	<b>201</b>
6.1 Вступ до розділу . . . . .	201
6.2 Постановка задачі та її чисельний розв'язок . . . . .	204
6.3 Аналіз результатів розрахунку . . . . .	210
6.4 Аналіз результатів розрахунків для різної глибини міжстенонних ніш . . . . .	221
6.5 Висновки до розділу . . . . .	231

	19
<b>7 Звукове поле, генероване потоком в каналі зі стенозами</b>	<b>233</b>
7.1 Вступ до розділу . . . . .	233
7.2 Аналіз результатів розрахунку течії . . . . .	234
7.3 Постановка акустичної задачі . . . . .	241
7.4 Розв'язок сформульованих акустичних задач . . . . .	245
7.5 Результати розрахунку звукового поля . . . . .	248
7.6 Висновки до розділу . . . . .	271
<b>8 Контроль випромінювання звуку потоком в нерегулярному каналі</b>	<b>273</b>
8.1 Вступ до розділу . . . . .	273
8.2 Теорія . . . . .	274
8.3 Аналіз чисельних результатів . . . . .	275
8.4 Висновки до розділу . . . . .	279
<b>Висновки</b>	<b>280</b>
<b>Бібліографія</b>	<b>289</b>
<b>Додаток А</b>	<b>319</b>

## Вступ

Упродовж усього життя людину оточують різні звуки породжені потоками повітря (чи інших середовищ, що оточують людину), які у свою чергу генеруються різними природними явищами. Ці звуки можна розділити на дві групи: шумові звуки, що володіють широким частотним спектром, і тональні звуки, що мають дискретний частотний спектр. До групи шумових звуків відносяться як приємні для більшості людей шуми, наприклад, шум дощу, шум морського прибою, шум лісу, так і неприємні – шум транспортних магістралей, шум працюючих верстатів. До групи тональних звуків відносяться звуки, створювані музичними інструментами або, наприклад, "спів"вітру у тросах корабельних снастей, в пічних трубах, в щілинах і на гострих кромках різних предметів. Також до цієї групи можна віднести трелі птахів, виття вовків і так далі. Та і сама людина, за допомогою свого голосового апарату, здатний видавати як шумові, так і тональні звуки, що дозволяє йому співати і говорити.

Звичайно, у наші дні добре відомо у чому полягає відмінність шумових звуків від тональних звуків. Давно встановлено, що шуми характеризуються широким суцільним, більше менш рівномірним спектром частот. У протилежності цьому, тональні звуки характеризуються дуже вузьким спектром частот. Проте, ще 200 років тому не існувало стрункої теорії звуку, не було зрозумілого пояснення чому течія середовища, зіштовхуючись з перешкодою, генерує ті або інші звуки. Відмінності між шумами і тональними звуками не були відомі і людина покладалася в основному на своє чуттєве сприйняття звуків, розділяючи їх на приємні і неприємні.

Зв'язок між потоком повітря і породжуваними ним звуками був відомий ще стародавнім людям. Так в стародавніх єврейських переказах ("Притчі

Мидрашей. XII. Гуслі Давида") сказано: "Гуслі висіли над ложем Давида, проти отворів віконних. Коли наставала ніч, подих північного вітру проходив, ворущачи струни гусел і вони самі собою звучати починали. Тоді вставав Давид з ложа і увесь час до настання вранішньої зорі проводив у вивченні Мудрості господньої" [1]. Іншим прикладом є еолова арфа [2]. Вона була відома ще в античні часи задовго до різдва Христового, але вперше її описав Афанасій Кирхер в трактатах "Musurgia universalis"(1650) і "Phonurgia nova"(1673) [3]. Оповідання про еолову арфу, струни якої звучать при подиху вітру, пов'язано з ім'ям старогрецького бога Эола, повелителя вітрів. В залежності від сили вітру звуки були різної тональності. Чим сильніше вітер, тим більш високі обертони були чутні. При слабкому подиху вітру звучання еолової арфи легке і ніжне, при поривах - різке і гучне. Звуки еолової арфи так само як і "спів"корабельних снастей на вітрі було названо еоловими тонами [4]. Звичайно, в ті далекі часи люди не мали фізичних пояснень ефекту, який спостерігали. Стародавні греки пояснювали ефект виникнення звуків під впливом вітру тим, що до струн торкався бог вітрів Еол. Звідси і виникла назва "Еолові тони". Принципи роботи арфи були вперше пояснені через тисячоліття лордом Рэлеєм в 1915 році [5]. Струни арфи рухаються за рахунок "вихрової доріжки Кармана ланцюжка вихорів, що зриваються при обтіканні рідиною або газом циліндричного об'єкту.

Духові музичні інструменти також були винайдені в глибокій давнині. Зараз вже неможливо встановити хто винайшов перші народні музичні інструменти, такі як сопілку, дудку, ріжок, шотландську волинку та інші. Проте, історія створення всім відомого органу, головним звукотвірним елементом якого являється пристрій, аналогічний сопілці або дудці, добре відома. Дійсно, на основі праць видатного старогрецького інженера і вченого Герона і римського архітектора Ветрувія, що дійшли до наших днів, достовірно відомо, що честь винаходу органу (він називався в ті часи - гидравлос) належить Ктесибію - талановитому старогрецькому механіку-винахіднику з Александрії (близько II - I ст. до н.е.) [6, 7].

Наукова теорія виникнення звуку почала розвиватися відносно недавно,

усього якихось 200 років тому. А перші технічні прилади, що реалізовували перетворення енергії потоку в звукову енергію, з'явилися в першій половині ХХ століття [2]. До них слід віднести в першу чергу потужні звукові і ультразвукові повітряні свистки Гальтона і Гартмана, рідинні свистки Яновського і Польмана, а також повітряні і рідинні сирени, див. [8–14]. Одна частина цих пристроїв була розроблена і створена в інтересах гідроакустики, що тільки народжувалась у той час, для забезпечення виявлення підводних човнів, суден і айсбергів, визначення глибини під кілем суден (ехолотів) і для зв'язку між судами. Інша частина - для технологічних цілей в металургії, хімічній і харчовій промисловості та інших. Нарешті деякі з таких пристроїв, наприклад сирени і гудки, досі використовуються для сигналізації і сповіщення на залізничному і морському транспорті та у великих житлових масивах.

До розробки наукової теорії виникнення звуку протягом багатомісячної історії люди експериментували і в такий емпіричний спосіб створювали пристрої і прилади, за допомогою яких можна було видобувати тональні звуки. Ці пристрої з часом поступово удосконалювались і сьогодні ми маємо дуже великий набір ефективних технічних апаратів і музичних інструментів. Останні, як відомо, можна розділити на струнні, ударні і духові. Що стосується перших двох, то завдяки блискучим успіхам науки за останні 200 років стали зрозумілими усі тонкощі процесу генерації ними звуків. Дійсно, про коливання самої струни, як джерела тонального звуку, сьогодні відомо практично все. Встановлено закономірності, що зв'язують частоту випромінюваного струною звуку з усіма її геометричними і фізичними параметрами (довжиною, товщиною, матеріалом і способом закріплення кінців), а також способами її збудження. Багато в чому це справедливо і для ударних інструментів, оскільки їх механізм збудження описується добре розвинутою теорією коливань пластин, оболонок і мембран [15, 16]. Проте, не слід занадто переоцінювати ці фундаментальні досягнення науки. Як добре відомо, гучність і особливості звучання струнних музичних інструментів також багато в чому залежать від геометричних, фізичних і конструктивних властивостей об'єкту, до якого кріпляться струни, а також від способу збудження струн.

Дійсно, не треба нікого переконувати, що струни скрипки, гітари, арфи або рояля звучать абсолютно по-різному. Тому, щоб зрозуміти чому конкретний музичний інструмент звучить саме так, а не інакше, необхідно вивчати коливання не окремо виділеної струни, а спільні (пов'язані) коливання струни з самим тілом конкретного музичного інструменту, до якого вона кріпиться. А це виявляється і теоретично і технічно у багато разів важче, ніж вивчати коливання окремо виділеної струни. На превеликий жаль, фундаментальна наука недостатньо приділяє увагу вивченню цієї проблеми і, звичайно, на це є вагомі науково-технічні причини. Ось чому інструменти, кустарно виготовлені старими майстрами, досі дуже високо цінуються серед музикантів.

Що стосується духових інструментів і усіх тих пристроїв (сирен, свистків, гудків і так далі), в яких тональні звуки виникають за рахунок перетворення деякої частини енергії потоку повітря (чи рідини) в звукову енергію, то тут не все так очевидно і стосовно механізмів процесу генерації звуків потоком досі тривають дискусії. Це пояснюється в першу чергу тим, що вивчення таких процесів пов'язане з подоланням величезних труднощів теоретичного і експериментального плану, про які буде розказано нижче.

Попри те, що теоретичний опис процесів генерації звуків потоками, як і раніше, представляє собою складну задачу, людство створило багато приладів і духових музичних інструментів, що реалізують перетворення енергії потоку повітря в звукову енергію. Історія науки і техніки дає підстави стверджувати, що більшість різних приладів і пристроїв (у тому числі і музичних інструментів) були винайдені в основному без яких-небудь серйозних теоретичних досліджень. Найчастіше винахідники керувалися здоровим глуздом, спостережливістю та інтуїцією. А фізичний аналіз процесів, що відбуваються в цих пристроях з'являвся набагато пізніше по мірі накопичення теоретичних і експериментальних знань. Як приклад ми вже обговорювали вище грецьку струнну арфу, винайдену не менше 2500 років тому. А теорії коливання струн і випромінювання ними звуків почали серйозно розвиватися не раніше, ніж 200 років тому [15, 16].

Проте, в останні десятиліття явно намітився прогрес у вивченні і розу-

мінні механізмів перетворення енергії потоку в звукову енергію. Це стало можливим завдяки розробці нових підходів до пояснення цих механізмів, а також завдяки стрімкому розвитку електроніки і обчислювальної техніки, які дозволили істотно удосконалити експериментальну техніку, а також реалізувати складні обчислювальні алгоритми, за допомогою яких виявилось можливим чисельно моделювати динаміку процесу перетворення енергії потоку в звукову енергію. Ми не ставимо своєю метою досконало охопити всі, відомі на сьогоднішній день, теоретичні і експериментальні досягнення в такій галузі фізики, як генерація звуку потоком. Наше завдання полягає у тому, щоб на підставі детального розгляду ряду конкретних об'єктів і пристроїв, в яких здійснюється перетворення енергії потоку у звукову енергію, детально описати і проаналізувати фізичні причини і механізми цього перетворення і показати різноманітність цих механізмів.

Історія вивчення еолових тонів досить детально викладена у фундаментальній статті [17]. Наукове вивчення еолових тонів, тобто звуків, що виникають при обтіканні потоком кругового циліндра, розпочинається з експериментальної роботи В. Струхалія (Strouhal) що з'явилася в 1878 році [18]. Струхаль вивчав звуки, що виникають під час руху в повітрі довгого відрізка дроту кругового перерізу, і встановив, що безрозмірна величина  $St = fd/V$  в певному діапазоні швидкостей залишається сталою і рівною приблизно 0.19. Тут  $f$  – частота генерованого звуку,  $d$  - діаметр дроту,  $V$  - лінійна швидкість навколишнього потоку. Іншими словами, він встановив, що у визначеному діапазоні чисел Рейнольдса частота звуків, що виникають, буде пропорційна швидкості потоку, що набігає. Згодом величина  $St$  була названа на честь дослідника числом Струхалія. Якісні пояснення експериментальних результатів Струхалія дав Рэлей в [19–21]. Пізніше Т. Карман встановив, що відношення відстані між рядами вихорів що зриваються за циліндром в потоці, до відстані між вихорами в ряду рівне приблизно 0.28.

У період з 1914 по 1919 рр. Ф. Крюгер та А. Шмидке створили загальну якісну схему, що обґрунтовує генерацію тонального звуку потоком (вона відома під назвою теорії Крюгера [22]). Вони експериментально вивчали ге-

нерацію звуку при обтіканні циліндричних тіл, натіканні струменя на клин і при роботі органної труби. При цьому причиною генерації тонального звуку вважалася виключно поява вихрової доріжки Кармана. У 1931 р. Ю. Клюг (учень Ф. Крюгера), експериментуючи із струменем, що витікав з сопла, показав, що теорія Крюгера безпідставна і по суті, зводиться до повторного виведення співвідношень подібності, що вже були представлені у відомих роботах Струхалія і Рэлея.

У 1930-х роках деякі дослідники дійшли висновку, що в основі механізму генерації тонального звуку потоком лежить автоколивальний процес. Про це говорять Э. Ричардсон в [23], а також Б.П. Константинов в [22]. В подальшому, починаючи з 1950-х років, стала з'являтися велика кількість досліджень, присвячених розробці цієї ідеї для конкретних гідроаеродинамічних джерел звуку. Так в роботах [24, 25] досліджувалися механізми зворотного зв'язку, що викликають автоколивання струменя, який набігає на клин. Періодична дія струменя на клин інтерпретувалась, як джерело, що породжує акустичне поле. Було показано, що акустичне джерело представляє собою диполь, пов'язаний з флуктуаціями сили, що діє на область клину поблизу ребра. Механізми зворотного зв'язку, що збуджують струмінь, мають гідродинамічний характер, а характеристики породжуваного диполя залежать від числа Рейнольдса. У статті [26] було дано пояснення виникнення тонального звуку при обтіканні аеродинамічного профілю. Ці тональні звуки пов'язані з періодичним скиданням вихорів і генеруються петлею зворотного зв'язку, що має аеродинамічну природу. Ця петля зворотного зв'язку складається з великомасштабних нестационарних збурень у примежовому шарі і сліді. В експериментальній статті [27] досліджувалися автоколивання плоского струменя, що набігає на клин. Було встановлено, що такі коливання характеризуються не однією частотою, а рядом частот. Зокрема, в діапазоні чисел Рейнольдса  $250 < Re < 1150$  (число Рейнольдса визначалося за шириною сопла, з якого витікав струмінь) було знайдено сім добре визначених частотних компонент. При цьому дві основні частотні компоненти: найбільш стійка частота зсувного шару струменя і низькочастотна модульовальна ком-

понента. У роботі [28] досліджувалися коливання струменя, що набігає як на стаціонарний клин, так і на клин, що осцилює на заданій частоті. А отже, частота коливань струменя складалася з двох основних компонент: власна частота автоколивань і частота вимушених коливань клину. У роботі [29] дано просте уніфіковане аналітичне описання механізмів генерації звуку нестационарним рухом рідини. У статті розглядається випромінювання від компактних і некомпактних мультипольних джерел, обговорюється теорія Лайтхілла випромінювання звуку від вільної турбулентності, ефект перенесення джерела звуку потоком, генерування звуку взаємодією потоку з твердими поверхнями і неоднорідностями середовища. У статті [30] представлена лінійна аналітична модель, що дозволяє передбачити частотні характеристики дискретних осциляцій системи струмінь-клин. Така система ідеалізується, зокрема розглядається плоска пластина, як вироджена форма клину. Така пластина називається спліттер і розташовується на деякій відстані  $h$  від кореня струменя. Взаємодія струменя з пластиною спліттера відіграє роль зворотного зв'язку, яка виражається в поперечному зміщенні струменя, що здійснює сингулярні збурення поблизу вершини. Далі відбувається скидання вихорів і цей процес повторюється періодично. У роботах [31, 32] розглядався процес генерації звуку в органній трубці і об'ємному резонаторі. Показано, що зсувні шари містять деяку роздільну поверхню, чії рухи і визначають генерацію звуку в резонаторі. У роботі [33] досліджувався процес виникнення дискретних тонів, коли осесиметричний струмінь зіштовхується з твердою перешкодою. Експериментальне дослідження цього явища проводилося для двох випадків. У першому випадку перешкода представляла собою плоску пластину, перпендикулярну напрямку струменя, що має отвір діаметру рівного діаметру струменя. У другому випадку перешкода представляла собою кільце, також розташоване у площині перпендикулярній до напрямку потоку, з діаметром отвору рівним діаметру струменя. Автори дійшли висновку, що механізм генерації тонів дуже схожий на механізм генерації клинових тонів. У роботі [34] представлені експерименти, що дозволяють описати механіку свисту. Побудовано модель, що складається з

циліндричної порожнини з круговими отворами на кожному кінці, яка використовується для моделювання людського свисту. Знайдено, що частота дуже близька до частоти резонатора Гельмгольца. Були отримані дані про залежність частоти тонального сигналу, що виникає, від геометричних параметрів камери і отворів у діафрагмах. Зокрема, за допомогою відеокамери із стробоскопічним підсвічуванням було зафіксовано, що на поверхнях струменя (на ділянці між діафрагмами) утворюються кільцеві вихори, появу яких і пов'язували з виникненням тональних звукових сигналів. У роботі [35] проводились експериментальні і чисельні дослідження генерації звуку потоком в каналі, що містив два набори перешкод, які перегороджували частину каналу. Також досліджувався зворотний процес впливу генерованого потоком звуку на процес утворення і скидання вихорів. Експерименти проводились в аеродинамічній трубі, чисельне моделювання використовувалось для визначення і опису джерел звуку в потоці. Описання механізмів виникнення автоколивань у вільних зсувних шарах, що взаємодіють з твердими перешкодами, які є джерелом виникнення звукового поля, може бути знайдено в оглядових статтях [36, 37]. Обговорення механізмів генерації звуку потоком і детальна історія дослідження генерації еолових тонів представлена в [17].

Особливу увагу в огляді літератури про генерацію звуків потоками слід приділити роботам, присвяченим дослідженню акустичних осциляцій, індукованих потоком над прямокутною порожниною, що являє собою заглиблення в твердій поверхні. Дослідженню цієї проблеми присвячено величезну кількість робіт і експериментальних, і теоретичних. Досліджувались течії і при великих, і при малих числа Маха. Інтерес до таких течій викликано можливим проявом акустичного резонансу на порожнинах відкритих відсіків шасі літаків при їх зльотах і посадках, а також можливістю зниження рівня шумів. Ранні роботи на цю тему були в основному експериментальні [38–48]. У роботі [49] проведено експериментальний вимір частот дискретних тонів, які індукуються потоком над прямокутними порожнинами при різних дозвукових значеннях числа Маха. Для розуміння механізмів генерації звуків побудована математична модель явища осциляції тиску, що базується на вза-

емозв'язку нестійкості зсувного шару і породжуваного звукового сигналу, що призводить до виникнення акустичного резонансу.

У роботі Rossiter [41] осциляції потоку над порожниною описуються як механізм взаємодії потоку і акустичного поля. Малі збурення зсувного шару взаємодіють з ребром порожнини, що розташована вниз за потоком, і генерують акустичні хвилі, які поширюються вгору проти потоку і створюють нові збурення в зсувному шарі. При певних частотах виникає явище резонансу, що веде до різкого посилення збурення. Цей тип нестійкості називається модою зсувного шару або Rossiter mode. Rossiter провів велике число експериментів для двовимірних прямокутних порожнин різного співвідношення довжини і глибини і при різних значеннях числа Маха і визначив ряд дискретних частот коливань. В результаті він отримав напівемпіричну формулу для резонансних частот.

Пізніше в експериментальній роботі [50], де розглядалася осесиметрична порожнина, був знайдений режим коливань, названий режим сліду (wake mode). Потім в роботі [51], де проводилося пряме чисельне моделювання, був знайдений такий же режим коливань у випадку плоскої прямокутної порожнини. У цьому режимі течія характеризується скиданням великомасштабних вихорів з передньої кромки порожнини, подібно до того як це відбувається при обтіканні твердих тіл. Великий вихор формується біля передньої кромки порожнини, потім відривається, зноситься потоком і викидається з порожнини. Цей режим характеризується різким зростанням сили опору. Перехід течії в такий режим був описаний у багатьох статтях, в яких проводилося чисельне моделювання двовимірних течій [51–54]. У роботі [55] було показано, що тривимірність пригнічує режим сліду. Чисельне моделювання на основі технології LES показало, що двовимірні області в режимі сліду повертаються в режим зсувного шару, коли тривимірний розподіл має місце в примежовому шарі, що набігає. Слід зазначити, що виникнення автоколивань в течіях над порожнинами досліджувались також в Інституті гідромеханіки НАН України [56, 57].

Потік робіт, присвячених дослідженню механізмів генерації звуку різни-

ми течіями, триває і в наші дні. Це обумовлено в першу чергу колосальною фізичною змістовністю процесів виникнення звуку, які на даний момент повністю не досліджені, а також численними технічними застосуваннями, наприклад, в авіації і космонавтиці (оцінка рівнів звуків авіаційних і ракетних двигунів і можливе зниження цих рівнів), зниження шумів прилежового шару на підводних човнах. Процеси генерації звуків потоками досліджувались також на території колишнього СРСР, а також України. Ці дослідження пов'язані з іменами відомих вчених, таких як Блохінцев [58], Смольяков [59], Вовк, Грінченко [2]. А останнім часом почали розвиватись методи діагностики захворювань на основі шумів, що виникають у бронхіальному дереві і кровоносних судинах. Зокрема, в Інституті гідромеханіки НАН України проводилась розробка методів контролю шумів дихання і діагностики захворювання за результатами вимірів [60, 61].

Упродовж останніх десятиліть аероакустика стала важливим розділом науки і знайшла масу застосувань в індустрії. Стандарти людського життя, які постійно зростають, вимагають розробки безшумних машин. Тому аероакустика знаходить своє застосування в авіакосмічній промисловості. В першу чергу є важливими питання зниження звуків літаків під час зльотів і посадки. Це, перш за все, звуки літакових двигунів і відсіків шасі. Також мають велике значення питання зниження генерації шумів вітровими турбінами. Це питання стає все більш важливим сьогодні, коли вітрова енергетика розвивається семимильними кроками. Так, наприклад, в роботі [62] були проаналізовані різні джерела шумів, що генеруються вітровою турбіною. Було показано, що домінуючий вклад вносять широкосмугові звуки генеровані взаємодією задньої кромки лопатки вітрової турбіни і турбулентного прилежового шару (*trailing edge noise*), що зривається.

На жаль, потужності доступних сьогодні комп'ютерів недостатні для того, щоб проводити повномасштабне чисельне моделювання вітрової турбіни. Тому дослідження концентрують увагу на визначенні і аналізі найбільш суттєвих джерел звуку. Звуки генеровані потоком, можуть бути тональними і широкосмуговими. Згідно з роботою [63] механізми генерації звуків можуть

бути розділені на п'ять категорій:

- Турбулентний примежовий шар – заднє ребро лопатки.
- Ламінарний примежовий шар – скидання вихорів за лопаткою.
- Зрив потоку і утворення великомасштабних вихорів при повороті лопатки.
- Зрив вихорів, викликаний затупленням заднього ребра лопатки.
- Утворення і зрив вихорів на краю лопатки.

Для двовимірного профілю мають значення перші чотири механізми. Для тривимірного необхідно також розглядати і п'ятий механізм. Детально ці питання розглядаються в дисертаційній роботі [64].

Існують різні підходи до розв'язання проблеми чисельних розрахунків генерації звуку. Детальний опис існуючих підходів можна знайти у збірці [65]. Можна виділити два основних підходи:

- Прямі методи. Розв'язується загальна задача про рух стисливого середовища. Розв'язок акустичної задачі отримують безпосередньо, як частину чисельного розв'язку задачі про рух стисливого середовища. Шляхом прямого чисельного моделювання (DNS) або шляхом застосування технології моделювання великих вихорів (LES) безпосередньо розв'язуються рівняння руху стисливого середовища. Звичайно, в ідеалі найбільш точний результат міг би дати підхід DNS. У цьому випадку, взагалі, не було б необхідності в моделюванні, якби структури будь-яких масштабів могли бути розв'язані чисельно на побудованій сітці. Проте, на практиці на сьогодні у більшості тривимірних задач, що викликають інтерес дослідників, це неможливо. Такий підхід має наступні недоліки:

- високі вимоги до потужності комп'ютерів. Із зростанням числа Рейнольдса вимога до потужності комп'ютера росте як  $Re^3$ . На цьому рівні розвитку комп'ютерної техніки навіть з урахуванням

бурхливого розвитку кластерних суперкомп'ютерів, яке спостерігається останні роки, цей факт сильно обмежує можливості застосування методів DNS в тривимірних задачах при великих числах Рейнольдса.

- проблема різних масштабів, яка властива будь-яким задачам розрахункової аерогідроакустики. По-перше, акустичні збурення малі порівняно зі значеннями гідродинамічних величин. По-друге, при малих числах Маха швидкість руху середовища набагато менша швидкості поширення звуку в цьому середовищі.
- Гібридні методи. Ці методи зводяться до розщеплення задачі на дві окремі проблеми: генерація звуку і поширення звуку. У рамках розв'язання першої проблеми розв'язується гідродинамічна задача про течію середовища і описуються коливальні процеси, що виникають в ній, які і генерують звукове поле. Для цього використовуються наступні методи:
  - класичні методи обчислювальної гідромеханіки (CFD), які дозволяють розв'язати проблему визначення джерел звуку. Це можуть бути методи LES і DNS для нестисливого або стисливого середовища.
  - CFD метод, згідно з яким джерело звуку не розв'язується, а реконструюється. Згідно з цим підходом осереднені турбулентні характеристики потоку обчислюються з рівнянь Рейнольдса (рівнянь Нав'є-Стокса, осереднених за Рейнольдсом, RANS). Потім на основі цієї осередненої за часом інформації реконструюються характеристики турбулентної течії, які являються джерелами звукових коливань. Потім ці величини використовуються як джерельні члени при розв'язанні акустичної задачі. Такі методи завжди залежать від емпіричних співвідношень і, відповідно, належать до класу напівемпіричних методів [65].
  - гібридний LES/APE метод [66, 67]. Використовується LES метод в

комбінації з рівняннями акустичних збурень (acoustic perturbation equations, APE), які були запропоновані Ewert і Schroder в роботах [66, 67]. LES використовується для розв'язання гідродинамічної задачі про нестационарну течію. Потім використовується акустична аналогія, що базується на лінеаризованих APE рівняннях, для описання випромінювання звуку. Негативною властивістю такого підходу є вимога високих комп'ютерних потужностей.

Після ідентифікації джерел звуку в гідродинамічно активній зоні, можна переходити до другого етапу гібридних методів, а саме, опису поширення генерованих звукових хвиль в дальньому полі. Тут також є вибір між двома альтернативними підходами:

- Використовувати чисельні методи розв'язання лінеаризованих рівнянь перенесення Ейлера (LEE) або хвильового рівняння. Такий підхід подібний до методів CFD в тому розумінні, що необхідно розв'язувати рівняння в частинних похідних в усьому полі від меж області, де знаходяться гідродинамічні джерела, до спостерігача. Проте, такий підхід значно простіший ніж прямі методи, оскільки LEE рівняння, так само, як і хвильове рівняння є лінійними. Отже, дискретизація таких рівнянь істотно простіше, ніж дискретизація повних рівнянь перенесення в прямих методах, а чисельні схеми працюють значно стабільніше. Крім того, чисельні схеми дозволяють легко досягти низькою схемній (штучної) дифузії і дисперсії. На межі між областю, де здійснюється моделювання акустичного поля (CAA domain), і областю гідродинамічних розрахунків (CFD domain) розв'язок гідродинамічної задачі використовується в якості граничної умови для акустичної задачі.
- Аналітичний підхід використовує інтегральну форму рівнянь, що описують поширення акустичних хвиль. Це або поверхневий інтеграл Кірхгоффа, або рівняння Фокс Вілльямс-Хокінгс (FW-H). В цьому випадку звуковий тиск в точці спостереження розрахо-

вується шляхом інтегрування джерельного члена по поверхні (це може бути або фізична поверхня, або поверхня, що оточує гідродинамічне джерело звуку) і, можливо, інтегрування за об'ємом у випадку FW-H рівняння.

Доступні в даний момент підходи до розв'язання прикладних задач можна упорядкувати від найбільш витратних DNS до гібридних підходів, які розв'язують осереднені за часом рівняння руху для отримання характеристик ближнього поля і потім на основі отриманих даних про характеристики ближнього поля розв'язують рівняння, що описують поширення хвиль в дальнє поле. У книзі [65] всі можливі методи чисельного розрахунку звукового поля, генерованого потоком рідини, що набігає на тверде тіло, представлені схематично (див. стор. 12 [65]). Слід зазначити, що і в наші дні триває розробка нових методів і модернізація вже існуючих методів CFD і САА.

Впродовж останніх десятиліть обчислювальна гідромеханіка (CFD) особливо активно розвивається. З появою і розвитком кластерних суперкомп'ютерів і технологій паралельного програмування CFD методи починають грати все більш важливу роль в прикладних задачах, що мають конкретні застосування в індустрії. Проте, можливості застосування методів CFD в задачах про генерацію звуку вимагають окремого обговорення. Далеко не всі методи CFD можуть бути корисні в такому класі задач. Наприклад, в обчислювальній гідромеханіці при описі турбулентних течій часто розв'язують осереднені по Рейнольдсу (осереднені за часом) рівняння Нав'є-Стокса (RANS), які не залежать від часу. А задачі про генерацію звуку потоками (задачі аерогідроакустики) мають справу з полями, які за визначенням залежать від часу. Щоб виник звук, необхідно, щоб потік змінювався у часі. Ось чому в задачах про генерацію звуку потоками доводиться розвивати і застосовувати більш складні і витончені методи.

Прямі методи розв'язання задачі генерації звуку потоком полягають у розв'язанні стисливих рівнянь Нав'є-Стокса шляхом прямого чисельного моделювання (DNS). Для дискретизації просторових похідних у рівняннях руху використовується компактна скінченнорізницева схема шостого поряд-

ку, описана Lele в [68]. Для інтегрування за часом використовується метод Рунге-Кутта четвертого порядку. Така комбінація схем дає дуже малу дисперсію і чисельну дисипацію, що дозволяє проводити досить точні розрахунки поширення хвиль. Ця схема використовувалась при розв'язанні задач про генерацію звуку в шарах змішування і струменях. Схема дозволяє отримувати значення акустичних полів з флуктуаціями швидкості на п'ять порядків менше за величиною, ніж флуктуації швидкості у ближньому полі [69]. Очевидно, що оскільки застосовані схеми просторової дискретизації мають шостий порядок точності, дискретизація проводилася на структурованій сітці.

Прямі методи, що базуються на схемі Lele, використовувались в цілому ряді робіт, опублікованих співробітниками Каліфорнійського технологічного інституту (California Institute of Technology), в яких досліджувалась проблема нестабільності потоку над прямокутною порожниною, розташованою в площині, включаючи і акустичні поля, генеровані такою течією. Тут можна послатися на дисертаційні роботи [70, 71], де можна знайти також огляд великої кількості робіт на цю тему. Звичайно, прямі методи використовувались і в інших роботах. Наприклад, чисельне моделювання широкосмугового шуму в надзвукових струменях розпочинається з робіт [72, 73]. Коректне розв'язання всіх масштабів турбулентної течії в DNS вимагає, щоб дискретизовані рівняння розв'язувались на надзвичайно дрібних сітках, оскільки розміри найдрібніших турбулентних масштабів зменшуються із зростанням числа Рейнольдса. Це призводить до того, що для тривимірних потоків час чисельних розрахунків є пропорційним третьому степеню числа Рейнольдса. Оскільки в більшості випадків течії, що викликають інтерес з точки зору технічних застосувань, характеризуються високими числами Рейнольдса, очевидно, що на цьому етапі розвитку комп'ютерної техніки використання DNS для чисельного моделювання прикладних турбулентних потоків може собі дозволити лише дуже обмежене коло дослідників, що мають доступ до найбільш потужних суперкомп'ютерів світу. Крім того, при використанні DNS для розрахунку акустичних полів в дальньому полі необхідно обира-

ти величезну розрахункову область, яка повинна на порядки перевищувати розмір області гідродинамічного процесу, який генерує акустичне поле. Очевидно, що виконання цих двох умов одночасно для складних тривимірних течій буде важковирішуваною проблемою не лише для сьогодення, але і в найближчі десятиліття. Проте пряме чисельне моделювання звуків, генерованих потоками, проводилося для досить простої геометрії. Це, передусім, вже згадані двовимірні течії над прямокутною порожниною. Пряме чисельне моделювання течії і генерованого звуку проводилося також в роботах [55, 74–82].

В наш час при чисельному розв'язанні акустичних задач найчастіше використовуються гібридні методи. Згідно з цим підходом гідродинаміка течії у ближньому полі розраховується з метою визначення флуктуацій швидкості і тиску в потоці. Ці флуктуації і формують джерело акустичних коливань. Акустичні характеристики дальнього поля розраховуються окремо на основі отриманих з гідродинаміки даних про джерело акустичних коливань. Спрощення загальної задачі при її розщепленні на дві окремі гідродинамічну і акустичну задачі виникає з того факту, що величини полів і масштаби довжини в гідродинамічній і акустичній задачах відрізняються на порядки. Отже, методи гідромеханіки, що використовуються при чисельному моделюванні потоку, і методи акустики, що використовуються при розрахунках звукових полів, можуть сильно відрізнитися за точністю і за вимогами до комп'ютерних ресурсів. Обговоримо тепер детальніше методи, що застосовуються при розв'язанні окремо гідродинамічної і акустичної задач.

Як вже згадувалося вище, методи DNS при чисельному моделюванні течії можуть бути реально застосовані лише при досить малих числах Рейнольдса і в досить простій геометрії, наприклад, при розрахунку простих двовимірних течій. Тому на практиці при розрахунках в досить складних областях і при великих числах Рейнольдса часто застосовують підхід RANS (осереднювання рівнянь Нав'є-Стокса по Рейнольдсу), використовуючи диференціальні моделі турбулентності, такі як  $k - \epsilon$  або  $k - \omega$  моделі. В рамках цього підходу обчислюються характеристики турбулентного потоку. А вже

на основі відомих характеристик турбулентного потоку проводять оцінку випромінюваного потоком звуку. Такий підхід дозволяє оцінити амплітуду турбулентних флуктуацій швидкості, але оскільки цей метод надає дослідникові лише осереднені за часом характеристики потоку, необхідно робити додаткові припущення про статистичні характеристики турбулентності при обчисленні звукового поля. Одна з перших спроб зв'язати оцінки статистичних властивостей осередненої за часом турбулентної течії з моделлю звукового поля, що базувалась на акустичній аналогії, були зроблені в роботі [83]. У роботах [84–87] також використовувався підхід RANS і  $k-\epsilon$  модель турбулентності для обчислення поля потоку при чисельному моделюванні турбулентних струменів і випромінюваного ними звуку.

Слід зазначити, що описаний вище гібридний метод, який базується на використанні техніки RANS, показує добрі результати при розрахунку широкосмугових звуків, генерованих течіями з розвиненою турбулентністю, наприклад, турбулентними струменями. Проте у рамках цієї роботи нас цікавить не стільки широкосмуговий шум турбулентного струменя, скільки тональні звуки, генеровані при натіканні струменя або потоку на тверду перешкоду. Такі тональні звуки генеруються не турбулентними пульсаціями швидкості і тиску, а автоколиваннями, викликаними періодичними рухами великих вихрових структур. В цьому випадку технологія RANS, що дає нам лише осереднені за часом характеристики, є занадто грубою. Виникає необхідність застосовувати складніші методи, що дозволяють отримувати інформацію не лише про осереднені характеристики полів але і досліджувати процес еволюції і періодичних рухів великих вихорів.

Метод, який найкращим чином підходить для розв'язуваних в даній роботі задач, який дозволяє розраховувати великомасштабні флуктуації, що дають найбільший вклад в акустичне поле, це метод LES (метод великих вихорів). У роботі [88] використовувалась техніка DNS для розрахунку шарів змішування, що розвиваються у часі. Ці дані використовувались для чисельної оцінки генерованого звукового поля. Розрахунок звукового поля проводився на основі акустичної аналогії Лайтхілла і великомасштабної мо-

делі для реалізації аналогії Філіпса [89]. Також використовувався LES фільтр для визначення вкладу великих вихорів в генероване звукове поле. При високих числах Рейнольдса цей метод дозволяє розраховувати рухи великих вихрових структур в турбулентних течіях, а вплив на течію дрібних вихрових структур моделювати. Слід зазначити, що при дуже великих числах Рейнольдса, наприклад, при розрахунку шуму надзвукових струменів використання LES може бути дуже проблематичним, оскільки така технологія є вимогливішою до комп'ютерних ресурсів, ніж розглянута вище технологія RANS. При розгляді турбулентних потоків в області без стінок легко оцінити потрібну просторову роздільну здатність. У роботі [90] розраховувався турбулентний струмінь при  $Re = 8.7 \times 10^6$ . Автор прийшов до висновку, що сітки з числом вузлів  $2.1 \times 10^9$  досить для акуратного розрахунку шуму струменя з використанням LES. У роботі [91] розрахунок турбулентного струменя проводився при  $Re = 10^5$ . Розрахункова сітка, використана при розрахунках, містила 12 мільйонів вузлів. Ближнє поле, отримане з використанням LES, далі використовувалося при розрахунку дальнього акустичного поля по методу Ffowcs Williams-Hawkins. Автори отримали хороший збіг з експериментальними результатами. У даній роботі ми проводили розрахунки тривимірної течії при обтіканні сфери. Ми розглядали тільки докритичні режими обтікання, тобто режими при яких відбувається відрив ламінарного примежового шару, який вже після відриву від поверхні сфери розривається спочатку на кільця, а потім і повністю турбулізується. Число Рейнольдса такої течії, визначене за діаметром сфери складало  $Re = 10^4$ . Розрахункова сітка складала 8 мільйонів елементарних комірок. Цього було цілком достатньо для того, щоб досягти хорошого збігу отриманих результатів з експериментальними і розрахунковими даними, опублікованими іншими авторами. Обчислення проводилися на кластерному суперкомп'ютері Скіт Інституту кібернетики НАН України. При розрахунках використовувались 32 ядра, що було цілком достатньо для сітки в 8 мільйонів елементарних комірок. Звичайно, існують ще і закритические режими, коли відривається вже турбулентний примежовий шар і потім знову переприєднується до по-

верхні сфери. У цьому режимі генероване звукове поле представляє собою широкопasmовий шум турбулентного потоку. Можливо, для таких режимів було б недостатньо сітки в 8 мільйонів елементарних комірок, а використання детальнішої сітки вимагало б залучення більшої кількості розрахункових ядер. Проте, в цій роботі нас цікавив не стільки широкопasmовий шум, скільки тональні звуки в спектрі звукового сигналу, які генеруються великими вихровими структурами, що взаємодіють з поверхнею сфери. У докритичному режимі такими структурами є кільця, які періодично утворюються за сферою в примежовому шарі, який щойно відірвався, і потім зносяться потоком вниз за течією.

Хоча технологія LES вимагає залучення великих комп'ютерних потужностей і на даний момент вона все ще не є технічно доступною і популярною серед багатьох дослідників, проте поява і розвиток в останні десятиліття потужних кластерних суперкомп'ютерів, а також розвиток технології розпаралелювання комп'ютерних програм робить методи LES набагато доступнішими. В усякому разі наші дослідження показують, що потужностей наявного на даний момент у розпорядженні Національної академії наук кластерного суперкомп'ютера Скіт цілком достатньо, щоб розраховувати за технологією LES тривимірні течії при значеннях числа Рейнольдса  $Re = 10^4$ . Крім того, технологія LES є дуже перспективною на найближчі десятиліття. Який би величезний крок вперед не зробили розробники сучасних суперкомп'ютерів, розрахунки складних тривимірних турбулентних течій прямими методами DNS поки мають дуже туманні перспективи. Хоча, як було вже сказано вище, технологія DNS успішно застосовується для досить простих двовимірних течій.

Таким чином, в рамках гібридних методів загальна методологія розрахунку дальнього звукового поля, генерованого потоком, яка використовується у багатьох роботах, полягає в розрахунку нестационарного потоку у ближньому полі з використанням техніки DNS або LES і подальшому розрахунку дальнього акустичного поля з використанням акустичної аналогії. При цьому джерельні члени визначаються великомасштабними флуктуаці-

ями потоку у ближньому полі. При використанні сіткових методів акустика дальнього поля розраховується у великій області, розміри якої на порядки перевищують розміри області джерела. Отже, і сітка для розрахунку акустичного поля буде набагато грубішою за сітку, використану для розрахунку потоку у ближньому полі. При цьому можливе застосування різних чисельних методів для розрахунку акустичного поля. Детальне обговорення основних підходів розрахунку акустичних полів можна знайти в [65].

У даній роботі ми будемо наступний алгоритм розв'язання поставлених задач, який також належить до числа гібридних методів. На першому етапі при чисельному моделюванні течій ми використовуємо техніку DNS для двовимірних течій. При сучасному розвитку комп'ютерної техніки необхідна точність розрахунків в розглянутому діапазоні чисел Рейнольдса може бути досягнута шляхом поліпшення розрахункової сітки. У разі ж тривимірних течій методи DNS використовувались тільки в ламінарних режимах течії. При турбулентних режимах ми використовували техніку LES. Річ у тому, що тривимірні течії є на порядок вимогливішими до комп'ютерних ресурсів і, отже, досягти бажаної точності чисельного моделювання шляхом простого збільшення числа вузлів розрахункової сітки не представляється можливим. На другому етапі при розв'язанні акустичних задач ми будували аналітичні розв'язки.

В наш час твердо встановлено, що за відсутності меж в турбулентних потоках генерація звуку відбувається за рахунок взаємодії вихрових структур різних масштабів. З точки зору акустики ці джерела можуть бути тільки квадрупольного типу. А при взаємодії вихрових структур в потоці з твердими і пружними поверхнями можуть виникати звукові джерела, відповідно, дипольного і монопольного типу. По дотепному зауваженню Мюллера [92] вихори - це "голос потоку" "Vortices are the voice of the flow". Хоча правильніше було б сказати: "Взаємодія вихорів - це голос потоку оскільки за відсутності взаємодії вихорів звук не виникає.

У даній роботі ми розглядаємо течії у присутності твердих тіл. Тому домінуючим буде дипольний звук, що виникає при взаємодії вихорів з твердою

поверхнею тіл, що обтікаються. З цієї причини на другому етапі побудованого нами гібридного методу ми формулюємо граничну умову для акустичних полів на поверхні твердого тіла, що обтікається. А далі будуємо аналітичний розв'язок відповідних граничних задач для хвильового рівняння.

**Обґрунтування вибору і актуальність теми.** Останніми роками спостерігається зростання числа наукових робіт, присвячених дослідженню механізмів генерації звуку різними течіями. Такий високий інтерес світової наукової спільноти до цієї теми обумовлений в першу чергу колосальною фізичною змістовністю процесів виникнення звуку, які на даний момент повністю не описані, а також численними технічними застосуваннями, наприклад, в авіації і космонавтиці (оцінка рівнів звуків авіаційних і ракетних двигунів і можливе зниження цих рівнів), зниження шумів прилежового шару на підводних човнах. Також до актуальних прикладних задач аерогідроакустики відноситься проблема зниження генерації шумів вітровими турбінами. Це питання стає все більш важливим сьогодні, коли вітрова енергетика розвивається семимильними кроками. На жаль, потужності доступних сьогодні комп'ютерів недостатні для того, щоб проводити повномасштабне чисельне моделювання вітрової турбіни. Тому дослідження концентрують увагу на визначенні і аналізі найбільш суттєвих джерел звуку, чисельно моделюючи процес обтікання лопатки. В останній час почали також розвиватись методи діагностики захворювань на основі шумів, що виникають у бронхіальному дереві і кровоносних судинах. Зокрема, в Інституті гідромеханіки НАН України проводилася розробка методів контролю шумів дихання і діагностики захворювання за результатами вимірів. Після проведення ряду експериментів виникла необхідність провести чисельне моделювання процесів генерації звуку в каналах із стенозами (різкими звуженнями каналів) і детально описати механізми генерації таких шумів і тональних звуків.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота проводилася у рамках наукових проектів, що виконуються в Інституті гідромеханіки НАН України. Здобувач брав участь у наступних наукових проектах:

- "Дослідження можливостей застосування кавітації для зниження опору при русі у воді". Проект N P519. Термін виконання: 2011–2012 р.
- "Дослідження механізмів генерації і розробка методів аналізу звукових полів, що породжуються взаємодією рідини з деформівними структурами". Номер держреєстрації: 0114U000070. Термін виконання: 2014–2017 р.
- Договір № 198-16 від 01.03.2016 на виконання НДР "Розробка методики оцінки акустичних навантажень на прилади СК верхньої ступені при старті РКП" між Інститутом гідромеханіки НАН України та ДП "КБ "Південне імені М.Я.Янгеля"
- Договір № 124-17 від 01.02.2017 на виконання НДР "Разработка полумпирической методики оценки акустических нагрузок при старте РКН с учётом особенностей конструкции газохода" між Інститутом гідромеханіки НАН України та ДП "КБ "Південне імені М.Я.Янгеля"
- Договір № 570-17 від 01.08.2017 на виконання НДР "Разработка методики и программ расчета акустических нагрузок, действующих на РКН при старте вследствие дополнительных возмущений от взаимодействия реактивной струи с ПУ" між Інститутом гідромеханіки НАН України та ДП "КБ "Південне імені М.Я.Янгеля"

**Мета роботи** – дослідження процесів виникнення стійких автоколивань при взаємодії потоку з твердими тілами і випромінювання звуку. Розробка математичних моделей і методів, що дають можливість кількісної оцінки енергетичних та просторових характеристик звукових полів, що виникають при обтіканні потоком твердих перешкод різних форм. Розробка методів описання вихрових джерел звуку в зовнішніх потоках та в потоках в каналах складної геометрії. Розробка техніки розрахунку звукових полів, що базується на сучасних підходах комп'ютерної механіки рідини і дає можливість проводити чисельні розрахунки на кластерних суперкомп'ютерах.

**Об'єктом дослідження** є процес виникнення автоколивань рідини і звукового поля при натіканні потоку на жорстке тіло.

**Предмет дослідження** – закономірності виникнення автоколивань, гідродинамічних каналів зворотних зв'язків і звукових полів при натіканні потоку на тверде тіло.

**Методи дослідження.** У даній роботі ми будуємо наступний алгоритм розв'язання поставлених задач, який належить до числа гібридних методів, детально описаних вище. Гібридні методи дозволяють розкласти задачу про генерацію звуку потоком на два етапи. На першому етапі при чисельному моделюванні течій ми використовуємо техніку DNS для двовимірних течій. Необхідна точність розрахунків в розглянутому діапазоні чисел Рейнольдса досягається шляхом покращення розрахункової сітки. У разі ж тривимірних течій методи DNS використовувались тільки у ламінарних режимах течії. При турбулентних режимах була використана техніка LES. Справа у тому, що тривимірні течії є на порядок більш вимогливими до комп'ютерних потужностей, а, отже, досягти бажаної точності чисельного моделювання шляхом збільшення числа вузлів розрахункової сітки неможливо. Обчислення проводились на кластерному суперкомп'ютері Скит Інституту кібернетики НАН України. Для розпаралелювання обчислень використовувалась технологія MPI. Розпаралелювання проводилось за принципом геометричного паралелізму. Тобто, уся розрахункова область розбивалась на деяку кількість підобластей. Обчислення в кожній підобласті проводилися на окремому обчислювальному ядрі. Обмін між обчислювальними ядрами значеннями матриць на інтерфейсах проводився за технологією MPI. При проведенні чисельних розрахунків використовувались обчислювальні процедури тулбокса з відкритим кодом OpenFOAM. На другому етапі побудованого нами гібридного методу розв'язувались акустичні задачі. При розв'язанні акустичних задач будувались аналітичні розв'язки.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Досліджено та ретельно описано закономірності виникнення автоколивань в потоках, що натікають на тверді перешкоди. Досліджено механізми перехідних процесів, що запу-

скають автоколивання в потоці, також досліджено гідродинамічні канали зворотних зв'язків і звукових полів, що виникають при натіканні потоку на тверде тіло. Побудовано алгоритм чисельного моделювання випромінювання звуку течією, що дозволяє паралельні розрахунки на кластерних суперкомп'ютерах.

**Достовірність результатів** дисертації забезпечується використанням загальноприйнятих моделей рідин; коректною постановкою граничних задач; застосуванням надійних аналітичних методів для розв'язку задач; контрольованою точністю чисельних обчислень; узгодженістю отриманих в роботі чисельних результатів з експериментальними та розрахованими результатами, опублікованими іншими авторами.

**Практичне значення отриманих результатів** полягає в наступному.

- В роботі побудовано складний обчислювальний алгоритм, за допомогою якого виявилось можливим чисельно моделювати динаміку процесу перетворення енергії потоку в звукову енергію. Побудований алгоритм належить до класу гібридних методів. Розпаралелювання обчислень проводилось за технологією MPI, що дало можливість проводити чисельне моделювання складних тривимірних течій на кластерному суперкомп'ютері Скіт, розташованому в Інституті кібернетики НАН України. Розв'язані нами конкретні задачі про генерацію звуку при обтіканні твердих перешкод доводять, що обчислювальних потужностей суперкомп'ютера Скіт, доступних для науковців НАН України, цілком достатньо для проведення чисельного моделювання складних тривимірних течій при помірно високих значеннях числа Рейнольдса (в розглянутих нами задачах  $Re = 10^4$ ).
- В роботі також розвинуто і вдосконалено алгоритми розрахунку турбулентних течій, що обтікають тверді перешкоди, на основі технології LES. Показано, що в задачах про генерацію звуку потоком саме технологія LES дає можливість адекватно описати досліджувані процеси. Згідно з цією технологією моделюються лише структури малих

масштабів, що відповідають за широкосмуговий шум, а вихорі великих масштабів, які відповідають за тональні звуки, розраховуються з рівнянь руху. Розроблені в дисертаційній роботі алгоритми використовувались в наукових проектах Інституту гідромеханіки НАН України, в яких автор брав участь.

- В роботі детально описуються закономірності і механізми виникнення автоколивань під час перехідних процесів. Розраховуються гідродинамічні канали зворотних зв'язків, які запускають автоколивання. Отримані результати значно розширюють наше розуміння фізичних процесів, що протікають при збудженні автоколивань в таких аерогідроакустичних системах.
- Проведено розробку математичних моделей і методів, що дають можливість кількісної оцінки енергетичних та просторових характеристик звукових полів, що виникають при обтіканні потоком твердих перешкод різних форм. Проведено розробку методів описання вихрових джерел звуку в зовнішніх потоках та в потоках в каналах складної геометрії. Проведено розробку техніки розрахунку звукових полів, що базується на сучасних підходах комп'ютерної механіки рідини і дає можливість проводити чисельні розрахунки на кластерних суперкомп'ютерах.
- Останнім часом активно розвиваються методи діагностики захворювань на основі шумів, що виникають у бронхіальному дереві і кровоносних судинах. Зокрема, в Інституті гідромеханіки НАН України проводилася розробка методів контролю шумів дихання і діагностики захворювання за результатами вимірів. Після проведення ряду експериментів виникла необхідність провести чисельне моделювання процесів генерації звуку в каналах із стенозами і детально описати механізми генерації таких шумів і тональних звуків. В дисертаційній роботі розраховано характеристики звукового поля, яке генерується течією в каналі зі стенозами. Показано, що звукові поля в каналі вище стенозів і

нижче стенозів радикально відрізняються. Показано механізми генерації звукового поля в такій течії. При досить високих значеннях числа Рейнольдса у міжстенозній області такої течії відбувається самозбудження автомодельних коливань середовища, які являються джерелом звукових коливань в каналі. Отримані в роботі результати дають нам більш глибоке розуміння процесів, які відбуваються в бронхіальному дереві і кровоносних судинах людини при наявності стенозів.

- досліджено можливості контролю і управління випромінюванням звуку потоком в нерегулярному каналі зі стенозами. Представлені в роботі підходи дають можливість в рази знизити або підвищити рівень шумів в каналах.

**Особистий внесок здобувача.** Здобувач повністю розробив чисельно-аналітичні алгоритми, які використовувались при розв'язанні задачі, провів всі етапи чисельного моделювання, включаючи виконання чисельних розрахунків на кластерному суперкомп'ютері Скіт в Інституті кібернетики НАН України. Здобувач також брав активну участь у постановці задач, обговоренні отриманих результатів та підготовці наукових публікацій і презентацій на наукових конференціях.

**Апробація матеріалів дисертації.** Результати дисертаційної роботи представлялись на наступних наукових конференціях:

- IUTAM Symposium "Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics". 2-7 September 2001. Zakopane, Poland
- International Petrovskii Centenary Conference "Differential equations and related topics". 22-27 May 2001. Moscow. Russian Federation.
- First Nereis Park conference. "Bioturbation: The Ever Changing Seafloor". 7-9 November 2004. Carry-Le-Rouet. Bouches-du-Rhone. France
- ASLO Summer Meeting. "A pilgrimage through global aquatic sciences". 19-24 June 2005. Santiago de Compostela. Spain.

- "Консонанс-2009". Акустичний симпозіум. Інститут гідромеханіки НАН України. 29 вересня – 1 жовтня 2009 року. Київ.
- Науково-практична конференція "Комп'ютерна гідромеханіка". Інститут гідромеханіки НАН України. 29 – 30 вересня 2010 року. Київ
- "Консонанс-2011". Акустичний симпозіум. Інститут гідромеханіки НАН України. 27 – 29 вересня 2011 року. Київ.
- Науково-практична конференція "Комп'ютерна гідромеханіка". Інститут гідромеханіки НАН України. 29 – 30 вересня 2012 року. Київ
- "Консонанс-2013". Акустичний симпозіум. Інститут гідромеханіки НАН України. 1 – 2 жовтня 2013 року. Київ.
- II Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки". Київський національний університет ім. Т.Шевченка. 28–30 серпня 2013 року. Київ.
- III Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки". Київський національний університет ім. Т.Шевченка. 27–29 серпня 2015 року. Київ (дві презентації).
- Науково-практична конференція "Комп'ютерна гідромеханіка". Інститут гідромеханіки НАН України. 29 – 30 вересня 2016 року. Київ

**Публікації.** Результати роботи опубліковані у 31 науковій праці. З них 28 робіт опубліковані у фахових відчизняних та зарубіжних виданнях, 3 роботи – у збірках праць наукових конференцій. З опублікованих робіт 13 індексовані у міжнародній наукометричній базі Scopus.

**Структура і обсяг дисертаційної роботи.** Дисертація складається з анотації українською та англійською мовами, вступу, восьми основних розділів, висновків, додатку, списку використаних джерел з 310 найменувань. Робота включає 266 сторінок основного тексту, 93 рисунки, 20 таблиць, усього 323 сторінки.

У Вступі наведено змістовний огляд історії проблеми генерації звуку потоками рідини і газу, починаючи від перших суто емпіричних дослідів і до сьогоденних днів, дано огляд наукової літератури з даної тематики. Також подано ретельне обґрунтування вибору теми дисертації, обговорено мету роботи, методи розв'язання задач, наукову новизну роботи, особистий внесок здобувача, апробацію матеріалів дисертації. В Розділі 1 ретельно описано розроблені чисельні алгоритми розв'язання задач. З метою верифікації запропонованого алгоритму у Розділі 2 розглянуто задачу генерації еолових тонів потоком, що набігає на циліндр. Детально описано механізм зворотного зв'язку, який запускає автоколивання, що генерують еолові тони. Демонструється дуже добре співпадіння отриманих в цій роботі результатів з експериментальними та розрахунковими результатами інших авторів. У Розділі 3 досліджено генерацію звуку затопленим струменем, що набігає на гострий клин. Описано механізм виникнення автоколивань струменя перед клином. Обчислено клинові тони. У Розділі 4 розв'язано задачу про генерацію звуку при обтіканні кругового циліндра з приєднаним до нього плоским спліттером. Спліттер фактично руйнує гідродинамічний зворотній зв'язок, який запускав автоколивання при обтіканні кругового циліндра. Тим самим спліттер виконує стабілізуючу роль, зменшуючи і силу опору циліндра, і коливання в сліді за циліндром. У Розділі 5 розглянуто вже тривимірну течію - обтікання сфери. За рахунок тривимірності течія стає значно складнішою. Застосування прямих схем DNS при турбулентних режимах течії стає вже неможливим, отже доводиться застосовувати більш складну технологію LES. В цьому розділі детально описано всі докритичні режими обтікання сфери. Зокрема знайдено режим, який на перший погляд здається парадоксальним. Хоча сфера і потік, що набігає, мають кругову симетрію, слід за сферою випромінює як диполь. Причому вісь диполя розташовано не перпендикулярно до напрямку потоку, а під певним кутом. У Розділі 6 проведено чисельне моделювання течії в каналі при наявності стенозів. Описано механізм виникнення автоколивань в зсувних шарах в міжстенозній області. У Розділі 7 досліджено звукове поле, яке генерується течією в каналі зі стенозами. По-

казано, що звукові поля в каналі вище стенозів і нижче стенозів радикально відрізняються. Розділ 8 присвячено можливостям контролю і управління випромінювання звука потоком в нерегулярному каналі. У Висновках перераховано основні результати дисертаційної роботи. Далі наведено список використаних джерел. В Додатку А наведено список наукових публікацій здобувача за темою дисертації, а також відомості про апробацію результатів дисертації.

В електронному варіанті роботи, який додається на оптичному компакт-диску, рисунки представлені в кольоровому форматі.

Автор висловлює щирі вдячність науковому консультантові доктору фізико-математичних наук, професору Ігорю Володимировичу Вовку за постійну увагу до роботи та корисні дискусії.

## Розділ 1

# Алгоритм чисельного розв'язання задач про випромінювання звуку потоком, що набігає на тверду перешкоду

### 1.1 Ідея методу

У основу запропонованого методу оцінки характеристик акустичних полів покладемо чотири принципові припущення, які в цілому підтверджуються експериментами, а саме:

- потужність звуку, породженого потоком, що набігає на перешкоду істотно менше потужності тієї частини потоку, яка набігає на перешкоду;
- породжений потоком звук не впливає на характер самого потоку;
- джерела звуку компактні, тобто область джерел суттєво мала порівняно з довжиною хвиль
- число Маха мале. Ефект Доплера незначний

Тоді задачу визначення характеристик акустичних полів можна розділити на два етапи.

На першому етапі розглядається гідродинамічна задача. Внаслідок того, що розміри джерела звуку (розміри тіла, що обтікається, і розміри вихорів,

що утворюються і зриваються з поверхні тіла) малі в порівнянні з довжиною звукової хвилі, гідродинамічну задачу можна розглядати у рамках моделі в'язкої нестисливої ньютонівської рідини. З цією метою чисельно розв'язуємо нестационарну систему рівнянь Нав'є-Стокса. При розв'язанні двовимірних задач ми застосовуємо методи прямого чисельного моделювання (DNS). Оскільки двовимірні задачі не є занадто вимогливими до комп'ютерних ресурсів, необхідної точності розрахунків можна досягти простим поліпшенням розрахункової сітки, тобто збільшенням числа контрольних об'ємів. При розв'язанні тривимірних задач ми застосовуємо методи DNS лише при ламінарних режимах течії. При турбулентних режимах течії досягти бажаної точності простим збільшенням числа вузлів розрахункової сітки неможливо оскільки тривимірні задачі вимагають на порядки більше комп'ютерних ресурсів. В той же час, як вже відзначалося в Розділі , метод, що базується на використанні техніки RANS, показує добрі результати при розрахунку ширококосмугових звуків, генерованих течіями з розвиненою турбулентністю, наприклад, турбулентними струменями. Проте у рамках цієї роботи нас цікавить не стільки ширококосмуговий шум турбулентного струменя, скільки тональні звуки, генеровані при натіканні струменя або потоку на тверду перешкоду. Такі тональні звуки генеруються не турбулентними пульсаціями швидкості і тиску, а автоколиваннями, викликаними періодичними рухами великих вихрових структур. В цьому випадку технологія RANS, що дає нам лише осереднені за часом характеристики, є занадто грубою. Виникає необхідність застосовувати складніші методи, що дозволяють отримувати інформацію не лише про осереднені характеристики полів але і досліджувати процес еволюції і періодичних рухів великих вихорів. Метод, який найкраще підходить для розв'язування в даній роботі задач, який дозволяє розраховувати великомасштабні флуктуації, що дають найбільший вклад в акустичне поле, це метод LES (метод великих вихорів). З цієї причини при розгляді тривимірних течій в турбулентних режимах ми використовували технологію LES.

На основі отриманого чисельного розв'язку визначалась частота процесу

періодичного утворення і зриву вихорів з поверхні перешкоди, що обтікається, число Струхалія і залежність розподілу тиску на поверхні твердого тіла від часу впродовж одного періоду цього процесу.

Після цього можна перейти до другого етапу і розглянути акустичну задачу, що полягає у визначенні звукового поля і, зокрема, дискретних тонів. Дійсно, зміна розподілу тиску на поверхні твердого тіла протягом одного періоду при постановці акустичної задачі можна трактувати, як граничну умову.

Тоді розв'язок задачі про визначення акустичного поля зводиться до розв'язку відповідної граничної задачі для хвильового рівняння. При цьому на поверхні тіла, що обтікається, задається деякий, періодично змінюваний, розподіл тиску. При цьому, якщо числа Маха малі, то рухом потоку можна знехтувати і вважати, що звук поширюється так само, як в нерухомому середовищі. Після розв'язання такої задачі можна визначити усі акустичні характеристики генерованих тонів, у тому числі просторовий розподіл звукового тиску (діаграму спрямованості), тиск і силу звуку на осі діаграми спрямованості і повну випромінювану потужність.

У наступних підрозділах ми детально описуємо методи чисельного моделювання течій, які були використані на першому етапі нашого гібридного алгоритму.

## **1.2 Огляд існуючих методів прямого чисельного моделювання (DNS)**

Течії в'язкої рідини за наявності твердих перешкод широко зустрічаються, як в природі, так і у багатьох технічних пристроях. Наявність таких перешкод, як в каналі, так і у відкритому просторі визначає кінематику потоку, а також характер і рівень акустичних шумів, генерованих потоком. Тому розробка методів розрахунку таких течій представляє практичний інтерес. Ми будували алгоритм розв'язання з урахуванням геометрії і кінематики тих задач, які представлені в даній роботі. Складнощі розрахунку таких те-

чий пов'язані з тим, що на різних ділянках така течія має різну кінематичну природу. Так, наприклад, в каналі із стенозами (цю задачу розглянуто у Розділі 6) в певній області його треба розглядати як обтікання перешкоди. Зокрема, перед першим звуженням в каналі утворюється так звана область підпору або застійна зона. А далі, в області між першим і другим звуженнями така течія нагадує детально вивчену течію над прямокутним заглибленням. Зокрема при досить великих числах Рейнольдса може мати місце відрив примежового шару на першому стенозі і його знесення в область між стенозами. У цьому розділі ми детально описуємо чисельний метод, використаний нами при розрахунку таких течій. Цей метод базується на добре відомому методі скінченних об'ємів, проте ряд принципових моментів має бути обговорений окремо. Це в першу чергу стосується побудови конвективної різницевої схеми і вибору методу розв'язання отриманої нелінійної системи алгебраїчних рівнянь.

Багато процесів, спостережуваних в природі і техніці, які вивчає механіка рідини, характеризуються високими числами Рейнольдса, що означає домінування конвективних ефектів. Тоді як базові поняття скінченнооб'ємної дискретизації добре відомі [93–95], дискретизація конвективних членів продовжує залишатися предметом інтенсивних дискусій. У рамках другого порядку точності прийнятною схемою дискретизації могла б бути центрально-різницева схема. Проте, як відомо, у багатьох випадках застосування центрально-різницевої схеми для дискретизації конвективних членів призводить до нестійкості і появи нефізичних осциляцій розв'язку. Річ у тому, що згідно з теоремою Годунова [96] (див. також учбову літературу, наприклад, [94]) усі лінійні монотонні схеми для рівняння перенесення мають тільки перший порядок, тобто лінійні схеми другого і більш високих порядків не мають властивості монотонності. Для досягнення стійкості дискретизаційної процедури, були запропоновані схеми першого порядку [97–99]. Проте, такі схеми мають незадовільний порядок точності, що привело до необхідності розробки стійкої схеми другого порядку. Така схема була запропонована Lax і Wendroff [100]. Пізніше з'явилося ціле сімейство схем Lax - Wendroff, в яких

стійкість досягається за рахунок комбінування просторової і часової дискретизації, що привело до появи багатьох двокрокових [101, 102] і неявних схем [103, 104]. Проте, у випадку стаціонарних задач комбінована просторово-часова дискретизація вводить нереалістичну залежність розв'язку від величини кроку за часом. Для вирішення цієї проблеми в роботах [105, 107] було розроблено сімейство схем другого порядку з незалежним інтегруванням за часом. Хоча такий підхід виключає залежність просторової точності від розміру часового кроку, різницеві схеми сімейства Beam - Warming можуть викликати нефізичні осциляції в розв'язку, що призводить до втрати обмеженості розв'язку та істотно знижує можливості застосування схеми. Була зроблена також спроба розв'язати проблему обмеженості розв'язку за допомогою введення члена штучної дифузії [94]. Проте, і такий підхід не гарантує обмеженості розв'язку, а штучна дифузія знижує точність схеми, особливо в областях високих градієнтів.

Єдина конвективна схема, яка гарантує обмеженість і монотонність - це зустрічно-потоківа схема [93]. Це відбувається завдяки введенню надмірної чисельної дифузії, що змінює природу задачі. Задача, в якій домінували конвективні ефекти, стає задачею, в якій конвективні і дифузійні ефекти збалансовані. Така втрата точності є неприйнятною і, отже, було запропоновано декілька рішень цієї проблеми. Не претендуючи на вичерпну загальність цього огляду, виділимо наступні категорії:

- схеми, що використовують точний або наближений одновимірний розв'язок рівняння конвекції-дифузії для визначення значення невідомих функцій. До них можна віднести схему LOADS (locally analytic differencing scheme), запропоновану в [108], а також схему із степенний законом [93];
- схеми, що базуються на різницях проти потоку. Наприклад, протипотокова зважена схема [109], що має перший порядок, а також протипотокові схеми більш високих порядків: лінійна протипотокова схема [110] і схема QUICK, запропонована Leonard [111]. Слід також згадати про-

типотоків схеми для складних фізичних областей з сітками із скошеними контрольними об'ємами або так звані skew - upwind differencing schemes [112, 113]. У [114] представлений детальніший огляд присвячений протипотоковим схемам;

- гібридні (чи комбіновані) схеми [115]. Суть гібридної схеми полягає у тому, що в області, де сіткове число Пекле менше 2, використовуються центральні різниці, в протилежному випадку – різниці проти потоку. Як вказано в [116], такий підхід був уперше запропонований Allen і Southwell [117];
- змішані схеми (blended differencing) [118]. Вважаючи, що достатня умова обмеженості розв'язку є занадто жорсткою Рєгіс запропонував підхід, оснований на "змішенні" схем, тобто протипотокові різниці використовуються в комбінації з схемами більше високого порядку (центральні або лінійні протипотокові різниці) так, щоб була досягнута обмеженість розв'язку.

Усі перелічені вище схеми або сильно жертвують точністю, або не гарантують монотонності розв'язку. Подальший пошук обмежених і досить точних різницевих схем привів до розробки концепції обмеження потоку. Boris і Book [119] ввели поняття обмежувача потоку у своїй FCD (Flux Corrected Transport) різницевій схемі, яка надалі була узагальнена в [120] на багатовимірні задачі. Надалі ця ідея була використана van Leer в серії робіт "Towards the ultimate conservative differencing scheme" [121–125]. Зрештою ці методи привели до появи класу TVD схем (Total Variation Diminishing). TVD схеми розвивали Harten [126, 127], Roe [128], Chakravarthy і Osher [129] і інші. Загальна процедура побудови TVD схеми описана Osher і Chakravarthy в [130], а Sweby [131] представив графічну інтерпретацію обмежувачів (діаграма Sweby) і дослідив точність методу. Основна ідея TVD методу полягає в тому, що вклад схеми більш високого порядку і монотонної схеми першого порядку залежать від локальної форми самого розв'язку, що робить схему нелінійною. Загальні принципи побудови обмежених конвективних схем ви-

сокого порядку розглянуті в [132]. Ця робота містить детальну класифікацію і аналіз більшості нелінійних скалярних конвективних схем розроблених на даний момент. Аналіз включає огляд і порівняння двох найчастіше використовуваних підходів: обмежувачі потоків і нормалізовані змінні (normalized variables).

Згідно класифікації [132] TVD схема, використана в даній роботі, відповідає узагальненій кусково-лінійній схемі Chakravarthy - Osher [129]. Така схема вносить мінімальну чисельну дифузію, що є суттєвим саме в задачах, які розглядаються в даній роботі.

Окрім розглянутої вище проблеми побудови неосцилюючих і досить точних конвективних схем, мають місце ще дві проблеми, з якими стикаються дослідники при дискретизації рівнянь Нав'є-Стокса. Це нелінійність рівняння збереження імпульсу і узгодження полів швидкості і тиску. Нелінійний член рівняння має вигляд  $\nabla \cdot \mathbf{UU}$  і, отже, дискретна форма цього виразу буде квадратичною відносно швидкості. Тобто отримувана в результаті система алгебраїчних рівнянь буде нелінійною. Є два можливих шляхи вирішення проблеми: використати солвери для нелінійних систем рівнянь або лінеаризувати конвективний член. Зважаючи на складність і витратність нелінійних солверів, у багатьох випадках перевага віддається саме процедурі лінеаризації. В цьому випадку конвективний член трактується як перенесення швидкості потоком. При цьому значення потоку беруться з часовим лагом, тобто вже відомі, розраховані на попередньому кроці за часом. Потім для уточнення значень швидкості використовується ітераційна процедура, тобто значення швидкості, отримані після розв'язання відповідної лінійної системи, використовуються для розрахунку нового, більш точного поля потоку. І так число ітерацій повторюють необхідне число разів.

Одна з основних проблем при чисельному розв'язанні системи рівнянь Нав'є-Стокса для нестисливої рідини полягає в слабкому узгодженні полів швидкості і тиску. Так при використанні ітераційних процедур розв'язання, лінійні алгебраїчні рівняння, що отримуються з рівняння збереження імпульсу, використовуються для обчислення дискретного набору значень швидко-

сті. Тоді природно було б використати рівняння нерозривності для обчислення тиску. Проте, у рамках моделі нестисливої рідини тиск або густина не входять в рівняння нерозривності. Таким чином, якщо використовується ітераційна процедура розв'язання, необхідно знайти спосіб як ввести тиск в рівняння нерозривності. Такі методи можна розділити на два класи. Один з них - це метод штучної стисливості, у рамках якого течії приписується слабка (але кінцева) стисливість [133] і потім розв'язується задача на усталення. Інший клас методів - це методи, що базуються на обчисленні тиску (pressure-based methods, PBM). PBM метод був введений Harlow і Welch [134] для розрахунку неусталеної течії. Пізніше метод був поширений і на випадок усталеної течії [93,135]. Основна ідея цього класу методів полягає у тому, щоб сформулювати рівняння Пуассона для корекції тиску і потім обчислювати нові значення полів тиску і швидкості доти, доки не буде отримано поле швидкості, що задовольняє умові нестисливості. У цей клас методів входять MAC (marker and cell) метод [134], алгоритм SIMPLE (semi-implicit method for pressure linked equations) [135], включаючи його удосконалення - SIMPLER [93] і SIMPLEC [136], а також алгоритм PISO (pressure implicit with splitting of operators), запропонований Issa в [137], який відрізняється двокроковим коректором. Як було показано в [137] і [138], алгоритм PISO представляє собою стійкий, добре збіжний алгоритм, який у багатьох задачах вимагає менше розрахункового часу, ніж усі згадані вище різновиди алгоритму SIMPLE. Особливо його переваги видно при розрахунках нестационарних течій. В силу вищесказаного саме алгоритм PISO використовувався в цій роботі.

Слід також відзначити, що PBM метод був імплементований на двох різних типах організації сітки: рознесені сітки (з різними контрольними об'ємами для швидкості і тиску) [139] і суміщені сітки (з тими ж контрольними об'ємами для усіх шуканих полів) [140]. Рознесені сітки часто використовувались на ранніх стадіях розвитку розрахункової гідромеханіки. Їх імплементация не представляє складності, якщо сітки структуровані. Проте, відколи почали активно розвиватися алгоритми для неструктурованих

сіток, суміщені сітки стали використовуватись все частіше і частіше. Нині всі сучасні чисельні пакети використовують суміщені сітки. У даній роботі, оскільки ми будемо чисельний алгоритм для неструктурованої сітки, усі поля (і швидкість, і тиск) приписуються в центроїдах контрольних об'ємів.

Мета даного Розділу полягає в побудові чисельного алгоритму, який в подальших розділах застосовується до розв'язання цілого ряду задач про рух нестисливої рідини в різних областях у присутності твердих перешкод, зокрема в плоскому каналі з послідовно розташованими двосторонніми різкими звуженнями його поперечного перерізу (стенозами). У наступному підрозділі ми розглядаємо методи DNS, які використовуються при розрахунках двовимірних течій, а також при ламінарних режимах тривимірних течій.

### 1.3 Методи DNS, використані для описання течій на першому етапі побудованого алгоритму

У рамках прийнятої моделі процес описується нестационарною системою рівнянь Нав'є-Стокса. У безрозмірних фізичних змінних їх можна представити в тензорній формі наступним чином:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{UU} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} - \nabla p, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1.2)$$

де  $p$  – скалярне поле тиску;  $\mathbf{U}$  – векторне поле швидкості;  $\mathbf{UU}$  – тензор другого рангу, визначений як зовнішній добуток векторів. Покомпонентне представлення цих рівнянь можна знайти в учбовій літературі (див., наприклад, [141]).

На межі розрахункової області задавались наступні граничні умови для швидкості: рівномірний потік на вході в розрахункову область при  $x = 0$ , умова прилипання на твердих поверхнях тіла, що обтікається, і стінок каналу, а також "м'які" граничні умови типу лінійної екстраполяції, що відповідають рівності нулю нормального градієнта швидкості, на виході з розрахункової області при  $x = L_1$ . Для тиску умова рівності нулю нормального

градієнта формулювалась по всій межі розрахункової області [94] за винятком виходу з розрахункової області. На виході задавався постійний тиск.

Добре відомо, що двовимірна постановка задачі дозволяє сформулювати її в змінних завихреність - функція струму (див., наприклад, [142]). Такий підхід дозволяє виключити тиск з рівнянь руху і таким чином уникнути складнощів, пов'язаних з визначенням поля тиску і узгодженням полів. Проте, поширення підходу з використанням завихреності і функції струму на тривимірні задачі ускладнено тим, що для тривимірної течії не можна ввести скалярну функцію струму. Використання ж векторного потенціалу призводить до необхідності розв'язувати на кожному часовому шарі три параболічних і три еліптичні рівняння, що істотно ускладнює задачу [116]. З цієї причини в даній роботі задачі розв'язувались саме у фізичних змінних швидкість - тиск.

Для чисельного розв'язання сформульованої задачі використовується метод скінченних об'ємів. Хоча основні положення скінченнооб'ємної дискретизації добре відомі і викладені в учбовій літературі (див. [93–95]), проблеми, пов'язані з дискретизацією конвективних членів, узгодженням полів швидкості і тиску, а також із застосуванням неструктурованих і неортогональних сіток, як і раніше, є предметом інтенсивних дискусій. У даній роботі, базуючись на ідеях, викладених в [141], ми будемо скінченнооб'ємну схему другого порядку, яка базується на обчисленні потоку середовища крізь грані контрольного об'єму і може застосовуватись до неструктурованих сіток, які можуть бути в принципі і неортогональними. У даній роботі в більшості розглянутих двовимірних задач ми використовуємо сітку з прямокутною формою елементарної комірки, яка може бути кусково-структурованою. Триангулярні сітки використовувались тільки в задачі про натікання струменя на гострий клин.

Чисельна схема будується для загального випадку тривимірної течії. А двовимірні задачі розглядаються, як окремий випадок, коли в напрямку  $z$  є тільки один контрольний об'єм і компонента швидкості  $U_z = 0$ . Таким чином, розрахункова область розбивається на контрольні об'єми, що мають форму

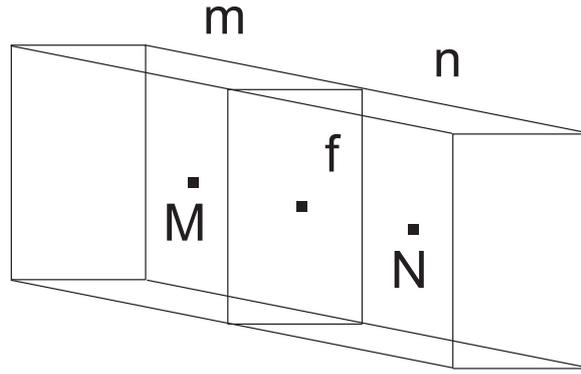


Рис. 1.1: Контрольні об'єми  $m$  та  $n$ , що мають спільну грань  $f$

прямокутного паралелепіпеда. Два типових сусідніх контрольних об'єми з номерами  $m$  і  $n$  показані на рисунку 1.1. Грань, що розділяє ці два об'єми, позначено через  $f$ . Точки  $M$  і  $N$  є центроїдами контрольних об'ємів  $m$  і  $n$ , відповідно, тобто

$$\int_{V_m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) dV = \int_{V_n} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N) dV = 0. \quad (1.3)$$

Інтегрування в (1.3) відбувається по контрольному об'єму з відповідним номером.

Для того, щоб чисельна схема мала другий порядок точності невідома функція повинна мати лінійну варіацію в контрольному об'ємі:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_M + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) \cdot (\nabla \mathbf{U})_M, \quad (1.4)$$

де індекс  $M$  означає значення функції в точці  $M$ , тобто  $\mathbf{U}_M = \mathbf{U}(\mathbf{x}_M)$ . Тоді в силу (1.3) маємо

$$\int_{V_m} \mathbf{U} dV = \mathbf{U}_M V_m. \quad (1.5)$$

Основна ідея методу скінченних об'ємів полягає в тому, що рівняння руху (1.1), (1.2) інтегруються по контрольному об'єму  $m$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_m} \mathbf{U} dV + \int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{U} dV &= \\ &= \frac{1}{\text{Re}} \int_{V_m} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} dV - \int_{V_m} \nabla p dV, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{U} dV = 0. \quad (1.7)$$

А для обчислення інтегралів в (1.6), (1.7) використовується узагальнена форма теореми Остроградського-Гауса, а саме, три наступні тотожності:

$$\int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_{S_m} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}, \quad (1.8)$$

$$\int_{V_m} \nabla \mathbf{A} dV = \int_{S_m} d\mathbf{S} \mathbf{A}, \quad (1.9)$$

$$\int_{V_m} \nabla a dV = \int_{S_m} d\mathbf{S} a, \quad (1.10)$$

де  $S_m$  - поверхня контрольного об'єму  $m$ .

Обчислюючи інтеграл по контрольному об'єму від дивергенції швидкості, з (1.8) отримаємо дискретну форму другого порядку теореми Гауса. З огляду на (1.3) маємо

$$(\nabla \cdot \mathbf{U})_M V_m = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f. \quad (1.11)$$

Тут  $\mathbf{S}_f$  означає вектор зовнішньої нормалі до грані  $f$ , модуль якого дорівнює площі грані  $S_f$ . (На практиці, при складанні комп'ютерної програми, для визначеності приймають, що вектор нормалі до грані  $f$  спрямований від контрольного об'єму з меншим номером у бік контрольного об'єму з більшим номером. Якщо таким чином визначений вектор є зовнішнім до елементарної комірки  $m$ , те при підсумовуванні в (1.11) береться знак плюс, в протилежному випадку - мінус.) Підсумовування в правій частині здійснюється по всіх гранях контрольного об'єму  $m$ . Обчислюючи інтеграл по контрольному об'єму від градієнта тиску, з (1.10) отримаємо наступне дискретне співвідношення другого порядку :

$$(\nabla p)_M V_m = \sum_f \mathbf{S}_f p_f. \quad (1.12)$$

Дискретизація рівнянь руху (1.1) (1.2) ґрунтується на дискретному аналогу другого порядку теореми Гауса (1.11) і (1.12).

Дискретизація конвективних членів приводить до співвідношень

$$\int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{U} dV = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f \mathbf{U}_f = \sum_f F \mathbf{U}_f, \quad (1.13)$$

де  $F$  – це потік середовища (flux) крізь грань  $f$ , тобто  $F = \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f$ . Обчислення цього потоку  $F$  детально обговорюватиметься нижче. У формулу (1.13) входить значення швидкості на грані  $f$ , яке обчислюється зі значень швидкості в центроїдах сусідніх елементарних комірок  $M$  і  $N$  за допомогою конвективних різницевоїх схем.

У рамках методу, що використовується, в якості схеми дискретизації для конвективного члена можна було б запропонувати центрально-різницеву схему другого порядку :

$$\mathbf{U}_f = C\mathbf{U}_M + (1 - C)\mathbf{U}_N, \quad (1.14)$$

де сталий коефіцієнт визначено як відношення відстаней  $C = |fN|/|MN|$ . В [141] показано, що навіть для неоднорідної сітки ця схема має другий порядок точності.

Проте, за певних умов, наприклад, якщо течія при великих числах Рейнольдса набігає на кут, що виступає, центральні різниці можуть призводити до нестійкої схеми дискретизації і, таким чином, викликати нефізичні осциляції, що істотно знижує якість чисельного розв'язку або навіть робить його неприйнятним взагалі. Єдиною конвективною різницевою схемою, яка є безумовно стійкою і гарантує обмеженість розв'язку, являється зустрічно-потокова різницева схема [93]:

$$\mathbf{U}_f = \begin{cases} \mathbf{U}_M, & \text{for } F \geq 0, \\ \mathbf{U}_N, & \text{for } F < 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Проте, ця схема має лише перший порядок точності, а стійкість схеми і обмеженість розв'язку досягається за рахунок внесення значної долі чисельної дифузії. І хоча подрібнення сітки покращує точність розв'язку, потрібне число контрольних об'ємів робить цю схему непринятною для практики.

Було запропоновано декілька методів розв'язання цієї проблеми. У наш час активно розвиваються схеми з обмежувачами потоку, які привели до виділення класу схем TVD (Total Variation Diminishing) [132]. Основна ідея полягає в тому, що схема дискретизації залежить від локальної форми розв'язку. Вона надає достатню точність (більш, ніж першого порядку) і в той же

час гарантує обмеженість розв'язку (пригнічує нефізичні осциляції, які генерують класичні схеми другого порядку, такі як центрально-різницева схема).

Будь-яка TVD схема може бути представлена у вигляді суми

$$\mathbf{U}_f = (\mathbf{U}_f)_{UD} + \Psi [(\mathbf{U}_f)_{CD} - (\mathbf{U}_f)_{UD}] , \quad (1.16)$$

де  $(\mathbf{U}_f)_{UD}$  – значення швидкості на грані контрольного об'єму, розраховане за протипотоковою схемою першого порядку (1.15),  $(\mathbf{U}_f)_{CD}$  – значення швидкості на грані контрольного об'єму, розраховане по центрально-різницевій схемі другого порядку (1.14),  $\Psi$  – нелінійний обмежувач потоку, який є функцією значень швидкості в околі грані контрольного об'єму. Слідуючи [122, 129, 131], передбачається, що обмежувач потоку є функцією відношення градієнтів на гранях між цією елементарною коміркою і її сусідами вгору і вниз за потоком. У цій роботі ми використовуємо TVD схему, імплементовану в [143] (limitedLinear), для якої обмежувач потоку визначений як

$$\Psi(r) = \max \left( 0, \min \left( \frac{2}{k} r, 1 \right) \right) , \quad (1.17)$$

де  $r = (\mathbf{U}_C - \mathbf{U}_U) / (\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_C)$ . Тут  $U, C, D$  – три послідовно розташовані точки ( $U$  – вгору проти потоку від  $C$ ,  $D$  – вниз за потоком від  $C$ ). Згідно класифікації [132] такий обмежувач відповідає узагальненій кусково-лінійній схемі Chakravarthy-Osher [129]. Коефіцієнт  $k$  задається в наступному діапазоні  $0 < k \leq 1$ . Його нульове значення  $k \rightarrow 0$  відповідає більш високій точності, а значення  $k = 1$  – більш високій стійкості розрахунку. Зазвичай приймають значення  $k = 1$ .

Дифузійний член дискретизується аналогічним чином:

$$\int_{V_m} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} dV = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{U})_f . \quad (1.18)$$

Враховуючи лінійну варіацію  $\mathbf{U}$  і ортогональність сітки, праву частину (1.18) можна представити наступним чином:

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{U})_f = S_f \frac{\mathbf{U}_N - \mathbf{U}_M}{|MN|} . \quad (1.19)$$

Для дискретизації похідної за часом використовується неявна триточкова несиметрична схема з різницями назад (backward differencing), яка має другий порядок точності:

$$\begin{aligned} \int_{V_m} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV &= \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_M V_m = \\ &= \frac{\frac{3}{2} \mathbf{U}_M^k - 2 \mathbf{U}_M^{k-1} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_M^{k-2}}{\Delta t} V_m, \end{aligned} \quad (1.20)$$

де  $\mathbf{U}_M^k = \mathbf{U}_M(k \Delta t)$  – значення швидкості на  $k$ -тому часовому шарі, а значення на попередніх часових шарах  $\mathbf{U}_M^{k-1}$  і  $\mathbf{U}_M^{k-2}$  відомі. Така схема може бути застосована у тому випадку, якщо сітка залишається нерухомою і, отже, положення центроїда  $M$  не змінюється.

Таким чином, рівняння (1.1) у дискретній формі можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{2} \mathbf{U}_M^k - 2 \mathbf{U}_M^{k-1} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_M^{k-2}}{\Delta t} V_m + \sum_f F \mathbf{U}_f^k - \\ - \frac{1}{\text{Re}} \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{U}^k)_f = -(\nabla p^k)_M V_m = \\ = - \sum_f \mathbf{S}_f p_f^k. \end{aligned} \quad (1.21)$$

А рівняння (1.2) – у вигляді:

$$\sum_f \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f^k = 0 \quad (1.22)$$

Розглянемо дискретну імплементацію граничних умов. Умова Дирихле: задано значення швидкості на межі області. В цьому випадку конвективний член також дискретизується по формулі (1.13). Значення швидкості  $\mathbf{U}_f$  і потоку  $F$  на грані  $f$ , що лежить на межі області, задані. Дифузійний член дається формулою (1.18), а значення нормального градієнта швидкості на межі розраховується з відомих значень швидкості в центроїді елементарної комірки і на грані, що лежить на межі області:

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{U})_f = S_f \frac{\mathbf{U}_f - \mathbf{U}_M}{|Mf|}. \quad (1.23)$$

Умова Неймана : задано нормальний градієнт швидкості на межі області. У цьому випадку значення швидкості на межі  $\mathbf{U}_f$ , яке необхідне для обчислення правої частини (1.13) розраховується зі значення швидкості в центроїді контрольного об'єму і заданого значення нормального градієнта на грані:

$$\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_M + \frac{|Mf|}{S_f} \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{U})_f. \quad (1.24)$$

Що ж стосується дифузійного члена, то нормальний градієнт швидкості на межі області  $\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{U})_f$  в правій частині (1.18) задається безпосередньо граничною умовою.

В принципі, інтерполюючи в (1.21), (1.22) значення шуканих полів на гранях контрольних об'ємів через їх значення в центроїдах сусідніх об'ємів, використовуючи описані вище схеми інтерполяції, можна отримати систему алгебраїчних рівнянь, яка і має бути розв'язана чисельно. Однак, в даному випадку слід приділити особливу увагу двом проблемам: нелінійності задачі і узгодженню полів швидкості і тиску. Причому, перша проблема виходить безпосередньо з рівнянь руху і не залежить від обраного методу розв'язання. Дійсно, в силу нелінійності конвективного члена  $(\nabla \cdot \mathbf{U}\mathbf{U})$  рівняння (1.1), отримувана система алгебраїчних рівнянь також буде нелінійною (потік  $F$  є функцією швидкості  $U$ ). Оскільки нелінійні солвери вимагають колосальні комп'ютерні ресурси, зазвичай прибігають до лінеаризації конвективного члена. Процедура лінеаризації полягає в тому, що для розрахунку потоку  $F$  використовуються відомі значення швидкості на попередньому часовому шарі, а потім отримані значення уточнюються шляхом ітерацій.

Проблема визначення поля тиску, а також узгодження полів швидкості і тиску впливає з необхідності використовувати в практичних задачах ітераційні, а не прямі методи розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАУ). Тоді як дискретне рівняння збереження імпульсу (1.21) використовується для знаходження компонент швидкості, рівняння для знаходження тиску відсутнє, оскільки у рамках моделі нестисливої рідини тиск не входить в рівняння нерозривності (1.22). Отже, при використанні ітераційних солверів СЛАУ необхідно знайти спосіб ввести тиск в рівняння нерозривності. У

цій роботі використовується процедура PISO запропонована Issa [137], яка є процедурою типу предиктор-коректор з двома коректорами.

Рівняння для тиску виводиться наступним чином. Повністю дискретний аналог рівняння руху (1.21) можна розв'язати відносно  $\mathbf{U}_M^k$ :

$$\mathbf{U}_M^k = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^k - A(\nabla p^k)_M. \quad (1.25)$$

Тут член  $\mathbf{H}^k$  містить швидкості в центроїдах сусідніх елементарних комірок  $\mathbf{U}_N^k$ , а член  $\mathbf{H}^o$  містить відомі значення поля швидкості на попередніх часових шарах  $\mathbf{U}_M^{k-1}$  і  $\mathbf{U}_M^{k-2}$ .

Швидкості на гранях елементарних комірок отримують шляхом інтерполяції на грань:

$$\mathbf{U}_f^k = \mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^k - A_f(\nabla p^k)_f. \quad (1.26)$$

Помноживши скалярно на вектор нормалі  $\mathbf{S}_f$ , отримаємо вираз для потоку через грань  $f$ :

$$F = \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f^k = \mathbf{S}_f \cdot [\mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^k - A_f(\nabla p^k)_f]. \quad (1.27)$$

Остаточно, дискретний аналог системи нестисливих рівнянь Нав'є-Стокса (1.21), (1.22) має вигляд:

$$\mathbf{U}_M^k = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^k - \frac{A}{V_m} \sum_f \mathbf{S}_f p_f^k, \quad (1.28)$$

$$\sum_f A_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla p^k)_f = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot [\mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^k]. \quad (1.29)$$

Алгоритм PISO для нестационарних течій складається з наступних кроків:

1. Предиктор. Для отримання першого наближення нового поля швидкості  $\mathbf{U}^k$  розв'язується дискретне рівняння збереження імпульсу (1.28). Поле тиску  $p^k$  на даному етапі невідоме, тому використовуються відомі значення на попередньому часовому шарі  $p^{k-1}$ . Також вираз  $\mathbf{H}(\mathbf{U})$  лінеаризується. Для цього замість  $F$  підставляються його відомі значення на попередньому часовому шарі. Таким чином, рівняння набирає

вигляду:

$$\mathbf{U}_M^* = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^* - \frac{A}{V_m} \sum_f \mathbf{S}_f p_f^{k-1}, \quad (1.30)$$

де верхній індекс  $*$  означає перше наближення.

2. Коректор 1. Використовуючи отримані значення  $\mathbf{U}^*$ , обчислюється оператор  $\mathbf{H}^*$  і розв'язується рівняння для тиску (1.29), яке тепер приймає вигляд:

$$\sum_f A_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla p^*)_f = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot [\mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^*]. \quad (1.31)$$

Таким чином, отримуємо перше наближення поля тиску  $p^*$ , яке використовується для корекції поля швидкості. Слід зазначити, що всякий раз, як нове наближення для тиску отримано, слід також перерахувати поле потоку  $F$ , який входить в коефіцієнти оператора  $\mathbf{H}$ . Для цього можна використати рівняння (1.27), де в праву частину замість  $\mathbf{H}^k$ ,  $p^k$  підставлені їх останні отримані наближення. Корекція поля швидкості проводиться за явною схемою:

$$\mathbf{U}_M^{**} = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^* - \frac{A}{V_m} \sum_f \mathbf{S}_f p_f^*, \quad (1.32)$$

3. Коректор 2. Використання явної процедури корекції означає, що поле швидкості коригується за рахунок врахування нових значень  $F$  і  $p$ . Але при цьому значення швидкості  $\mathbf{U}_N^*$  у центроїдах сусідніх елементарних комірок, які входять в  $\mathbf{H}^*$ , беруться невідкориговані, тобто ті, які були отримані в першому наближенні. Тому необхідно повернутися до кроку 2 і повторити петлю PISO, тобто провести обчислення оператора  $\mathbf{H}$ , розв'язати рівняння для тиску, обчислити потік  $F$  і провести явну корекцію поля швидкості. І таким чином набуваємо значень полів  $\mathbf{U}^{***}$ ,  $p^{**}$  після другого коректора.

Часто використовується саме описана схема, яка складається з предиктора і двох коректорів. Проте, петлю PISO можна повторювати і більше число разів або повторювати до тих пір, поки точність не досягне заданого значення.

Розглянемо тепер розв'язок отримуваних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (1.30) і (1.31). Така СЛАР може бути записана у вигляді:

$$A_M x_M^k + \sum_N A_N x_N^k = b_M, \quad (1.33)$$

де  $x_M^k$  – невідомі, а підсумовування відбувається по усіх контрольних об'ємах  $n$ , сусідніх з контрольним об'ємом  $m$ , тобто тих, що мають спільну грань з  $m$ . Система (1.33) може бути розв'язана різними методами, які можна розбити на дві головні категорії: прямі і ітераційні методи. Прямі методи прийнятні для невеликих СЛАУ із заповненими матрицями. Число операцій, необхідних для отримання розв'язку, зростає як квадрат числа невідомих, тому при роботі з великими розрідженими матрицями прямі методи стають неприпустимо витратними. Ітераційні методи у цьому випадку є економніші. В рамках ітераційних методів розв'язання ми стартуємо з деякого початкового наближення і потім за допомогою ітераційної процедури покращуємо розв'язок до тих пір, доки не досягаємо деякої наперед заданої точності. Також, на відміну від прямих методів, ітераційні методи враховують розрідженість матриці, що є важливою їх властивістю, яка дозволяє суттєво знизити потреби у пам'яті комп'ютера.

Слід окремо обговорити вклад конвективного члена. Відомо, що діагональне домінування в матриці забезпечує тільки зустрічно-потоківу схему UD. Будь-які інші схеми створюють від'ємні коефіцієнти, що може негативно позначатися на збіжності ітераційного методу. Для того, щоб поліпшити якість матриці для різницевої схем високих порядків, Khosla і Rubin [144] запропонували метод відкладеної корекції (deferred correction implementation) для конвективного члена. Згідно з цим методом будь-яка різницева схема розглядається, як деякий апгрейд схеми UD. Та частина конвективного члена, яка відповідає UD, розглядається неявно, тобто вбудовується в матрицю, а частина, що залишилася, переноситься у джерельний член, тобто в праву частину системи. Таким чином забезпечується діагональне домінування в матриці системи.

Класичні градієнтні методи, такі як метод найшвидшого спуску і ме-

тод мінімальних нев'язок, дуже швидко мінімізують функціонали на перших ітераціях, а потім починають "буксувати тобто подальше застосування ітерацій показує дуже повільну збіжність, що робить застосування градієнтних методів неефективним. Це особливо проявляється у випадку, коли власні значення матриці  $A$  дуже різні. Цей недолік ефективності градієнтних методів усунено у методі спряжених градієнтів, перший варіант якого був запропонований Nестens і Steifel [145] у 1952 році. Алгоритми методу спряжених градієнтів відносяться до числа найефективніших методів розв'язання СЛАР великої розмірності, що виникають при чисельному розв'язанні задач механіки суцільного середовища. Вони розв'язують систему рівнянь за скінченне число ітерацій, що не перевищує число невідомих. При хорошому початковому наближенні число ітерацій різко скорочується. Також до різкого скорочення числа ітерацій веде передобумовлення. Для симетричних матриць в цій роботі використовується солвер ICCG (Incomplete Cholesky preconditioned Conjugate Gradient), тобто метод спряжених градієнтів з передобумовленням типу неповної факторизації Холецкого. Метод детально описаний Jacobs [146]. Для асиметричних матриць використовується солвер Bi-CGSTAB, представлений van der Vorst [147]. Також детальний опис використуваних солверів може бути знайдено в [148, 149]. Використані в даній роботі солвери також реалізовані у вільно поширюваних бібліотеках доступних через електронний сервіс Netlib [150].

Представлений алгоритм був протестований на добре відомих задачах: задача про течію в прямокутній порожнині, викликану рухом однієї із стінок (lid-driven cavity) [151], при різних числах Рейнольдса, а також задача про відривну течію за круговим циліндром (вихрова доріжка Кармана) [152]. Тест показав хороший збіг отриманих результатів з результатами інших авторів. Матеріал цього підрозділу викладено в нашій статті [232].

## 1.4 Основні положення підходу LES

При великих значеннях числа Рейнольдса ( $Re > 1000$ ) для розв'язання тривимірних задач використовувалась технологія LES (Large Eddy Simulation). Базові рівняння для LES були вперше сформульовані Смагоринським в 1963 році [153]. Грунтуючись на теорії Колмогорова [154], згідно якої, незважаючи на неоднорідність і нестационарність осередненої течії, випадковий характер дроблення вихорів і хаотичність передачі їх енергії по каскаду приводять до того, що дрібномасштабні пульсації мають характер локально ізотропний, тобто однорідний, і квазістационарний (що змінюється в залежності лише від характеристик осередненого руху), природно було вважати, що малі масштаби можуть бути успішно апроксимовані. Отже, великомасштабні структури, які містять більшу частину енергії, беруть участь в перенесенні і залежать від граничних умов, мають бути розраховані безпосередньо, в той час як дрібномасштабні можуть бути представлені моделлю. На цьому і базується підхід LES.

Щоб відокремити великомасштабні рухи від дрібномасштабних в LES використовується процедура фільтрації. Ця фільтрація представляє собою не осереднювання по ансамблю, як в підході RANS, а деяке локально зважене осереднювання властивостей потоку за об'ємом рідини. Основним параметром фільтрації являється деякий розмір  $\Delta$  – характерний масштаб довжини, ширина фільтру. Масштаби, що перевищують  $\Delta$ , залишаються у відфільтрованому полі потоку, а вклад масштабів менших  $\Delta$  (підсіткові масштаби або SGS масштаби) моделюються.

Згідно LES будь-яка змінна потоку  $f$  складається з великомасштабної і дрібномасштабною частин:

$$f = \bar{f} + f' . \quad (1.34)$$

Тут і далі штрих означає дрібномасштабну частину, а верхня риска – великомасштабну (іншими словами, підсіткові і розв'язувані масштаби). Для добування великомасштабних компонент застосовується операція фільтрації, яка визначається наступним чином:

$$\bar{f}(x) = \int_V G(x - x'; \Delta) f(x') dx' , \quad (1.35)$$

де інтегрування здійснюється по всій розрахунковій області  $V$ , функція  $G(x - x'; \Delta)$  – ядро фільтру, фінітна функція або функція з компактним носієм (іншими словами, функція набуває великих значень тільки якщо  $x'$  знаходиться в околі  $x$ ). Причому виконується умова нормування:

$$\int_V G(x - x'; \Delta) dx' = 1, \quad (1.36)$$

яке гарантує формальний перехід від LES до DNS при  $\Delta \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{f}(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_V G(x - x'; \Delta) f(x') dx' = \\ &= \int_V \delta(x - x') f(x') dx' = f(x), \end{aligned} \quad (1.37)$$

Найчастіше в LES застосовуються наступні фільтри:

- фільтр Гауса, перевагою якого є гладкість і диференційовність:

$$G(x - x'; \Delta) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta^2}} \exp\left(-\frac{6(x - x')^2}{\Delta^2}\right); \quad (1.38)$$

- коробчатий фільтр, який просто є осередненням по прямокутній області:

$$G(x - x'; \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & \text{if } |x - x'| \leq \Delta/2, \\ 0, & \text{if } |x - x'| > \Delta/2. \end{cases} \quad (1.39)$$

Цей фільтр найчастіше використовується в скінченнооб'ємних методах, оскільки осереднення проводиться по контрольних об'ємах скінченнооб'ємної сітки, де змінні потоку являються кусково-лінійними функціями  $x$ . Це означає, що якщо ширина фільтру  $\Delta$  обрана рівною кроку сітки, осереднені і локальні значення  $\bar{f}$  і  $f$  будуть рівні;

- фільтр Фур'є

$$G(x - x'; \Delta) = \frac{\sin(k_c(x - x'))}{k_c(x - x')}, \quad k_c = \frac{\pi}{\Delta}, \quad (1.40)$$

який у фур'є-просторі виключає усі хвильові числа вище деякої обраної частоти  $k_c$ :

$$\hat{G}(k; \Delta) = \begin{cases} 1, & \text{if } k \leq k_c, \\ 0, & \text{if } k > k_c, \end{cases} \quad (1.41)$$

де  $\hat{G}$  – фур'є-образ функції фільтру,  $k$  – хвильове число:

$$\hat{G}(k; \Delta) = \int_V G(x - x'; \Delta) e^{-ikx'} dx'. \quad (1.42)$$

Тоді процес фільтрації задається наступним чином:

$$\bar{f}(k) = \hat{G}(k; \Delta) \hat{f}(k), \quad (1.43)$$

де  $\hat{f}(k)$  – фур'є-образ функції  $f(x)$ . Цей фільтр зазвичай використовується в спектральних методах, оскільки його важко застосовувати до неоднорідних потоків і він не згладжує поле сіткових масштабів  $\bar{f}$ , подібно до того, як це роблять описані вище фільтри.

Коробчатий фільтр і фільтр Гауса видають схожі результати, оскільки вони обоє згладжують флуктуації великих і малих масштабів, в той час як фільтр Фур'є залишає тільки масштаби нижче деякого критичного хвильового числа. Така згладжувальна поведінка вимагає більш високої роздільної здатності для цих типів фільтрів в порівнянні з фільтром Фур'є. Звичайно, можливе застосування і інших фільтрів, наприклад, фільтру Лапласа.

Загальна рекомендація при виборі фільтру може бути наступна: більш складні фільтри слід застосовувати тільки при використанні динамічних підсіткових моделей для визначення тестового фільтру. В інших випадках цілком достатньо застосовувати коробчатий фільтр з шириною фільтру  $\Delta$  рівному кроку сітки. Як вже відзначалось вище, в цьому випадку  $\bar{f} = f$ , тобто фільтрація чисельно, взагалі, не проводиться.

Після застосування процедури фільтрації до рівнянь Нав'є-Стокса отримуємо відфільтровані рівняння руху. Якщо ширина фільтру  $\Delta$  стала, то можна змінювати порядок виконання процедур диференціювання і фільтрації. У цьому випадку отримані рівняння мають вигляд схожий на рівняння RANS :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \nabla \cdot \nu (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p}, \quad (1.44)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0. \quad (1.45)$$

Далі, визначаючи напруження підсіткових масштабів

$$\tau = \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}, \quad (1.46)$$

отримуємо остаточний вид рівнянь (1.44):

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \nu (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \tau. \quad (1.47)$$

Слід зазначити, що хоча рівняння LES ззовні подібні до рівнянь RANS, підсіткові напруження  $\tau$  представляють значно меншу частину спектру турбулентної енергії, ніж напруження Рейнольдса в RANS. Отже, точність моделювання турбулентних напружень в підході LES не є настільки критичною як в підході RANS.

З урахуванням декомпозиції (1.34) на розв'язувану і підсіткову частини, підсіткова напруга може бути представлена у вигляді класичного потрійного розкладу, представленого Леонардом в 1974 році [155]:

$$\tau = L + C + R = (\overline{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) + (\overline{\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}'} + \overline{\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}}) + \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}. \quad (1.48)$$

Кожний з трьох членів має своє фізичне значення. Перший член – напруження Леонарда. Описує взаємодію великих (розв'язуваних) масштабів. Другий член – змішані напруження. Описує взаємодію між розв'язуваними і підсітковими масштабами, тобто передачу енергії від великомасштабних структур дрібномасштабним. Третій член – напруження Рейнольдса. Описують взаємодію між підсітковими масштабами.

## 1.5 Описання чисельних методів, що використовуються в технології LES

Для просторової дискретизації розрахункової області використовувалась утиліта snappyHexMesh, що входить в тулбок OpenFOAM [143]. При розгляді двовимірних задач нам достатньо було використовувати широко поширені генератори сітки з відкритим кодом, такі як Gmsh, або blockMesh, який входить в OpenFOAM. При розв'язанні ж тривимірних задач з використанням підходу LES можливостей таких сіткових генераторів недостатньо, оскільки детальна роздільна здатність сітки і її якість поблизу межі області і поблизу

поверхні твердого тіла, що обтікається, є дуже важливим для отримання достовірних результатів. Опишемо схематично процес генерації сітки з використанням утиліти `snappyHexMesh`. Передусім створюється САД-модель тіла, що обтікається, яка потім записується в STL форматі. В усій розрахунковій області створюється базова ортогональна еквідистантна гексаедральна сітка. Процес поліпшення якості сітки поблизу поверхні тіла складається з наступних п'яти кроків:

- розщеплення відповідних елементарних комірок сітки, які перетинають поверхню тіла, що обтікається;
- виключення тих комірок, які виявилися усередині (більше 50% об'єму) тіла, що обтікається. На цьому етапі межа сітки представляє собою зубчасту поверхню;
- розщеплення комірок сітки, які лежать усередині деякої заданої області, що оточує тіло, що обтікається. В цій області потрібні більш точні розрахунки;
- процедура снєпінга. Вершини відповідних комірок пересуваються на поверхню тіла, що обтікається, і таким чином згладжується зубчаста поверхня сітки. Шляхом ітераційної процедури покращується якість сітки, погіршена після зміщення вершин комірок на поверхню тіла;
- навколо поверхні тіла, що обтікається, вводяться додаткові шари сітки, що складаються з гексаедральних комірок і вирівняні по поверхні тіла. Цей крок дозволяє уникнути нерегулярності і неортогональності сітки поблизу поверхні тіла, що обтікається.

Технологія LES використовувалась в даній роботі при розгляді турбулентних режимів обтікання сфери. Ця задача представлена в Розділі 5. Тому далі ми обговорюємо просторову дискретизацію стосовно цієї задачі. Число контрольних об'ємів використовуваних сіток варіювалося від 3.5 мільйонів для ламінарних режимів течії без зриву вихорів до 6 мільйонів для відривних течій і 8 мільйонів для турбулентних режимів. Елементарні комірки

базової сітки мали форму куба із стороною 0.4 діаметру сфери. Поблизу поверхні сфери проводилося 7 розщеплень комірки. Відстань від сфери до центроїдів найближчих осередків має принципове значення при розрахунках турбулентних течій. Для використаної нами сітки нормалізована відстань до стінки  $y^+ = yu_\tau/\nu$  (де  $y$  – відстань до стінки,  $u_\tau$  – зсувна швидкість) не перевищувало 5. Цього було достатньо для проведення акуратних чисельних розрахунків в турбулентному докритичному режимі течії, проте недостатньо для того, щоб повністю відмовитися від моделювання стінки сфери.

Розглянемо тепер моделювання підсіткових масштабів при розрахунках турбулентних режимів. Підсіткові моделі, що використовуються в LES, мають багато спільного з моделями турбулентності, що використовуються в RANS, з тою відмінністю, що моделюється суттєво менша частина турбулентного спектру. Зменшення вкладу модельованої частини течії приводить до зменшення похибки. Отже, навіть порівняно прості SGS моделі (моделі підсіткових масштабів) можуть давати задовільні результати. Використовувані в LES підсіткові моделі можна розбити на наступні категорії:

- Алгебраїчні моделі. Моделювання базується на припущенні, що тензор SGS напружень має локальний лінійний зв'язок з тензором швидкостей деформації розв'язуваних масштабів. Класичним прикладом алгебраїчної моделі являється модель Смагоринського [153], яка є підсітковим аналогом алгебраїчної моделі шляху змішування Прандтля для рівнянь Рейнольдса. Проте, на відміну від турбулентної в'язкості, підсіткова в'язкість, так само як і кінетична енергія залежать не лише від характеристик течії (компонент тензора швидкостей деформацій) але і від розміру фільтру  $\Delta$ . Модель Смагоринського ґрунтується на спрощуючих припущеннях, що дрібномасштабні компоненти знаходяться в рівновазі, тобто мають просторово-однорідний, ізотропний і квазістаціонарний розподіл, а вся отримувана ними від компонент розв'язуваних масштабів енергія повністю дисипує. Такі спрощення (багато в чому схожі з міркуваннями Колмогорова) дозволяють припустити, що підсіткова в'язкість визначається середнім значенням швидкості диси-

пації енергії турбулентності, що припадає на одиницю об'єму.

- Диференціальні моделі. Припущення рівноваги дрібномасштабних компонент робить модель Смагоринського недостатньо акуратною в тих течіях, де ця умова явно не виконується. Прикладами таких течій є вільні зсувні шари, течії, що відірвались і знову приєднались, прирежові шари. Для розв'язання таких проблем необхідно включити в модель вплив історії розвитку течії, тобто розглядати рівняння перенесення для підсіткових характеристик турбулентності. Найбільш простою диференціальною моделлю є модель з одним диференціальним рівнянням. Така  $k$ -модель, що є диференціальною моделлю з одним рівнянням, яка використовувалась при розрахунках в даній роботі, буде детально описана нижче.
- Моделі близьких масштабів і змішані моделі. Моделі, побудовані на концепції вихрової в'язкості, здатні описувати загальний дисипативний ефект підсіткових масштабів, проте вони погано описують кореляції між тензором швидкостей деформацій великих масштабів і тензором підсіткових напружень. Вони також не враховують механізм передачі енергії від дрібномасштабних компонент до великомасштабних і, отже, неспроможні відтворити усі аспекти обміну енергією. Основна ідея, на якій базується модель близьких масштабів, полягає у тому, що найменші розв'язувані вихори розміру  $O(\Delta)$  взаємодіють з підсітковими вихорами подібно до того, як більші вихори взаємодіють з вихорами розміру  $O(\Delta)$  [156]. Іншими словами, такі моделі представляють собою екстраполяційну процедуру від найменших розв'язуваних масштабів на структури SGS масштабів. Найбільші підсіткові масштаби можуть бути отримані шляхом фільтрації SGS швидкості. Оскільки така схема відрізняється високою дисипацією енергії, вона зазвичай використовується в комбінації з схемою, що базується на концепції вихрової в'язкості.
- Динамічні моделі. Цей підхід вперше був запропонований Germano et

al. [157]. Він може бути застосований до будь-якої описаної вище моделі. Його ідея полягає в тому, що коефіцієнти SGS моделі визначаються динамічно в результаті обчислень, а не задаються а priori як в моделі Смагоринського. Ідея динамічної процедури базується на припущенні аналогічному тому, на якому базуються моделі близьких масштабів, тобто на припущенні про схожий характер малих вихорів розв'язуваних масштабів і вихорів підсіткового масштабу. Таким чином, з'являється можливість оцінити коефіцієнт пропорційності із розв'язуваних структур.

В даній роботі ми прийняли рішення використовувати диференціальну модель з одним рівнянням. Такий вибір був мотивований наступними міркуваннями. По-перше, ця модель була випробувана і ефективно імплементована в роботі [158] при дослідженні розвиненої течії в каналі. Вона показала хороші результати. По-друге, моделі з одним диференціальним рівнянням мають переваги над алгебраїчними моделями, оскільки вони враховують нерівноважні ефекти і дають незалежні значення для SGS швидкостей при незначному збільшенні комп'ютерних витрат. Це дає більшу точність, особливо в складних течіях. Було також вирішено не використовувати динамічну процедуру, оскільки відомо, що динамічна модель стає дуже неточною у випадку недостатньої роздільної здатності сітки в пристінковій області, оскільки припущення подібності між різними масштабами не працюють поблизу стінки. В силу цих же причин динамічні моделі погано працюють в задачах з недостатньою роздільною здатністю поблизу зсувних шарів. Отже, динамічні моделі потрібно використовувати дуже обережно у тривимірних задачах, де досягнення достатньої роздільної здатності сітки в пристінковій області вимагає сильного збільшення розрахункових ресурсів. По-третє, в роботі [159] було проведено порівняння класичної моделі Смагоринського, динамічної моделі Germano et al [157] з врахуванням її модифікації Lilly [160] і диференціальної k-моделі з одним рівнянням, запропонованої Yoshizawa і Horiuti [161]. В [159] порівняння цих моделей проводилося на задачі обтікання квадратного циліндра, а результати порівнювались з експерименталь-

ними даними. Автори прийшли до висновку, що диференціальна  $k$ -модель Yoshizawa і Horiuti показала найкращі результати.

Розглянемо детальніше  $k$ -модель, імплементовану в OpenFOAM, яка використовувалась в даній роботі. Більшість моделей з одним диференціальним рівнянням також ґрунтуються на концепції вихрової в'язкості, але включають рівняння перенесення для деякої величини підсіткових масштабів, від якої залежить вихрова в'язкість. В  $k$ -моделі такою величиною є кінетична енергія підсіткових масштабів. Вона визначається наступним чином:

$$k = \frac{1}{2}tr(\tau) = \frac{1}{2}tr(\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}). \quad (1.49)$$

Підсіткові напруження  $\tau$  моделюються так само, як і в моделі Смагоринського, на основі припущення про лінійну залежність тензора підсіткових напружень від тензора швидкостей деформації розв'язуваних масштабів, тобто припущення аналогічного гіпотезі Буссінеска в підході RANS :

$$\begin{aligned} \tau - \frac{1}{3}tr(\tau)\mathbf{I} &= \tau - \frac{2}{3}k\mathbf{I} = \\ &= -\nu_{sgs}(\nabla\bar{\mathbf{u}} + \nabla\bar{\mathbf{u}}^T) = -2\nu_{sgs}\bar{\mathbf{S}}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

де  $\bar{\mathbf{S}}$  – тензор швидкостей деформації розв'язуваних масштабів.

З рівнянь (1.1), (1.47) з урахуванням (1.50), а також з урахуванням спрощуючого припущення про ізотропію SGS масштабів отримуємо рівняння перенесення для кінетичної енергії підсіткових масштабів :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k\bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot ((\nu + \nu_{sgs})\nabla k) - \epsilon + 2\nu_{sgs}\bar{\mathbf{S}}^2, \quad (1.51)$$

де вихрова в'язкість  $\nu_{sgs}$  і дисипація  $\epsilon$  визначаються наступним чином

$$\nu_{sgs} = C_k k^{1/2} \Delta, \quad (1.52)$$

$$\epsilon = C_\epsilon k^{3/2} / \Delta. \quad (1.53)$$

Більш детальні міркування, що стосуються виведення рівнянь цієї моделі, можуть бути знайдені в роботі [161]. Автори розробили цю модель і застосували її для чисельного дослідження турбулентної течії в каналі [162].

Пізніше в роботі [159] було проведено порівняння класичної моделі Смагоринського, динамічної моделі Germano et al [157] з урахуванням її модифікації Lilly [160] і диференціальної  $k$ -моделі з одним рівнянням Yoshizawa і Horiuti [161]. Порівняння цих моделей проводилося на задачі обтікання квадратного циліндра. Результати, отримані з використанням перерахованих моделей, порівнювалися з експериментальними даними. Автори дійшли висновку, що диференціальна  $k$ -модель Yoshizawa і Horiuti показала найкращі результати.

Для дискретизації рівнянь LES використовувались практично ті самі схеми, описані вище, що і при підході DNS. Однак, істотна відмінність полягає у тому, що в турбулентному режимі течії не можна використовувати TVD схеми для дискретизації конвективних членів, оскільки обмежувач потоку може "різати" турбулентні пульсації. У цьому випадку слід використовувати звичайну центрально-різницеvu схему. А у випадку виникнення нестійкості розрахунків зменшувати число Куранта. Взагалі, як показує практика, при використанні технології LES число Куранта не повинно перевищувати 0.3.

При використанні  $k$ -моделі з одним рівнянням необхідно також сформулювати граничні умови для  $k$ . Розподіл кінетичної енергії  $k$  зазвичай має максимум поблизу стінки [158]. Тому гранична умова на стінці залежить від якості сітки в пристінковій області. Згідно [158], при  $y^+ > 20$  формулюється умова Неймана  $\partial k / \partial y = 0$ , при  $y^+ \leq 20$  – умова Дирихле  $k = 0$ . Оскільки в нашому випадку при  $Re = 10^4$  значення  $y^+$  не перевищувало 5, ми використали умову Дирихле на поверхні тіла, що обтікається.

## 1.6 Моделювання стінки

Взагалі, класичний підхід LES не вимагає моделювання твердої стінки. Однак, при відмові від моделювання пристінкових течій, тобто у випадку LES аж до твердих стінок, обчислювальні витрати виявляються порівнянними з витратами DNS. В [163] представлені оцінки обчислювальних ресурсів,

необхідних для розрахунку обтікання типового цивільного літака чи автомобіля з використанням усіх відомих методів розрахунку турбулентних течій, починаючи від напівемпіричних методів, що базуються на осереднених по Рейнольдсу рівняннях Нав'є-Стокса (RANS) і закінчуючи повністю вільним від емпіризму методом DNS. Автори стверджують, що на комп'ютері з продуктивністю 1 терафлопс час розрахунку в рамках підходу DNS складає 5000 років. А витрати в рамках підходу LES без використання пристінкового моделювання виявляються порівнянні з витратами DNS.

В наш час в рамках підходу LES існує велика кількість різних методів моделювання твердої стінки. Більшість моделей прогнозують зсувні напруження на стінці. Хоча є моделі, які намагаються відтворювати деякі вторинні властивості пристінкової течії, наприклад, моделюють підсіткову в'язкість. В даній роботі ми не претендуємо на всебічний і вичерпний огляд існуючих методів, проте перерахуємо основні підходи.

- Рівноважні моделі. Основним припущенням цього класу моделей пристінкових течій являється припущення, що напруження в прилежовому шарі знаходиться в стані рівноваги. Це означає, що профіль швидкості є універсальним, тобто слабо залежить від числа Рейнольдса, і виконується локальна рівновага енергії турбулентних пульсацій, тобто швидкість генерації турбулентності урівноважується швидкістю в'язкої дисипації. В цьому випадку мається на увазі, що логарифмічний закон стінки має силу в пристінковій області. Взагалі, ці моделі визначають зсувні напруження на стінці, як функцію локального значення швидкості в точці сітки найближчої до стінки. Добре відомі наступні приклади цього класу моделей пристінкової течії: модель Дірдорфа, модель Schumann - Grotzbach, а також її подальші удосконалення, що враховують існування поблизу стінки похилих структур (модель зі зміщенням), вплив швидкого руху рідини у напрямку від або до стінки (модель з викидом), локальні і миттєві моделі, що вимагають задоволення закону стінки локально по простору і за часом. Читачів, що цікавляться цим класом моделей, ми відсилаємо до оглядових ро-

біт [164, 165].

- Двошарові моделі (TLM). Основна ідея двошарового підходу полягає в розмежуванні сітки, що знаходиться в основному потоці від дрібнішої сітки, яка знаходиться в пристінковій області, що називається підшаром. На підшарі застосовуються спрощені рівняння перенесення і моделі, що зменшує час розрахунку. Стандартні рівняння LES розв'язуються на грубій сітці, використовуючи зсувні напруження на стінці, що надаються моделлю, в якості граничних умов. Напруження підраховуються шляхом інтегрування спрощених рівнянь примежового шару на детальній сітці, розташованій поблизу стінки. Ці рівняння мають вигляд [164, 165]:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}_i \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y} \right], \quad (1.54)$$

$$\bar{u}_2 = -\int_0^y \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z} \right), \quad i = 1, 3, \quad (1.55)$$

де  $x$  – напрям потоку,  $y$  - напрям нормалі до стінки  $z$  - третій напрям. Таким чином, модель використовує швидкості і градієнти тиску з розв'язку LES і повертає зсувні напруження на стінці. Основна відмінність між існуючими двошаровими моделями полягає у тому, як вони моделюють вихрову в'язкість в підшарі. Найпростішим підходом, ймовірно, являється модель шляху змішування [166]:

$$\nu_t = (ky_w)^2 D(y_w) |S|, \quad (1.56)$$

де  $k$  – постійна Кармана,  $y_w$  – відстань до стінки,  $S$  – локальний тензор швидкостей деформації,  $D$  – демпфувальна функція, яка забезпечує коректну обмежену поведінку  $\nu_t$  у в'язкому шарі. У цій роботі використовувались демпфувальні функції Ван Драйста (Van Driest) [166].

- Моделювання від'єднаних вихорів (DES). У цьому розділі неможливо не згадати ще про один підхід до розгляду турбулентних течій поблизу стінки. Це підхід, при якому моделювання турбулентності в примежовому шарі відбувається за допомогою нестационарного RANS. А техніка

LES застосовується в основній області течії. Для підходу DES Spalart - Allmaras запропонували свою модель вихрової в'язкості [167].

Слід зазначити, що в [158] на задачі про течію в каналі проводилось порівняння чотирьох підходів: 1) без моделювання стінки, 2) модель Van Driest, 3) модель Wolfshtein, 4) стандартна Spalart - Allmaras DES модель. Було показано, що тільки Van Driest і Wolfshtein показали прийнятні результати. У даній роботі використовувалися демпфувальні функції Van Driest.

## 1.7 Ідентифікація вихорів

Турбулентні режими течії представляють собою не просто випадковий шум, але також включають просторово когерентні вихрові структури, що еволюціонують у часі. Оскільки когерентні структури дисипують набагато повільніше за некогерентні, правильна ідентифікація таких вихрових структур представляє найбільший інтерес при дослідженні турбулентних режимів течії. Огляд широко використовуваних індикаторів вихорів з описом переваг і недоліків кожного з них можна знайти в роботі [168] або в більш сучасних роботах [169, 170]. Коротко перерахуємо основні методи:

- Метод локальних мінімумів тиску. Оскільки на елементарний матеріальний об'єм усередині вихору діє відцентрова сила, вона повинна урівноважуватись мінімумом тиску вздовж осі обертання. У роботі [171] було показано, що цей метод може показати вихрові структури в турбулентному примежовому шарі. Однак, він не є надійним. В [168] було показано декілька режимів, при яких критерій мінімуму тиску помилково показав присутність вихорів.
- Метод ліній струму. Лінії струму можуть бути використані для визначення вихорів за умови, що вони представляють собою замкнуті або спіральні лінії [172]. В [173] була введена міра закручуваності ліній струму "winding angle", яка представляла собою кут повороту сегменту

лінії струму при русі уздовж неї. Були також запропоновані підходи, пов'язані з обчисленням кривизни ліній струму [174]. В [175] метод був поширений на тривимірні поля. Головний недолік цього методу полягає в тому, що він не має інваріантності відносно перетворення Галілея. Отже, вихор може бути визначений у одній інерціальній системі відліку, але не визначений в іншій, що рухається з деякою швидкістю. На практиці це означає, що цей метод може не визначити деякі вихори, що рухаються з різними швидкостями, і виявитися повністю непридатним при дослідженні турбулентної течії, де існує безліч вихорів, які переносяться на різних швидкостях.

- Метод величини завихреності. Один з найчастіше використовуваних методів визначення когерентних вихрових структур полягає у визначенні модуля завихреності (див., наприклад, [176–179]). Цей метод був успішно застосований для розрахунку дельтаподібного крила і лопатей ротора конвертоплана V-22. Також цей метод нерідко використовувався в задачах з вільними зсувними потоками. Проте він погано застосований в задачах з пристінковими зсувними течіями, оскільки він не може визначити вихор, коли завихреність в течії, що викликана зсувом, і завихреність усередині вихору мають порівнянні величини.
- *D*-метод. У роботі [180] була запропонована класифікація різних локальних картин ліній струму, що виникають у тривимірній течії, на основі обчислення власних значень тензора градієнта швидкості  $\nabla \mathbf{u}$ . Автори дійшли висновку, що ядро вихору визначається як область з двома комплексними власними значеннями тензора  $\nabla \mathbf{u}$ . В цьому випадку миттєві лінії струму, що відповідають швидкості  $\nabla \mathbf{u}$ , замкнуті або мають форму спіралі. Характеристичне рівняння, коренями якого є власні числа тензора  $\mathbf{u}$ , матиме два комплексних кореня, якщо дискримінант цього рівняння  $D > 0$ .
- *Q*-метод. Метод, запропонований в роботі [181], визначає вихор як область, в якій другий інваріант  $Q$  тензора  $\nabla \mathbf{u}$  більше нуля. Дода-

тково вимагається, щоб тиск усередині вихору був менше за тиск в області, що оточує вихор. Цей критерій ( $Q > 0$ ) є більш строгим, ніж попередній ( $D > 0$ ). Отже, усі області течії, в яких задовольняється цей критерій, задовольнятимуть і попередньому.

- $\lambda_2$ -метод. Цей метод був запропонований в роботі [168]. Фактично, він також базується на твердженні що вихори містять локальні мінімуми тиску, проте виключає випадки, коли локальні мінімуми тиску виникають не внаслідок обертання. Згідно з цим методом ядро вихору визначається як зв'язана область з двома від'ємними власними значеннями тензора  $\mathbf{S}^2 + \Omega^2$ , де  $\mathbf{S}$  і  $\Omega$  – симетрична і антисиметрична частини тензора  $\nabla \mathbf{u}$ , відповідно. Оскільки симетричний тензор другого рангу має три дійсні власні значення, то вихор визначається знаком другого власного числа, а саме  $\lambda_2 < 0$ .

Розглянемо детальніше останні три методи, що базуються на дослідженні тензора  $\nabla \mathbf{u}$ , оскільки саме ці методи використовувалися в цій роботі. В [180] автори провели локальну класифікацію миттєвих ліній струму, розглядаючи течію в околі деякої матеріальної точки в системі координат, що не обертається і рухається разом з цією матеріальною точкою. Розкладаючи швидкість в ряд Тейлора  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}$ , неважко бачити, що у загальному випадку характер течії в околі матеріальної точки визначається лінійним членом розкладання, тобто тензором  $\nabla \mathbf{u}$ . При цьому, якщо усі три власні числа  $\nabla \mathbf{u}$  дійсні, то дана локальна течія є розтягуванням і стискуванням по трьох напрямках, тобто топологічно така точка класифікується як вузол-сідло-сідло. Якщо ж два власні значення являються комплексно спряженими, то така точка є або центр, або стійкий/нестійкий фокус залежно від значення третього (дійсного) власного числа. Таким чином, вихор визначається як область, в якій два власні числа тензора  $\nabla \mathbf{u}$  є комплексно спряженими.

Власні числа тензора  $\nabla \mathbf{u}$  задовольняють характеристичному рівнянню

$$\lambda^3 - P\lambda^2 + Q\lambda - R = 0, \quad (1.57)$$

де  $P, Q, R$  – три інваріанти тензора  $\nabla \mathbf{u}$ , визначені наступним чином:

$$P = \text{tr}(\nabla \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \left( (\text{tr}(\nabla \mathbf{u}))^2 - \text{tr}((\nabla \mathbf{u})^2) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\|\Omega\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2), \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$R = \det(\nabla \mathbf{u}). \quad (1.60)$$

Тут, як і раніше,  $\mathbf{S}$  і  $\Omega$  означають симетричну і антисиметричну частини тензора  $\nabla \mathbf{u}$ , а  $\|\Omega\|$  і  $\|\mathbf{S}\|$  означають норми цих тензорів:  $\|\Omega\|^2 = \text{tr}(\Omega \cdot \Omega^T)$ ,  $\|\mathbf{S}\|^2 = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T)$ . Згідно з формулою Кардано рівняння (1.57) має один дійсний і два комплексно спряжених корені, якщо

$$D = \left(\frac{Q}{3}\right)^3 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 > 0. \quad (1.61)$$

Таким чином, нерівність (1.61) і визначає вихор. Цей метод ідентифікації вихорів названий вище як  $D$ -метод. Він був представлений в роботі [180]. Приклад використання цього методу ідентифікації вихорів можна знайти в [197], де досліджувалась течія Стоксу в скінченному циліндрі.  $D$ -метод був використаний для визначення і класифікації кутових вихорів, що виникають поблизу стаціонарного кутового кола циліндра.

З нерівності (1.61) випливає, що  $Q$ -метод висуває більш строгу умову ( $Q > 0$ ), ніж  $D$ -метод ( $D > 0$ ). Цей факт має очевидне пояснення. Перший член правої частини (1.59) відповідає за обертання елементарного рідкого об'єму, а другий член – за його розтягування/стискування. Таким чином, якщо  $D$ -метод вимагає лише наявності локального обертання в даній області, то  $Q$ -метод вимагає, щоб обертання домінувало над розтягуванням.

Як вже згадувалося вище,  $\lambda_2$ -метод представляє собою покращений метод локальних мінімумів тиску [168]. Якщо узяти оператор градієнта від початкових рівнянь руху (1.1) і потім розкласти його на симетричну і антисиметричну частини, отримавши таким чином два рівняння, то рівняння з антисиметричною частиною представляє собою рівняння перенесення зави-

хреності, а симетрична частина, що залишилася, має вигляд

$$\frac{D\mathbf{S}}{Dt} + \Omega^2 + \mathbf{S}^2 - \nu \nabla^2 \mathbf{S} = -\frac{1}{\rho} \nabla \nabla p. \quad (1.62)$$

Оскільки  $\mathbf{S}$  – тензор швидкостей деформації, то перший член лівої частини (1.62) представляє нестационарне розтягування/стискування, які можуть обумовлювати появу локального мінімуму тиску, не пов'язаного з обертанням елементарного рідкого об'єму. Останній член лівої частини представляє в'язкі ефекти, які також вносять вклад в поле тиску, не пов'язаний з вихором. Покращення методу локальних мінімумів тиску полягає саме у виключенні з розгляду цих двох членів. Тоді маємо рівняння:

$$\Omega^2 + \mathbf{S}^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla \nabla p^*. \quad (1.63)$$

Права частина цього рівняння є гесіаном скалярної функції  $p^*$ . Відомо, що критична точка ( $\nabla p^* = 0$ ) є локальним мінімумом  $p$ , якщо гесіан додатно визначений в цій точці. Зазначимо, що оскільки  $\Omega^2 + \mathbf{S}^2$  – симетричний тензор, його власні числа дійсні і можуть бути впорядковані  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ . Тепер очевидно, що локальні мінімуми  $p^*$  в тривимірному просторі визначаються умовою, що всі три власних числа тензора  $\Omega^2 + \mathbf{S}^2$  відмінні ( $\lambda_i < 0$ ). Однак, якщо ми шукаємо локальні мінімуми тиску на деякій площині, то достатньо вимагати, щоб два власних числа були менше нуля. Звідси витікає, що ядро вихору визначається умовою  $\lambda_2 < 0$ .

Проведене в роботі [168] детальне порівняння різних методів ідентифікації вихорів показало перевагу  $Q$ -метода і  $\lambda_2$ -метода над методом величини завихреності і  $D$ -методом. Як було згадано вище, метод завихреності погано працює в пристінкових зсувних шарах, де високі значення модуля завихреності викликані загальним зсувом і не дозволяють визначити положення вихорів.  $D$ -метод не має подібних недоліків в зсувних шарах. Проте, він некоректно визначає присутність вихорів в деяких вигнутих потоках. Він також може породжувати шум поблизу стінок і показувати структури малих масштабів при відсутності завихреності. З цієї причини в даній роботі ми використовуємо для ідентифікації вихорів  $\lambda_2$ - і  $Q$ -методи.

Матеріали останніх чотирьох підрозділів викладено в нашій статті [227].

## 1.8 Ідентифікація інтерфейсу

При розв'язанні задач гідромеханіки і детальному описанні течій нерідко доводиться візуалізувати рух і деформації рідких поверхонь. Ця проблема особливо часто зустрічається в задачах з інтенсивним перемішуванням. Задача ідентифікації і візуалізації рідкої поверхні ідентична задачі відстежування поверхні розділу двох незмішуваних рідин (інтерфейсу). Предметом даного підрозділу являється подальший розвиток і комп'ютерна імплементація досить точних, загальних і стійких методів чисельної гідромеханіки для опису течії двох рідин, розділених заданою в початковий момент часу поверхнею розділу. Також ми розвиваємо і описуємо методи, застосовні для ідентифікації руху незамкнутої матеріальної поверхні.

Течії, які ми досліджуємо в цій роботі, належать до сегрегованих течій. Однак, чисельна техніка, яку ми розвиваємо, придатна також для рішення складніших завдань, в яких інтерфейс піддається великим деформаціям, переприєднанням і розривам. Сегреговані течії відрізняються наявністю добре визначеного інтерфейсу, положення якого визначається в процесі розв'язання задачі [141]. Тому до методів, використовуваних для опису інтерфеса, пред'являються додаткові вимоги, такі як

- можливість представлення інтерфейсу на дискретній сітці,
- відстежування руху інтерфейсу у часі,
- задоволення нелінійних умов на вільній поверхні.

Існуючі методи розв'язання задач з поверхнями розділу рідин і незамкнутими матеріальними поверхнями можна грубо розділити на дві категорії: *interface tracking* і *interface capturing*, тобто стеження за інтерфейсом і захоплення інтерфейсу. Також можливо розділити ці методи на три основні групи [141]:

- Трекінг поверхонь (*Surface Tracking Methods*). Інтерфейс відстежує-

ться або за допомогою функції висоти, або за допомогою набору маркерів, розташованих на поверхні.

- Рухома Сітка (Moving Mesh Methods). Розрахункова сітка поєднується з відстежуваним інтерфейсом. Оскільки з часом положення інтерфейсу змінюється, цей клас методів повинен ґрунтуватися на динамічних розрахункових сітках.
- Об'ємний трекінг (Volume Tracking Methods). Інтерфейс не визначається, як ламана лінія. Замість цього рідини 1 і 2 позначаються скалярним індикатором, який є об'ємною долею рідини 1 в цьому контрольному об'ємі розрахункової області. Часто використовуваний в гідромеханіці VOF метод належить цій групі.

Рисунок 1.2 дає схематичне представлення цих методів. У першому випадку інтерфейс представлений набором маркерів, рух яких відстежується в явному вигляді. У другому випадку лінії розрахункової сітки поєднуються з відстежуваним інтерфейсом. У подальшому передбачається, що розрахункова сітка деформується і рухається разом з інтерфейсом. У третьому випадку рідини по обоє сторони інтерфейсу позначаються індикаторними функціями або пасивними скалярами, що не мають маси.

Дамо детальніший опис згаданих методів представлення інтерфейсу. Розглянемо спочатку поверхневі методи. У цьому класі методів інтерфейс позначається спеціальними маркерними точками. Положення інтерфейсу між маркерами визначається наближено шляхом інтерполяції. Для цього зазвичай використовується кусково-поліноміальна інтерполяція [182]. До переваг цього підходу відносяться наступні його особливості: гострі кути інтерфейсу залишаються гострими, оскільки зміна інтерфейсу визначається конвекцією маркерів. Цей метод також істотно спрощує задачу визначення кривизни інтерфейсу і, отже, облік сили поверхневого натягнення. Існують різні методи маркерування інтерфейсу. Розглянемо їх детальніше

- Точки на інтерфейсі. Daly [184] представив метод, що дозволяє явно відстежувати інтерфейс шляхом розташування на ній зв'язаних пасив-

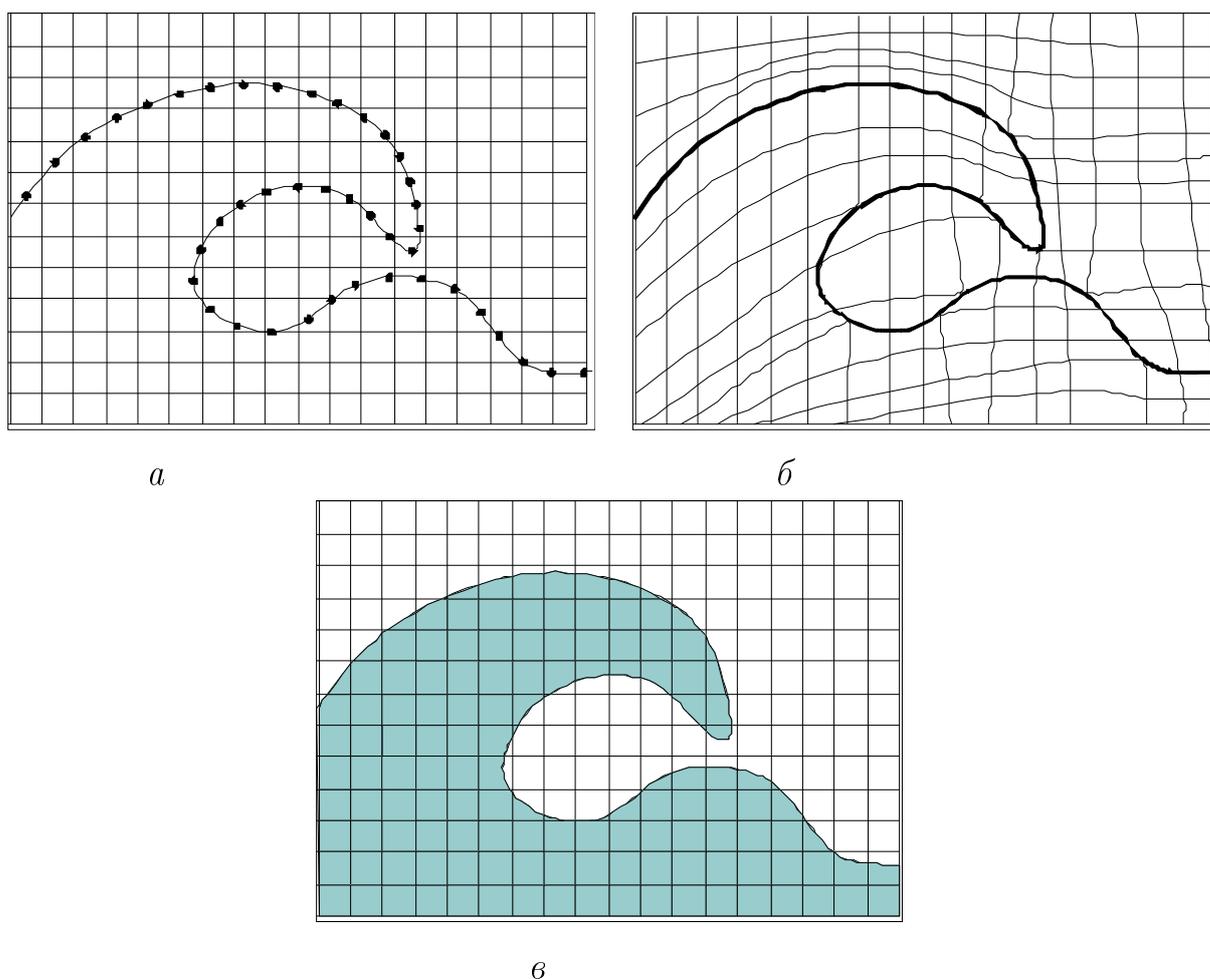


Рис. 1.2: Схематичне представлення методів розв'язання задач з межами розділу

них маркерів - матеріальних точок, що не мають маси і не впливають на потік. Рух маркерів відстежується у рамках лагранжевого підходу. До недоліків такого методу можна віднести його чутливість до відстані між маркерами. Коли в результаті адвекції маркери віддаляються один від одного на значні відстані, роздільна здатність, з якою визначається інтерфейс, сильно зменшується. Деякі ділянки інтерфейсу взагалі, втрачаються і не можуть бути описані з використанням лише заданого набору маркерів. Навпаки, при дуже сильному зближенні маркерів, локальні флуктуації полів можуть привести до сильного завищення локальної кривизни інтерфейсу і, як наслідок, до сильного завищення сили поверхневого натягу. Отже, при імплементації цього методу необхідно передбачити можливість динамічного додавання і видалення

маркерів. Також слід зазначити, що із-за строгої послідовності і зв'язаності маркерів цей метод накладає обмеження на врахування розривів і переприєднань інтерфейсу. Крім того, у тривимірному випадку задача сильно ускладнюється, оскільки інтерфейс вже представляється не набором відрізків прямої, а плоскими фігурами в просторі [185].

- Функція висоти. Nichols і Hirt [186] розширили ідеї описаного вище методу, зв'язавши маркери на інтерфейсі з деякою заданою площиною. Тоді положення інтерфейсу визначається висотою, тобто відстанню від якої-небудь точки інтерфейсу до заданої площини. На малюнку 1.3 дано схематичне представлення методу для незамкнутих інтерфейсів. Для замкнутих інтерфейсів, наприклад, поверхня краплі або бульбашки, відстані можна вимірювати від заданої точки, а не від площини. Головним обмеженням цього методу являється той факт, що кожна координата задає тільки одну точку на інтерфейсі. Отже, неможливо описати випадок, коли координата стає багатозначною, як показано на малюнку 1.3 б. До переваг методу слід віднести його ефективність при комп'ютерній реалізації. Nichols і Hirt [186] використали цей метод для розрахунку на фіксованій прямокутній сітці тривимірних хвиль поблизу перешкод. В [187] автори застосували цей метод для розрахунку тривимірного інтерфейсу хвиль малої амплітуди.
- Метод рівнів. В [188] і потім [189] було запропоновано ввести в усій розрахунковій області неперервну функцію, відому як функція рівнів. Значення функції в кожній точці визначається як найкоротша відстань від цієї точки до інтерфейсу [190]. Таким чином, інтерфейс визначається як безліч точок, у яких функція набуває нульових значень. Для того, щоб розрізняти рідини, розташовані по різні сторони від інтерфейсу, для однієї з них відстані до інтерфейсу були визначені зі знаком мінус. Визначена таким чином функція рівнів є скаляром, асоційованим з реальними рідинами, яка переміщується в розрахунковій області разом з рідинами. Для визначення цього скалярного поля розв'язує-

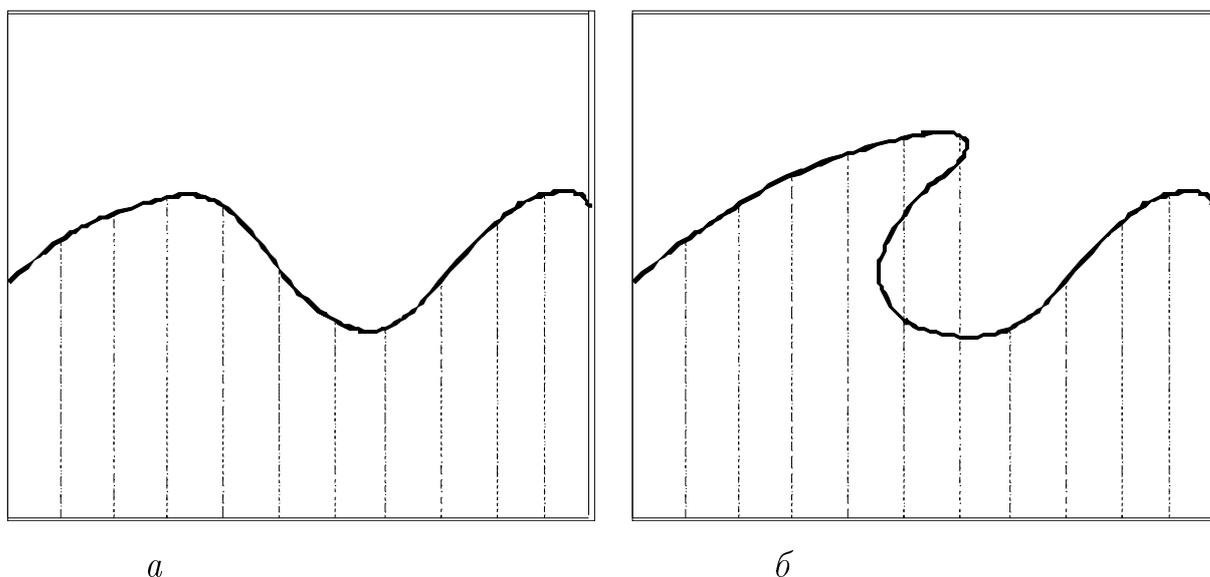


Рис. 1.3: Метод функції висоти: а – однозначно визначена функція висоти, б – неоднозначно визначена функція

ться відповідне скалярне рівняння перенесення.

- Методи динамічної розрахункової сітки. Ці методи ґрунтуються на прив'язці поверхонь розрахункової сітки до інтерфейсу. Ці методи активно розвивались впродовж останніх десятиліть. Детальний опис імплементації цих методів дано в [141]. Головне їх достоїнство полягає в тому, що вони дозволяють уникнути проблеми частково заповнених комірок сітки. Також привабливість методів викликана тим, що вони дозволяють акуратно описати граничні умови на інтерфейсі. Головний недолік полягає у тому, що ці методи непридатні при сильних деформаціях інтерфейсу, оскільки це веде до сильного спотворення розрахункової сітки.

Перейдемо до розгляду об'ємних методів. В рамках цих методів рідини позначаються по обидва боки від інтерфейсу. Оскільки точне положення інтерфейсу невідоме в кожний момент часу, потрібно використовувати спеціальну техніку для захоплення добре визначеного інтерфейсу. Така техніка повинна розглядатися як частина алгоритму розв'язання.

- Частинки в рідині. Harlow і Welch [134] запропонували MAC (marker and cell) метод, згідно з яким безмасові помічені частинки (маркери),

розповсюджуються по об'єму, зайнятому рідиною з вільною поверхнею. Комірki сітки, що не містять маркерів, вважаються порожніми. Комірka, що містить маркери і лежить по сусідству з порожньою коміркою, містить відрізок інтерфейсу. Усі інші осередки вважаються повністю заповненими рідиною. Упродовж кожного часового кроку маркери рухаються згідно з полем швидкості, визначеним в їх окоі. Daly [183] розповсюдив MAC метод на задачі про рух двох рідин. Маркери класифікуються відповідно до того, яку рідину вони представляють. Комірka розрахункової сітки, що містить маркери обох рідин, містить відрізок інтерфейсу. У цьому методі маркери використовуються не лише для того, щоб позначати рідини, але і для розрахунку густини і в'язкості в комірках змішування рідин. MAC методи привабливі тим, що дозволяють вирішувати складні задачі такі, як руйнування хвилі. Вони застосовні в тривимірних розрахунках. Проте в тривимірних випадках число комп'ютерних операцій істотно зростає, окрім розв'язання рівнянь руху рідини необхідно також відстежувати рух великого числа частинок. Також істотно зростає об'єм інформації, який необхідно зберігати в процесі розрахунків.

- VOF метод (volume of fluid method), запропонований Hirt, Nichols [191]. Також цей метод відомий як метод об'ємних фракцій (volume fractions method). Для ідентифікації рідин вводиться скалярний індикатор, значення якого змінюються між 0 і 1. Значення індикатора 0 говорить про те, що в цьому осередку є присутнім тільки перша рідина. Значення індикатора 1 говорить про те, що в даній комірці є присутньою тільки друга рідина. Значення індикатора між цими двома граничними значеннями говорить про те, що інтерфейс проходить через цю комірку, а саме значення індикатора є об'ємною долею другої рідини в цій комірці (див. рисунок 1.4). VOF метод являється більше економічним, ніж MAC методи, оскільки тільки одне скалярне значення приписується кожній комірці розрахункової сітки. Для обчислення цього скаляра вирішується тільки одне скалярне рівняння перенесення, яке описує

0	0.02	0.08	0.01	0	0
0.19	0.84	1	0.76	0.02	0
0.85	1	0.46	0.47	0.16	0
1	0.98	0.15	0.48	0.49	0.01
1	1	1	1	1	0.75

Рис. 1.4: Схематичне представлення VOF метода

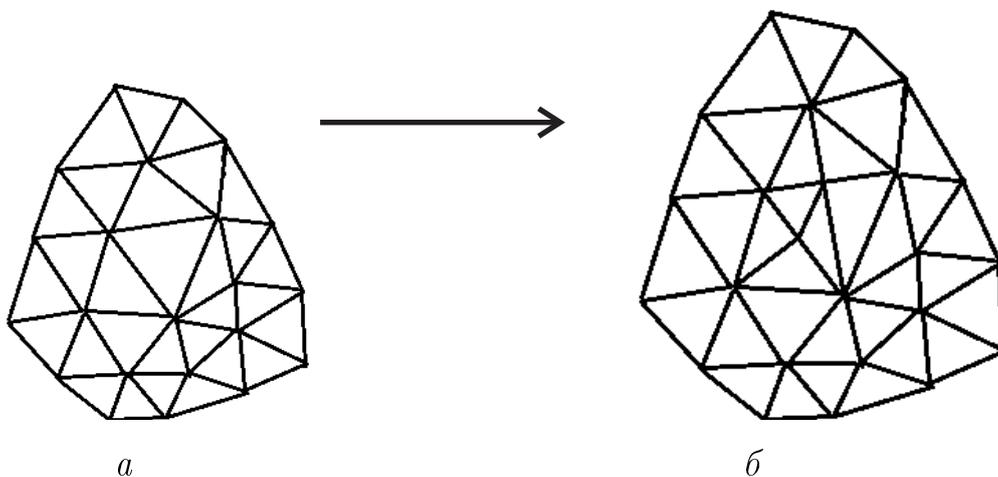


Рис. 1.5: Схематичне представлення interface tracking метода

поширення в розрахунковій області об'ємних фракцій. Головним недоліком цього методу є той факт, що більшість конвективних різницевих схем, що забезпечують зміну об'ємної фракції в межах 0 і 1, розмазують інтерфейс по декількох сусідніх комірках розрахункової сітки. Пізніше у ряді робіт були запропоновані різні методи підтримки добре визначеного інтерфейсу при використанні VOF методу [192,193]. Добре відомі три категорії методів: спеціальна техніка побудови лінії інтерфейсу, схеми донор-акцептор, різницеві схеми більш високих порядків.

В роботах [194–196] досліджувалось перемішування рідини в скінченному циліндричному контейнері. Задача розв'язувалась в межах моделі Стокса. Задля цього використовувався аналітичний розв'язок задачі Стокса в скінченному циліндрі [197–199]. Автори розробили і використали метод відсте-

жування незамкнутої матеріальної поверхні в тривимірній течії. Цей метод належав до класу *interface tracking* методів. Він полягав в початковій апроксимації матеріальної поверхні неструктурованою триангулярною сіткою. Далі в процесі руху трикутники сильно деформувались, розтягувались, скошувались. Тому для відновлення якості триангулярної сітки деформовані трикутники дробились і в сітку додавались нові трикутники (див. рисунок 1.5). Такий метод дав авторам можливість відстежити дуже сильні деформації і утворення складчастих, шаруватих структур в процесі перемішування. Зокрема, автори використали цей метод для ідентифікації поверхні стійкого і нестійкого многовидів, які мають дуже складну складчасту структуру. Але навіть при дуже сильних деформаціях матеріальної поверхні і утворенні складних шаруватих структур, в яких різні шари розташовуються дуже ущільнено один до одного, метод відстежування матеріальної поверхні (*surface tracking method*) дозволяє відстежити всі шари такої структури. Слід відзначити, що автори розглядали течії Стокса і процеси перемішування рідини не тільки у скінченному циліндрі, а й в інших тривимірних областях [200–203]. В природі процеси перемішування можуть спричинюватись і прискорюватись через життєдіяльність живих організмів. Процеси перемішування, спричинені життєдіяльністю живих організмів, що живуть поблизу морського дна, називають біотурбацією. Процеси такого перемішування досліджувались в [204–207].

## Розділ 2

# Чисельний розрахунок звукового поля еолових тонів

### 2.1 Вступ до розділу

Як відомо, еолові тони – це звуки, що виникають при обтіканні потоком подовжених тіл. Проте, частіше за все еолові тони пов’язують з обтіканням подовжених тіл, що мають переріз у вигляді круга, таких наприклад, як струни, троси, довгі стрижні, високі труби і так далі. Ми не зупинятимемося на історії вивчення еолових тонів яка, до речі, прекрасно викладена в [2, 17]. Нас цікавитимуть, передусім, польові і енергетичні характеристики еолових тонів і залежність їх від швидкості потоку (або числа Рейнольдса).

Судячи з усього, першу спробу оцінити інтенсивність еолових тонів зробив В. Холле в 1938 році [58]. На основі своїх спостережень він емпірично встановив, що інтенсивність (сила звуку) еолових тонів в напрямках перпендикулярних напрямку руху потоку приблизно рівна<sup>1</sup>

$$I \approx \alpha \frac{ldV^q}{r^2}, \quad (2.1)$$

де  $l$ ,  $d$  – довжина і діаметр циліндричного стрижня,  $V$  – швидкість потоку,  $r$  – відстань від стрижня до точки спостереження. По дослідях В. Холле  $\alpha \approx 5 \cdot 10^{-24}$  СГС, а  $6 \leq q \leq 8$ .

В 1946 році Д. І. Блохінцев [58] дещо уточнив формулу (2.1). З міркувань

---

<sup>1</sup>У цих напрямках спостерігається максимальна інтенсивність випромінювання звуку [2, 17]

розмірності він показав, що

$$I \approx \alpha(\text{Re}) \frac{ld\rho V^6}{r^2 c^3}. \quad (2.2)$$

Тут  $\rho$ ,  $c$  – густина середовища і швидкість поширення в ній звуку, а  $\alpha(\text{Re})$  – деякий коефіцієнт, залежний від числа Рейнольдса, який не може бути визначений з міркувань розмірності.

В 1956 році Phillips O. M. [208] припустив, що підйомну силу  $F(t)$ , що діє на циліндричний стрижень в потоці, можна приблизно представити як деяку гармонійну силу, що діє на одиницю довжини стрижня

$$F(t) \approx \frac{1}{2} \beta d \rho V^2 \exp(-i[\omega t + \varphi]), \quad (2.3)$$

де  $\omega$  – кругова частота еолового тону,  $0.5 \leq \beta \leq 2$  – константа, пов'язана із залежністю підйомної сили від степеня турбулентності потоку і залежністю фази  $\varphi$  від довжини стрижня. Зміна фази по довжині стрижня визначається тим, що синфазний зрив вихорів має місце тільки на відносно короткій ділянці, протяжність якої, можливо, складає 3-4 діаметри стрижня.

Використовуючи наближення (2.3), М. Е. Голдстейн в 1976 році [209] запропонував уточнену формулу для оцінки інтенсивності еолових тонів на одиницю довжини стрижня

$$I \approx \beta^2 \text{St}^2 \cdot \frac{17d\rho V^6}{32r^2 c^3}. \quad (2.4)$$

Тут  $\text{St}$  – число Струхалія.

Хоча формула (2.4) знайшла застосування на практиці, цілком очевидно, що вона носить суто оцінний характер, оскільки отримана на основі ряду спрощуючих припущень. Окрім цього, щоб використати формулу (2.4) необхідно заздалегідь знати число Струхалія для конкретної швидкості потоку, що набігає на циліндричний стрижень, і емпіричний коефіцієнт  $\beta$ , про який відомо тільки те, що він може змінюватися в досить широких межах.

Маючи на увазі сказане, метою цього розділу є отримання більш строгих оцінок акустичних характеристик еолових тонів (у тому числі і енергетичних характеристик) на основі чисельного розв'язку рівняння Нав'є-Стокса і подальшого використання розв'язку рівняння Гельмгольца.

## 2.2 Постановка гідродинамічної задачі і чисельний метод її розв'язання

В силу описаного вище підходу задача нестационарного обтікання твердого кругового циліндра формулюється у рамках моделі в'язкої нестисливої ньютонівської рідині. Такий процес описується нестационарною системою рівнянь Нав'є-Стокса. У безрозмірних фізичних змінних їх можна представити в тензорній формі 1.1, 1.2. Покомпонентне представлення цих рівнянь можна знайти в учбовій літературі (див. наприклад, [141]).

Для обезрозмірювання рівнянь руху за масштаб довжини приймався діаметр циліндра  $d$ , а за масштаб швидкості - швидкість рівномірного потоку  $V$  на досить великому віддаленні від циліндра. Тоді масштабом часу буде величина  $d/V$ , а масштабом тиску - подвоєний швидкісний натиск  $\rho V^2$ . Основним параметром такої задачі, що входить у рівняння руху, являється число Рейнольдса  $Re = Vd/\nu$ , де  $\nu$  - кінематична в'язкість середовища.

Граничні умови формулювались наступним чином. Для швидкості на поверхні циліндра ставилась умова прилипання  $U = 0$ , для тиску - рівність нулю нормального градієнта [94]. В якості розрахункової області був обраний квадрат із стороною  $40d$ , а циліндр розташовувався в центрі квадрата. На вході в розрахункову область (ліва межа) задавався рівномірний потік. На верхній і нижній межах розрахункової області формулювалась умова площини симетрії, тобто нульові значення для вертикальної компоненти  $U_y = 0$  і рівність нулю нормального градієнта для горизонтальної:  $\partial U_x / \partial y = 0$ . Така умова припускає, що на відстані  $20d$  від центру циліндра потік вже є практично незбуреним. На виході з розрахункової області (права межа) ставились "м'які" граничні умови типу лінійної екстраполяції, що відповідають рівності нулю нормального градієнта швидкості. Для тиску умова рівності нулю нормального градієнта формулювалась по всій межі розрахункової області [94], включаючи вихід.

Алгоритм чисельного розв'язання сформульованої задачі детально опи-

Табл. 2.1: Характеристики стаціонарної течії

	Числа Рейнольдса		
	10	20	40
$L_{sep}$	0.251	0.929	2.29
$C_x$	2.84	2.049	1.53

Табл. 2.2: Безрозмірні характеристики періодичної течії при різних числах Рейнольдса

Re	50	100	200	400
$T$	7.959	6.018	5.082	4.548
St	0.126	0.166	0.197	0.220
$\bar{C}_x$	1.45	1.347	1.343	1.414
$\max  \tilde{C}_x $	0.001	0.007	0.05	0.121
$\max  \tilde{C}_y $	0.062	0.326	0.686	1.088
$ \tilde{C}_x / \tilde{C}_y $	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$2.15 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$

сано в Розділі 1. Описаний алгоритм розв'язання базується на використанні методу скінченних об'ємів (див. [93–95]), який на сьогодні можна вважати найбільш популярним чисельним підходом в задачах механіки рідин.

Для дискретизації розрахункової області використовувалась неортогональна сітка із згущуванням вузлів поблизу поверхні циліндра. Причому в круговій області діаметром  $bd$ , розташованій навколо циліндра задавалась сітка типу O. З метою верифікації отриманих результатів розрахунки виконувались при різній кількості контрольних об'ємів і при різних значеннях коефіцієнтів згущення вузлів сітки. Представлені в цій роботі результати отримані на сітці з 230400 контрольних об'ємів з мінімальним кроком близько  $0.002d$  поблизу поверхні циліндра.

При розрахунках використовувались бібліотеки тулбоксу з відкритим кодом OpenFOAM [143, 210]. Для обчислення об'ємних інтегралів за контроль-

Табл. 2.3: Розмірні характеристики періодичної течії і звуку: 1 – задана швидкість потоку, 2 – число Маха, 3 – частота  $f = VSt/d$ , 4 – хвильовий розмір джерела звуку, 5 – за нашими розрахунковими даними, 6 – по Філіпсу [208],  $\max |\tilde{F}_y| \sim V^2$ , тобто  $q = 2$ , 7 – тиск на осі діаграми спрямованості, 8 – інтенсивність звуку (сила звуку), Вт/м<sup>2</sup>, 9 – за Філіпсом [208] при  $\beta = 2$ , 10 – повна акустична потужність еолового тону, 11 – потужність потоку, що набігає на циліндр, 12 – ККД

	Re	50	100	200	400
1	$V, \frac{M}{c}$	0.0755	0.151	0.302	0.604
2	$M$	$2.28 \cdot 10^{-4}$	$4.55 \cdot 10^{-4}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$18.2 \cdot 10^{-4}$
3	$f, \text{Гц}$	0.949	2.51	5.94	13.28
4	$\frac{d}{\lambda} = \frac{df}{c}$	$0.286 \cdot 10^{-4}$	$0.75 \cdot 10^{-4}$	$1.78 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
5	$\max  \tilde{F}_y , \text{Н}$	$0.02 \cdot 10^{-4}$	$0.437 \cdot 10^{-4}$	$3.66 \cdot 10^{-4}$	$23.6 \cdot 10^{-4}$
6	$\max  \tilde{F}_y , \text{Н}$	$0.34 \cdot 10^{-4}$	$1.35 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$	$21.5 \cdot 10^{-4}$
7	$\max  p , \text{Па}$	$1.128 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-6}$	$13.8 \cdot 10^{-6}$	$22.5 \cdot 10^{-6}$
8	$I = \frac{\max p^2}{\rho c}, \frac{\text{кГ}}{\text{с}^3}$	$0.32 \cdot 10^{-14}$	$0.1 \cdot 10^{-12}$	$0.475 \cdot 10^{-12}$	$1.26 \cdot 10^{-12}$
9	$I$	$0.3 \cdot 10^{-16}$	$0.2 \cdot 10^{-14}$	$0.12 \cdot 10^{-12}$	$7.7 \cdot 10^{-12}$
10	$W_{\text{ак}} = I \cdot S, \text{Вт}$	$1.0 \cdot 10^{-14}$	$0.312 \cdot 10^{-12}$	$1.5 \cdot 10^{-12}$	$3.98 \cdot 10^{-12}$
11	$W_{\text{ГД}}, \text{Вт}$	$0.259 \cdot 10^{-5}$	$2.07 \cdot 10^{-5}$	$16.6 \cdot 10^{-5}$	$133 \cdot 10^{-5}$
12	$\frac{W_{\text{ак}}}{W_{\text{ГД}}}$	$0.38 \cdot 10^{-8}$	$1.51 \cdot 10^{-8}$	$0.9 \cdot 10^{-8}$	$0.3 \cdot 10^{-8}$

Табл. 2.4: Наближені значення показника степеня  $q$  в припущенні, що  $\max |\tilde{F}_y| \sim V^q$

Re	50 – 100	100 – 200	200 – 400
$q$	4.35	3.1	2.7

Табл. 2.5: Амплітуди гармонік  $p_n$

Re	$\max  p_1 $	$\max  p_2 $
50	$1.128 \cdot 10^{-6}$	$1.78 \cdot 10^{-8}$
100	$6.3 \cdot 10^{-6}$	$1.46 \cdot 10^{-7}$
200	$1.377 \cdot 10^{-5}$	$1.04 \cdot 10^{-6}$
400	$2.25 \cdot 10^{-5}$	$2.57 \cdot 10^{-6}$

ним об'ємом використовувалась загальна процедура Гауса, згідно якої інтеграл за об'ємом представляється через інтеграл по поверхні елементарної комірки, а значення функції на поверхні комірки інтерполюється зі значень функції в центроїдах сусідніх комірок. Для інтерполяції конвективних членів використовувалась TVD схема, імплементована в [143] (limitedLinearV) яка згідно класифікації [132] відповідає узагальненій кусково-лінійній схемі Chakravarthy - Osher [129]. На ортогональних ділянках сітки нормальні градієнти швидкості на поверхні комірки, необхідні при обчисленні дифузійних членів по теоремі Гауса, обчислювались зі значень швидкості в центроїдах сусідніх комірок за схемою другого порядку. На неортогональних ділянках сітки використовувалась ітераційна процедура корекції похибки, викликаної неортогональністю сітки [211]. В якості схеми дискретизації похідної за часом використовувалась неявна триточкова несиметрична схема другого порядку з різницями назад (backward differencing).

Для зв'язаного розрахунку поля швидкості і тиску використовувалась процедура PISO (pressure implicit with splitting of operators), запропонована Issa [137], з числом коректорів 4. Детальний опис процедури PISO може бути

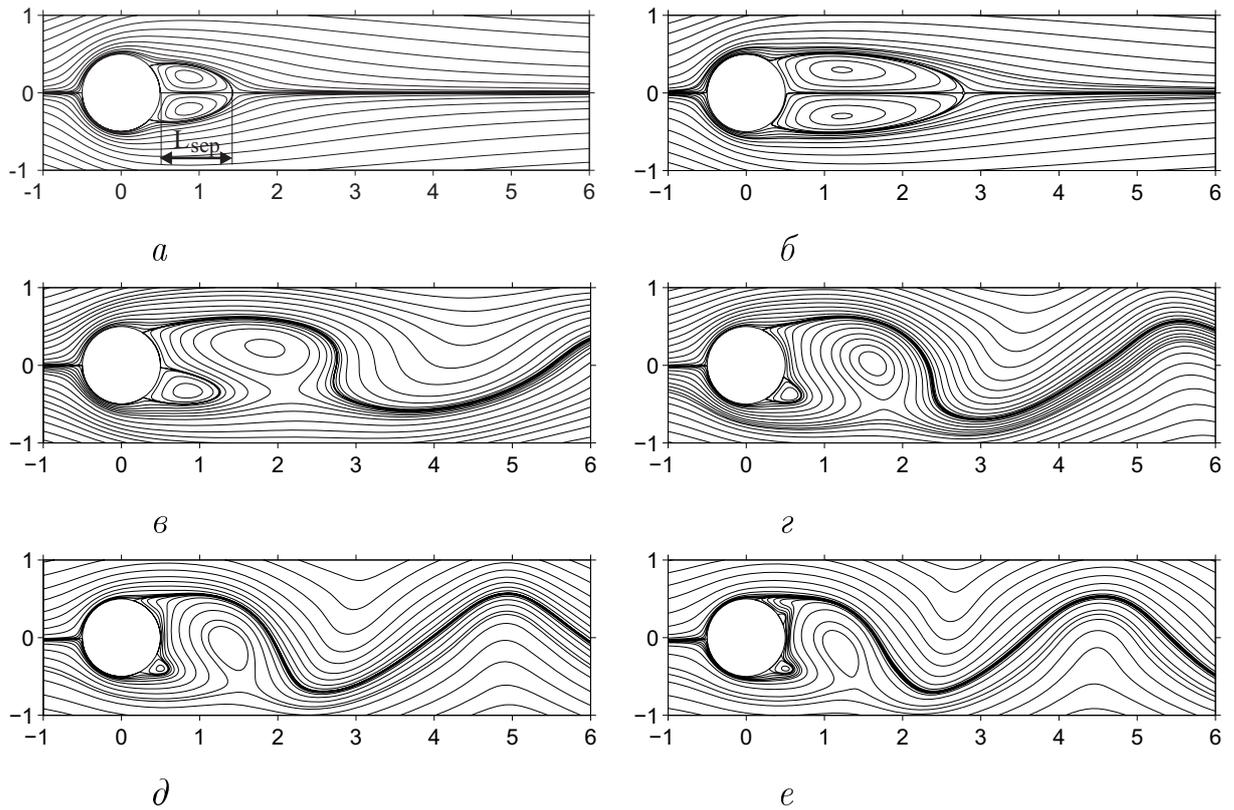


Рис. 2.1: Миттєві лінії струму:  $a - \text{Re} = 20$ ,  $б - \text{Re} = 40$ ,  $в - \text{Re} = 50$ ,  $г - \text{Re} = 100$ ,  $д - \text{Re} = 200$ ,  $е - \text{Re} = 400$

також знайдений в учбовій літературі з обчислювальної гідромеханіки (див. наприклад, [95, 141]). Для розв'язання отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь використовувались солвери PCG і PBiCG - ітераційні солвери, що використовують методи спряжених і біспряжених градієнтів з передобумовленням для симетричних і антисиметричних матриць, відповідно. В якості передобумовлювача були обрані процедури DIC (передобумовлювач, що базується на спрощеній схемі неповної факторизації Холецького) і DILU (передобумовлювач, що базується на спрощеній неповній LU факторизації) для симетричних і антисиметричних матриць, відповідно [149].

### 2.3 Результати розрахунку течії. Верифікація отриманих результатів

Обтікання кругового циліндра потоком рідини розглядалося у великій

кількості експериментальних і розрахункових робіт (див. [152] і широку бібліографію, наведену в цій роботі). Картина обтікання циліндра потоком істотно залежить від числа Рейнольдса, визначеного по діаметру циліндра. Відомо, що ламінарна течія за циліндром, залежно від значення числа Рейнольдса, може мати три режими: безвідривна стаціонарна течія, стаціонарний відрив і періодична відривна течія. Безвідривний режим реалізується за числа Рейнольдса, що не перевищує деякого відносно невеликого порогового значення. При збільшенні числа Рейнольдса, під дією градієнта тиску і в'язких сил ламінарний примежовий шар відривається від поверхні циліндра, за циліндром утворюється пара рециркуляційних вихорів. Експериментальні роботи вказують на можливість відриву при  $Re \approx 4 - 5$ , тоді як більшість чисельних розрахунків дає  $Re \approx 5 - 7$  [212], [213].

З метою верифікації використаних чисельних методів в таблиці 2.1 приведені характеристики стаціонарної течії, такі як коефіцієнт лобового опору  $C_x$  і довжина відривної зони  $L_{sep}$ , вимірювана від задньої критичної точки, тобто відстань від кормової точки циліндра до точки перетину ліній струму за вихорами (див. мал. 2.1 а, б). Слід зазначити хороший збіг з результатами, приведеними в роботі [152], значення яких відрізняються від наших менш, ніж на один відсоток.

При подальшому збільшенні числа Рейнольдса розміри симетричної вихрової пари, що утворилася за циліндром, зростають і вихори витягуються уздовж напрямку потоку. При цьому течія залишається стаціонарною до досягнення числом Рейнольдса деякого критичного значення. Це критичне значення приблизно дорівнює 40. При подальшому збільшенні числа Рейнольдса, течія стає нестійкою по відношенню до малих збурень, симетрія течії в сліді за циліндром порушується і течія набуває асиметричного характеру. При числі Рейнольдса близько 50 в сліді за циліндром виникають коливання, які посилюються із зростанням числа Рейнольдса. Коли число Рейнольдса досягає близько 60, течія характеризується періодичним відривом вихорів, які зносяться течією. По черзі відриваючись то з одного, то з іншого боку від кормової точки циліндра, вихори дрейфують вниз за пото-

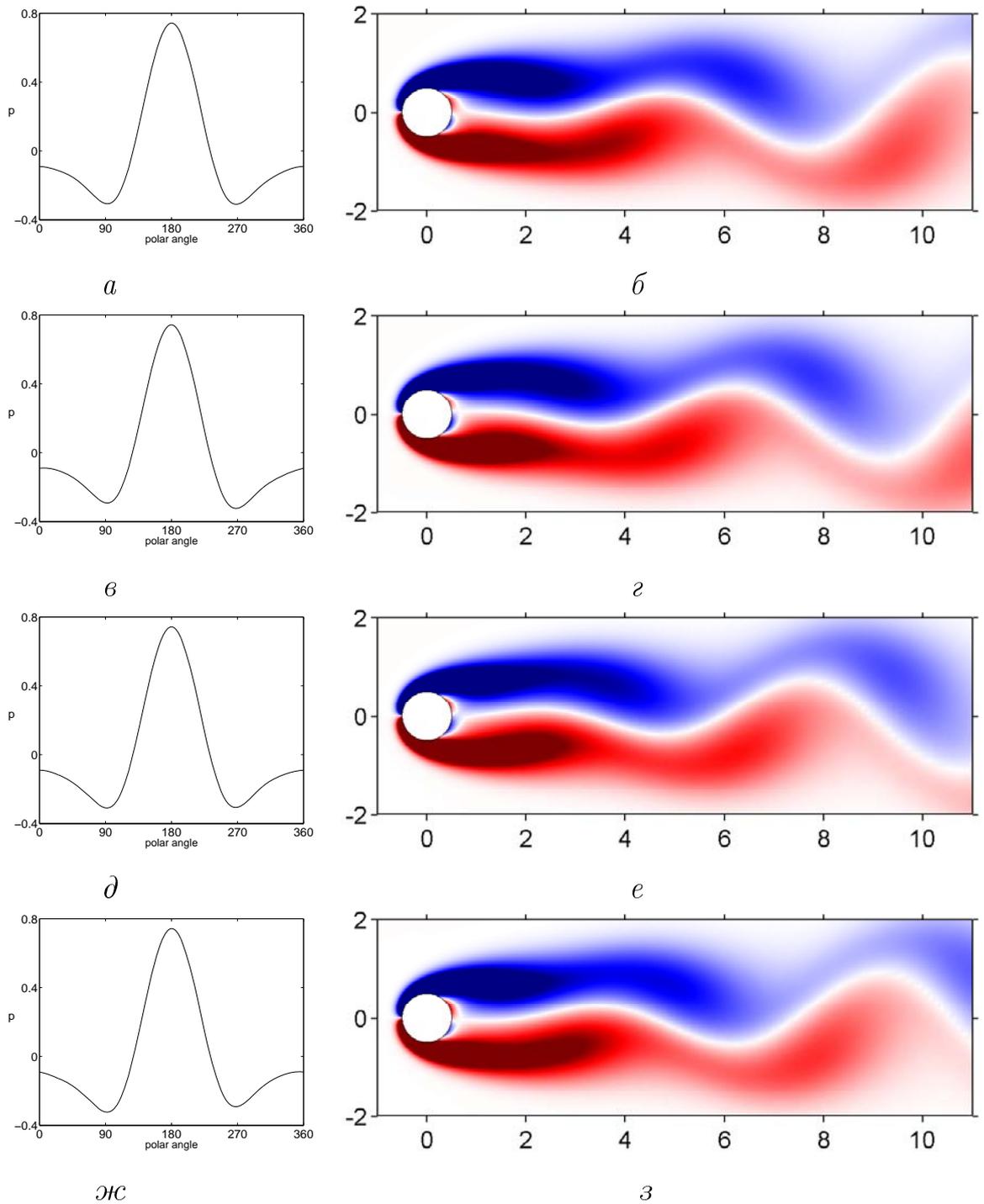


Рис. 2.2: Течія при  $Re = 50$ : ліва колонка – розподіл тиску на поверхні циліндра, права колонка – поле завихреності; червоний колір відповідає додатній завихреності, синій – від’ємній:  $a, б - t = 0$ ,  $в, г - t = T/4$ ,  $д, е - t = T/2$ ,  $ж, з - t = 3T/4$

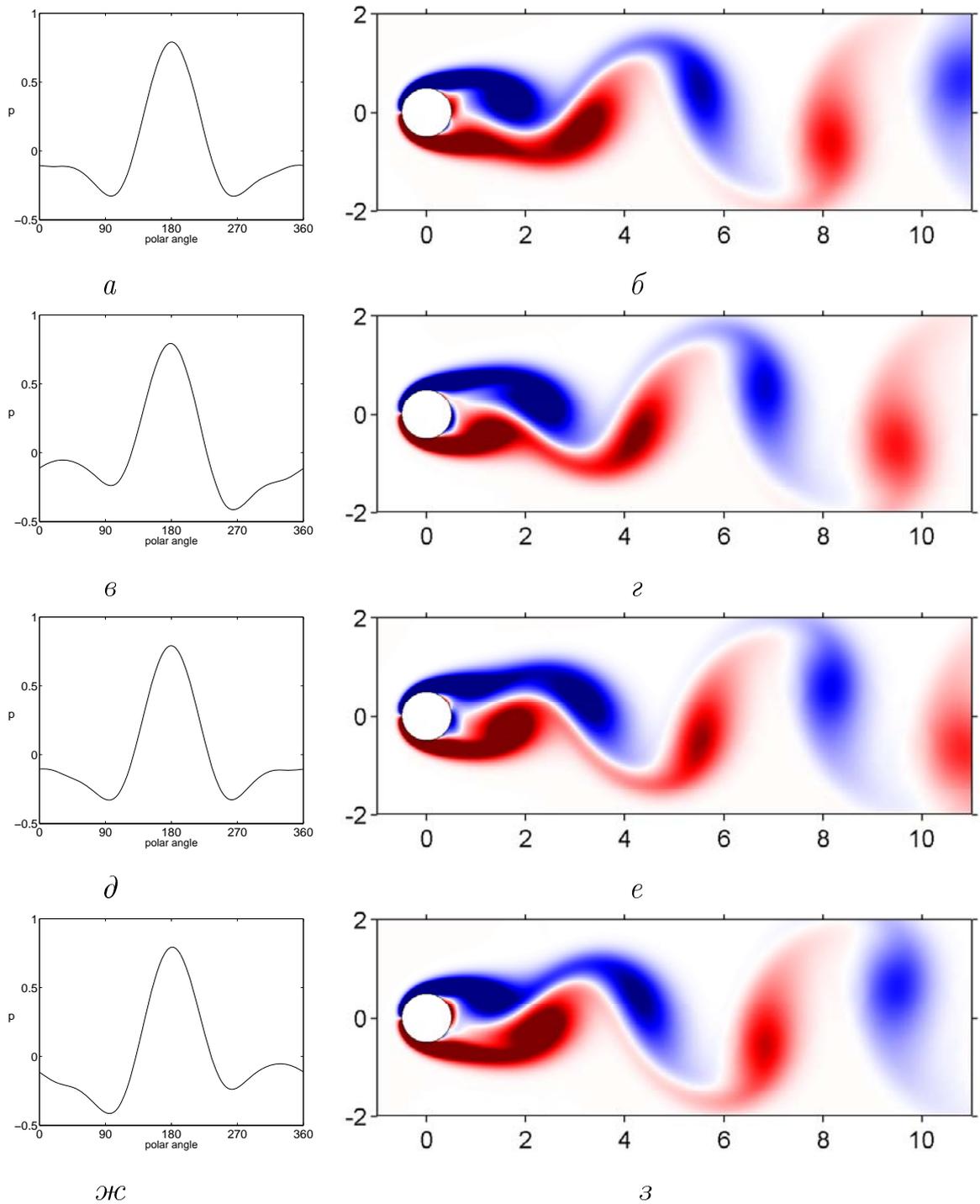


Рис. 2.3: Течія при  $Re = 100$ : ліва колонка – розподіл тиску на поверхні циліндра, права колонка – поле завихреності; червоний колір відповідає додатній завихреності, синій – від’ємній: *a*, *б* –  $t = 0$ , *в*, *г* –  $t = T/4$ , *д*, *е* –  $t = T/2$ , *ж*, *з* –  $t = 3T/4$

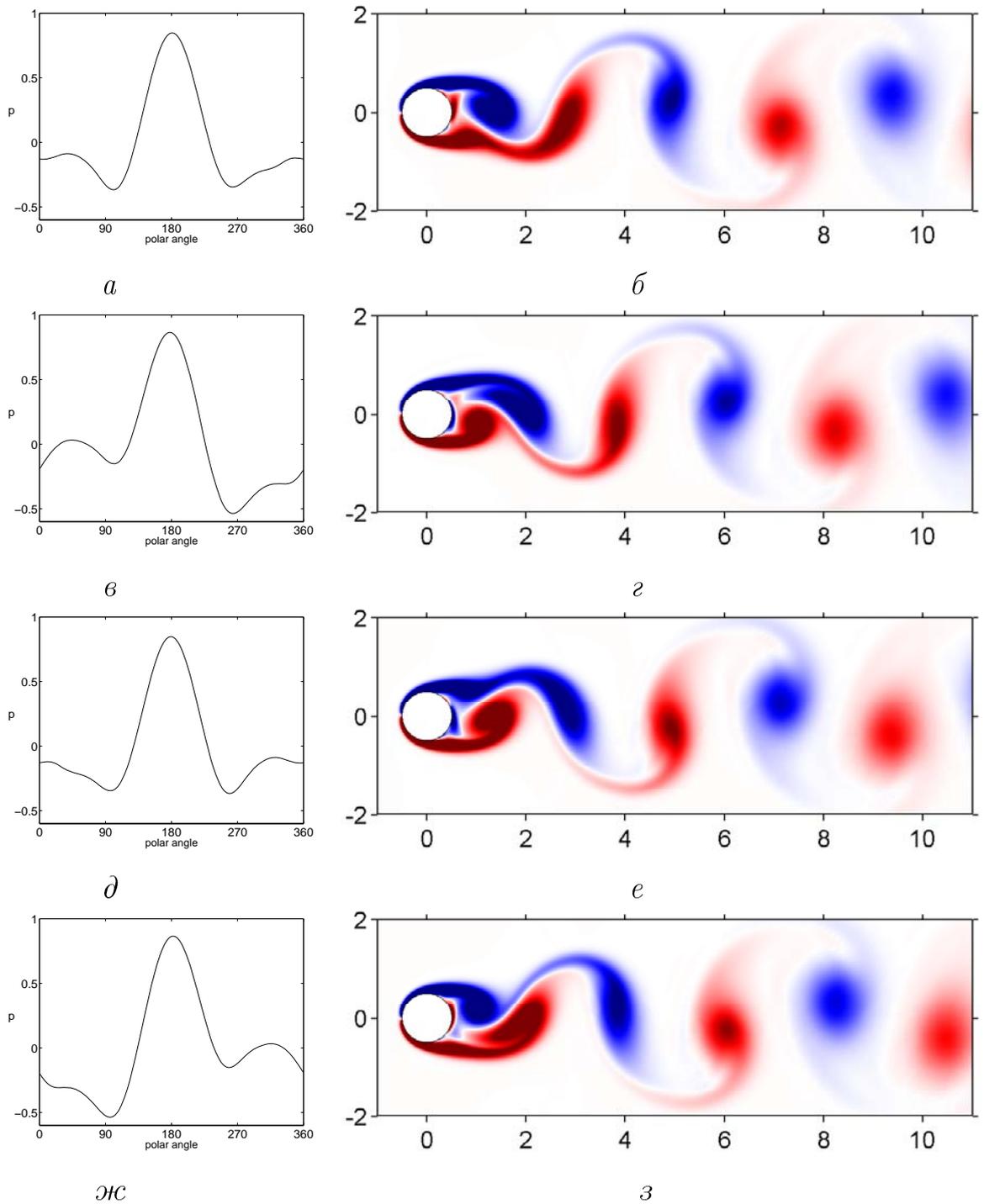


Рис. 2.4: Течія при  $Re = 200$ : ліва колонка – розподіл тиску на поверхні циліндра, права колонка – поле завихреності; червоний колір відповідає додатній завихреності, синій – від’ємній:  $a, б - t = 0$ ,  $в, г - t = T/4$ ,  $д, е - t = T/2$ ,  $ж, з - t = 3T/4$

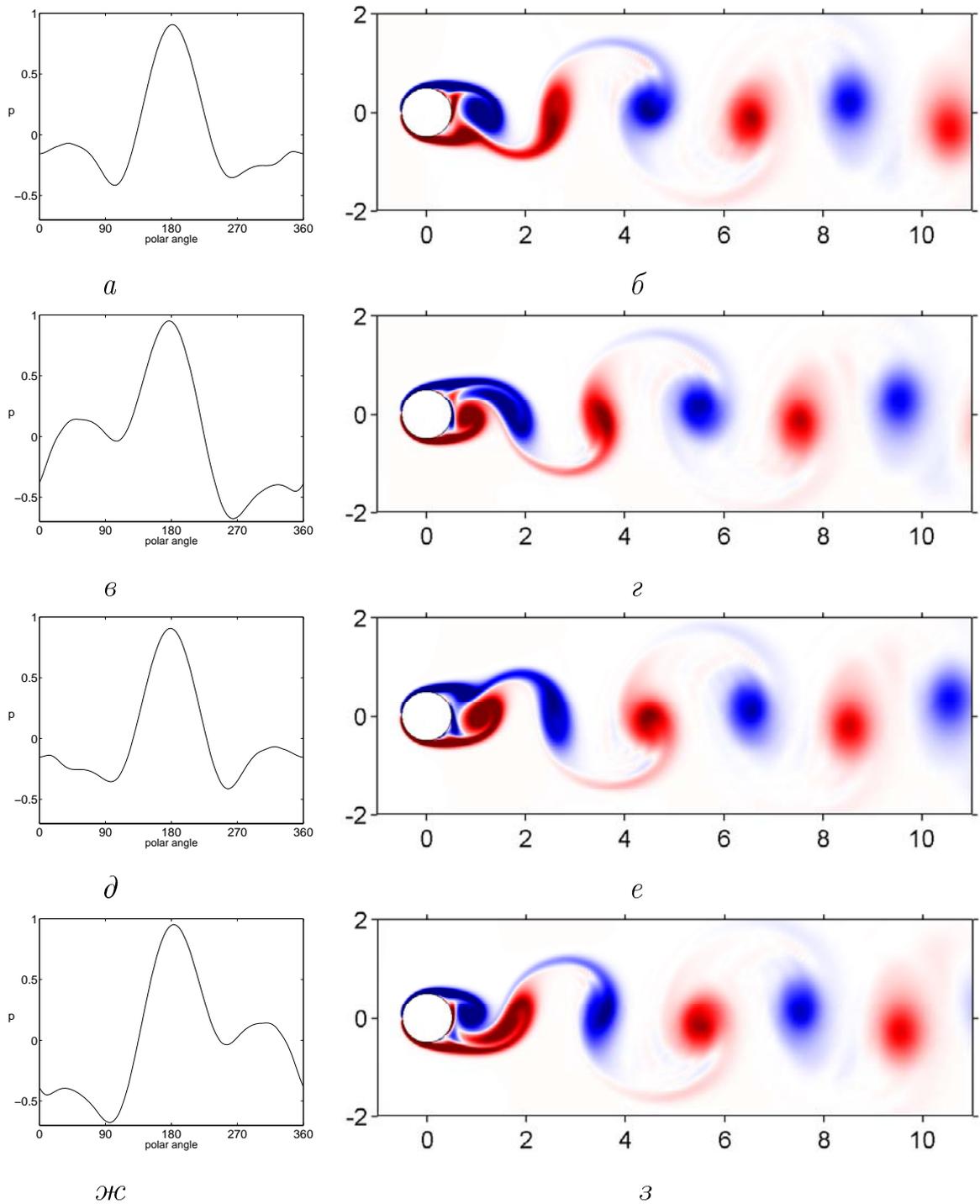


Рис. 2.5: Течія при  $Re = 400$ : ліва колонка – розподіл тиску на поверхні циліндра, права колонка – поле завихреності; червоний колір відповідає додатній завихреності, синій – від’ємній: *a, б* –  $t = 0$ , *в, г* –  $t = T/4$ , *д, е* –  $t = T/2$ , *ж, з* –  $t = 3T/4$

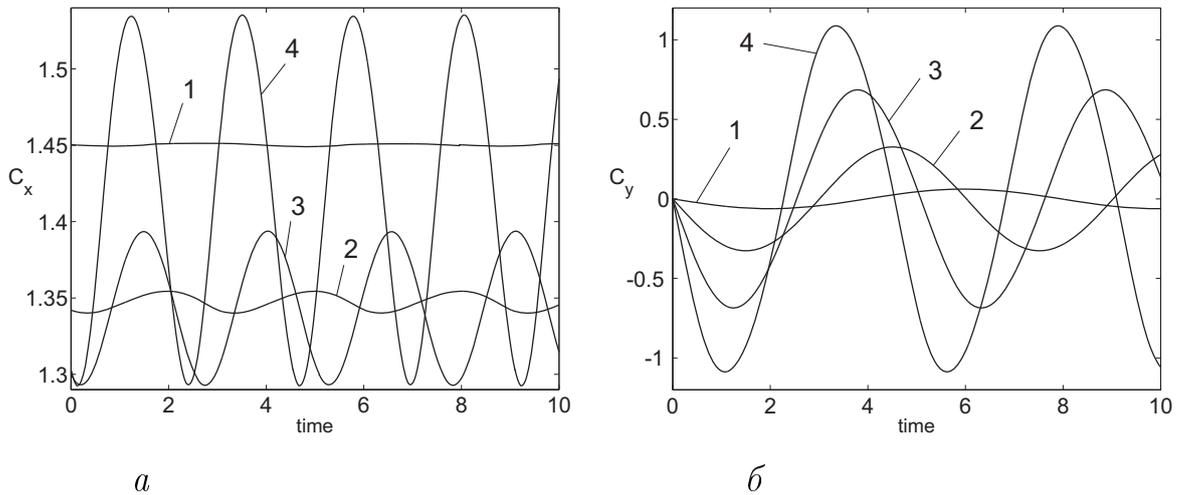


Рис. 2.6: Періодична зміна у часі сил, прикладених до циліндру: *a* – коефіцієнт лобового опору, *б* – коефіцієнт підйомної сили; 1 –  $Re = 50$ , 2 –  $Re = 100$ , 3 –  $Re = 200$ , 4 –  $Re = 400$

ком, утворюючи регулярну структуру, відому як вихрова доріжка Кармана. Фізику процесу відриву вихорів детально викладено в [2].

Така картина течії продовжує зберігатися при збільшенні числа Рейнольдса приблизно до  $10^4$ . Проте, необхідно виділити два режими періодичного вихрового руху залежно від значення числа Рейнольдса. В діапазоні  $40 \lesssim Re \lesssim 300$  реалізується стійкий ламінарний режим течії, при якому немає необхідності враховувати вплив турбулентних пульсацій. У даній роботі ми використовуємо метод прямого чисельного моделювання також для  $Re = 400$  і показуємо, що точність отриманих результатів є прийнятною для цієї задачі. При більш високих числах Рейнольдса виникає турбулізація течії і, отже, необхідно використовувати методи моделювання турбулентності. Процес зриву вихорів стає менш організованим, дещо порушується регулярність зриву великомасштабних вихорів, що викликає широкосмугові пульсації підйомної сили. Проте, навіть при великих числах Рейнольдса в сліді за циліндром існують виразно помітні великомасштабні вихрові структури і приблизно половина енергії турбулентності міститься в цих вихорах [208, 209]. Відомо, що широкосмугові пульсації підйомної сили генерують широкосмуговий шум. Оскільки в цій роботі нас цікавлять еолові тони, ми концентруємо увагу на ламінарних режимах течії.

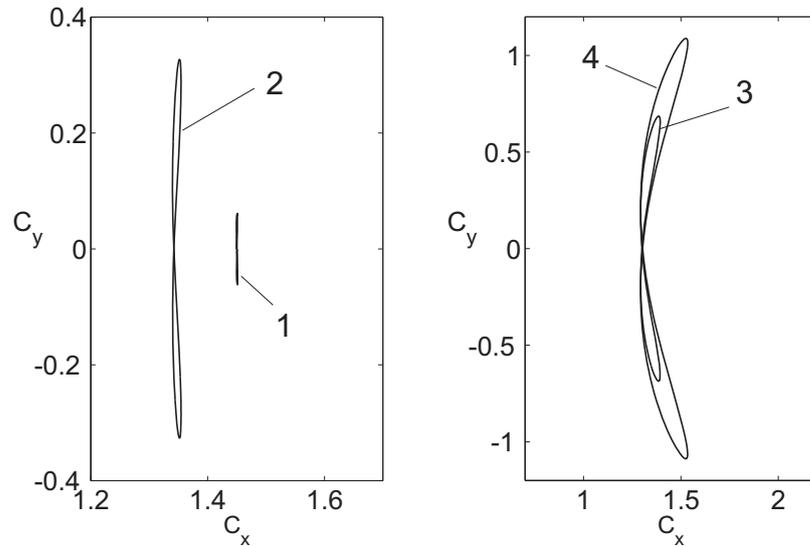
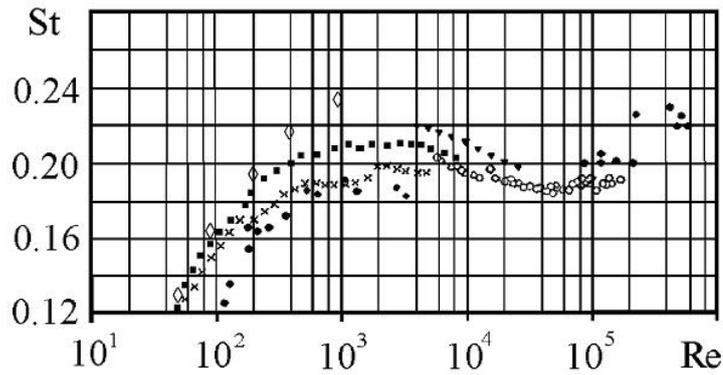


Рис. 2.7: Кінець вектору результуючої сили описує у часі замкнуту лінію, схожу на вісімку: 1 –  $Re = 50$ , 2 –  $Re = 100$ , 3 –  $Re = 200$ , 4 –  $Re = 400$

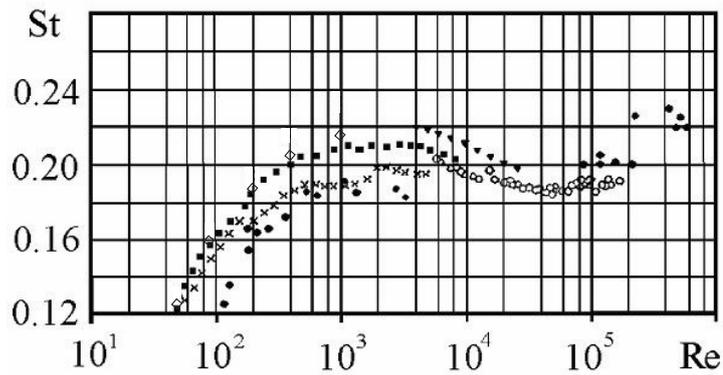
Сказане вище ілюструє рисунок 2.1, на якому наведені лінії струму для різних значень числа Рейнольдса (ми не наводили лінії струму безвідривної течії для  $Re < 5$ ). При стаціонарному обтіканні циліндра потоком лінії струму співпадають з траєкторіями частинок середовища, що рухаються. У разі ж періодичного процесу ( $Re > 40$ ) на рисунку зображені миттєві лінії струму у той момент, коли коефіцієнт підйомної сили  $C_y = 0$  і міняє знак з додатного на від'ємний.

Обтікання циліндра при значеннях числа Рейнольдса вище за критичне ( $Re > 40$ ) стає періодичним у часі і характеризується відривом вихорів і їх знесенням вниз за потоком. На рисунку 2.2 показана течія упродовж одного періоду при  $Re = 50$ . У правій колонці представлено поле завихреності<sup>2</sup> в чотири моменти часу з інтервалом  $T/4$ . А в лівій колонці представлений розподіл тиску  $p$  по поверхні циліндра. Полярна кутова координата відраховується від додатного напрямку осі  $X$ , тобто від кормової точки циліндра. При подальшому збільшенні числа Рейнольдса (див. рисунок 2.3, 2.4, 2.5) зменшується розмір вихорів, що відриваються, і відстань між вихорами в сліді за циліндром. Видно, що розподіл тиску по поверхні циліндра також змінюється періодично у часі. Причому розподіли тиску в моменти часу  $t_1$ ,

<sup>2</sup>В електронному варіанті роботи всі рисунки представлені в кольоровому форматі



а



б

Рис. 2.8: Залежність числа Струхала від числа Рейнольдса. Порівняння розрахункових даних, представлених в цій статті, з експериментальними даними, отриманими різними авторами (див. [2, 214]): а – розрахункова сітка містить 230400 елементарних комірок, б – розрахункова сітка містить 921600 елементарних комірок; хрестики – Strouhal (1878), трикутники – Niebtove (1919), точки – Relf (1924), квадратики – Roshko (1924), кола – UTIA (1955), ромби – розрахункові дані, представлені в даній роботі ( $Re = 50; 100; 200; 400; 1000$ )

$t_2$ , що відрізняються на півперіоду ( $t_2 = t_1 + T/2$ ), будуть симетричні відносно горизонтальної осі  $y = 0$ . Слід також відзначити, що хоча при  $Re = 50$  течія в сліді за циліндром буде періодичною, коливання тиску на поверхні циліндра слабо помітні. При подальшому збільшенні числа Рейнольдса амплітуда осциляцій тиску на поверхні циліндра зростає, також як і діапазон значень розподілу тиску (різниця між максимумом і мінімумом тиску на циліндрі).

Періодичний характер течії в сліді за циліндром приводить до того що сили, прикладені до циліндра, також змінюються періодично у часі, причо-

му взаємодія вихорів практично не впливає на передню критичну точку, в силу її віддалення від області відриву вихорів. На рисунках 2.6 а, б показана зміна у часу коефіцієнтів лобового опору  $C_x$  і підйомної сили  $C_y$ , відповідно. Очевидно, що дія сил змінюється періодично. Причому період зміни лобового опору удвічі менше, ніж період зміни підйомної сили. Іншими словами, частота коливання сили, що діє на циліндр, в горизонтальному напрямку удвічі вища за частоту коливання цієї сили у вертикальному напрямку. Це приводить до того, що кінець вектору результуючої сили  $\mathbf{R} = C_x \mathbf{i}_x + C_y \mathbf{i}_y$  описує з часом замкнуту лінію, схожу на вузьку вісімку (див. рисунок 2.7). При досить великих значеннях числа Рейнольдса ( $Re = 200; 400$ ) петлі цієї вісімки істотно деформовані і витягнуті у напрямку руху потоку.

Коефіцієнти лобового опору і підйомної сили формально можуть бути представлені у вигляді суми постійної і осцилюючої частин:

$$C_x = \bar{C}_x + \tilde{C}_x, \quad C_y = \bar{C}_y + \tilde{C}_y, \quad (2.5)$$

де  $\bar{C}_x, \bar{C}_y$  – сталі складові сил, прикладених до циліндра (очевидно, що в даній задачі  $\bar{C}_y = 0$ ), а  $\tilde{C}_x, \tilde{C}_y$  – осцилюючі складові сил. В таблиці 2.2 наведені значення постійної складової  $\bar{C}_x$  і амплітуди осцилюючих складових  $\tilde{C}_x, \tilde{C}_y$ , а також відношення цих амплітуд. Видно, що із зростанням числа Рейнольдса амплітуда коливань подовжньої відносно напрямку потоку складової  $\tilde{C}_x$  зростає швидше, ніж амплітуда коливань поперечної складової  $\tilde{C}_y$ . Проте, навіть при  $Re = 400$ , амплітуда  $\max |\tilde{C}_x|$  залишається на порядок меншою, ніж  $\max |\tilde{C}_y|$ . Також в таблиці 2.2 наведені значення числа Струхалю  $St = d/(VT)$ . Перш за все відзначимо хороший збіг з результатами, наведеними в роботі [152]. Наші результати для  $Re = 50; 100; 200$ , що представлені в даній роботі, відрізняються від результатів статті [152] не більше, ніж на 3%.

На рисунку 2.8 а представлена залежність числа Струхалю від числа Рейнольдса. Розрахункові дані, отримані нами, порівнюються з експериментальними результатами, отриманими раніше різними авторами [2, 214]. Видно, що при  $Re = 50; 100; 200$  розрахункові дані дають хороший збіг з експериментальними. При  $Re = 400$  спостерігається деяка розбіжність з експеримен-

тальними даними. Можна припустити, що починає позначатися турбулізація течії, що призводить до зміщення точки відриву потоку і зменшенню частоти зриву вихорів. Проте, відхилення розрахункових даних від експериментальних (Roshko, 1924) все ще не перевищує 10% і, отже, використання методів прямого чисельного моделювання на використовуваній сітці можна вважати прийнятним. При  $Re = 1000$  течія буде турбулентною і, отже, в цьому випадку для адекватного описання процесу необхідно або використати методи моделювання турбулентності, або покращувати розрахункову сітку. З рисунку 2.8 а видно, що при  $Re = 1000$  відхилення розрахункових даних від експериментальних складає близько 20%, що можна вже вважати неприйнятним.

На цьому прикладі можна чітко проілюструвати, що в двовимірних задачах при помірних числах Рейнольдса задовільної точності можна досягти простим покращенням розрахункової сітки, тобто збільшенням числа контрольних об'ємів розрахункової сітки. Для того, щоб переконатися в цьому, ми розбили кожну елементарну комірку розрахункової сітки на дві частини по кожній координаті. Таким чином, число комірок в розрахунковій сітці збільшилося у чотири рази і склало 921600 контрольних об'ємів. На рисунку 2.8 б представлена залежність числа Струхаля від числа Рейнольдса. Розрахункові дані, отримані нами з використанням деталізованої сітки, порівнюються з експериментальними результатами, отриманими раніше різними авторами [2, 214]. Видно, що тепер точність отримуваних результатів стає прийнятною і при  $Re = 400$ , і навіть при  $Re = 1000$ . Відхилення розрахункових даних від експериментальних (Roshko, 1924) не перевищує 5% при  $Re = 400$  і не перевищує 10% при  $Re = 1000$ . Отже, використання методів прямого чисельного моделювання на покращеній сітці можна вважати прийнятним. У разі потреби подальшого покращення точності розрахунків можна ще раз розбити кожний контрольний об'єм на дві частини по кожній координаті. В цьому випадку загальна кількість елементарних комірок розрахункової сітки складе 3686400. При сучасному розвитку комп'ютерної техніки і використанні технологій паралельних обчислень таке число комірок

розрахункової сітки є цілком прийнятним.

Підсумовуючи, можна зробити наступний висновок. Порівняльний аналіз отриманих нами розрахункових гідродинамічних характеристик течії з раніше отриманими іншими авторами розрахунковими даними, а також з численними експериментальними даними показує, що в діапазоні  $Re \leq 400$  спостерігається досить хороший їх збіг. Так в діапазоні  $10 \leq Re \leq 40$  відмінність не перевищує 1%, в діапазоні  $50 \leq Re \leq 200$  – 3%, а при  $Re = 400$  – 10%. При покращенні розрахункової сітки, тобто збільшенні числа комірок в чотири рази, прийнятна точність розрахунків може бути досягнута і для  $Re = 1000$ . Цей факт дає підстави стверджувати, що побудований нами алгоритм чисельного розв'язання задачі дозволяє адекватно описати досліджувану течію у вказаному діапазоні чисел Рейнольдса.

## 2.4 Постановка акустичної задачі і її аналітичний розв'язок

При розгляді задачі обтікання циліндра, збурення потоку можна умовно розділити на дві складові. Перша - це збурення поля тиску на поверхні циліндра. Починаючи з деякого порогового значення числа Рейнольдса ( $Re \approx 40$ ), ці збурення мають періодичний характер. Вони самоорганізуються в деяку складну автоколивальну систему, коливання якої і викликають появу тонального звуку [17], [2]. Друга складова – це збурення, що розвиваються в турбулентному сліді за циліндром, внаслідок чого виникає широкосмугвий шум [2], [59]. Механізм виникнення шуму принципово відрізняється від механізму виникнення тонального звуку і пов'язаний із специфічними безладними коливаннями і взаємодією частинок середовища в турбулентному сліді. Як показано в численних дослідженнях (див., наприклад, [59] і широку бібліографію в цій книзі), потужність тонального звуку суттєво перевищує потужність широкосмугового шуму. У даному дослідженні ми приділяємо увагу першій складовій і, отже, концентруємо увагу на описанні генерації і

поширення тонального звуку. Додержуючись основних положень акустичної аналогії Лайтхілла [215], [216], а також її узагальнення на випадок присутності меж в потоці, зробленого Керлом [217], ми не будемо враховувати зворотну реакцію звуку на характер потоку, поширення звуку зі змінною швидкістю усередині потоку (рефракцію звуку), а також загасання звуку.

Таким чином, дотримуючись ідеї, що викладена вище, з чисельного розв'язку відповідної задачі гідромеханіки, представленого в попередньому підрозділі, ми маємо розподіл тиску на поверхні циліндра, який періодично змінюється у часі з періодом  $T$ . Ці пульсації тиску на поверхні циліндра, природно, збуджують звукові коливання в оточуючому середовищі [2]. При цьому, якщо числа Маха відносно невеликі, рухом потоку можна знехтувати і вважати, що звук поширюється так само, як в нерухомому середовищі. Слід також відзначити, що хвильовий розмір джерела дуже малий [2].

Тоді звукове поле поза циліндром може бути знайдене з відповідної граничної задачі для хвильового рівняння [218]. Гранична умова має вигляд:

$$p(r, \phi, t) = \zeta(\phi, t), \quad \text{при } r = d/2, \quad (2.6)$$

де  $(r, \phi)$  – полярні координати з початком координат в центрі циліндра,  $\zeta(\phi, t)$  – розподіл тиску на поверхні циліндра, створений потоком, і відомий з чисельного розв'язку відповідної задачі гідродинаміки, представленого в попередньому підрозділі.

Оскільки функція  $\zeta(\phi, t)$ , що задана на поверхні, являється періодичною з періодом  $T$ , розв'язок сформульованої граничної задачі може бути представлено у вигляді ряду Фур'є по часовій координаті:

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} p_n(r, \phi), \quad (2.7)$$

де  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$  – кутова частота,  $f = \text{St}V/d$  – частота еолових тонів, а  $p_n(r, \phi)$  – розв'язок відповідного рівняння Гельмгольца, який може бути представлений у вигляді ряду Фур'є по кутовій координаті [218]:

$$p_n = \sum_{m=0}^{\infty} [A_{nm} \cos m\phi + B_{nm} \sin m\phi] H_m^{(1)}(k_n r), \quad (2.8)$$

де  $k_n = n\omega/c$  – хвильове число,  $c$  – швидкість звуку в середовищі,  $H_m^{(1)}$  – функція Ханкеля першого роду. Розкладаючи також праву частину граничної умови (2.6) в ряди Фур'є по часовій і кутовій координатах і прирівнюючи коефіцієнти при відповідних членах, визначаємо невідомі коефіцієнти розв'язку (2.8):

$$\begin{aligned} A_{n0} &= \frac{1}{2\pi T} \int_0^T e^{in\omega t} \int_0^{2\pi} \zeta(\phi, t) d\phi dt, \\ A_{nm} &= \frac{1}{\pi T} \int_0^T e^{in\omega t} \int_0^{2\pi} \zeta(\phi, t) \cos m\phi d\phi dt, \\ B_{nm} &= \frac{1}{\pi T} \int_0^T e^{in\omega t} \int_0^{2\pi} \zeta(\phi, t) \sin m\phi d\phi dt, \end{aligned} \quad (2.9)$$

## 2.5 Розрахунок звукового поля

Розрахунок течії в попередніх підрозділах ми проводили для безрозмірних величин. Для розрахунку ж звукового поля необхідно перейти до розмірних величин. Параметри середовища обираємо такі, як для повітря при температурі 20°C:  $\rho = 1.204$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 1.51 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с,  $c = 332$  м/с. Діаметр циліндра приймемо  $d = 1$  см. Масштаби для швидкості, часу і тиску рівні  $V$ ,  $d/V$ ,  $\rho V^2$ , відповідно. При цьому швидкість незбуреного потоку визначається із заданого значення числа Рейнольдса:  $V = \text{Re } \nu/d$ .

Розмірні характеристики періодичної течії і звуку представлені в таблиці 2.3. Відразу зазначимо, що припущення, які ми поклали в основу нашої моделі, підтверджуються чисельними розрахунками. Зокрема, значення числа Маха і значення хвильового розміру циліндра мають порядок  $10^{-4}$ . Це дає можливість вважати ці параметри малими і підтверджує покладене в основу нашої моделі нехтування впливом руху потоку на акустичне поле, тобто припущення про те, що звук поширюється в такому потоці так само, як і в нерухомому середовищі. Крім того, малі значення числа Маха і хвильового розміру джерела підтверджують правильність розгляду гідродинамічної задачі у рамках моделі в'язкої нестисливої рідини. Відношення повної акусти-

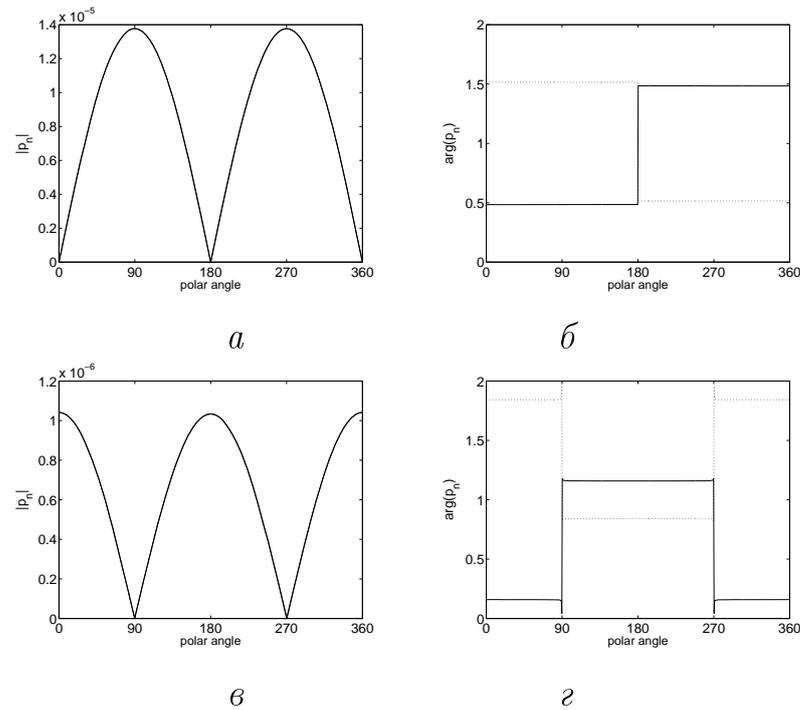


Рис. 2.9: Модуль і фаза перших двох гармонік тиску  $p_n$  на відстані 1 м від центру циліндра. Число Рейнольдса  $Re = 200$ :  $a - |p_n|$  при  $n = \pm 1$ ,  $б - \arg(p_n)$  при  $n = \pm 1$ , суцільна лінія відповідає випадку  $n = 1$ , пунктирна –  $n = -1$ , одиниця по вертикальній осі відповідає  $\pi$  рад.,  $в - |p_n|$  при  $n = \pm 2$ ,  $г - \arg(p_n)$  при  $n = \pm 2$ , суцільна лінія відповідає випадку  $n = 2$ , пунктирна –  $n = -2$ , одиниця по вертикальній осі відповідає  $\pi$  рад.

чної потужності еолового тону до потужності потоку, що набігає на циліндр (іншими словами, ККД випромінювача), має порядок  $10^{-8}$ , а інтенсивність випромінюваного звуку (сила звуку) має порядок  $10^{-14} - 10^{-12}$ . Такі малі значення ККД випромінювача і інтенсивності випромінюваного звуку говорять про справедливість закладених в основу нашої моделі базових положень акустичної аналогії Лайтхілла [215, 216] і її узагальнення, зробленого Керлом [217], про те, що зворотним впливом звуку на характеристики потоку середовища можна знехтувати.

Слід зазначити, що наближена формула Філіпса (2.3) для обчислення амплітуди коливання підйомної сили  $\max |\tilde{F}_y| \sim V^2$  не підтверджується при малих числах Рейнольдса. Лише при  $Re = 400$  ця наближена формула дає прийнятний результат. Тоді як при  $Re = 50$  значення, які дає наближена

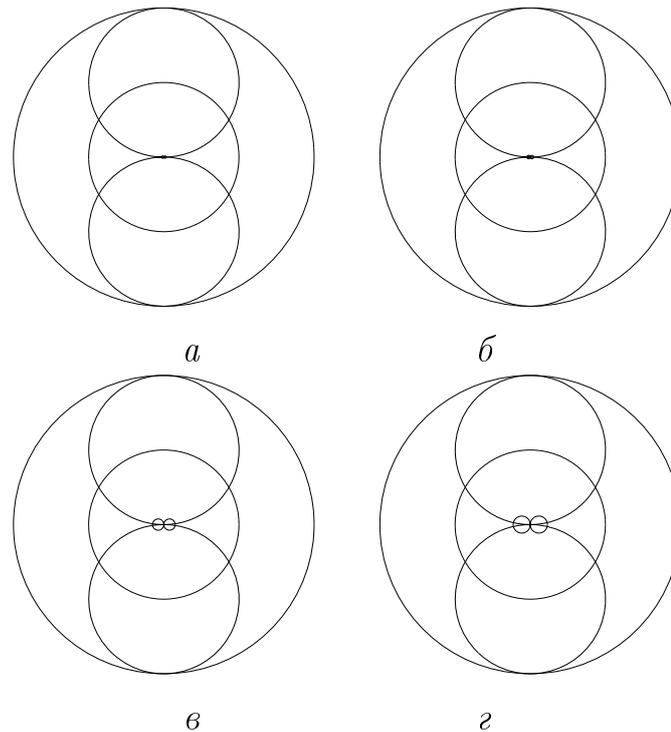


Рис. 2.10: Нормована діаграма спрямованості еолових тонів, що виникають за рахунок осциляцій підйомної сили і сили опору:  $a - \text{Re} = 50$ ,  $б - \text{Re} = 100$ ,  $в - \text{Re} = 200$ ,  $г - \text{Re} = 400$

формула (2.3), відрізняються від розрахункових даних більш ніж на порядок. Взагалі, видно, що при наближеному представленні амплітуди пульсуючої підйомної сили у вигляді степеневі функції від швидкості потоку, що набігає,  $\max |\tilde{F}_y| \sim V^q$  показник степеня залежить від числа Рейнольдса  $q = f(\text{Re})$ , причому  $q$  набуває значень близьких до 2 лише при досить великих числах Рейнольдса. Аналогічний висновок можна зробити і по відношенню до наближеної формули для обчислення інтенсивності звуку у вигляді шостого степеня швидкості потоку, що набігає,  $I \sim V^6$ , також запропонованої Філіпсом. Така наближена формула дає неточні результати, особливо при невеликих числах Рейнольдса. При представленні ж інтенсивності звуку у вигляді степеневі функції від швидкості потоку  $I \sim V^s$  показник степеня також являється функцією числа Рейнольдса  $s = f(\text{Re})$ .

Поле звукового тиску, породжуване періодичним зривом вихорів з поверхні циліндра, описується розв'язком (2.7) – (2.9). На рисунку 2.9 представлені модуль і фаза перших двох гармонік акустичного тиску  $p_1$  і  $p_2$  на

відстані 1 м від центру циліндра для випадку  $Re = 200$ . Видно, що перша гармоніка  $p_1$ , що відповідає коливанням з періодом  $T$ , представляє собою коливання у вертикальному напрямку. Тоді як друга гармоніка  $p_2$ , що відповідає коливанням з періодом  $T/2$ , представляє коливання в горизонтальному напрямку. Такий результат представляється цілком природним, якщо взяти до уваги, що період коливання лобового опору дорівнює  $T/2$ , а період коливання підйомної сили –  $T$  (рисунок 2.6). Слід також зазначити, що фаза коливань має антисиметричний характер відносно горизонтальної осі у випадку  $p_1$ , що пов'язане з тим, що відрив вихорів відбувається не одночасно, а по черзі, і навпаки, симетричний у разі  $p_2$ .

В силу описаних вище причин автоколивальний процес, що виникає при обтіканні циліндра потоком, є акустичним джерелом (еолового звуку) дипольного типу. Для першої гармоніки  $p_1$  акустична вісь джерела перпендикулярна напрямку потоку. Тоді як для другої гармоніки  $p_2$  акустична вісь спрямована вздовж потоку. На рисунку 2.10 зображена нормована діаграма спрямованості породжуваного потоком звуку. Ці дані повністю узгоджуються з експериментальною діаграмою спрямованості, представленою в [219], а також підтверджуються результатами, отриманими пізніше іншими авторами [23, 58, 220]. Слід відзначити, що із зростанням числа Рейнольдса вклад гармоніки  $p_2$ , викликаній осциляцією сили лобового опору, зростає. В таблиці 2.5 представлені амплітуди двох гармонік  $p_1$  і  $p_2$  для чотирьох значень числа Рейнольдса. Видно, що якщо при  $Re = 50$  відношення амплітуд першої і другої гармонік складає 63.37, то при  $Re = 400$  – лише 8.75.

Повернемося до виразу (2.8) і звернемо увагу на той факт, що ця сума по суті містить нескінченний набір акустичних джерел різних типів<sup>3</sup> – диполь ( $m = 1$ ), квадруполь ( $m = 2$ ), а також мультиполі вищих порядків ( $m > 2$ ). Це дозволяє, по-перше, визначити які типи джерел породжує потік, що набігає на циліндр, а, по-друге, оцінити вклад кожного джерела в загальне звукове поле. Нами були проведені відповідні розрахунки і з'ясовано, що

---

<sup>3</sup>Джерело монопольного типу ( $m = 0$ ) в нашому випадку відсутнє, оскільки циліндр прийнято абсолютно жорстким (що не деформується) і, отже, його поверхня не може здійснювати пульсуючі коливання під дією сил, що створюються потоком

домінуючим є джерело дипольного типу. Наприклад, при  $Re = 100$  тиск, що створюється джерелом квадрупольного типу, приблизно на два порядки менше, ніж дипольного. А вклад мультипольних джерел вищого порядку, у свою чергу, на три порядки менше вкладу квадрупольного джерела. Ці розрахункові оцінки добре узгоджуються з даними, отриманими раніше іншими авторами.

На закінчення хотілося б відзначити наступне. В [2, 17] при аналізі локальних особливостей потоку, що обтікає циліндр, стверджується, що впродовж одного періоду автоколивань кормових вихорів зростання об'єму більшого вихору відбувається за рахунок перекачування (відсмоктування) середовища, поміщеного в менший вихор. Таке відсмоктування обумовлено тим, що тиск усередині більшого вихору нижче, ніж тиск усередині меншого вихору. Сам факт пониженого тиску усередині вихору в порівнянні з тиском в середовищі, що оточує вихор, добре відомий (див., наприклад, [221]). Оскільки прямих доказів справедливості цього твердження в [2] не було наведено, ми провели чисельні оцінки рівнів тиску усередині обох вихорів в різні моменти часу впродовж одного періоду автоколивального процесу. Аналіз цих оцінок повністю підтвердив справедливість висловленого в [2] твердження, як про сам процес перекачування середовища від малого вихору до великого, так і про його фізичну причину – різниці тисків між внутрішніми областями великого і малого вихорів.

## 2.6 Висновки до розділу

Апробовано побудований нами алгоритм, що дозволяє оцінити акустичні характеристики еолових тонів, що виникають при обтіканні циліндра потоком. Метод складається з двох етапів.

На першому етапі, на основі чисельного розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса методом скінченних об'ємів отримано основні гідродинамічні характеристики, у тому числі коефіцієнти лобового опору і підйомної сили  $C_x$  і  $C_y$ ,

а також описано процес коливання у часі сил, прикладених до циліндра. Описано процес періодичної зміни у часі розподілу тиску на поверхні циліндра. Отримано значення числа Струхала  $St$  при різних значеннях числа Рейнольдса  $Re$ . Проведено порівняльний аналіз цих даних з теоретичними і експериментальними даними, що були отримані іншими авторами. Встановлено, що обраний нами алгоритм чисельного розв'язання задачі дозволяє адекватно описати досліджувану течію в діапазоні  $50 \leq Re \leq 400$ , в якому реалізується режим течії з періодичним відривом вихорів за циліндром.

Виявлено, що наближена формула Філіпса (2.3), згідно з якою амплітуда коливання підйомної сили залежить від квадрата швидкості потоку, що набігає, дає результати з прийнятною точністю лише при досить великих значеннях числа Рейнольдса. Нами запропонована коректніша наближена формули, згідно якої амплітуда коливання підйомної сили залежить не від квадрата, а від деякого степеня швидкості потоку  $\max |\tilde{F}_y| \sim V^q$ , причому показник степеня залежить від числа Рейнольдса  $q = f(Re)$ . Із зростанням числа Рейнольдса в діапазоні  $50 \leq Re \leq 400$  показник степеня  $q$  зменшується приблизно від 4.35 до 2.7.

На другому етапі, використовуючи дані про розподіл тиску на поверхні циліндра в якості граничної умови, розв'язано задачу про випромінюванні звуку потоком, що набігає на циліндр. Дані чисельних розрахунків підтвердили правильність зроблених припущень. Зокрема показано, що повна акустична потужність еолового тону на вісім порядків менше потужності потоку, що набігає на циліндр. Виявлено, що наближена формула Філіпса для обчислення інтенсивності звуку як функції шостого степеня швидкості потоку, що набігає, дає неточні результати, особливо при невеликих значеннях числа Рейнольдса. Нами показано, що коректніше було б приблизно оцінювати інтенсивність як степеневу функцію швидкості потоку  $I \sim V^s$ . При цьому показник степеня  $s$  суттєво залежить від числа Рейнольдса.

Отримано просторові розподіли звукового поля (діаграми спрямованості) при різних значеннях числа Рейнольдса. Показано, що вісь діаграми спрямованості еолового тону ( $p_1$ ), збуджуваного коливаннями підйомної сили,

розташована перпендикулярно напрямку потоку, а вісь діаграми спрямованості еолового тону ( $p_2$ ), що збуджується коливаннями сили лобового опору, співпадає з напрямком потоку. Встановлено, що  $p_2/p_1 \ll 1$ , однак, із зростанням числа Рейнольдса відношення  $p_2/p_1$  зростає.

## Розділ 3

# Генерація звуку струменем, що натікає на клин

Шляхом прямого чисельного розв'язання нестационарної системи рівнянь Нав'є-Стокса, розв'язано задачу про натікання затопленого струменя, сформованого вузьким каналом (соплом), на гострий жорсткий клин. Отримано дані про залежності полів завихреності і полів тиску від часу впродовж перехідного процесу і процесу усталених автоколивань струменя. Встановлено, що впродовж перехідного процесу роль гідродинамічного каналу зворотного зв'язку виконують вихрові утворення, що виникли у момент початкового натікання струменя на клин, які рухаються проти течії. В процесі усталених автоколивань, гідродинамічний канал зворотного зв'язку формується за рахунок різниці тисків на гранях клину і періодичної зміни їх знаку, що викликає періодичний потік середовища з однієї грані клину на іншу грань і, як наслідок, періодичні поперечні відхилення струменя. Порівняння теоретично оціненої частоти автоколивань струменя з експериментальним значенням показує їх хороший збіг. Потім, побудовано аналітичний розв'язок акустичної задачі і досліджено основні характеристики звукового поля, генерованого таким потоком.

### 3.1 Вступ до розділу

Вивчення гідродинамічних явищ, що виникають при натіканні струменя рідини або газу на жорсткий клин, має давню історію і пов'язане це з виявле-

нням цікавого ефекту - виникнення поперечних автоколивань струменя, які у свою чергу породжують звукові хвилі. Ще в 1912 році W. König [236] експериментально оцінив частоту автоколивань струменя і генерованого при цьому звуку. Пізніше, упродовж більш ніж ста років, приділялося досить багато уваги вивченню цих гідродинамічних явищ, головним чином експериментально (див., наприклад, [2, 23, 24, 27, 30, 237] і бібліографію в них). Зокрема, експериментально були встановлені зв'язки між швидкістю струменя, частотою автоколивань і геометричними параметрами системи "сопло-клин". Виявлено, що зворотний зв'язок в такій системі має чисто гідродинамічний характер, тобто частота автоколивань пропорційна швидкості струменя. На якісному рівні запропоновано пояснення процесу збудження автоколивань струменя, що полягає в тому, що "...автоколивання обумовлені грою сил інерції частинок струменя, підйомних сил, викликаних ефектом Бернуллі, і сил, викликаних ударом струменя по грані клину, які забезпечують гальмування струменя і обумовлюють появу значних градієнтів тиску на гранях клину, безпосередньо прилеглих до ребра клину..." [2]. Що стосується теоретичних робіт, то слід згадати цікаву статтю D. G. Crighton [30], де представлена лінійна теорія, що дозволяє оцінювати частоти коливань струменя для окремого випадку, коли клин вироджується в напівнескінченну тонку пластину. Підводячи підсумок представленому короткому аналізу, можна зробити висновок, що як процес збудження поперечних коливань струменя, так і механізм зворотного зв'язку, що виникає в системі "сопло-клин" все ще залишаються недостатньо глибоко вивченими. Нам представляється, що в цій ситуації постановка і розв'язання гідродинамічної задачі про натіканні струменя на клин методом прямого чисельного розв'язання відповідної системи рівнянь Нав'є-Стокса дасть можливість отримати додаткові кількісні дані, аналіз яких дозволить поглибити фізичне розуміння процесу збудження коливань струменя і формування в системі "сопло-клин" гідродинамічного зворотного зв'язку.

Результати цього розділу відображено в статтях [222–224].

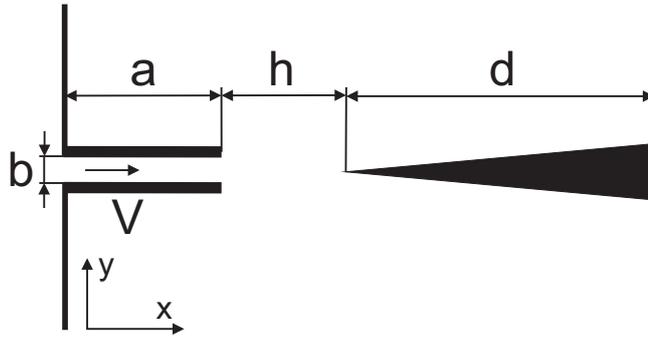


Рис. 3.1: Геометрія розрахункової області

### 3.2 Постановка задачі гідродинаміки і її чисельний розв'язок

Розглянемо задачу про натіканні вузького струменя рідини або газу на клин. Розрахункова область і прийняті позначення представлені на рисунку 3.1. Уся розрахункова область займає прямокутник  $0 < x < L_1$ ,  $0 < y < L_2$ . Будемо вважати, що струмінь формується у вузькому затопленому каналі (соплі) шириною  $b$  і довжиною  $a$ . В цей вузький канал рідина подається на лівому торці ( $x = 0$ ), де задана постійна швидкість  $V$ . Потім через відкритий (правий) кінець каналу струмінь потрапляє в основну розрахункову область, заповнену тією ж рідиною або газом. Далі струмінь натікає на вузький клин, розташований вниз за потоком на відстані  $h$  від відкритого кінця каналу. Покидає розрахункову область потік через правий край ( $x = L_1$ ). Також вважатимемо, що стінки вузького каналу, з якого витікає струмінь, і клин нерухомі і абсолютно жорсткі.

Задача розв'язується в рамках моделі в'язкої нестисливої ньютонівської рідини і, отже, основним параметром задачі служить число Рейнольдса. Оскільки в задачі присутні не один, а декілька заданих розмірів, двоє з яких є суттєвими ( $b$  і  $h$ ), будь-який з них може бути в принципі прийнятий за масштаб довжини, а, отже, число Рейнольдса може бути визначене в різний спосіб. Зупинимося детальніше на виборі масштабу довжини. Об'єктом нашого дослідження є особливості руху середовища в усій розрахунковій області, проте найбільший інтерес представляє течія в області між вузьким

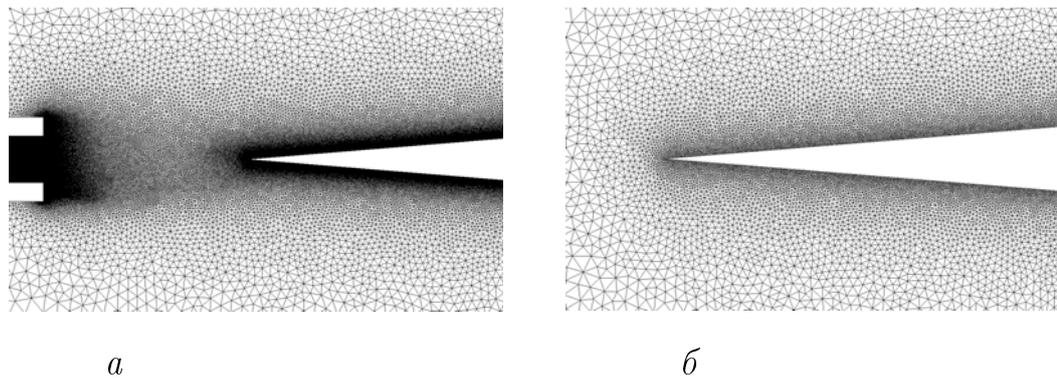


Рис. 3.2: Триангулярная сітка, на якій проводилась просторова дискретизація задачі: а – частина розрахункової області між вузьким каналом і клином, б - збільшене зображення області поблизу ребра клину

каналом, з якого виходить струмінь, і клином, який є перешкодою на шляху руху струменя. Саме у цій області розвиваються два зсувних шари, які формуються як пристінкові зсувні шари на поверхнях вузького каналу, а потім на виході з вузького каналу відриваються і розвиваються як вільні зсувні шари, які потім натікають на клин. У зв'язку з цим найприродніше визначити число Рейнольдса по відстані  $h$  між вузьким каналом і клином, оскільки саме уздовж цієї області відбувається розвиток зсувних шарів:  $Re = Vh/\nu$ , де  $\nu$  - кінематична в'язкість середовища (у цій роботі в якості середовища вибрано повітря з кінематичною в'язкістю  $1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ). При цьому масштаб довжини є відстань  $h$ , масштабом швидкості -  $V$ , масштабом часу - величина  $h/V$ , а масштабом тиску - подвоєний швидкісний напір  $\rho V^2$ .

В рамках прийнятої моделі процес описується нестационарною системою рівнянь Нав'є-Стокса. На зовнішній межі розрахункової області задавалися наступні граничні умови для швидкості: рівномірний потік на вході в розрахункову область ( $x = 0, (L_2 - b)/2 < y < (L_2 + b)/2$ ), умова прилипання на твердих поверхнях вузького каналу і клину, умова прослизання на зовнішній межі розрахункової області за винятком виходу потоку, "м'які" граничні умови, що відповідають рівності нулю нормального градієнта швидкості, на виході з розрахункової області ( $x = L_1, 0 < y < L_2$ ). Для тиску умова рівності нулю нормального градієнта формулювалася по усій межі розрахункової області за винятком виходу з розрахункової області. На

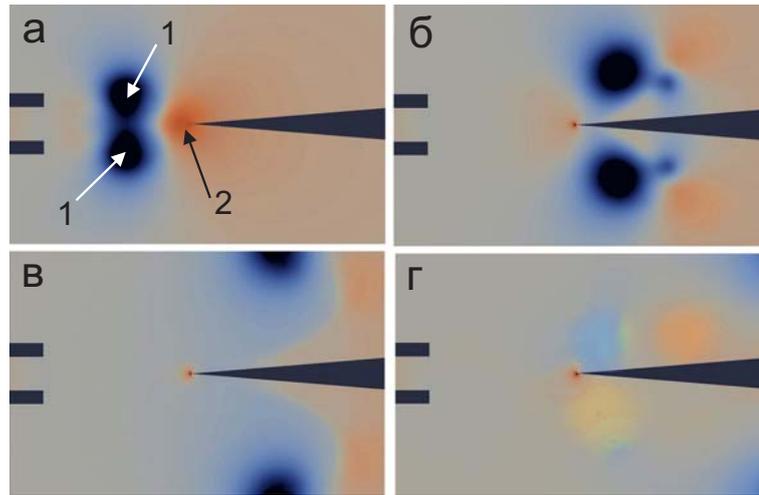


Рис. 3.3: Поле тиску впродовж перехідного процесу (синій колір і цифра 1 визначають області низького тиску, червоний колір і цифра 2 – зони високого тиску),  $Re = 1600$

виході задавався постійний тиск ( $p = 0$ ). При розрахунках обирались наступні значення параметрів, прийнятих в експериментальній роботі [237]: кут розчину клину  $9.4^\circ$ , ширина вузького каналу  $b = 1.1$  мм, довжина вузького каналу (сопла)  $a = 10$  мм, довжина клину  $d = 20$  мм, відстань від вузького каналу до вершини клину  $h = 4.8$  мм. Розрахунки проводились для трьох значень швидкості, з якою повітря входить у вузький канал,  $V = 5$  м/с,  $10$  м/с,  $20$  м/с,  $30$  м/с, що забезпечує виконання умови  $M \ll 1$  (де  $M$  - число Маха). Такі значення швидкості на вході у вузький канал відповідають значенням числа Рейнольдса  $Re = 1600, 3200, 6400, 9600$ . Розміри розрахункової області були взяті наступні:  $L_1 = 250$  мм,  $L_2 = 100$  мм. Помітимо, що ці геометричні параметри ідентичні геометричним параметрам прийнятим в експериментальній роботі [237], що в подальшому дозволить порівняти результати експериментів з нашими розрахунками.

Для чисельного розв'язання сформульованої задачі використовувався метод скінченних об'ємів. Просторова дискретизація виконувалась на трикутній сітці із згущуванням вузлів поблизу твердих поверхонь вузького каналу і клину (рисунок 3.2). Довжина сторони трикутного контрольного об'єму у безпосередній близькості до вершині клину не перевищувала  $h \cdot 10^{-4}$ . Розрахункова сітка була згенерована за допомогою вільно поши-

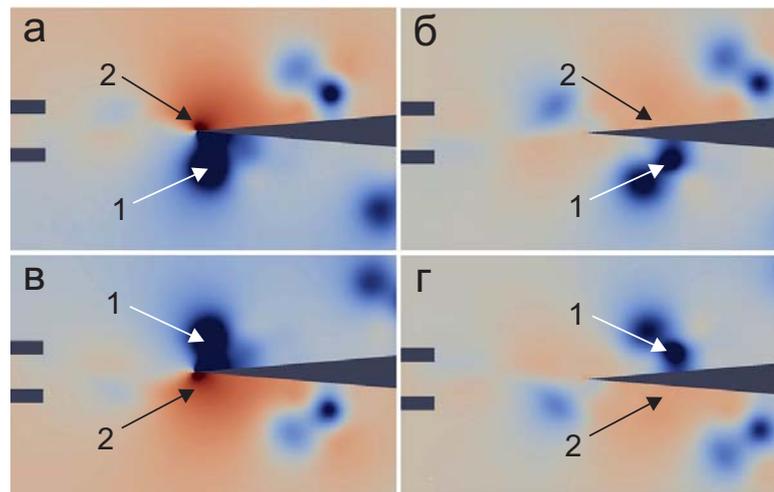


Рис. 3.4: Поле тиску впродовж одного періоду усталених коливань струменя з кроком у часі  $T/4$  (синій колір і цифра 1 визначають області низького тиску, червоний колір і цифра 2 – зони високого тиску),  $Re = 1600$

рюваного генератора з відкритим кодом Gmsh. Детальний опис дискретизації задачі і методів, використаних для її розв'язання, наведено у Розділі 1. При розрахунках використовувались бібліотеки тулбокса з відкритим кодом OpenFOAM. Як для просторової, так і для часової дискретизації використовувались схеми другого порядку, зокрема, для дискретизації конвективних членів використовувалась TVD схема, імплементована в OpenFOAM.

### 3.3 Автоколивання струменя, що натікає на клин. Механізм виникнення зворотного зв'язку

Спочатку розглянемо перехідний процес для  $Re = 1600$ . На рисунку 3.3 а і 3.5 а показано момент, коли струмінь щойно вийшов з каналу і здолав приблизно половину відстані між каналом і клином. Як і слід було очікувати, на кінці струменя утворилися два, закручені в протилежні боки вихори, усередині яких спостерігається низький тиск. На гранях клину тиск близький до нуля, а безпосередньо біля ребра тиск дещо підвищується і на самому ребрі клину досягає рівня приблизно 5 Па. У наступний характерний момент часу (див. рисунок 3.3 б і 3.5 б) струмінь досяг клину і починає взаємодіяти з ним. В результаті на кожній грані утворюється пара закручених в протиле-

жні боки вихорів, які починають віддалятися від граней клину. При цьому тиск в усіх вихорах залишається низьким, а тиск на ребрі клину зростає. Далі вихори ще більше віддаляються від клину (див. рисунок 3.3 в і 3.5 в), а на гранях клину утворюються характерні подвійні шари завихреності різного знаку. І хоча поля завихреності і тиску залишаються поки симетричними відносно поздовжньої осі гідродинамічної системи "сопло-клин з'являються дуже важливі чинники, які можуть призвести до нестійкості струменя. По-перше, подвійні шари завихреності різного знаку характеризуються значними поперечними (у напрямку осі  $Oy$ ) градієнтами завихреності, що, як відомо, [17, 23, 24, 27], сприяє нестійкості потоку. По-друге, що ще більш важливо, вихори, які спочатку віддалялися від клину, почали повільно рухатися проти напрямку руху струменя, одночасно притискаючись до граней клину (див. рисунок 3.3 г і 3.5 г). Таким чином, частина енергії струменя повернулася назад і почала впливати на струмінь в області грані клину і цей ефект, по суті, слід розуміти, як появу гідродинамічного зворотного зв'язку. Зворотний зв'язок ще сильніше збільшує градієнти завихреності на верхній і нижній гранях клину, що неминуче призводить до асиметрії полів завихреності і тиску в гідродинамічній системі "сопло-клин в наслідок чого, струмінь починає відхилятися вгору або вниз. Дійсно, на рисунках 3.3 г і 3.5 г можна спостерігати початок появи асиметрії полів, що розглядаються, і розподілів тиску на гранях клину. Як видно, у безпосередньому околі ребра тиск на нижній грані став трохи вище, ніж тиск на верхній грані, і тому в силу закону Бернуллі в середовищі з'явилися поперечні сили, спрямовані в додатному напрямку осі  $Oy$ , що і викликало ледь помітне відхилення струменя вгору. Як ми переконаємося нижче, різниця тисків на нижній і верхній гранях і періодична зміна її знаку за рахунок дії гідродинамічного каналу зворотного зв'язку і забезпечує стійкі автоколивання струменя.

Розглянемо процес усталених автоколивань струменя. На рисунку 3.6 представлені поля завихреності (і розподіл тиску на гранях клину), а на рисунку 3.4 поля тиску для чотирьох моментів часу впродовж одного періоду  $T$  коливань струменя. Аналіз почнемо з рисунку 3.6 а і рисунку 3.4 а для

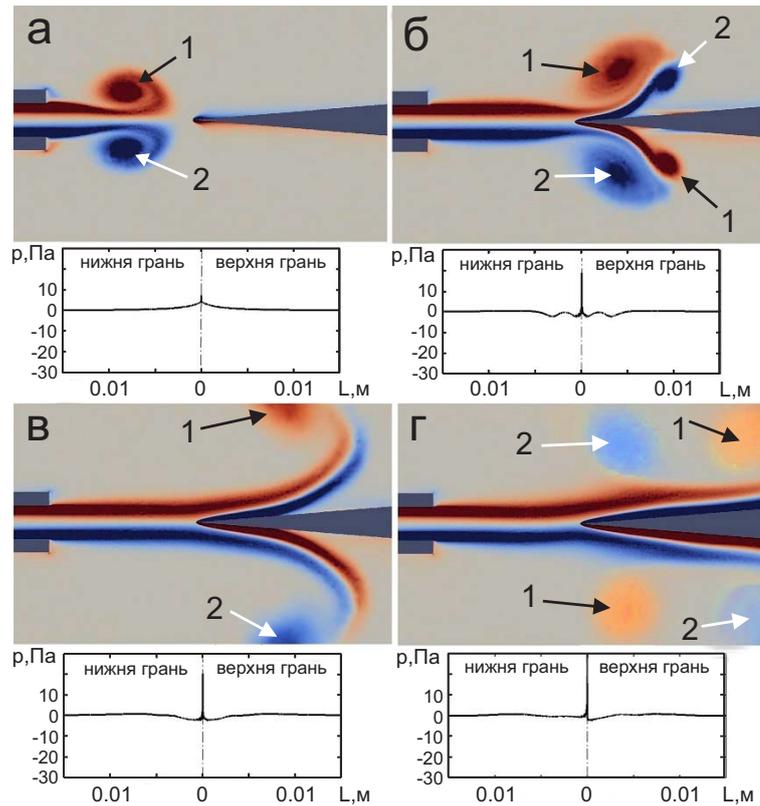


Рис. 3.5: Поле завихреності і розподіл тиску на поверхнях клину впродовж перехідного процесу (червоний колір і цифра 1 визначають області додатної завихреності, тобто рідина закручується проти годинникової стрілки, синій колір і цифра 2 – області від’ємної завихреності, тобто рідина закручується за годинниковою стрілкою),  $Re = 1600$

моменту часу  $t = 0$ . Тут добре видно, що струмінь знаходиться у верхньому крайньому положенні і зігнувся так, що майже перпендикулярно натікає на частину поверхні верхньої грані, безпосередньо прилегло до ребра клину. По суті, струмінь ударяє по цій поверхні. Очевидно, тиск на цій ділянці поверхні повинен різко збільшитись, що і підтверджується характером розподілу тиску на верхній грані клину (рисунок 3.6 а) і поля тиску (рисунок 3.4 а) у середовищі над верхньою гранню. В цей же час, в зоні ребра на нижній грані знаходиться вихор, тиск усередині якого дуже низький, що обумовлює різке зниження тиску на частині поверхні нижньої грані, безпосередньо прилеглою до ребра клину, і поля тиску в середовищі під нижньою гранню. Різниця тисків на гранях (в силу ефекту Бернуллі) викликає потік середовища з області верхньої грані в область нижньої грані, який приму-

шує струмінь зміщуватися вниз. Цей рух струменя вже помітно через чверть періоду, див. рисунок 3.6 б. При цьому тиск на гранях клину сильно зменшується і практично вирівнюється (рисунок 3.4 б). Через половину періоду, тобто при  $t = T/2$ , струмінь вже перемістився в нижнє крайнє положення і картина полів завихреності і тиску стала точно протилежною картині на рисунках 3.6 а і 3.4 а. Тепер струмінь майже перпендикулярно натікає на частину поверхні нижньої грані, безпосередньо прилеглу до ребра клину, і тиск на цій ділянці поверхні різко збільшується. В цей же час в зоні ребра на верхній грані знаходиться вихор, тиск усередині якого дуже низький, що обумовлює різке зниження тиску на частині поверхні нижньої грані, безпосередньо прилеглої до ребра клину, і поля тиску в середовищі над верхньою гранню. Тепер різниця тисків на гранях викликає потік середовища з області нижньої грані в область верхньої грані, який примушує струмінь починати зміщуватись вгору. Цей рух струменя стає вже помітним ще через чверть періоду ( $t = 3T/4$ ), див. рисунок 3.6 г. При цьому тиск на гранях клину знову сильно зменшується і практично вирівнюється (рисунок 3.4 г). Далі з часом увесь описаний цикл змін полів завихреності і тиску повторюється. Таким чином, при усталених коливаннях струменя канал гідродинамічного зворотного зв'язку формується за рахунок різниці тисків на гранях клину і періодичної зміни їх знаку, що викликає періодичний потік середовища з однієї грані клину на іншу грань і, як наслідок, періодичні поперечні коливання струменя.

Представляється цікавим порівняти результати наших розрахунків з експериментальними даними. Оскільки геометричні параметри нашої гідродинамічної системи "сопло-клин" ідентичні системі, розглянутій в [237], можна вважати, що порівняння результатів буде досить достовірним. Наші розрахунки показали, що при швидкості струменя 5 м/с період автоколивань струменя складає 0.002 с (відповідає частоті 500 Гц). Порівняння цих даних з даними, приведеними в [237], дозволяє переконатися, що розрахункова частота автоколивань струменя з графічною точністю співпадає з частотою, оціненою експериментально.

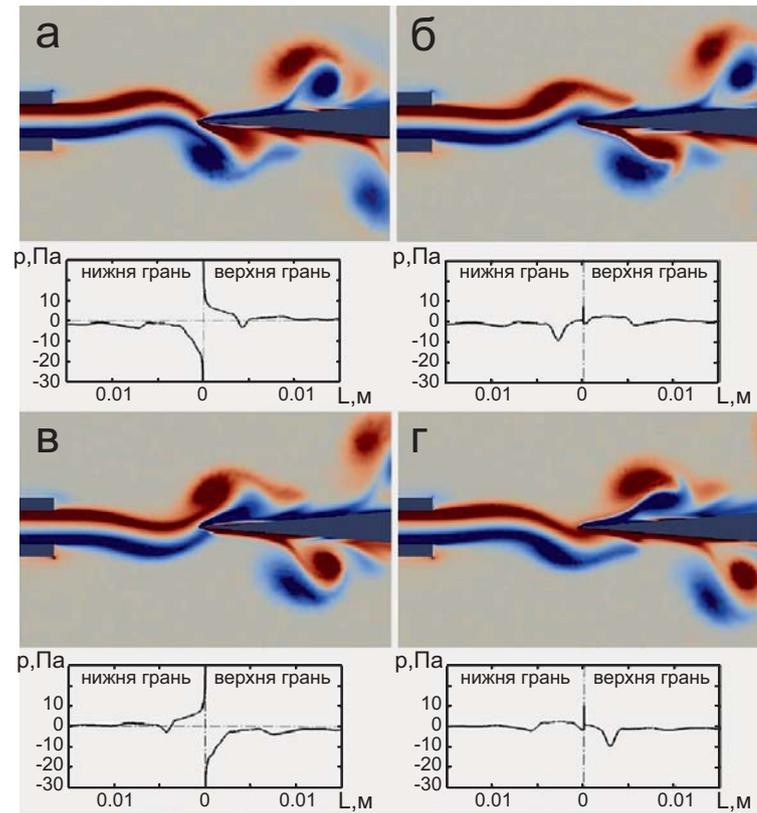


Рис. 3.6: Поле завихреності і розподіл тиску на поверхнях клину впродовж одного періоду усталених коливань струменя з кроком у часі  $T/4$ . Так само як і на попередньому рисунку, верхній зсувний шар (червоний), що набігає на клин, має додатну завихреність, нижній (синій) – від’ємну.  $Re = 1600$

Аналогічна картина течії продовжує зберігатися при збільшенні числа Рейнольдса приблизно до  $10^4$ . Очевидно, що при більш високих числах Рейнольдса виникає турбулізація течії і, отже, необхідно використовувати методи моделювання турбулентності. Проте, як було показано в попередніх розділах, при розв’язанні двовимірних задач, які не є дуже вимогливими до комп’ютерних ресурсів, задовільну точність можна досягти шляхом деталізації розрахункової сітки. Тому в цій задачі ми також використали методи прямого чисельного моделювання, досягаючи задовільної точності шляхом збільшення числа контрольних об’ємів розрахункової сітки.

Із зростанням числа Рейнольдса процес коливання струменя стає менш організованим, дещо порушується регулярність утворення великомасштабних вихорів, що викликає широкосмугові пульсації підйомної сили. Проте, навіть при великих числах Рейнольдса в області перед клином існують

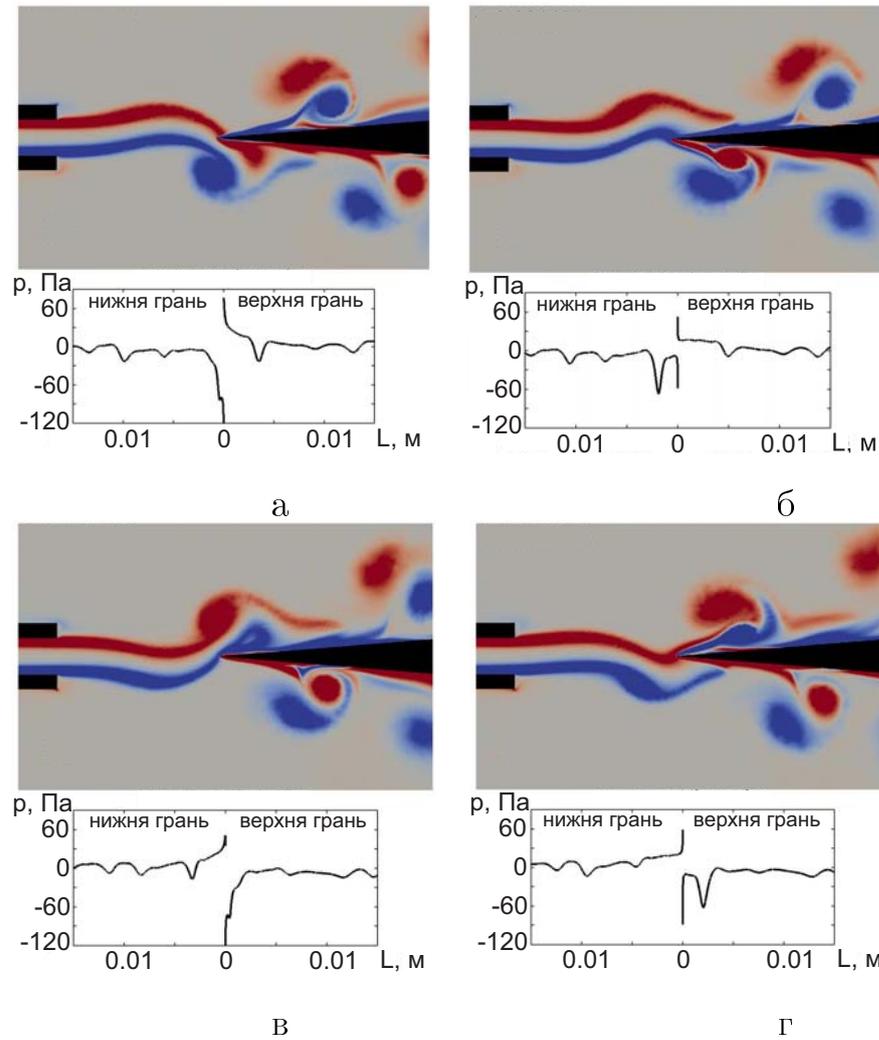


Рис. 3.7: Поле завихреності і розподіл тиску на поверхнях клину впродовж одного періоду усталених коливань струменя з кроком у часі  $T/4$ . Верхній зсувний шар (червоний), що набігає на клин, має додатну завихреність, нижній (синій) – від’ємну.  $Re = 3200$

виразно помітні пульсації струменя в поперечному напрямку і утворення великомасштабних вихрових структур, які потім набігають на клин, а суттєва частина енергії турбулентності міститься саме в цих вихорах. Відомо, що широкосмугові пульсації підйомної сили генерують широкосмуговий шум. Оскільки в цій роботі нас цікавлять тони, згенеровані пульсацією струменя перед клином, ми концентруємо увагу на ламінарних режимах течії.

При більш високих значеннях числа Рейнольдса течію також можна вважати періодичною за часом. Вона характеризується коливанням струменя в поперечному напрямку, а також утворенням вихорів в шарах змішування

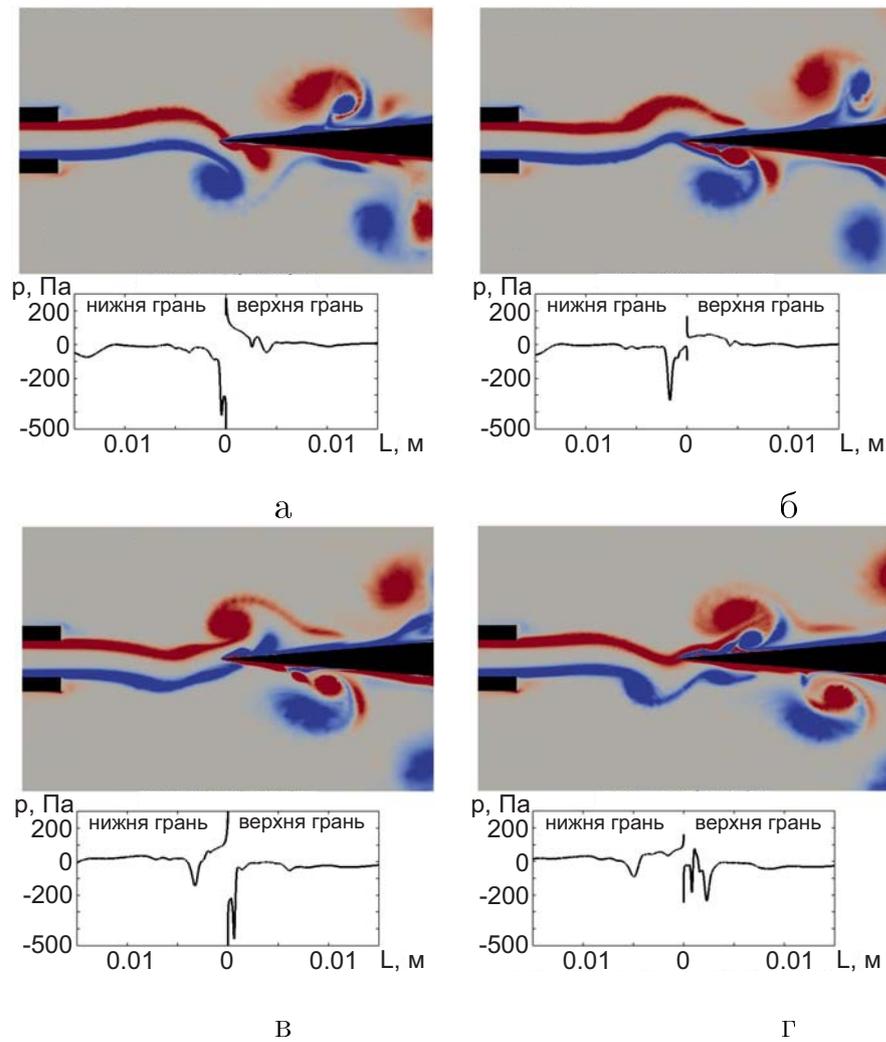


Рис. 3.8: Поле завихреності і розподіл тиску на поверхнях клину впродовж одного періоду усталених коливань струменя з кроком у часі  $T/4$ . Верхній зсувний шар (червоний), що набігає на клин, має додатну завихреність, нижній (синій) – від’ємну.  $Re = 6400$

струменя, які потім зносяться вниз за потоком і набігають на клин. На рисунку 3.7, 3.8, 3.9 показано течію упродовж одного періоду при  $Re = 3200$ , 6400, 9600. У верхній частині рисунків представлено поле завихреності в чотири моменти часу з інтервалом  $T/4$ . А в нижній частині представлено розподіл тиску  $p$  по поверхні циліндра в ті ж моменти часу. Координата абсцис відраховується від найбільш віддаленої від вершини точки на нижній грані клину. Таким чином ліва частина рисунку є розподілом тиску на нижній грані клину, а права частина - на верхній грані. Середина ж рисунку відповідає вершині клину. При збільшенні числа Рейнольдса амплітуда коли-

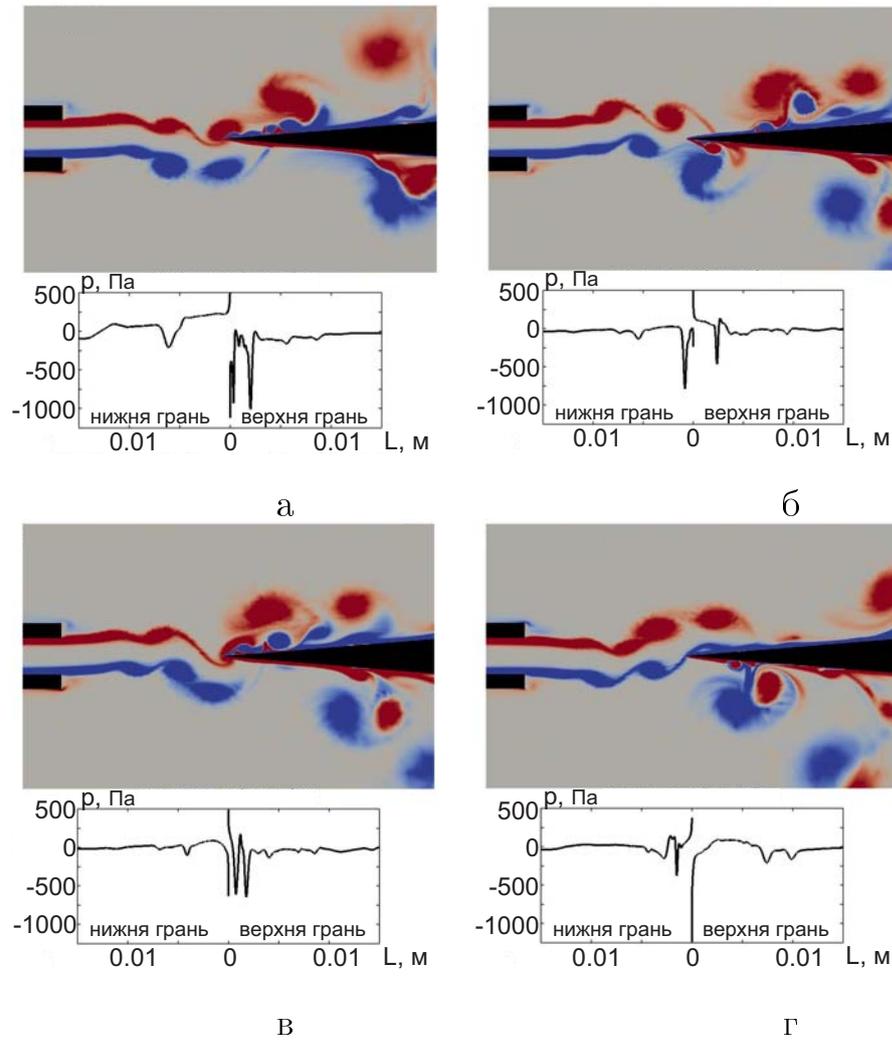


Рис. 3.9: Поле завихреності і розподіл тиску на поверхнях клину при  $Re = 9600$ : а – видно дві сформовані вихрові пари в області перед клином, б – розташування вихорів в шаховому порядку знову відновлюється, в і г – несиметрична чехарда вихорів

вання струменя збільшується. Точка утворення вихорів в шарах змішування струменя зміщується вгору по потоку. Таким чином, на вершину клину набігають вихори, що вже сформувалися. При максимальному з розглянутих значень числа Рейнольдса  $Re = 9600$  регулярність процесу вихроутворення і їх взаємодії з клином порушується. У деякі моменти часу вихори також шикуються в шаховому порядку, як це спостерігалось при нижчих числах Рейнольдса. А в деякі моменти часу вихори шикуються симетрично відносно горизонтальній осі  $y = 0$  і ми можемо спостерігати дві вихрові пари в області перед клином.

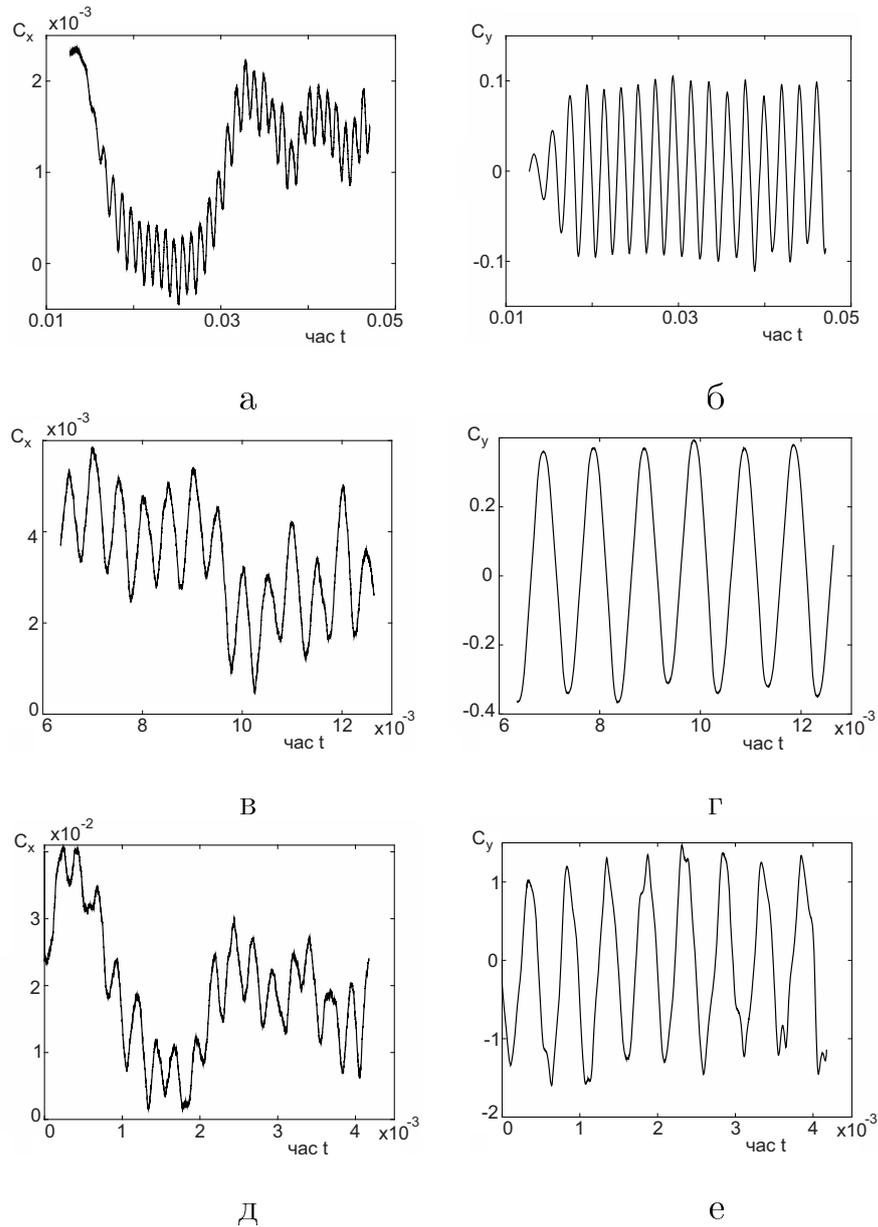


Рис. 3.10: Зміна у часі коефіцієнтів сил, прикладених до клину: а, б –  $Re = 1600$ , в, г –  $Re = 3200$ , д, е –  $Re = 6400$

Видно, що розподіл тиску по поверхні циліндра також змінюється періодично в часі при  $Re = 3200, 6400$ . Причому розподіли тиску в моменти часу  $t_1, t_2$ , що відрізняються на півперіоду ( $t_2 = t_1 + T/2$ ), будуть симетричні відносно горизонтальної осі  $y = 0$ . При збільшенні числа Рейнольдса амплітуда осциляцій тиску на поверхні клину росте, так само як і діапазон значень розподілу тиску (різниця між максимумом і мінімумом тиску на клині).

Слід також відзначити, що форма розподілу тиску при  $Re = 3200$  дуже схожа на ту, що ми спостерігали при  $Re = 1600$  (див. рисунок 3.6). На нижню і на верхній гранях по черзі утворюються різкі западини (мінімуми),



Рис. 3.11: Лінія, яку описує результуюча сила, що діє на похилі поверхні клину, за період коливань

які рухаються від центру до краю рисунка. Ці западини відповідають вихорам, що набігають на вершину клину, які потім рухаються вздовж нижньої або верхньої граней клину. При подальшому збільшенні значення числа Рейнольдса розподіл тиску на поверхні клину ускладнюється. При  $Re = 6400$  видно, що регулярність і строга періодичність течії починає поступово порушуватися (рисунок 3.8). На деяких рисунках можна бачити два поруч розташованих мінімуми розподілу тиску по поверхні клину. Це означає, що два послідовно розташованих вихори досягають вершини клину через короткий інтервал часу і потім рухаються уздовж грані клину на короткій відстані один від одного. При  $Re = 9600$  процес коливання струменя і утворення вихорів в шарах змішування в області перед клином продовжується, проте, цей процес стає ще більше нерегулярним. Рисунок 3.9 ілюструє, що у різні моменти часу спостерігаються різні режими течії. Так в області перед клином можна спостерігати дві цілком сформовані вихрові пари (рисунок 3.9 а), при цьому вихори розташовані симетрично відносно горизонтальної осі. Проте, вже через короткий інтервал часу розташування вихорів в шаховому порядку знову відновлюється (рисунок 3.9 б). На рисунках 3.9 в і г показано режим несиметричної чехарди вихорів. Вихор в нижньому або верхньому шарі змішування наздоганяє вихор, що йде попереду, і проскакує вперед з внутрішньої сторони струменя. Таким чином, вихор, що йде позаду, обганяє вихор, що йде попереду. Таке явище називається чехардою вихорів.

Періодичний або квазіперіодичний процес коливання струменя, що на-

Табл. 3.1: Залежність частоти і числа Струхала від значень числа Рейнольдса

Re	1600	3200	6400	9600
V, м/с	5	10	20	30
f, Гц	512	1020	2036	3052
St	0.491	0.490	0.489	0.489

бігає на клин, а також процес утворення вихорів в області перед клином приводить до коливань в часі сил, що діють на клин. На рисунку 3.10 показано процес зміни у часі коефіцієнтів сил лобового опору  $C_x$  і підйомної сили  $C_y$ . Очевидно, що дія сил змінюється періодично. Причому період змінювання лобового опору удвічі менший, ніж період змінювання підйомної сили. Іншими словами, частота коливання сили, що діє на циліндр, в горизонтальному напрямку удвічі вище частоти коливання цієї сили у вертикальному напрямку. Це приводить до того, що кінець вектору результуючої сили  $\mathbf{R} = C_x \mathbf{i}_x + C_y \mathbf{i}_y$  описує з часом замкнуту лінію, схожу на вузьку вісімку (див. рисунок 3.11). На усіх рисунках 3.10 чітко видно коливання сил, що діють на клин, викликаних утворенням вихорів в області перед клином і набіганням цих вихорів на клин. Ці коливання, які мають більш високу частоту, накладаються на повільніші коливання самого струменя.

Рисунок 3.10 також показує, що із зростанням числа Рейнольдса росте частота коливань. У таблиці 3.1 наведено залежність частоти і числа Струхала від значення числа Рейнольдса. Як і слід було очікувати, при таких досить великих значеннях числа Рейнольдса частота коливань пропорційна швидкості потоку і, отже, число Струхала практично не змінюється із зростанням числа Рейнольдса.

На закінчення слід сказати, що періодична зміна тиску на гранях клину є прямою причиною виникнення джерела звукових коливань дипольного типу, який неодноразово експериментально спостерігався багатьма дослідниками.

### 3.4 Розрахунок звукового поля

При розгляді задачі натікання затопленого струменя на клин збурення потоку, що генерують звукове поле, можна умовно розділити на дві складові. Перша - це збурення поля тиску на поверхні клину, викликані коливанням струменя і утворенням великих вихорів в шарах змішування струменя в області перед клином. При досить великих значеннях числа Рейнольдса, ці збурення мають періодичний характер. Вони самоорганізуються в деяку складну автоколивальну систему, коливання якої і викликають появу тонального звуку [17], [2]. Друга складова - це збурення, що розвиваються в результаті турбулізації струменя і взаємодії великого числа дрібних вихрових структур в турбулентному сліді, внаслідок чого виникає широкосмуговий шум [2], [59]. Механізм виникнення шуму принципово відрізняється від механізму виникнення тонального звуку і пов'язаний із специфічними безладними коливаннями і взаємодією часток середовища в турбулентному сліді. Як показано в численних дослідженнях (див., наприклад, [59] і широкую бібліографію в цій книзі) потужність тонального звуку істотно перевищує потужність широкосмугового шуму. У цьому дослідженні ми приділяємо увагу першій складовій і, отже, концентруємо увагу на описанні генерації і поширення тонального звуку. Дотримуючись основних положень акустичної аналогії Лайтхілла [215], [216], а також її узагальнення на випадок присутності меж в потоці, зробленого Керлом [217], ми не враховуватимемо зворотну реакцію звуку на характер потоку, поширення звуку зі змінною швидкістю усередині потоку (рефракцію звуку), а також згасання звуку.

Таким чином, дотримуючись ідеї, що викладено вище, з чисельного розв'язку відповідної задачі гідромеханіки, представленого вище, ми маємо розподіл тиску на бічних поверхнях клину, який періодично змінюється у часі з періодом  $T$ . Ці пульсації тиску на поверхнях клину, природно збуджують звукові коливання в довкіллі [2]. При цьому, якщо числа Маха відносно невеликі, рухом потоку можна знехтувати і вважати, що звук поширюється так само, як в нерухомому середовищу. Слід також відзначити, що хвильовий

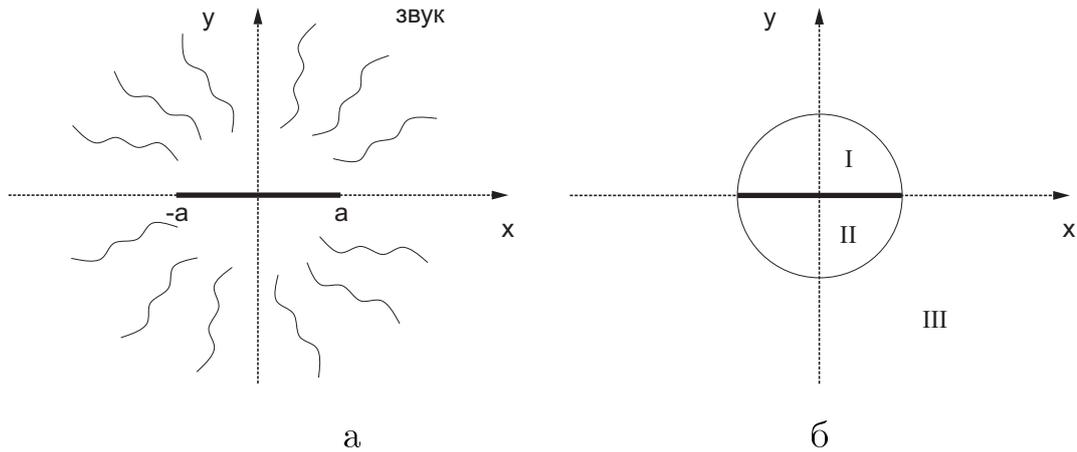


Рис. 3.12: Геометрія задачі: а – пластинка  $y = 0$ ,  $-a < x < a$  випромінює звук, б – розрахункова область розбивається на три підобласті

розмір джерела є дуже малим [2].

Тоді звукове поле поза клином може бути знайдене з відповідної граничної задачі для хвильового рівняння. Оскільки клин, що розглядається, є гострим (кут розхилу  $\alpha = 9.4^\circ$ ), то з метою спрощення задачі ми розглядатимемо вироджений клин з нульовим кутом розхилу, тобто пластину. Геометрія задачі показана на рисунку 3.12 а. Гранична умова має вигляд:

$$\begin{cases} p = f_1(x, t), & \text{при } y = 0+, & -a < x < a, \\ p = f_2(x, t), & \text{при } y = 0-, & -a < x < a, \end{cases} \quad (3.1)$$

тут  $y = 0+$  и  $y = 0-$  означає наближення до осі  $y = 0$  згори і знизу, відповідно. Функції  $f_1$  і  $f_2$  – розподіл тиску по пластинці, який ми отримуємо з розв'язку відповідної задачі гідродинаміки.

Сформульована гранична задача для хвильового рівняння розв'язується методом часткових областей [238, 239]. Для цього вся розрахункова область розбивається на три області, як показано на рисунку 3.12 б. Розв'язки хвильового рівняння в кожній з цих трьох областей добре відомі. Невідомі коефіцієнти розв'язків знаходяться з граничних умов, а також з умов спряження полів на межі між областями. Умови спряження на межі між заданими трьома областями мають вигляд:

$$\begin{cases} p^{(III)}(r, \phi) = p^{(I)}(x, t), & \text{при } r = a, & 0 < \phi < \pi, \\ p^{(III)}(r, \phi) = p^{(II)}(x, t), & \text{при } r = a, & \pi < \phi < 2\pi, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial p^{(III)}(r, \phi)}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p^{(I)}(x, t)}{\partial r}, & \text{при } r = a, \quad 0 < \phi < \pi, \\ \frac{\partial p^{(II)}(x, t)}{\partial r}, & \text{при } r = a, \quad \pi < \phi < 2\pi. \end{cases} \quad (3.3)$$

Так само як і в задачі про генерацію звуку потоком, що набігає на циліндр (див. Розділ 2), розв'язок представляється у вигляді ряду Фур'є по часовій координаті:

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} p_n(r, \phi), \quad (3.4)$$

де  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$  – кутова частота,  $f = \text{St}V/h$  – частота коливань струменя, що набігає на клин, а  $p_n(r, \phi)$  – розв'язок відповідного рівняння Гельмгольца.

Очевидно, що в області III розв'язок має такий самий загальний вигляд, як і у попередній задачі про генерацію звуку при обтіканні циліндра, і представляється рядом Фур'є по кутовій координаті:

$$p_n^{(III)} = \sum_{m=0}^{\infty} [G_{nm} \cos(m\phi) + H_{nm} \sin(m\phi)] H_m^{(1)}(k_n r), \quad (3.5)$$

де  $k_n = n\omega/c$  – хвильове число,  $c$  – швидкість звуку в середовищі,  $H_m^{(1)}$  – функція Ханкеля першого роду.

А в областях I і II розв'язок має складніший вигляд. Оскільки ці області обмежені координатними лініями різних сімейств, поле тиску в цих областях представляються у вигляді суперпозиції двох розв'язків, один з яких є хвилею, що біжить вдовж додатного або від'ємного напрямку осі  $Oy$ :

$$p_n^{(I)} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(m\phi) J_m(k_n r) + \sum_{m=0}^{\infty} \left[ B_{nm} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + C_{nm} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] e^{i\gamma_{nm} y}, \quad (3.6)$$

$$p_n^{(II)} = \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} \sin(m\phi) J_m(k_n r) + \sum_{m=0}^{\infty} \left[ E_{nm} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + F_{nm} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] e^{-i\gamma_{nm} y}, \quad (3.7)$$

де  $\gamma_{nm} = \sqrt{k_n^2 - (\pi m/a)^2}$ .

З граничних умов 3.1 знаходимо явні вирази для коефіцієнтів  $B_{nm}$ ,  $C_{nm}$ ,  $E_{nm}$ ,  $F_{nm}$ . Для цього функції задані на межі розкладаються в комплексний ряд Фур'є по часовій координаті і в ряд Фур'є по тригонометричним функціям на відрізьку  $-a < x < a$ . Прирівнюючи коефіцієнти з рівними номерами в лівій і правій частинах граничних умов 3.1, отримаємо

$$\begin{aligned} B_{n0} &= \frac{1}{2aT} \int_0^T e^{in\omega t} \int_{-a}^a f_1(x, t) dx dt, \\ B_{nm} &= \frac{1}{aT} \int_0^T e^{in\omega t} \int_{-a}^a f_1(x, t) \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) dx dt, \\ C_{nm} &= \frac{1}{aT} \int_0^T e^{in\omega t} \int_{-a}^a f_1(x, t) \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) dx dt, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Аналогічні явні вирази можна отримати і для коефіцієнтів  $E_{nm}$ ,  $F_{nm}$ . Для цього у формулу 3.8 досить підставити функцію  $f_2(x, t)$  замість  $f_1(x, t)$ .

$$\begin{aligned} E_{n0} &= \frac{1}{2aT} \int_0^T e^{in\omega t} \int_{-a}^a f_2(x, t) dx dt, \\ E_{nm} &= \frac{1}{aT} \int_0^T e^{in\omega t} \int_{-a}^a f_2(x, t) \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) dx dt, \\ F_{nm} &= \frac{1}{aT} \int_0^T e^{in\omega t} \int_{-a}^a f_2(x, t) \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) dx dt. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Інші коефіцієнти визначаються з умов спряження 3.2 і 3.3. Після заміни

$$\begin{cases} A_{nm} = Y_{nm} - Z_{nm}, \\ D_{nm} = Y_{nm} + Z_{nm} \end{cases} \quad (3.10)$$

отримуємо явні вирази для знаходження коефіцієнтів  $H_{nm}$  і  $Y_{nm}$ :

$$Y_{nm} = \frac{(\Phi_{nm} + \Psi_{nm})k_n H_m^{(1)'}(k_n a) - (\Lambda_{nm} + \Omega_{nm})H_m^{(1)}(k_n a)}{2 \left[ J_m(k_n a)H_{m+1}^{(1)}(k_n a) - J_{m+1}(k_n a)H_m^{(1)}(k_n a) \right]}, \quad (3.11)$$

$$H_{nm} = \frac{1}{2H_m^{(1)}}(2Y_{nm} + \Phi_{nm} + \Psi_{nm}), \quad (3.12)$$

де коефіцієнти  $\Phi_{nm}$ ,  $\Psi_{nm}$ ,  $\Lambda_{nm}$ ,  $\Omega_{nm}$  є коефіцієнтами Фур'є відомих функцій:

$$\begin{aligned} \Phi_{nm} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Phi_n(\phi) \sin(m\phi) d\phi, & \Psi_{nm} &= \frac{2}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \Psi_n(\phi) \sin(m\phi) d\phi, \\ \Lambda_{nm} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Lambda_n(\phi) \sin(m\phi) d\phi, & \Omega_{nm} &= \frac{2}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \Omega_n(\phi) \sin(m\phi) d\phi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Тут функції  $\Phi_n(\phi)$ ,  $\Psi_n(\phi)$ ,  $\Lambda_n(\phi)$ ,  $\Omega_n(\phi)$  є відомими, оскільки вони задані через вже визначені в явному вигляді коефіцієнти 3.8, 3.9:

$$\begin{aligned}
\Phi_n(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} [B_{nm} \cos(\pi m \cos \phi) + C_{nm} \sin(\pi m \cos \phi)] e^{ia\gamma_{nm} \sin \phi}, \\
\Psi_n(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} [E_{nm} \cos(\pi m \cos \phi) + F_{nm} \sin(\pi m \cos \phi)] e^{-ia\gamma_{nm} \sin \phi}, \\
\Lambda_n(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ [-B_{nm} \sin(\pi m \cos \phi) + C_{nm} \cos(\pi m \cos \phi)] \frac{\pi m}{a} \cos \phi + \right. \\
&\quad \left. + [B_{nm} \cos(\pi m \cos \phi) + C_{nm} \sin(\pi m \cos \phi)] i\gamma_{nm} \sin \phi \right\} e^{ia\gamma_{nm} \sin \phi}, \\
\Omega_n(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ [-E_{nm} \sin(\pi m \cos \phi) + F_{nm} \cos(\pi m \cos \phi)] \frac{\pi m}{a} \cos \phi - \right. \\
&\quad \left. - [E_{nm} \cos(\pi m \cos \phi) + F_{nm} \sin(\pi m \cos \phi)] i\gamma_{nm} \sin \phi \right\} e^{-ia\gamma_{nm} \sin \phi}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Пара невідомих коефіцієнтів, що залишилася, визначалась з відповідної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язувалась чисельно методом редукції.

На рисунку 3.6 видно, що крива розподілу тиску на поверхні клину має розрив першого роду у вершині клину. Причому в деякі моменти часу цей скачок стає дуже суттєвим. Для поліпшення збіжності рядів в представленому розв'язку, а, отже, для збільшення точності обчислення невідомих коефіцієнтів розв'язку необхідно аналітично врахувати цей розрив. Це також приведе і до підвищення точності виконання граничної умови на поверхні клину, включаючи окіл вершини клину.

З цією метою можна скористатися відомим аналітичним розв'язком задачі Стокса поблизу вершини кута [240]. Функція струму локальної течії поблизу вершини клину має вигляд

$$\psi = r^\lambda f_\lambda(\phi), \tag{3.15}$$

$$f_\lambda(\phi) = K \cos(\lambda\phi) + L \sin(\lambda\phi) + M \cos((\lambda - 2)\phi) + N \sin((\lambda - 2)\phi). \tag{3.16}$$

Тут  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  – довільні сталі коефіцієнти. Вони визначаються глобальними, а не локальними характеристиками потоку.

Розглянемо спочатку антисиметричний потік:

$$f_\lambda(\phi) = K \cos(\lambda\phi) + M \cos((\lambda - 2)\phi). \tag{3.17}$$

На поверхнях клину обидві компоненти швидкості дорівнюють нулю, якщо виконана умова  $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ . Виконання цієї умови приводить до однорідної системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь. Нетривіальний розв'язок такої системи можливий лише при умові рівності нулю визначника. Це приводить до трансцендентного рівняння

$$\sin(2(\lambda - 1)\alpha) = -(\lambda - 1) \sin(2\alpha), \quad (3.18)$$

з якого визначаємо значення  $\lambda$ . Аналогічно, у випадку симетричного потоку

$$f_\lambda(\phi) = L \sin(\lambda\phi) + N \sin((\lambda - 2)\phi). \quad (3.19)$$

маємо наступне трансцендентне рівняння для пошуку значень  $\lambda$ :

$$\sin(2(\lambda - 1)\alpha) = (\lambda - 1) \sin(2\alpha). \quad (3.20)$$

Вирази для функції струму можна продиференціювати і таким чином отримати вирази для компонент швидкості. Якщо потім підставити їх у рівняння Стокса і розв'язати відносно тиску, то отримаємо наступний вираз для локального поля тиску поблизу клину:

$$p^{(loc)}(r, \phi) = -4(\lambda - 1)r^{\lambda-2}[M \sin((\lambda - 2)\phi) - N \cos((\lambda - 2)\phi)]. \quad (3.21)$$

Значення показника степеня  $\lambda$  знаходяться з трансцендентних рівнянь (3.18) і (3.20) для антисиметричного і симетричного випадків, відповідно.

Тепер можна явно врахувати локальний сингулярний розв'язок в отриманому раніше розв'язку задачі. Для цього в граничній умові 3.1 необхідно додати і відняти отриманий сингулярний розв'язок 3.21, вважаючи коефіцієнти  $M$  і  $N$  в ньому залежними від часу.

$$\begin{cases} p = g_1(x, t) + p^{(loc)}(r, \alpha, t), & \text{при } y = 0+, \quad -a < x < a, \\ p = g_2(x, t) + p^{(loc)}(r, -\alpha, t), & \text{при } y = 0-, \quad -a < x < a, \end{cases} \quad (3.22)$$

де  $g_1(x, t)$ ,  $g_2(x, t)$  – задані функції, але на відміну від  $f_1(x, t)$ ,  $f_2(x, t)$  вони не мають розриву у вершині кута:

$$\begin{cases} g_1(x, t) = f_1(x, t) - p^{(loc)}(r, \alpha, t), \\ g_2(x, t) = f_2(x, t) - p^{(loc)}(r, -\alpha, t). \end{cases} \quad (3.23)$$

Табл. 3.2: Характеристики періодичної течії і звуку: 1 – задана швидкість потоку, 2 – число Маха, 3 – хвильовий розмір джерела звуку, 4 – тиск на осі діаграми спрямованості першої гармоніки  $p_1$ , 5 – тиск на осі діаграми спрямованості другої гармоніки  $p_2$ , 6 – співвідношення амплітуд першої і другої гармонік, 7 – інтенсивність звуку (сила звуку), Вт/м<sup>2</sup>, 8 – повна акустична потужність клинового тону, 9 – потужність потоку, що набігає на клин, 10 – ККД

	Re	1600	3200	6400
1	$V, \frac{M}{c}$	5	10	20
2	$M$	$1.51 \cdot 10^{-2}$	$3.01 \cdot 10^{-2}$	$6.02 \cdot 10^{-2}$
3	$\frac{d}{\lambda} = \frac{df}{c}$	$7.40 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	$2.94 \cdot 10^{-2}$
4	$\max  p_1 , \text{Па}$	$8.81 \cdot 10^{-4}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$	$2.11 \cdot 10^{-3}$
5	$\max  p_2 , \text{Па}$	$1.92 \cdot 10^{-4}$	$4.15 \cdot 10^{-4}$	$7.54 \cdot 10^{-4}$
6	$\max  p_1  / \max  p_2 $	4.59	3.40	2.80
7	$I = \frac{\max p^2}{\rho c}, \frac{\text{кГ}}{c^3}$	$1.94 \cdot 10^{-9}$	$4.97 \cdot 10^{-9}$	$1.11 \cdot 10^{-8}$
8	$W_{\text{ак}} = I \cdot S, \text{Вт}$	$6.1 \cdot 10^{-9}$	$1.56 \cdot 10^{-8}$	$3.49 \cdot 10^{-8}$
9	$W_{\text{Гд}}, \text{Вт}$	0.126	1.01	8.07
10	$\frac{W_{\text{ак}}}{W_{\text{Гд}}}$	$4.84 \cdot 10^{-8}$	$1.55 \cdot 10^{-8}$	$4.32 \cdot 10^{-9}$

Тепер для підвищення точності виконання граничних умов досить в отриманий вище розв'язок підставити замість функцій  $f_1, f_2$  їх вирази через  $g_1, g_2$  і локальний розв'язок  $p^{(loc)}$  і обчислити інтеграли із заданими явно функціями. При цьому, як вже згадувалося вище, коефіцієнти  $M$  і  $N$  слід вважати залежними від часу. Ці коефіцієнти визначаються глобальними, а не локальними характеристиками потоку і, отже, їх необхідно визначати в кожний момент часу з умови збігу локального профілю  $p^{(loc)}(r, \alpha, t)$  з глобальним розподілом  $f_1(x, t)$  в двох точках поблизу вершини.

Так само як і в задачі про генерацію еолових тонів, параметри середовища вибираємо такі як для повітря при температурі 20°C:  $\rho = 1.204 \text{ кг/м}^3$ ,

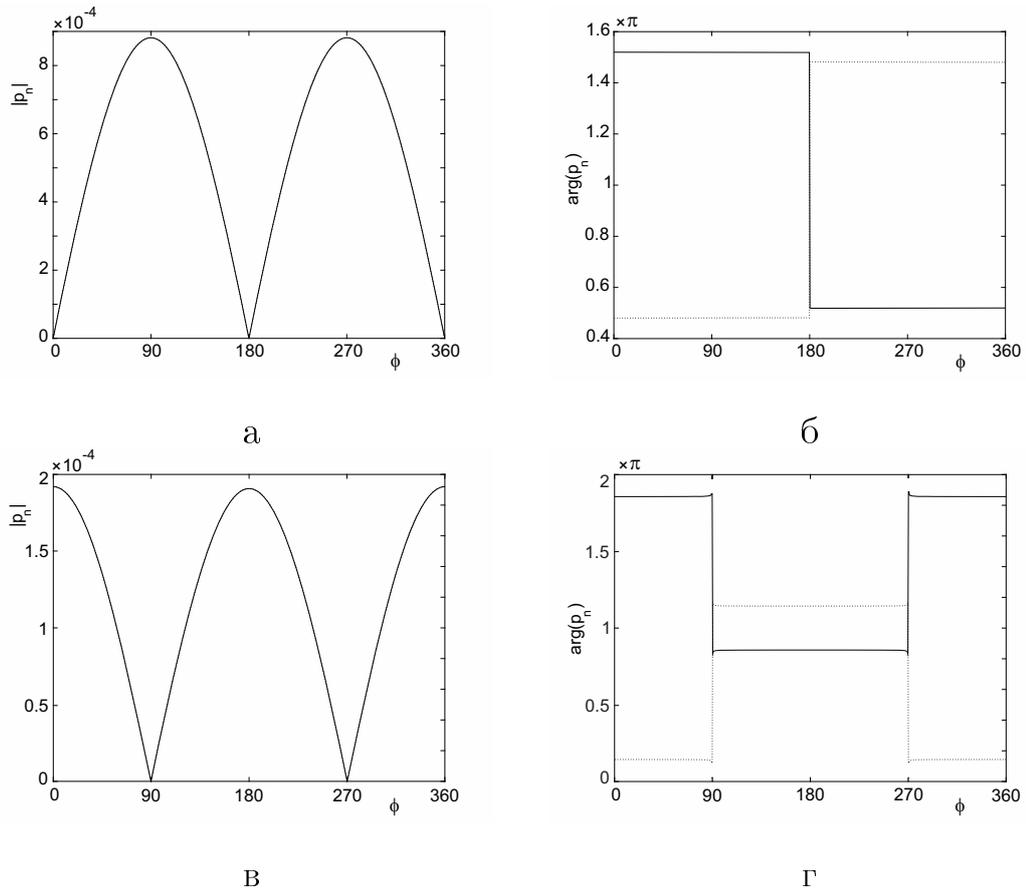


Рис. 3.13: Модуль і фаза перших двох гармонік тиску  $p_n$  на відстані 1 м від вершини клину. Число Рейнольдса  $Re = 1600$ : а –  $|p_n|$  при  $n = \pm 1$ , б –  $\arg(p_n)$  при  $n = \pm 1$ , суцільна лінія відповідає випадку  $n = 1$ , пунктирна –  $n = -1$ , в –  $|p_n|$  при  $n = \pm 2$ , г –  $\arg(p_n)$  при  $n = \pm 2$ , суцільна лінія відповідає випадку  $n = 2$ , пунктирна –  $n = -2$

$\nu = 1.51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $c = 332 \text{ м/с}$ . Основні характеристики періодичної течії і звуку представлені в таблиці 3.2. Оразу відзначимо, що припущення, які ми поклали в основу нашої моделі, підтверджуються чисельними розрахунками. Зокрема, значення числа Маха і значення хвильового розміру циліндра мають порядок  $10^{-2}$ . Це дає можливість вважати ці параметри малими і виправдовує покладене в основу нашої моделі нехтування впливом руху потоку на акустичне поле, тобто виправдовує припущення про те, що звук поширюється в такому потоці так само, як в нерухомому середовищі. Окрім того, малі значення числа Маха і хвильового розміру джерела підтверджують правильність розгляду гідродинамічної задачі у рамках моделі в'язкої нестисливої рідини. Відношення повної акустичної потужності

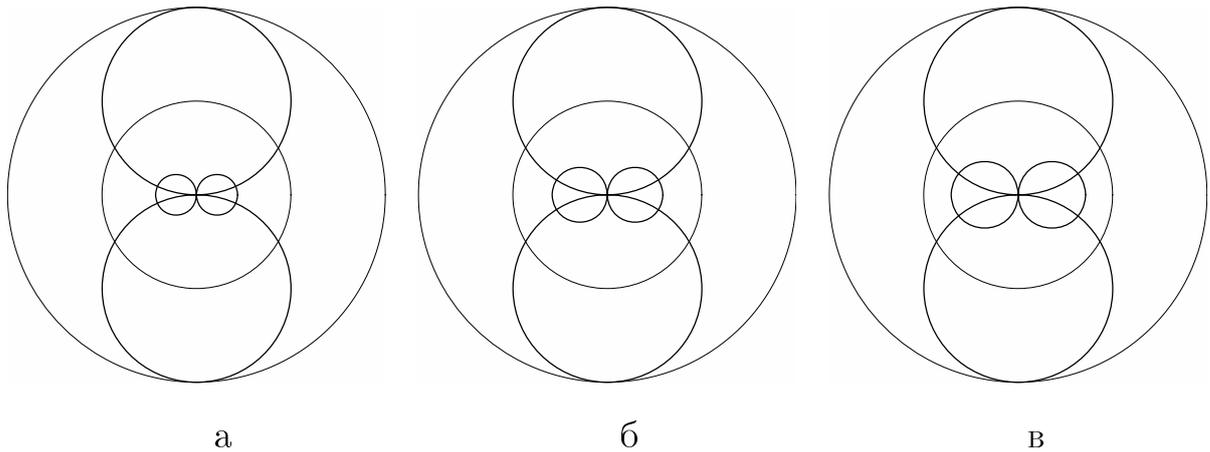


Рис. 3.14: Нормована діаграма спрямованості клинових тонів, що виникають за рахунок осциляцій підйомної сили і сили опору: а –  $Re = 1600$ , б –  $Re = 3200$  в –  $Re = 6400$

клинового тону до потужності потоку, що набігає на клин (іншими словами, ККД випромінювача), має порядок  $10^{-8} - 10^{-9}$ , а також і інтенсивність випромінюваного звуку (сила звуку) має порядок  $10^{-8} - 10^{-9}$ . Такі малі значення ККД випромінювача і інтенсивності випромінюваного звуку говорять про справедливість закладених в основу нашої моделі основних положень акустичної аналогії Лайтхілла [215], [216] і її узагальнення, зробленого Керлом [217], про те, що зворотним впливом звуку на характеристики потоку середовища можна знехтувати. Також слід зазначити, що при таких досить великих швидкостях відношення амплітуд першої і другої гармонік вже не буде таким великим, як в розглянутій вище задачі про генерацію еолових тонів. Тобто, при досить великих швидкостях і при такій конфігурації тіла, що обтікається, вплив більш високих гармонік буде більш суттєвим, ніж в задачі про генерацію еолових тонів.

На рисунку 3.13 представлені модуль і фаза перших двох гармонік акустичного тиску  $p_1$  і  $p_2$  на відстані 1 м від вершини клину для випадку  $Re = 1600$ . Видно, що перша гармоніка  $p_1$ , що відповідає коливанням з періодом  $T$ , представляє собою коливання у вертикальному напрямку. Тоді як друга гармоніка  $p_2$  представляє собою коливання в горизонтальному напрямку. Слід також зазначити, що фаза коливань має антисиметричний характер відносно горизонтальної осі у випадку  $p_1$ , що пов'язане з тим, що

утворення вихорів у верхньому і нижньому шарах змішування відбувається не одночасно, а по черзі. І, навпаки, у разі  $p_2$  фаза коливань має симетричний характер.

В силу описаних вище причин автоколивальний процес, що виникає при набіганні затопленого струменя на клин, є акустичним джерелом (клинового тону) дипольного типу. Для першої гармоніки  $p_1$  акустична вісь джерела перпендикулярна напрямку потоку. Тоді як для другої гармоніки  $p_2$  акустична вісь спрямована вздовж потоку. На 3.14 зображена нормована діаграма спрямованості породжуваного потоком звуку. Ці дані повністю узгоджуються з експериментальною діаграмою спрямованості, представленою в [237]. Слід зазначити, що із зростанням числа Рейнольдса вклад гармоніки  $p_2$ , викликаній осциляцією сили лобового опору, зростає. В таблиці 3.2 представлені амплітуди двох гармонік  $p_1$  і  $p_2$ , а також їх відношення для трьох значень числа Рейнольдса. Видно, що якщо при  $Re = 1600$  відношення амплітуд першої і другої гармонік складає 4.59, то при  $Re = 6400$  – лише 2.8.

### 3.5 Висновки до розділу

В даному розділі розв'язано задачу про генерацію звуку (клинових тонів) затопленим струменем, що натікає на гострий клин. Згідно з викладеним у Розділі 1 методом, задача розв'язується у два етапи. На першому етапі шляхом прямого чисельного розв'язання нестационарної системи рівнянь Нав'є-Стокса виконано розв'язок задачі гідродинаміки про натікання затопленого струменя, сформованого вузьким каналом (соплом) на гострий жорсткий клин. Описано основні гідродинамічні характеристики даної течії. Отримано і проаналізовано дані про залежності полів завихреності і полів тиску від часу в течія перехідного процесу, який призводить до збудження поперечних коливань струменя, і процесу усталених автоколивань струменя. Зокрема встановлено, що впродовж перехідного процесу роль гідродинамічного каналу зворотного зв'язку виконують вихрові утворення, які виникли у момент початкового натікання струменя на клин, що рухаються проти на-

прямку струменя, і притискаються до граней клину. Коли процес автоколивань стає ustalеним, гідродинамічний канал зворотного зв'язку формується за рахунок різниці тисків на гранях клину і періодичної зміни їх знаку, що викликає періодичний (знакозмінний) потік середовища з однієї грані клину на іншу грань і, як наслідок, періодичні поперечні коливання струменя. Отримані основні гідродинамічні характеристики, у тому числі коефіцієнти лобового опору і підйомної сили  $C_x$  і  $C_y$ , а також описаний процес коливання у часі сил, прикладених до клину. Описано процес періодичної зміни у часі розподілу тиску на поверхні клину. Отримано значення числа Струхала  $St$  при різних значеннях числа Рейнольдса  $Re$ . Порівняння теоретично оціненого, такого важливого інтегрального параметра, як частота автоколивань струменя, з експериментальним значенням частоти показує їх хороший збіг.

На другому етапі, використовуючи дані про розподіл тиску на поверхні клину в якості граничної умови, розв'язано акустичну задачу про випромінювання звуку затопленим струменем, що набігає на клин. Дані чисельних розрахунків підтвердили правильність зроблених припущень. Зокрема показано, що повна акустична потужність клинового тону на вісім порядків менше потужності струменя, що набігає на клин. Отримано просторові розподіли звукового поля (діаграми спрямованості) при різних значеннях числа Рейнольдса. Показано, що вісь діаграми спрямованості клинового тону  $p_1$ , збуджуваного коливаннями підйомної сили розташована перпендикулярно напрямку потоку, а вісь діаграми спрямованості клинового тону  $p_2$ , збуджуваного коливаннями сили лобового опору, співпадає з напрямком потоку. Встановлено, що  $p_2/p_1 \ll 1$ , проте із зростанням числа Рейнольдса відношення  $p_2/p_1$  зростає.

## Розділ 4

# Генерація автоколивань при обтіканні циліндра з плоским спліттером

### 4.1 Вступ до розділу

Обтікання кругового циліндра потоком в'язкої рідини являлося предметом багатьох розрахункових і експериментальних досліджень. Історія вивчення таких течій досить детально викладена, наприклад, в [152, 241]. Причина такої популярності даних задач полягає в тому, що обтікання циліндра потоком зустрічається всюди в природі і техніці. Добре відомо, що при певних числах Рейнольдса при обтіканні потоком подовжених тіл виникають звуки, що іменуються в літературі еоловими тонами. Історія вивчення еолових тонів прекрасно викладена в [2, 17]. Оскільки утворення і зрив вихорів за циліндром або будь-якими іншими подовженими тілами може призводити до небажаних вібрацій тіла і навіть до руйнування конструкцій, необхідно мати можливість контролювати процес зриву вихорів, можливість знижувати силу опору тіла, що обтікається, і амплітуду коливання сил прикладених до нього. Одним із способів контролю потоку являється розташування плоского спліттера за циліндром. Для детальнішого огляду експериментальних і розрахункових результатів, отриманих іншими авторами, ми посилаємо читача до статті [241].

У цьому Розділі чисельно розв'язано задачу про обтікання потоком в'язкої нестисливої рідині кругового циліндра і приєднаного з тильної сторони

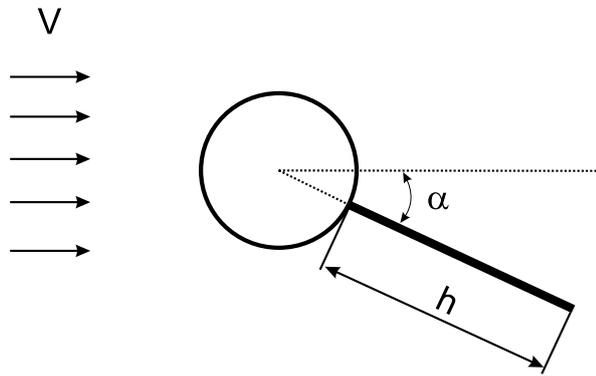


Рис. 4.1: Геометрія задачі

плоского спліттера. Досліджено як перехідний процес формування і початку відриву вихорів за циліндром, так і усталені автоколивання потоку, викликані періодичним утворенням і скиданням вихорів за циліндром. Результати цього розділу опубліковані в статті [225].

## 4.2 Постановка задачі та алгоритм її чисельного розв'язання

Розглянемо задачу про натікання потоку в'язкої нестисливої рідини на нерухомий круговий циліндр з плоским спліттером, розташованим за циліндром. Спліттер представляє собою абсолютно жорстку тонку пластину і може розташовуватись як вздовж потоку, так і під кутом до напрямку потоку. Розрахункова область і прийняті позначення представлені на рисунку 4.1. Розрахункова область займає прямокутник  $0 < x < L_1$ ,  $0 < y < L_2$ . Рідина подається на лівому торці ( $x = 0$ ), де задана постійна швидкість  $V$ . Далі потік натікає на круговий циліндр діаметру  $d$  з розташованим за ним тонким спліттером довжини  $h$  і покидає розрахункову область через праву межу ( $x = L_1$ ).

Задача формулюється в рамках моделі в'язкої нестисливої ньютонівської рідини. Такий процес описується нестационарною системою рівнянь Нав'є-Стокса. Для обезрозмірювання рівнянь руху за масштаб довжини приймався діаметр циліндра  $d$ , а за масштаб швидкості - швидкість рівномірного

потоків  $V$  на досить великому видаленні від циліндра. Тоді масштабом часу буде величина  $d/V$ , а масштабом тиску - подвоєний швидкісний напір  $\rho V^2$ . Основним параметром такої задачі, що входить в рівняння руху, є число Рейнольдса  $Re = Vd/\nu$ , де  $\nu$  - кінематична в'язкість середовища.

Граничні умови для швидкості задавалися наступним чином: рівномірний потік на вході в розрахункову область, умова прилипання на твердій поверхні циліндра і спліттера, рівність нулю нормального градієнта на виході з розрахункової області. Для тиску умова рівності нулю нормального градієнта формулювалась по усій межі розрахункової області за винятком виходу. На виході задавався постійний тиск.

У даній роботі ми проводили чисельні розрахунки для  $Re = 200$ , а довжину спліттера варіювали від  $0.5d$  до  $5.5d$ . При цьому спліттер міг розташовуватись не лише вздовж потоку, але і під деяким кутом  $\alpha$  до напрямку потоку.

Алгоритм чисельного розв'язання сформульованої задачі детально описаний у Розділі 1. Описаний алгоритм розв'язання базується на використанні методу скінченних об'ємів, який нині можна вважати найбільш популярним чисельним підходом в задачах механіки рідин. При розрахунках використовувались бібліотеки тулбокса з відкритим кодом OpenFOAM. Просторова дискретизація виконувалась на структурованій сітці O-типу із згущуванням вузлів поблизу твердої поверхні циліндра і спліттера. Довжина сторони контрольного об'єму у безпосередній близькості до поверхні не перевищувала  $10^{-4}$ . Як для просторової, так і для часової дискретизації використовувались схеми другого порядку, зокрема, для дискретизації конвективних членів використовувалась TVD схема, імплементована в OpenFOAM. В якості схеми дискретизації похідної за часом використовувалась неявна триточкова несиметрична схема другого порядку з різницями назад (backward differencing). З метою верифікації використовуваного чисельного алгоритму було чисельно розв'язано класичну задачу про нестационарний відриві потоку при обтіканні кругового циліндра (див. Розділ 2, а також статті [242, 243]). Отримані нами результати порівнювались з розрахунковими і експериментальними да-

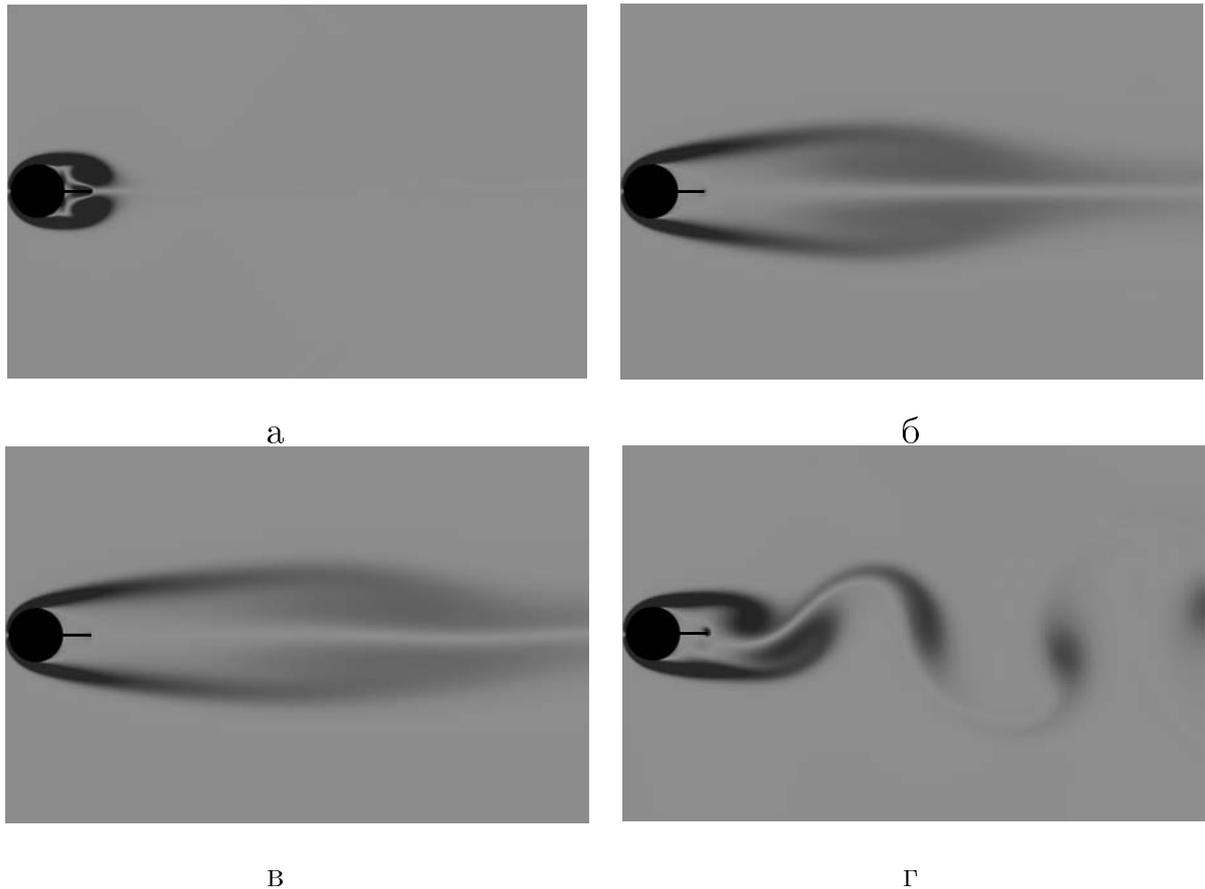


Рис. 4.2: Поле завихреності впродовж перехідного процесу ( $Re = 200$ ,  $h = d/2$ ,  $\alpha = 0$ ): а –  $t = 2.5$ , б –  $t = 41$ , в –  $t = 57$ , г –  $t = 140$

ними інших авторів. Для розпаралелювання обчислень використовувалась технологія MPI і метод розпаралелювання відомий, як декомпозиція області розв'язку, тобто розпаралелювання на основі геометричного паралелізму. Розрахунки проводились на кластерному суперкомп'ютері Інституту кібернетики НАН України [244].

### 4.3 Аналіз чисельних результатів

Спочатку розглянемо перехідний процес для випадку, коли довжина спліттера дорівнює радіусу циліндра  $h = d/2$  і  $\alpha = 0$ . Течія розвивається у часі із стану спокою. Після початку руху за циліндром починає формуватися пара вихорів, що мають рівні по модулю, але протилежні за знаком значення завихреності, тобто два симетричних вихори, закручені в протилежні боки. На рисунках 4.2 а і 4.3 а показано момент, коли вихрова пара

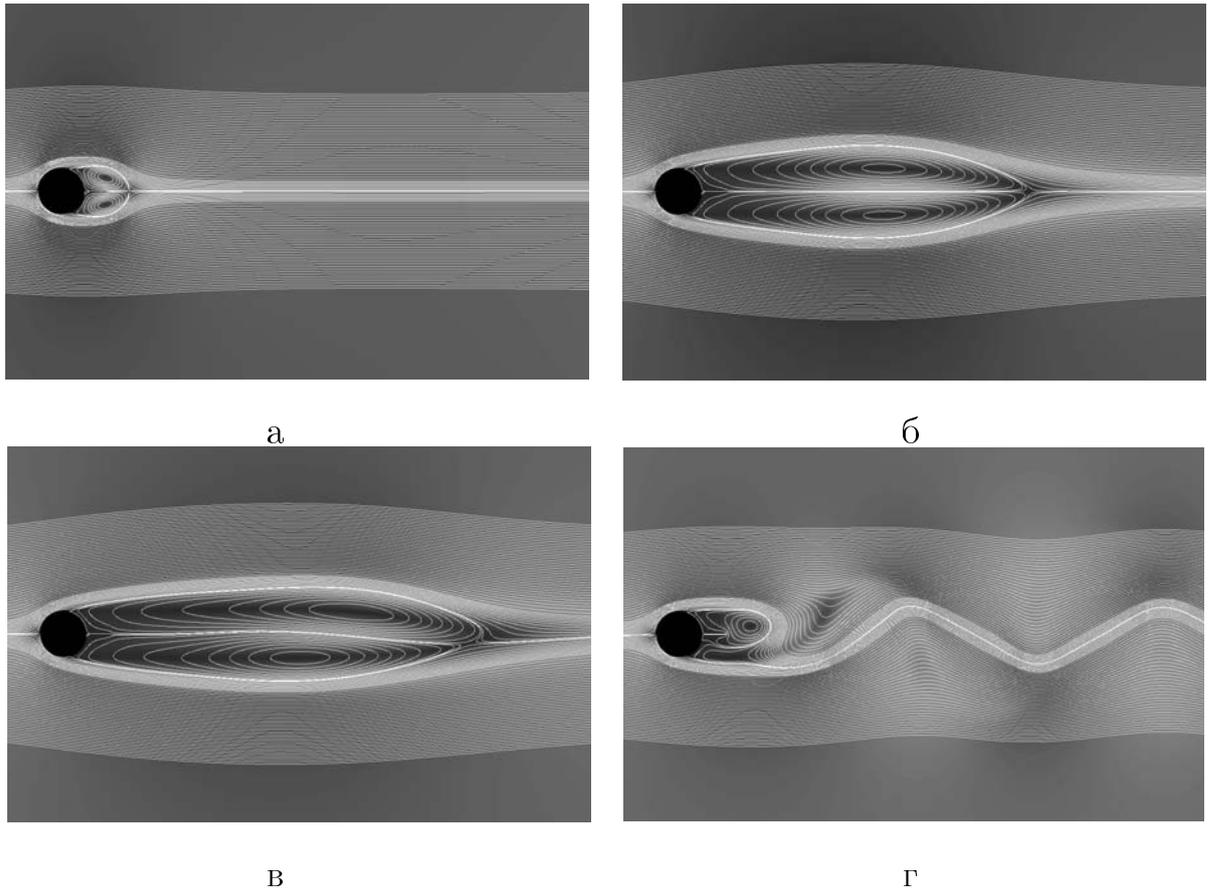


Рис. 4.3: Миттєві лінії струму впродовж перехідного процесу ( $Re = 200$ ,  $h = d/2$ ,  $\alpha = 0$ ): а -  $t = 2.5$ , б -  $t = 41$ , в -  $t = 57$ , г -  $t = 140$

за циліндром тільки починає формуватися. Горизонтальний розмір вихорів, тобто відстань від кормової точки циліндра до точки перетину миттєвих ліній струму лише трохи перевищує діаметр циліндра. Усередині вихорів, що утворилися, спостерігаються локальні мінімуми тиску. Далі, з часом розміри вихрової пари за циліндром продовжують зростати і досягають деякого максимального значення у момент часу приблизно  $t = 41$ . Поле завихреності і картина ліній струму у цей момент часу показана на рисунках 4.2 б і 4.3 б. На межі цієї все ще стаціонарної вихрової пари формується шар змішування, що розширюється, тобто шар зсувної течії, який характеризується значними поперечними (у напрямку осі  $Oy$ ) градієнтами завихреності, що, як відомо, сприяє нестійкості потоку. В силу цього при подальшому збільшенні вихрової пари за циліндром порушується симетрія течії. На рисунках 4.2 в і 4.3 в показано момент часу  $t = 57$ , коли симетрія течії тільки починає руйнуватися. Далі з часом симетрія течії за циліндром повністю руйнується

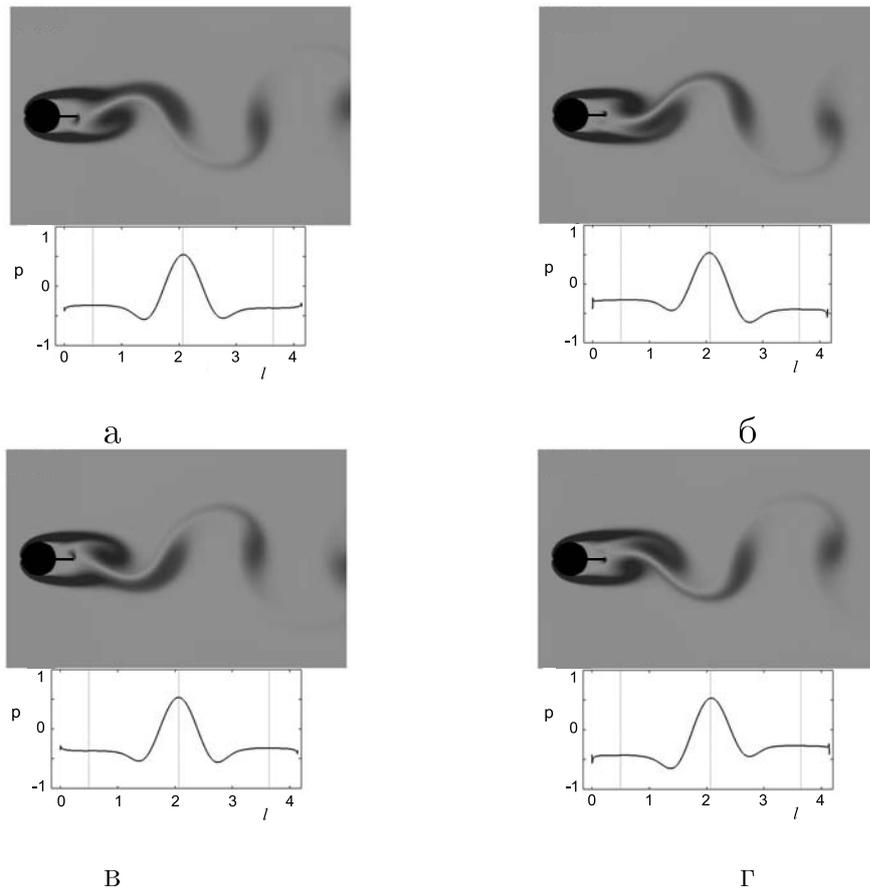


Рис. 4.4: Поле завихреності впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = d/2$ ,  $\alpha = 0$ ). На нижніх рисунках показано розподіл тиску по поверхні тіла, що обтікається: а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

і течія переходить в режим усталеного періодичного утворення і скидання вихорів. Верхній і нижній вихори скидаються в шаховому порядку. Це видно на рисунках 4.2 г і 4.3 г, де показано момент часу  $t = 140$ . В даний момент вже спостерігаються стійкі автоколивання течії за циліндром.

Розглянемо усталений процес автоколивань потоку за циліндром. На рисунку 4.4 представлені поля завихреності і розподіл тиску на поверхнях спліттера і циліндра впродовж одного періоду коливань з кроком в чверть періоду ( $T/4$ ). При побудові розподілу тиску по твердій поверхні спліттера і циліндра поверхня обходить за годинниковою стрілкою, починаючи з кінця спліттера. Тобто, точка  $l = 0$  відповідає кормовій точці спліттера. Середня вертикальна пунктирна лінія на рисунку відповідає передній точці циліндра. А ліва і права пунктирні лінії відсікають поверхню спліттера від

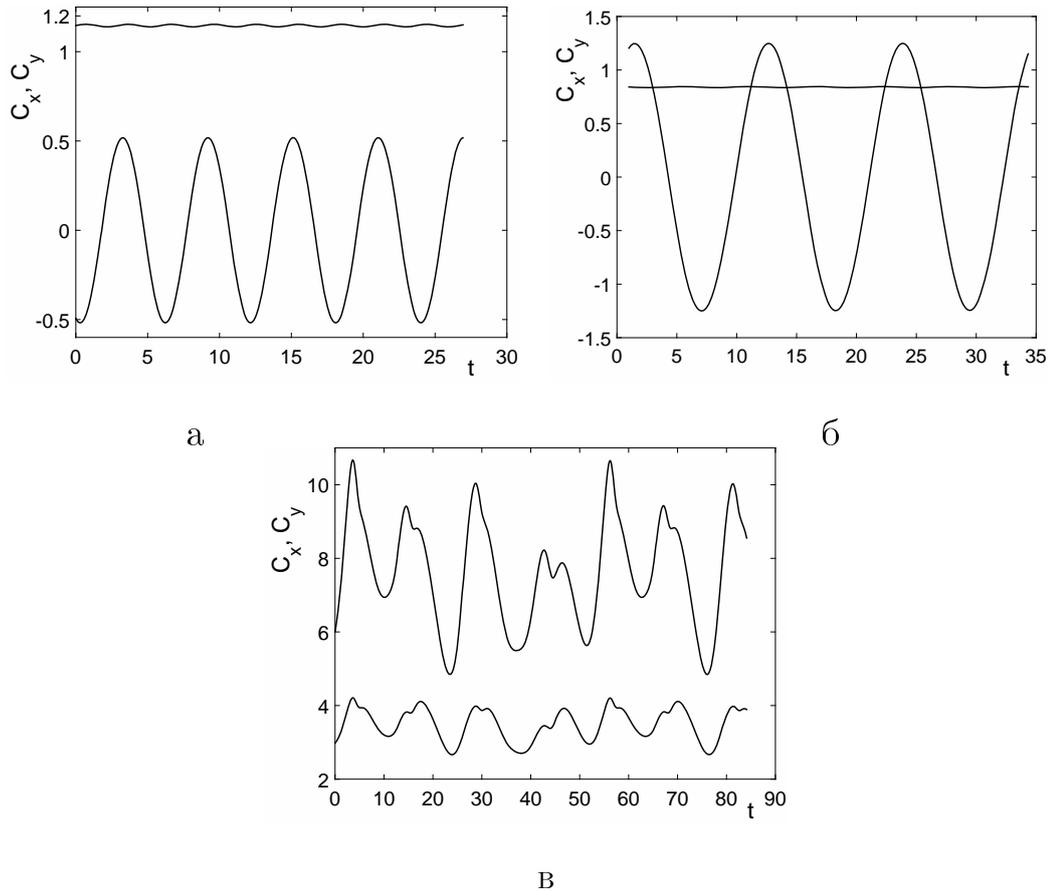


Рис. 4.5: Періодичні коливання у часі коефіцієнтів сил, прикладених до тіла, що обтікається, ( $Re = 200$ ): а - при  $h = d/2$ ,  $\alpha = 0$ , верхня крива – коефіцієнт опору  $C_x$ , нижня крива – коефіцієнт підйомної сили  $C_y$ , б - при  $h = 11d/2$ ,  $\alpha = 0$ , крива, розташована у верхній частині рисунка, яка має малу амплітуду коливань –  $C_x$ , крива, що має велику амплітуду коливань і середню лінію в нижній частині рисунка –  $C_y$ , в – при  $h = 11d/2$ ,  $\alpha = 20^\circ$ , верхня крива –  $C_y$ , нижня крива –  $C_x$

поверхні циліндра. За початковий момент часу ( $t = 0$ ) приймемо момент, коли коефіцієнт підйомної сили, який, як буде видно нижче, коливається періодично навколо нуля, стає рівним нулю ( $C_y = 0$ ).

Видно, що вихори вже утворюються не відразу за поверхнею циліндра, як при обтіканні кругового циліндра без спліттера [242, 243], а за спліттером. Тобто, вихори взаємодіють вже не стільки з циліндром, але, передусім, з кінчиком спліттера. Слід зазначити, що так само, як і при обтіканні циліндра, при якому виникають еолові тони, в цій течії ми також бачимо періодичне змінювання розподілу тиску по поверхні, що також може служити джерелом

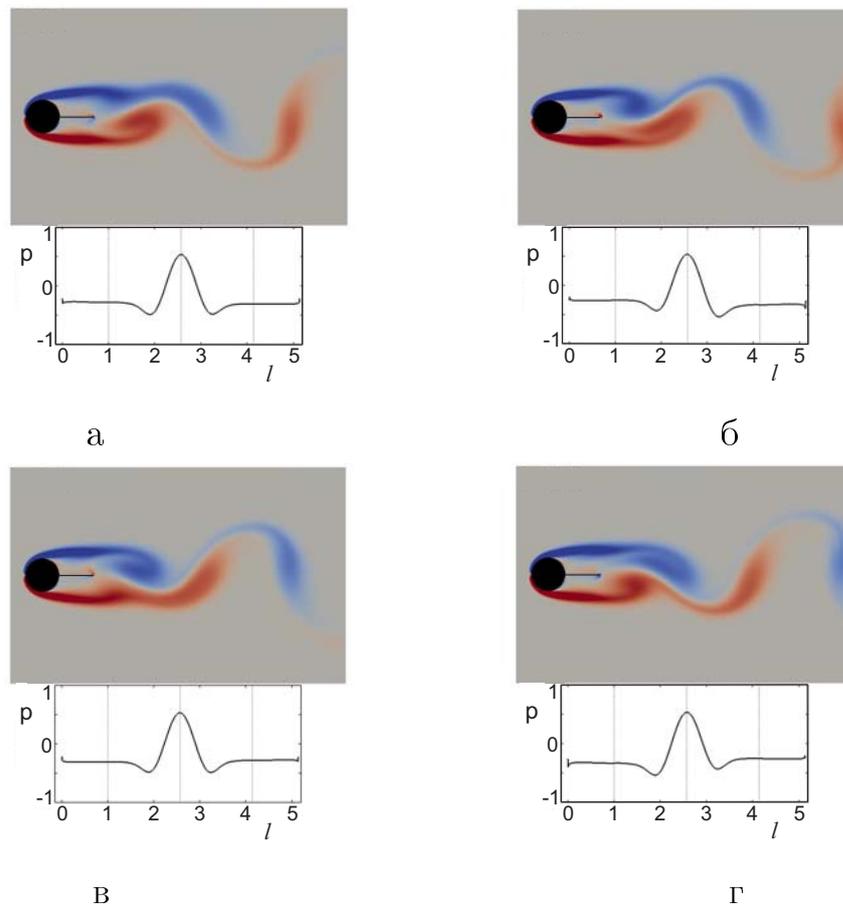


Рис. 4.6: Поле завихреності впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = d$ ,  $\alpha = 0$ ). На нижніх рисунках показано розподіл тиску по поверхні тіла, що обтікається: а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

звукових коливань. Так, якщо у момент  $t = T/4$  мінімум тиску розташовано на верхній частині поверхні, то у момент  $t = 3T/4$  мінімум тиску вже розташовано на нижній частині поверхні.

Періодичний характер течії в сліді за циліндром призводить до того, що сили, прикладені до циліндра, також змінюються періодично у часі, причому взаємодія вихорів практично не впливає на передню критичну точку, в силу її видалення від області відриву вихорів. На рисунку 4.5 а показана зміна у часі коефіцієнтів лобового опору  $C_x$  і підйомної сили  $C_y$  при  $h = d/2$ ,  $\alpha = 0$ . Очевидно, що дія сил змінюється періодично. Причому період зміни лобового опору удвічі менше, ніж період зміни підйомної сили. Іншими словами, частота коливання сили, що діє на циліндр і спліттер

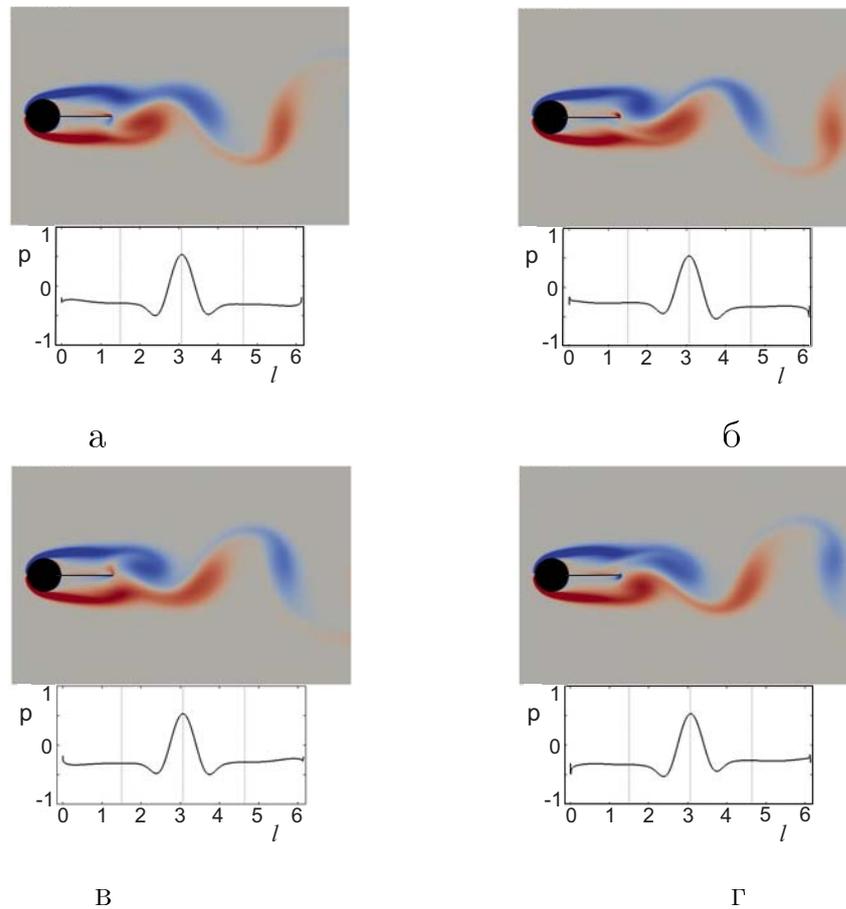


Рис. 4.7: Поле завихреності впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = 3d/2$ ,  $\alpha = 0$ ). На нижніх рисунках показано розподіл тиску по поверхні тіла, що обтікається: а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

в горизонтальному напрямку, вдвічі вище частоти коливання цієї сили у вертикальному напрямку. Цей же ефект має місце і при обтіканні кругового циліндра без спліттера [242, 243]. На двох інших рисунках 4.5 показана зміна у часі коефіцієнтів сил при довжині спліттера  $h = 11d/2$ . Рисунок 4.5 б відповідає випадку, коли спліттер, розташований вздовж напрямку потоку. В цьому випадку в силу симетричної геометрії задачі підйомна сила коливається біля нуля, а частота коливань сили опору вдвічі вище частоти коливань підйомної сили. Також слід зазначити, що при подовженні спліттера амплітуда коливань підйомної сили зростає настільки, що у своїх пікових значеннях вона перевищує силу лобового опору. При цьому сила опору дещо зменшилася. Таким чином, порівняння рисунків 4.5 а і б показує, що із

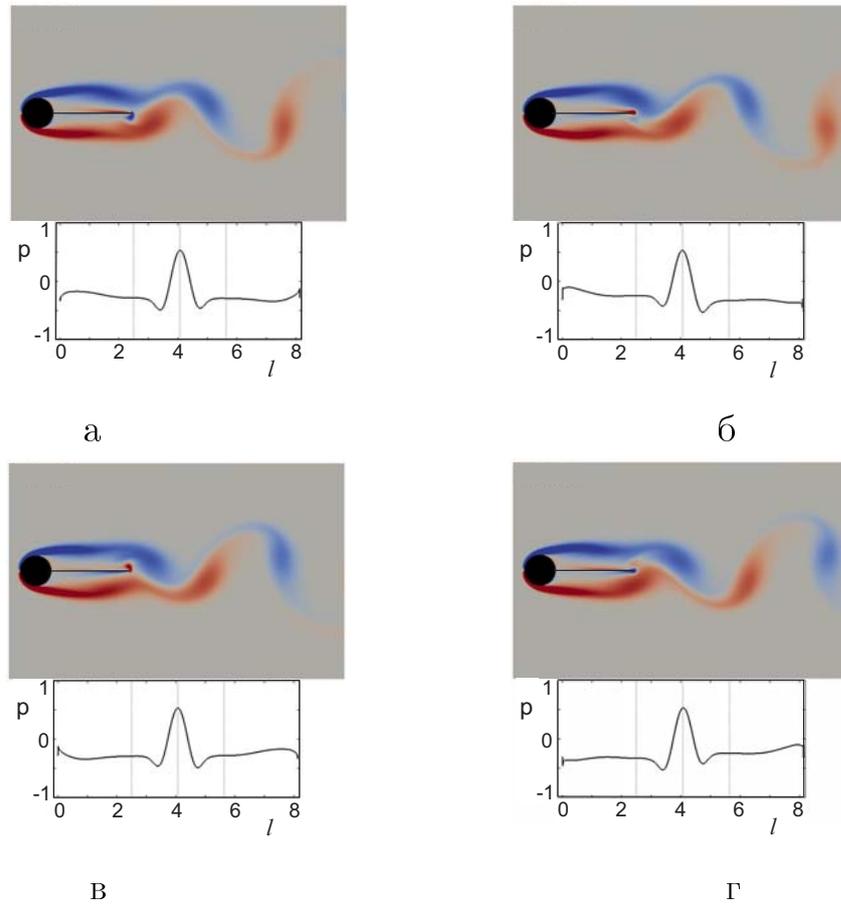


Рис. 4.8: Поле завихреності впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = 5d/2$ ,  $\alpha = 0$ ). На нижніх рисунках показано розподіл тиску по поверхні тіла, що обтікається: а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

зростанням довжини спліттера сила лобового опору дещо зменшується, а амплітуда коливань підйомної сили зростає більше, ніж у два рази. Рисунок 4.5 в відповідає випадку, коли спліттер повернуто до напрямку потоку на кут  $\alpha = 20^\circ$ . В цьому випадку із-за відхилення спліттера виникає ненульове середнє значення підйомної сили. Більше того, крива, що відповідає підйомній силі, лежить вище, ніж крива, що відповідає силі опору. Тобто, навіть порівняно невелике відхилення спліттера на кут  $\alpha = 20^\circ$  приводить до того, що підйомна сила стає більше сили лобового опору. Також слід зазначити, що зміна у часі сил, прикладених до твердого тіла, що обтікається, вже не носить явно виражений періодичний характер. Тобто, навіть незначне відхилення спліттера при його довжині  $h = 11d/2$  призводить до порушення

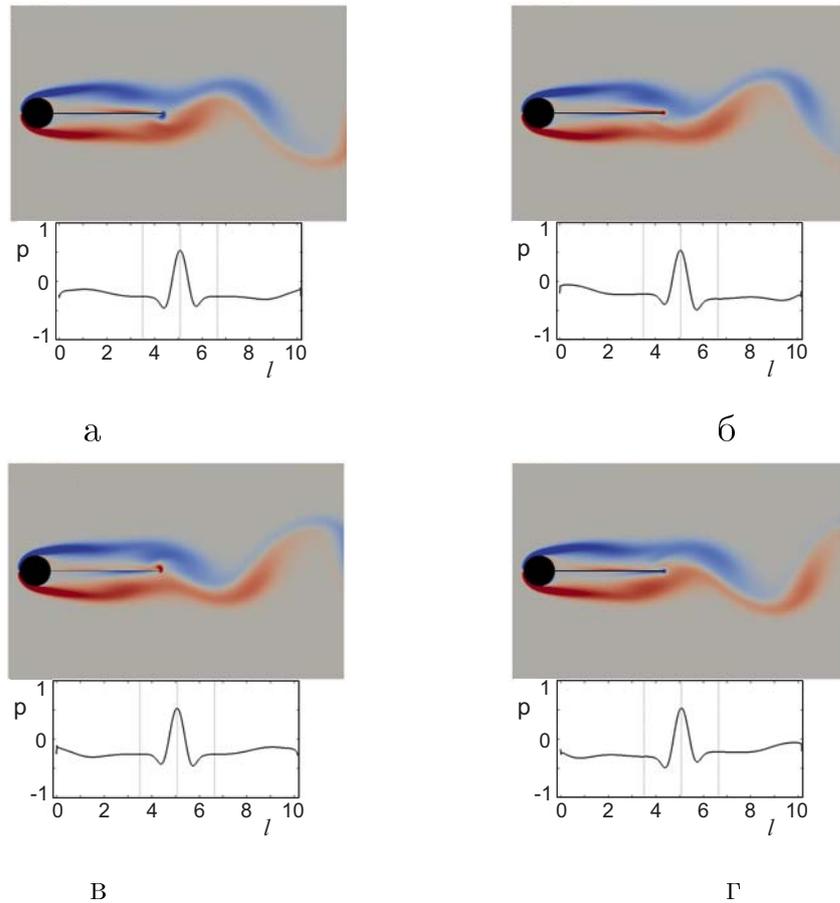


Рис. 4.9: Поле завихреності впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = 7d/2$ ,  $\alpha = 0$ ). На нижніх рисунках показано розподіл тиску по поверхні тіла, що обтікається: а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

строгої регулярності процесу. На рисунку 4.12 показано поле завихреності такої течії в моменти часу з інтервалом  $T/4$ . Видно, що утворений у верхній частині циліндра примежовий шар відривається від поверхні циліндра і стає вільним зсувним шаром, не досягнувши поверхні спліттера. Між верхнім вільним зсувним шаром, що відірвався, і поверхнею спліттера можлива поява великих вихорів і зон зворотної течії. У нижній же частині циліндра, навпаки, зсувний шар знаходиться біля поверхні тіла, що обтікається, аж до кінчика спліттера. Відрив зсувного шару і утворення великого вихору відбувається вже за кормовою точкою спліттера. Таким чином, коливання верхнього (синього) і нижнього (червоного) зсувних шарів мають різний характер і відрізняються за частотою. Цим і пояснюється порушення строгої

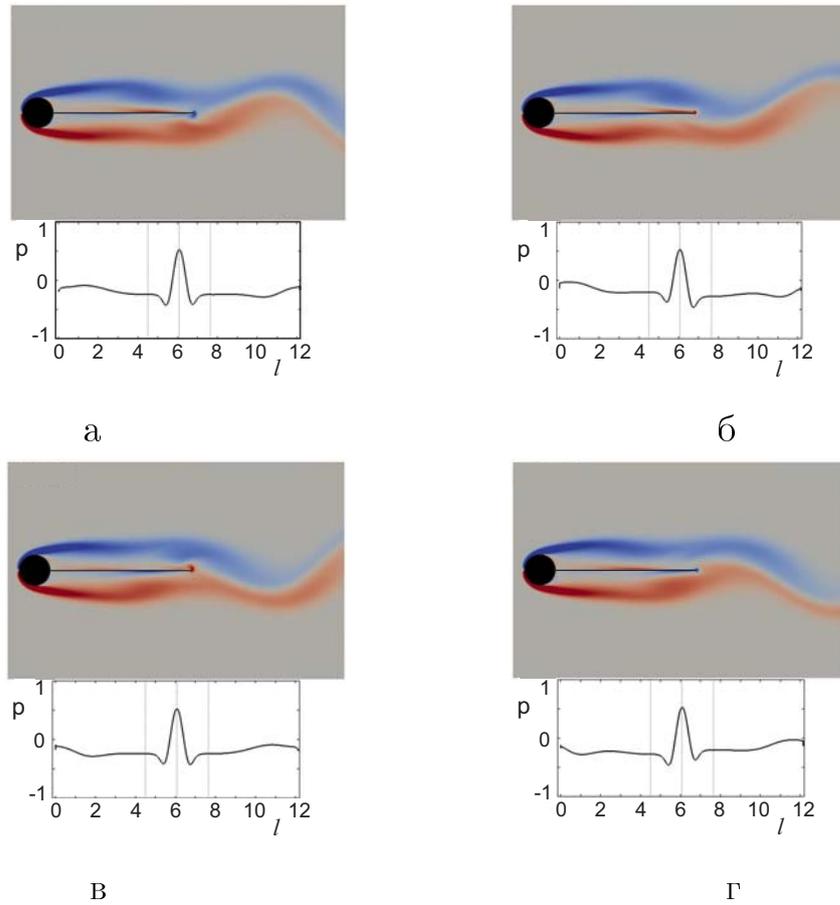


Рис. 4.10: Поле завихреності впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = 9d/2$ ,  $\alpha = 0$ ). На нижніх рисунках показано розподіл тиску по поверхні тіла, що обтікається: а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

регулярності і періодичності процесу коливання сил, прикладених до циліндра і спліттера. Іншими словами, процес утворення і зриву вихорів з поверхні тіла продовжується, проте більше не спостерігається строга регулярність і періодичність цього процесу.

Коефіцієнти лобового опору і підйомної сили формально можуть бути представлені у вигляді суми сталої і осцилюючої частин:

$$C_x = \bar{C}_x + \tilde{C}_x, \quad C_y = \bar{C}_y + \tilde{C}_y, \quad (4.1)$$

де  $\bar{C}_x$ ,  $\bar{C}_y$  – постійні складові сил, прикладених до циліндра і спліттера (очевидно, що при розташуванні спліттера уздовж напрямку потоку, що набігає,  $\bar{C}_y = 0$ , а при відхиленні спліттера на деякий кут  $\alpha$  виникає ненульове середнє значення підйомної сили), а  $\tilde{C}_x$ ,  $\tilde{C}_y$  – осцилюючі складові сил. В таблиці

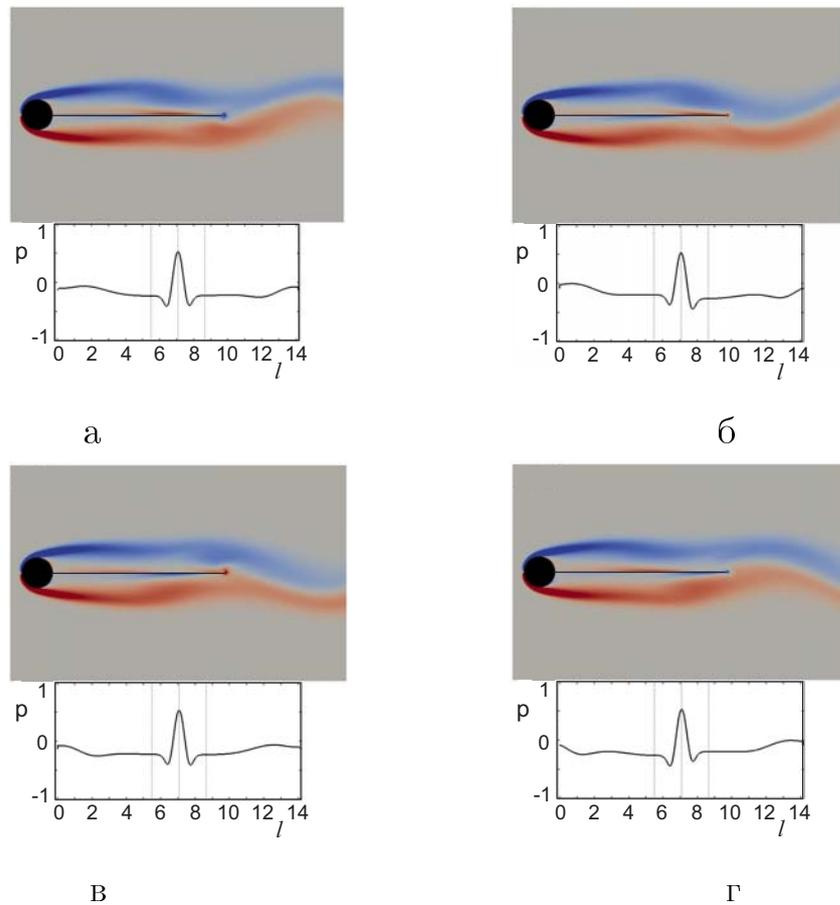


Рис. 4.11: Поле завихреності впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = 11d/2$ ,  $\alpha = 0$ ). На нижніх рисунках показано розподіл тиску по поверхні тіла, що обтікається: а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

4.1 наведено значення сталої складової  $\bar{C}_x$  і амплітуди осцилюючих складових  $\tilde{C}_x$ ,  $\tilde{C}_y$ , а також відношення цих амплітуд для різної довжини спліттера. Крім того, в таблиці наведено значення періоду коливань і числа Струхалля. В усіх розглянутих випадках спліттер розташовувався уздовж напрямку потоку ( $\alpha = 0$ ), а значення числа Рейнольдса було прийнято  $Re = 200$ .

Видно, що наявність спліттера за циліндром істотно зменшує середнє значення опору тіла. Причому із зростанням довжини спліттера коефіцієнт опору продовжує зменшуватися. Це, напевне, пов'язано з тим, що між циліндром і спліттером утворюються вихори, що призводить до появи поблизу поверхні тіла зон зворотного руху, що і зменшує опір. Також слід зазначити, що за наявності спліттера істотно зменшується амплітуда коливань

Табл. 4.1: Розрахункові значення характеристик періодичної течії для різних значень довжини сліттера  $h$  ( $Re = 200$ ,  $\alpha = 0$ ). Використано наступні позначення:  $\Gamma$  – період коливань,  $St$  – число Струхала,  $\bar{C}_x$  – середнє значення коефіцієнта опору,  $\max|\tilde{C}_x|$  – амплітуда коливань коефіцієнта опору,  $\max|\tilde{C}_y|$  – амплітуда коливань коефіцієнта підйомної сили,  $|\tilde{C}_x|/|\tilde{C}_y|$  – відношення амплітуд коливання  $C_x$  і  $C_y$

$h$	$\Gamma$	$2\Gamma$	$3\Gamma$	$5\Gamma$	$7\Gamma$	$9\Gamma$	$11\Gamma$	$0$
$\Gamma$	5.89	6.30	5.72	5.78	7.22	9.11	11.2	5.082
$St$	0.170	0.159	0.175	0.173	0.139	0.110	0.089	0.197
$\bar{C}_x$	1.146	1.044	1.039	0.997	0.927	0.875	0.840	1.343
$\max \tilde{C}_x $	$7.2 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$
$\max \tilde{C}_y $	0.518	0.333	0.416	0.949	1.150	1.241	1.249	0.686
$ \tilde{C}_x / \tilde{C}_y $	$1.39 \cdot 10^{-2}$	$0.72 \cdot 10^{-2}$	$1.49 \cdot 10^{-2}$	$1.16 \cdot 10^{-2}$	$0.45 \cdot 10^{-2}$	$0.35 \cdot 10^{-2}$	$0.39 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$

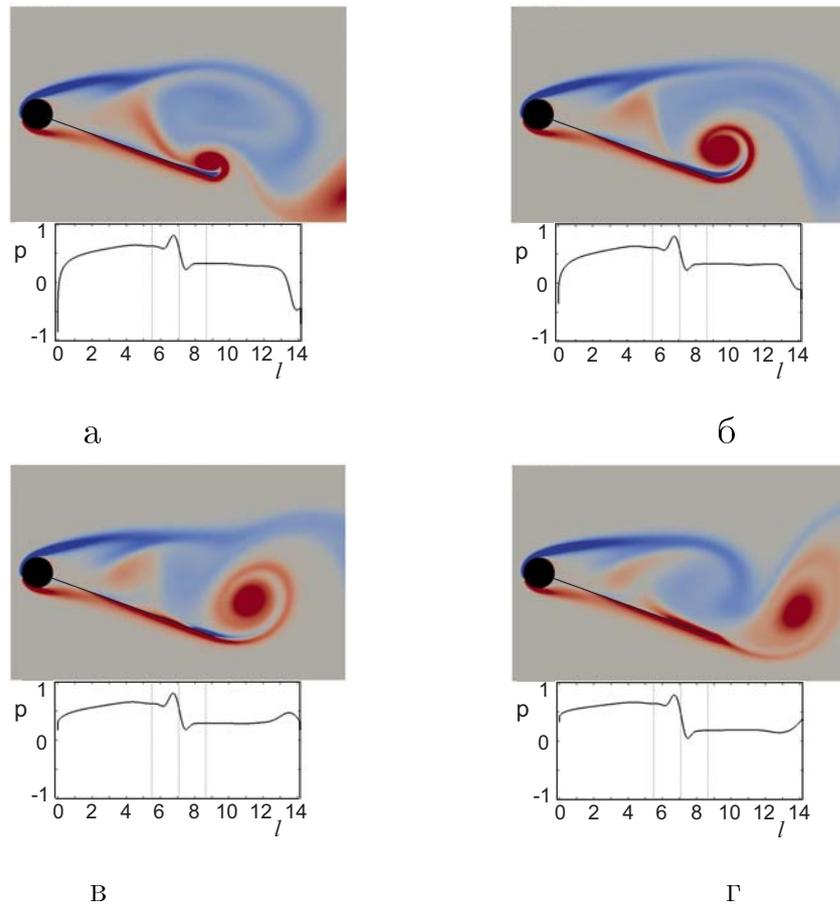


Рис. 4.12: Поле завихреності впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = 11d/2$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ). На нижніх рисунках показано розподіл тиску по поверхні тіла, що обтікається: а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

коефіцієнта опору. Так, при обтіканні циліндра без спліттера ( $h = 0$ ) амплітуда коливань коефіцієнта опору дорівнює  $5 \cdot 10^{-2}$ . А за наявності навіть невеликого спліттера, довжина якого дорівнює радіусу циліндра, амплітуда коливань коефіцієнта опору вже зменшується до  $0.72 \cdot 10^{-2}$ . При подальшому подовженні спліттера амплітуда коливань  $\tilde{C}_x$  веде себе немонотонно. Спочатку вона зменшується аж до  $h = d$ , потім зростає аж до  $h = 5d/2$ , потім знову зменшується аж до  $h = 9d/2$  і потім знову зростає. Це, напевно, залежить від того скільки вихорів, що зірвалися з поверхні циліндра, уміщується вздовж спліттера. Також слід зазначити, що за наявності спліттера істотно збільшується період коливань, тобто час між утворенням і скиданням вихорів. При подальшому збільшенні довжини спліттера період вихроутворення

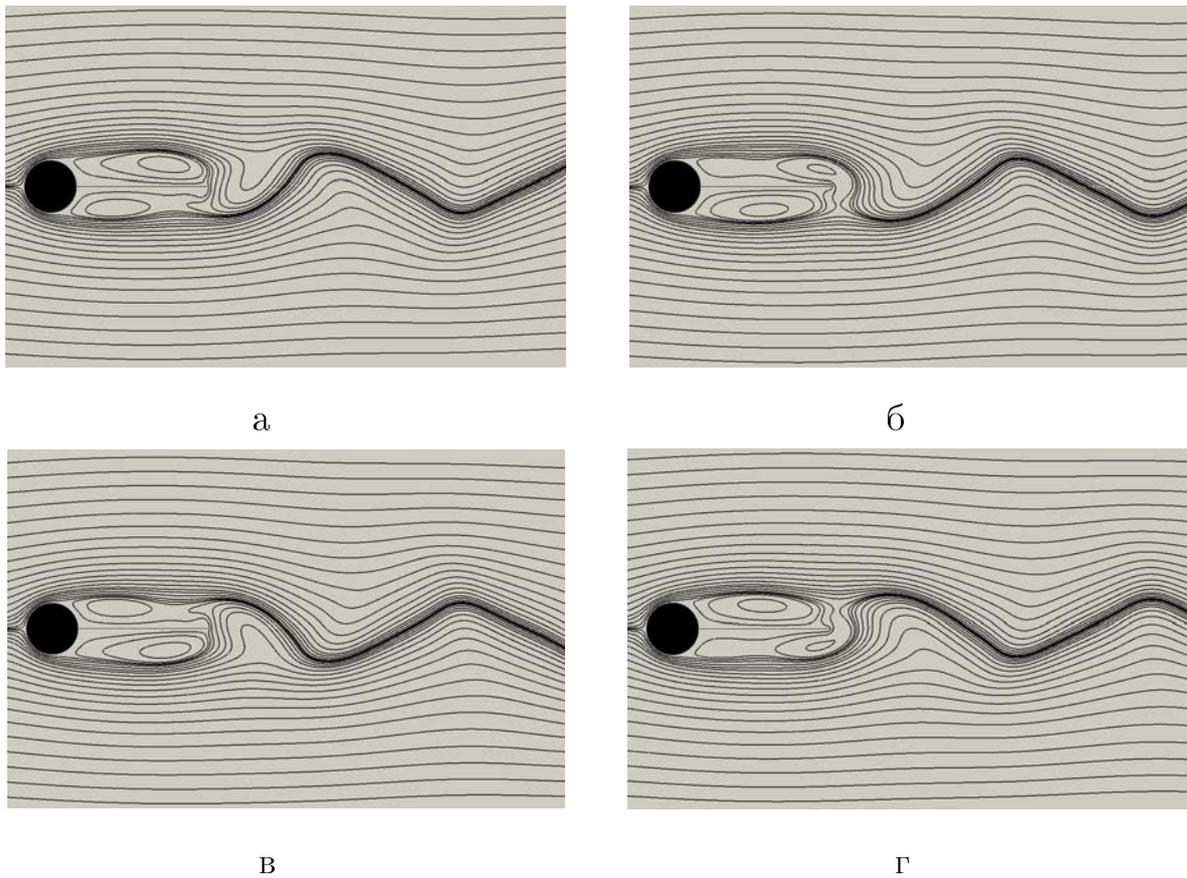


Рис. 4.13: Миттєві лінії струму впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = 5d/2$ ,  $\alpha = 0$ ): а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

також зростає. Проте, цей процес немонотонний. Так при переході від  $h = d$  до  $h = 3d/2$  період різко скорочується.

На рисунках 4.6 – 4.11 представлено поле завихреності течії для різних довжин спліттера і при розташуванні спліттера уздовж потоку. На нижній частині рисунка, як і раніше, представлено розподіл тиску по поверхні тіла, що обтікається. Вертикальні пунктирні лінії відсікають поверхню циліндра від поверхні спліттера. Видно, що при  $h = d$  зсувні шари, що утворилися на поверхні циліндра, відриваються від поверхні циліндра і рухаються вздовж спліттера. Утворення ж великих вихорів в сліді відбувається вже за кормовою точкою спліттера. Отже, великі вихори, що утворилися, взаємодіють вже не стільки з поверхнею циліндра, скільки з кормовою частиною спліттера. Взаємодія вихорів, що утворилися, з кормовою частиною спліттера повинне, напевно, давати суттєвий вклад в генероване звукове поле і їм

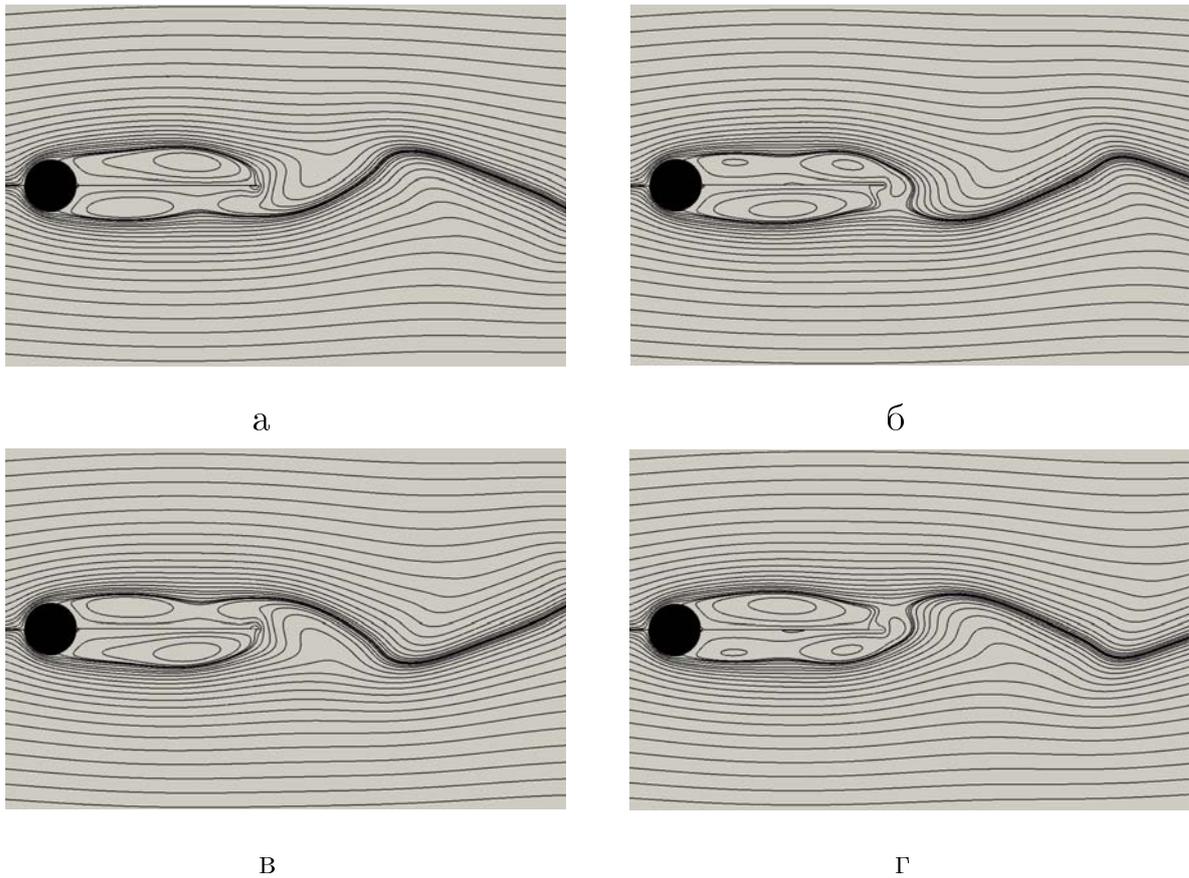


Рис. 4.14: Миттєві лінії струму впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = 7d/2$ ,  $\alpha = 0$ ): а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

не можна нехтувати. Із зростанням довжини спліттера взаємодія кормової частини спліттера з великими вихорами, що утворюються в зсувних шарах за циліндром тільки збільшується. Так вже при довжині спліттера рівній п'яти радіусам циліндра  $h = 5d/2$  видно, що утворення великих вихорів відбувається не за, а перед кормовою частиною спліттера. При подальшому ж подовженні спліттера (див., наприклад,  $h = 9d/2$  і  $h = 11d/2$ ) утворення великих вихорів в сліді, подібних до вихрової доріжки Кармана, вже не спостерігається. Зсувні шари, що відірвалися, просто мають хвилеподібну форму. Таким чином, подовження спліттера здійснює в цілому стабілізуючий вплив на потік.

На рисунках 4.13 – 4.16 показано миттєві лінії струму течії в моменти часу з інтервалом  $T/4$  при різних довжинах спліттера. Неважко бачити, що з обох сторін спліттера в області між спліттером і зсувними шарами, що відір-

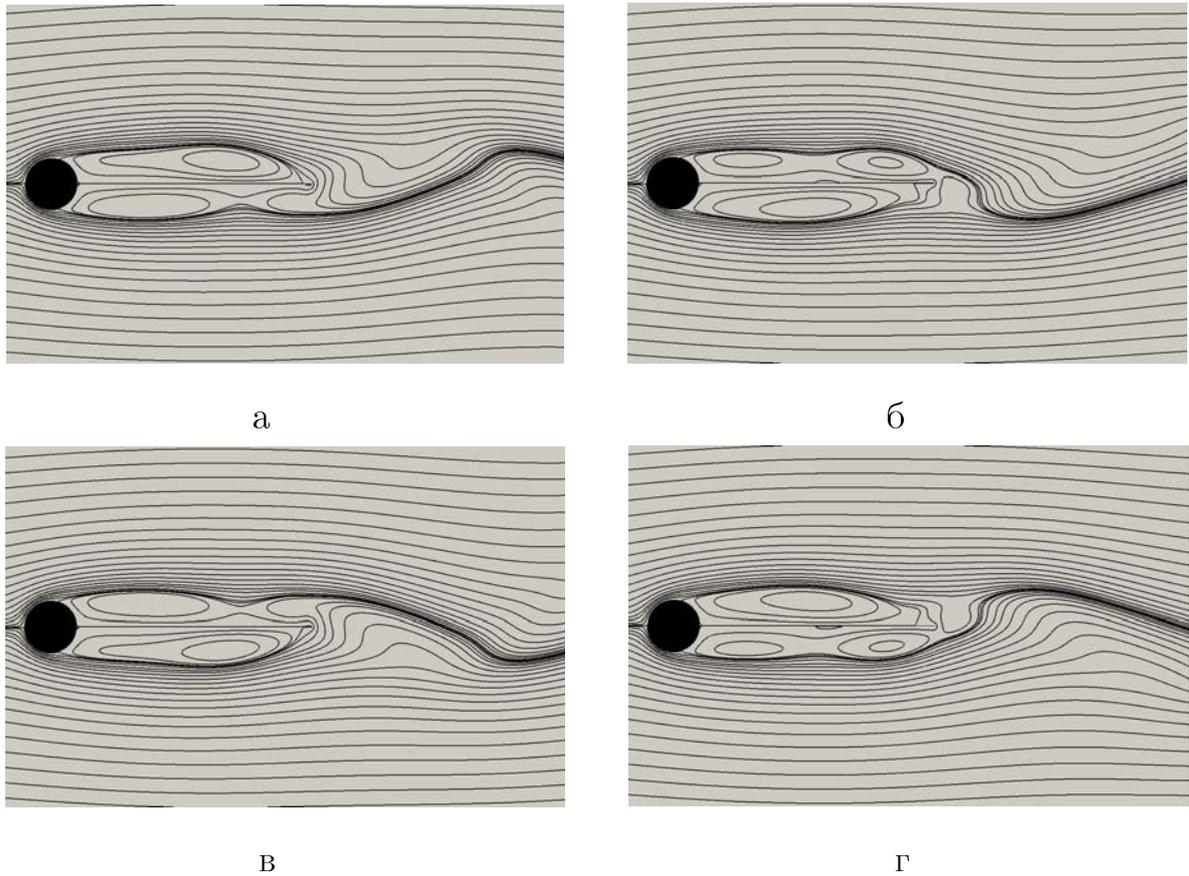


Рис. 4.15: Миттєві лінії струму впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = 9d/2$ ,  $\alpha = 0$ ): а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

валися, мають місце великі вихрові структури. І, як наслідок, біля поверхні спліттера мають місце зони зворотної течії. Це і приводить, як вже було зазначено вище, до того, що за наявності спліттера опір тіла і амплітуда коливань коефіцієнта опору різко знижуються. При подальшому збільшенні довжини спліттера у кожній його сторони вже може розташовуватись не один, а декілька великих вихорів (див., наприклад, 4.15, 4.16). Різна кількість вихорів розташованих вздовж спліттера, при різній його довжині, напевно, і є причиною того, що зі збільшенням довжини спліттера амплітуда коливань коефіцієнта опору поводитьсь не монотонно. Спочатку вона зменшується аж до  $h = d$ . При таких значеннях довжини спліттера біля кожної його сторони знаходиться по одному вихору, які і ведуть до зменшення як середнього значення коефіцієнта опору, так і амплітуди його коливань. Потім, із зростанням довжини спліттера до  $h = 5d/2$  розмір цих вихорів збільшується,

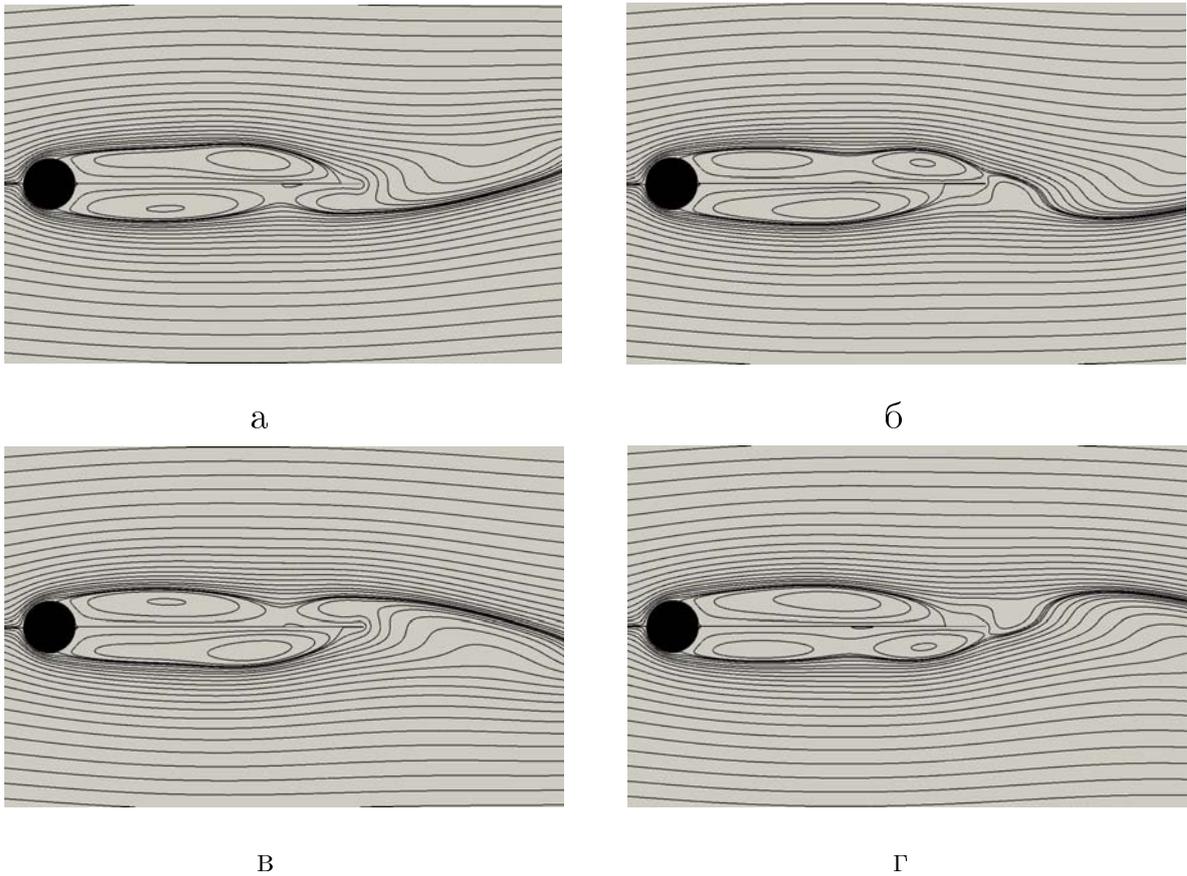


Рис. 4.16: Миттєві лінії струму впродовж періоду усталеного процесу утворення і зриву вихорів ( $Re = 200$ ,  $h = 11d/2$ ,  $\alpha = 0$ ): а –  $t = 0$ , б –  $t = T/4$ , в –  $t = T/2$ , г –  $3T/4$

що приводить до зменшення стійкості такої системи. І, як наслідок, амплітуда коливань сили опору зростає з подовженням спліттера до  $h = 5d/2$ . На рисунку 4.13 видно, що вже при  $h = 5d/2$  поблизу сторін спліттера по черзі починає з'являтися по два великих вихори. І, як наслідок, із зростанням довжини спліттера від  $h = 5d/2$  до  $h = 9d/2$  амплітуда коливання коефіцієнта опору зменшується. При подальшому збільшенні довжини спліттера розміри вихорів поблизу сторін спліттера зростають і це знову призводить до підвищення нестійкості такої системи. Тому при збільшенні довжини спліттера вище  $h = 9d/2$  амплітуда коливання сили опору знову зростає. Хоча середнє значення коефіцієнта опору монотонно зменшується зі збільшенням довжини спліттера в усьому розглянутому діапазоні значень  $h$ .

## 4.4 Розв'язок акустичної задачі

Дотримуючись основної ідеї методу, що викладена в розділі 1.1, з чисельного розв'язку відповідної задачі гідромеханіки, представленого в попередньому підрозділі, ми маємо розподіл тиску на поверхні циліндра і спліттера, який періодично змінюється у часі з періодом  $T$ . Ці пульсації тиску на поверхні циліндра і спліттера, природно, збуджують звукові коливання в оточуючому середовищі [2]. При цьому, якщо числа Маха відносно невеликі, рухом потоку можна знехтувати і вважати, що звук поширюється так само, як в нерухомому середовищі. Слід також відзначити, що хвильовий розмір джерела дуже малий [2].

Тоді звукове поле поза циліндром і спліттером може бути знайдене з відповідної граничної задачі для хвильового рівняння. Граничні умови мають вигляд:

$$p(r, \phi, t) = \begin{cases} \zeta_0(\phi, t), & \text{при } r = a, \\ \zeta_1(r, t), & \text{при } \phi = 0, \quad a < r < b, \\ \zeta_2(r, t), & \text{при } \phi = 2\pi, \quad a < r < b, \end{cases} \quad (4.2)$$

де  $(r, \phi)$  – полярні координати з початком координат в центрі циліндра,  $\zeta_0(\phi, t)$  – розподіл тиску на поверхні циліндра, створений потоком, і відомий з чисельного розв'язку відповідної задачі гідродинаміки, представленого в попередньому підрозділі,  $\zeta_1(r, t)$ ,  $\zeta_2(r, t)$  – розподіл тиску на верхній та нижній поверхнях спліттера, відповідно. Також були введені позначення  $a = d/2$ ,  $b = d/2 + h$ .

Оскільки функції  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ , що задані на поверхні тіла, є періодичними з періодом  $T$ , розв'язок сформульованої граничної задачі може бути представлено у вигляді ряду Фур'є по часовій координаті:

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} p_n(r, \phi), \quad (4.3)$$

де  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$  – кутова частота,  $f = StV/d$  – частота еолових тонів, а  $p_n(r, \phi)$  – розв'язок відповідного рівняння Гельмгольца.

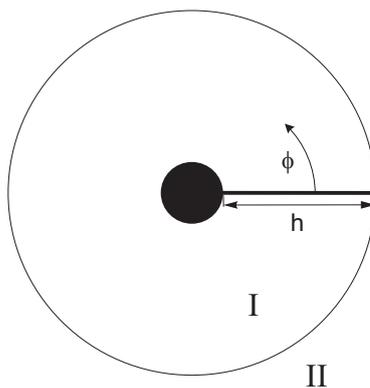


Рис. 4.17: Розрахункова область розбита на дві часткові області

Сформульована гранична задача для хвильового рівняння розв'язується методом часткових областей [238, 239]. Для цього вся розрахункова область розбивається на дві області, як показано на рисунку 4.17. Розв'язки рівняння Гельмгольца в кожній з цих двох областей добре відомі. Невідомі коефіцієнти розв'язків знаходяться з граничних умов, а також з умов спряження полів на межі між областями. Умови спряження на межі між заданими двома областями мають вигляд:

$$\begin{cases} p_n^{(I)}(r, \phi, t) = p_n^{(II)}(r, \phi, t), \\ \frac{\partial p_n^{(I)}(r, \phi, t)}{\partial r} = \frac{\partial p_n^{(II)}(r, \phi, t)}{\partial r}, \end{cases} \quad \text{при } r = a, \quad 0 < \phi < 2\pi. \quad (4.4)$$

Очевидно, що розв'язок в області II має такий самий вигляд, як розв'язок задачі для циліндра, яку було розглянуто в Розділі 2, а саме

$$p_n^{(II)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos\left(\frac{m}{2}\phi\right) H_m^{(1)}(k_n r), \quad (4.5)$$

де  $k_n = n\omega/c$  – хвильове число,  $c$  – швидкість звуку в середовищі,  $H_m^{(1)}$  – функція Ханкеля першого роду.

Область I представляє собою кільце з розрізом. Розв'язок рівняння Гельмгольца для такої області представляється у вигляді суперпозиції двох розв'язків:

$$p_n^{(I)} = p_n^{(R)} + p_n^{(\Phi)}, \quad (4.6)$$

де

$$p_n^{(R)} = \sum_{m=0}^{\infty} \cos(\gamma_m \phi) [B_{nm} J_{\gamma_m}(k_n r) + C_{nm} Y_{\gamma_m}(k_n r)], \quad (4.7)$$

$$p_n^{(\Phi)} = \sum_{m=0}^{\infty} R_{nm}(k_n r) \left[ D_{nm} e^{i\mu_{nm}\phi} + E_{nm} e^{-i\mu_{nm}(\phi-2\pi)} \right]. \quad (4.8)$$

Враховуючи, що поверхні спліттера є акустично жорсткими, тобто задовольняють умову  $\partial p / \partial \phi = 0$  при  $\phi = 0$  і  $\phi = 2\pi$ , маємо  $\gamma_m = m/2$ . Враховуючи, що поверхня циліндра є також акустично жорсткою, тобто задовольняє умову  $\partial p / \partial r = 0$  при  $r = a$  і  $r = b$ , маємо вираз для функції

$$R_{nm}(k_n r) = J_{\mu_{nm}}(k_n r) - \frac{J'_{\mu_{nm}}(k_n r_2)}{Y'_{\mu_{nm}}(k_n r_2)} Y_{\mu_{nm}}(k_n r), \quad (4.9)$$

де числа  $\mu_{nm}$  є коренями наступного дисперсійного рівняння

$$J'_{\mu}(k_n a) Y'_{\mu_{nm}}(k_n b) - J'_{\mu}(k_n b) Y'_{\mu_{nm}}(k_n a) = 0. \quad (4.10)$$

Корені цього рівняння можуть бути як дійсні, так і уявні. В [238] (див. рисунок 7.75 в [238], де розглядалась задача про розповсюдження звуку в криволінійному хвилеводі) показані дисперсійні криві, що демонструють залежність значень коренів  $\mu_{nm}$  від  $k_n b$ , тобто в термінах нашої задачі дисперсійні криві демонструють залежність значень коренів рівняння 4.10 від довжини спліттера. З цих рисунків видно, що при кожному значенні  $b$  маємо скінченне число однорідних і нескінченне число неоднорідних нормальних хвиль. Їх суперпозиція дозволяє описати довільне поле в області I.

З трьох граничних умов 4.2 отримуємо три функціональні рівняння. Алгебраїзацію цих рівнянь проводимо наступним чином. Перше рівняння слід розкласти по системі функцій  $\cos(m/2\phi)$ , що є повною і ортогональною на інтервалі  $0 < \phi < 2\pi$ . Друге і третє рівняння слід розкласти по системі функцій  $R_{nm}(k_n r)$ , що є повною і ортогональною з вагою  $1/r$  на інтервалі  $a < r < b$ . Аналогічно, слід розкласти функціональні рівняння, отримані з умов спряження полів 4.4 по системі функцій  $\cos(m/2\phi)$  на інтервалі  $0 < \phi < 2\pi$ . В результаті були отримані як явні співвідношення між невідомими коефіцієнтами, так і нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь для двох послідовностей невідомих. Отримана система розв'язувалась методом редукції.

Діаграми спрямованості в даній задачі подібні до тих, що наведені на

рисунку 2.10. Так само домінує перша гармоніка, але із зростанням значення числа Рейнольдса внесок вищих гармонік зростає.

## 4.5 Висновки до розділу

Чисельно розв'язано задачу про обтікання кругового циліндра з плоским спліттером, приєднаним з тильного боку циліндра. Описано змінювання поля завихреності і картини ліній струму протягом перехідного процесу формування і початку відриву вихорів за циліндром. Також описано процес усталених автоколивань потоку викликаних періодичним зривом вихорів. Гідродинамічний канал зворотного зв'язку формується за рахунок різниці тисків на верхній і нижній поверхнях циліндра і спліттера і періодичної зміни її знаку, що і викликає періодичний процес утворення і зриву вихорів. Наведено розрахункові дані основних характеристик течії для різних довжин спліттера, а також для випадку, коли спліттер повернуто під кутом до напрямку течії. Показано, що наявність спліттера, розташованого вздовж потоку, суттєво знижує опір циліндра і амплітуду коливання сил, прикладених до нього. Причому із зростанням довжини спліттера середнє значення сили опору монотонно зменшується. В той час, як амплітуди коливання сил, прикладених до тіла, змінюються немонотонно. Показано також, що при повороті спліттера на порівняно невеликий кут  $\alpha = 20^\circ$  процес зриву вихорів з поверхні тіла також спостерігається, проте такий процес вже не буде строго регулярним і періодичним. На закінчення також слід сказати, що періодична зміна тиску на сторонах циліндра і спліттера є джерелом звукових коливань дипольного типу, який неодноразово експериментально спостерігався багатьма дослідниками.

## Розділ 5

# Генерація звуку потоком, що набігає на сферу

У цьому Розділі розглядається задача обтікання сфери потоком в'язкої нестисливої рідині у широкому діапазоні чисел Рейнольдса. Чисельний алгоритм, описаний в Розділі 1, ґрунтується на методі скінченних об'ємів. При малих числах Рейнольдса застосовується техніка DNS, при великих числах Рейнольдса – техніка LES. Було визначено діапазон чисел Рейнольдса, в якому в потоці виникають автоколивання і, отже, такий потік може породжувати тональний звук. Були детально описані як одночастотні, так і багато-частотні коливальні режими. Також досліджено характеристики звукового поля, що породжується такою течією. Результати цього розділу відображено в статтях [226–230].

### 5.1 Вступ до розділу

Обтікання сфери було предметом багатьох експериментальних досліджень ще з початку минулого століття. Так, наприклад, в 1909 року знаменитий французький інженер-будівельник А.Ейфель зацікавившись питаннями дії вітрових навантажень на будівельні конструкції, побудував в Парижі на Марсовому полі аеродинамічну трубу. Продуваючи в ній сферу, він в 1912 році описав явище, назване згодом парадоксом Ейфеля : при досягнен-

ні критичного значення числа Рейнольдса ( $Re \approx 3 \cdot 10^5$ ) опір сфери різко зменшується зі збільшенням швидкості<sup>1</sup>. Через два роки Прандтль пояснив це явище виникненням турбулентності в примежовому шарі, що призводило до різкого збільшення кута відриву примежового шару. Цей приклад показує наскільки складною і непередбачуваною може бути течія при обтіканні тіла такої здавалося б простої форми.

Картина течії навколо сфери змінюється драматично із зростанням числа Рейнольдса. Чим вище значення числа Рейнольдса, тим складніше стає характер течії. При переході від ламінарної безвідривної течії при малих числах Рейнольдса до турбулентного режиму течії при великих числах Рейнольдса слід за сферою зазнає ряд переходів від одного чітко вираженого стійкого режиму до наступного. Саме тому задача обтікання сфери часто розглядається дослідниками як тривимірна тестова задача при розробці нових чисельних алгоритмів. Різноманітність режимів течії, які виникають в даній задачі, дозволяє верифікувати як методи DNS (пряме чисельне моделювання), використовувані при ламінарних режимах течії, так і методи LES (моделювання великих вихорів), використовувані при турбулентних режимах [245].

Перерахуємо основні режими обтікання сфери, відомі з літератури:

- $0 < Re < 20$ . Ламінарна течія з гладкими незамкнутими лініями струму. Течія за сферою ідентична течії перед сферою.
- $20 < Re < 212$ . Стаціонарна осесиметрична течія. Поблизу кормової точки утворюється замкнута область циркуляційного руху, яка представляє собою осесиметричне вихрове кільце і залишається приєднаною до сфери.
- $212 < Re < 275$ . Стаціонарна течія з симетрією відносно деякої подовжньої площини. Слід складається з двох приєднаних до сфери витягнутих уздовж напрямку потоку вихрових "хвостів" (streamwise vortical tails). Рідина усередині цих двох вихрових хвостів обертається в

---

<sup>1</sup>Тут і далі число Рейнольдса визначається по діаметру сфери

протилежних напрямках.

- $275 < Re < 375$ . Періодичне скидання вихрових петель. Симетрія відносно деякої подовжньої площини зберігається.
- $375 < Re < 800$ . Скидання вихорів триває, проте порушується регулярність процесу. Азимутний кут, при якому формуються вихори осцилює іррегулярно. Симетрія відносно подовжньої площини порушується.
- $800 < Re < 3.7 \cdot 10^5$ . Докритичний режим, при якому має місце відрив ламінарного примежового шару. У зсувному шарі, що відірвався, відбувається утворення дрібніших вихорів, викликаних нестійкістю Кельвіна-Гельмгольца. Скидання великомасштабних вихорів триває більш іррегулярним чином, хоча періодичні флуктуації сліду, як і раніше, мають місце.
- $3.7 \cdot 10^5 < Re < 1.14 \cdot 10^6$ . Закритичний режим, при якому має місце вже відрив турбулентного примежового шару. Область сліду суттєво звужується. Опір різко падає. Періодичне скидання вихорів більше експериментально не спостерігається.

У 1956 році Taneda експериментально досліджував обтікання сфери в діапазоні чисел Рейнольдса від 5 до 300 [246]. Було показано, що при  $Re < 24$  течія представляє собою безвідривну ламінарну течію з гладкими незамкнутими лініями струму, причому течія за сферою ідентична течії перед сферою. Такий потік називається повзучою течією (creeping flow). Taneda визначив, що при числах Рейнольдса вище 24 течія відривається від сфери поблизу задньої точки і формує за сферою замкнутий рециркуляційний слід у формі осесиметричного вихрового кільця. По мірі збільшення числа Рейнольдса кут відриву потоку і довжина сліду ростуть. Танеда встановив, що розмір вихрового кільця пропорційний логарифму числа Рейнольдса. Потік залишався стаціонарним аж до  $Re = 130$ , а після досягнення цього порогового значення у задній частині вихрового кільця з'являлися осциляції. Magarvey і Bishop [247, 248] досліджували слід за сферичною краплею рідини, незмі-

шуваної з середовищем, в якому вона рухається, в ширшому діапазоні чисел Рейнольдса аж до 2500. Вони дійшли висновку, що течія залишається осесиметричною і стаціонарною аж до  $Re = 210$ , після чого слід втрачає осесиметричність і перетворюється на дві вихрові трубки, витягнуті вздовж потоку. Пізніше Nakamura [249] встановив, що вихрове кільце за сферою формується вже при  $Re = 10$  і навіть менше і залишається стаціонарною і осесиметричною аж до  $Re = 190$ . Wu і Faeth [250] досліджували різні режими сліду за сферою в діапазоні чисел Рейнольдса 30-4000. Вони спостерігали стаціонарний осесиметричний слід аж до  $Re = 200$ , після чого слід втрачав осесиметричність, проте залишався стаціонарним. Ці результати добре узгоджуються з розрахунками Natarajan, Acrivos [251], які проводили лінійний аналіз стійкості стаціонарного осесиметричного потоку за сферою і встановили, що течія проходить регулярну біфуркацію при значенні  $Re$  близько 210, після чого починається розвиток неосесиметричного сліду. Johnson і Patel [252] знайшли чисельно, що цей перехід здійснюється при  $Re = 211$ . Tomboulides і Orszag в роботі [253] чисельно досліджували обтікання сфери в діапазоні  $25 < Re < 1000$ . Вони використали змішаний метод, побудований на основі методу спектральних елементів і спектрального методу Фур'є. Було показано що течія є стаціонарною і осесиметричною в діапазоні  $Re < 212$ , а відрив потоку від сфери починається при  $Re = 20$ . В [245] вони використали підхід DNS для течій з малими числами Рейнольдса і підхід LES для течій з великими числами Рейнольдса. Отримане чисельно критичне значення числа Рейнольдса ( $Re = 212$ ), при якому потік за сферою втрачає осьову симетрію, дещо вище, ніж значення отримані експериментально. Це пояснюється збуреннями, які в експерименті вносять опорні конструкції, що фіксують сферу.

Під час переходу через критичне значення  $Re = 212$  слід за сферою залишається приєднаним і стаціонарним, проте не являється більше осесиметричним. У цьому режимі слід складається з двох витягнутих в напрямку потоку вихрових хвостів рівної інтенсивності і протилежних за знаком. Такий слід має симетрію відносно деякої площини, розташованої вздовж потоку.

Орієнтація площини симетрії може бути довільною і визначається випадковим зовнішнім збуренням. У експерименті це може бути, наприклад, вплив опорної конструкції, що фіксує сферу, в чисельному моделюванні – вплив похибки округлення або несиметричної розрахункової сітки. Magarvey і Bishop [247, 248] назвали таку структуру "a double - threaded wake" тобто слід, що складається з двох волокон, і представили його фотографії. Вони встановили, що такий слід має місце в діапазоні чисел Рейнольдса  $210 < Re < 270$ . Ormières і Provansal [254] експериментально досліджували обтікання сфери в діапазоні чисел Рейнольдса від 100 до 360, концентруючись на описанні переходу від стаціонарного режиму до періодичного. Вони спостерігали стаціонарний слід, що складається з двох вихрових волокон, в діапазоні  $180 < Re < 280$ . Верхня межа діапазону чисел Рейнольдса, в якому має місце даний режим течії, є точкою біфуркації Хопфа, оскільки при переході через неї система переходить із стаціонарного режиму в автоколивальний. Значення цього критичного числа Рейнольдса визначалися у багатьох роботах. Експериментально були отримані наступні значення: 280 [250, 254], 300 [255], між 270 і 290 [247, 248], 275 [256]. Шляхом чисельного моделювання було встановлено: 270 [252], між 250 і 285 [245], 277.5 [251], 272 [257].

Втрата осьової симетрії течії приводить до появи бічної сили, напрям якої лежить в площині симетрії. Появу бічної сили помітили ще Magarvey і Bishop [247, 248], описуючи у своїх експериментах, що рідкі краплі, що падають в іншій рідині, відхилялися від вертикальної траєкторії падіння. Пізніше наявність бічної сили підтвердили декілька чисельних досліджень. Gushchin et al. [258] використали гібридний метод на основі явної скінченнорізницевої схеми другого порядку для чисельного моделювання обтікання сфери і виявили, що в діапазоні  $210.5 < Re < 297$  течія залишається стаціонарною, але неосесиметричною, а коефіцієнт бічної сили відмінний від нуля. Johnson і Patel [252] виявили, що бічна сила збільшується приблизно на три порядки при збільшенні  $Re$  від 211 до 212.

При подальшому зростанні числа Рейнольдса ( $Re > 275$ ) відбувається перехід від стаціонарного режиму течії до періодичного. При цьому зберіга-

ється симетрія течії відносно площини. У діапазоні  $275 < Re < 290$  нестационарна течія починає проявлятися у вигляді хвилястості двох волокнин сліду. Потім при перевищенні  $Re = 290$  починається періодичне скидання вихорів з поверхні сфери. Слід за сферою складається з послідовності взаємозв'язаних вихрових петель. Таку поведінку сліду було описано ще в експериментах Magarvey і Bishop [247, 248]. Пізніше режим періодичного скидання вихорів досліджувався у безлічі експериментальних [250, 254–256, 259, 260], а також чисельних робіт [252, 253, 257, 261–266]. Так Johnson і Patel [252] провели чисельне моделювання течії при  $Re = 270$  і отримали стаціонарний розв'язок, а вже при  $Re = 280$  розв'язок ставав періодичним. При  $Re = 300$  течія представляє собою цілком впорядкований періодичний потік, в якому має місце регулярне скидання вихорів. Були отримані значення числа Струхалія і коефіцієнта опору. Ploumhans et al. [261] використали тривимірні методи вихорів для моделювання обтікання сфери при значеннях числа Рейнольдса 300, 500, 1000. При  $Re = 300$  вони встановили, що течія знаходиться в періодичному режимі, а слід має площину симетрії. Вони також розраховували значення числа Струхалія, а також коефіцієнтів опору і бічної сили. Tomboulides і Orszag [253] виконали пряме чисельне моделювання течії в діапазоні чисел Рейнольдса від стаціонарної течії до турбулентної і встановили, що перехід від режиму стаціонарної течії з площиною симетрії до одночастотного періодичного режиму скидання вихорів відбувається в діапазоні  $270 < Re < 285$ . Причому в періодичному режимі також спостерігається збереження площини симетрії як і при нижчих значеннях числа Рейнольдса. Вони також виконали розрахунки для  $Re = 300$  і прийшли до висновку, що слід за сферою складається з послідовності взаємозв'язаних вихрових петель, які також зберігають площину симетрії. Mittal [262] проводив чисельне моделювання обтікання витягнутих сфероїдів. Для цього він використав метод колокацій на основі поліномів Чебишева для дискретизації в напрямку нормальному до поверхні сфероїда і розкладання Фур'є по кутовій координаті. Побудований чисельний алгоритм тестувався на задачах обтікання сфери в діапазоні  $50 \leq Re \leq 500$ . Пізніше в статтях [263, 264] цей

чисельний метод використовувався для опису обтікання сфери в діапазоні  $350 \leq Re \leq 650$ . Було встановлено, що при  $Re = 350$  слід також представляв собою взаємозв'язані вихрові петлі, що зриваються з сфери на певній частоті. Причому слід так само все ще мав площину симетрії.

При подальшому збільшенні числа Рейнольдса ( $Re \geq 375$ ) симетрія течії відносно площини руйнується. Азимутальний кут точки формування вихорів змінюється іррегулярним чином. В експериментах Sakamoto і Haniu [267] було помічено, що скидання вихорів починає проявляти іррегулярний характер поблизу  $Re = 420$ , а при  $Re = 480$  іррегулярний характер скидання вихорів стає яскраво вираженим. Mittal [263] виконав ряд чисельних експериментів в діапазоні  $350 \leq Re \leq 425$  з метою отримання більш поглибленого уявлення про біфуркацію, яка веде до втрати площини симетрії. Він встановив, що слід втрачає симетрію відносно площини при числах Рейнольдса в інтервалі  $350 \leq Re \leq 375$ . Проте, при цих значеннях числа Рейнольдса відхилення кутової координати формування вихорів малі і стають суттєвими лише при  $Re = 425$ . Mittal пояснив істотну відмінність своїх результатів від результатів Sakamoto і Haniu тим, що техніка візуалізації потоку при експерименті нездатна визначити малі відхилення азимутального кута точки формування вихору. В недавній експериментальній роботі [256] Chrust et al. дослідили обтікання сфери в горизонтальному водному каналі в діапазоні чисел Рейнольдса  $270 \leq Re \leq 500$ . Автори дійшли висновку, що слід втрачає симетрію відносно площини при  $Re \approx 375$ . Чисельне моделювання [245, 253] показало, що при  $Re = 500$  слід за сферою також складається з вихрових петель, що зриваються, проте ці петлі мають різну орієнтацію в просторі і, отже, симетрія відносно площини більше не зберігається. Спектр часової залежності швидкості, обчисленої в декількох точках простору, показав, що течія трансформувалася від одночастотного коливання швидкості при  $Re = 300$  до практично хаотичної системи при  $Re = 500$ , де, однак, все ще спостерігається домінуючий пік при числі Струхаля 0.167. Achenbach [268] експериментально досліджував обтікання сфери при  $400 < Re < 5 \cdot 10^6$ . Він одночасно вимірював сигнал в різних точках круга перпендикулярного

напрямку потоку і дійшов висновку, що точка відриву вихору обертається навколо сфери.

Перехід в наступний режим течії відбувається близько  $Re = 800$ . При числах Рейнольдса вище за це значення в сліді домінують два основні види нестійкості. По-перше, це все те ж скидання вихорів, яке представляє великомасштабну нестійкість в сліді. По-друге, в ламінарному зсувному шарі, що відірвався, починають формуватися дрібномасштабні вихори, що є проявом нестійкості Кельвіна-Гельмгольца, яка дає високочастотний вклад в спектр. Kim і Durbin [269] проводили експериментальні виміри як зриву великих вихорів, так і формування нестійкості Кельвіна-Гельмгольца в зсувному шарі, в широкому діапазоні чисел Рейнольдса  $500 < Re < 6 \cdot 10^4$ . Високочастотна компонента була виявлена тільки в області розташованій безпосередньо за сферою. Це привело авторів до висновку, що спостережувана високочастотна компонента виникає внаслідок нестійкості Кельвіна-Гельмгольца в зсувному шарі, що відірвався. Було встановлено, що число Струхаля, пов'язане із скиданням вихорів, практично не залежить від числа Рейнольдса в діапазоні  $Re > 800$  і приблизно дорівнює 0.2. У той час, як число Струхаля, пов'язане з нестійкістю Кельвіна-Гельмгольца, росте із зростанням числа Рейнольдса. Sakamoto і Haniu [267] експериментально досліджували обтікання сфери в діапазоні  $300 < Re < 4 \cdot 10^4$  і прийшли до аналогічного висновку: при  $Re > 800$  з'являється високочастотна мода, яка існує одночасно з низькочастотною модою, пов'язаною із скиданням вихорів, аж до  $Re = 1.5 \cdot 10^4$ . Причому в цьому діапазоні пульсації спостерігаються на вихровій поверхні, що відірвалася від поверхні сфери. Частота спостережуваних візуально пульсацій потоку відповідала значенням числа Струхаля високочастотної моди, отриманої Möller [270] ще в 1938 році і пізніше Achenbach [268]. Chomaz et al. [271] представили результати експериментального дослідження сліду сфери, що рухається як в однорідному так і в стратифікованому середовищі. В однорідному середовищі автори підтвердили результати Kim і Durbin [269] і показали, що дві характеристичні частоти сліду відповідають двом модам нестійкості: нестійкість Кельвіна-Гельмгольца і спіральної нестійкості.

Нестійкість Кельвіна-Гельмгольца в циліндричному зсувному шарі, що відокремився при  $Re > 800$  також спостерігалася в чисельних дослідженнях Tomboulides і Orszag [253].

У роботах Jenny et al [272, 273] за допомогою чисельного моделювання розглядався сценарій переходу до хаосу для сфери, що падає або спливає в ньютонівській рідині. Результати показують, що після досягнення порогової швидкості вертикальний рух сфери стає нестійким в силу руйнування осьової симетрії течії. Ця регулярна біфуркація приводить до відхилення сфери від вертикальної траєкторії. Потім, при подальшому збільшенні швидкості відбувається біфуркація Хопфа і сфера, що падає або спливає, починає здійснювати осцилюючі рухи. В цьому режимі траєкторія сфери лежить у вертикальній площині. Орієнтація цієї площини встановлюється випадковим чином при руйнуванні осьової симетрії. При подальшому збільшенні швидкості настає хаотичний режим руху сфери, який супроводжується втратою площини симетрії. Ці чисельні результати підтверджуються експериментальною візуалізацією Veldhuis et al [274, 275].

Для чисельного моделювання течії при  $Re > 10^3$  у багатьох випадках використовується метод моделювання великих вихорів (LES) або метод моделювання від'єднаних вихорів (DES). Хоча є і роботи, в яких розв'язувались рівняння Рейнольдса (RANS) і нестационарні рівняння Рейнольдса (URANS). Drikakis [276] чисельно досліджував як ламінарне, так і турбулентне обтікання сфери. При великих числах Рейнольдса ( $Re = 1.62 \cdot 10^5$  і  $Re = 5 \cdot 10^6$ ) він використав алгебраїчну модель Baldwin - Lomax і  $k - \epsilon$  модель. Порівняння з експериментом проводилося по кривих розподілу коефіцієнта тиску. Показано, що  $k - \epsilon$  модель дає точніший результат, ніж алгебраїчна модель. Однак, для турбулентного режиму течії результати обох моделей були далекі від експериментальних. Автор приходять до висновку про необхідність дослідження нестационарної природи течії. Constantinescu et al. [277] моделювали обтікання сфери при  $Re = 10^4$  і встановили, що в даному випадку відрив ламінарного примежового шару відбувається при значеннях кута приблизно  $83^\circ$ . Головною метою роботи було порівняння ре-

зультатів, отриманих з використанням підходів LES, DES і URANS. Розрахунки за технологією URANS проводилися з використанням двошарової моделі  $k - \epsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $v2f$  і Spalart - Allmaras моделі. В LES використовувалась динамічна модель вихрової в'язкості. За виключенням двошарової  $k - \epsilon$  моделі, значення коефіцієнта лобового опору, отримані з використанням URANS, показали прийнятний збіг з експериментальними даними. Розподіл коефіцієнтів тиску і поверхневого тертя було адекватно розраховано у рамках підходу URANS, проте DES і LES показали краще узгодження з експериментальними вимірюваннями в кормовій частині сфери. Усі три підходи показали близькі результати для профілів середньої швидкості і турбулентної кінетичної енергії в області сліду. Підхід URANS дав можливість розрахувати головну частоту, що відповідає зриву вихорів, хоча амплітуда коливань була істотно нижче, ніж та, яку показали DES і LES. Проте, слід зазначити, що DES і LES змогли уловити також вторинні нестационарні явища, такі як нестійкість Кельвіна-Гельмгольца в зсувному шарі, що відірвався. Обидва підходи показали вторинну високочастотну смугу в спектрі. Числа Струхалія як для низькочастотної моди (скидання вихорів), так і для високочастотної моди (нестійкість Кельвіна-Гельмгольца) добре узгоджувалися з експериментальними результатами Sakamoto і Haniu [267]. Моделювання з використанням URANS [276, 277] не показало наявності високочастотної смуги.

Напевно, найбільш відомою особливістю обтікання сфери при великих числах Рейнольдса являється різке падіння опору при переході через критичне значення числа Рейнольдса  $Re_{cr} = 3.7 \cdot 10^5$ . Це явище носить назву парадоксу Ейфеля. Воно було відкрито в 1912 році і через два роки пояснено Прандтлем [278]. Річ у тому, що в докритичному режимі має місце відрив ламінарного примежового шару, а в закритичному режимі – відрив вже турбулентного примежового шару, що призводить до різкого збільшення кута відриву і, отже, звуженню області сліду. Так, якщо в докритичному режимі значення кута відриву, наведені різними авторами [279, 280], знаходились в діапазоні  $81 - 88^\circ$ , то в закритичному режимі середній кут відриву складав

114 – 121°.

У роботі [279] Constantinescu і Squires моделювали обтікання сфери, використовуючи підхід DES на структурованій сітці, отриманій шляхом обертання двовимірної сітки відносно осі. Розрахунки проводилися для чисел Рейнольдса  $10^4$ ,  $4.2 \cdot 10^5$ ,  $1.14 \cdot 10^6$ . В докритичному режимі DES зміг досить точно описати зрив великомасштабних вихорів, пов'язаний із спіральною нестійкістю сліду, а також утворення дрібніших вихрових трубок в зсувному шарі, що відірвався, яке відбувається завдяки зростанню нестійкості Кельвіна-Гельмгольца (див. візуалізацію Taneda [281]). Чисельні результати, отримані з використанням DES, цілком задовільно узгоджувалися з експериментальними даними [282] для глобальних і локальних характеристик сліду, таких як лобовий опір, положення точки відриву примежового шару на сфері і розподіл коефіцієнтів тиску і поверхневого тертя. У закритичному режимі DES акуратно розрахував положення відриву примежового шару і розподіл коефіцієнта осередненого тиску на поверхні сфери. Однак, коефіцієнт поверхневого тертя не узгоджувався досить точно з експериментом.

Taneda [281] проводив візуалізацію обтікання сфери в діапазоні  $10^4 < Re < 10^6$ , використовуючи різні методи візуалізація течії в пристінковій області. Було встановлено, що для чисел Рейнольдса в діапазоні  $10^4 < Re < 3.8 \cdot 10^5$  в сліді має місце хвильове збурення типу біжучої хвилі. Причому число Струхалія і коефіцієнт опору залишаються практично сталими і рівні 0.2 і 0.5, відповідно. Ці спостереження узгоджуються з результатами Achenbach [268, 282], який встановив, що явні періодичні флуктуації існують в сліді аж до  $Re = 3 \cdot 10^5$  і що точка відриву вихору обертається навколо сфери. При перевищенні критичного значення  $Re = 3.7 \cdot 10^5$  періодичне скидання вихорів вже не визначається експериментально, в усякому випадку воно не було виявлене за допомогою використовуваної техніки вимірів. Зона рециркуляційного руху поблизу сліду значно стискається, а коефіцієнт опору різко зменшується до значення 0.08. Taneda також показав експериментально, що в діапазоні  $3.8 \cdot 10^5 < Re < 10^6$  слід формує пару вихрових ліній, витягнутих по потоку, і ця вихрова пара повільно обертається іррегулярним

чином. Вакіс і Реріс представили результати по візуалізації обтікання сфери в діапазоні чисел Рейнольдса  $2.2 \cdot 10^4 < Re < 4 \cdot 10^5$  в аеродинамічній трубі і в діапазоні  $5 \cdot 10^4 < Re < 3 \cdot 10^5$  в гідроканалі [283]. Представлені фотографії демонструють закручування на межі зсувного шару, що відірвався і спаровування вихорів, що утворилися, в докритичному режимі. Із зростанням числа Рейнольдса перехід зсувного шару, що відірвався, в турбулентний режим відбувається ближче до точки відриву. У закритичному режимі рециркуляційна область сліду різко звужується, а хвильовий рух сліду за сферою зникає.

Головна мета цього Розділу роботи полягає у тому, щоб провести чисельне моделювання обтікання сфери в усіх основних докритичних режимах течії, порівняти отримані результати з результатами інших авторів з метою верифікації використовуваних чисельних схем, а також знайти режими, при яких в потоці виникають автоколивання і, отже, такий потік може генерувати звук [2]. Потім, на основі отриманих чисельно даних формулюється і розв'язується відповідна акустична задача, описуються основні характеристики звукового поля, що виникає при обтіканні сфери.

## 5.2 Постановка задачі

Таким чином, задача обтікання твердої сфери формулюється у рамках моделі в'язкої нестисливої ньютонівської рідини. Такий процес описується нестационарною системою рівнянь Нав'є-Стокса, які можна представити в тензорній формі (1.1) (1.2). Для обезрозмірювання наведених рівнянь руху за масштаб довжини брався діаметр сфери  $d$ , а за масштаб швидкості - швидкість рівномірного потоку  $V$  на досить великому віддаленні від сфери. Тоді масштабом часу буде величина  $d/V$ , а масштабом тиску - подвоєний швидкісний натиск  $\rho V^2$ . Основним параметром такої задачі, що входить в рівняння руху, являється число Рейнольдса  $Re = Vd/\nu$ , де  $\nu$  - кінематична в'язкість середовища.

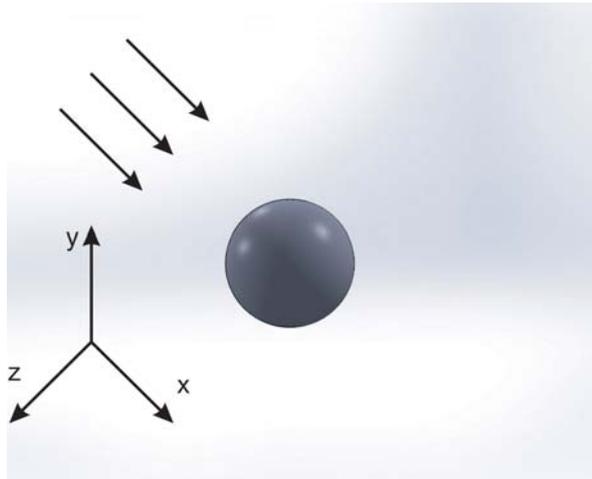


Рис. 5.1: Геометрія задачі

В якості розрахункової області був обраний прямокутний паралелепіпед із сторонами завдовжки  $30d$ ,  $24d$ ,  $24d$ , відповідно. Тобто при одиничному діаметрі сфери розрахункова область займала наступний паралелепіпед:  $x \in [-10, 20]$ ,  $y \in [-12, 12]$ ,  $z \in [-12, 12]$ , а центр сфери розташовувався в початку системи координат (див. рисунок 5.1). Граничні умови формулювалися наступним чином. На поверхні сфери для швидкості ставилася умова прилипання  $U = 0$ , для тиску - рівність нулю нормального градієнта. На вході в розрахункову область ( $x = -10$ ) задавався рівномірний потік. На бічних межах розрахункової області ( $y = \pm 12$  або  $z = \pm 12$ ) формулювалася умова прослизання, тобто нульові значення для нормальної компоненти швидкості і рівність нулю нормального градієнта для дотичних компонент. Така умова передбачає, що на відстані  $12d$  в сторону від сфери потік вже є практично незбуреним. На виході з розрахункової області ( $x = 20$ ) ставились "м'які" граничні умови, що відповідають рівності нулю нормального градієнта швидкості. Для тиску умова рівності нулю нормального градієнта формулювалася по усій межі розрахункової області.

При ламінарних режимах течії задача розв'язувалась у рамках DNS (Direct Numerical Simulation). Іншими словами, чисельний розв'язок задачі полягав у дискретизації рівнянь (1.1), (1.2) з урахуванням перелічених вище граничних умов. При турбулентних режимах задача розв'язувалась у рамках наближення LES. Методи дискретизації рівнянь детально описані в Роз-

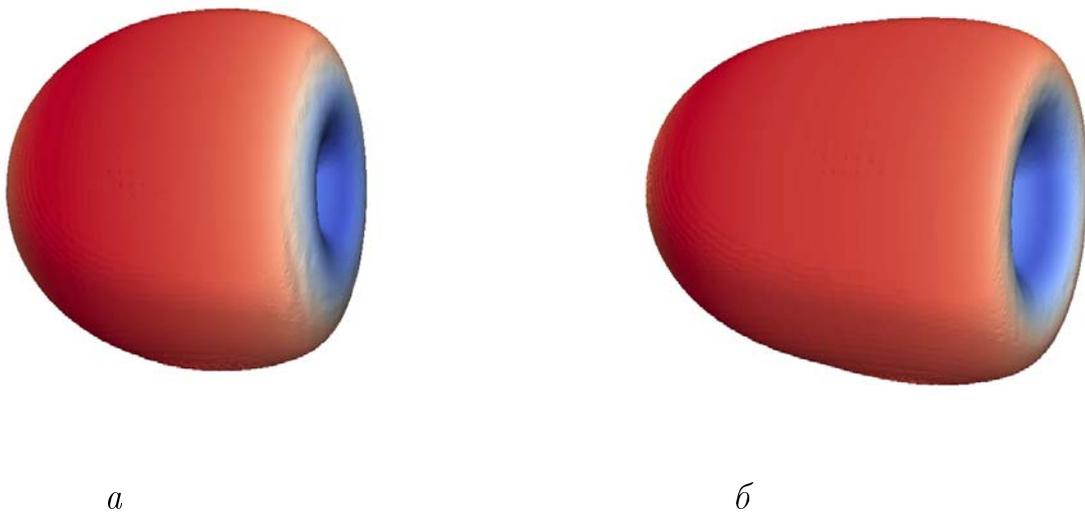


Рис. 5.2: Ізоповхня  $Q = 0.001$ . Тут і далі ізоповхні  $Q$  забарвлюються відповідно до величини швидкості (синій колір – мінімальна швидкість, червоний колір – максимальна швидкість):  $a$  –  $Re = 100$ ,  $b$  –  $Re = 200$

ділі 1.

### 5.3 Результати розрахунку течії. Верифікація отриманих результатів

Чисельні розрахунки, представлені в цьому Розділі, проводились на кластерному суперкомп'ютері СКІТ, розташованому в Інституті кібернетики НАН України. Для розпаралелювання обчислень використовувалась технологія MPI, вже імплементована в OpenFOAM. При розрахунках використовувались від 12 до 32 ядер залежно від складності даної течії і розміру сітки. Кількість контрольних об'ємів в сітці варіювалась від 3,5 мільйонів для ламінарного стаціонарного режиму течії до 8 мільйонів для турбулентного режиму.

Як вже говорилося вище, в діапазоні чисел Рейнольдса  $20 < Re < 212$  потік рідини довкола сфери є стаціонарним і осесиметричним. За сферою утворюється область рециркуляційного руху у вигляді стаціонарного, при-

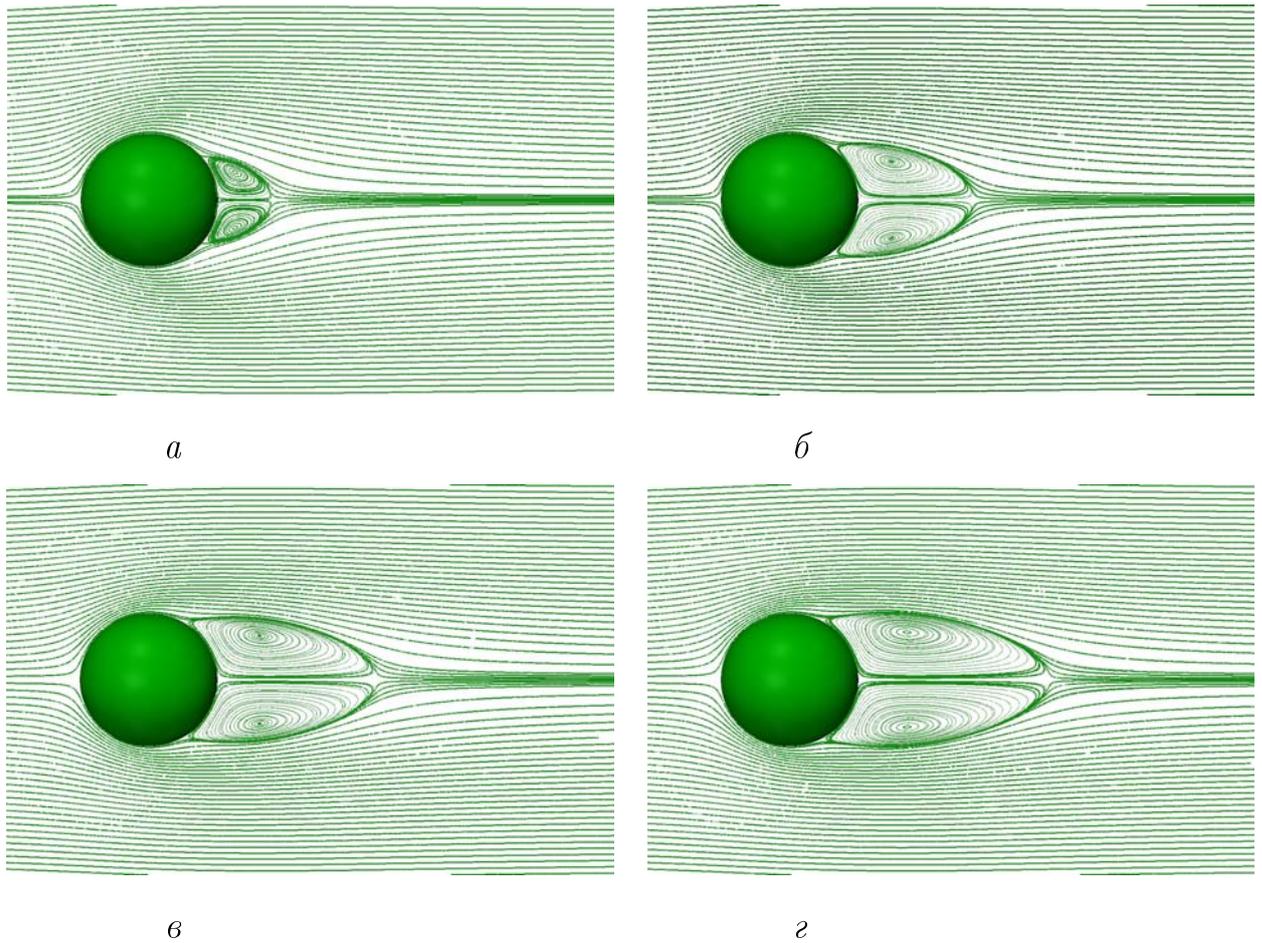


Рис. 5.3: Лінії струму:  $a - \text{Re} = 50$ ,  $б - \text{Re} = 100$ ,  $в - \text{Re} = 150$ ,  $г - \text{Re} = 200$

еднаного до сфери вихрового кільця. На рисунку 5.2 показані ізоповерхні другого інваріанту  $Q$  тензора  $\nabla \mathbf{u}$ , які використовуються для ідентифікації вихрового кільця. Видно, що із зростанням числа Рейнольдса розміри вихрового кільця за сферою збільшуються. На рисунку 5.3 показані лінії струму в площині, що проходить через центр сфери. Цей рисунок також демонструє, що із зростанням числа Рейнольдса вихрове кільце за сферою росте, проте воно залишається стаціонарним і осесиметричним. Очевидно, що в силу осьової симетрії потоку на сферу не діє бічна сила, а тільки сила лобового опору. Значення коефіцієнта опору  $C_x$  для двох значень числа Рейнольдса (100 і 200) наведені в таблиці 5.1, де також представлені значення  $C_x$ , отримані іншими авторами. Видно хороший збіг отриманих нами результатів з результатами, представленими в літературі. В таблиці 5.2 представлені значення довжини вихрової зони за сферою, відлічувані від кормової точки сфери до сідлової особливої точки у кінці вихрового кільця. Також в табли-

Табл. 5.1: Коефіцієнт опору  $C_x$  для осесиметричного стаціонарного режиму. Порівняння отриманих даних з результатами інших авторів

	[284]	[285]	[262]	[286]	[287]	[280]	дана робота
Re = 100	1.096	1.09	1.09	1.096	1.104	1.087	1.092
Re = 200	0.772	0.772		0.772	0.784		0.775

Табл. 5.2: Кут відриву потоку  $\theta_s$ , що відраховується від лобової точки, і довжина вихору  $L_e$ , що відраховується від кормової точки. Re = 100

	[284]	[262]	[245]	дана робота
$\theta_s$	127	127.7	126.6	127.9
$L_e$	0.94	0.87	0.87	0.86

ці представлені значення кута відриву потоку від поверхні сфери, тобто кут між носовою точкою сфери і сідловою особливою точкою на її поверхні, що визначає початок вихрового кільця. Очевидно, що отримані в цій роботі результати добре узгоджуються з аналогічними результатами, представленими в літературі. Рисунок 5.4 демонструє зміну коефіцієнта опору із зростанням числа Рейнольдса в діапазоні  $20 \leq \text{Re} \leq 200$ . Значення коефіцієнта опору зменшується з приблизно 2.7 при Re = 20, до 0.775 при Re = 200. Ми провели розрахунки при Re = 50; 100; 150; 200. Також на рисунку 5.4 з метою порівняння наведені результати інших авторів.

При переході через точку регулярної біфуркації при  $\text{Re} \approx 212$  течія залишається стаціонарною, проте осесиметричність течії порушується. Така течія повинна мати симетрію відносно деякої площини, що проходить через центр сфери і розташована вздовж потоку. Азимутальна орієнтація площини симетрії встановлюється довільним чином при руйнуванні осьової симетрії. На рисунку 5.5 показано ізоповерхню  $Q$  при Re = 250, яка використовується для ідентифікації вихорів. Видно, що вихрове кільце, яке знаходиться безпосередньо за сферою, вже не має осьової симетрії. Замість цього воно має

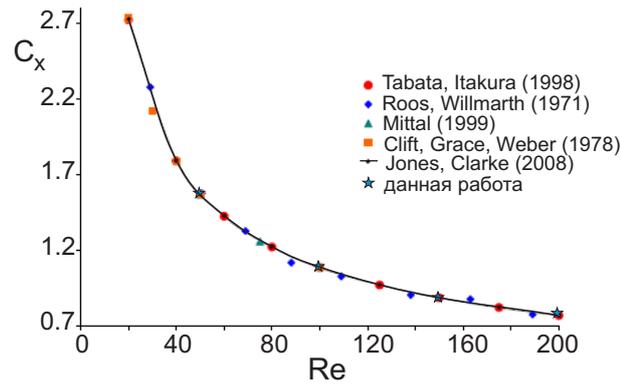


Рис. 5.4: Коефіцієнт опору  $C_x$ , як функція від  $Re$ . Порівняння отриманих даних з результатами робіт [262, 280, 284, 285, 288]

симетрію відносно площини. За цим вихровим кільцем розташовуються два вихрові хвости, витягнуті вздовж потоку, що мають рівні за величиною, але протилежні за знаком інтенсивності. Рідина в цих вихрових хвостах обертається в протилежних напрямках. Очевидно, що оскільки течія більше не має осової симетрії, на сферу діятиме не лише сила опору, але і бічна сила. В таблиці 5.3 наведено значення коефіцієнтів опору  $C_x$  і бічної сили  $C_l$  при  $Re = 250$ . Слід відзначити, що сила опору більше, ніж на порядок перевищує бічну силу. У таблиці представлені як наші результати, так і результати інших авторів. Спостерігається хороша відповідність результатів.

Наступна точка переходу ( $Re \approx 275$ ) є точкою біфуркації Хопфа. При подальшому збільшенні числа Рейнольдса ( $Re > 275$ ) течія переходить із стаціонарного режиму в періодичний. Починається регулярне скидання вихрових петель. У цьому режимі течія зберігає симетрію відносно площини. На рисунку 5.6 показана ізопверхня  $Q$  при  $Re = 300$ , а також її переріз площиною, розташованою вздовж потоку. Видно, що безпосередньо за сферою, як і раніше, знаходиться вихрове кільце. Однак, осьо́ва симетрія кільця ще більше порушена, ніж в попередньому випадку. З періодичною регулярністю з внутрішньої частини вихрового кільця, розташованого безпосередньо за сферою викидаються вихрові петлі, симетричні відносно площини. При  $Re = 300$  процес скидання вихрових петель буде строго періодичним. Цей висновок також підтверджує рисунок 5.7, на якому зображено процес зміню-

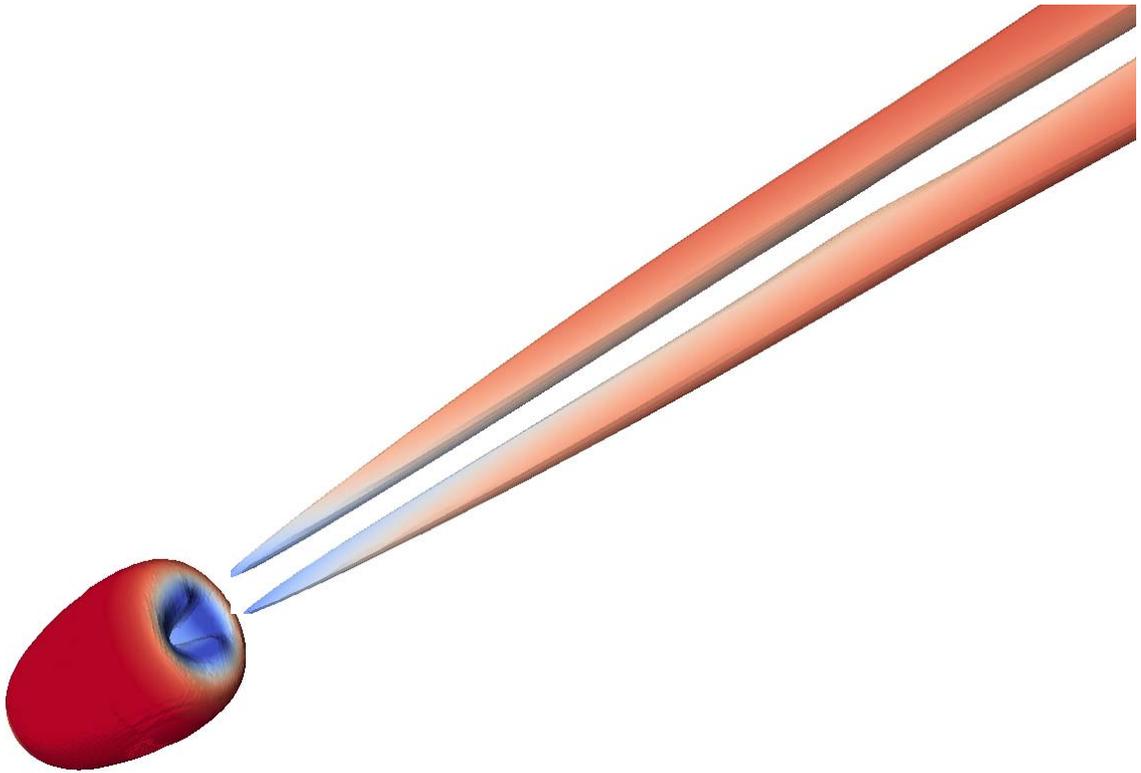
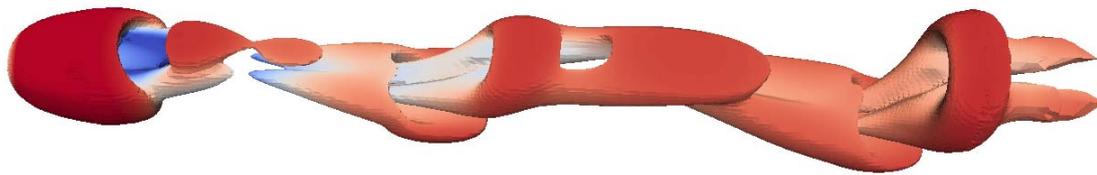


Рис. 5.5: Ізоповерхня  $Q = 0.0001$  при  $Re = 250$

вання у часі коефіцієнтів опору  $C_x$  і бічної сили  $C_l$ . Очевидно, що ці процеси будуть одночастотними з числом Струхаля  $St = 0.133$  (таблиця 5.4). Нагадаємо, що при обтіканні нескінченного кругового циліндра [242, 243] частота коливання коефіцієнта опору  $C_x$  буде удвічі вище за частоту коливання коефіцієнта бічної сили  $C_y$ . Це пов'язано з тим, що при обтіканні циліндра вихори розташовуються в шаховому порядку, а точки відриву вихорів симетричні відносно горизонтальної прямої. Таким чином, час зриву пари вихорів (верхнього і нижнього) складає період коливання бічної сили і два періоди коливання сили опору. Течія, що виникає при обтіканні сфери, є тривимірною і, отже, більш складною. Замість двох послідовностей вихорів, розташованих в шаховому порядку, сфера скидає послідовність вихрових петель. В силу цього, періоди коливання і сили опору, і бічної сили рівні. У таблиці 5.4 наведено середні значення коефіцієнтів опору  $C_x$  і бічної сили  $C_l$ , а також амплітуди їх коливань  $\Delta C_x$  і  $\Delta C_l$ . Слід зазначити, що середнє значення бічної сили на порядок менше, ніж середнє значення сили опору, проте амплітуда коливань бічної сили буде приблизно в п'ять разів більше



*a*



*б*

Рис. 5.6: Ізоповерхня  $Q = 0.0001$  при  $Re = 300$ : *a* – повний вигляд, *б* – переріз площиною симетрії

амплітуди коливань сили опору. Цей факт дозволяє припустити, що, як і у випадку обтікання кругового циліндра, основна частина акустичної енергії, генерованої потоком при обтіканні сфери, випромінюватиметься у бічному напрямку.

При збільшенні числа Рейнольдса до  $Re = 350$  течія за сферою продовжує ускладнюватися. Рисунок 5.8 а демонструє зміну у часі коефіцієнта опору  $C_x$ . Видно, що коливання, пов'язані із зривом вихорів, накладаються на повільніші коливання струмені, що мають, проте, велику амплітуду. На рисунку 5.9 показано частотні спектри коливань  $C_x$  і  $C_l$ . В обох випадках видно дві домінуючі частоти, які відповідають значенням числа Струхала

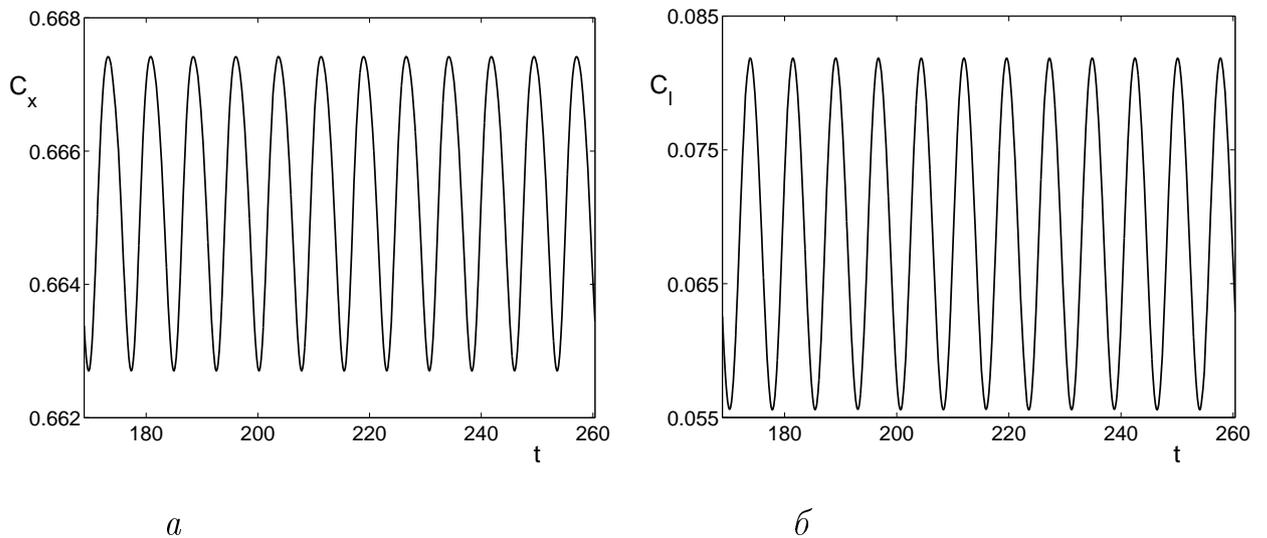


Рис. 5.7: Змінювання у часі коефіцієнта опору  $C_x$  (а) і коефіцієнта бічної сили  $C_l$  (б) при  $Re = 300$

$St = 0.041$  і  $St = 0.135$ . Перша частота відповідає повільним коливанням струменя, друга – зриву зі сфери вихрових петель. Ці результати добре узгоджуються з результатами роботи [264], в якій автори представили спектр коливань поперечної компоненти швидкості в деякій вибраній точці ближнього сліду за сферою і отримали дві домінуючі частоти, що відповідають значенням числа Струхаля  $St = 0.04 \pm 0.003$  і  $St = 0.138 \pm 0.003$ . З рисунка 5.9 видно, що для  $C_x$  домінуючий вклад вносить повільне коливання струменя ( $St = 0.041$ ), в той час, як для  $C_l$  вклад обох компонент ( $St = 0.041$  і  $St = 0.135$ ) буде приблизно однаковий.

При подальшому збільшенні числа Рейнольдса слід за сферою втрачає симетрію відносно площини. На рисунку 5.10 а показана ізоповерхня  $Q$ . Очевидно, що вона більше не має симетрії. Хоча, як і раніше, скидання вихрових петель триває, проте орієнтація кожної наступної петлі відрізняється від попередньої. На рисунку 5.10 б показано переріз ізоповерхні завихреності площиною, що проходить через центр сфери і розташована перпендикулярно напрямку потоку, що набігає. Іншими словами, це вид з боку сфери на ізоповерхню завихреності. Видно, що симетрія відносно площини більше не зберігається навіть у безпосередній близькості до сфери. Положення точок, в яких відбувається утворення вихорів, починає змінюватися іррегулярним

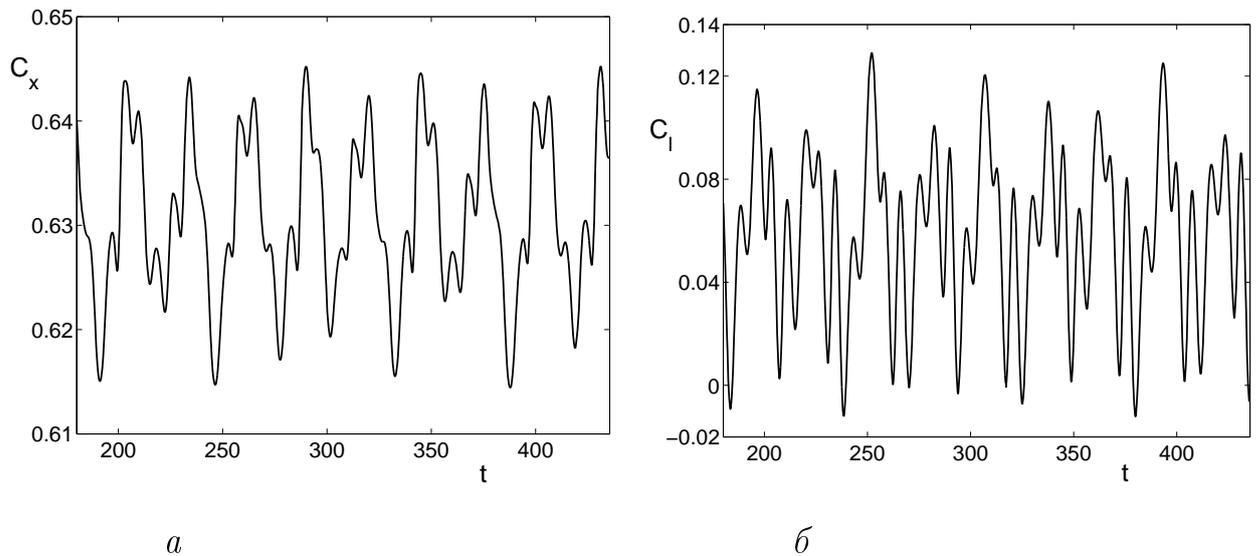


Рис. 5.8: Змінювання у часі коефіцієнта опору  $C_x$  (a) і коефіцієнта бічної сили  $C_l$  (b) при  $Re = 350$

чином.

При подальшому збільшенні числа Рейнольдса слід за сферою переходить у турбулентний режим. Однак, в докритичному режимі ( $Re < 3.7 \cdot 10^5$ ), як і раніше, має місце відрив від сфери ламінарного примежового шару. Нижче за потоком на межі ламінарного примежового шару, що вже відірвався, в силу нестійкості Кельвіна-Гельмгольца відбувається утворення дрібніших вихорів. По мірі просування вниз по потоку ці вихори зростають. Ще нижче по потоку ламінарний зсувний шар розривається на окремі вихрові кільця. У цих вихрових кільцях незабаром розвивається азимутальна нестійкість, вони втрачають осесиметричну форму і руйнуються турбулентністю. Цей процес демонструє рисунок 5.11 а на якому зображено ізоповверхню  $Q$ . Видно, як ламінарний зсувний шар, що відірвався, скручується у вихрові кільця, які потім зносяться в турбулентну частину сліду і руйнуються. На рисунку 5.11 б показано переріз ізоповверхні  $Q$  площиною, що проходить через центр сфери і розташована вздовж потоку. Видно, як між ламінарним зсувним шаром, що відірвався, і поверхнею сфери утворюються дрібні вихори, які потім збільшуються вниз по потоку, поки не приводять до згортання зсувного шару у вихрові кільця. На рисунку 5.11 в у тій самій площині перерізу кольором показана компонента завихреності  $\omega_n$ , спрямована пер-

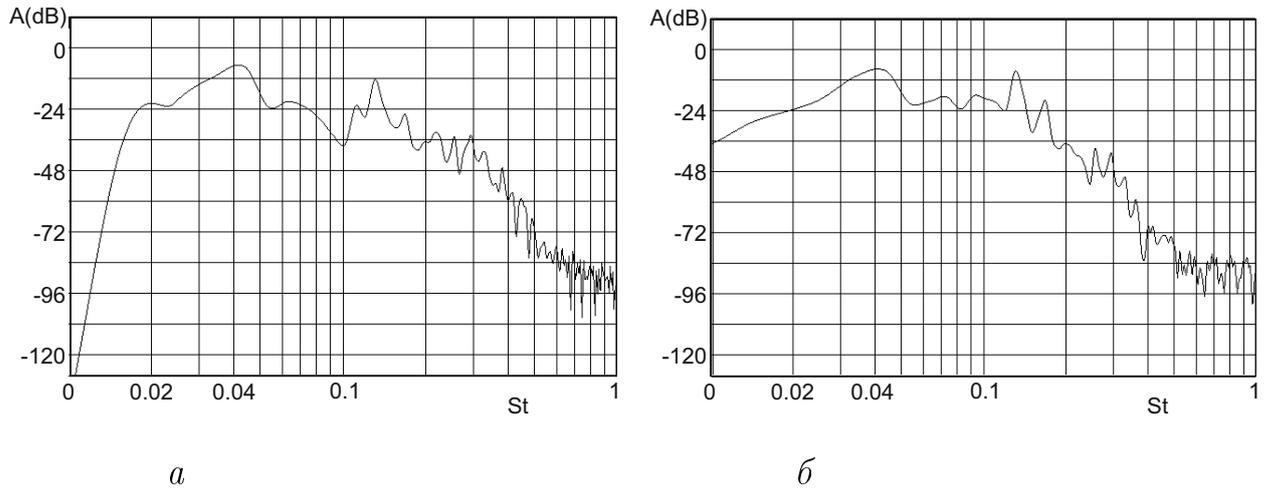


Рис. 5.9: Частотний спектр коефіцієнта опору  $C_x$  (а) і коефіцієнта бічної сили  $C_l$  (б) при  $Re = 350$

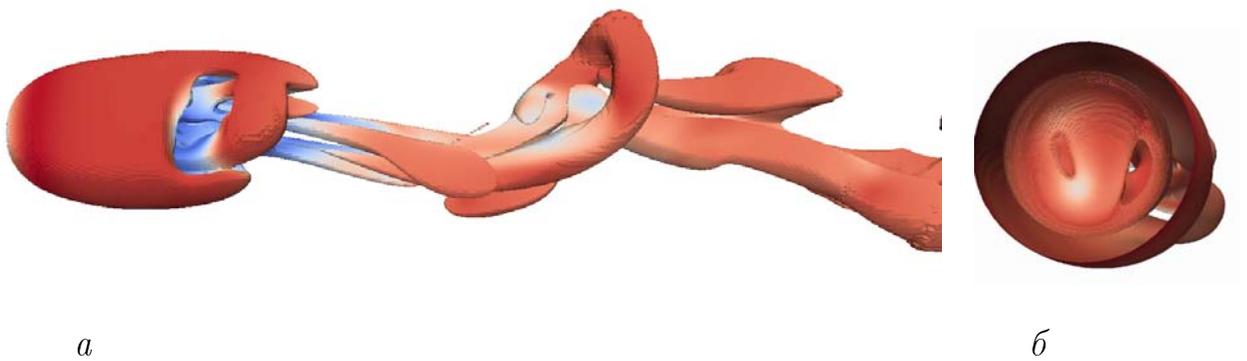


Рис. 5.10: Течія при  $Re = 500$ : а – ізоповерхня  $Q = 0.0001$ , б – переріз ізоповерхні завихреності площиною, що проходить через центр сфери і розташована перпендикулярно до напрямку потоку

пендикулярно до площини перерізу. Видно, як після відриву ламінарного примежового шару на його межі розвивається нестійкість і вона набуває хвилястої форми.

Слід також відзначити, що рисунки 5.11 б і в наочно демонструють перевагу  $Q$ -метода візуалізації вихорів над методом завихреності.  $Q$ -метод чітко показав утворення дрібних вихорів на межі зсувного шару, що відірвався, у безпосередній близькості до поверхні сфери, тоді як метод завихреності не може показати такі дрібні вихрові структури у безпосередній близькості до стінки.

На рисунку 5.12 а показано частотний спектр коефіцієнта опору  $C_x$ .

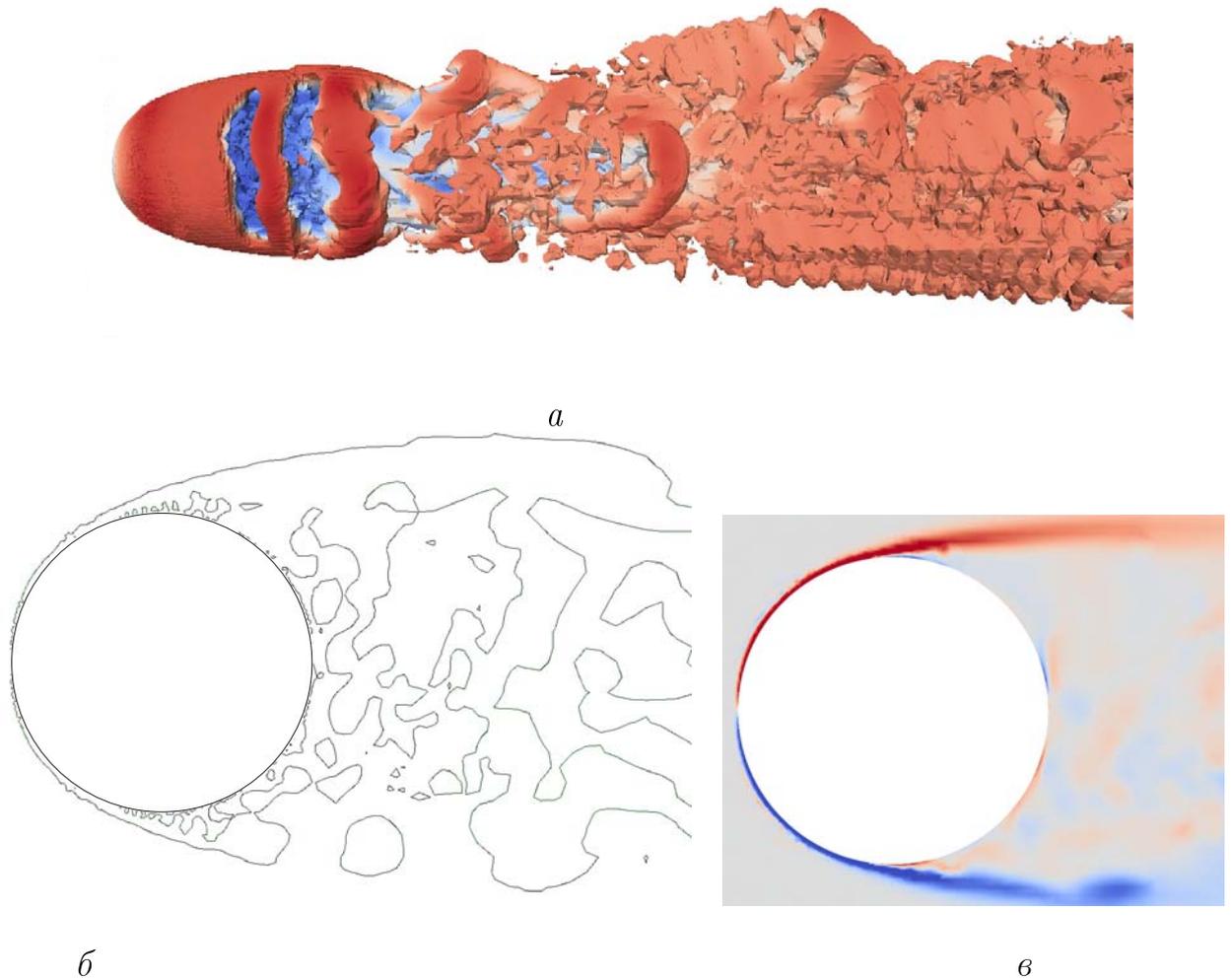


Рис. 5.11: Течія при  $Re = 10^4$ : *a* – ізоповерхня  $Q = 0.0001$ , *б* – переріз ізоповерхні  $Q$  площиною, що проходить через центр сфери і розташована вздовж потоку, *в* – компонента завихреності, що спрямована перпендикулярно до площини перерізу

Виразно видно домінуючу частоту 0.196, яка відповідає частоті скидання вихорів. Для того, щоб ідентифікувати коливання, викликані нестійкістю Кельвіна-Гельмгольца, була вибрана точка у безпосередній близькості до сфери з координатами  $(0;0.5;0.5)$ , в якій проводилася реєстрація швидкості. На рисунку 5.12 б показано частотний спектр коливань швидкості  $u_x$ . Видно домінуючу частоту 1.94, яка і відповідає нестійкості зсувного шару.

У таблиці 5.5 наведено значення числа Струхаля, що відповідають скиданню вихорів ( $St_1$ ) і нестійкості Кельвіна-Гельмгольц ( $St_2$ ), а також осереднені значення коефіцієнта опору і кута відриву ламінарного примежового шару. Таблиця містить також результати, отримані іншими авторами.

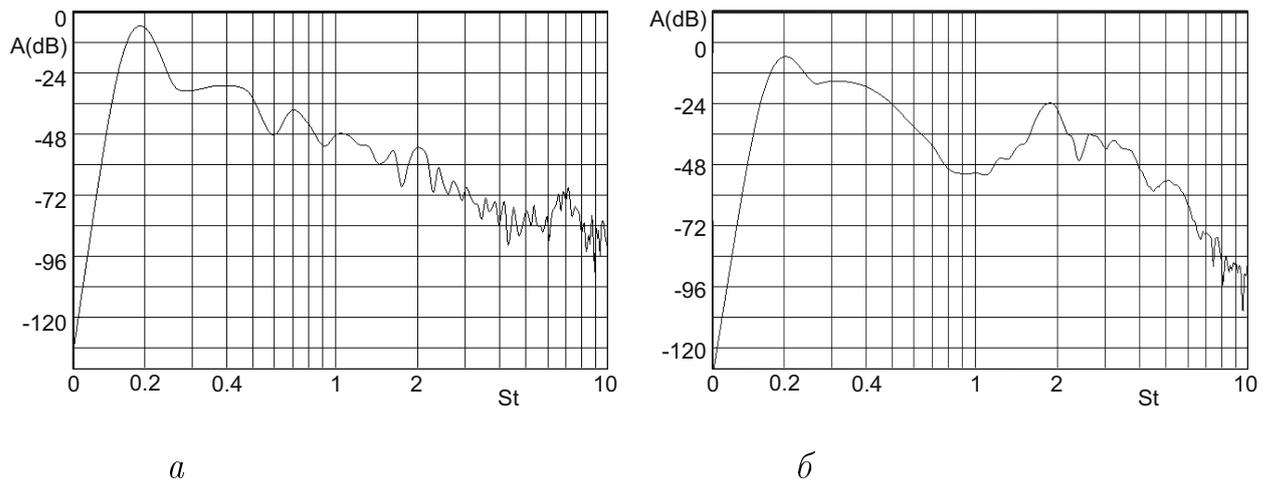


Рис. 5.12: Частотний спектр коефіцієнта опору  $C_x$  (a) і швидкості  $u_x$  в точці  $(0, 0.5, 0.5)$  (b) при  $Re = 10^4$

Табл. 5.3: Коефіцієнт опору  $C_x$  і коефіцієнт бічної сили  $C_l$  для неосесиметричного стаціонарного режиму ( $Re = 250$ ). Порівняння отриманих даних з результатами інших авторів

	[262]	[289]	[252]	[290]	[291]	дана робота
$C_x$	0.68	0.702	0.70	0.702	0.70	0.704
$C_l$		0.061	0.062	0.060	0.0617	0.0617

Порівняння показує досить хорошу відповідність між отриманими нами результатами і результатами, опублікованими іншими авторами.

## 5.4 Розрахунок звукового поля

З чисельного розв'язку відповідної задачі гідромеханіки ми маємо розподіл тиску на поверхні сфери, який періодично змінюється у часі. Ці пульсації тиску на поверхні сфери збуджують звукові коливання в довкіллі [2]. Гранична умова для акустичної задачі має вигляд:

$$p(r, \theta, \varphi, t) = \zeta(\theta, \varphi, t) \quad \text{при} \quad r = d/2, \quad (5.1)$$

де  $(r, \theta, \varphi)$  – сферичні координати з початком координат в центрі сфери,

Табл. 5.4: Середні значення коефіцієнтів опору  $C_x$  і бічної сили  $C_l$  для режиму періодичного скидання вихорів ( $Re = 300$ ), а також амплітуди їх коливань  $\Delta C_x$  і  $\Delta C_l$  і значення числа Струхала. Порівняння отриманих даних з результатами інших авторів

	[280]	[289]	[290]	[277, 279, 291]	[245, 253]	[252]	[261]	дана робота
St	0.133	0.134	0.134	0.136	0.136	0.137	0.135	0.133
$C_x$	0.661	0.658	0.657	0.655	0.671	0.656	0.683	0.665
$\Delta C_x$	$4 \cdot 10^{-3}$			$3.2 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$
$C_l$		0.067	0.067	0.065		0.069	0.061	0.068
$\Delta C_l$						$1.6 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$

Табл. 5.5: Турбулентний докритичний режим ( $Re = 10^4$ ). Середнє значення коефіцієнта опору  $C_x$ , а також значення числа Струхалія і кута відриву примежового шару, відлічуваного від лобової точки сфери. Порівняння отриманих даних з результатами інших авторів

	[280]	[268, 282]	[277, 279]	[292]	[293]	[294]	дана робота
$St_1$	0.191	0.195	0.195	0.17	0.18	0.195	0.196
$St_2$	1.65-1.82		2.1	1.78	1.94		1.94
$C_x$	0.387	0.41	0.393	0.393	0.39	0.402	0.41
$\theta_s$	$88^\circ$	$82.5^\circ$	$84 - 86^\circ$	$90^\circ$		$84.7^\circ$	$82.8^\circ$

$\zeta(\theta, \varphi, t)$  – розподіл тиску на поверхні сфери, створюваний потоком.

Звукове поле ззовні сфери описується хвильовим рівнянням. Оскільки функція  $\zeta(\theta, \varphi, t)$ , задана на межі, являється періодичною з періодом  $T$ , розв'язок сформульованої граничної задачі може бути представлено у вигляді ряду Фур'є:

$$p(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} p_n(r, \theta, \varphi), \quad (5.2)$$

де  $\omega = 2\pi/T = 2\pi StV/d$  – кутова частота, а  $p_n(r, \theta, \varphi)$  може бути представлено у вигляді подвійного ряду:

$$p_n = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_l^1(k_n r) P_l^m(\cos\theta) [A_{lmn} \cos m\varphi + B_{lmn} \sin m\varphi], \quad (5.3)$$

$$h_l^1(k_n r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_n r}} H_{l+1/2}^{(1)}(k_n r). \quad (5.4)$$

Тут  $k_n = n\omega/c$  – хвильове число,  $c$  – швидкість звуку в середовищі,  $H_s^{(1)}$  – функція Ханкеля першого роду,  $P_l^m$  – приєднана функція Лежандра першого роду. Невідомі коефіцієнти визначаються з граничної умови (5.1). Отримаємо:

$$A_{lmn} = \frac{1}{(1 + \delta_{m0})\pi T h_l^1(k_n a) N_{lm}} \times$$

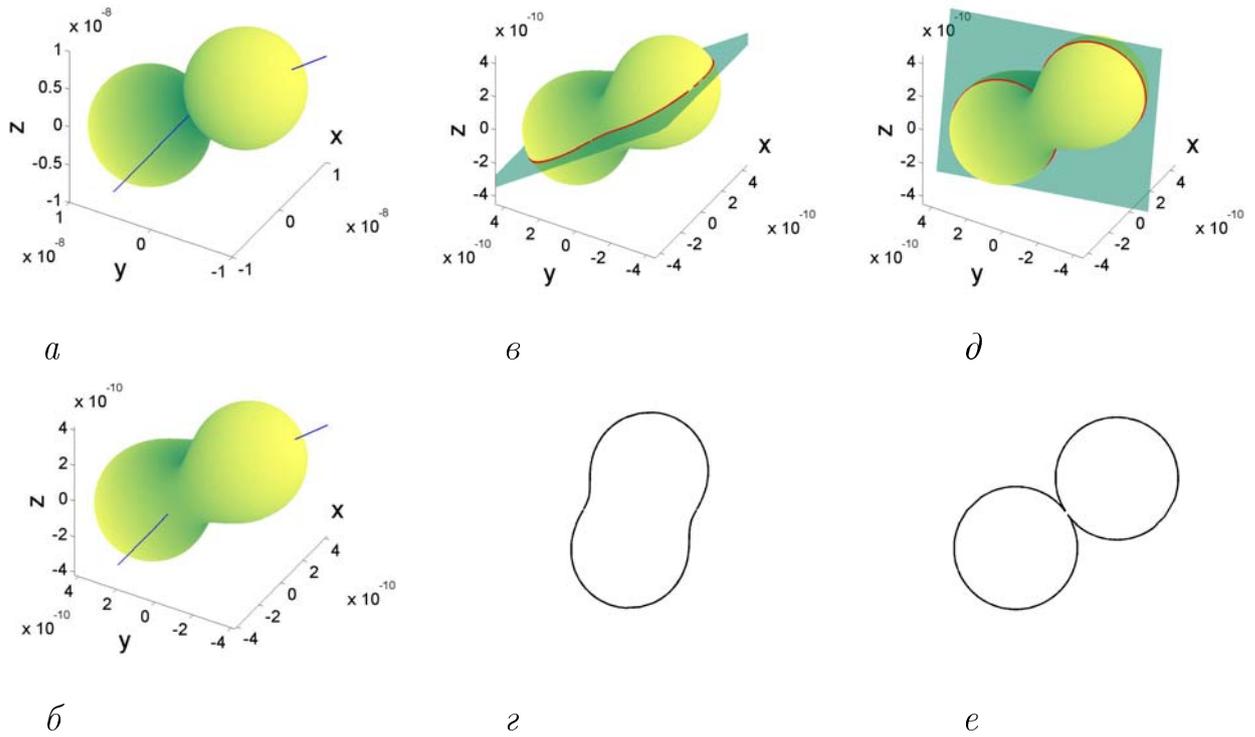


Рис. 5.13: Діаграма спрямованості при  $Re = 300$ : а – для першої гармоніки  $p_1$ , б – для другої гармоніки  $p_2$ , в, г – переріз площиною, що проходить через координатну вісь  $X$  і вісь діаграми спрямованості, д, е – переріз площиною, що проходить через вісь діаграми спрямованості і перпендикулярна площині, зображеній на рисунку в

$$\times \int_0^T \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \zeta(\theta, \varphi, t) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta \cos m\varphi e^{in\omega t} d\varphi d\theta dt, \quad (5.5)$$

де  $\delta_{l,l'}$  – символ Кронекера, а  $N_{lm} = 2/(2n + 1) \cdot (n + m)!/(n - m)!$ . Для  $B_{lmn}$  достатньо замінити в (5.5) функції  $\cos m\varphi$  на  $\sin m\varphi$ . Слід зазначити, що при  $n = 1$  цей розв'язок повністю співпадає з відомим розв'язком для сферичного випромінювача [239].

Розрахунок гідродинамічної задачі про обтікання сфери ми проводили для безрозмірних величин. При розрахунку ж звукового поля переходимо до розмірних величин. Параметри середовища вибираємо такі, як для повітря при температурі  $20^\circ C$ :  $\rho = 1.204 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 1.51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{з}$ ,  $c = 332 \text{ м/с}$ . Діаметр сфери приймемо  $d = 1 \text{ см}$ . Характеристики течії і звуку представлені в таблиці 5.6. Відразу зазначимо, що припущення, які ми поклали в

Табл. 5.6: Характеристики періодичної течії і породжуваного звукового поля

Re	300	350	$10^4$	опис
$V$ (м/с)	0.453	0.5285	15.1	швидкість потоку
$M$	$1.36 \cdot 10^{-3}$	$1.59 \cdot 10^{-3}$	$4.5 \cdot 10^{-2}$	число Маха
$f = VSt/d$ (Гц)	6.024	7.135	296	частота
$\frac{d}{\lambda} = \frac{df}{c}$	$1.81 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-4}$	$8.9 \cdot 10^{-3}$	хвильовий розмір джерела
$\max  p $ (Па)	$1.33 \cdot 10^{-8}$	$2.44 \cdot 10^{-8}$	$3.42 \cdot 10^{-8}$	тиск на осі диагр. спрямован.
$I = \frac{\max p^2}{\rho c} \left(\frac{\text{КГ}}{\text{СМ}}\right)^3$	$4.39 \cdot 10^{-19}$	$1.5 \cdot 10^{-18}$	$2.9 \cdot 10^{-18}$	інтенсивність звуку
$W_{\text{ак}} = IS$ (Вт)	$1.38 \cdot 10^{-18}$	$4.7 \cdot 10^{-18}$	$9.1 \cdot 10^{-18}$	повна акустична потужність
$W_{\text{ГД}}$ (Вт)	$4.4 \cdot 10^{-6}$	$6.98 \cdot 10^{-6}$	$1.63 \cdot 10^{-1}$	потужність потоку
$W_{\text{ак}}/W_{\text{ГД}}$	$3.14 \cdot 10^{-13}$	$6.73 \cdot 10^{-13}$	$5.6 \cdot 10^{-17}$	ККД

основу нашої моделі, підтверджуються чисельними розрахунками. Зокрема, значення числа Маха і хвильового розміру сфери мають порядок  $10^{-4}$ , тобто досить малі, щоб вважати, що звук поширюється в такому потоці так само, як в нерухомому середовищі. Це також підтверджує правильність розгляду гідродинамічної задачі у рамках моделі в'язкої нестисливої рідині. Відношення повної акустичної потужності генерованого звуку до потужності потоку, що набігає на сферу (ККД випромінювача), має порядок  $10^{-13}$ , а інтенсивність випромінюваного звуку (сила звуку) має порядок  $10^{-19} - 10^{-17}$ . Такі малі значення ККД випромінювача говорять про справедливість припущення про те, що зворотним впливом звуку на потік середовища можна знехтувати.

Автоколивальний процес, що виникає при обтіканні сфери потоком при  $Re = 300$ , є акустичним джерелом дипольного типу. На рисунку 5.13 а зо-

Табл. 5.7: Амплітуди гармонік  $p_n$  і кути нахилу  $\alpha_n$  осей діаграм спрямованості до напрямку потоку

Re	$\max  p_1 $	$\max  p_2 $	$\alpha_1$	$\alpha_2$
300	$1.33 \cdot 10^{-8}$	$5.35 \cdot 10^{-10}$	$82.8^\circ$	$75.6^\circ$
350	$2.44 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{-9}$	$83.4^\circ$	$71.2^\circ$
$10^4$	$3.42 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-9}$	$0^\circ$	$0^\circ$

бражено діаграму спрямованості для першої гармоніки  $p_1$ . Прямі лінії на рисунку показують напрям потоку і вісь діаграми спрямованості. Також, як і в задачі про обтікання циліндра в цій течії домінуючий вклад в звукове поле дає осциляція бічної сили, а не сили опору. Основна якісна відмінність звукового поля, що виникає при обтіканні циліндра [242], від звукового поля, що виникає при обтіканні сфери, полягає в наступному. При обтіканні циліндра в силу симетрії верхнього і нижнього вихорів, що зриваються, вісь діаграми спрямованості для  $p_1$  строго перпендикулярна напрямку потоку. При обтіканні сфери в ламінарному режимі (див. рисунок 5.6 а така симетрія відсутня. Верхня і нижня частини вихрових петель, що по черзі зриваються, мають різну інтенсивність, а точки їх відриву розташовані несиметрично. Тому при обтіканні сфери вісь діаграми спрямованості для першої гармоніки  $p_1$  розташована не перпендикулярно до напрямку потоку, а під деяким кутом  $\alpha_1$ . Значення кутів  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  між напрямком потоку і осями діаграм спрямованості гармонік  $p_1$ ,  $p_2$  наведено в таблиці 5.7.

На рисунку 5.13 б зображена діаграма спрямованості для другої гармоніки  $p_2$ . Видно, що вона сильно відрізняється від діаграми спрямованості для другої гармоніки в задачі про обтікання циліндра [242]. Якщо при обтіканні циліндра вісь  $p_2$  співпадала з напрямком потоку, то при обтіканні сфери в силу несиметричності частин вихрових петель, що по черзі зриваються, картина буде набагато складніша. На рисунку 5.13 в–е показано перерізи діаграми спрямованості двома перпендикулярними площинами, що проходять через вісь діаграми спрямованості. Видно, що звук випромінюється як

у бічному напрямку (у площині симетрії течії), так і в напрямку потоку. В той же час у бічному напрямі перпендикулярному до площини симетрії течії акустичне випромінювання відсутнє. Іншими словами, гармоніка  $p_2$  викликана як осциляцією бічної сили, так і сили лобового опору. Слід відзначити, що із зростанням числа Рейнольдса вклад гармоніки  $p_2$  зростає. В таблиці 5.7 представлені амплітуди двох гармонік  $p_1$  і  $p_2$  для трьох значень числа Рейнольдса. Видно, що, якщо при  $Re = 300$  відношення амплітуд першої і другої гармонік складає 24.86, то при  $Re = 350$  відношення амплітуд вже складає 16.27, а при  $Re = 10^4$  - лише 8.34.

## 5.5 Висновки до розділу

У цьому Розділі апробовано побудований нами алгоритм чисельного розв'язання тривимірних задач в широкому діапазоні чисел Рейнольдса. Хоча задача, що розглядається, є тривимірною, сучасні методи паралельних обчислень на кластерних суперкомп'ютерах дозволяють отримувати адекватні чисельні розв'язки задач. Чисельний алгоритм ґрунтується на методі скінченних об'ємів. При малих числах Рейнольдса застосовується техніка DNS, при великих числах Рейнольдса – техніка LES.

Запропонований чисельний алгоритм може застосовуватись до областей довільної складної геометрії. Тестування було проведене на задачі обтікання сфери в широкому діапазоні значень числа Рейнольдса від ламінарного безвідривного режиму течії, до турбулентних режимів. Запропонований чисельний алгоритм дозволив адекватно описати течію в усіх відомих режимах. Було показано хорошу відповідність отриманих нами результатів з результатами інших авторів.

Також було визначено діапазон чисел Рейнольдса, в якому в потоці виникають автоколивання і, отже, такий потік може породжувати звук. Були описані як одночастотні, так і багаточастотні коливальні режими. Також було встановлено, що в ламінарному режимі течії амплітуда коливань бічної

сили, прикладеної до сфери, приблизно в п'ять разів перевищує амплітуду коливань сили опору. Цей факт дозволяє констатувати, що, як і у випадку обтікання кругового циліндра, основна частина акустичної енергії генерованої потоком при обтіканні сфери, випромінюватиметься у бічному напрямку. При турбулентних режимах течії вихори, що зриваються, по формі близькі до вихрових кілець і, отже, ми маємо право чекати, що основна частина акустичної енергії, генерованої потоком при обтіканні сфери, випромінюватиметься у напрямку потоку, а не у бічному напрямку.

Отримано діаграми спрямованості звукового поля. Показано, що вісь діаграми спрямованості розташована не перпендикулярно до напрямку потоку, як у випадку обтікання кругового циліндра, а під деяким кутом нахилу. Цей ефект має місце через те, що вихори, які по черзі зриваються з поверхні сфери, не будуть антисиметричні, як у випадку обтікання циліндра. Для гармоніки  $p_2$  діаграма спрямованості має значно складніший вигляд, ніж в задачі про обтікання циліндра. Акустична енергія випромінюється як у бічному напрямку, так і у напрямку потоку.

## Розділ 6

# Особливості руху середовища в каналах зі стенозами

У цьому Розділі досліджено течію в'язкої нестисливої рідини в плоскому каналі за наявності в ньому послідовно розташованих один за одним двох стенозів (звужень) на основі чисельного розв'язання нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса. Алгоритм чисельного розв'язання, детально описаний в Розділі 1, базується на методі скінченних об'ємів з використанням TVD схем для дискретизації конвективних членів. Проаналізовано характер течії в області між стенозами в залежності від числа Рейнольдса. Зокрема показано, що в певному діапазоні чисел Рейнольдса з'являються характерні вихрові структури в зсувних шарах на межі струменя і порожнин (ніш), утворених стенозами. В результаті цього виникають стійкі періодичні антисиметричні автоколивання профілю швидкості на виході з отвору другого стенозу, які принципово можуть служити джерелом звукових коливань в каналі. Визначено залежність чисел Струхаля автоколивань профілю швидкості від числа Рейнольдса. Результати цього розділу відображено в статтях [232–235].

### 6.1 Вступ до розділу

Судини кровоносних систем людини і тварин, їх бронхіальні дерева, через які здійснюється дихання, різні труби для транспортування технічних

середовищ, кондиціонери, вентиляційні системи і хвилеводи, ось далеко не повний перелік природних і штучних каналів, по яких рухаються потоки газу, рідини і хвилі різної природи. Як правило, канали подібного роду є нерегулярними, тобто можуть мати вигини розгалуження, звуження (стенози) або розширення, різні заслінки вентилі і ін. Їх стінки також можуть мати різні механічні і акустичні властивості, у тому числі і локального характеру.

Закономірностями руху газу або рідини в таких каналах цікавиться головним чином така наука, як аерогідромеханіка, а закономірностями поширення хвиль (акустичних або електромагнітних) – акустика і електродинаміка. Разом з цим нерідко зустрічаються випадки, коли газ чи рідина, що рухаються по таких каналах, зустрічаючи на своєму шляху деякі з вказаних вище нерегулярностей, несподівано починають генерувати звукові коливання. Іншими словами частина енергії потоку, що рухається в каналі з якихось причин перетворюється у звукову енергію.

Цими явищами цікавилися дуже давно. Ще Релей у своїх фундаментальних роботах [21] вказував, що в 1854 році Зондхауз спостерігав виникнення тонального звуку (hole tone) при натіканні струменя повітря на круглий отвір в пластині.

В подальшому, ось вже більше ніж 150 років, цій проблемі приділяється велика увага. Наприклад, в [295], [296] (див. також і бібліографію в них) встановлено, що наявність поодинокого стенозу в трубі приводить до турбулізації потоку і, як наслідок, виникнення широкосмугового звуку шумового характеру. Але вже в трубах, що мають два стенози, вишикуваних один за одним на певній відстані, може виникнути тональний звуковий сигнал, частота якого пропорційна швидкості потоку, див., наприклад, [297], [35] і широку бібліографію в них. Цікаво, що ці роботи пов'язані з проблемою управління тягою реактивних двигунів, в них було розглянуто рух палива по трубопроводу, що має два керівні вентилі (заслінки). Результати дослі-

---

<sup>1</sup>Стеноз – (від грецького *στενός* – вузький, тісний) місцеве (локальне) звуження перерізу каналу, що має в загальному випадку довільну форму

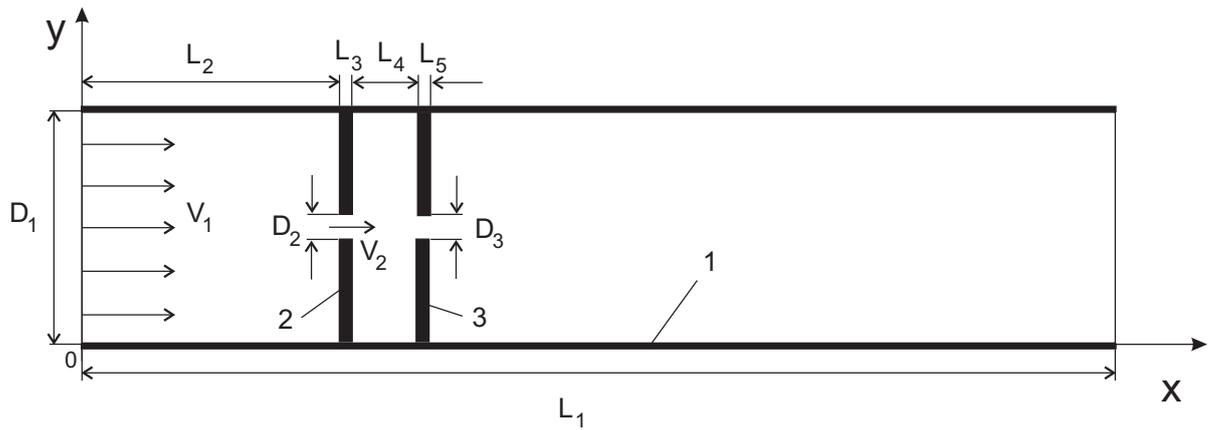


Рис. 6.1: Геометрія розрахункової області: 1 – стінка каналу; 2 – перший стеноз; 3 – другий стеноз

дження показали наявність істотного (в основному негативного) впливу звукових коливань, що виникають між заслінками, на ефективність контролю управління тягою реактивних двигунів.

Експериментальна робота [33] була присвячена вивченню тональних звуків, що виникають при натіканні струменя на отвір в пластині або на кільце. А експериментальна робота [34] була присвячена вивченню фізичного механізму виникнення свисту, який здатна генерувати людина, видихаючи повітря через ротову порожнину і отвір, утворений губами. Цікаво, що в якості фізичної моделі для проведення експериментів була вибрана прозора камера у вигляді відрізка труби, в якій на деякій відстані один від одного розташовувались два стенози (діафрагми), з однаковими отворами в їх центрах. Були отримані дані про залежності частоти тонального сигналу, що виникає, від геометричних параметрів камери і отворів в діафрагмах. Зокрема, за допомогою відеокамери із стробоскопічним підсвічуванням було зафіксовано, що на поверхнях струменя (на ділянці між діафрагмами) утворюються кільцеві вихори, поява яких і пов'язувалася з виникненням тональних звукових сигналів.

У роботі [298] досліджувались звукові шуми, генеровані потоками крові в артеріях, що мають поодинокі патологічні стенози викликані осіданнями холестерину, що виділяється з крові. Потенційно, результати робіт такого типу можуть бути використані з діагностичними цілями в медицині.

Нарешті в статті [60] висловлена цікава гіпотеза, що припускає, що сухі хрипи<sup>1</sup>, супутні ряду легеневих захворювань, можуть виникати за рахунок утворення у бронхах стенозів, викликаних запаленням стінок бронхів і, як наслідок, частковим перекриттям їх перерізів в'язкою мокротою (субстанція, що прилипає до стінок бронхів і інших ділянок бронхіального дерева, що викликає утруднення дихання і кашель), що виділяється при цьому. Були проведені модельні експерименти, які підтвердили принципову можливість появи сухих хрипів із-за такого роду явищ у бронхіальному дереві.

Не претендуючи на вичерпний аналіз результатів, наведених у вказаних вище літературних джерелах, можна стверджувати, що проблема генерування тональних звуків потоком в нерегулярних каналах надзвичайно складна, як в експериментальному, так і в теоретичному плані. Можна лише з упевненістю стверджувати, що тональні звуки є наслідком автоколивальних рухів середовища, що виникають при натіканні потоку на неоднорідності присутні в нерегулярних каналах. При цьому, необхідною умовою появи автоколивань є наявність зворотних зв'язків, що проявляються в суттєвому впливі особливостей руху середовища, що знаходяться нижче за течією потоку, на ділянці середовища, що знаходяться вище за течією потоку.

Метою роботи, що представлена в цьому Розділі, є дослідження особливостей течії потоку у плоскому каналі з двома стенозами, з'ясування фізичних причин, здатних приводити до появи автоколивальних рухів середовища і, як наслідок, до появи тональних звуків.

## 6.2 Постановка задачі та її чисельний розв'язок

Розглянемо течію газу або рідини в плоскому каналі за наявності розташованих один за одним двох перешкод у вигляді стенозів. Розрахункова область і прийняті позначення представлені на рисунку 6.1. Передбачається,

---

<sup>1</sup> Сухі хрипи – це різного роду тональні звукові сигнали, що добре прослуховуються медичним стетофонендоскопом на поверхні грудної клітини людини, і використовуються для діагностики типу легеневих захворювань

що стінки каналу (верхня і нижня межі розрахункової області), а також стінки стенозів нерухомі і абсолютно жорсткі, а потік рідини потрапляє в розрахункову область через лівий край  $x = 0; 0 \leq y \leq D_1$  і покидає розрахункову область на правій межі  $x = L_1; 0 \leq y \leq D_1$ .

Задача розв'язується у рамках моделі в'язкої нестисливої ньютонівської рідини з густиною  $\rho$  і, отже, основним параметром задачі являється число Рейнольдса. Оскільки в задачі є присутнім не один, а декілька масштабів довжини, число Рейнольдса може бути визначено по-різному. Розглядаючи цю течію як течію в каналі, можна в якості масштабу довжини вибрати ширину каналу  $D_1$ , в якості масштабу швидкості – швидкість потоку на вході в розрахункову область  $V_1$ . Тоді масштабом часу буде величина  $D_1/V_1$ , а масштабом тиску – подвоєний швидкісний напір  $\rho V_1^2$ . В цьому випадку число Рейнольдса визначається як  $Re_D = V_1 D_1 / \nu$ , де  $\nu$  – кінематична в'язкість середовища. Причому в силу нестисливості середовища  $V_1/V_2 = D_2/D_1$ , де  $V_2$  – швидкість потоку в отворі першого стенозу, осереднена по вертикальному перерізу. І, отже,  $Re_D = V_2 D_2 / \nu$ .

Надалі, щоб полегшити аналіз руху середовища в області між стенозами, умовно розіб'ємо цю область на три зони. Перша зона - це зона, зайнята струменем  $L_2 \leq x \leq L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ ,  $D_1/2 - D_2/2 \leq y \leq D_1/2 + D_2/2$ . Друга зона – зона, зайнята верхньою нішею  $L_2 + L_3 \leq x \leq L_2 + L_3 + L_4$ ,  $D_1/2 + D_2/2 \leq y \leq D_1$ . І третя зона – зона нижньої ніші  $L_2 + L_3 \leq x \leq L_2 + L_3 + L_4$ ,  $0 \leq y \leq D_1/2 - D_2/2$ .

Об'єктом нашого дослідження є особливості руху середовища в усіх цих зонах, а також на межах цих зон, де (як буде показано нижче) утворюється зсувний шар, який формується як пристінковий зсувний шар на поверхнях отвору першого стенозу, а потім відривається і зноситься течією між стенозами і може вже розглядатися як вільний зсувний шар. У зв'язку з цим, більш природним було б визначити число Рейнольдса по довжині ніш, вздовж яких відбувається розвиток зсувного шару:  $Re_L = V_2 L_4 / \nu = Re_D L_4 / D_2$ . При цьому масштабом довжини являється відстань між стенозами  $L_4$ , масштабом швидкості – швидкість  $V_2$ , масштабом часу – величина  $L_4/V_2$ , а масштабом

тиску – подвоєний швидкісний напір в отворі стенозу  $\rho V_2^2$ .

В рамках прийнятої моделі процес описується нестационарною системою рівнянь Нав'є-Стокса. У безрозмірних фізичних змінних ці рівняння представлені в тензорній формі (1.1) (1.2). Покомпонентне представлення цих рівнянь можна знайти в учбовій літературі (див., наприклад, [141]).

Граничні умови для швидкості на межах розрахункової області задавалися наступним чином: рівномірний потік на вході в розрахункову область при  $x = 0$ , умова прилипання на твердих поверхнях каналу і стенозів, а також "м'які" граничні умови типу лінійної екстраполяції, що відповідають рівності нулю нормального градієнта швидкості, на виході з розрахункової області при  $x = L_1$ . Для тиску умова рівності нулю нормального градієнта формулювалася по всій межі розрахункової області [94] за винятком виходу з розрахункової області. На виході задавався постійний тиск.

Добре відомо, що двовимірна постановка задачі дозволяє сформулювати її в змінних завихреність - функція струму (див., наприклад, [142]). Такий підхід дозволяє виключити тиск з рівнянь руху і таким чином уникнути складнощів пов'язаних з визначенням поля тиску і узгодженням полів. Проте, поширення підходу з використанням завихреності і функції струму на тривимірні задача ускладнено тим, що для тривимірного течії не можна ввести скалярну функцію струму. Використання ж векторного потенціалу призводить до необхідності розв'язувати на кожному часовому шарі три параболічних і три еліптичні рівняння, що істотно ускладнює задачу [116]. З цієї причини в даній роботі задача розв'язувалась саме у фізичних змінних швидкість - тиск.

Значення геометричних параметрів каналу вибиралися такі самі, як в експериментальній роботі [60], а саме:  $D_1 = 18$  мм,  $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $L_1 = 150$  мм,  $L_2 = 20$  мм,  $L_3 = L_5 = 1$  мм,  $L_4 = 5.8$  мм. Кінематична в'язкість приймалася рівною в'язкості повітря при температурі  $20^\circ\text{C}$ :  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. Розміри області при розрахунках не змінювалися, а значення швидкості на вході варіювалися в межах 0.6 - 3 м/с, що відповідало значенням числа Рейнольдса  $Re_D = 720 - 3600$  або  $Re_L = 2088 - 10440$ .

Рівняння руху (1.1), (1.2) розв'язуються чисельно методом скінченних об'ємів [93], [94], який нині можна вважати найпопулярнішим в задачах механіки рідин. Метод скінченних об'ємів, а також використовувані нами схеми дискретизації рівнянь руху детально описані в Розділі 1. Основна ідея методу скінченних об'ємів полягає в тому, що розрахункова область розбивається на елементарні об'єми і диференціальні рівняння, справедливі для усієї розрахункової області, замінюються інтегральними балансними співвідношеннями для кожного з цих елементарних об'ємів. Це забезпечує строге дотримання законів збереження в кожному елементарному об'ємі.

Для дискретизації розрахункової області використовувалась неортогональна сітка із згущуванням вузлів в отворах стенозів (210 точок по вертикальному перерізу отвору, тобто 208 елементарних комірок) і із згущуванням вузлів при наближенні до стінки. Таку кількість точок у вертикальному перерізі отвору стенозу було вибрано з міркувань гладкості профілю швидкості в перерізі. Точки сітки бралися за вершини контрольних об'ємів, а значення невідомих функцій визначалися в центроїдах контрольних об'ємів. Метод скінченних об'ємів, взагалі, не накладає обмежень на геометричні характеристики кожного з контрольних об'ємів, проте в цьому дослідженні ми використали структуровану сітку з чотирикутною формою елементарних комірок (але в загальному випадку не прямокутної), що більш природно відповідало геометрії задачі, давало менше число комірок і більш швидко збіжність в порівнянні з неструктурованими триангулярними сітками. З метою верифікації отриманих результатів розрахунки виконувалися при різному числі контрольних об'ємів і при різних значеннях коефіцієнтів згущування вузлів сітки. Мінімальний крок поблизу кутових точок в отворів стенозів складав 0.002 мм .

При розрахунках використовувалися бібліотеки тулбоксу з відкритим кодом OpenFOAM [143, 210]. Для обчислення об'ємних інтегралів за контрольним об'ємом використовувалася загальна процедура Гауса, згідно якої інтеграл за об'ємом представляється через інтеграл по поверхні комірки, а значення функції на поверхні комірки інтерполюється зі значень функції в

центроїдах сусідніх комірок. Для інтерполяції конвективних членів використовувалася TVD схема `limitedLinearV` – TVD форма центрально-різницевої схеми для векторного поля з обмежувачем типу `Sweby` [131], імплементована в OpenFOAM. На ортогональних ділянках сітки нормальні градієнти швидкості на поверхні комірок, необхідні при обчисленні дифузійних членів по теоремі Гауса, обчислювалися зі значень швидкості в центроїдах сусідніх комірок за схемою другого порядку. На неортогональних ділянках сітки використовувалася процедура корекції погрішності, викликані неортогональністю сітки [211]. В якості схеми дискретизації похідної по часу використовувалася неявна триточкова несиметрична схема другого порядку з різницями назад (`backward differencing`).

Для зв'язаного розрахунку поля швидкості і тиску використовувалася процедура PISO (`pressure implicit split operator`) [137] з числом коректорів 4. Опис процедури PISO може бути також знайдено в учебній літературі по обчислювальній гідромеханіці (див., наприклад, [95, 141]). Для розв'язання отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь використовувались ітераційні солвери PCG і PBiCG (`preconditioned (bi-) conjugate gradient`, метод (бі-)спряжених градієнтів з передобумовленням) для симетричних і антисиметричних матриць, відповідно, які також входять в OpenFOAM, хоча доступні і в інших вільно поширюваних бібліотеках з відкритим кодом. В якості передобумовлювача були вибрані процедури DIC (`diagonal - based incomplete Cholesky preconditioner`, передобумовлювач, що базується на спрощеній схемі неповної факторизації Холецького) і DILU (`diagonal - based incomplete LU preconditioner`, передобумовлювач, що базується на спрощеній неповній LU факторизації) для симетричних і асиметричних матриць, відповідно [149].

Розрахунки проводилися для шести значень швидкості на вході в діапазоні 0.6 - 3 м/с ( $Re_L = 2088 - 10440$ ). Результати розрахунків для течії з попереднім, меншим значенням вхідної швидкості бралися за початкові умови для течії з наступним, великим значенням вхідної швидкості. В якості початкових умов для задачі з найменшим значенням вхідної швидкості  $V_1 = 0.6$  м/с ( $Re_L = 2088$ ) коли зсувний шар, що утворюється, залишається

стійким на усій ділянці між стенозами, використовувалися нульові початкові умови. Оскільки інтерес представляє передусім не перехідний процес, а розвинена течія з періодично утворюваними вихорами в зсувному вихровому шарі між стенозами, то спочатку розрахунки проводилися на більш грубій сітці з подальшим відображенням полів на детальнішу сітку. Після закінчення перехідного процесу деякий момент часу брався за  $t = 0$ .

З метою контролю точності обчислення полів в цій задачі поле швидкості чисельно інтегрувалося по вертикальному перерізу на вході у отвір першого стенозу ( $x = L_2$ ), який надалі називається  $S_1$ , а також по вертикальному перерізу на виході з отвору другого стенозу ( $x = L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ ), який в подальшому називається  $S_2$ . Це дозволяло контролювати точність виконання умови нестисливості середовища. Відносна погрішність не перевищувала  $10^{-3}$ :

$$\left| \frac{\int_{S_i} U ds - V_1 D_1}{V_1 D_1} \right| < 10^{-3}, \quad i = 1, 2. \quad (6.1)$$

Також слід згадати, що з метою верифікації використовуваного чисельного алгоритму була чисельно розв'язана класична задача про нестационарний відрив потоку при обтіканні кругового циліндра. Результати, отримані з використанням представленого в даній роботі чисельного алгоритму, добре узгоджувалися з результатами представленими в [152]. Розбіжність наших результатів з результатами авторів [152] не перевищувало 2% і було менше, ніж розбіжність результатів, отриманих різними авторами, які обговорюються в [152].

Представлені в даному Розділі результати розраховувались на комп'ютері з чотириядерним процесором Core 2 Quad. Також розрахунки проводилися на кластерному суперкомп'ютері Інституту кібернетики НАН України. Для розпаралелювання обчислень використовувалась технологія MPI і метод розпаралелювання, відомий як декомпозиція області розв'язку, (domain decomposition) тобто розпаралелювання на основі геометричного паралелізму [141]. Згідно з цим методом розрахункова область і поля, що розраховуються, розщеплюються на частини, кожна з яких розташовується в пам'яті окремого процесора. Таким чином, обчислення в кожній з підобластей про-

водяться на окремому процесорі, що істотно скорочує час розрахунків.

### 6.3 Аналіз результатів розрахунку

Аналіз розпочнемо з випадку, коли швидкість потоку відносно мала і рух потоку практично стаціонарний. На рисунках 6.2 а, б представлені картини ліній струму і поля завихреності при  $V_1 = 0.6$  м/с ( $Re_L = 2088$ ). Спочатку зупинимося на картині ліній струму, див. рисунок 6.2 а. Тут добре видно як потік входячи з широкої лівої частини каналу у вузький отвір першого стенозу, різко збільшує свою швидкість (в середньому в  $D_1/D_2$  разів) і утворює в міжстенозному просторі струмись з рівними і гладкими поверхням, на що безпосередньо вказує значне згущування тут рівних і гладких ліній струму. Після виходу з отвору другого стенозу в широку праву частину каналу струмись ще досить довго (приблизно на дистанції до  $5D_2$  від другого стенозу) практично зберігає свою швидкість і форму.

Тепер розглянемо картину поля завихреності, для чого звернемося до рисунку 6.2 б і розташованій правіше шкалі, яка показує міру завихреності середовища. Тут відтінкам червоного кольору відповідає додатна завихреність (спрямована проти годинникової стрілки), а відтінкам синього кольору – від’ємна завихреність (спрямована за годинниковою стрілкою). Як видно, на поверхнях першого стенозу формуються два ламінарних примежових шари (верхній і нижній), які після відриву від стенозу стають по суті вільними зсувними шарами і далі зносяться течією в область між стенозами, весь час залишаючись на поверхнях струменя. Завихреність у верхньому зсувному шарі весь час залишається додатною, а в нижньому – від’ємною. При цьому, як показують отримані розрахункові дані, швидкість руху середовища  $V_x$  у товщі зсувних шарів дуже нерівномірна. Так, по мірі просування від внутрішніх поверхонь зсувних шарів до їх зовнішніх поверхонь, вона знижується приблизно на порядок.

На шляху від лівого стенозу до правого зсувні шари дещо розширюю-

ться і тому загальна товщина струменя з зсувними шарами при підході до другого стенозу стає більше ширини його отвору. Це призводить до того, що кожен зсувний шар розрізається передніми кромками отвору другого стенозу на два шари – внутрішній і зовнішній. Внутрішні шари проходять через отвір другого стенозу і далі залишаються на поверхнях струменя в правій широкій частині каналу, а зовнішні шари завертають у верхню і нижню ніші. Спочатку вони рухаються уздовж внутрішніх стінок другого стенозу, а потім відриваються від них і формують дві основні симетричні (відносно площини  $y = D_1/2$ ) циркуляційні течії (два вихори). Звернемо увагу на те, що ці вихори шаруваті. Особливо чітко це видно в районі внутрішніх стінок другого стенозу, де шар, що знаходиться ближче до стінки, має від'ємну завихреність, а шар над ним – додатну завихреність. Важливо відзначити, що обертаючись в нішах, ці два основних вихори переносять частину кінетичної енергії струменя з району входу її в отвір другого стенозу в район виходу струменя з першого стенозу (район кореня струменя). Таким чином, в міжстенозному просторі обидва основних вихори виконують роль своєрідного каналу зворотного зв'язку, коли частина енергії з виходу нелінійної динамічної системи, що розглядається, переноситься на її вхід. А як відомо з теорії автоколивань, наявність зворотного зв'язку в нелінійних системах створює передумови для виникнення в ній автоколивальних процесів [220, 299]. Звичайно, виникнуть автоколивання або ні залежить від багатьох чинників, головними з яких є відносний рівень енергії в каналі зворотного зв'язку і його запізнювання за часом (чи фаза). У даній динамічній системі очевидно важливу роль гратимуть не лише відносний рівень енергії і його запізнювання, але і степінь завихреності середовища в каналі зворотного зв'язку, а також її знак. В даному випадку, при відносно низькій швидкості потоку, вказані чинники такі, що не можуть чинити достатнього впливу на корінь струменя і тому ніяких автоколивань у системі не виникає.

Тепер коротко зупинимось на особливостях руху потоку в правій широкій частині каналу. Як ми вже говорили вище, тут спостерігається струмись, сформований другим стенозом, який, гальмуючи, породжує "грибо-

подібний" вихор, що розпадається надалі на відносно великі вихрові структури. Останні, взаємодіючи із стінками каналу, можуть переміщатися як у напрямку основної течії, так і в інших напрямках, у тому числі і проти течії. Зміна положення цих вихрових структур обумовлює дуже повільну зміну напрямку руху струменя в цій широкій частині каналу.

Нарешті подивимося як поведуться профілі швидкості потоку  $V_x$  у вхідному перерізі  $S_1$  і у вихідному перерізі  $S_2$  міжстенозної області, див. рисунок 6.2 в, г. Тут добре видно, що профіль швидкості у вхідному перерізі має П-образну форму, що вказує на те, що примежовий шар на передній кромці поверхні отвору першого стенозу ще не встиг сформуватися. На відмінність від цього, профіль швидкості у вихідному перерізі, тобто на кормовій кромці поверхні другого стенозу, має форму близьку до форми, характерної для течії в каналі без стенозів (профіль Пуазейля). На додаток до цього, слід також сказати, що форма профілю швидкості у вхідному перерізі не залежить від часу. А форма профілю швидкості у вихідному перерізі не істотно змінюється в центральній області струменя, тобто має дуже малу нестационарну складову, поява якої обумовлена повільними змінами напрямку руху струменя, про який ми говорили вже вище.

Збільшимо швидкість потоку до  $V_1 = 0.9$  м/с ( $Re_L = 3132$ ) і звернемося до результатів розрахунку картин ліній струму і поля завихреності, представлених на рисунку 6.3 а, б. Як добре видно, при такій швидкості потоку ці картини істотно відрізняються від відповідних картин для швидкості потоку  $V_1 = 0.6$ , які ми розглянули трохи вище. Тепер енергії в каналі зворотного зв'язку виявляється цілком достатньо, щоб впливати на форму струменя (див. картину ліній струму) і на зсувний шар (див. картину поля завихреності). Тут, починаючи приблизно з середини міжстенозного простору, струмінь набуває звивистого характеру, а в зсувних шарах утворюється характерна послідовність вихорів. При цьому ряди вихорів у верхньому і нижньому зсувних шарах розташовуються один відносно одного в шаховому порядку. Набігаючи на отвір другого стенозу, ці ряди вихорів викликають несиметричні (відносно осі струменя) коливання вертикального профі-

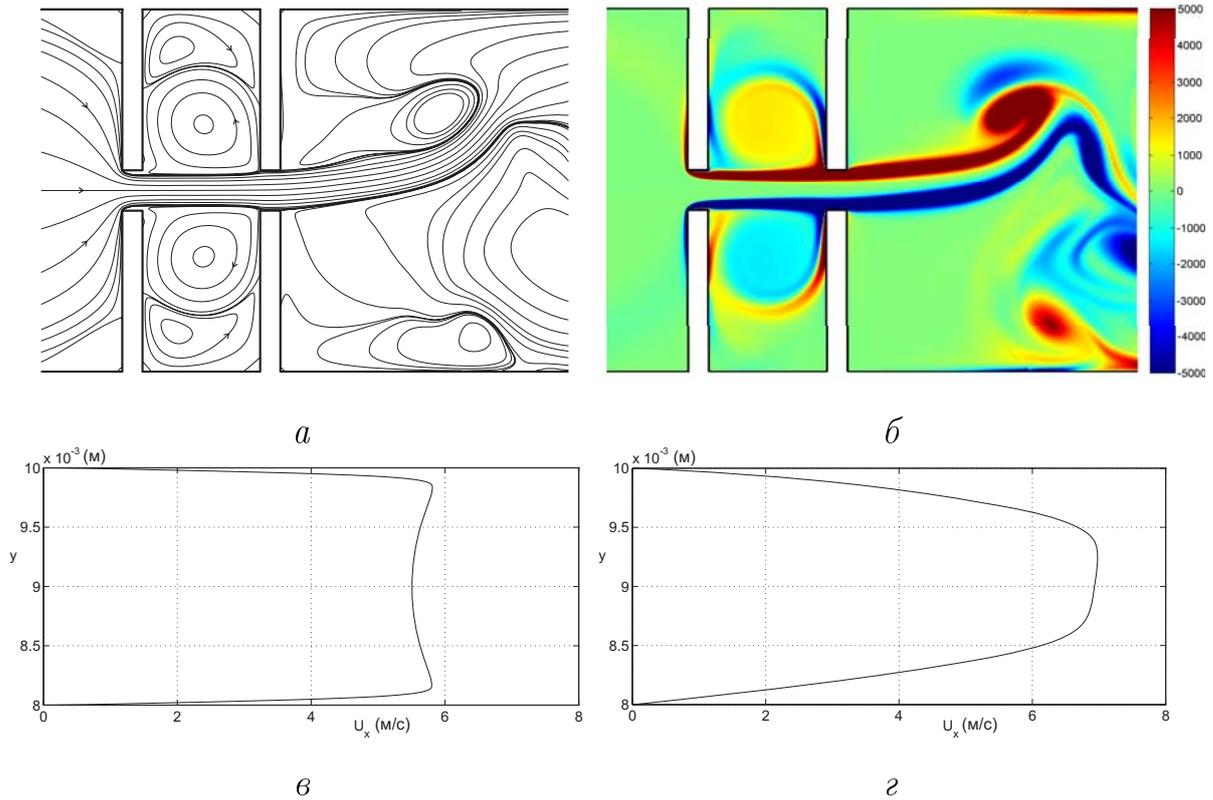


Рис. 6.2: Течія при  $V_1 = 0.6$  м/с ( $Re_L = 2088$ ): *a* – лінії струму, *б* – поле завихреності, *в*, *г* – профілі швидкості в перерізах  $S_1$  і  $S_2$ , відповідно

лю швидкості у вихідному перерізі  $S_2$ , тоді як профіль швидкості у вхідному перерізі  $S_1$  залишається сталим і незалежним від часу, див. мал. 6.3 в, г. Що стосується великих шаруватих вихорів, що утворюються в нішах і є по-суті каналом зворотного зв'язку, то тепер їх шари мають не суцільний характер, а переривчастий (порівняйте рисунок 6.2 б і рисунок 6.3 б), що обумовлено наявністю вихорів в зсувних шарах на поверхнях струменя.

Природно виникає питання: чи являються коливання профілю швидкості у перерізі  $S_2$  періодичними? Щоб відповісти на це питання ми досліджували залежність зміни профілю швидкості від часу і виявилось, що в певному діапазоні швидкостей  $V_1$  ці коливання носять яскраво виражений періодичний характер і антисиметричні відносно осі струменя. Таким чином, в даній гідродинамічній системі дійсно можуть виникати автоколивальні явища. З метою ілюстрації цих явищ на рисунках 6.4 – 6.6 наведено дані, які показують як впродовж одного періоду  $T$  процесу автоколивань в системі змінюються картини поля завихреності і осцилюючі частини профілів швидкості  $V_x$

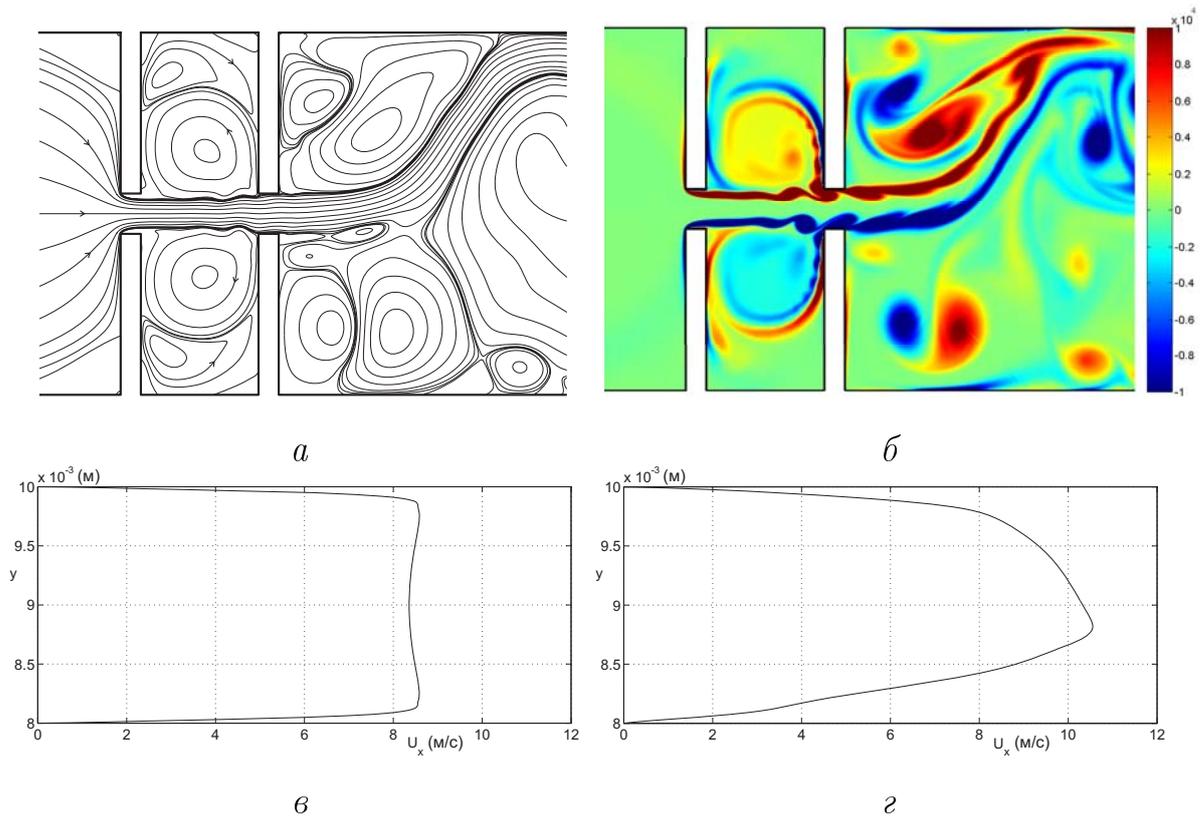


Рис. 6.3: Течія при  $V_1 = 0.9$  м/с ( $Re_L = 3132$ ): *a* – лінії струму, *б* – поле завихреності, *в*, *г* – профілі швидкості в перерізах  $S_1$  і  $S_2$ , відповідно

у вихідному перерізі  $S_2$ . Помітимо, що при розкладанні величини  $V_x$  в ряд Фур'є за часом, стаціонарна (не залежна від часу) частина профілю швидкості описується нульовим членом ряду, а осцилююча частина, яка і буде передусім нас цікавити, сумою інших членів ряду.

Аналізуючи дані, приведені на рисунках 6.2 – 6.6, можна відзначити ряд важливих властивостей, притаманних даним гідродинамічній системі. По-перше, автоколивання в системі виникають тільки після досягнення деякій пороговій швидкості потоку, що загалом типово для усіх гідроаеродинамічних систем, в яких спостерігаються автоколивання. Найдавнішим і добре відомим класичним прикладом є обтікання потоком жорсткого циліндра, навколо якого виникають автоколивання середовища, розпочинаючи приблизно зі значень чисел Рейнольдса  $Re \approx 50$  [214]. В нашій системі автоколивання починають виникати при значеннях Рейнольдса  $Re_L$ , що лежать між 2088 і 3132. По-друге, період автоколивань зменшується із зростанням швидкості потоку. Дійсно, при швидкості потоку  $V_1 = 0.9$  м/с період авто-

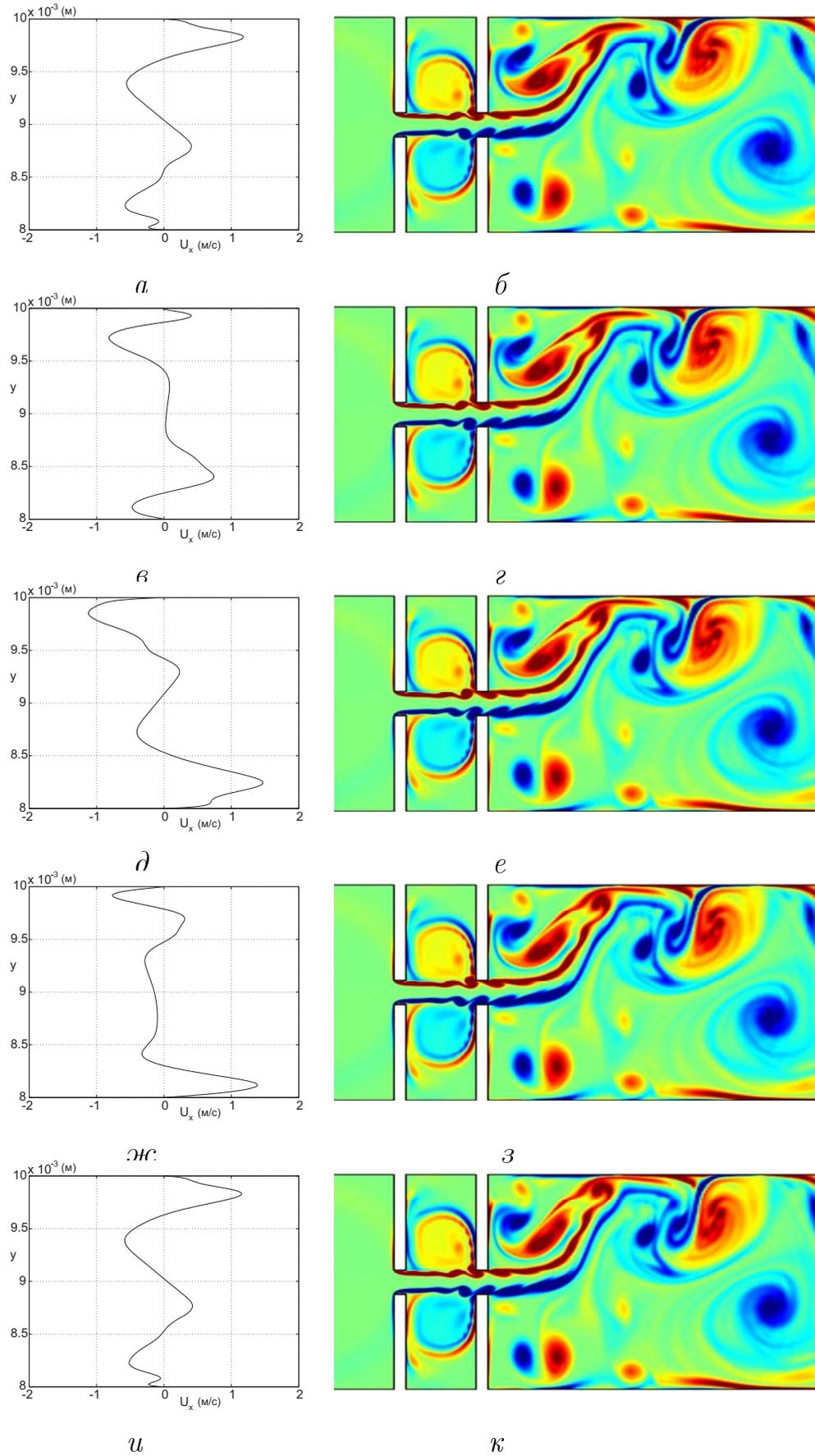


Рис. 6.4: Течія при  $V_1 = 0.9$  м/с ( $Re_L = 3132$ ). Ліва колонка – коливальна частина профілю швидкості  $V_x$  в перерізі  $S_2$ . Права колонка – поле завихреності:  $a, б$  – момент часу  $t = 0$ ,  $в, з$  –  $t = T/4$ ,  $д, е$  –  $t = T/2$ ,  $ж, з$  –  $t = 3T/4$ ,  $u, κ$  –  $t = T$

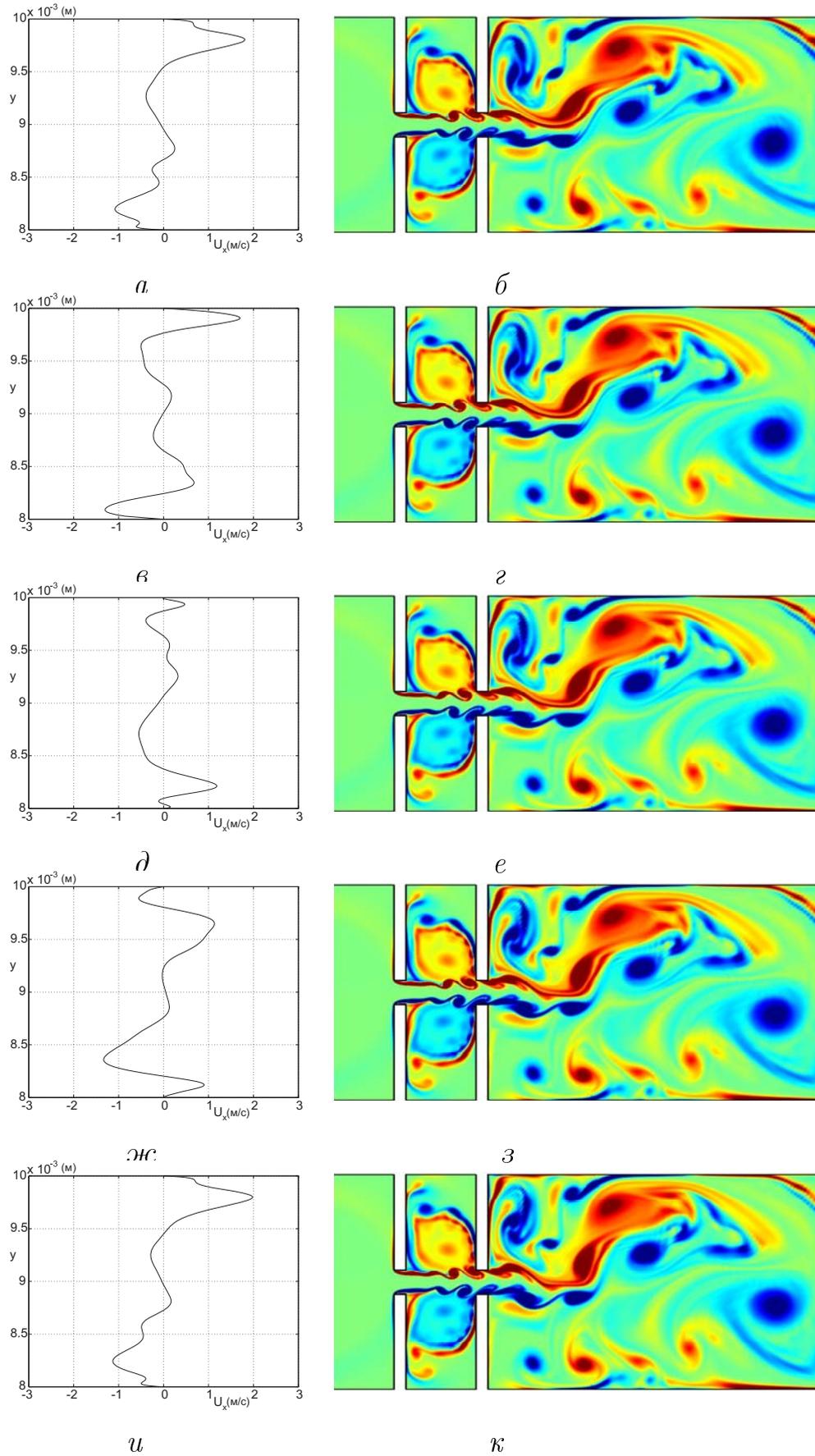


Рис. 6.5: Течія при  $V_1 = 1.2$  м/с ( $Re_L = 4176$ ), ліва колонка – коливальна частина профілю швидкості  $V_x$  в перерізі  $S_2$ , права колонка – поле завихреності:  $a, б$  – момент часу  $t = 0$ ,  $в, з$  –  $t = T/4$ ,  $д, е$  –  $t = T/2$ ,  $ж, з$  –  $t = 3T/4$ ,  $у, к$  –  $t = T$

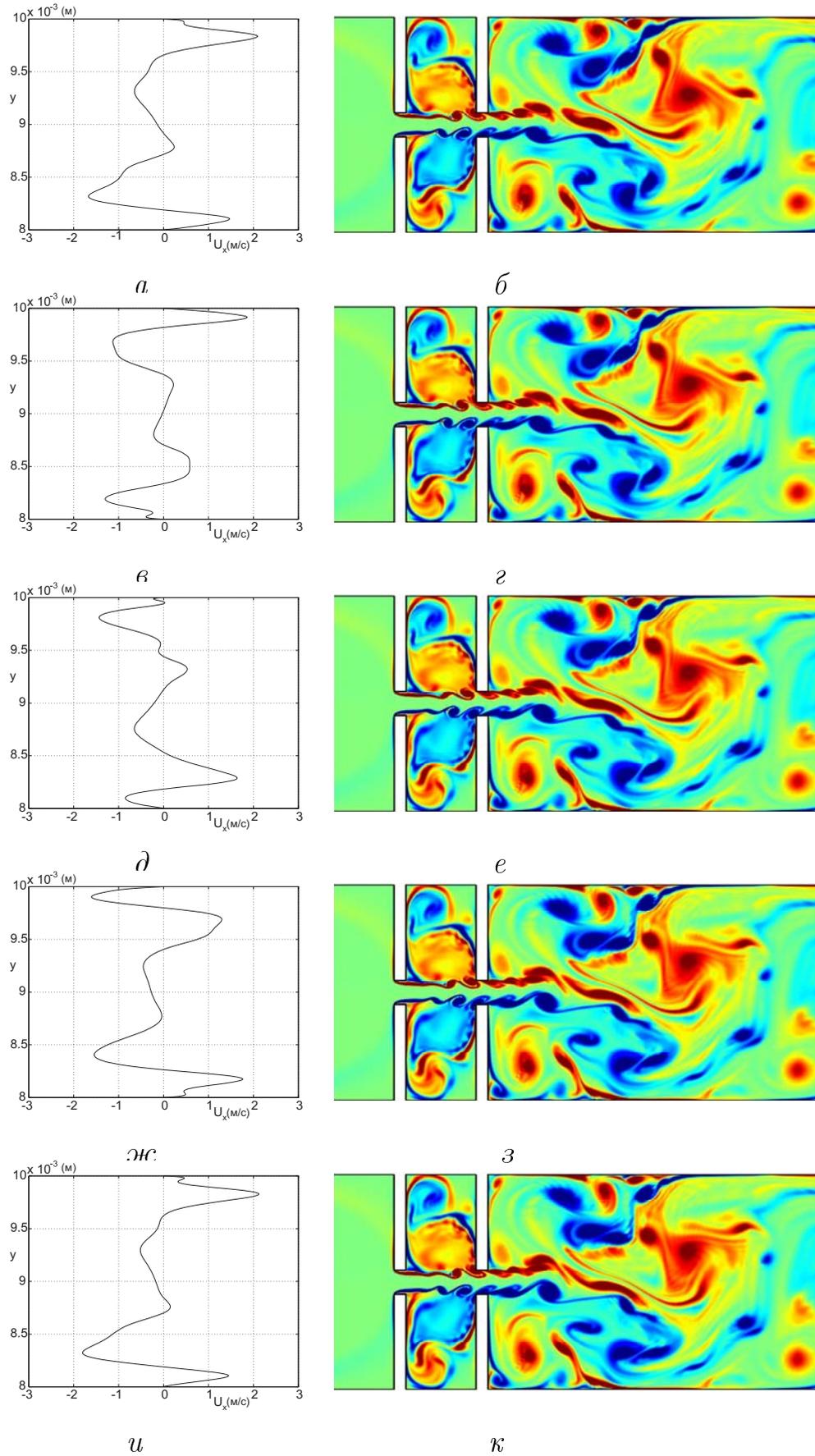


Рис. 6.6: Течія при  $V_1 = 1.8$  м/с ( $Re_L = 6264$ ), ліва колонка – коливальна частина профілю швидкості  $V_x$  в перерізі  $S_2$ , права колонка – поле завихреності:  $a, б$  – момент часу  $t = 0$ ,  $в, г$  –  $t = T/4$ ,  $д, е$  –  $t = T/2$ ,  $ж, з$  –  $t = 3T/4$ ,  $и, к$  –  $t = T$

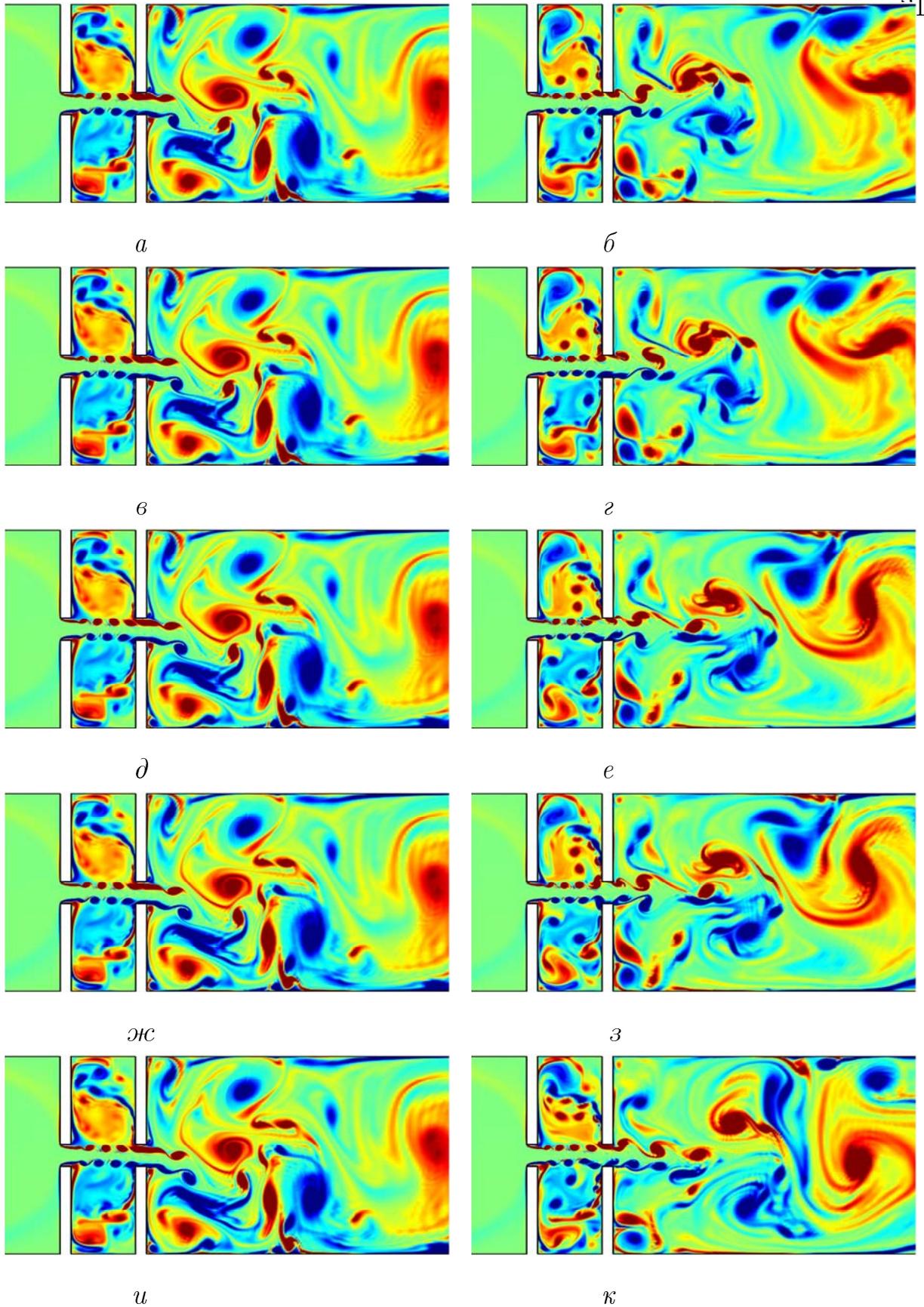


Рис. 6.7: Ліва колонка – течія при  $V_1 = 2.4$  м/с ( $Re_L = 8352$ ):  $a$  – момент часу  $t = 0$ ,  $б$  –  $t = T/4$ ,  $в$  –  $t = T/2$ ,  $ж$  –  $t = 3T/4$ ,  $u$  –  $t = T$ . Права колонка – течія при  $V_1 = 3$  м/с ( $Re_L = 10440$ ):  $б$ ,  $з$  – вихори розташовані у шаховому порядку,  $е$ ,  $з$  – чехарда,  $κ$  – несиметричний випадок чехарди

коливань складає  $T = 2.77 \cdot 10^{-4}$  с (число Струхаля  $St = L_4/(V_2 T) = 2.58$ ). При  $V_1 = 1.2$  м/с величина  $T = 1.94 \cdot 10^{-4}$  с ( $St = 2.77$ ), а при  $V_1 = 1.8$  м/с  $T = 1.16 \cdot 10^{-4}$  с ( $St = 3.08$ ). Така закономірність пояснюється тією обставиною, що відстань між сусідніми вихорами в кожному з зсувних шарів слабо залежить від швидкості струменя в міжстенозному просторі. Тому, збільшення швидкості потоку приводить до того, що вихори частіше стикаються з отвором другого стенозу і, отже, коливання профілю швидкості в перерізі  $S_2$  відбуваються швидше. По-третє, із зростанням швидкості потоку також зростає амплітуда коливань профілю швидкості, що цілком природно, оскільки росте кінетична енергія потоку. В-четвертих, точка, де починають згортатися вихори в зсувних шарах, має тенденцію зміщуватися ближче до першого стенозу зі збільшенням швидкості потоку. Подальше збільшення швидкості до  $V_1 = 2.4$  м/с ( $Re_L = 8352$ ) призводить до того, що точка згортання вихорів в зсувному шарі зміщується до задньої кромки отвори першого стенозу. А відрив примежового шару, який утворюється на фронтальній поверхні першого стенозу, відбувається вже на передній кромці. Внаслідок цього збільшується число вихорів які уміщаються між стенозами, а розміри вихорів і відстані між сусідніми вихорами помітно зменшуються. Період коливань профілю швидкості в перерізі  $S_2$  зменшується до  $T = 0.72 \cdot 10^{-4}$  с, а число Струхаля набуває значення  $St = 3.73$ . Так само слід зазначити, що при більших швидкостях струмів у області між стенозами не встигає розширитися настільки, щоб зайняти повністю отвір другого стенозу. Тому напрямок руху струменя в каналі після другого стенозу чинить вплив і на напрямок струменя в області між стенозами. На рисунку 6.7 (ліва колонка) видно, що струмінь притиснутий до нижньої половини другого стенозу. Тому вихори в нижньому зсувному шарі переважно зрізуються нижньою кромкою отвору другого стенозу і можуть потрапити в нижню нішу, тоді як вихори верхнього зсувного шару практично повністю проскакують в отвір другого стенозу. Ця картина змінюється на протилежну, коли змінюється напрямок руху струменя в каналі після стенозів, тобто коли струмінь в цій частині каналу під дією утворених там вихрових структур рухається вгору.

При подальшому збільшенні швидкості потоку описані вище закономірності руху потоку в міжстенозній області можуть не зберігатися. Характер руху потоку може виявитися нестабільним і включати декілька режимів, що чергуються з часом. В якості ілюстрації таких явищ в правій колонці рисунка 6.7 представлено поле завихреності при  $V_1 = 3$  м/с ( $Re_L = 10440$ ) в різні моменти часу, які відповідають різним режимам руху потоку в міжстенозному просторі.

Наприклад, на рисунку 6.7 б видно, як велика частина верхнього вихору зрізується передньою кромкою другого стенозу і потрапляє у верхню нішу і лише невелика його частина проскакує в отвір другого стенозу. Верхній вихор, що йде за ним, навпаки, майже повністю проскакує в отвір стенозу (рисунок 6.7 г). На рисунках 6.7 е, з видно початкову і кінцеву стадії проскакування наступної вихрової пари усередині попередньої. Це явище добре відоме в гідромеханіці і носить назву "вихрова чехарда". В результаті цієї "чехарди та пара вихорів, яка проскочила усередині, далі відразу потрапляє в отвір стенозу. А зовнішня пара розходить і потрапляє в ніші.

На рисунку 6.7 к представлено несиметричний випадок "чехарди що відбувається лише у нижньому вихровому ряді.

На закінчення необхідно відзначити наступне. Дослідження коливань середовища в отворі другого стенозу ми провели на основі використання моделі нестисливої рідини, в якій принципово не можуть поширюватися звукові хвилі. Реальні середовища, звичайно, володіють певною стисливістю. У зв'язку з цим можна припустити (і досвід підтверджує це), що для реальних середовищ особливості руху в даному каналі матимуть такий самий характер, як і для випадку нестисливого середовища. Тоді коливання швидкості в отворі другого стенозу можуть виявитися джерелом звукових коливань, що поширюються в каналі.

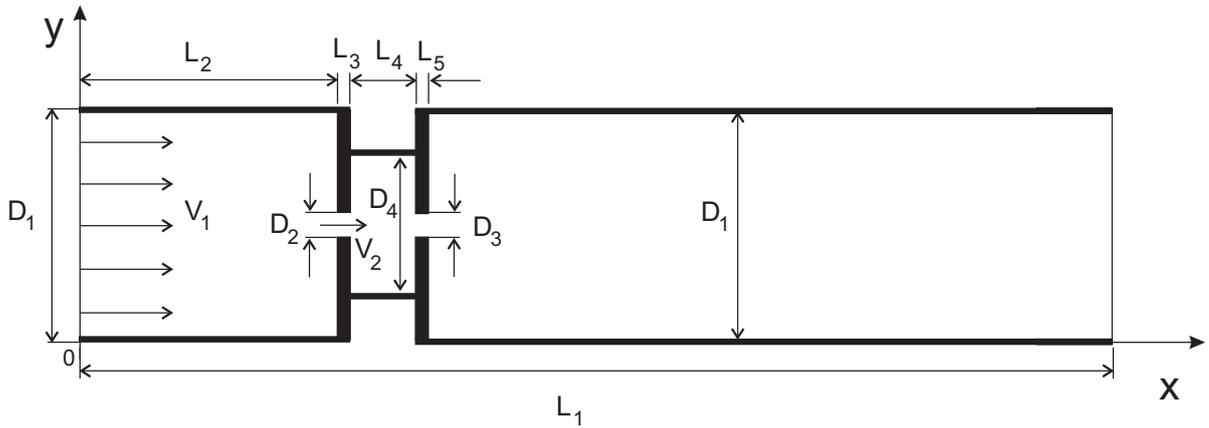


Рис. 6.8: Геометрія розрахункової області

## 6.4 Аналіз результатів розрахунків для різної глибини міжстенозних ніш

Розглянемо тепер окремо випадок, коли глибина міжстенозних ніш може не співпадати з напівшириною каналу. Вгору проти потоку від першого стенозу ( $0 \leq x \leq L_2$ ), а також вниз по потоку від другого стенозу ( $L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \leq x \leq L_1$ ) канал має ширину  $D_1$ , тоді як в міжстенозному просторі ( $L_2 + L_3 \leq x \leq L_2 + L_3 + L_4$ ) ширина каналу дорівнює  $D_4 \leq D_1$ . Іншими словами, в міжстенозному просторі може мати місце деяке звуження каналу. Розрахункова область і прийняті позначення представлені на рисунку 6.8.

Значення геометричних параметрів каналу вибиралися такі самі, як і в задачі, розглянутій в підрозділі 6.3, а саме:  $D_1 = 18$  мм,  $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $L_1 = 150$  мм,  $L_2 = 20$  мм,  $L_3 = L_5 = 1$  мм,  $L_4 = 5.8$  мм. Кінематична в'язкість приймалася рівною в'язкості повітря при температурі  $20^\circ\text{C}$ :  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. Визначені вище розміри області при розрахунках не змінювалися, а ширина каналу в міжстенозній області  $D_4$  варіювалася в межах 6 – 18 мм.

Згідно з постановкою задачі, в початковий момент часу рідина покоїлася, а тиск був постійним в усій розрахунковій області  $p = 0$ . Потім на вході в розрахункову область задавався рівномірний потік, а на виході з каналу – умова постійного тиску  $p = 0$ . Різниця тисків на вході і на виході приводила

до формуванню течії в розрахунковій області. Розглянемо спочатку цей перехідний процес у випадку, коли ширина міжстенозної частини каналу мала, а саме: задамо  $D_4 = 6$  мм. В підрозділі 6.3 було показано, що на верхній і нижній поверхнях першого стенозу формуються примежові шари, які потім відриваються на передній кромці першого стенозу і зносяться потоком в міжстенозну область. Таким чином, на межі струменя і міжстенозних порожнин утворюються два зсувних шари, що мають завихреність протилежного знаку. Було показано, що при відносно малих значеннях числа Рейнольдса ( $Re = 2088$ ) течія є стаціонарною, а зсувні шари в міжстенозній області стійкі. Тому перейдемо відразу до наступного значення числа Рейнольдса, розглянутому в підрозділі 6.3.

В усіх наведених нижче прикладах швидкість на вході в розрахункову область задавалася  $V_1 = 0.9$  м/с, що відповідає значенню числа Рейнольдса  $Re = 3132$ . На рисунку 6.9 представлено поле завихреності для п'яти моментів часу. Шкала кольорів праворуч від рисунка показує відповідність кольору і значення завихреності. Тут червоний колір відповідає додатній завихреності, а синій – від'ємній. Як видно, у момент часу  $t = 10^{-3}$  с (рисунок 6.9 а) на жорстких поверхнях, включаючи поверхні стенозів, формуються ламінарні примежові шари. Причому завихреність має протилежні знаки на верхній і нижній жорстких поверхнях. Примежові шари, що сформувалися потім відриваються від передніх крамок як першого, так і другого стенозів, утворюючи дві вихрові пари. Перша вихрова пара виноситься потоком з отвору першого стенозу в міжстенозний простір, а друга пара - в канал за стенозами. У момент часу  $t = 2 \cdot 10^{-3}$  с (рисунок 6.9 б) перша пара потрапляє у міжстенозні порожнини, де великі вихори починають формуватися біля внутрішньої стінки другого стенозу. В цей же час за другим стенозом починає формуватися друга вихрова пара. На наступному рисунку (рисунок 6.9 в) представлена картина завихреності для моменту часу  $t = 4 \cdot 10^{-3}$  с. Видно, що у лівій частині міжстенозних порожнин, тобто біля поверхні першого стенозу, формується ще одна пара великих вихорів, причому завихреність їх матиме протилежний знак по відношенню до завихреності великих вихорів,

розташованих біля поверхні другого стенозу. Так, якщо у верхній порожнині великий вихор, розташований поблизу другого стенозу, має додатну завихреність, то вихор розташований поблизу першого стенозу, матиме від'ємну. На наступному рисунку (рисунок 6.9 г) видно, що у момент  $t = 5 \cdot 10^{-3}$  с процес формування другого великого вихору в кожній з міжстенозних порожнин вже завершений. Також на межі струменя і міжстенозних порожнин формуються верхній і нижній зсувні шари, що мають завихреність протилежних знаків. Причому ці зсувні шари мають хвилясту форму і збурюються приблизно по середині між першим і другим стенозом, тобто між першими і другими великими вихорами розташованими в міжстенозних порожнинах. У цій області у верхньому і нижньому зсувних шарах формується симетрична вихрова пара яка потім зноситься потоком в отвір другого стенозу. Це виразно видно на рисунку 6.9 д, на якому зображено картину завихреності у момент часу  $t = 9 \cdot 10^{-3}$  с. Можна говорити, що до цього моменту часу перехідні процеси формування течії в міжстенозній області завершені, а сама течія є періодичною у часі. На рисунку 6.9 е представлено поле завихреності для досить великого часу, коли течія сформувалася в усій розрахунковій області, включаючи канал за другим стенозом. В області за стенозами поле швидкості течії не буде симетричним відносно осі каналу  $y = D_1/2$ , оскільки струмінь, що витікає з отвору в плоский канал, здійснює автоколивання повільні в порівнянні з автоколиваннями в міжстенозній області. Незважаючи на це, в міжстенозній області, як і раніше, домінує симетрична частина поля швидкості.

Тепер розглянемо такий самий перехідний процес для випадку широкої міжстенозної частині каналу, а саме:  $D_4 = 18$  мм, тобто для випадку, коли ширина кожної міжстенозної порожнини в чотири рази більше ширини отвору в стенозі. Звичайно, на вході задано те ж саме значення швидкості  $V_1 = 0.9$  м/с, що відповідає значенню числа Рейнольдса  $Re = 3132$ . У початкові моменти часу течія є подібною до тої, що мала місце у випадку вузької міжстенозної частини каналу, описаному вище. На жорстких поверхнях, включаючи поверхні стенозів, формуються ламінарні примежові шари.

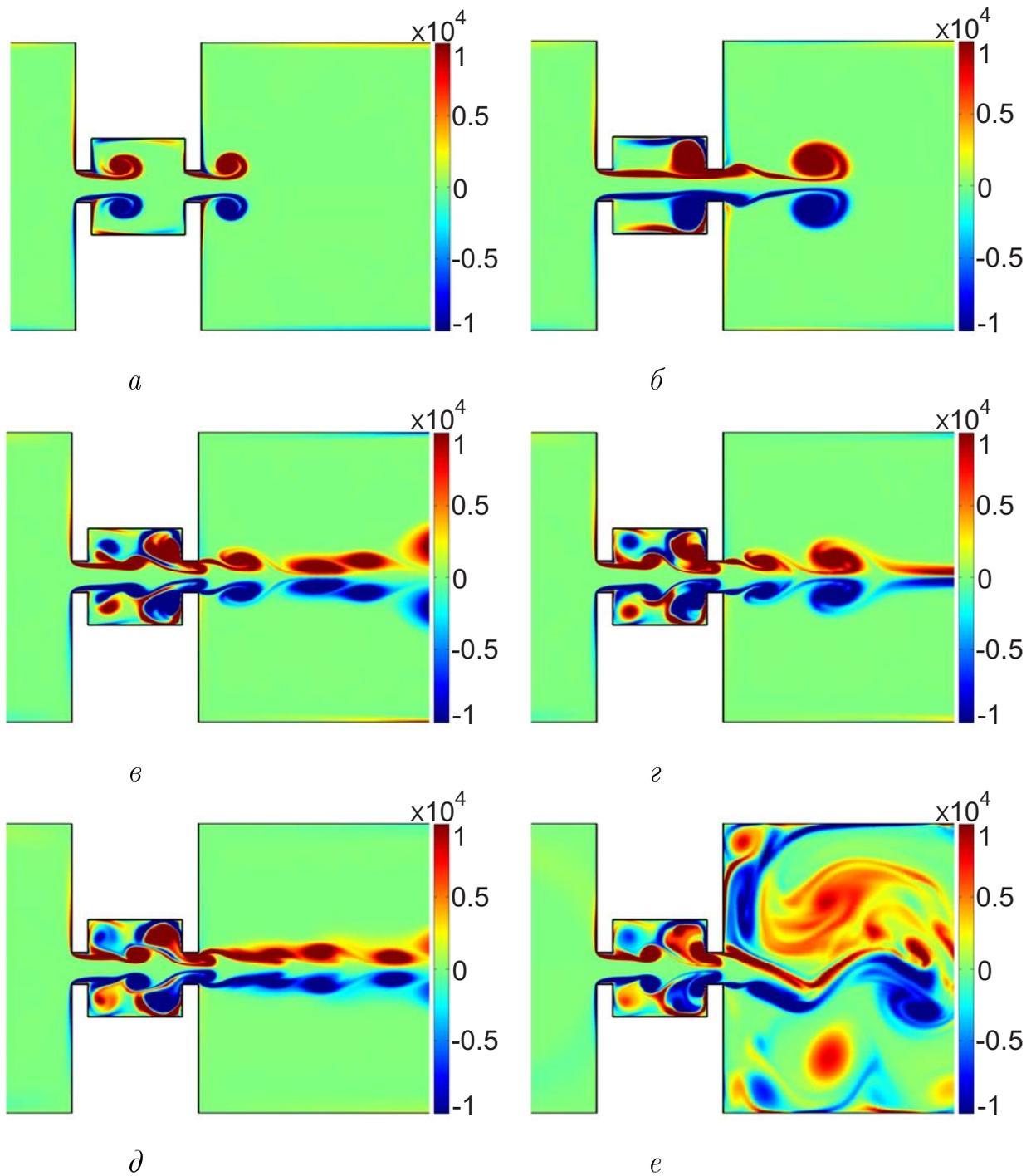


Рис. 6.9: Поле завихреності. Глибина кожної міжстенозної порожнини дорівнює висоті отворів в стенозах, тобто  $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 6$  мм: *a* – момент часу  $t = 10^{-3}$  с, *б* –  $t = 2 \cdot 10^{-3}$  с, *в* –  $t = 4 \cdot 10^{-3}$  с, *г* –  $t = 5 \cdot 10^{-3}$  с, *д* –  $t = 9 \cdot 10^{-3}$  с, *e* – розвинута течія при досить великих значеннях часу. Перехідний процес формування течії завершено не лише в міжстенозній області, але і у каналі за стенозами

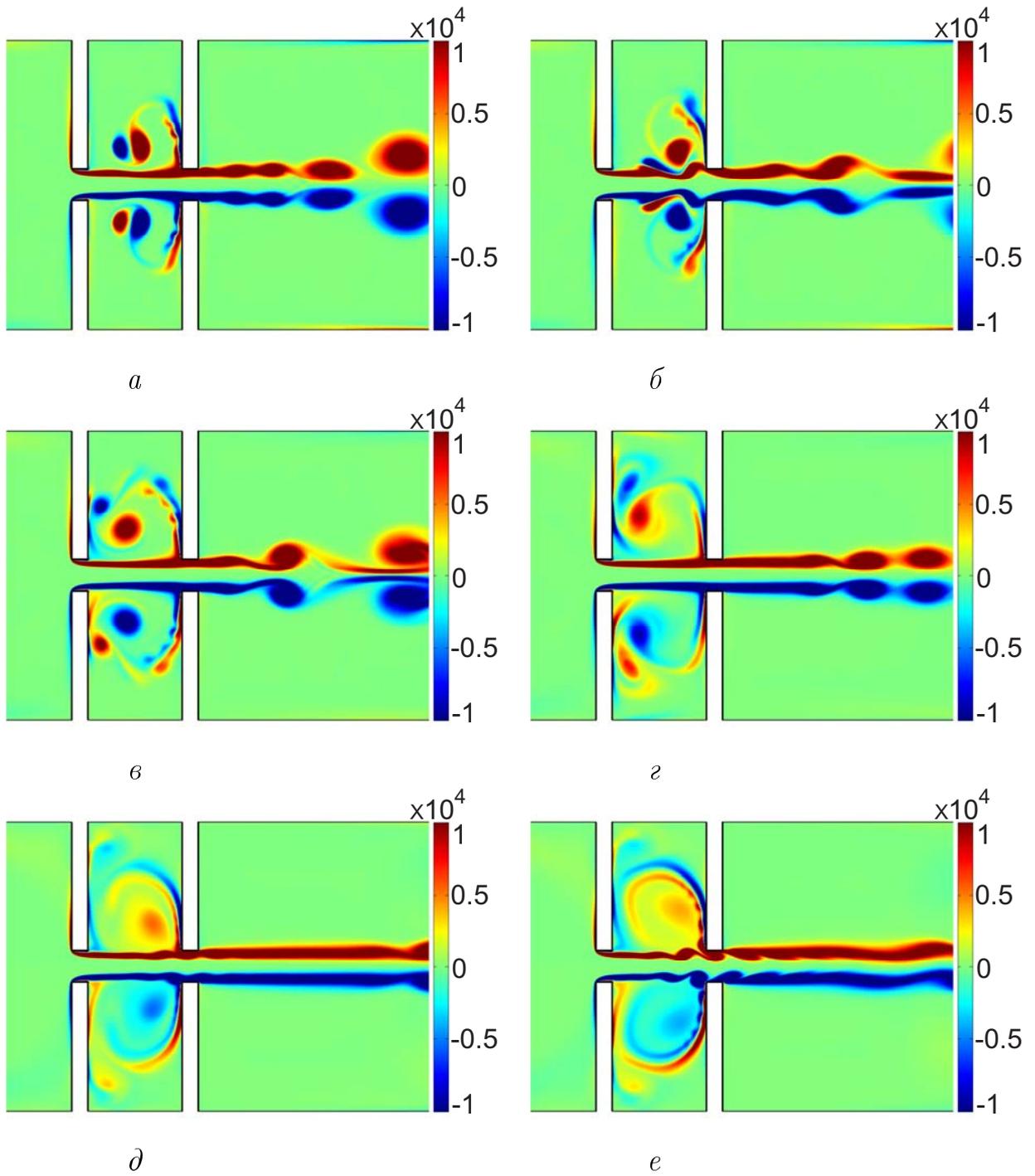


Рис. 6.10: Поле завихреності. Глибина кожної міжстенозної порожнини дорівнює чотирьом висотам отворів в стенозах, тобто  $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 18$  мм: *a* – момент часу  $t = 3,5 \cdot 10^{-3}$  с, *б* –  $t = 4,2 \cdot 10^{-3}$  с, *в* –  $t = 7,5 \cdot 10^{-3}$  с, *г* –  $t = 1,3 \cdot 10^{-2}$  с, *д* –  $t = 2,3 \cdot 10^{-2}$  с, *е* –  $t = 3 \cdot 10^{-2}$  с. Перехідний процес формування течії завершено в міжстенозній області

Причому завихреність має протилежні знаки на верхній і нижній жорстких поверхнях. Примежові шари, що сформувалися, потім відриваються від передніх кромek як першого, так і другого стенозів, утворюючи дві вихрові пари. Перша вихрова пара виноситься потоком з отвору першого стенозу в міжстенозний простір, а друга пара – у канал за стенозами. Поле завихреності в цьому випадку подібне до того, що представлено на рисунку 6.9 а для області з вузькою міжстенозною частиною каналу. Далі вихрова пара, сформована в міжстенозній області, так само як і в попередньому прикладі, потрапляє в міжстенозні порожнини. З цього моменту течія в області з широкою міжстенозною частиною каналу істотно відрізняється від течії в області з вузькою міжстенозною частиною каналу, що розглянуто вище. Так вихори, що потрапили в міжстенозні порожнини, рухаються уздовж поверхні другого стенозу, внаслідок чого в кожній з порожнин утворюється своя вихрова пара. На рисунку 6.10 а видно, як ці вихрові пари, описавши деякі траєкторії в порожнинах, у момент часу  $t = 3,5 \cdot 10^{-3}$  с знову повертаються до струменя приблизно посередині між першим і другим стенозом. Таким чином, дві вихрові пари згори і знизу ударяються в струмінь і збурюють його. На рисунку 6.10 б видно, що збурення у верхньому і нижньому зсувних шарах, викликані ударом по струменю двох вихрових пар, будуть симетричні відносно осі каналу  $y = D_1/2$ . Потім процес повторюється. Проте цього разу видно (рисунк 6.10 в), що вихрові пари ударяють не у струмінь, а в поверхню першого стенозу. Це істотно зменшує їх кінетичну енергію і, таким чином, цього разу збурення струменя будуть істотно слабкіші, ніж при першому ударі. На третій раз (рисунк 6.10 г) вихрова пара також ударяє в поверхню першого стенозу, причому вихори розташовані далі від осі каналу  $y = D_1/2$ , йдуть углиб міжстенозних порожнин, формуючи вторинний вихор в кутку порожнини поблизу першого стенозу. Таким чином, кінетична енергія вихрової пари витрачається на формування течії в усій області міжстенозних порожнин. Удар по струменю буде настільки слабким, що він практично не вносить ніяких збурень. На рисунку 6.10 г видно, що течію в міжстенозній ділянці струменя можна вважати стаціонарною, а зсувні шари

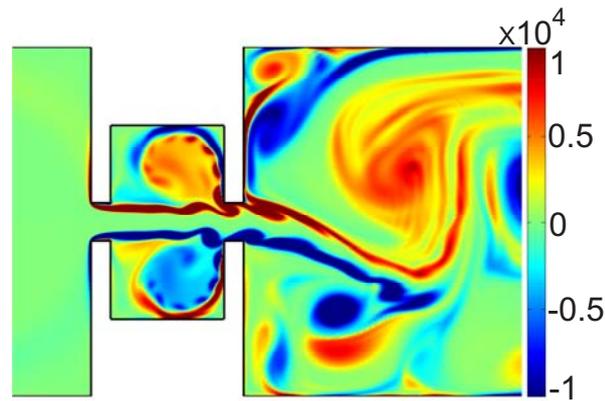


Рис. 6.11: Поле завихреності. Глибина кожної міжстенозної порожнини дорівнює двом висотам отворів в стенозах, тобто  $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 10$  мм незбуреними. До моменту  $t = 2,1 \cdot 10^{-2}$  с течія вже сформована практично по всій області міжстенозних порожнин. На рисунку 6.10 д видно, як вихори, що рухаються в міжстенозних порожнинах, в четвертий раз наближаються до струменю. Цього разу видно, що в зсувних шарах на межі струменя і порожнин починають формуватися збурення, причому цього разу верхній і нижній зсувні шари вже не будуть симетричними відносно осі каналу. Далі, з часом ці збурення посилюються і у момент часу  $t = 3 \cdot 10^{-2}$  с (рисунок 6.10 е) вже видно, як по мірі наближення до другого стенозу в зсувних шарах згортаються два ряди вихорів, які розташовуються в шаховому порядку по відношенню один до одного.

Розглянемо проміжний випадок  $D_4 = 10$  мм. Опустимо детальний опис перехідного процесу формування течії. На рисунку 6.11 представлено поле завихреності течії, що вже сформувалася. Видно, що вихори, які періодично згортаються у верхньому і нижньому зсувних шарах, також розташовуються у шаховому порядку один відносно одного.

Перейдемо до порівняльного аналізу течій, розглянутих в попередньому і в даному підрозділах. На рисунках 6.12 а, б представлена картина ліній струму і поля завихреності, відповідно, для випадку вузьких міжстенозних порожнин ( $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 6$  мм). Як добре видно, в даному випадку течія істотно відрізняється від тої, яку було описано і проаналізовано в підрозділі 6.3, тобто від течії, в області з широкими міжстенозними поро-

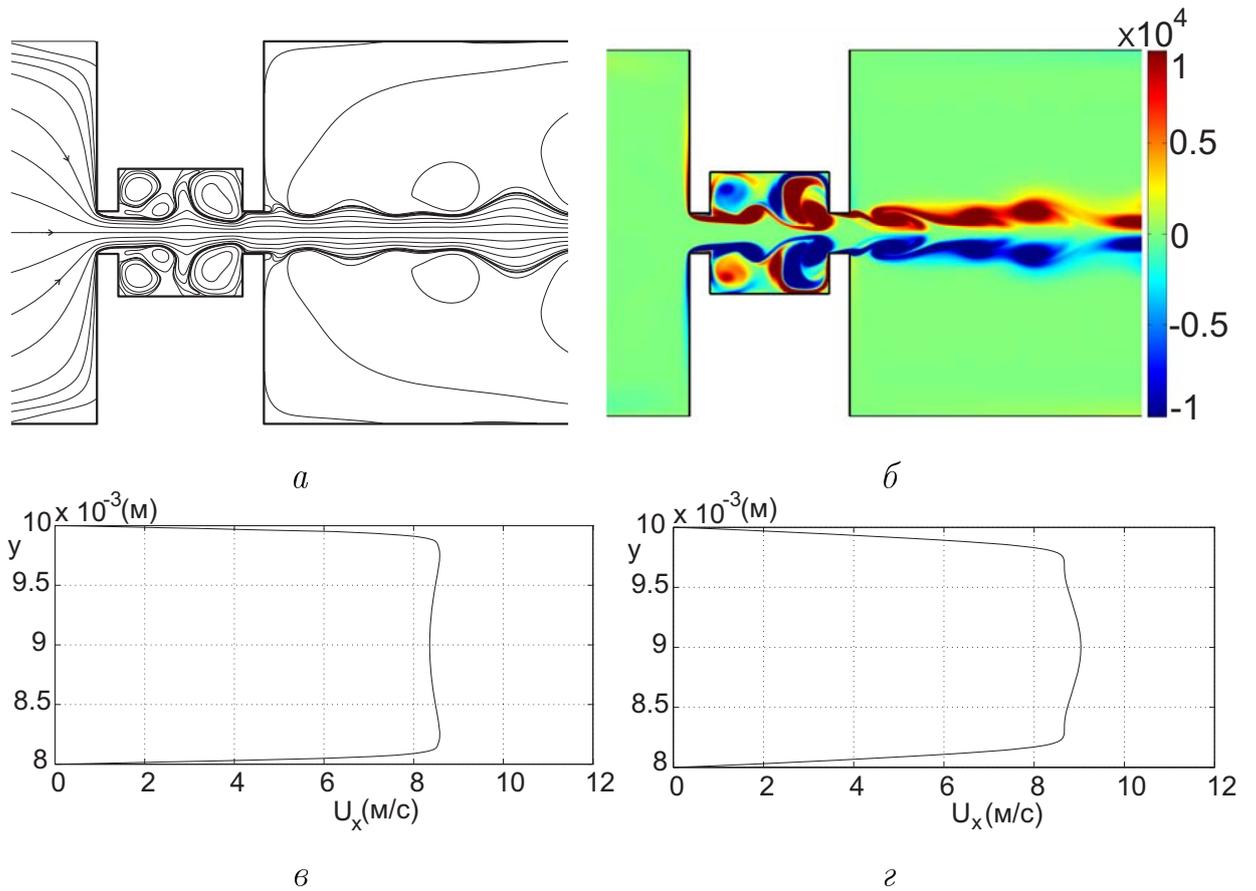


Рис. 6.12: Вигляд течії в момент часу  $t = 9.295 \cdot 10^{-3}$  с: *a* – лінії струму, *б* – поле завихреності, *в*, *г* – профілі швидкості в перерізах  $S_1$  і  $S_2$ , відповідно жнинами ( $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 18$  мм). Передусім слід зазначити, що в задачі підрозділа 6.3 у кожній міжстеннозній порожнині був присутній тільки один великий вихор, а дрібніші вихори розташовувались поблизу кутів порожнини, найбільш віддалених від струменя. У разі ж вузьких міжстеннозних порожнин ( $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 6$  мм), розглянутих в цьому підрозділі, в кожній порожнині виразно видні два горизонтально розташованих один відносно одного великих вихори. Оскільки великі шаруваті вихори, що утворюються в міжстеннозних нішах, є по суті каналом зворотного зв'язку, то можна очікувати, що зміна розміру, форми і кількості великих вихорів в міжстеннозних порожнинах може істотним чином змінити збурення самого струменя.

Дійсно, в підрозділі 6.3 було продемонстровано, що як тільки енергії в каналі зворотного зв'язку виявляється достатньо, щоб впливати на форму струменя (див. картину ліній струму) і на зсувний шар (див. картину поля

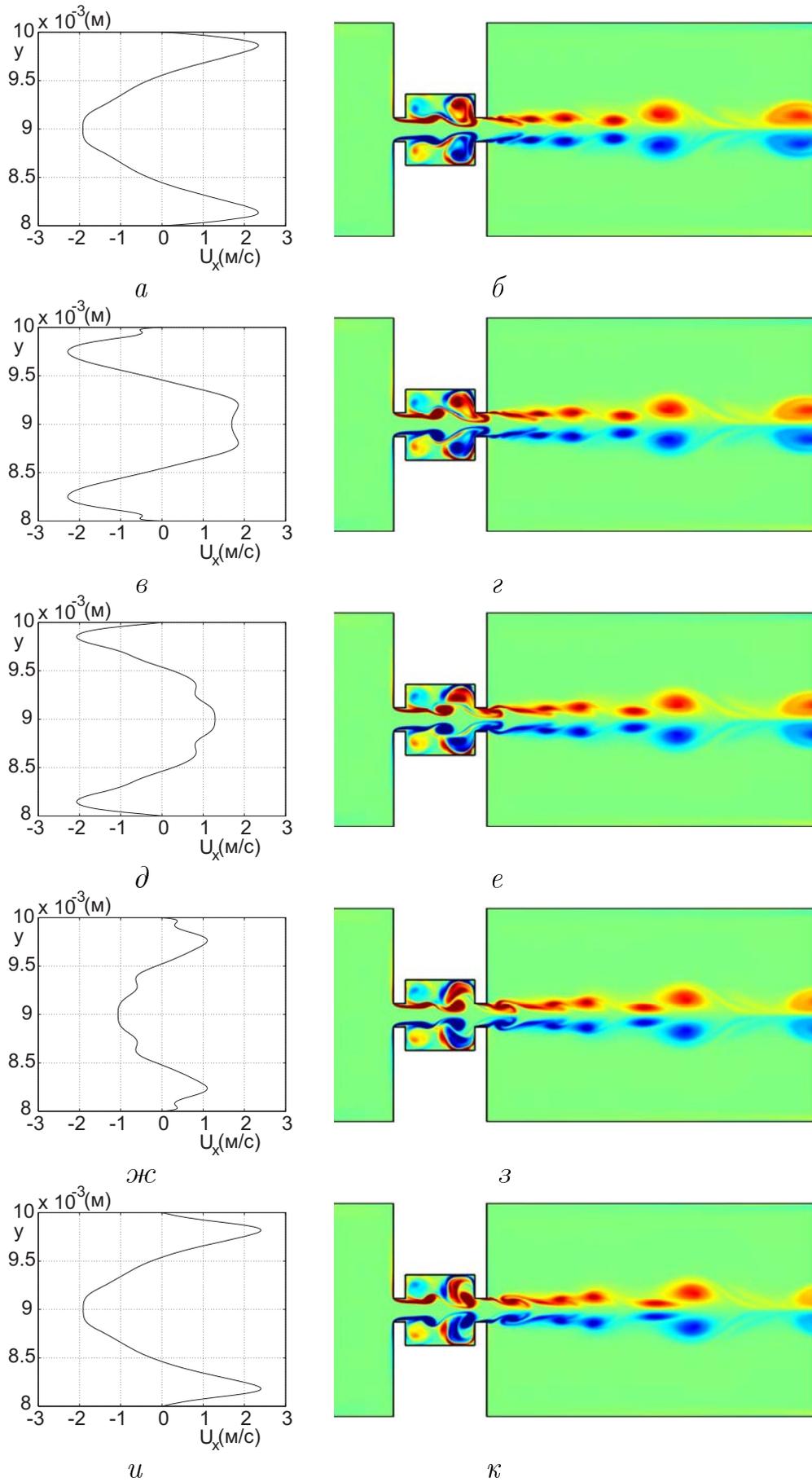


Рис. 6.13: Осцилююча частина профілю швидкості  $V_x$  в перерізі  $S_2$  (а, в, д, ж, у), і поле завихренності (б, г, з, е, к) для моментів часу: а, б -  $t = 8.775 \cdot 10^{-3}$  c, в, г -  $t = 8.905 \cdot 10^{-3}$  c, д, е -  $t = 9.035 \cdot 10^{-3}$  c, ж, з -  $t = 9.165 \cdot 10^{-3}$  c, у, к -  $t = 9.295 \cdot 10^{-3}$  c

завихреності), в зсувних шарах починає генеруватися характерна послідовність вихорів. При цьому ряди вихорів у верхньому і нижньому зсувних шарах розташовуються один відносно одного в шаховому порядку. Набігаючи на отвір другого стенозу, ці ряди вихорів викликають несиметричні (відносно осі струменя) коливання вертикального профілю швидкості у вихідному перерізі  $S_2$ . У випадку ж вузьких міжстенозних порожнин ( $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 6$  мм) розглянутих в цій статті, видно, що збурення струменя не призводять до втрати симетричності поля течії відносно осі. Послідовність вихорів, що генерується в зсувних шарах і набігає разом з потоком на отвір другого стенозу, залишається розташованою симетрично відносно осі потоку і викликає симетричні коливання вертикального профілю швидкості у вихідному перерізі  $S_2$ , тоді як профіль швидкості у вхідному перерізі  $S_1$  залишається нерухомим (рисунки 6.12 в, г).

Виникає питання: чи являються коливання профілю швидкості у перерізі  $S_2$  періодичними? Для відповіді на нього ми досліджували залежність зміни профілю швидкості від часу, і виявилось, що при даному значенні числа Рейнольдса ці коливання мають періодичний характер і симетричні відносно осі струменя. Таким чином, в даній гідродинамічній системі дійсно можуть виникати автоколивальні явища. З метою ілюстрації цих явищ на рисунку 6.13 наведено дані, які показують як впродовж одного періоду  $T$  процесу автоколивань в системі змінюються картини поля завихреності і коливальні частини профілів швидкості  $V_x$  у вихідному перерізі  $S_2$ . Помітимо, що при розкладанні величини  $V_x$  в ряд Фур'є за часом стаціонарна (незалежна від часу) частина профілю швидкості описується нульовим членом ряду, а осцилююча частина, яка і представлена на рисунку, – сумою інших членів. Слід також відзначити, що в цій задачі період симетричних автоколивань буде майже вдвічі більше, ніж період коливань у відповідній задачі, розглянутій в підрозділі 6.3. Так, при  $V_1 = 0.9$  м/с період антисиметричних коливань був рівний  $T = 2.77 \cdot 10^{-4}$ . У випадку ж симетричної течії, що розглядається у цьому підрозділі період  $T = 5.2 \cdot 10^{-4}$ .

## 6.5 Висновки до розділу

Проведено пряме чисельне моделювання течії в'язкою нестисливої рідини в плоскому каналі за наявності розташованих один за одним двох стенозів. Отримано картини ліній струму і полів завихреності і на цій основі проаналізовано особливості руху середовища в таких каналах залежно від швидкості потоку.

Встановлено, що при відносно малих числах Рейнольдса ( $Re_L \leq 2088$ ) течія рідини в області між стенозами стаціонарна і характеризується наявністю в міжстенозній області швидкісного струменя, що витікає з вхідного отвору першого стенозу і втікає в отвір другого стенозу. При цьому на поверхнях струменя з'являються стійкі зсувні шари, утворені примежовими шарами, що сходять з передньої кромки отвору першого стенозу. Зсувні шари розщеплюються передніми кромками другого стенозу, внаслідок чого в нішах (вище і нижче струменя) утворюються циркуляційні рухи середовища, які переносять частину кінетичної енергії струменя назад до кореня струменя. Це перенесення енергії можна інтерпретувати як гідродинамічний канал зворотного зв'язку, що дозволяє викликати автоколивання в даній системі.

Показано, що при збільшенні числа Рейнольдса, коли енергія в каналі зворотного зв'язку виявляється достатньою, циркуляційні рухи в нішах починають чинити дію на зсувні шари, в результаті чого вони втрачають стійкість. Втрата стійкості обумовлює запуск процесу утворення в кожному з зсувних шарів ряду послідовно розташованих вихорів, які шикуються один відносно одного в шаховому порядку. Набігаючи на отвір другого стенозу, ці вихори викликають періодичні антисиметричні коливання в ньому профілю швидкості.

Встановлено, що період коливань профілю швидкості на виході з отвору другого стенозу закономірно зменшується із зростанням швидкості потоку.

З'ясовано, що при відносно високих швидкостях потоку ( $Re_L \geq 10440$ ) періодичний характер течії порушується. Автоколивання в системі переста-

ють бути строго періодичними, тобто мати одну характерну частоту. При цьому спостерігаються різні режими течії, які довільно перемикаються між собою. В результаті цього автоколивання, напевно, будуть характеризуватися не однією частотою, а рядом частот.

Окремо розраховано і проаналізовано особливості руху середовища в залежності від ширини каналу в міжстенозній частині. Встановлено, що при досить малих числах Рейнольдса (у розглянутому прикладі  $Re = 3132$ ) і при досить вузькій міжстенозній частині каналу (у розглянутому прикладі ширина отвору  $D_2$  і ширина порожнини  $(D_4 - D_2)/2$  співвідносилися як 1/1) в зсувних шарах в міжстенозній області будуть періодично в часі генеруватися вихрові структури симетричні відносно осі каналу  $y = D_1/2$ . А, отже, і в коливаннях профілю швидкості в отворі другого стенозу домінуватиме симетрична частина. Також показано, що зі збільшенням ширини міжстенозної частини каналу (у розглянутих прикладах висота отвору  $D_2$  і глибина порожнини  $(D_4 - D_2)/2$  співвідносилися як 1/2 і 1/4) картина течії принципово міняється. У зсувних шарах в міжстенозній області утворюються два ряди вихорів. Ці вихори розташовуються один відносно одного в шаховому порядку. Такі вихори, набігаючи на другий стеноз, викликають антисиметричні періодичні коливання профілю швидкості в отворі другого стенозу.

Автоколивання профілю швидкості в отворі другого стенозу в принципі можуть служити джерелом звукових коливань в каналі.

## Розділ 7

# Звукове поле, генероване потоком в каналі зі стенозами

Розглядається задача випромінювання звуку потоком рідини в плоскому каналі з двома послідовно розташованими стенозами. У міжстенозній області такої течії може відбуватися самозбудження автотельних коливань середовища, які являються джерелом звукових коливань в каналі. Акустична задача розв'язується для двох областей: для однорідного плоского каналу, що знаходиться вниз за течією від другого стенозу, а також для області з геометричними неоднорідностями, що знаходиться вгору по потоку від другого стенозу. Для розв'язання цієї задачі застосовується метод часткових областей.

### 7.1 Вступ до розділу

Згідно з описаним в Розділі 1 методом задача визначення характеристик звукового поля, що породжується течією в каналі із стенозами, можна розділити на два етапи. На першому етапі розглядається гідродинамічна задача. Внаслідок того, що розміри джерел звуку, породженого потоком (в даному випадку розміри стенозів і міжстенозних ніш), малі в порівнянні з довжиною звукової хвилі [2, 60], гідродинамічну задачу можна розглядати у рамках моделі в'язкою нестисливої ньютонівській рідині. З цією метою в Розділі 6 була

чисельно розв'язана нестационарна система рівнянь Нав'є-Стокса. На основі отриманого розв'язку визначаємо частоту процесу утворення вихорів в міжстенонній області, число Струхалія і розподіл швидкості на вході  $u_1(y, t)$  і на виході  $u_2(y, t)$  з отвору другого стенозу впродовж одного періоду цього процесу.

Тепер перейдемо до другого етапу розв'язку. У цьому Розділі розглядається акустична задача, що полягає у визначенні звукового поля, генерованого течією середовища в каналі з двома послідовно розташованими стенозами. Дійсно розподіл швидкості на вході в отвір другого стенозу  $u_1(y, t)$ , розрахований протягом одного періоду, можна трактувати як граничну умову при постановці акустичної задачі в області, що лежить вище по потоку від другого стенозу. І, відповідно розподіл швидкості на виході з отвору другого стенозу  $u_2(y, t)$  можна прийняти за граничну умову при постановці акустичної задачі в області, що лежить нижче по потоку від другого стенозу. Тоді розв'язання задачі про визначення звукового поля зводиться до розв'язання двох добре відомих плоских задач: акустичної задачі в плоскому напівнескінченному хвилеводі сталого перерізу, на торці якого задано деякий розподіл подовжньої швидкості, що періодично змінюється, і аналогічної акустичної задачі в плоскому складеному хвилеводі [239]. При цьому, якщо числа Маха відносно малі, то рухом потоку можна нехтувати і вважати, що звук поширюється так само, як в нерухомому середовищі. Після розв'язку цих двох задач можна визначити усі акустичні характеристики звукових полів в областях, розташованих по обидва боки від другого стенозу, у тому числі розподіл звукового тиску і коливної швидкості.

## 7.2 Аналіз результатів розрахунку течії

Чисельне моделювання течії в каналі з двома послідовно розташованими стенозами було проведено в Розділі 6. Передбачалося, що в міжстенонній області може мати місце звуження каналу. Тут ми детально аналізуємо

отримані чисельні результати з метою коректного опису джерела звукових коливань.

На рисунку 7.1 представлено поле завихреності течії при різних значеннях числа Рейнольдса. Кольором передається значення завихреності. Синій колір відповідає від'ємній завихреності (закручування елемента рідини по годинниковій стрілці), червоний – додатній завихреності (закручування елемента рідини проти годинникової стрілки). Добре видно, як потік, входячи з широкої лівої частини каналу у вузький отвір першого стенозу, утворює в міжстенозному просторі струмись. На передніх поверхнях першого стенозу формуються два ламінарних примежових шари (верхній і нижній), які після відриву від передніх крамок першого стенозу зносяться потоком в міжстенозну область, де формують два вільні зсувних шари (шари змішування) на верхній і нижній межах струменя. При цьому, швидкість руху середовища  $V_x$  у шарі змішування змінюється драматично. Так, при просуванні від внутрішньої поверхні шару змішування до його зовнішньої поверхні, швидкість руху середовища знижується приблизно на порядок.

На шляху від лівого стенозу до правого зсувні шари дещо розширюються і тому загальна товщина струменя з зсувними шарами при підході до другого стенозу стає більше ширини його отвору. Це призводить до того, що кожний зсувний шар розрізається передніми кромками отвору другого стенозу. Внутрішні частини зсувних шарів проходять через отвір другого стенозу і покидають міжстенозну область, а зовнішні шари завертають у верхню і нижню ніші, де формують дві основні циркуляційні течії (два великих вихори). Обертаючись в міжстенозних нішах, ці два основних вихори переносять частину кінетичній енергії струменя з району входу її в отвір другого стенозу в район виходу струменя з першого стенозу (корінь струменя). Таким чином, два великих вихори, утворених в міжстенозних нішах, виконують роль каналу зворотного зв'язку, по якому частина енергії з виходу даної нелінійної динамічної системи переноситься на її вхід. А, як відомо з теорії автоколивань, наявність зворотного зв'язку в нелінійних системах створює передумови для виникнення в ній автоколивальних процесів. Звичайно, ви-

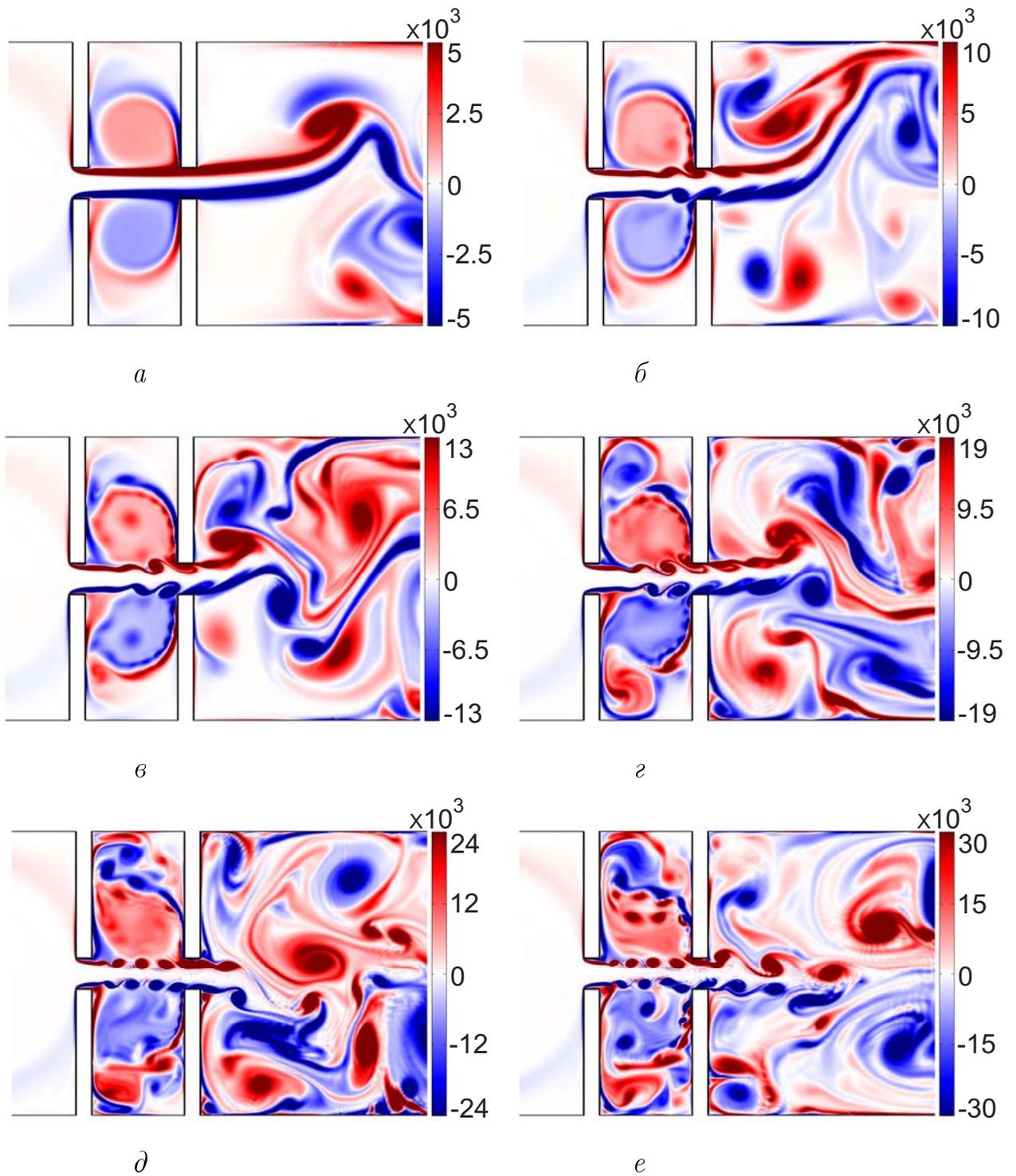


Рис. 7.1: Полі завихреності при різних значеннях числа Рейнольдса. Ширина міжстеночної області дорівнює ширині каналу, тобто  $D_4 = D_1$ : *a* –  $Re = 2088$  ( $V_1 = 0.6$  м/с), *б* –  $Re = 3132$  ( $V_1 = 0.9$  м/с), *в* –  $Re = 4176$  ( $V_1 = 1.2$  м/с), *г* –  $Re = 6264$  ( $V_1 = 1.8$  м/с), *д* –  $Re = 8352$  ( $V_1 = 2.4$  м/с), *е* –  $Re = 10440$  ( $V_1 = 3$  м/с)

никнуть автоколивання чи ні залежить від багатьох чинників, головними з яких є відносний рівень енергії в каналі зворотного зв'язку і його запізнювання за часом (або фаза). При відносно низькій швидкості потоку, вказані фактори не чинять достатнього впливу на корінь струменя і тому автоколивань в системі не виникає (див. рисунок 7.1 а для  $Re = 2088$  ( $V_1 = 0.6$  м/с)).

Як видно, зі збільшенням значення числа Рейнольдса картина течії стає істотно відмінною. Тепер енергії в каналі зворотного зв'язку виявляється досить, щоб впливати на форму струменя. При  $Re = 3132$ , починаючи приблизно з середини міжстенного простору, струмінь набуває звивистого характеру, а в зсувних шарах утворюється характерна послідовність вихорів. При цьому ряди вихорів у верхньому і нижньому зсувних шарах розташовуються один відносно одного у шаховому порядку. Набігаючи на отвір другого стенозу, ці ряди вихорів викликають несиметричні (відносно осі струменя) періодичні коливання вертикального профілю швидкості у вихідному перерізі другого стенозу. Що стосується великих вихорів, які утворюються в нішах і є насправді каналом зворотного зв'язку, то тепер їх шари мають не суцільний характер, а переривчастий.

Можна відзначити ряд важливих властивостей, притаманних гідродинамічній системі, що розглядається:

- Автоколивання в системі виникають тільки після досягнення деякої порогової швидкості потоку, що загалом типово для усіх гідроаеродинамічних систем, в яких спостерігаються автоколивання. В даній системі автоколивання починають виникати при значеннях  $Re$ , що лежать між 2088 і 3132.
- Дві послідовності вихорів, які утворюються в зсувних шарах, розташовуються у шаховому порядку. Отже, верхні і нижні вихори досягають передніх крамок другого стенозу по черзі.
- Період автоколивань зменшується із зростанням швидкості потоку. Значення періоду  $T$  і числа Струхаля  $St = L_4/(V_2 T)$  при різних значеннях числа Рейнольдса приведені в таблиці 7.1.

Табл. 7.1: Значення числа Струхала при різних значеннях числа Рейнольдса. Також наведено розмірні величини швидкості на вході  $V_1$  і періоду вихроутворення  $T$

Re	$V_1$ (м/с)	$T$ (с)	St
3132	0.9	$2.77 \cdot 10^{-4}$	2.58
4176	1.2	$1.94 \cdot 10^{-4}$	2.77
6264	1.8	$1.16 \cdot 10^{-4}$	3.08
8352	2.4	$0.74 \cdot 10^{-4}$	3.63

- Із зростанням швидкості потоку також росте амплітуда коливань профілю швидкості, що цілком природно оскільки росте кінетична енергія потоку.
- Зі збільшенням швидкості потоку зона, де починають згортатися вихори у зсувних шарах, зміщується у бік першого стенозу. Подальше збільшення швидкості до  $V_1 = 2.4$  м/с ( $Re = 8352$ ) приводить до того, що зона згортання вихорів в зсувному шарі зміщується до задньої кромки отвору першого стенозу.
- При подальшому збільшенні швидкості потоку утворення вихорів в зсувних шарах в міжстенозній області все ще спостерігається, проте описані вище закономірності руху потоку в міжстенозній області можуть не зберігатися. Характер руху потоку може виявитися нестабільним і приймати декілька режимів, що чергуються з часом. Порущується періодичність процесу згортання вихорів і їх набігання на другій стеноз.

У Розділі 6 задача про течію рідини в плоскому каналі за наявності розташованих один за одним двох стенозів розв'язувалася при різних значеннях ширини каналу в міжстенозній області  $D_4$ . Зокрема, було показано, що при зменшенні глибини міжстенозних ніш удвічі вихори в зсувних шарах також розташовані в шаховому порядку (рисунок 7.2 а). І, отже, в коливаннях про-

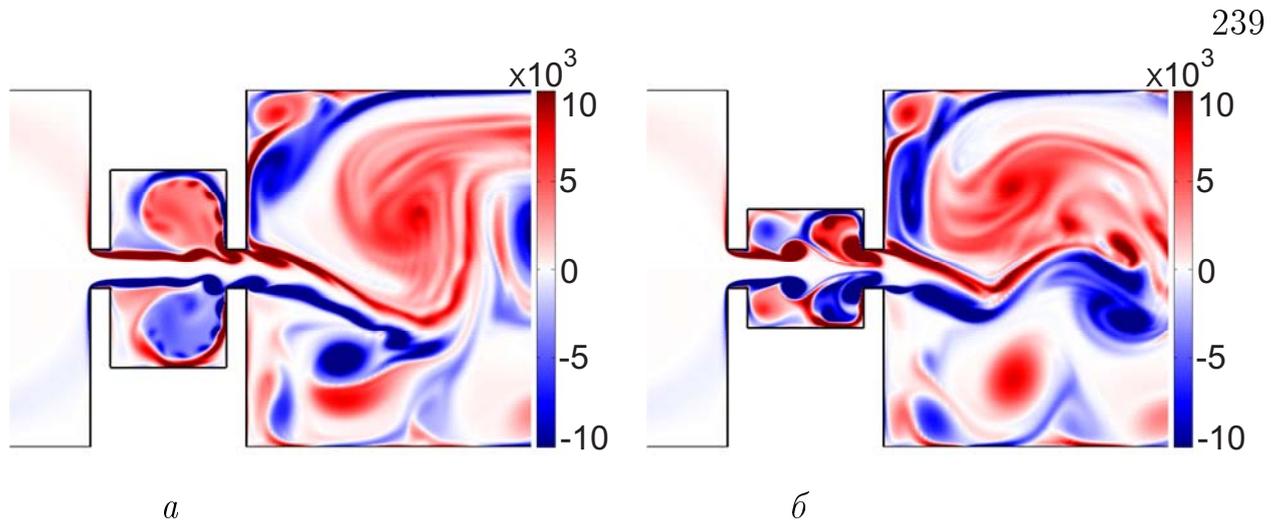


Рис. 7.2: Поле завихреності при зменшенні вертикального розміру (глибини) міжстенозних ніш (в обох випадках  $Re = 3132$  ( $V_1 = 0.9$  м/с)):  $a - D_4 - D_3 = (D_1 - D_3)/2$ ,  $b - (D_4 - D_3) = (D_1 - D_3)/4$

філю швидкості в отворі другого стенозу домінує антисиметрична складова. При зменшенні глибини міжстенозних ніш вчетверо збурення в зсувних шарах вже матимуть симетричний характер відносно осі каналу (рисунок 7.2 б) і, отже, коливання профілю швидкості в отворі другого стенозу будуть симетричними. Крім того, слід зазначити, що в цій задачі період симетричних автоколивань буде майже вдвічі більше, ніж період коливань у відповідній задачі з глибокими міжстенозними нішами. Так при  $Re = 3132$  період коливань в задачі з глибокими нішами був рівний  $T = 2.77 \cdot 10^{-4}$ . У випадку ж симетричної течії в задачі з мілкими нішами період буде  $T = 5.2 \cdot 10^{-4}$ .

Згідно із запропонованим методом оцінки звукового поля для нас інтерес представляють перш за все коливання профілю подовжньої швидкості на вході і на виході з отвору другого стенозу. З цією метою розподіл швидкості  $U_x$  в перерізах  $S_1$  і  $S_2$  було розкладено на стаціонарну і осцилюючу складові:

$$u_k(y, t) = u_k^{(s)}(y) + u_k^{(o)}(y, t), \quad k = 1, 2, \quad (7.1)$$

де стаціонарна частина профілю швидкості визначається як нульовий член розкладу Фур'є за часом:

$$u_k^{(s)}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T u_k(y, t) dt, \quad k = 1, 2, \quad (7.2)$$

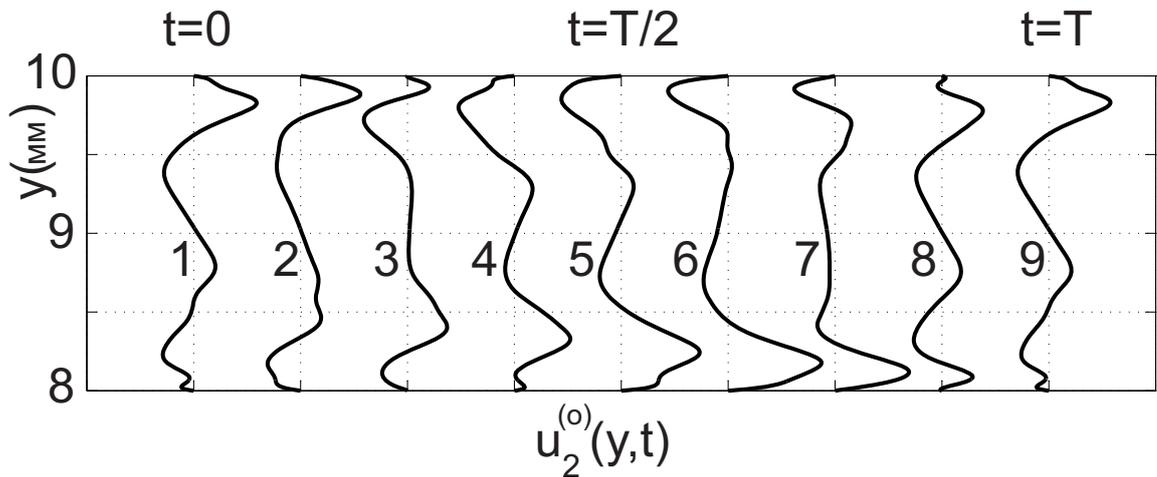


Рис. 7.3: Коливальна частина профілю швидкості  $u_2^{(o)}(y, t)$  на виході з отвору другого стенозу для випадку  $Re = 3132$  ( $V_1 = 0.9$  м/с). Криві 1 - 9 представлені через інтервали часу  $T/8$ . Крива 1 показує розподіл швидкості в момент  $t = 0$ , крива 9 – в момент  $t = T$

На рисунку 7.3 представлена осцилююча частина швидкості  $u_2^{(o)}(y, t)$  у різні моменти періоду коливань через інтервал  $T/8$  для випадку  $Re = 3132$ . Видно, що профіль швидкості має складну форму, проте антисиметрична частина є домінуючою.

Звичайно, вимагає перевірки питання: чи являються коливання профілів швидкості  $u_k^{(o)}$ ,  $k = 1, 2$  періодичними? Щоб відповісти на це питання можна представити досліджувані профілі швидкості у вигляді ряду Фур'є по координаті  $y$ :

$$u_k^{(o)}(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{2n\pi y}{D_3} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \cos \frac{2n\pi y}{D_3},$$

$$k = 1, 2. \quad (7.3)$$

На рисунку 7.4 показана зміна у часі коефіцієнтів  $a_2$ ,  $a_3$  і  $a_4$ , які мають найбільшу амплітуду коливань. Слід передусім відзначити, що окрім швидких коливань, викликаних набіганням на другий стеноз вихорів, що утворилися в міжстенозному просторі, мають місце повільні коливання, викликані коливаннями струменя, витікаючого з отвору другого стенозу в канал. Автоколивання струменя, що витікає з отвору в канал, досліджувалися у ряді робіт (див., наприклад, бібліографію в роботі [300], а також [295]). Однак, в

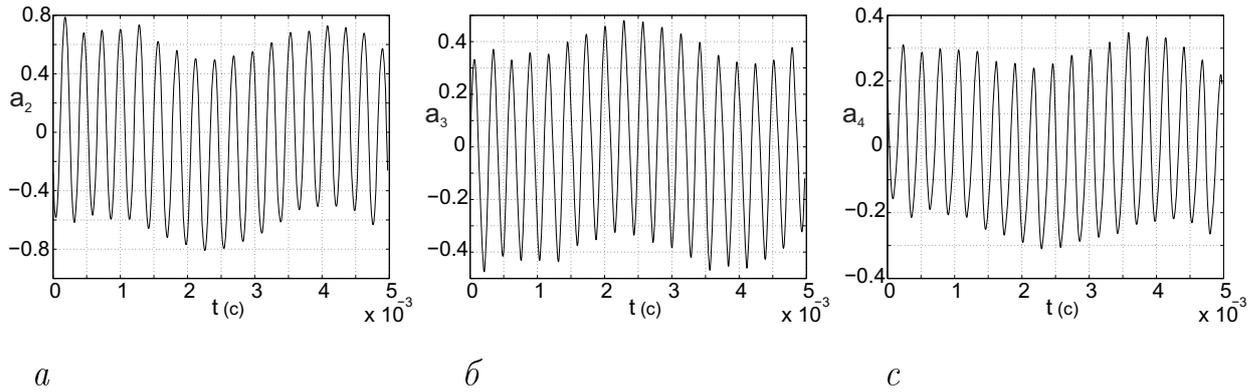


Рис. 7.4: Змінювання у часі коефіцієнтів розкладання профілю швидкості  $u_2^{(o)}(y, t)$  в ряд Фур'є по координаті  $y$  для випадку  $Re = 3132$  ( $V_1 = 0.9$  м/с). Видно, що високочастотні коливання, викликані процесом вихроутворення в міжстеннозній області, накладаються на низькочастотні коливання, викликані періодичною зміною напрямку руху самого струменя, причому амплітуда високочастотних коливань суттєво перевищує амплітуду низькочастотних:  $a$  –  $a_2$ ,  $b$  –  $a_3$ ,  $c$  –  $a_4$

даній роботі повільні автомоделні коливання струменя, що витікає з отвору другого стенозу, не представляють інтерес, оскільки ми досліджуємо звукове поле, викликане швидкими періодичними процесами, що зароджуються в міжстеннозному просторі. Тому низькочастотні коливання профілю швидкості, викликані повільними коливаннями струменя, що виходить з отвору в канал, були чисельно відфільтровані і витягнуті зі значень  $a_k$  і  $b_k$ . У певному діапазоні чисел Рейнольдса коливання  $a_k$  і  $b_k$ , що залишилися, носять яскраво виражений періодичний характер. Причому, звернемо увагу, що частота коливань для усіх коефіцієнтів однакова. Таким чином, в даній гідродинамічній системі дійсно мають місце автоколивальні явища з однією домінуючою частотою, в даному випадку  $f = 3.61$  кГц.

### 7.3 Постановка акустичної задачі

При розв'язанні задачі про течію рідини в каналі з двома послідовно

розташованими стенозами, збурення потоку можна умовно розділити на дві складові. Перша - це збурення полів швидкості і тиску, що зароджуються у вільних зсувних шарах в міжстенозному просторі. Вище було показано, що ці збурення мають місце, починаючи з деякого порогового значення числа Рейнольдса, і в певному діапазоні значень числа Рейнольдса ці збурення мають періодичний характер. Вони самоорганізуються в деяку складну автоколивальну систему, коливання якої і викликають появу тонального звуку. Про фізику такого процесу ми детально говорили в Розділі 2. Друга складова - це збурення, що розвиваються в струмені після витікання її з отвору другого стенозу в канал. Це можуть бути збурення що розвиваються при турбулізації ламінарної струменя, внаслідок чого виникає широкосмуговий шум. Механізм виникнення шуму принципово відрізняється від механізму виникнення тонального звуку і пов'язаний із специфічними коливаннями і взаємодією часток середовища в турбулентному струмені. В такій течії виникають різномасштабні квадрупольні джерела звуку і, як результат, широкосмуговий шум [2]. Також друга складова може включати повільні коливання усього струменя, що витікає з отвору другого стенозу в канал. У цьому дослідженні ми приділяємо увагу першій складовій і, отже, концентруємось на описанні генерації і поширення тонального звуку, викликаного періодичним процесом генерації вихорів в міжстенозному просторі.

Нагадаємо, що згідно з основними положеннями акустичної аналогії Лайтхілла [215, 216], а також її узагальнення на випадок присутності меж в потоці, зробленого Керлом [217], ми не враховуємо зворотну реакцію звуку на характер потоку, поширення звуку зі змінною швидкістю усередині потоку (рефракцію звуку), а також згасання звуку. Тепер ми формулюємо і розв'язуємо окремо дві акустичні задачі. Перша - для тієї частини каналу, яка знаходиться правіше від другого стенозу:  $x > L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ . І друга - для тієї частини каналу, яка знаходиться лівіше за другий стеноз :  $x < L_2 + L_3 + L_4$ .

**Задача 1.** Таким чином, з чисельного розв'язку відповідної задачі гідромеханіки, представленого в попередньому Розділі, ми маємо осцилюю-

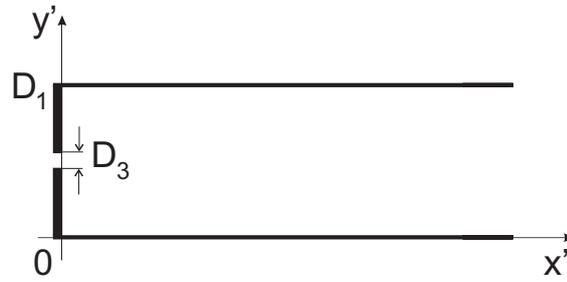


Рис. 7.5: Геометрія задачі 1

чу частину розподілу подовжньої швидкості  $u_2^{(o)}(y, t)$  у вихідному перерізі  $x = L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ . Функція  $u_2^{(o)}(y, t)$  змінюється в часі періодично з періодом  $T$ . Ці пульсації швидкості у вихідному отворі другого стенозу служать джерелом звукових коливань в каналі  $x > L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ . Геометрія задачі показана на рисунку 7.5. Для простоти ми ввели систему координат  $(x', y')$  таким чином, щоб поєднати вісь  $y'$  з виходом з отвору другого стенозу  $x = L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ .

Аналогічно тому, як це передбачалося в [2, 242], вважаємо, що звук не взаємодіє з потоком, а поширюється так само, як в нерухомому середовищі. Таким чином, потенціал швидкості  $\phi(x', y', t)$  знаходиться, як розв'язок хвильового рівняння, що задовольняє в каналі  $x' > 0$ ,  $0 < y' < D_1$  наступним граничним умовам. На торцевій стінці  $x' = 0$ :

$$u_{x'} = -\frac{\partial \phi}{\partial x'} = \begin{cases} 0, & \text{при } y' \in \Gamma, \\ u_2^{(o)}(y', t), & \text{при } y' \in \Delta. \end{cases} \quad (7.4)$$

Тут  $\Gamma$  означає тверду поверхню торця, тобто  $\Gamma = [0, (D_1 - D_3)/2] \cup [(D_1 + D_3)/2, D_1]$ , а  $\Delta$  означає ту частину торця, яка припадає на отвір стенозу  $\Delta = [(D_1 - D_3)/2, (D_1 + D_3)/2]$ .

На верхній і нижній стінках каналу  $y' = 0$  і  $y' = D_1$  формулюємо акустично жорстку граничну умову:

$$u_{y'}(x', y', t) \equiv -\frac{\partial \phi}{\partial y'} = 0 \quad \text{при } x' > 0. \quad (7.5)$$

**Задача 2.** Аналогічно формулюємо акустичну задачу для тієї частини каналу, яка лежить лівіше за другий стеноз  $x < L_2 + L_3 + L_4$ . З чисельного розв'язку відповідної задачі гідромеханіки ми маємо осцилюючу частину

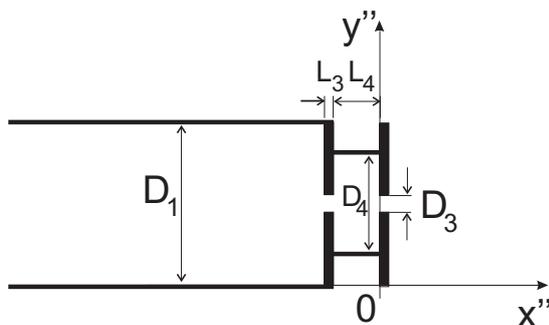


Рис. 7.6: Геометрія задачі 2. У подальшому також використовується позначення  $L_6 = L_3 + L_4$

розподілу подовжньої швидкості  $u_1^{(o)}(y, t)$  у вхідному перерізі  $x = L_2 + L_3 + L_4$ . Функція  $u_1^{(o)}(y, t)$  є періодичною за часом з періодом  $T$ . Ці пульсації швидкості у вхідному перерізі отвору другого стенозу служать джерелом звукових коливань в каналі  $x < L_2 + L_3 + L_4$ . Геометрія задачі показана на рисунку 7.6. Для простоти введено систему координат  $(x'', y'')$ , таку, що вісь  $y''$  проходить через вхідний переріз отвору другого стенозу  $x = L_2 + L_3 + L_4$ . Також введено позначення  $L_6 = L_3 + L_4$ .

Потенціал швидкості  $\phi(x'', y'', t)$  знаходиться, як розв'язок хвильового рівняння, що задовольняє в лівій частині каналу  $x'' < 0$  наступним граничним умовам. На торцевій стінці  $x'' = 0$ :

$$u_{x''} = -\frac{\partial \phi}{\partial x''} = \begin{cases} 0, & \text{при } y'' \in \Upsilon, \\ u_1^{(o)}(y'', t), & \text{при } y'' \in \Delta. \end{cases} \quad (7.6)$$

Тут  $\Upsilon$  означає тверду поверхню торця міжстенозної області, тобто  $\Upsilon = [(D_1 - D_4)/2, (D_1 - D_3)/2] \cup [(D_1 + D_3)/2, (D_1 + D_4)/2]$ , а  $\Delta$ , як і раніше, означає отвір стенозу.

На всіх горизонтальних стінках розрахункової області маємо акустично жорстку граничну умову:

$$u_{y''}(x'', y'', t) = -\frac{\partial \phi}{\partial y''} = 0. \quad (7.7)$$

Аналогічно, на вертикальних поверхнях першого стенозу маємо

$$u_{x''}(-L_4, y'', t) \equiv -\frac{\partial \phi}{\partial x''} = 0, \quad \text{при } y'' \in \Upsilon, \quad (7.8)$$

$$u_{x''}(-L_6, y'', t) \equiv -\frac{\partial \phi}{\partial x''} = 0, \quad \text{при } y'' \in \Gamma. \quad (7.9)$$

## 7.4 Розв'язок сформульованих акустичних задач

**Розв'язок задачі 1.** Задача 1 є задачею визначення акустичного поля в плоскому регулярному напівнескінченному хвилеводі із заданим збуренням на торці. Розв'язок такої граничної задачі детально описано в [239, 302]. Він може бути представлений у вигляді подвійного ряду Фур'є:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} e^{i(\gamma_{nm}^{(1)} x' - n\omega t)} \alpha_m^{(1)}(y'), \quad (7.10)$$

де

$$\alpha_m^{(1)}(y') = \cos \frac{\pi m y'}{D_1}, \quad \gamma_{nm}^{(1)} = \sqrt{n^2 k^2 - \frac{\pi^2 m^2}{D_1^2}}, \quad (7.11)$$

де  $\omega$  – кутова частота,  $k$  – хвильове число,  $A_{nm}$  – невідомі сталі коефіцієнти. Набір функцій  $\alpha_m^{(1)}(y')$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  представляє собою повну ортогональну систему на інтервалі  $[0, D_1]$ . Слід зазначити, що при побудові розв'язку хвилевід (рисунок 7.5) розглядається як нескінченний плоскопаралельний хвилевід із заданим в перерізі  $x' = 0$  розподілом швидкості. Це дозволяє в комплексному ряді Фур'є по  $n$  в (7.10) підсумовувати тільки по додатним частотам. Від'ємні номери  $n$  відповідають хвилям, що поширюються в лівій частині хвилеводу  $x' < 0$ .

Розв'язок (7.10) задовольняє граничну умову (7.5) на верхній і нижній стінках каналу. А коефіцієнти  $A_{nm}$  визначаються в явному вигляді з граничної умови (7.4) на торці. Дійсна частина швидкості  $u_{x'}$  на торці  $x' = 0$  має вигляд:

$$u_{x'} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [a_{nm} \cos(n\omega t) + b_{nm} \sin(n\omega t)] \alpha_m^{(1)}(y'), \quad (7.12)$$

де  $a_{nm}$ ,  $b_{nm}$  – дійсна і уявна частини коефіцієнта  $-i\gamma_{nm} A_{nm} = a_{nm} + ib_{nm}$ . Підставивши вираз (7.12) в умову (7.4), і розклавши його за функціями

$\alpha_m^{(1)}(y')$ , отримаємо вираз для невідомих коефіцієнтів

$$a_{nm} = G \int_0^T \int_{\Delta} u_2^{(o)}(y', t) \alpha_m^{(1)}(y') dy' \cos(n\omega t) dt, \quad (7.13)$$

$$b_{nm} = G \int_0^T \int_{\Delta} u_2^{(o)}(y', t) \alpha_m^{(1)}(y') dy' \sin(n\omega t) dt, \quad (7.14)$$

де нормувальний коефіцієнт:

$$G = \frac{(2 - \delta_{n0})(2 - \delta_{m0})}{TD_1}, \quad (7.15)$$

де  $\delta_{n0}$ ,  $\delta_{m0}$  – символи Кронекера.

**Розв'язок задачі 2.** Область, що лежить зліва від другого стенозу, складається з напівнескінченної смуги і двох прямокутників. Нижче ці області позначені римськими цифрами:

- I:  $x'' < -L_6$ ,  $y'' \in \Delta \cup \Gamma$ ;
- II:  $-L_6 < x'' < -L_4$ ,  $y'' \in \Delta$ ;
- III:  $-L_4 < x'' < 0$ ,  $y'' \in \Delta \cup \Upsilon$ .

Для розв'язання задачі 2 ми використовуємо метод часткових областей. Детальне описання основних положень методу часткових областей можна знайти в учбовій літературі (див., наприклад, [239]). В [303, 304] метод часткових областей був використаний для побудови розв'язку хвильового рівняння в каналах з геометричними неоднорідностями у вигляді сходинки або камери. Згідно з цим методом невідомий потенціал швидкості вводиться в кожній області окремо, а на межі розділу областей задовольняється умова спряження полів. Для даної задачі маємо наступні умови зшивки:

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(1)} &= \phi^{(2)}, \\ u_{x''}^{(1)} &= u_{x''}^{(2)} \end{aligned} \right\} \text{ при } x'' = -L_6, \quad y'' \in \Delta \quad (7.16)$$

і

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(2)} &= \phi^{(3)}, \\ u_{x''}^{(2)} &= u_{x''}^{(3)} \end{aligned} \right\} \text{ при } x'' = -L_4, \quad y'' \in \Delta. \quad (7.17)$$

Тут верхній індекс означає область, в якій визначене дане поле. Шукані поля можуть бути представлені у вигляді подвійних рядів Фур'є наступним чином:

$$\phi^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}^{(1)} e^{-i(\gamma_{nm}^{(1)}(x''+L_6)+n\omega t)} \alpha_m^{(1)}(y''), \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( B_{nm}^{(2)} e^{-i(-\gamma_{nm}^{(2)}(x''+L_6)+n\omega t)} + \right. \\ \left. + C_{nm}^{(2)} e^{-i(\gamma_{nm}^{(2)}(x''+L_4)+n\omega t)} \right) \alpha_m^{(2)}(y''), \quad (7.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( B_{nm}^{(3)} e^{-i(-\gamma_{nm}^{(3)}(x''+L_4)+n\omega t)} + \right. \\ \left. + C_{nm}^{(3)} e^{-i(\gamma_{nm}^{(3)}x''+n\omega t)} \right) \alpha_m^{(3)}(y''), \quad (7.20) \end{aligned}$$

де

$$\alpha_m^{(2)}(y'') = \cos \left( \frac{\pi m}{D_3} \left( y'' - \frac{D_1 - D_3}{2} \right) \right), \quad (7.21)$$

$$\alpha_m^{(3)}(y'') = \cos \left( \frac{\pi m}{D_4} \left( y'' - \frac{D_1 - D_4}{2} \right) \right), \quad (7.22)$$

$\gamma_{nm}^{(1)}$  задано формулою (7.11), а вирази для  $\gamma_{nm}^{(2)}$  і  $\gamma_{nm}^{(3)}$  мають такий самий вигляд, як (7.11), однак замість  $D_1$  слід підставити  $D_3$  і  $D_4$ , відповідно.

Побудовані таким чином розв'язки задовольняють граничні умови (7.7) на горизонтальних поверхнях. А невідомі коефіцієнти розв'язку визначаються з граничних умов на вертикальних поверхнях (7.6), (7.8), (7.9), а також умов спряження полів (7.16), (7.17). Підставляючи вирази (7.18) – (7.20) в граничні умови (7.6), (7.8), (7.9), а також умови спряження полів (7.16), (7.17), отримуємо відповідні п'ять функціональних рівнянь. Алгебраїзацію цих функціональних рівнянь проводимо стандартним чином, детально описаним в [239]. З цією метою розкладаємо кожне функціональне рівняння по відповідній системі функцій  $\alpha_m^{(i)}(y'')$ , що утворює повну і ортогональну систему на відповідному інтервалі, а також по повній і ортогональній на інтервалі  $(0, T)$  системі функцій  $\cos(n\omega t)$ ,  $\sin(n\omega t)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В результаті отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язувалася чисельно методом редукції [239].

Табл. 7.2: Найбільший номер  $M$  біжучої хвилі при різних значеннях  $n$ 

$$\text{Re} = 3132, D_4 = D_1$$

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M$	0	1	0	1	2	1	2	3	2

$$\text{Re} = 4176, D_4 = D_1$$

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M$	0	1	2	1	2	3	4	5	4

$$\text{Re} = 6264, D_4 = D_1$$

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M$	0	1	2	3	4	5	6	7	8

$$\text{Re} = 8352, D_4 = D_1$$

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M$	1	2	3	4	7	8	9	10	13	14

$$\text{Re} = 3132, D_4 = D_1/3$$

$n$	1 - 9	10
$M$	0	2

## 7.5 Результати розрахунку звукового поля

Спочатку розглянемо отримані чисельні результати окремо для задач 1 і 2, а потім енергетичні характеристики звукового поля для усїєї розрахункової області в цілому.

**Задача 1.** Передусім слід зазначити, що з метою вибору числа членів подвійного ряду в розв'язку (7.10), які необхідно враховувати для отримання розв'язку з прийнятною точністю, нами були проведені наступні перевірочні розрахунки. Після знаходження невідомих коефіцієнтів розв'язку  $A_{nm}$ , представлених подвійними інтегралами (7.13), було перевірено чисельне виконання граничних умов (7.4) на торці  $x' = 0$ . В якості прикладу розглянемо

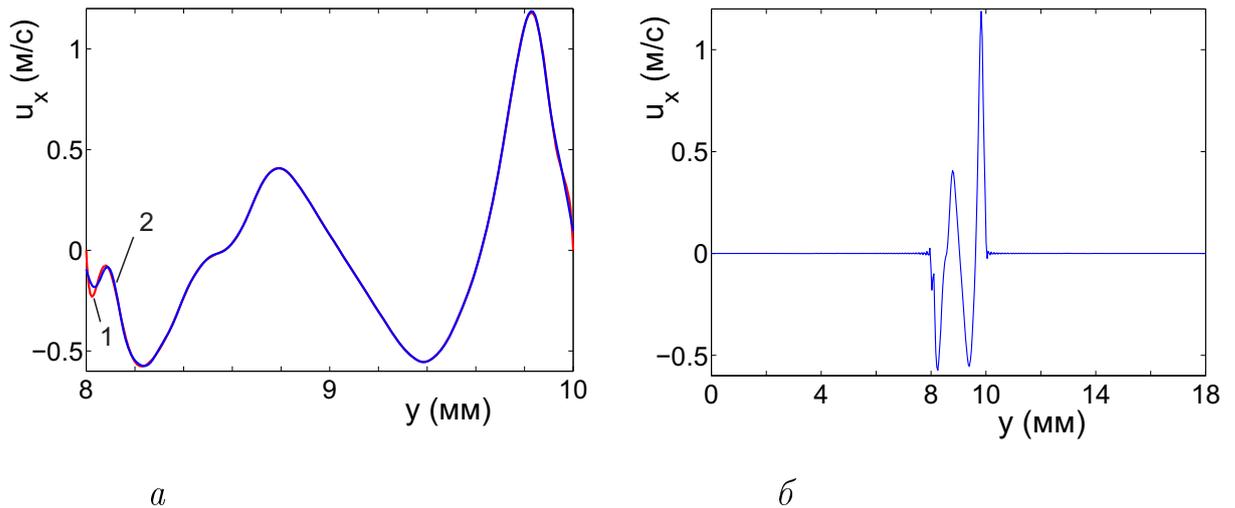


Рис. 7.7: Перевірка виконання граничної умови на торці каналу  $x' = 0$  для випадку  $Re = 3132$  і  $D_4 = D_1$  (лінії відрізняються кольором і позначені цифрами): *a* – швидкість  $u_{x'}$  на виході з отвору другого стенозу  $y' \in \Delta$  в момент  $t = 0$ ; червона лінія (крива 1) – заданий профіль швидкості  $u_2^{(o)}$ , синя лінія (крива 2) – швидкість, розрахована по (7.10) з використанням 360 членів у сумі по  $m$  і 20 членів у сумі по  $n$ , *б* – швидкість  $u_{x'}$ , розрахована на усьому торці  $x' = 0$  у момент  $t = 0$

випадок  $Re = 3132$  при повній глибині міжстенозних ніш  $D_4 = D_1$ . На рисунку 7.7 *a* показано профіль швидкості  $u_2^{(o)}$ , заданий на торці  $x' = 0$  на виході з отвору другого стенозу  $y' \in \Delta$ , а також профіль швидкості, отриманий з розв'язку (7.10) при використанні 360 членів ряду при підсумовуванні по  $m$  і 20 членів ряду по  $n$ . Видно, що такого числа врахованих членів ряду вистачає, щоб адекватно передати форму заданої кривої. Незначна розбіжність, що має лише локальне значення, спостерігається у безпосередній близькості до стінки одного із стенозів, де заданий профіль швидкості має складну викирвлену форму. На рисунку 7.7 *б* показана швидкість  $u_{x'}$ , розрахована на всьому торці  $x' = 0$ . Видно, що навіть у безпосередній близькості до кромek стенозів похибка не перевищує 1% швидкості, заданої в отворі стенозу. При віддаленні від грані стенозу менш, ніж на 1% від  $D_1$  похибка не перевищує 0.1% від заданої в отворі швидкості. Інтегральна оцінка точності розв'язку

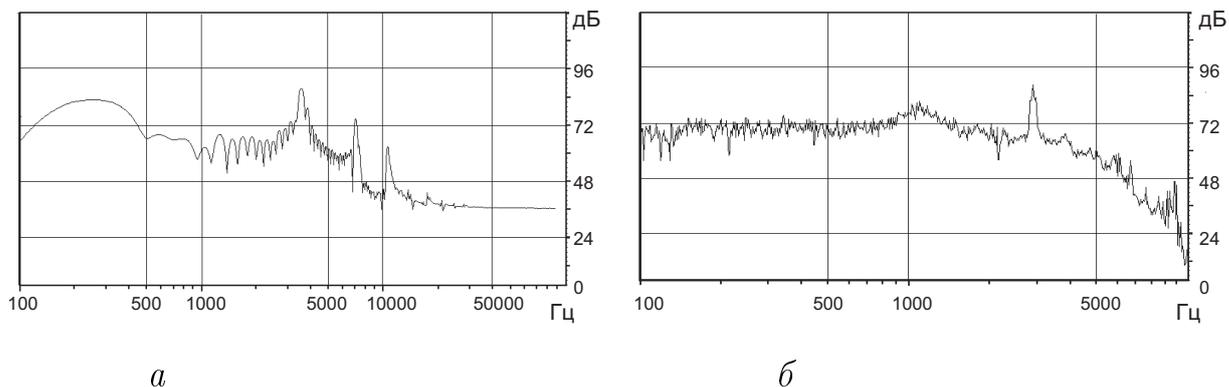


Рис. 7.8: Спектр коливань швидкості  $u_2^{(o)}$  в отворі другого стенозу ( $Re = 3132$  і  $D_4 = D_1$ ):  $a$  – розрахункові теоретичні дані;  $b$  – експериментальні дані

проводилась за допомогою наступних двох співвідношень:

$$\delta_1 = \frac{1}{A} \int_0^T \int_{\Delta} \left[ u_2^{(o)}(y', t) - u_{x'}(y', t) \right]^2 dy' dt, \quad (7.23)$$

$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{1}{A} \int_0^T \int_{\Gamma} u_{x'}^2(y', t) dy' dt, \quad (7.24)$$

де коефіцієнт нормування визначено наступним чином

$$A = \int_0^T \int_{\Delta} \left[ u_2^{(o)}(y', t) \right]^2 dy' dt. \quad (7.25)$$

Величина  $\delta_1$  є інтегральною оцінкою виконання граничної умови в отворі другого стенозу, а  $\delta_2$  – оцінкою виконання граничної умови на усьому торці  $x' = 0$ . Для даного прикладу  $\delta_1 = 6.5 \cdot 10^{-4}$  і  $\delta_2 = 1.2 \cdot 10^{-3}$ . Така точність представляється цілком прийнятною. Однак, відзначимо, що при необхідності збіжність рядів, а, отже, і точність розв'язку може бути підвищена. Для цього необхідно виділити в явному вигляді особливості звукового поля в околі ребра, яка визначається умовами Мейкснера (див. [239, 301]), і використати ці формули в розв'язках (7.18) – (7.20). Проте, в цій статті у цьому не було необхідності, оскільки верифікація виконання граничної умови на торці говорить про те, що точність чисельного розв'язку і так є досить високою.

Табл. 7.3: Амплітуди коливань величин  $\phi$ ,  $p$  і  $u_{x'}$  для перших номерів частот  $n$  і номерів мод хвилевода  $m$ , що представляють біжучі хвилі

$$\text{Re} = 3132, D_4 = D_1$$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
2	0	$1.07 \cdot 10^{-7}$	$6.29 \cdot 10^{-3}$	$1.47 \cdot 10^{-5}$
3	1	$1.12 \cdot 10^{-6}$	$9.91 \cdot 10^{-2}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$
4	0	$4.33 \cdot 10^{-9}$	$5.11 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-6}$
5	1	$3.16 \cdot 10^{-8}$	$4.66 \cdot 10^{-3}$	$9.39 \cdot 10^{-6}$
6	0	$1.56 \cdot 10^{-9}$	$2.75 \cdot 10^{-4}$	$6.44 \cdot 10^{-7}$
6	2	$8.87 \cdot 10^{-9}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$	$1.98 \cdot 10^{-6}$

$$\text{Re} = 4176, D_4 = D_1$$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
2	0	$1.14 \cdot 10^{-7}$	$9.48 \cdot 10^{-3}$	$2.22 \cdot 10^{-5}$
3	1	$9.75 \cdot 10^{-7}$	$1.22 \cdot 10^{-1}$	$2.28 \cdot 10^{-4}$
4	0	$4.10 \cdot 10^{-9}$	$6.83 \cdot 10^{-4}$	$1.60 \cdot 10^{-6}$
4	2	$2.01 \cdot 10^{-7}$	$3.34 \cdot 10^{-2}$	$3.46 \cdot 10^{-5}$
5	1	$8.59 \cdot 10^{-8}$	$1.79 \cdot 10^{-2}$	$3.90 \cdot 10^{-5}$

$$\text{Re} = 6264, D_4 = D_1$$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
2	0	$9.80 \cdot 10^{-8}$	$1.32 \cdot 10^{-2}$	$3.10 \cdot 10^{-5}$
3	1	$5.38 \cdot 10^{-7}$	$1.09 \cdot 10^{-1}$	$2.37 \cdot 10^{-4}$
4	0	$1.64 \cdot 10^{-9}$	$4.43 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-6}$
4	2	$2.13 \cdot 10^{-8}$	$5.75 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^{-5}$
5	1	$1.21 \cdot 10^{-8}$	$4.11 \cdot 10^{-3}$	$9.37 \cdot 10^{-6}$
5	3	$4.81 \cdot 10^{-8}$	$1.63 \cdot 10^{-2}$	$2.85 \cdot 10^{-5}$

$$\text{Re} = 8352, D_4 = D_1$$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
1	1	$2.47 \cdot 10^{-5}$	2.71	$4.65 \cdot 10^{-3}$
2	0	$4.31 \cdot 10^{-8}$	$9.45 \cdot 10^{-3}$	$2.21 \cdot 10^{-5}$

2	2	$7.47 \cdot 10^{-7}$	$1.63 \cdot 10^{-1}$	$2.81 \cdot 10^{-4}$
3	1	$4.40 \cdot 10^{-7}$	$1.45 \cdot 10^{-1}$	$3.30 \cdot 10^{-4}$
3	3	$1.68 \cdot 10^{-6}$	$5.54 \cdot 10^{-1}$	$9.50 \cdot 10^{-4}$

$$\text{Re} = 3132, D_4 = D_1/3$$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
1	0	$5.15 \cdot 10^{-6}$	$8.04 \cdot 10^{-2}$	$1.88 \cdot 10^{-4}$
2	0	$1.48 \cdot 10^{-6}$	$4.63 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^{-4}$
3	0	$4.80 \cdot 10^{-7}$	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$5.26 \cdot 10^{-5}$
4	0	$2.65 \cdot 10^{-7}$	$1.66 \cdot 10^{-2}$	$3.87 \cdot 10^{-5}$
...	...	...	...	...
10	2	$7.68 \cdot 10^{-8}$	$1.20 \cdot 10^{-2}$	$8.20 \cdot 10^{-6}$

На рисунку 7.8 представлено амплітудно-частотний спектр коливань швидкості в отворі другого стенозу. Видно, що розрахункові дані добре узгоджуються з експериментальними як по амплітуді, так і по головній частоті (3610 Гц), що також є підтвердженням достатньої точності вибраного чисельного методу розв'язання задачі. Звернемо увагу, що на рисунку 7.8 а, на якому представлені розрахункові дані, виразно видно присутність також гармонік більш високих порядків. А на рисунку 7.8 б присутня шумова складова.

Також з метою підтвердження коректності отриманих розрахункових даних нами був розрахований середній за період потік потужності звукового поля крізь два перерізи каналу :

$$W_c(x') = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{D_1} p u_x^* dy' dt, \quad (7.26)$$

де \* означає комплексне спряження. Один переріз розташовувався прямо на торці  $x' = 0$ , а другий переріз – на відстані  $x' = 2$  м. Слід відзначити дуже хороший збіг результатів. Відносна розбіжність при усіх розглянутих значеннях числа Рейнольдса не перевищувала  $10^{-10}$ .

Відомо, що загальний розв'язок хвильового рівняння в хвилеводі склада-

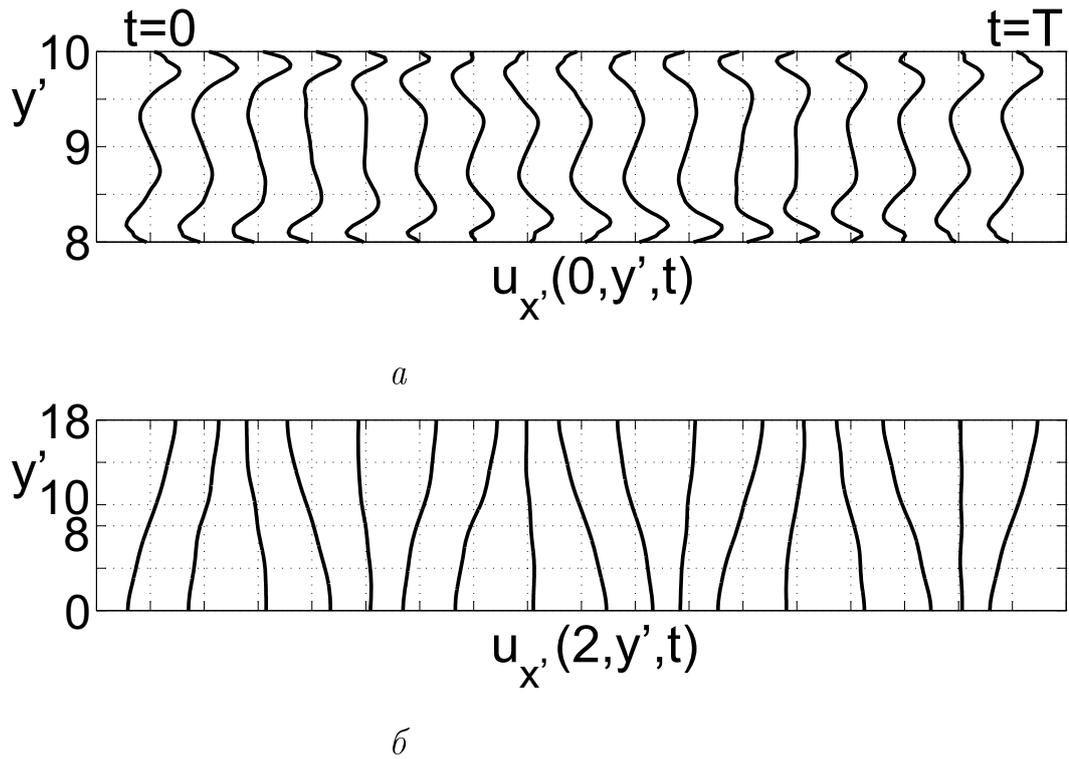


Рис. 7.9: Змінювання профілю швидкості  $u_{x'}$  у часі протягом одного періоду ( $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1$ ): *a* – в отворі другого стенозу  $x' = 0$ , *б* – в перерізі  $x' = 2$  м

ється з суми нормальних біжучих хвиль і неоднорідних хвиль. Тобто розв'язок даної задачі (7.10) можна представити у виді

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M(n)} A_{nm} e^{i(\gamma_{nm}^{(1)} x' - n\omega t)} \cos \frac{\pi m y'}{D_1} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M(n)+1}^{\infty} A_{nm} e^{(-|\gamma_{nm}^{(1)}| x' - i n \omega t)} \cos \frac{\pi m y'}{D_1}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Тут перша сума є суперпозицією біжучих хвиль, друга - неоднорідних хвиль,  $M$  – максимальний номер біжучої хвилі, тобто максимальний номер моди  $m$ , при якому  $\gamma_{nm}^{(1)}$ , визначене формулою (7.11) приймає дійсні значення. Очевидно, що в такій системі спостерігається  $M + 1$  біжучих хвиль з круговою частотою  $n\omega$ . З (7.11) видно, що  $\gamma_{nm}^{(1)2}$  міняє знак при значенні періоду коливань

$$T^* = \frac{2D_1 n}{c m}. \quad (7.28)$$

Якщо  $T < T^*$ , то  $\gamma_{nm}^{(1)2} > 0$  і, отже, дані значення  $n$  і  $m$  визначають біжучу

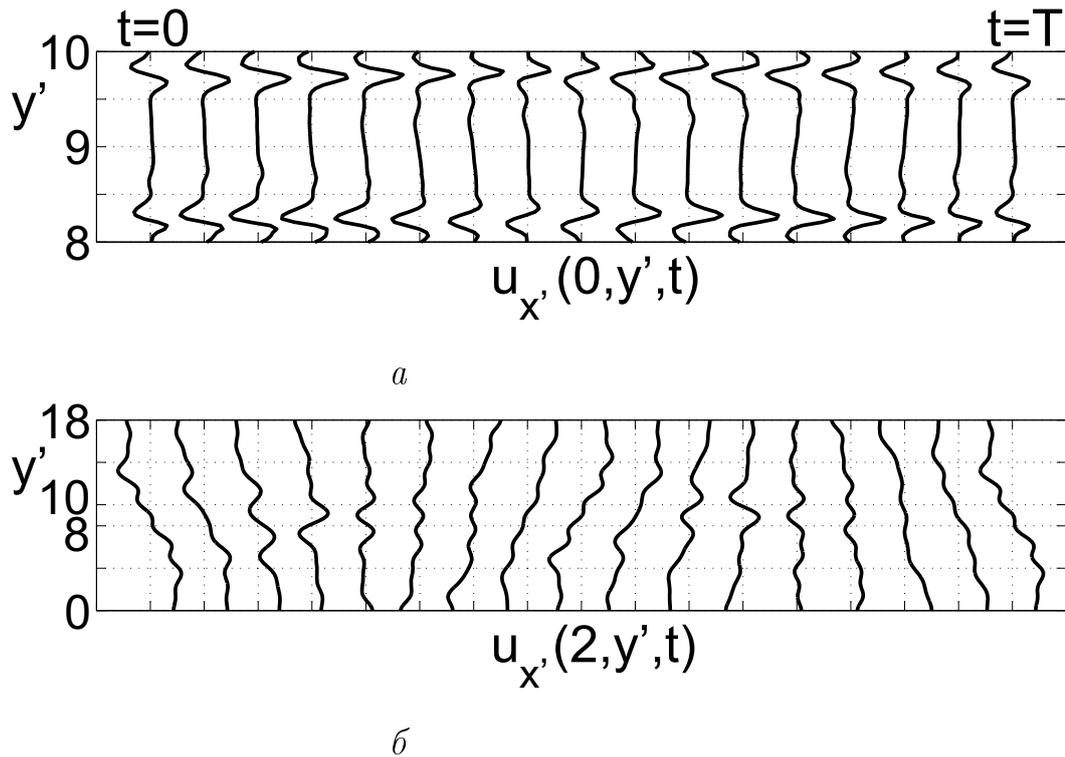


Рис. 7.10: Змінювання профілю швидкості  $u_{x'}$  у часі протягом одного періоду ( $Re = 8352$ ,  $D_4 = D_1$ ): а – в отворі другого стенозу  $x' = 0$ , б – в перерізі  $x' = 2$  м

волну. Якщо ж  $T > T^*$ , то дані значення  $n$  і  $m$  визначають неоднорідну хвилю.

Значення періоду коливань при різних числах Рейнольдса течії наведено в таблиці 7.1 для випадку глибоких міжстенозних ніш ( $D_4 = D_1$ ). У разі ж симетричних коливань, що виникають в області з мілкими нішами (див. рисунок 7.2 б), період коливань різко зростає. Так при  $Re = 3132$  період  $T = 5.2 \cdot 10^{-4}$ . Знаючи значення періоду коливань, нескладно з (7.28) підрахувати старші номери  $M$  біжучих хвиль для кожного номера частоти  $n$ . Значення  $M$  для усіх даних течій наведені в таблиці 7.2. Нагадаємо, що повільні коливання самого струменя нами не враховувались, а розглядались тільки коливання, викликані утворенням вихорів в зсувних шарах в міжстенозній області. Іншими словами, моделюючи течію в області з глибокими нішами, де вихори розташовуються в шаховому порядку, ми вважали, що вихори підходять до отвору другого стенозу по черзі, але по траєкторіям симетричним відносно осі каналу  $y' = D_1/2$ . На практиці це означало, що ми

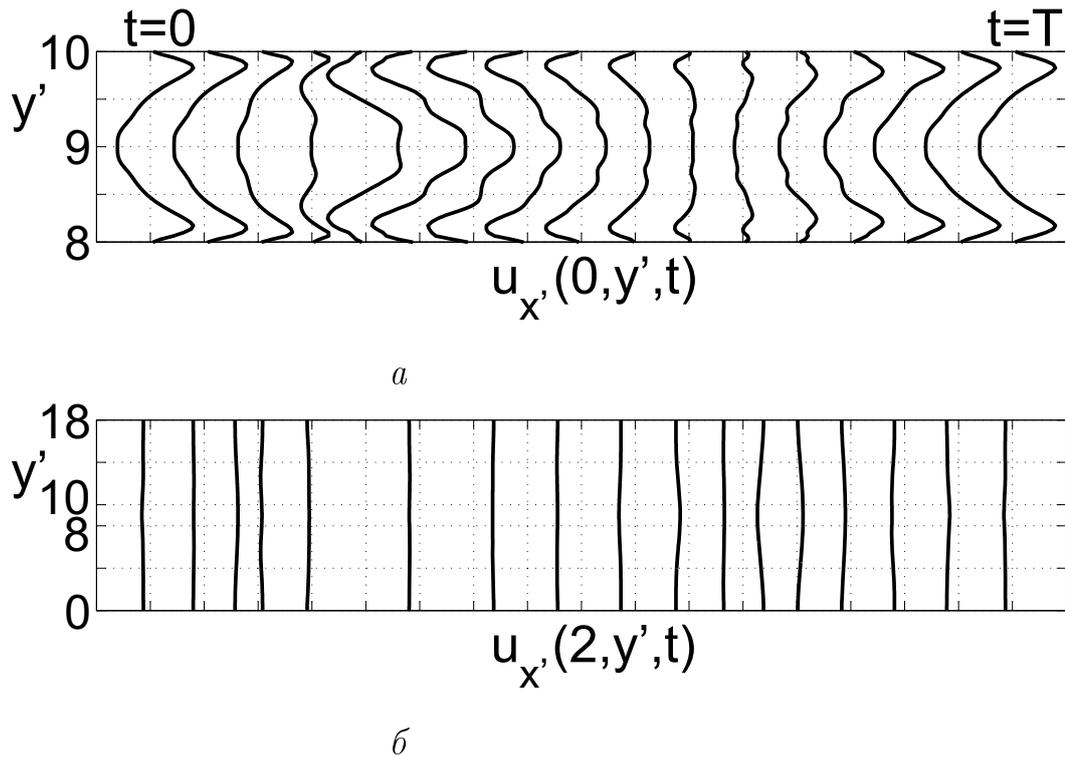


Рис. 7.11: Змінювання профілю швидкості  $u_{x'}$  у часі протягом одного періоду ( $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1/3$ ):  $a$  – в отворі другого стенозу  $x' = 0$ ,  $b$  – в перерізі  $x' = 2$  м

брали до уваги вклад в акустичне поле тільки тої частини профілю швидкості  $u_2^{(o)}(y', t)$ , яка має наступну властивість симетрії :

$$u_2^{(o)}(y', t) = u_2^{(o)}(D_1 - y', t + \frac{T}{2}). \quad (7.29)$$

Тобто через півперіоду поле швидкості відображається симетрично відносно осі каналу  $y' = D_1/2$ . Тоді з (7.13) (7.14) очевидно, що  $A_{nm} = 0$ , якщо один з індексів непарний, а інший парний  $n + m = 2k - 1$ . Звичайно, в таблиці 7.2 наведено лише ті значення  $M$ , які відповідають членам з ненульовою амплітудою  $A_{nM} \neq 0$ . Аналогічно, у випадку течії в області з мілкими між-стенозними нішами ми враховували вклад в звукове поле тільки симетричної частини профілю швидкості на торці  $u_2^{(o)}(y', t) = u_2^{(o)}(D_1 - y', t)$ , таким чином ігноруючи повільні зміщення самого струменя. Така симетрія означає, що всі моди з непарними номерами мають нульові амплітуди  $A_{n2k-1} = 0$ . Слід зазначити, що на перших дев'яти частотах біжучою буде тільки плоска хвиля (нульова мода).

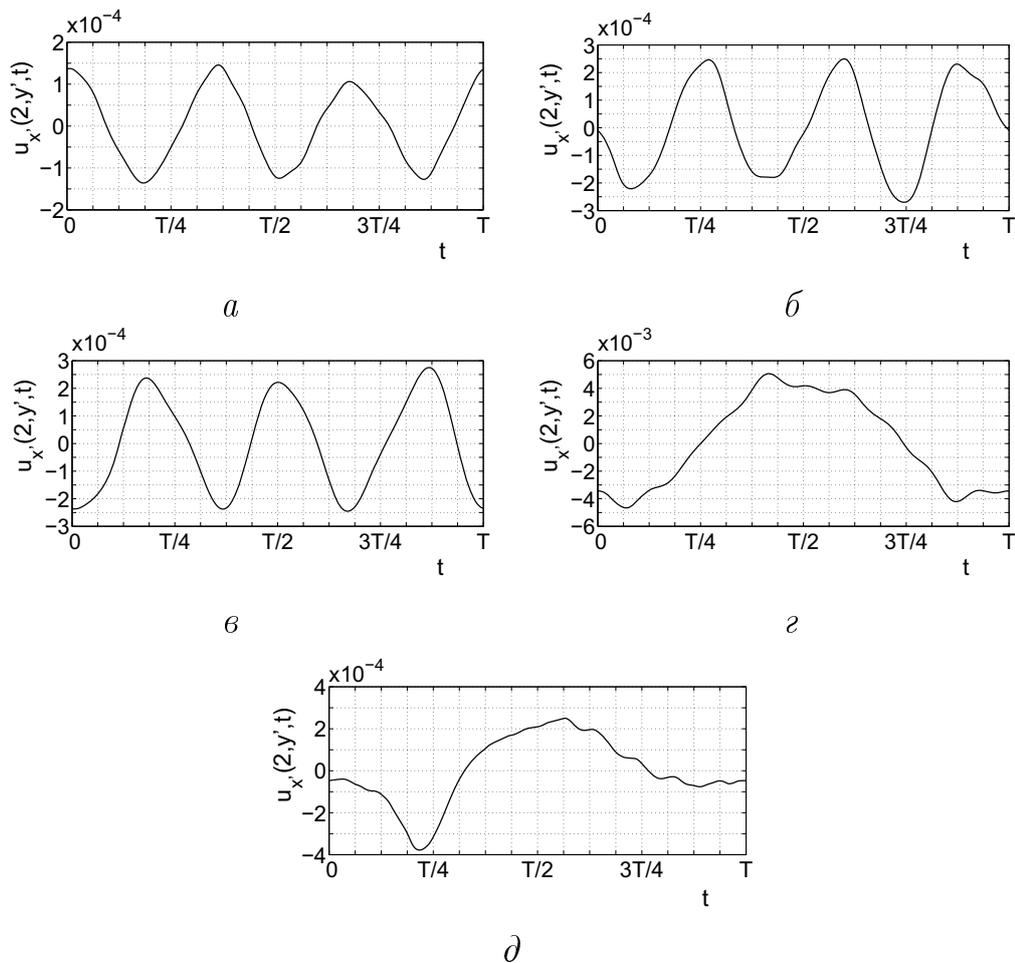


Рис. 7.12: Часові залежності коливальної швидкості у вибраній точці спостереження (у випадку глибоких ніш ( $D_4 = D_1$ ) вибрано точку спостереження з координатами  $x' = 2$  м,  $y' = 17$  мм; у випадку мілких ніш ( $D_4 = D_1/3$ ) – точку з координатами  $x' = 2$  м,  $y' = 9$  мм): а –  $\text{Re} = 3132$ ,  $D_4 = D_1$ , б –  $\text{Re} = 4176$ ,  $D_4 = D_1$ , в –  $\text{Re} = 6264$ ,  $D_4 = D_1$ , г –  $\text{Re} = 8352$ ,  $D_4 = D_1$ , д –  $\text{Re} = 3132$ ,  $D_4 = D_1/3$

Спочатку проаналізуємо результати для течії з глибокими нішами ( $D_4 = D_1$ ). В усіх даних випадках, окрім останнього ( $\text{Re} = 8352$ ) на першій частоті  $n = 1$  біжучою може бути тільки нульова мода  $M = 0$ . Проте, в силу (7.29) її амплітуда  $A_{nM} = 0$  і тому вона не вказана в таблиці. Далі видно, що із зростанням швидкості потоку  $i$ , отже, і частоти коливань моди з великими номерами з'являються при менших номерах частот. Так у випадку  $\text{Re} = 3132$  видно, що для частоти  $n = 2$  тільки нульова мода є біжучою хвилею, більш високі моди представляють неоднорідні хвилі. Іншими словами, на нижчій

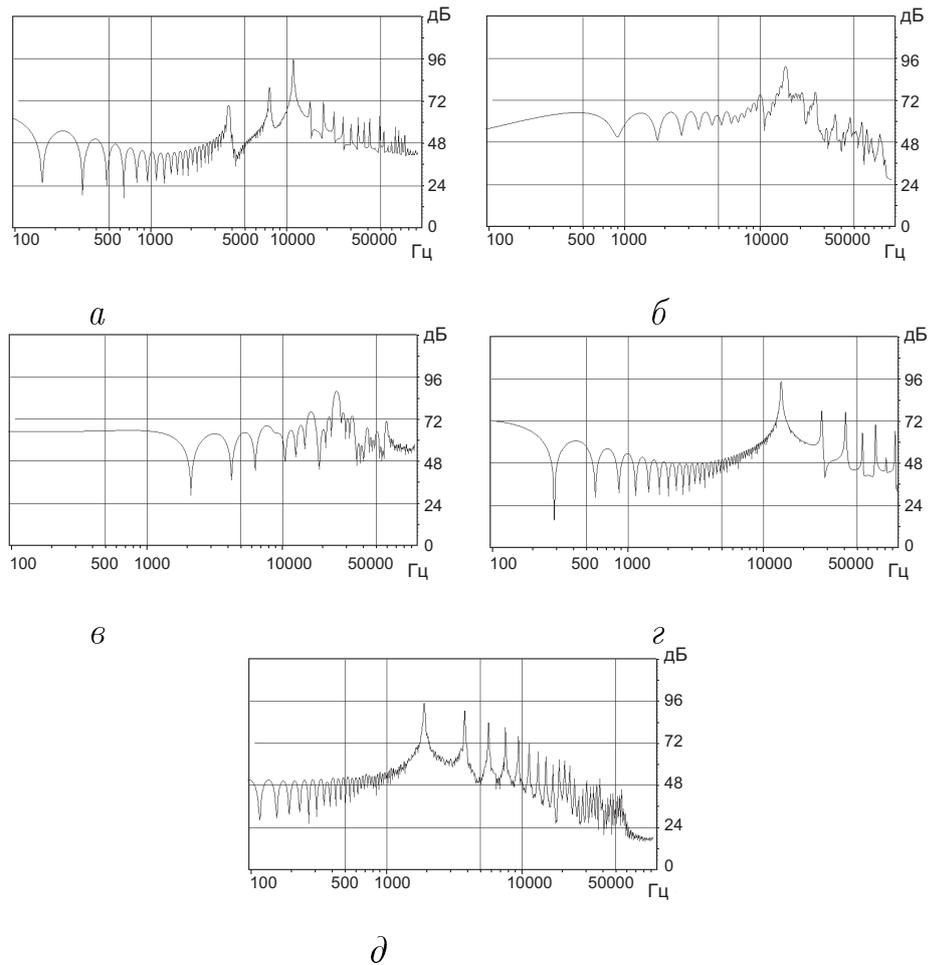


Рис. 7.13: Амплітудний спектр часової залежності коливальної швидкості у вибраній точці спостереження (у випадку глибоких ніш ( $D_4 = D_1$ ) вибрано точку спостереження з координатами  $x' = 2$  м,  $y' = 17$  мм; у випадку мілких ніш ( $D_4 = D_1/3$ ) – точка з координатами  $x' = 2$  м,  $y' = 9$  мм): *a* –  $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1$ , *б* –  $Re = 4176$ ,  $D_4 = D_1$ , *в* –  $Re = 6264$ ,  $D_4 = D_1$ , *г* –  $Re = 8352$ ,  $D_4 = D_1$ , *д* –  $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1/3$

частоті тільки звичайна плоска хвиля поширюється уздовж осі хвилеводу. І тільки починаючи з третьої частоти ( $n = 3$ ), з'являється біжуча мода першого порядку ( $M = 1$ ) з розподілом амплітуди по перерізу хвилеводу у формі косинуса. Така ж картина спостерігається і при  $Re = 4176$ , а також при  $Re = 6264$ . При подальшому збільшенні швидкості потоку ( $Re = 8352$ ) біжуча мода першого порядку ( $M = 1$ ) з'являється вже на першій частоті  $n = 1$ . У випадку області з мілкими міжстенними нішами (цей випадок приведений останнім в таблиці 7.2), на перших дев'яти частотах тільки плоска хвиля поширюється вздовж хвилеводу. Друга мода  $M = 2$  стає біжучою

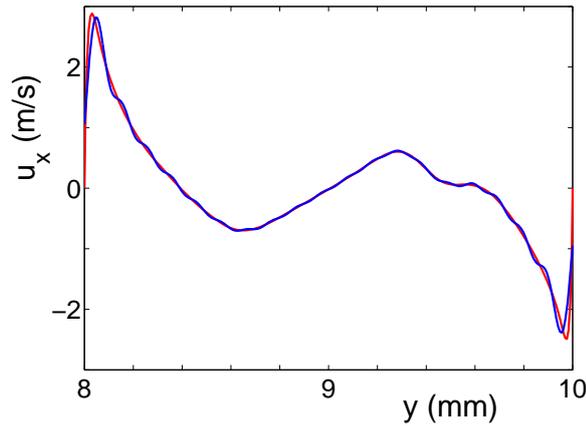


Рис. 7.14: Швидкість  $u_{x''}$  на вході в отвір другого стенозу  $x'' = 0$ ,  $y'' \in \Delta$  в момент  $t = 0$ ; червона лінія (крива 1) – заданий профіль швидкості  $u_1^{(o)}$ , синя лінія (крива 2) – швидкість, розрахована з використанням 360 членів в сумі по  $m$  і 20 членів в сумі по  $n$  ( $Re = 3132$  і  $D_4 = D_1$ )

хвилею тільки на десятій частоті ( $n = 10$ ). Слід також відзначити, що біжуча мода першого порядку повинна була б з'явитися на п'ятій частоті  $n = 5$ , якби ми не прийняли профіль швидкості на торці  $u_2^{(o)}(y', t)$  строго симетричним відносно осі каналу.

Щоб визначити яка з хвиль дає найбільший вклад в звукове поле хвилеводу, необхідно розрахувати їх амплітуди. Очевидно, що амплітуда моди  $m$  частоти  $n$  у виразі для потенціалу швидкості (7.10), а також амплітуди відповідних мод у виразі для тиску  $p$  і швидкості  $u_{x'}$  визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} |\phi_{nm}| &= |A_{nm}|, \\ |p_{nm}| &= \omega \rho n |A_{nm}|, \\ |u_{x'nm}| &= \gamma_{nm} |A_{nm}|. \end{aligned} \quad (7.30)$$

У представлених розрахунках за  $\rho$  бралася густина повітря при температурі  $0^\circ C$ :  $\rho = 1.2920 \text{ кг/м}^3$ .

Амплітуди  $\phi$ ,  $p$  і  $u_{x'}$  для різних номерів частоти  $n$  і номерів біжучих мод хвилеводу  $m$  представлені в таблиці 7.3. Видно, що у випадку глибоких міжстенозних ніш, коли вихори, що генеруються в зсувних шарах, шикуються в шаховому порядку, найбільшу амплітуду має та частота, на якій перша мода стає біжучою хвилею ( $M = 1$ ). Так для перших трьох випадків най-

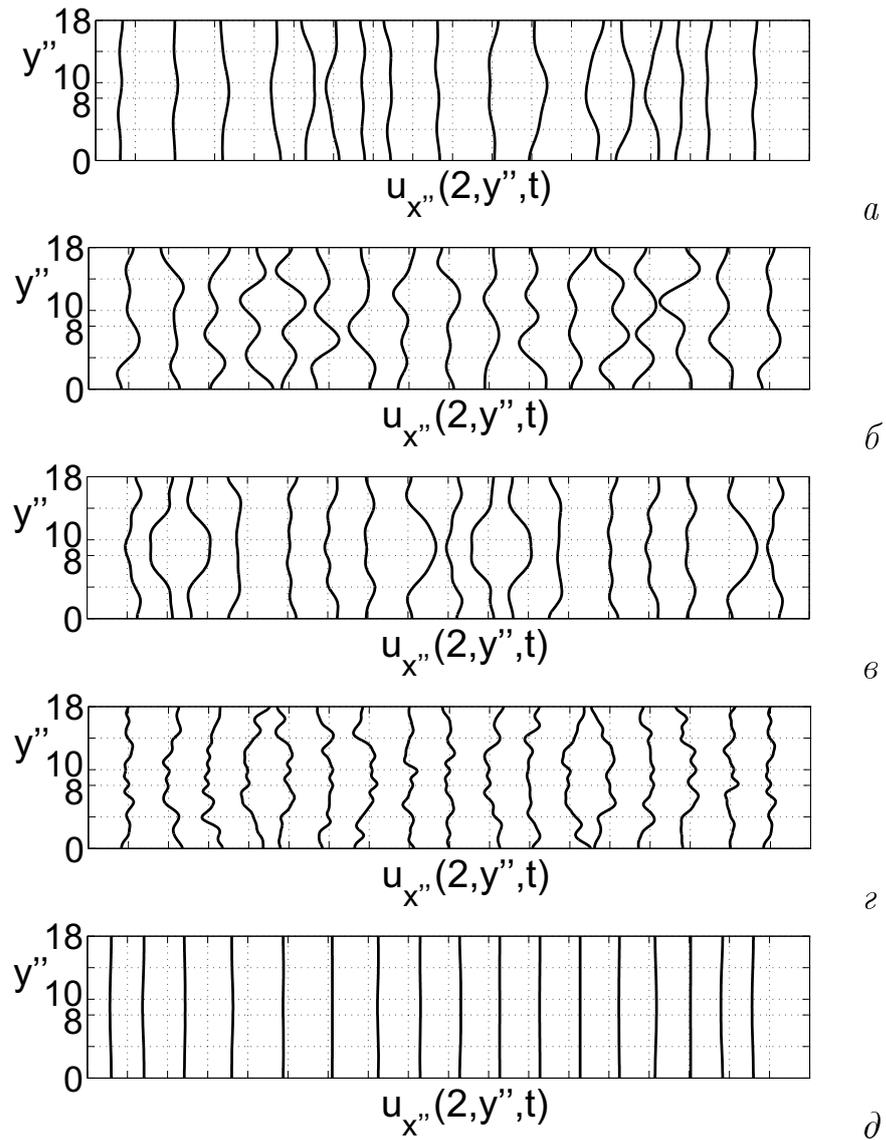


Рис. 7.15: Змінювання профілю швидкості  $u_{x''}$  в перерізі  $x'' = -2$  м у часі протягом одного періоду: *a* –  $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1$ , *б* –  $Re = 4176$ ,  $D_4 = D_1$ , *в* –  $Re = 6264$ ,  $D_4 = D_1$ , *г* –  $Re = 8352$ ,  $D_4 = D_1$ , *д* –  $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1/3$

більшу амплітуду має не плоска хвиля з найменшим номером частоти  $n = 2$ , а хвиля з третьою частотою  $n = 3$ , починаючи з якої перша мода ( $m = 1$ ) стає біжучою хвилею. Друга біжуча мода ( $m = 2$ ) з'являється тільки при більш високих номерах частот і має амплітуду істотно менше, ніж амплітуди першої моди при менших номерах частот  $n$ . При подальшому збільшенні числа Рейнольдса (у розглянутому прикладі  $Re = 8352$ ) частота генерованих потоком коливань зростає настільки, що  $M = 1$  вже на першій частоті  $n = 1$ . Відповідно, вклад першої частоти в дальнє акустичне поле стає домінуючим. В останній частині таблиці 7.3 представлені амплітуди хвиль для

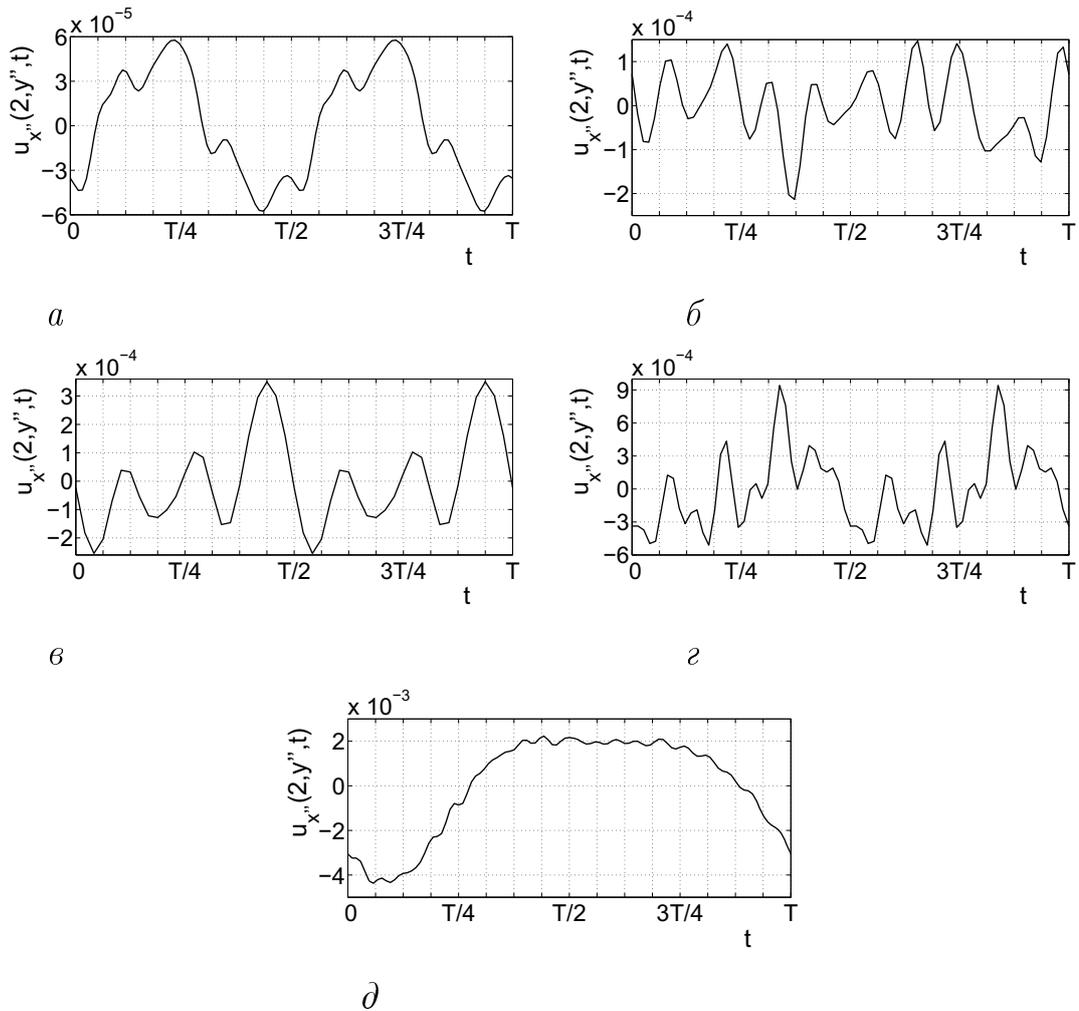


Рис. 7.16: Часові залежності коливальної швидкості у вибраній точці спостереження (в усіх випадках, окрім б, вибрано точку на осі каналу  $x'' = -2$  м,  $y'' = 9$  мм; у випадку б точку спостереження зміщено на  $1/10$  ширини каналу  $x'' = 2$  м,  $y'' = 7.2$  мм): а –  $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1$ , б –  $Re = 4176$ ,  $D_4 = D_1$ , в –  $Re = 6264$ ,  $D_4 = D_1$ , г –  $Re = 8352$ ,  $D_4 = D_1$ , д –  $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1/3$

випадку мілких міжстенозних ніш  $D_4 = D_1/3$ . Видно, що найбільшу амплітуду має хвиля з номером частоти  $n = 1$ . А амплітуди інших хвиль спадають з номером частоти  $n$ .

З даних, представлених в таблиці 7.3, можна зробити наступний висновок. Якщо число Рейнольдса менше деякого критичного значення, то в області з глибокими міжстенозними нішами ( $D_4 = D_1$ ), де вихори генеровані в зсувних шарах, розташовуються в шаховому порядку, домінуючий вклад в дальнє звукове поле в каналі вносить хвиля з третьою частотою ( $n = 3$ ) і першою модою ( $m = 1$ ). При збільшенні швидкості потоку, коли число Рей-

нольдса перевищує деяке критичне значення, головний вклад в дальнє звукове поле в каналі вносить хвиля, що відповідає першій частоті і першій моді ( $n = 1, m = 1$ ). В області з мілкими міжстенозними нішами ( $D_4 = D_1/3$ ), де збурення в зсувних шарах будуть симетричними відносно осі каналу, домінуючий вклад в дальнє звукове поле в каналі вносить плоска хвиля ( $m = 0$ ), що поширюється на першій частоті ( $n = 1$ ). На перших дев'яти частотах можуть поширюватися тільки нульові моди, а внесок хвиль в дальнє звукове поле зменшується з номером частоти  $n$ .

Зрозуміло, що із-за наявності дисперсії в ході поширення сигналу у ньому будуть накопичуватись спотворення. Аналогічно [302] ми досліджували поширення коливань в такому хвилеводі, описуючи часові залежності полів в трьох перерізах хвилеводу ( $x' = 1$  м 2 м, 3 м). На рисунку 7.9 – 7.10 показано змінювання у часі профілю коливальної швидкості  $u_{x'}$  на торці  $x' = 0$  і в середньому з вибраних перерізів  $x' = 2$  м при різних значеннях числа Рейнольдса для випадку глибоких міжстенозних ніш ( $D_4 = D_1$ ). Вздовж осі абсцис відкладені значення швидкості в моменти часу від 0 до  $T$  з кроком  $T/16$ . При цьому відкинуто час поширення сигналу із швидкістю  $c$  від торця  $x' = 0$  до точки спостереження  $x'$ , тобто час  $x'/c$ .

Аналізуючи отримані результати, можна відзначити наступні характерні особливості структури сигналу. По-перше, в силу дисперсії відбувається затримка сигналу порівняно з часом поширення  $x'/c$ . В результаті профіль коливальної швидкості у момент  $t = 0$  (що відповідає часу поширення  $x'/c$ ) має абсолютно різну форму в усіх трьох вибраних перерізах каналу. По-друге, профіль швидкості у вибраних перерізах являється майже антисиметричним відносно осі каналу  $y' = D_1/2$ . Цей факт говорить про те, що в полі коливальної швидкості виразно домінує перша мода ( $m = 1$ ), що знаходиться у відповідності з даними, наведеними в таблиці 7.3.

Аналогічно, на рисунку 7.11 показано змінювання у часі профілю коливальної швидкості  $u_{x'}$  на торці  $x' = 0$  і в середньому з вибраних перерізів  $x' = 2$  м у випадку мілких міжстенозних ніш ( $D_4 = D_1/3$ ). Очевидно, що профілі коливальної швидкості у вибраних перерізах практично являються

плоскою хвилею. Причому основний вклад вносить хвиля з першою частотою ( $n = 1$ ), що також відповідає даним таблиці 7.3.

Для описання зміни сигналу у часі в кожному з вибраних вище перерізів хвилеводу ( $x' = 1$  м, 2 м, 3 м) була вибрана конкретна точка з ординатою  $y' = 17$  мм, тобто точка, близька до межі хвилеводу, де амплітуда коливань буде максимальна у випадку  $D_4 = D_1$ . Часові залежності коливальної швидкості в середній з вибраних точок спостереження ( $x' = 2$  м) приведені на рисунку 7.12. Ці рисунки також демонструють, що в перших трьох випадках (рисунки 7.12 а – в), коли число Рейнольдса менше деякого критичного значення, домінуючий вклад в коливання вносить член з третьою частотою  $n = 3$ . При збільшенні числа Рейнольдса до  $Re = 8352$  (рисунок 7.12 г) домінуючим стає член з першою частотою  $n = 1$ . На рисунку 7.12 д показана часова залежність коливальної швидкості в середній з вибраних точок ( $x' = 2$  м) у випадку мілких ніш ( $D_4 = D_1/3$ ). Оскільки профіль коливальної швидкості в даному випадку буде симетричним відносно осі каналу  $y' = D_1/2$ , доцільно точку спостереження вибрати прямо на осі  $y' = D_1/2$ . Видно, що в даному випадку головний вклад в дальнє звукове поле також вносить член з першою частотою  $n = 1$ . Проте, вклад членів з більш високими номерами частот також буде істотним. Представлені результати знаходяться в повній відповідності з даними, наведеними в таблиці 7.3.

На рисунку 7.13 показано амплітудний спектр кривих, представлених на рисунку 7.12. Приведені графіки також підтверджують той результат, що у випадку глибоких ніш при досить низьких значеннях числа Рейнольдса домінуючий вклад в звукове поле вносить третій член  $n = 3$ . Так при  $Re = 3132$  ця частота складає 10.83 кГц. Із зростанням швидкості потоку третя частота ( $n = 3$ ) зростає. Так при  $Re = 6264$  вона досягає 25.86 кГц, тобто виходить за межі діапазону чутних людським вухом частот. Отже, спостерігач чутиме вже плоску хвилю на другій частоті ( $n = 2$ ), яка в даному випадку дорівнює 17.24 кГц. При збільшенні швидкості потоку і, отже, значення числа Рейнольдса (у розглянутому прикладі  $Re = 8352$ , див. рисунок 7.13 г) головний вклад в звукове поле вже вноситиме перша частота ( $n = 1$ ), на якій пер-

ша мода ( $m=1$ ) стає біжучою. Ця частота дорівнює 13.5 кГц. Таким чином, має місце наступний ефект: із зростанням швидкості потоку частота чутного звуку росте доти поки значення числа Рейнольдса не досягне деякого критичного значення. Під час переходу числа Рейнольдса через це критичне значення частота звуку різко падає.

**Задача 2.** В цьому випадку нами також були проведені допоміжні розрахунки з метою вибору числа членів подвійних рядів, що входять в розв'язок (7.18) – (7.20), які необхідно враховувати для отримання розв'язку з прийнятною точністю. Було перевірено чисельне виконання граничних умов (7.6), (7.8), (7.9) і умов спряження полів (7.16), (7.17). В результаті, так само, як в задачі 1, в рядах по  $n$  підсумовувалось 20 членів. Для розв'язків у широких підобластях  $\phi^{(1)}$  і  $\phi^{(3)}$  в рядах по  $m$  враховувалося 360 членів, а у вузькій області  $\phi^{(2)}$  – 120 членів. Такого числа членів ряду достатньо для того, щоб адекватно задовольнити граничні умови і умови спряження. Нормовані інтегральні оцінки  $\delta_1$  і  $\delta_2$ , що описують розбіжність кривих на межах, не перевищували  $10^{-4}$  для потенціалів і  $10^{-2}$  для швидкостей.

Також з метою підтвердження коректності отриманих розрахункових даних, аналогічно тому як це було зроблено в задачі 1, нами був розрахований середній за період потік потужності звукового поля крізь два перерізи каналу. Один переріз розташовувався прямо на торці  $x'' = 0$ , а другий переріз на відстані  $x'' = -2$  м. Тобто перерізи знаходилися по різні сторони першого стенозу. Слід зазначити дуже хороший збіг результатів. Так само як і в задачі 1, відносна розбіжність при усіх розглянутих значеннях числа Рейнольдса не перевищувало  $10^{-10}$ .

Нагадаємо, що в задачі 2 за граничну умову на торці приймався профіль швидкості потоку у вхідному перерізі другого стенозу, а в задачі 1 – у вихідному перерізі. Вихори, генеровані в зсувних шарах в міжстенозній області, набігають потім на другий стеноз. При цьому частина вихорів зрізується передніми кромками стенозу і зноситься в міжстенозну порожнину, а частина відноситься потоком далі через отвір другого стенозу. При цьому основне збурення полів швидкості і тиску переймають на себе передні кромки друго-

го стенозу і вхідний переріз отвору. Цим пояснюється той факт, що амплітуда коливання профілю швидкості у вхідному перерізі отвору буде приблизно в 3 рази більше, ніж амплітуда коливання профілю у вихідному перерізі. А точки найбільшого збурення профілю швидкості будуть розташовані у безпосередній близькості до кромek стенозу, що видно при порівнянні рисунків 7.14 і 7.7. Цей факт говорить про те, що невідомі коефіцієнти розв'язку, тобто амплітуди хвиль, будуть гірше спадати як з номером частоти  $n$ , так і з номером моди  $m$ , ніж в задачі 1, і, отже, вклад більш високих мод на більш високих частотах в дальнє акустичне поле буде більш суттєвим.

Слід зазначити, що в області 1 максимальні номери біжучих мод  $M(n)$  визначаються, так само, як і в задачі 1, знаком квадрата  $\gamma_{nm}^{(1)2}$ . Тому номери  $M$  в області 1 будуть такі ж самі, як і ті, що наведені в таблиці 7.2, що являється абсолютно природним, оскільки геометрія областей ідентична. Однак, як було вказано вище, профіль швидкості, заданий в на торці  $x'' = 0$ , істотно відрізняється від того, який задавався в задачі 1, на торці  $x' = 0$ . Ця відмінність може привести до того, що вклад в звукове поле гармонік з більш високими номерами  $m$  на більш високих частотах  $n$  може бути істотно більший в цій задачі.

Табл. 7.4: Амплітуди коливань величин  $\phi^{(1)}$ ,  $p^{(1)}$  і  $u_{x''}^{(1)}$  для перших номерів частот  $n$  і номерів мод хвилевода  $m$ , що представляють біжучі хвилі

$$\text{Re} = 3132, D_4 = D_1$$

$n$	$m$	$ \phi^{(1)} $	$ p^{(1)} $	$ u_{x''}^{(1)} $
2	0	$3.58 \cdot 10^{-7}$	$2.12 \cdot 10^{-2}$	$4.95 \cdot 10^{-5}$
3	1	$1.05 \cdot 10^{-8}$	$9.34 \cdot 10^{-4}$	$1.18 \cdot 10^{-6}$
4	0	$7.41 \cdot 10^{-9}$	$8.75 \cdot 10^{-4}$	$2.05 \cdot 10^{-6}$
5	1	$3.52 \cdot 10^{-11}$	$5.19 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-8}$
6	0	$1.15 \cdot 10^{-8}$	$2.04 \cdot 10^{-3}$	$4.78 \cdot 10^{-6}$
6	2	$4.18 \cdot 10^{-8}$	$7.40 \cdot 10^{-3}$	$9.32 \cdot 10^{-6}$
7	1	$9.70 \cdot 10^{-11}$	$2.00 \cdot 10^{-5}$	$4.37 \cdot 10^{-8}$
8	0	$1.77 \cdot 10^{-8}$	$4.18 \cdot 10^{-3}$	$9.77 \cdot 10^{-6}$

8	2	$4.45 \cdot 10^{-8}$	$1.05 \cdot 10^{-2}$	$1.91 \cdot 10^{-5}$
---	---	----------------------	----------------------	----------------------

$$\text{Re} = 4176, D_4 = D_1$$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
2	0	$2.74 \cdot 10^{-7}$	$2.28 \cdot 10^{-2}$	$5.33 \cdot 10^{-5}$
3	1	$5.44 \cdot 10^{-10}$	$6.79 \cdot 10^{-5}$	$1.27 \cdot 10^{-7}$
4	0	$4.81 \cdot 10^{-8}$	$8.01 \cdot 10^{-3}$	$1.87 \cdot 10^{-5}$
4	2	$2.12 \cdot 10^{-7}$	$3.52 \cdot 10^{-2}$	$3.65 \cdot 10^{-5}$
5	1	$2.12 \cdot 10^{-9}$	$4.40 \cdot 10^{-4}$	$9.61 \cdot 10^{-7}$
...	...	...	...	...
9	5	$8.59 \cdot 10^{-7}$	$3.22 \cdot 10^{-1}$	$6.67 \cdot 10^{-5}$

$$\text{Re} = 6264, D_4 = D_1$$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
2	0	$3.49 \cdot 10^{-7}$	$4.73 \cdot 10^{-2}$	$1.11 \cdot 10^{-4}$
3	1	$4.57 \cdot 10^{-9}$	$9.28 \cdot 10^{-4}$	$2.02 \cdot 10^{-6}$
4	0	$9.44 \cdot 10^{-8}$	$2.56 \cdot 10^{-2}$	$5.98 \cdot 10^{-5}$
4	2	$2.21 \cdot 10^{-7}$	$5.97 \cdot 10^{-2}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$
5	1	$1.96 \cdot 10^{-9}$	$6.65 \cdot 10^{-4}$	$1.52 \cdot 10^{-6}$
5	3	$7.48 \cdot 10^{-9}$	$2.53 \cdot 10^{-3}$	$4.43 \cdot 10^{-6}$

$$\text{Re} = 8352, D_4 = D_1$$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
1	1	$1.64 \cdot 10^{-7}$	$1.80 \cdot 10^{-2}$	$3.08 \cdot 10^{-5}$
2	0	$6.23 \cdot 10^{-7}$	$1.37 \cdot 10^{-1}$	$3.19 \cdot 10^{-4}$
2	2	$1.66 \cdot 10^{-6}$	$3.64 \cdot 10^{-1}$	$6.23 \cdot 10^{-4}$
3	1	$2.58 \cdot 10^{-8}$	$8.50 \cdot 10^{-3}$	$1.94 \cdot 10^{-5}$
3	3	$1.00 \cdot 10^{-7}$	$3.30 \cdot 10^{-2}$	$5.66 \cdot 10^{-5}$

$$\text{Re} = 3132, D_4 = D_1/3$$

$n$	$m$	$ \phi $	$ p $	$ u_{x'} $
1	0	$8.01 \cdot 10^{-5}$	1.25	$2.92 \cdot 10^{-3}$
2	0	$1.55 \cdot 10^{-5}$	$4.83 \cdot 10^{-1}$	$1.13 \cdot 10^{-3}$
3	0	$1.90 \cdot 10^{-6}$	$8.89 \cdot 10^{-2}$	$2.08 \cdot 10^{-4}$

4	0	$3.73 \cdot 10^{-7}$	$2.33 \cdot 10^{-2}$	$5.45 \cdot 10^{-5}$
---	---	----------------------	----------------------	----------------------

Щоб визначити вклад хвиль в звукове поле хвилеводу, необхідно розрахувати їх амплітуди. Амплітуди  $\phi$ ,  $p$  і  $u_x''$  для різних номерів частоти  $n$  і номерів біжучих мод хвилеводу  $m$ , що представлені в таблиці 7.4. Видно, що звукове поле в області 1 принципово відрізняється від того, яке було описано в задачі 1. Навіть у разі глибоких міжстенозних ніш, коли вихори, генеровані в зсувних шарах, вибудовуються в шаховому порядку, найбільшу амплітуду можуть мати нульова і друга моди ( $m = 0$  і  $m = 2$ ). Так при  $Re = 3132$  виразно домінує плоска хвиля ( $m = 0$ ) на другій частоті ( $n = 2$ ). При збільшенні швидкості потоку ( $Re = 4176$  або  $Re = 6264$ ) істотним також стає вклад другої моди ( $m = 2$ ), яка стає біжучою хвилею на четвертій частоті ( $n = 4$ ). Крім того, слід зазначити, що у разі  $Re = 4176$  домінуючий вклад в дальнє звукове поле вносить непарна мода  $m = 5$ , яка стає біжучою на дев'ятій частоті  $n = 9$ . При подальшому збільшенні числа Рейнольдса (у розглянутому прикладі  $Re = 8352$ ) найбільшу амплітуду вже має не плоска хвиля ( $m = 0$ ), а друга мода ( $m = 2$ ), яка вже з'являється на другій частоті ( $n = 2$ ). Відповідно, вклад складових другої частоти в дальнє акустичне поле, як і раніше, залишається домінуючим, так само як і при нижчих значеннях числа Рейнольдса. В останній частині таблиці 7.4 представлені амплітуди хвиль для випадку мілких міжстенозних ніш  $D_4 = D_1/3$ . Видно, що найбільшу амплітуду має плоска хвиля з номером частоти  $n = 1$ . А амплітуди інших хвиль падають зі збільшенням номера частоти  $n$ .

Порівняємо дані таблиці 7.3 і таблиці 7.4 для випадку глибоких міжстенозних ніш, коли вихори, генеровані в міжстенозній області, шикуються в шаховому порядку. Можна бачити, що хоча амплітуда коливання профілю швидкості у вхідному перерізі отвору другого стенозу  $u_1^{(o)}$  буде приблизно в 3 рази більше, ніж амплітуда коливання профілю у вихідному перерізі  $u_2^{(o)}$ , амплітуда хвилі, що дає найбільший вклад в дальнє звукове поле, буде істотно вище в задачі 1, ніж в задачі 2. Фактично, в задачі 2 міжстенозний об'єм і перший стеноз грають роль фільтру, сильно зменшуючи амплітуди

непарних мод, які в задачі 1 давали найбільший вклад, а також збільшуючи амплітуди парних мод. У разі ж мілких ніш, коли збурення, генеровані в міжстенонній області, мають симетричний характер, непарні моди, взагалі, відсутні і ми можемо спостерігати протилежний ефект. Амплітуди відповідних хвиль в задачі 2 виявляються істотно вище, ніж в задачі 1.

З даних, представлених в таблиці 7.4, можна зробити наступний висновок. На відміну від задачі 1 в задачі 2 визначальний вклад в дальнє звукове поле в області 1 вносять парні моди. При цьому міжстенозна область і перший стеноз, крізь отвір якого хвилі проникають в область 1, грають роль фільтру, сильно зменшуючи амплітуди непарних мод і збільшуючи амплітуди парних. Якщо число Рейнольдса менше деякого критичного значення, то в області з глибокими міжстенонними нішами ( $D_4 = D_1$ ), де вихори, генеровані в зсувних шарах, розташовуються в шаховому порядку, домінуючий вклад в дальнє звукове поле в області 1 іносить плоска хвиля ( $m = 0$ ) з другою частотою ( $n = 2$ ). При збільшенні швидкості потоку, коли число Рейнольдса перевищує деяке критичне значення, головний вклад в дальнє звукове поле в області 1 вносить хвиля, що відповідає другій частоті і другій моді ( $n = 2, m = 2$ ). Крім того, слід зазначити, що в задачі 2 в певному діапазоні чисел Рейнольдса може виявитися, що істотний або навіть домінуючий вклад в звукове поле вносять більш високі моди (у розглянутому прикладі  $m = 5$ ) які з'являються в якості біжучих хвиль на більш високих частотах (у розглянутому прикладі  $n = 9$ ). В області з мілкими міжстенонними нішами ( $D_4 = D_1/3$ ), де збурення в зсувних шарах будуть симетричними відносно осі каналу, домінуючий вклад в дальнє звукове поле в каналі вносить плоска хвиля ( $m = 0$ ), що поширюється на першій частоті ( $n = 1$ ). На перших дев'яти частотах можуть поширюватися тільки нульові моди, а вклад хвиль в дальнє звукове поле зменшується з номером частоти  $n$ .

Природно, що із-за наявності дисперсії в ході поширення сигналу в ній накопичуються спотворення. Аналогічно тому, як це було зроблено в задачі 1, ми досліджували поширення коливань в області 1, описуючи часові

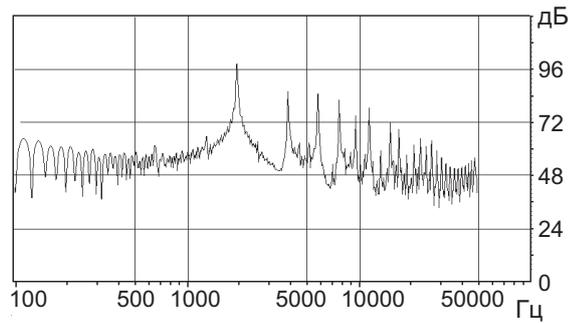


Рис. 7.17: Амплітудний спектр часової залежності коливальної швидкості у вибраній точці спостереження  $x'' = -2$  м,  $y'' = 9$  мм ( $Re = 3132$ ,  $D_4 = D_1/3$ ) залежності полів в трьох перерізах хвилеводу ( $x'' = -1$  м,  $-2$  м,  $-3$  м). На рисунках 7.15 а – г показано змінювання у часі профілю коливальної швидкості  $u_{x''}$  у середньому з вибраних перерізів  $x'' = -2$  м для випадку глибоких міжстенозних ніш ( $D_4 = D_1$ ). Уздовж осі абсцис відкладені значення швидкості в моменти часу від 0 до  $T$  з кроком  $T/16$ . При цьому відкинуто час поширення сигналу із швидкістю  $c$  від торця  $x'' = 0$  до точки спостереження  $x'' = -2$  м, тобто час  $|x''|/c$ .

Аналізуючи отримані результати, можна відзначити наступні характерні особливості структури сигналу. В усіх розглянутих випадках, за винятком випадку  $Re = 4176$ , профіль швидкості у вибраних перерізах є майже симетричним відносно осі каналу  $y'' = D_1/2$ . Цей факт говорить про те, що у полі коливальної швидкості виразно домінують парні моди, що знаходиться у відповідності до даних, наведених в таблиці 7.4. На рисунку 7.15 а видно, що при досить малих значеннях числа Рейнольдса ( $Re = 3132$ ) профіль коливальної швидкості досить точно визначається першими двома модами ( $m = 0$  і  $m = 2$ ). Із зростанням числа Рейнольдса істотним стає вклад і більш високих мод, у тому числі і непарних, які стають біжучими на більш високих частотах. Зокрема у розглянутому прикладі  $Re = 4176$  виразно видно п'яту моду  $m = 5$  при дев'ятій частоті  $n = 9$ . Аналогічно, на рисунку 7.15 д показано змінювання у часі профілю коливальної швидкості  $u_{x''}$  у середньому з вибраних перерізів  $x'' = -2$  м у разі мілких міжстенозних ніш ( $D_4 = D_1/3$ ). Очевидно, що профілі коливальної швидкості у вибраних

перерізах практично є плоскою хвилею, а основний вклад вносить хвиля з першою частотою ( $n = 1$ ), що також відповідає даним таблиці 7.4.

Для опису змінювання сигналу у часі в кожному з вибраних вище перерізів хвилеводу ( $x'' = -1$  м,  $-2$  м,  $-3$  м) була вибрана конкретна точка спостереження. В усіх розглянутих випадках, окрім  $Re = 4176$ , точка вибиралася на осі каналу, тобто з ординатою  $y'' = 9$  мм. У випадку  $Re = 4176$ , де домінуючим буде вклад непарної моди  $m = 5$ , точка вибиралася зі зміщенням від осі каналу на  $D_1/10$ , тобто з ординатою  $y'' = 7.2$  мм. Часові залежності коливальної швидкості в середній з обраних точок спостереження ( $x'' = -2$  м) приведені на рисунку 7.16.

Ці рисунки також демонструють, що в трьох розглянутих випадках (рисунки 7.16 а, в, г), коли число Рейнольдса менше за деяке критичне значення, домінуючий вклад в коливання вносить член з другою частотою ( $n = 2$ ). Причому, якщо в першому з цих трьох випадків вклад хвиль з більш високими частотами можна вважати несуттєвим, то при більш високих значеннях числа Рейнольдса вклад членів з високими номерами частот стає значним. У випадку  $Re = 4176$  (рисунок 7.16 б) найбільший вклад вносить хвиля з дев'ятою частотою ( $n = 9$ ). На рисунку 7.16 д показано часову залежність коливальної швидкості в середній з вибраних точок ( $x'' = -2$  м) у випадку мілких ніш ( $D_4 = D_1/3$ ). Видно, що в даному випадку головний вклад в дальнє звукове поле вносить член з першою частотою  $n = 1$ . При цьому вклад членів з більш високими номерами частот буде набагато нижчий в порівнянні з розглянутими вище випадками глибоких міжстенозних ніш, де вклад високочастотних членів був істотним. Представлені результати також знаходяться в повній відповідності з даними, приведеними в таблиці 7.4.

Аналогічно тому, як це було зроблено в задачі 1, нами були розраховані амплітудні спектри кривих, представлених на рисунку 7.16. Вони повністю підтверджують результати, представлені вище. В якості прикладу на рисунку 7.17 показано спектр кривої рисунка 7.16 д. Видно, що у разі дрібних міжстенозних ніш спектр багато в чому нагадує той, який був представлений для задача 1 на рисунку 7.13. Амплітуда хвилі з першою частотою буде

Табл. 7.5: Акустична потужність в задачах 1 і 2, кінетична потужність струменя

Re	$W_c^{(1)}$ (Вт)	$W_c^{(2)}$ (Вт)	$W_k$ (Вт)	$\eta$
3132	$1.14 \cdot 10^{-7}$	$2.25 \cdot 10^{-8}$	0.687	$1.99 \cdot 10^{-7}$
4176	$3.04 \cdot 10^{-7}$	$2.59 \cdot 10^{-7}$	1.63	$3.45 \cdot 10^{-7}$
6264	$2.96 \cdot 10^{-7}$	$2.57 \cdot 10^{-7}$	5.49	$1.01 \cdot 10^{-7}$
8352	$4.29 \cdot 10^{-5}$	$5.31 \cdot 10^{-6}$	13.02	$3.70 \cdot 10^{-6}$
3132	$4.03 \cdot 10^{-7}$	$7.61 \cdot 10^{-5}$	0.687	$1.11 \cdot 10^{-4}$

найбільшою. Із зростанням номера частоти амплітуди зменшуються.

**Акустична ефективність.** Тепер визначимо яка буде ефективність перетворення кінетичної енергії струменя в акустичну енергію. Іншими словами, яка частина кінетичної енергії струменя перетворюється на акустичну енергію. Коефіцієнт перетворення енергії визначається, як відношення акустичної потужності до кінетичної потужності струменя [2], [305]:

$$\eta = \frac{W_c}{W_k}, \quad (7.31)$$

де акустична потужність складається з двох частин (задача 1 і 2) :  $W_c = W_c^{(1)} + W_c^{(2)}$ . Тут обоє доданків визначаються по формулі (7.26). А кінетичну потужність струменя природно визначити через швидкісний напір в отворі стенозу  $\rho V_2^2$ , оскільки саме ця величина приймалася нами за масштаб тиску при обезрозмірюванні рівнянь Нав'є-Стокса. Остаточо маємо

$$W_k = \frac{\rho V_2^3 s}{2}, \quad (7.32)$$

де  $s = D_2 \cdot 1$  м - площа перерізу в отворі стенозу.

Розрахункові значення  $W_k$ ,  $W_c^{(1)}$ ,  $W_c^{(2)}$  приведені в таблиці 7.5. Видно, що у випадку глибоких міжстенозних ніш акустична ефективність істотно підвищується тільки в останньому з розглянутих випадків, коли з'являється біжуча хвиля з першою частотою ( $n = 1$ ). Також можна бачити, що акустична ефективність області з мілкими міжстенозними нішами буде приблизно на три порядки вище, ніж області з глибокими міжстенозними нішами.

## 7.6 Висновки до розділу

На основі підходу, представленого в [242], у даній роботі запропоновано аналогічний алгоритм оцінки характеристик звукового поля, що породжується течією в каналі з двома послідовно розташованими стенозами. Суть запропонованого алгоритму полягає в тому, що на початковому етапі у рамках моделі в'язкої нестисливої ньютонівської рідині описується течія в каналі із стенозами. Зокрема, були описані періодичні збурення течії, що виникають в зсувних шарах в міжстенозній області. Було показано, що у випадку глибоких міжстенозних ніш вихори, генеровані в зсувних шарах міжстенозної області, шикуються в шаховому порядку. А у випадку мілких міжстенозних ніш, ці збурення в зсувних шарах в міжстенозній області розташовуються симетрично відносно осі каналу.

В даному Розділі, у рамках другого етапу запропонованого алгоритму, на основі результатів розв'язання гідродинамічної задачі, представлених у попередньому Розділі, моделюється джерело акустичних коливань, що виникають в потоці. За таке джерело коливань приймається періодичне збурення рідкого об'єму, поміщеного в отворі другого стенозу, вихорами, генерованими в міжстенозній області. Акустична задача розв'язується для двох областей: для однорідного плоского каналу, що знаходиться вниз за течією від другого стенозу (задача 1), а також для області з геометричними неоднорідностями, що знаходиться вище по потоку від другого стенозу (задача 2). Для розв'язання цієї задачі застосовується метод часткових областей [239].

Для задачі 1 були встановлені наступні результати. Якщо число Рейнольдса менше деякого критичного значення, то в області з глибокими міжстенозними нішами ( $D_4 = D_1$ ), де вихори, генеровані у зсувних шарах, розташовуються в шаховому порядку, домінуючий вклад в дальнє звукове поле в каналі вносить хвиля з третьою частотою ( $n = 3$ ) і першою модою ( $m = 1$ ). При збільшенні швидкості потоку, коли число Рейнольдса перевищує деяке критичне значення, головний вклад в дальнє звукове поле в каналі вносить

хвиля, що відповідає першій частоті і першій моді ( $n = 1, m = 1$ ).

В задачі 2 визначальний вклад в дальнє звукове поле вносять парні моди. При цьому міжстенозний об'єм і перший стеноз, крізь отвір якого хвилі проникають в область 1, грають роль фільтру, зменшуючи амплітуди непарних мод і збільшуючи амплітуди парних. При малих значеннях числа Рейнольдса домінуючий вклад в дальнє звукове поле вносить плоска хвиля ( $m = 0$ ) на другій частоті ( $n = 2$ ). При збільшенні швидкості потоку, тобто із зростанням числа Рейнольдса росте вклад другої моди ( $m = 2$ ), яка стає біжучою на четвертій частоті ( $n = 4$ ). При подальшому збільшенні швидкості потоку, коли число Рейнольдса перевищує деяке критичне значення, головний вклад в дальнє звукове поле вносить друга мода, яка стає біжучою вже на другій частоті ( $m = 2, n = 2$ ). Крім того, слід зазначити, що в певному діапазоні чисел Рейнольдса може виявитися, що істотний або навіть домінуючий вклад в звукове поле вноситимуть більш високі моди, які з'являються в якості біжучих хвиль на більш високих частотах (у розглянутому прикладі  $n = 9, m = 5$ ).

У області з мілкими міжстенозними нішами ( $D_4 = D_1/3$ ), де збурення в зсувних шарах будуть симетричними відносно осі каналу, домінуючий вклад в дальнє звукове поле в каналі вносить плоска хвиля ( $m = 0$ ), що поширюється на першій частоті ( $n = 1$ ). Вклад хвиль в дальнє звукове поле зменшується з номером частоти  $n$ .

Акустична ефективність області з мілкими міжстенозними нішами (де періодичні збурення потоку, що з'являються в міжстенозній області, будуть симетричними відносно осі каналу) буде приблизно на три порядки вище, ніж області з глибокими міжстенозними нішами (де вихори, що з'являються в міжстенозній області, розташовуються в шаховому порядку).

## Розділ 8

# Контроль випромінювання звуку потоком в нерегулярному каналі

### 8.1 Вступ до розділу

Прийнято вважати, що нерегулярними каналами є канали, які мають геометричні або фізичні локальні особливості. Наприклад, злам, різкі розширення або звуження, розгалуження, зміни фізичних властивостей стінок і так далі. Нас цікавитимуть нерегулярні канали, у яких є два різкі звуження, віддалених один від одного на відстань, порівняну з шириною каналу. Добре відомо, що при русі потоку рідини або газу по такому каналу в результаті взаємодії потоку з цими звуженнями можуть виникати значні звукові коливання [2, 35, 297, 306]. Необхідно сказати, що канали подібного роду представляють інтерес, як для фізики, так і для техніки.

Історично склалося так, що на початку канали з двома звуженнями знайшли застосування в кустарних пристроях, за допомогою яких мисливці, створюючи характерний свист, приманювали птахів (такий пристрій називається ман'ок або п'щик [2]). А пізніше, при створенні різних сигнальних свистків і потужних гудків в залізничному і морському транспорті. Очевидно, що при створенні таких свистків і гудків, необхідно домагатися максимальної ефективності перетворення енергії потоку в звукову енергію.

Іншою, порівняно новою областю техніки, в якій знайшли застосуван-

ня канали з двома звуженнями являються твердопаливні ракетні двигуни [307–309]. Саме в області між звуженнями відбувається горіння палива, а роль звужень виконують рухливі заслінки, які змінюють переріз звужень і тим самим, регулюють величину тяги ракетного двигуна. Однак, при цьому потік гарячих газів може збудити потужні звукові коливання і, відповідно, вібрації заслінок, що у свою чергу може призвести до порушення штатних режимів подання палива і величини тяги і, навіть, до руйнування заслінок. Абсолютно очевидно, що при створенні таких ракетних двигунів необхідно домагатися мінімальної ефективності перетворення енергії потоку в звукову енергію або, можливо, взагалі недопущення збудження звукових коливань.

Мета цього Розділу – показати як, за допомогою раціонального вибору геометричних параметрів області між звуженнями, можна керувати потоком і, відповідно, рівнем випромінюваної ним звукової енергії. Ця проблема вирішувалась на основі чисельного розв’язання рівнянь Нав’є-Стокса для потоку в каналі з двома звуженнями і подальшого аналізу отриманих кількісних даних. Результати цього розділу опубліковані в статті [231].

## 8.2 Теорія

Розглянемо нерегулярний плоский канал з двома звуженнями, віддаленими один від одного на відстань порівняну з шириною каналу, див. рисунок 8.1. Вважатимемо, що потік, який рухається зі швидкістю  $V_1$ , набігає на звуження з боку від’ємних значень осі  $Ox$ . В Розділі 1 і статтях [233, 310] дуже детально описано метод оцінки гідродинамічних і звукових характеристик потоку в подібних каналах. Тому на ньому ми зупинятися не будемо, а лише вкажемо, що задача розв’язується в два етапи: на першому етапі чисельним методом скінченних об’ємів розв’язується нестационарна система рівнянь Нав’є-Стокса, а на другому етапі, на основі обчислених гідродинамічних характеристик, оцінюється генероване потоком звукове поле. При цьому використовуються наступні гіпотези: потужність звуку, що породжується потоком, мала в порівнянні з потужністю потоку, що набігає на звуження, і

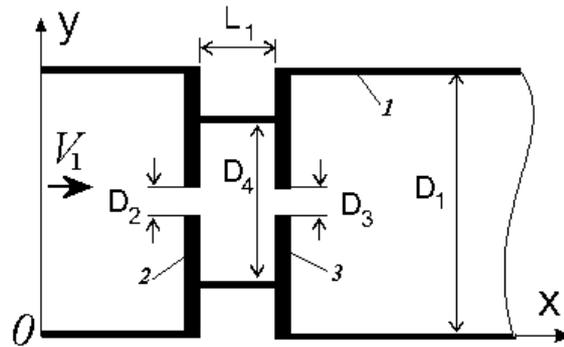


Рис. 8.1: Нерегулярний канал з двома звуженнями: 1 - стінки каналу, 2 - перше (по потоку) звуження, 3 - друге звуження

породжений звук не впливає на характер самого потоку.

### 8.3 Аналіз чисельних результатів

У Розділі 6, а також в роботах [2, 233, 310] показано, що починаючи з деяких критичних значень чисел Рейнольдса в області між звуженнями виникають гідродинамічні автоколивання. Для того, щоб зрозуміти фізичні причини їх появи розглянемо типове поле завихреності, що виникає в каналі з двома однаковими звуженнями при русі потоку з докритичними значеннями чисел Рейнольдса (див. рисунок 8.2 а). Як видно, перше звуження формує струмінь 1, на поверхнях якого утворюються два (верхній і нижній) ламінарних примежових шари. В процесі руху струменя в області між звуженнями він розширюється, а, отже, розширюються і примежові шари. Це приводить до того, що при вході струменя в друге звуження він розщеплюється. Одна (центральна) частина проходить в отвір другого звуження, а друга частина (позначена стрілкою 2) рухається вздовж стінок другого звуження, каналу і стінок першого звуження у зворотному напрямку і, зрештою, досягає початку (кореня) струменя.

Таким чином, ми маємо гідродинамічну систему з чітко вираженим зворотним зв'язком. Виникнення автоколивань, звичайно, буде істотно залежати від потужності зворотного потоку 2 і його фазових характеристик. Тут необхідно відразу зазначити, що на відміну від електронних приладів

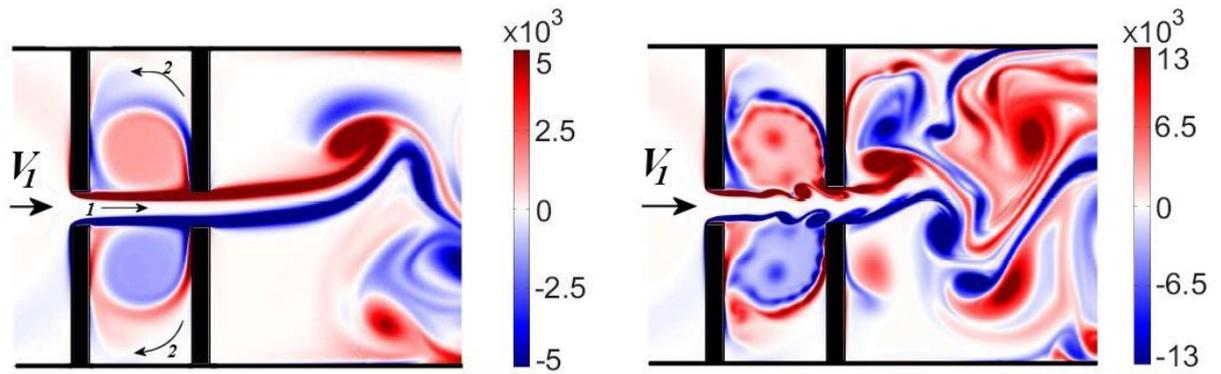


Рис. 8.2: Поле завихреності течії: а – при докритичних числах Рейнольдса, б – при  $Re = 4000$ ,  $L_1/D_1 = 0.32$ ,  $D_4/D_1 = 1$ ,  $D_1/D_2 = 9$ ,  $D_2 = D_3$

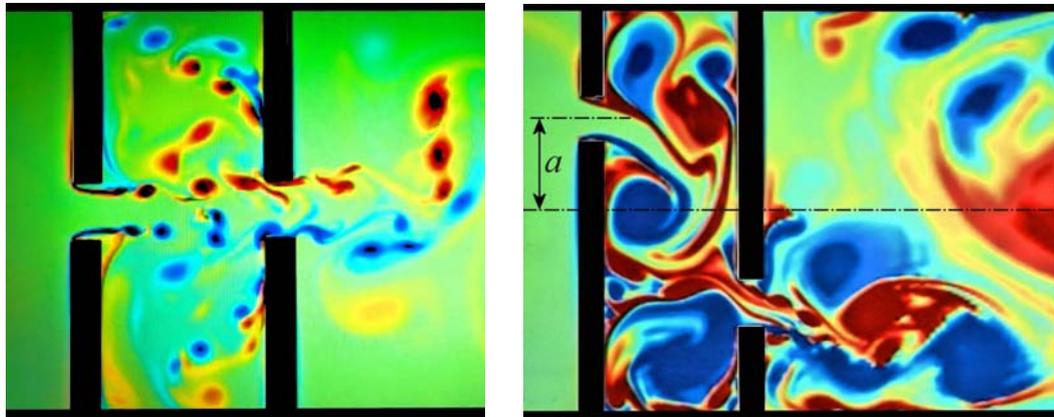


Рис. 8.3: Поле завихреності течії: а – при  $L_1/D_1 = 0.45$ , б – при  $a/D_1 = 0.25$  (інші параметри співпадають з тими, що задані на рисунку 8.2 б)

(наприклад, генераторів сигналів) з каналами зворотних зв'язків, де є можливість порівняно точно підібрати рівень і фазу сигналу зворотного зв'язку для забезпечення стійких автоколивань, в даній гідродинамічній системі здійснити це дуже непросто. І пов'язано це з тим, що в нашому випадку потік 2 розподілений в просторі і в кожній точці цього простору він характеризується своїм значенням швидкості тиску і завихреності. Тому до кореня струменя потік 2 доставляє суміш часток середовища, що мають різні гідродинамічні характеристики, а, отже, відповісти заздалегідь на питання виникнуть автоколивання або ні і яка буде їх потужність дуже складно. Тим не менше, природно припустити, що змінюючи геометричні характеристики області між звуженнями і самих звужень можна ефективно впливати на по-

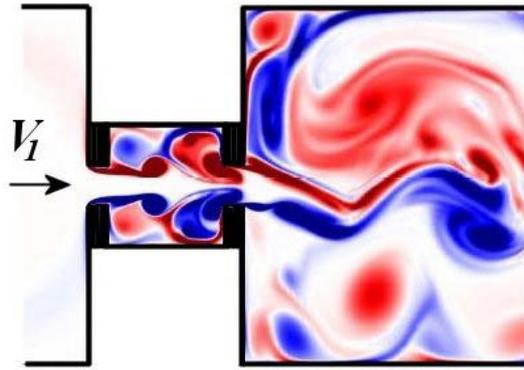


Рис. 8.4: Поле завихреності течії при  $D_4/D_1 = 0.33$  (інші параметри співпадають з тими, що задані на рисунку 8.2 б)

тік зворотного зв'язку і, тим самим, впливати на енергетику автоколиваний і генерований ними рівень звукових коливань. Покажемо цю можливість на конкретних прикладах.

На рисунку 8.2 б наведено поле завихреності при  $Re = 4000$  (число Рейнольдса обчислювалось по довжині  $L_1$ ). При вибраних геометричних параметрах, енергії в потоці зворотного зв'язки 2 досить щоб в області між звуженнями впливати на корінь струменя, внаслідок чого в зсувних шарах утворюється характерна послідовність вихорів. При цьому ряди вихорів у верхньому і нижньому зсувних шарах розташовуються один відносно одного в шаховому порядку. Набігаючи на друге звуження, ці вихори викликають антисиметричні практично гармонійні коливання вертикального профілю швидкості в другому звуженні, внаслідок чого збуджуються звукові хвилі. Оскільки коливання профілю швидкості антисиметричні, звукове джерело в звуженні має дипольний характер. І хоча дипольні джерела не є ефективними джерелами звуку, проте, враховуючи велику потужність потоку газів в камерах згорання твердопаливних двигунів ракет перетворення навіть невеликої долі енергії цього потоку в звукову енергію може викликати в камерах згорання звукові коливання достатні для руйнування заслінок, що регулюють тягу двигунів, про що неодноразово вказувалося в [307–309].

У роботі [60] встановлено, що збільшення відношення  $L_1/D_1$  призводить до руйнування впорядкованої вихрової структури в області між звуження-

ми і, відповідно, до різкого зниження випромінюваної звукової енергії. Дійсно, якщо порівняти рисунки 8.3 а і 8.2 б, то стає очевидним, що вже при  $L_1/D_1 = 0.45$  (при інших рівних параметрах) потоки зворотного зв'язку у верхній і нижній половинах області між звуженнями стають абсолютно різними і не прямують до кореня струменя. Внаслідок цього впорядкована вихрова структура в зсувних шарах практично повністю руйнується. Додаткові розрахунки показують, що в цьому випадку коливання вертикальних профілів швидкості в другому звуженні стають безладними і звукова енергія знижується майже на порядок.

Можна вказати ще два способи, які дозволяють істотно ослабити зворотний зв'язок, що приводить до різкого зниження енергії звукоутворення. Перший спосіб очевидний і полягає в розширенні другого звуження, тобто до збільшення відношення  $D_3/D_2$ . Вже при  $D_3/D_2 \geq 1.3$  струмінь практично не буде розщеплюватись на другому звуженні і повністю проскакуватиме через звуження, не утворюючи потік зворотного зв'язку.

Другий спосіб припускає зміщення звужень відносно осі даного каналу. В цьому випадку геометрія верхньої і нижньої областей, де існують потоки зворотного зв'язку, будуть різними, а, отже, час їх приходу до кореня струменя буде некорельованим, а, отже, будуть відсутні умови для збудження автоколивань. Як приклад, на рисунку 8.3 б представлено поле завихреності при зміщенні першого звуження вгору а другого звуження вниз відносно осі симетрії каналу. Тут добре видно, що в зсувних шарах струменя впорядкованих вихрових структур не спостерігається і вони мають хаотичний характер. Тому і звукові ефекти будуть незначні.

Досі ми обговорювали питання зниження рівня випромінювання звуку в розглянутому каналі. Тепер розглянемо можливості його збільшення. Виконаний вище аналіз дозволяє припустити, що для підвищення ефективності перетворення енергії потоку в звукову енергію необхідно забезпечити досить сильний і стійкий потік зворотного зв'язку. Одним з очевидних шляхів є зменшення об'єму області між звуженнями, наприклад, за рахунок зменшення розміру  $D_4$ . В якості ілюстрації такої можливості на рисунку 8.4 на-

ведено поле завихреності при  $D_4/D_1 = 0.33$ . Тут добре видно, що в зсувних шарах струменя утворюються симетричні пари вихорів і тому вертикальні профілі швидкості в другому звуженні також будуть симетричними відносно осі симетрії даного каналу.

А це у свою чергу забезпечує умови появи в другому звуженні звукового джерела монопольного типу. Додаткові розрахунки показали, що при такій геометрії каналу рівень випромінюваного звуку збільшився більш ніж на порядок по порівнянню з каналом, зображеним на рисунку 8.2 б.

## 8.4 Висновки до розділу

Розглянуто методи управління потоком і випромінюваною їм звуковою енергією в нерегулярному каналі, що містить два звуження. Показано, що одним з ефективних методів є раціональний вибір геометрії області між звуженнями і розташуванням отворів звужень. Зокрема встановлено, що для зниження випромінюваної потоком звукової енергії необхідно збільшувати об'єм області між звуженнями і зміщувати отвори звужень відносно осі симетрії каналу. І, навпаки, для збільшення випромінюваної потоком звукової енергії необхідно зменшувати об'єм області між звуженнями.

Проведений якісний аналіз дає важливу інформацію для організації обчислювальних процедур, що забезпечують отримання кількісних оцінок характеристик звукового поля.

## Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню процесів генерації звуку потоками, що набігають на тверді перешкоди. В роботі отримано такі наукові результати:

1. Побудовано алгоритм розв'язання задач про генерацію звуку потоками, що набігають на тверді тіла. Побудований алгоритм належить до числа гібридних методів, які дозволяють розкласти задачу про генерацію звуку потоком на два етапи. На першому етапі розраховується гідродинаміка потоку середовища, на другому етапі – характеристики акустичного поля, генерованого потоком. При чисельному моделюванні динаміки двовимірних течій рідини використовувалася техніка прямого чисельного моделювання. Необхідна точність розрахунків в розглянутому діапазоні чисел Рейнольдса досягалась шляхом поліпшення розрахунковою сітки. У випадку тривимірних течій методи DNS використовувалися тільки в ламінарних режимах течії. При турбулентних режимах ми використали метод великих вихорів (LES). Річ у тому, що тривимірні течії є на порядок вимогливішими до комп'ютерних ресурсів і, отже, досягти бажаної точності чисельного моделювання шляхом простого збільшення числа вузлів розрахункової сітки неможливо. Обчислення проводилися на кластерному суперкомп'ютері Скіт Інституту кібернетики НАН України. Для розпаралелювання обчислень використовувалась технологія MPI. Розпаралелювання проводилось за принципом геометричного паралелізму. При проведенні чисельних розрахунків використовувались обчислювальні процедури тулбокса з відкритим кодом OpenFOAM. На другому етапі побудова-

ного нами гібридного алгоритму розв'язувались акустичні задачі. При розв'язанні акустичних задач будувались аналітичні розв'язки для відповідних граничних задач для хвильового рівняння.

2. Розв'язано задачу про генерацію еолових тонів, що виникають при обтіканні циліндра потоком. Цю задачу розв'язано в першу чергу з метою тестування побудованого чисельного алгоритму. Отримано основні гідродинамічні характеристики, у тому числі коефіцієнти лобового опору і підйомної сили, а також описано процес коливання у часі сил, прикладених до циліндра. Описано процес періодичної зміни у часі розподілу тиску на поверхні циліндра. Отримано значення числа Струхалія при різних значеннях числа Рейнольдса. Проведено порівняльний аналіз цих даних з теоретичними і експериментальними даними, отриманими іншими авторами. Встановлено, що побудований нами алгоритм чисельного розв'язання задачі дозволяє адекватно описати досліджувану течію в діапазоні  $50 \leq Re \leq 400$ , в якому реалізується режим течії з періодичним відривом вихорів за циліндром. На другому етапі, використовуючи дані про розподіл тиску на поверхні циліндра в якості граничної умови, розв'язано задачу про випромінювання звуку потоком, що набігає на циліндр. Дані чисельних розрахунків підтвердили правильність зроблених припущень. Зокрема показано, що повна акустична потужність еолового тону на вісім порядків менше потужності потоку, що набігає на циліндр. Отримано просторові розподіли звукового поля (діаграми спрямованості) при різних значеннях числа Рейнольдса. Показано, що вісь діаграми спрямованості першої гармоніки еолового тону ( $p_1$ ), збуджуваної коливаннями підйомної сили, розташована перпендикулярно напрямку потоку, а вісь діаграми спрямованості другої гармоніки еолового тону ( $p_2$ ), що збуджується коливаннями сили лобового опору, співпадає з напрямком потоку. Встановлено, що  $p_2/p_1 \ll 1$ , проте із зростанням числа Рейнольдса відношення гармонік  $p_2/p_1$  зростає.

3. Розв'язано задачу про генерацію звуку (клинових тонів) затопленим струменем, що натікає на гострий клин. На першому етапі шляхом прямого чисельного моделювання нестационарної системи рівнянь Нав'є-Стокса розв'язано задачу гідродинаміки про натікання затопленого струменя, сформованого вузьким каналом (соплом), на гострий жорсткий клин. Описано основні гідродинамічні характеристики даної течії. Отримано і проаналізовано залежності полів завихреності і полів тиску від часу в течія перехідного процесу, що приводить до збудження поперечних коливань струменя. Досліджено також процес усталених автоколивань струменя. Зокрема встановлено, що впродовж перехідного процесу роль гідродинамічного каналу зворотного зв'язку виконують вихрові утворення, що виникли у момент первинного натікання струменя на клин, рухаються проти течії і притискаються до граней клину. Коли ж процес автоколивань встановився, гідродинамічний канал зворотного зв'язку формується за рахунок різниці тисків на гранях клину і періодичної зміни їх знаку, що викликає періодичний (знакозмінний) потік середовища з однієї грані клину на іншу грань і, як наслідок, періодичні поперечні коливання струменя. Отримано основні гідродинамічні характеристики, у тому числі коефіцієнти лобового опору і підйомної сили  $C_x$  і  $C_y$ , а також описано процес коливання у часі сил, прикладених до клину. Описано процес періодичної зміни в часі розподілу тиску на поверхні клину. Отримано значення числа Струхалія  $St$  при різних значеннях числа Рейнольдса  $Re$ . Порівняння теоретично оціненого, такого важливого інтегрального параметра, як частота автоколивань струменя, з експериментальним значенням частоти показує їх збіг. На другому етапі, використовуючи дані про розподіл тиску на поверхні клину в якості граничної умови, розв'язано акустичну задачу про випромінювання звуку затопленим струменем, що набігає на клин. Дані чисельних розрахунків підтвердили правильність зроблених припущень. Зокрема показано, що повна акустична потужність клинового тону на вісім порядків менше потужності струменя, що набігає на

клин. Отримано просторові розподіли звукового поля (діаграми спрямованості) при різних значеннях числа Рейнольдса. Показано, що вісь діаграми спрямованості клинового тону  $p_1$ , збуджуваного коливаннями підйомної сили, розташована перпендикулярно до напрямку потоку, а вісь діаграми спрямованості клинового тону  $p_2$ , збуджуваного коливаннями сили лобового опору, співпадає з напрямком потоку. Встановлено, що  $p_2/p_1 \ll 1$ , проте із зростанням числа Рейнольдса відношення  $p_2/p_1$  зростає.

4. Чисельно розв'язано задачу про обтікання кругового циліндра з плоским спліттером, приєднаним з тильного боку циліндра. Описано змінювання полів завихреності і картин ліній струму протягом перехідного процесу формування і початку відриву вихорів за циліндром. Також описано процес усталених автоколивань потоку, викликаний періодичним зривом вихорів. Гідродинамічний канал зворотного зв'язку формується за рахунок різниці тисків на верхній і нижній поверхнях циліндра і спліттера і періодичної зміни її знаку, що і викликає періодичний процес утворення і зриву вихорів. Приведено розрахункові дані основних характеристик течії для різних довжин спліттера, а також для випадку, коли спліттер повернуто під кутом до напрямку течії. Показано, що наявність спліттера, розташованого вздовж потоку, істотно знижує опір циліндра і амплітуду коливання сил, прикладених до нього. Причому із зростанням довжини спліттера середнє значення сили опору монотонно зменшується. В той час, як амплітуди коливання сил, прикладених до тіла, що обтікається, змінюються немонотонно. Показано також, що при повороті спліттера на порівняно невеликий кут  $\alpha = 20^\circ$  процес зриву вихорів з поверхні тіла також спостерігається, проте такий процес вже не буде строго регулярним і періодичним. Також слід зазначити, що періодична зміна тиску на сторонах циліндра і спліттера є джерелом звукових коливань дипольного типу, який неодноразово експериментально спостерігався багатьма дослідниками.

5. Розглянуто задачу обтікання сфери в широкому діапазоні значень числа Рейнольдса від ламінарного безвідривного режиму течії, до турбулентних режимів. Побудований в роботі чисельний алгоритм дозволив адекватно описати течію в усіх відомих докритичних режимах. Було показано хорошу відповідність отриманих нами результатів з результатами інших авторів. Також був визначений діапазон чисел Рейнольдса, в якому в потоці виникають автоколивання і, отже, такий потік може породжувати звук. Були описані як одночастотні, так і багаточастотні коливальні режими. Також було встановлено, що в ламінарному режимі течії амплітуда коливань бічної сили, прикладеної до сфери, приблизно в п'ять разів перевищує амплітуду коливань сили опору. Цей факт дозволяє припустити, що, як і у випадку обтікання кругового циліндра, основна частина акустичної енергії, генерованої потоком при обтіканні сфери, випромінюватиметься у бічному напрямку. При турбулентних режимах течії вихори, що зриваються, по формі близькі до вихрових кілець і, отже, ми маємо право очікувати, що основна частина акустичної енергії, генерованої потоком при обтіканні сфери, випромінюватиметься у напрямку потоку. Отримані діаграми спрямованості звукового поля. Знайдено діапазон чисел Рейнольдса, у якому сфера, що обтікається, випромінює як диполь. Показано, що вісь діаграми спрямованості розташована не перпендикулярно напрямку потоку, як у випадку обтікання кругового циліндра, а під деяким кутом нахилу. Цей ефект має місце через те, що вихрові петлі, які зриваються з поверхні сфери, не будуть антисиметричні, як у випадку обтікання циліндра. Для гармоніки  $p_2$  діаграма спрямованості має складніший вид, ніж в задачі про обтікання циліндра. Акустична енергія випромінюється як у бічному напрямку, так і у напрямку потоку.
6. Проведено пряме чисельне моделювання течії в'язкої нестисливої рідини в плоскому каналі за наявності розташованих один за одним двох стенозів. Отримано картини ліній струму і полів завихреності. Проаналізовано особливості руху середовища в таких каналах залежно від

швидкості потоку. Встановлено, що при відносно малих числах Рейнольдса ( $Re \leq 2088$ ) течія рідини в області між стенозами стаціонарна і характеризується наявністю в міжстенозній області швидкісного струменя, що витікає з вхідного отвору першого стенозу і втікає в отвір другого стенозу. При цьому на поверхнях струменя з'являються стійкі зсувні шари, утворені примежовими шарами, що сходять з передньої кромки отвору першого стенозу. Зсувні шари розщеплюються передніми кромками другого стенозу, внаслідок чого в нішах (вище і нижче струменя) утворюються циркуляційні рухи середовища, які переносять частину кінетичної енергії струменя назад до кореня струменя. Це перенесення енергії можна інтерпретувати як гідродинамічний канал зворотного зв'язку, що дозволяє викликати автоколивання в даній системі. Показано, що при збільшенні числа Рейнольдса, коли енергія в каналі зворотного зв'язку виявляється достатньою, циркуляційні рухи в нішах починають діяти на зсувні шари, внаслідок чого вони втрачають стійкість. Втрата стійкості обумовлює запуск процесу утворення в кожному зі зсувних шарів послідовного ряду вихорів, які розташовуються один відносно одного в шаховому порядку. Набігаючи на отвір другого стенозу, ці вихори викликають періодичні антисиметричні коливання профілю швидкості в отворі. Встановлено, що період коливань профілю швидкості на виході з отвору другого стенозу закономірно зменшується із зростанням швидкості потоку. З'ясовано, що при відносно високих швидкостях потоку ( $Re \geq 10440$ ) періодичний характер течії порушується. Автоколивання в системі перестають бути строго періодичними, тобто мати одну характерну частоту. При цьому спостерігаються різні режими течії, які доволіно перемикаються між собою. В результаті цього автоколивання характеризуються не однією частотою, а рядом частот. Окремо розраховані і проаналізовані особливості руху середовища в залежності від ширини каналу в міжстенозній частині. Встановлено, що при досить малих числах Рейнольдса (у розглянутому прикладі  $Re = 3132$ ) і при досить вузькій міжстено-

зній частині каналу (у розглянутому прикладі ширина отвору і глибина міжстеннозній порожнині співвідносилися як  $1/1$ ) в зсувних шарах в міжстеннозній області будуть періодично в часі генеруватися вихрові структури симетричні відносно осі каналу. А, отже, і в коливаннях профілю швидкості в отворі другого стенозу домінуватиме симетрична частина. Також показано, що зі збільшенням ширини міжстеннозної частини каналу картина течії принципово міняється. У зсувних шарах в міжстеннозній області утворюються два ряди вихорів. Ці вихори розташовуються один відносно одного у шаховому порядку. Такі вихори, набігаючи на другий стеноз, викликають антисиметричні періодичні коливання профілю швидкості в отворі другого стенозу. Автоколивання профілю швидкості в отворі другого стенозу в принципі можуть служити джерелом звукових коливань в каналі.

7. Проведено розрахунок характеристик звукового поля, що породжується течією в каналі з двома послідовно розташованими стенозами. На основі результатів розв'язання відповідної гідродинамічної задачі, моделюється джерело акустичних коливань, що виникають у такій системі. Таким джерелом коливань буде періодичне збурення рідкого об'єму, поміщеного в отвір другого стенозу, вихорами, генерованими в міжстеннозній області. Акустична задача розв'язується для двох областей: для однорідного плоского каналу, що знаходиться вниз за течією від другого стенозу (задача 1), а також для області з геометричними неоднорідностями, що знаходиться вгору по потоку від другого стенозу (задача 2). Для розв'язання цієї задачі застосовується метод часткових областей. Для задачі 1 були встановлені наступні результати. Якщо число Рейнольдса менше деякого критичного значення, то в області з глибокими міжстеннозними нішами ( $D_4 = D_1$ ), де вихори, генеровані в зсувних шарах, розташовуються в шаховому порядку, домінуючий вклад в дальнє звукове поле в каналі вносить хвиля з третьою частотою ( $n = 3$ ) і першою модою ( $m = 1$ ). При збільшенні швидкості потоку, коли число Рейнольдса перевищує деяке критичне значення,

головний вклад у дальнє звукове поле в каналі вносить хвиля, що відповідає першій частоті і першій моді ( $n = 1, m = 1$ ). В задачі 2 визначальний вклад в дальнє звукове поле вносять парні моди. При цьому міжстенозний об'єм і перший стеноз, крізь отвір якого хвилі проникають в область, розташовану вище по потоку від стенозів, грають роль фільтру, зменшуючи амплітуди непарних мод і збільшуючи амплітуди парних. При малих значеннях числа Рейнольдса домінуючий вклад в дальнє звукове поле вносить плоска хвиля ( $m = 0$ ) на другій частоті ( $n = 2$ ). При збільшенні швидкості потоку, тобто із зростанням числа Рейнольдса, росте вклад другої моди ( $m = 2$ ), яка стає біжучою на четвертій частоті ( $n = 4$ ). При подальшому збільшенні швидкості потоку, коли число Рейнольдса перевищує деяке критичне значення, головний вклад в дальнє звукове поле вносить друга мода, яка стає біжучою вже на другій частоті ( $m = 2, n = 2$ ). Крім того, слід зазначити, що в певному діапазоні чисел Рейнольдса може виявитися, що істотний або навіть домінуючий вклад в звукове поле будуть вносити більш високі моди, які з'являються в якості біжучих хвиль на більш високих частотах (у розглянутому прикладі  $n = 9, m = 5$ ). В області з мілкими міжстенозними нішами, де збурення в зсувних шарах будуть симетричними відносно осі каналу, домінуючий вклад в дальнє звукове поле в каналі вносить плоска хвиля ( $m = 0$ ), що поширюється на першій частоті ( $n = 1$ ). Вклад хвиль в дальнє звукове поле зменшується з номером частоти  $n$ . Акустична ефективність області з мілкими міжстенозними нішами (де періодичні збурення потоку, що з'являються в міжстенозній області, будуть симетричними відносно осі каналу) буде приблизно на три порядки вище, ніж області з глибокими міжстенозними нішами (де вихори, що з'являються в міжстенозній області, шикуються у шаховому порядку).

8. Розглянуто методи управління потоком і випромінюваною їм звуковою енергією в нерегулярному каналі, що містить два звуження. Показано, що одним з ефективних методів є раціональний вибір геометрії області

між звуженнями і розташуванням отворів звужень. Зокрема встановлено, що для зниження випромінюваної потоком звукової енергії необхідно збільшувати об'єм області між звуженнями і зміщувати отвори звужень відносно осі симетрії каналу. І, навпаки, для збільшення випромінюваної потоком звукової енергії необхідно зменшувати об'єм області між звуженнями. Проведений якісний аналіз дає важливу інформацію для організації обчислювальних процедур, що забезпечують отримання кількісних оцінок характеристик звукового поля.

## Бібліографія

- [1] Притчи мидрашей. Сборник сказаний, притч, изречений. Москва: Неоглори, 2005. 368 с.
- [2] Вовк И. В., Гринченко В. Т. Звук, рожденный потоком. Киев: Наукова думка, 2010. 221 с.
- [3] Hankins T. L., Silverman R.J. Instruments and the Imagination. New Jersey: Princeton University Press, 1995. 352 с.
- [4] Большая советская энциклопедия. Т. 49. Москва: БСЭ, 1957. 692 с.
- [5] Lord Rayleigh O.M. F.R.S. Aeolian tones. *Philosophical Magazine Series* 6. 1915. V. 29, N 172. P. 433–444.
- [6] Большая советская энциклопедия. Т. 31. Москва: БСЭ, 1955. 645 с.
- [7] Большая советская энциклопедия. Т. 23. Москва: БСЭ, 1953. 635 с.
- [8] Матаушек И. Ультразвуковая техника. Москва: Гос. научн.-техн. изд. лит. по черной и цветн. металлургии, 1962. 511 с.
- [9] Ультразвук. Маленькая энциклопедия. Москва: Сов. энцикл., 1979. 400 с.
- [10] Edelmann M.Th. Studien zur erzeugung sehr hoher tone vermittels galtonpfeife. *Ann. Phys.* 1900. V. 2. P. 469–482.
- [11] Hartmann J., Mathes P. Die experimentelle grundlage zum entwurt des akustischen luftstrahlgenerators. *Akust. Z.* 1939. V. 4. P. 126–136.

- [12] Janovski W., Pohlman R. Schall und ultraschallerzeugung in flussigkeiten für industrielle zwecke. *Z. Angew. Phys.* 1950. V. 1. P. 222—228.
- [13] Allen C., Rudnick J. A powerful high frequency siren. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1947. V. 19. P. 857—865.
- [14] Handbuch der physik. 8. Akustik. Berlin, 1927. 328 s.
- [15] Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т.1. М-Л: Гос. Изд. Техничко-теоретич. лит., 1940. 503 с.
- [16] Тиндаль Д. Звук. М-Л: Гос. Изд., 1922. 328 с.
- [17] Вовк И. В. Физический взгляд на природу эоловых тонов. *Акустичний вісник*. 2007. Т. 10, N 2. С. 22—32.
- [18] Strouhal V. Uber eine besondere art der tonerregung. *Ann. Phys.* 1878. V. 5, N 10. P. 216—251.
- [19] Rayleigh J.W. The explanation of certain acoustical phenomana. *Nature*. 1878. V. 18. P. 319—321.
- [20] Rayleigh J.W. The explanation of certain acoustical phenomana. *Proc. Lond. Math. Soc.* 1899. V. 1. P. 402—414.
- [21] Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т.2. М-Л: Гос. Изд. Техничко-теоретич. лит., 1955. 474 с.
- [22] Константинов Б. П. Гидродинамическое звукообразование и распространение звука в ограниченной среде. Л.: Наука, 1974. 144 с.
- [23] Ричардсон Э. Динамика реальных жидкостей. Москва: Мир, 1965. 328 с.
- [24] Powell A. On the edgetone. *J. Acoust. Soc. Amer.*. 1961. V. 33, N 4. P. 395—409.

- [25] Powell A. Vortex action in edgetone. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1962. V. 34, N 2. P. 163–166.
- [26] Tam C. K. W. Discrete tones of isolated airfoil. *J. Acoust. Soc. Amer.*—1974.— 55, N 6.— P. 1173–1177.
- [27] Lucas M., Rockwell D. Self-excited jet: upstream modulation and multiple frequencies. *J. Fluid Mech.* 1984. V. 147. P. 333–352.
- [28] Staubli T., Rockwell D. Interaction of a unstable planar jet with an oscillating leading edge. *J. Fluid Mech.* 1987. V. 176. P. 135–167.
- [29] Crighton D. G. Basic principles of aerodynamic noise generation. *Prog. Aerospace Sci.* 1975. V. 16. P. 31–96.
- [30] Crighton D. G. The edge-tone feedback cycle; linear theory for the operating stages. *J. Fluid Mech.* 1992. V. 234. P. 361–391.
- [31] Elder S. A. On the mechanism of sound production in organ pipes. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. V. 54, N 6. P. 1554–1564.
- [32] Elder S. A. The mechanism of sound production in organ pipes and cavity resonators. *J. Acoust. Soc. Jpn.* 1992. V. 13, N 1. P. 11–23.
- [33] Chanaud R. C., Powel A. Some experiments concerning the hole and ring tone. *J.A.S.A.* 1965. V. 37. P. 902–911.
- [34] Wilson T. A., Beavers G. S., DeCoster M. A., Holger D. K., Regenfuss M. D. Experiments on the fluid mechanics of whistling. *J.A.S.A.* 1971. V. 50. P. 366–372.
- [35] Hourigan K., Welsh M. C., Thompson M. C., Stokes A. N. Aerodynamic sources of acoustic resonance in a duct with baffles. *J. Fluids and Structures.* 1990. V. 4. P. 345–370.
- [36] Rockwell D., Naudascher E. Self-sustained oscillations of impinging free shear layers. *Ann. Rev. Fluid. Mech.* 1979. V. 11. P. 67–94.

- [37] Rockwell D. Oscillations of impinging shear layers. *AIAA J.* 1983. V. 21. P. 645–664.
- [38] Krishnamurty, K. Acoustic radiation from two-dimensional rectangular cutouts in aerodynamic surfaces. N.A.C.A. Tech. Note no. 3487, 1955. 34 p.
- [39] Roshko, A. Some measurements of flow in a rectangular cutout. N.A.C.A. Tech. Note no. 3488, 1955. 22 p.
- [40] Plumblee, H. E., Gibson, J. S., Lassiter, L. W. A theoretical and experimental investigation of the acoustic response of cavities in an aerodynamic flow. U.S. Air Force Rep. WADD-TR-61-75, 1962. 153 p.
- [41] Rossiter, J. E. Wind tunnel experiments of the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. Aero. Rea. Counc. R. B M. no. 3438, 1966. 35 p.
- [42] Spee, B. M. Wind tunnel experiments on unsteady cavity flow at high subsonic speeds. National Aerospace Laboratory NLR. Report NLR MP 237, 1966. 34 p.
- [43] East, L. F. Aerodynamically induced resonance in rectangular cavities. *J. Sound Vib.* 1966. V. 3. P. 277–287.
- [44] Covert, E. E. An approximate calculation of the onset velocity of cavity oscillations. *A.I.A.A. J.* 1970. V. 8. P. 2189–2194.
- [45] Heller, H. H., Holmes, D. G., Covert, E. E. Flow-induced pressure oscillations in shallow cavities. *J. Sound Vib.* 1971. V. 18. P. 545–653.
- [46] Bilanin, A. J., Covert, E. E. Estimation of possible excitation frequencies for shallow rectangular cavities. *A.I.A.A. J.* 1973. V. 11. P. 347–351.
- [47] Heller, H. H., Bliss, D. B. The physical mechanism of flow induced pressure fluctuations in cavities and concepts for their suppression. *A.I.A.A. J.* Paper no. 75–491. 1975.

- [48] Block, P. J. W. Noise response of cavities of varying dimensions at subsonic speeds. N.A.S.A. Tech. Note D-8361, 1970. 35 p.
- [49] Tam C. K. W., Blick P. J. W. On the tones and pressure oscillations induced by flow over rectangular cavities. *J. Fluid Mech.* 1978. V. 89. P. 373—399.
- [50] Gharib, M., Roshko, A. The effect of flow oscillations on cavity drag. *J. Fluid Mech.* 1987. V. 177. P. 501—530.
- [51] Rowley, C. W., Colonius, T., Basu, A.J. On self-sustained oscillations in two-dimensional compressible flow over rectangular cavities. *J. Fluid Mech.* 2002. V. 455. P. 315—346.
- [52] Fuglsang D. F., Cain A. B. Evaluation of shear layer cavity resonance mechanisms by numerical simulation. AIAA Paper 92-0555. 1992.
- [53] Cain A., D., Rubio A., Bortz D. M., Banks H. T., Smith R. C. Optimizing control of open bay acoustics. AIAA Paper 2000-1928. 2000. 2000.
- [54] Larsson J., Davidson L., Olsson M., Eriksson L. Aeroacoustic investigation of an open cavity at low Mach number. *AIAA J.* 2004. V. 42. P. 2462—2473.
- [55] Shieh, C. M., Morris, P. J. Parallel Numerical Simulation of Subsonic Cavity Noise. AIAA Paper 99-1891. 1999.
- [56] Воропаев Г. А., Воскобойник А. В., Воскобойник В. А., Гринченко В. Т., Исаев С. А. Розумнюк Н. В. Источники псевдозвуковых пульсаций давления при обтекании сферической лунки. *Акуст. вісн.* Т. 11, N 3. 2008. С. 34—58.
- [57] Воропаев Г. А., Воскобойник А. В., Воскобойник В. А., Исаев С. А. Визуализация ламинарного обтекания овального углубления. *Прикл. гідромех.* Т. 11, N 4. 2009. С. 31—46.
- [58] Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. Москва: Наука, 1981. 206 с.

- [59] Смольяков А. В. Шум турбулентных потоков. С-Пб.: изд. ЦНИИ им. акад. А.Н.Крылова. 2005. 312 с.
- [60] Басовский В. Г., Вовк И. В., Вовк О. И. О возможности генерирования тональных звуковых колебаний потоком воздуха в бронхах со стенозом. *Акуст. Вісник*. 2003. Т. 6, N 1. С. 3–21.
- [61] Вовк И. В., Мацьпура В. Т. Моделирование механизма генерации везикулярных шумов дыхания. *Доп. НАНУ*. 2015. N 8. С. 28-34.
- [62] Oerlemans, S., Sijtsma, P., Lopez, B. M. Location and quantification of noise sources on a wind turbine. *J. Sound Vib*. 2006. V. 299. P. 869–883.
- [63] Brooks, T. F., Marcolini, M. A., Pope, D. S. Airfoil Self Noise and Prediction. NASA Reference Publication-1218, 1989. 142 p.
- [64] Verhoeven, O. Trailing edge noise simulations. MSc. Thesis. Delft: Delft University of Technology, 2011. 139 p.
- [65] Wagner, C. , Huttli, T., Sagaut, P. Large-Eddy Simulation for Acoustics. Cambridge University Press, 2007. 471 p.
- [66] Ewert, R., Schroder, W. Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering . *J. Comp. Phys*. 2003. V. 188. P. 365–398.
- [67] Ewert, R., Schroder, W. On the simulation of trailing edge noise with a hybrid LES/APE method. *J. Sound Vib*. 2004. V. 270. P. 509–524.
- [68] Lele, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys*. 1992. V. 103. P. 16–42.
- [69] Colonius, T., Lele, S. K., Moin, P. Sound generation in a mixing layer. *J. Fluid Mech*. 1997. V. 330. P. 375–409.

- [70] Rowley, C. W. Modeling, Simulation, and Control of Cavity Flow Oscillations. PhD. Thesis. Pasadena: California Institute of Technology, 2002. 172 p.
- [71] Bres, G. A. Numerical Simulations of Three-Dimensional Instabilities in Cavity Flows. PhD. Thesis. Pasadena: California Institute of Technology, 2002. 149 p.
- [72] Mitchell, B. E., Lele, S. K. Moin, P. Direct computation of Mach wave radiation in an axisymmetric supersonic jet, *AIAA Journal*. 1997. V. 35. P. 1574–1580.
- [73] Mankbadi, R. R., Hixon, R., Shih, S.-H. Povinelli, L. A. Use of linearized Euler equations for supersonic jet noise prediction, *AIAA Journal*. 1998. V. 36. P. 140–147.
- [74] Gloerfelt, X., Bailly, C., Juvé, D. Direct calculation of cavity noise and validation of acoustic analogies. Proc. of NATO/RTO Applied Vehicle Technology Panel. Symposium on Aging Mechanisms and Control, Development in Computational Aero- and Hydro-Acoustics. Manchester, UK, 2001. 12 p.
- [75] Gloerfelt, X., Bailly, C., Juvé, D. Direct computation of the noise radiated by a subsonic cavity flow and application of integral methods. *J. Sound Vibr.* 2003. V. 226. P. 119–146.
- [76] Gloerfelt, X., Bogey, C., Bailly, C. LES of the noise radiated by a flow over a rectangular cavity. ERCOFTAC Workshop on LES for Acoustics. DLR Göttingen, Germany. 2002. 12 p.
- [77] Gloerfelt, X., Bogey, C., Bailly, C. Numerical evidence of mode switching in the flowinduced oscillations by a cavity, *International Journal of Aeroacoustics*. 2003. P. 99–124.

- [78] Gloerfelt, X., Bogey, C., Bailly, C. Numerical Investigation of the Coexistence of Multiple Tones in Flow-Induced Cavity Noise. AIAA Paper 2003-3234. 2003.
- [79] Gloerfelt, X., Bogey, C., Bailly, C., Juvé, D. Aerodynamic Noise Induced by Laminar and Turbulent Boundary Layers over Rectangular Cavities. AIAA Paper 2002-2476. 2002.
- [80] Colonius, T., Basu, A. J., Rowley, C. W. Numerical Investigation of the Flow Past a Cavity. AIAA Paper 99-1912. 1999.
- [81] Colonius, T. An Overview of Simulation. Modeling and Active Control of Flow/Acoustic Resonance in Open Cavities. AIAA Paper 2001-0076. 2001.
- [82] Shieh, C. M., Morris, P. J. Parallel Computational Aeroacoustic Simulation of Turbulent Subsonic Cavity Flow. AIAA Paper 2000-1914. 2000.
- [83] Balsa, T. F., Glibe, P. R. Aerodynamics and noise of coaxial jets. *AIAA J.* 1997. V. 15. P. 1550–1558.
- [84] Tam, C. K. W., Auriault, L. Jet mixing noise from fine-scale turbulence. *AIAA Journal*. 1999. V. 37. P. 145–153.
- [85] Page, G. J., McGuirk, J. J., Behrouzi, P., Hossain, M. A CFD coupled acoustics approach for the prediction of coaxial jet noise. Proceedings of the NATO RTO-AVT Symposium on Ageing Mechanisms and Control, Part A – Developments in Aero and Hydro-Acoustics. Manchester, UK, 2001. 12 p.
- [86] Bailly, C., Lafon, P., Candel, S., Computation of subsonic and supersonic jet mixing noise using a modified  $k - \epsilon$  model for compressible free shear flows. *Acta Acustica* 1994. V. 2. P. 101–112.
- [87] Lemaire S., Heron N., Candel S., Bailly C., Christophe Bailly, Coaxial-jet-noise predictions from statistical and stochastic source models. AIAA Paper 2001-2205. 2001. 8 p.

- [88] Avital E. J., Sandham N. D., Luo K. H. Sound generation using data from direct numerical simulations of mixing layers. AIAA Paper 96-1778. 1996.
- [89] Phillips O. M. On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers. *J. Fluid Mech.* 1960. V. 9. P. 1–28.
- [90] Tam C. K. W. LES for Aeroacoustics. AIAA Paper 98-2805. 1998.
- [91] Uzun A., Blaisdell G. A., Lyrintzis A. S. 3-D large eddy simulation for jet aeroacoustics. AIAA Paper 2003–3322. 2003. 12 p.
- [92] Müller E. A., Obermeier F. Vortex sound. *Fluid Dyn. Res.* V. 3. P. 43–51.
- [93] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Москва: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
- [94] Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2007. 656 p.
- [95] Versteeg H. K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method. New York: Longman, 1995. 258 p.
- [96] Годунов С. К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики. *Мат. сборник.* 1959. Т. 47, N 3. С. 271–306.
- [97] Courant R., Isaacson E., Rees M. On the solution of non-linear hyperbolic differential equation by finite differences. *Comm. Pure Appl. Math.* 1952. V. 5. P. 243–255.
- [98] Lax P. D. Weak solutions of non-linear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm. Pure Appl. Math.* 1954. V. 7. P. 159–193.
- [99] Gentry R. A., Martin R. E., Daly B. J. An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems. *J. Comp. Physics.* 1966. V. 1. P. 87–118.

- [100] Lax P.D., Wendroff B. Systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.* 1960. V. 13. P. 217–237.
- [101] MacCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. AIAA Paper 69-354. 1969.
- доступно также в
- Caughey D. A. (ed), Hafez M. M. (ed). *Frontiers of computational fluid dynamics*. London: World Scientific. 2002. 524 p.
- [102] Lerat A., Peyret R. Noncentered schemes and shock propagation problems. *Computers and Fluids*. 1974. V. 2. P. 35–52.
- [103] MacCormack R. W. A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow. AIAA Paper 81-0110. 1981.
- [104] Lerat A. Implicit methods of second order accuracy for the Euler equations. *AIAA Journal*. 1985. V. 23. P. 33–40.
- [105] Beam R. M., Warming R. F. An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form. *J. Comp. Physics*. 1976. V. 22. P. 87–110.
- [106] Beam R. M., Warming R. F. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations. *AIAA Journal*. 1978. V. 16. P. 393–402.
- [107] Jameson A., Schmidt W., Turkel E. Numerical simulation of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes. AIAA Paper 81-1259. 1981.
- [108] Wong H. H., Raithby G. D. Improved finite-difference methods based on a critical evaluation of the approximating errors. *Numerical Heat Transfer. Part B: Fundamentals*. 1979. V. 2. P. 139–163.
- [109] Raithby G. D., Torrance K. E. Upstream-weighted schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow. *Computers and Fluids*. 1974. V. 2. P. 191–206.

- [110] Warming R. F., Beam R. M. Upwind second order difference schemes and applications in aerodynamic flows. *AIAA Journal*. 1976. V. 14. P. 1241–1249.
- [111] Leonard B. P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering*. 1979. V. 19. P. 59–98.
- [112] Raithby G. D. A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering*. 1976. V. 9. P. 75–103.
- [113] Raithby G. D. Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering*. 1976. V. 9. P. 153–164.
- [114] Van Leer B. Upwind and High-Resolution Methods for Compressible Flow: From Donor Cell to Residual-Distribution Schemes. *Commun. Comput. Phys.*. 2006. V. 1. P. 192–206.
- [115] Spalding D. B. A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *Int. J. Num. Meth. Engineering*. 1972. V. 4. P. 551–559.
- [116] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Москва: Мир, 1990. Т.2. 392 с.
- [117] Allen D. N. de G., Southwell R. V. Relaxation Methods Applied to Determine the Motion, in Two Dimensions, of a Viscous Fluid Past a Fixed Cylinder. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*. 1955. V. 8. P. 129–145.
- [118] Perić, M. A Finite Volume method for the prediction of three-dimensional fluid flow in complex ducts: PhD Thesis. London: Imperial College, 1985. 394 p.
- [119] Boris J. P., Book D. L. Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comp. Physics*. 1973. V. 11. P. 38–69.

- [120] Zalesak S. T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *J. Comp. Physics*. 1979. V. 31. P. 335–362.
- [121] Van Leer B. Towards the ultimate conservative differencing scheme. Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics ed. by H. Cabannes and R. Temem. Springer, 1973. V. 1. P. 163–168.
- [122] Van Leer B. Towards the ultimate conservative differencing scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *J. Comp. Physics*. 1974. V. 14. P. 361–370.
- [123] Van Leer B. Towards the ultimate conservative differencing scheme. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. *J. Comp. Physics*. 1977. V. 23. P. 263–275.
- [124] Van Leer B. Towards the ultimate conservative differencing scheme. IV. A new approach to numerical convection. *J. Comp. Physics*. 1977. V. 23. P. 276–299.
- [125] Van Leer B. Towards the ultimate conservative differencing scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method. *J. Comp. Physics*. 1977. V. 23. P. 101–136.
- [126] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Physics*. 1983. V. 49. P. 357–393.
- [127] Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numer. Analysis*. 1984. V. 21. P. 1–23.
- [128] Roe P. L. Large scale computations in fluid mechanics, Part 2. Lectures in Applied Mathematics. Springer. 1985. V. 22. P. 163–193.
- [129] Chakravarthy S. R., Osher S. High resolution application of the OSHER upwind scheme for the Euler equation. AIAA Paper 83-1943. 1983

- Chakravarthy S.R., Osher S. High resolution application of the Osher upwind scheme for the Euler equation. Proc. AIAA Comp. Fluid Dynamics conference. Danvers, MA, 1983. P. 363–372.
- [130] Osher S., Chakravarthy S. High resolution schemes and the entropy condition. *SIAM J. Numer. Analysis*. 1984. V. 21. P. 955–984.
- [131] Sweby P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *J. Numer. Anal.*. 1984. V. 21. P. 995–1011.
- [132] Waterson N.P., Deconinck H. Design principles for bounded higher-order convection schemes – a unified approach. *J. Comp. Physics*. 2007. V. 224. P. 182–207.
- [133] Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comp. Physics*. 1967. V. 2. P. 12–26.
- [134] Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*. 1965. V. 8. P. 2182–2189.
- [135] Patankar S. V., Spalding D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1972. V. 15. P. 1787–1806.
- [136] Van Doormal J. P., Raithby G. D. Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numer. Heat Transfer*. 1984. V. 7. P. 147–163.
- [137] Issa R. I. Solution of implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys.*. 1986. V. 62. P. 40–65.
- [138] Jang D. S., Jetli R., Acharya S. Comparison of the PISO, SIMPLER, and SIMPLEC algorithms for the treatment of the pressure-velocity coupling in steady flow problems. *Numer. Heat Transfer, Part A: Applications*. 1986. V. 10. P. 209–228.

- [139] Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part I. *J. Comput. Phys.*. 1966. V. 1. P. 119–143.
- [140] Rhie C. M., Chow W. L. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA J.*. 1983. V. 21. P. 1525–1532.
- [141] Ferziger J. H., Perić M. Computational methods for fluid dynamics, 3rd rev. ed. Berlin: Springer, 2002. 424 p.
- [142] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. Москва: Мир, 1980. 612 с.
- [143] <http://www.opencfd.co.uk/openfoam/>
- [144] Khosla P. K., Rubin S. G. A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. *Computers & Fluids*. 1974. V. 2. P. 207–209.
- [145] Hestens M. R. and Steifel E. L. Method of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Res.*. 1952. V. 29. P. 409–436.
- [146] Jacobs D. A. H. Preconditioned Conjugate Gradient methods for solving systems of algebraic equations. Central Electricity Research Laboratories Report, RD/L/N193/80. Leatherhead, Surrey. 1980.
- [147] Van Der Vorst H. A. Bi-CGStab: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Scientific Computing*. 1992. V. 13(2). P. 631–644.
- [148] Van Der Vorst, H.A. Iterative Krylov methods for large linear systems. Cambridge: Cambridge univ. press., 2003. 221 p.
- [149] Barrett R., Berry M., Chan T. F. et al. Demmel J., Donato J. M., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., Van der Vorst H. Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods, 2nd Edition. Philadelphia: SIAM. 1994. 107 p.
- [150] <http://netlib.org>

- [151] Бруязцкий Е. В., Костин А. Г. Численное исследование течения жидкости в закрытой прямоугольной полости с движущейся верхней крышкой. *Прикл. Гидромех.*. 2009. Т. 11, N 1. С. 3–15.
- [152] Приходько А. А., Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса. *Прикл. Гидромех.*. 2005. Т. 7, N 1. С. 56–71.
- [153] Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Weather Rev.* 1963. V. 91, N 3. P. 99–164.
- [154] Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. *ДАН СССР*. 1941. V. 30, N 4. P. 299–303.
- также доступно в
- Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. *УФН*. 1967. V. 93. P. 476–481.
- также reprinted by
- Kolmogorov A. N. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers. *Proc. Royal Soc. London*. 1991. V. 434. P. 9–13.
- [155] Leonard A. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Adv. Geophys.* 1974. V. 18A. P. 237–248.
- [156] Bardina J., Ferziger J. H., Reynolds W. C. Improved subgrid models for large eddy simulation. 13th Fluid and Plasma Dynamics Conference (July 14-16, 1980, Snowmass, Colorado). AIAA Paper 80-1357, 1980. 9 p.
- [157] Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3. P. 1760–1765.

- [158] Villiers, de, E. The potential of Large Eddy Simulation for the modeling of wall bounded flows. PhD Thesis. London: Imperial College. 2006. 351 p.
- [159] Vengadesan S., Nakayama A. Evaluation of LES models for flow over bluff body from engineering application perspective. *Sadhana*. 2005. V. 30. P. 11–20.
- [160] Lilly D. K. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids A*. 1992. V. 4. P. 633–635.
- [161] Yoshizawa A., Horiuti K. A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows. *J. Phys. Soc. Japan*. 1985. V. 54. P. 2834–2839.
- [162] Horiuti K. Large eddy simulation of turbulent channel flow by one-equation modelling. *J. Phys. Soc. Japan*. 1985. V. 54. P. 2855–2865.
- [163] Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 88 с.
- [164] Piomelli U., Balaras E. Wall-layer models for large-eddy simulations. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2002. V. 34. P. 349–374.
- [165] Piomelli U. Wall-layer models for large-eddy simulations. *Prog. Aerospace Scien.* 2008. V. 44. P. 437–446.
- [166] Balaras E., Benocci C., Piomelli U. Two-layer approximate boundary conditions for large eddy simulations. *J. AIAA*. 1996. V. 34. P. 1111–1119.
- [167] Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. 30th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit (January 6-9, 1992, Reno, Nevada, USA). AIAA Paper 92-0439, 1992. 22 p.
- [168] Jeong J., Hussain F. On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.* 1995. V. 285. P. 69–94.

- [169] Kolar V. Vortex identification: New requirements and limitations. *Heat Fluid Flow*. 2007. V. 28. P. 638–652.
- [170] Jiang M., Machiraju R., Thompson D. S. Detection and Visualization of Vortices. *Visualization Handbook*, ed. C. R. Johnson, C. D. Hansen. Academic Press, 2005. p. 295–312.
- [171] Robinson S. K. Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1991. V. 23. P. 601–639.
- [172] Lugt H. J. The dilemma of defining a vortex. *Recent Developments in Theoretical and Experimental Fluid Mechanics*, ed. U. Muller, K. Roesner, B. Schmidt. Houston: Springer, 1979. P. 309–321.
- [173] Sadarjoen I. A., Post F. H., Ma B., Banks D. C., Pagendarm H.-G. Selective visualization of vortices in hydrodynamic flows. *Proceedings IEEE Visualization'98* (October 18 - 23, 1998, North Carolina, USA). 1998. P. 419–422.
- [174] Sadarjoen I. A., Post F. H. Geometric Methods for Vortex Extraction. *Proc. Joint Eurographics-IEEE TCVG Symposium on Visualization* (May 26–28, 1999, Vienna, Austria). 1999. P. 53–62.
- [175] Pagendarm H.-G., Henne B., Rutten M. Detecting Vortical Phenomena in Vector Data by Medium-Scale Correlation. *Proceedings IEEE Visualization'99* (October 24-29, 1999, San Francisco, CA, USA). 1999. P. 409–412.
- [176] Bisset D. K., Antonia R. A., Browne L. W. B. Spatial organization of large structures in the turbulent far wake of a cylinder. *J. Fluid Mech.* 1990. V. 218. P. 439–461.
- [177] Bisset D. K., Antonia R. A., Britz D. Structure of large-scale vorticity in a turbulent far wake. *J. Fluid Mech.* 1990. V. 218. P. 463–482.
- [178] Hussain A. K. M. F., Hayakawa M. Eduction of large scale organized structure in a turbulent plane wake. *J. Fluid Mech.* 1987. V. 180. P. 193–229.

- [179] Strawn R. C., Kenwright D. N., Ahmad J. Computer visualization of vortex wake systems. *AIAA J.* 1999. V. 37. P. 511–512.
- [180] Chong M. S., Perry A. E., Cantwell B. J. A general classification of three-dimensional flow fields. *Phys. Fluids A.* 1990. V. 2. P. 765–777.
- [181] Hunt J. C. R., Wray A. A, Moin P. Eddies, stream and convergence zones in turbulent flows. Center For Turbulence Research Report CTR-S88, 1988. P. 193–208.
- [182] Hyman J. M. Numerical methods for tracking interfaces. *Physica.* 1984. V. 12D. P. 396–407.
- [183] Daly B. J. Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids.* 1967. V. 10. P. 297–307.
- [184] Daly B. J. A technique for including surface tension effects in hydrodynamic calculations. *J. Comput. Phys.* 1969. V. 4. P. 97–117.
- [185] Takizawa A., Koshizuka S., Kondo S. Generalization of physical component boundary fitted co-ordinate (PCBFC) method for the analysis of free-surface flow. *Int. J. Numer. Methods Fluids.* 1992. V. 15. P. 1213–1237.
- [186] Nichols B. D., Hirt C. W. Calculating three-dimensional free surface flows in the vicinity of submerged and exposed structures. *J. Comput. Phys.* 1973. V. 12. P. 234–246.
- [187] Farmer J., Martinelli L., Jameson A., Fast multigrid method for solving incompressible hydrodynamic problems with free surfaces. *AIAA J.* 1994. V. 32. P. 1175–1182.
- [188] Osher S., Sethian J. A. Fronts propagating with curvature-dependant speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.* 1988. V. 79. P. 12–49.

- [189] Sethian J. A. Level set methods and fast marching methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials sciences. Cambridge University Press, 1999. 378 p.
- [190] Sussman M., Smereka P., Osher S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.* 1994. V. 114. P. 146–159.
- [191] Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.* 1981. V. 39. P. 201–225.
- [192] Ubbink, O. Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces. Phd Thesis. University of London. 1997.
- [193] Ubbink O, Issa R. I. A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes. *J. Comp. Phys.* 1999. V. 153. P. 26–50.
- [194] Malyuga V. S., Meleshko V. V., Speetjens M. F. M., Clercx H. J. H., van Heijst G. J. F. Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container. *Proc. R. Soc. Lond. A*. V. 458. 2002. P. 1867–1885.
- [195] Krasnopolskaya T. S., Malyuga V. S., Golichenko O. L. Mixing and coherent structures in two and three dimensional containers. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*. V. 3. 2013. P. 403–411.
- [196] Голіченко О. Л., Малюга В. С. Особливості перемішування рідини в скінченному циліндрі. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. наук.* N 2. 2015. С. 55–60.
- [197] Meleshko V. V., Malyuga V. S., Gomilko A. M. Steady Stokes flow in a finite cylinder. *Proc. R. Soc. Lond. A*. V. 456. 2000. P. 1741–1758.
- [198] Голіченко О. Л., Малюга В. С. Мелешко В. В. Асимптотична поведінка коефіцієнтів розв'язку задачі стаціонарної Стоксової течії в скінченному циліндрі. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. науки.* N 1. 2012. С. 61–64.

- [199] Голіченко О. Л., Малюга В. С. Рух рідини в скінченному, круговому циліндрі. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. наук.* N 2. 2013. С. 51–56.
- [200] Гомилко А. М., Малюга В. С., Мелешко В. В., Вербрюгген М. Обтекание системы кольцевых дисков потоком Стокса. *Прикл. гидромех.* Т. 3(74), N 1. 2001. С. 20–27.
- [201] Malyuga V. S., Gomilko A. M. Steady Stokes flow in a trihedral corner. In: Bajer K., Moffatt H.K. (eds) *Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics. Fluid Mechanics and Its Applications.* Springer, Dordrecht. V. 71. 2001. P. 355–360.
- [202] Gomilko A. M., Malyuga V. S., Meleshko V. V. On steady Stokes flow in a trihedral rectangular corner. *J. Fluid Mech.* V. 476. 2003. P. 159–177.
- [203] Malyuga V. S. Viscous eddies in a circular cone. *J. Fluid Mech.* V. 522. 2005. P. 101–116.
- [204] Maire, O., Duchêne, J. C., Grémare, A., Malyuga V. S., Meysman, F.J.R. A comparison of sediment reworking rates by the surface deposit-feeding bivalve *Abra ovata* during summertime and wintertime, with a comparison between two models of sediment reworking. *J. Exp. Marine Biol. Ecol.* V. 343. 2007. P. 21–36.
- [205] Meysman F. R. J., Malyuga V., Boudreau B. P., Middelburg J. J. The influence of porosity gradients on mixing coefficients in sediments. *Geochimica et Cosmochimica Acta.* V. 71. 2007. P. 961–973.
- [206] Meysman F. R. J., Malyuga V., Boudreau B. P., Middelburg J. J. Quantifying particle dispersal in aquatic sediments at short time scales: model selection. *Aquatic Biol.* V. 2. 2008. P. 239–254.
- [207] Meysman F. R. J., Malyuga V. S., Boudreau B. P., Middelburg J. J. A generalized stochastic approach to particle dispersal in soils and sediments. *Geochimica et Cosmochimica Acta.* V. 72. 2008. P. 3460–3478.

- [208] Phillips O. M. The intensity of Aeolian tones. *J. Fluid Mech.*, 1956. V. 1. Pt.6. P. 607–624.
- [209] Голдстейн М. Е. Аэроакустика. Москва: Машиностроение, 1981. 294 с.
- [210] Weller H. G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Comp. in Phys.*, 1998. T. 12. C. 620–631.
- [211] Jasak, H. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. PhD Thesis. London: Imperial College, 1996. 394 p.
- [212] Taneda S. Visualization of Separating Stokes Flows. *J. Phys. Soc. Japan.* 1979. V. 46. P. 1935–1942.
- [213] Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. Москва: Мир, 1986. 184 с.
- [214] Etkin B., Korbacher G., Keefe R. Acoustic radiation from a stationary cylinder in a fluid stream (Aeolian tones). *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1957. V. 29. P. 30–36.
- [215] Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. I. General theory. *Proc. Roy. Soc.*, 1952. V. 211. P. 564–587.
- [216] Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound. *Proc. Roy. Soc.*, 1954. V. 221. P. 1–32.
- [217] Curle N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proc. Roy. Soc.*, 1955. V. 231. P. 318–334.
- [218] Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. Москва: изд. МГУ, 1960. 335 с.
- [219] Stowell E. Z., Doming A. F. Vertex noise from rotating cylindrical rods. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1936. V. 7. P. 190–198.

- [220] Харкевич А. А. Автоколебания. Москва: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1954. 170 с.
- [221] Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О.К. Математические модели сплошной среды. Киев: Наукова думка, 2010. 551 с.
- [222] Вовк І. В., Грінченко В. Т., Малюга В. С. Автоколивання струменя, що натікає на клин. Механізм виникнення зворотного зв'язку. *Нелінійні коливання*. Т. 18, N 3. 2015. С. 323–331.
- [223] Вовк І. В., Малюга В. С. Генерація автоколебаний струни, натекаючої на клин. *Доп. НАНУ*. N 12. 2015. С. 41–48.
- [224] Vovk I. V., Grinchenko V. T., Malyuga V. S. Self-induced oscillations of a jet flowing over the wedge. The mechanism of appearance of the feedback. *J. Math. Sci.* V. 220. 2017. P. 265–272.
- [225] Вовк І. В., Малюга В. С. Генерація автоколебаний при обтекании цилиндра с плоским сплиттером. *Доп. НАНУ*. N 11. 2017. P. 30–36.
- [226] Вовк І. В., Малюга В. С. Обтікання сфери в'язкою нестисливою рідиною. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. науки*. N 3. 2013. С. 102–105.
- [227] Малюга В. С. Численное моделирование обтекания сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости. *Прикл. гідромех.* Т. 15, N 3. 2013. С. 43–67.
- [228] Вовк І. В., Малюга В. С. Возбуждение звука при обтекании сферы. Консонанс-2013, Праці акустичного симпозіуму. Київ. 2013. P. 65–70.
- [229] Малюга В. С. Генерація звука потоком, обтекающим сферу. *Доп. НАНУ*. N 11. 2014. С. 46–52.
- [230] Малюга В. С. Характеристики звукового поля, що генерується при обтіканні сфери. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. науки*. N 4. 2015. С. 87–92.

- [231] Вовк И. В., Малюга В. С. Контроль излучения звука потоком в нерегулярном канале. *Доп. НАНУ*. N 1. 2015. С. 50–55.
- [232] Малюга В. С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения. *Прикл. Гідромех.*. 2010. Т. 12, N 4. С. 45–62.
- [233] Вовк И. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами. *Прикл. Гідромех.*. 2009. Т. 11, N 4. С. 17–30.
- [234] Вовк И.В., Малюга В. С. Численное моделирование потока в канале с двумя стенозами. Консонанс-2009, Праці акустичного симпозіуму. Київ. 2009. С. 122–127.
- [235] Вовк И. В., Малюга В. С. Численное моделирование течения в канале с двумя последовательными сужениями (стенозами). *Доповіді НАН України*. 2010. N 4. С. 53–58.
- [236] König W. *Physik Z.* 1912. V. 13. P. 1053–1054.
- [237] Кондратьев В. И., Назаренко Т. И. Клиновый тон и его усиления. В книге “Аэроакустика”. Москва: Наука, 1980. 144 с.
- [238] Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацыпура В. Т. Волновые задачи акустики. Киев: Интерсервис, 2013. 572 с.
- [239] Грінченко В. Т., Вовк І. В., Маципура В. Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2007. 640 с.
- [240] Moffatt H. K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid Mech.*. 1964. V. 18. P. 1–18.
- [241] Vu H. C., Ahn J., Hwang J. H. Numerical investigation of flow around circular cylinder with splitter plate. *KSCE J. Civ. Eng.*. 2016. V. 20. P. 2559-2568.

- [242] Вовк И. В., Малюга В. С. Об одном методе оценки звукового поля эоловых тонов. *Акуст. Вісн.*. 2010. 13, N 2. С. 3-19.
- [243] Малюга В.С. Численный расчет акустического поля эоловых тонов. *Доп. НАНУ.*. 2011. N 9. С. 56-61.
- [244] Головинський А.Л., Маленко А.Л., Сергієнко І.В., Тульчинський В.Г. Енергоефективний суперкомп'ютер СКІТ-4. *Вісн. НАНУ.* 2013. N 2. С. 50-59
- [245] Tomboulides A. G., Orszag S. A., Karniadakis G. E. Direct and large eddy simulations of axisymmetric wakes. 31 st Aerospace Sciences Meeting & Exhibit (January 11 -14, 1993, Reno, Nevada, USA). AIAA Paper 93-0546, 1993. 12 p.
- [246] Taneda S. Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers. *J. Phys. Soc. Japan.* 1956. V. 11. P. 1104–1108.
- [247] Magarvey R. H., Bishop R. L. Transition ranges for three-dimensional wakes. *Can. J. Phys.* 1961. V. 39. P. 1418–1422.
- [248] Magarvey R. H., Bishop R. L. Wakes in liquid-liquid systems. *Phys. Fluids.* 1961. V. 4. P. 800–805.
- [249] Nakamura I. Steady wake behind a sphere. *Phys. Fluids.* 1976. V. 19. P. 5–8.
- [250] Wu J. S., Faeth G. M. Sphere wakes in still surroundings at intermediate Reynolds numbers. *AIAA J.* 1993. V. 31. P. 1448–1455.
- [251] Natarajan R., Acrivos A. The instability of the steady flow past spheres and disks. *J. Fluid Mech.* 1993. V. 254. P. 323–344.
- [252] Johnson T. A., Patel V. C. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300. *J. Fluid Mech.* 1999. V. 378. P. 19–70.

- [253] Tomboulides A. G., Orszag S. A. Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere. *J. Fluid Mech.* 2000. V. 416. P. 45–73.
- [254] Ormières D., Provansal M. Transition to turbulence in the wake of a sphere. *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 80–83.
- [255] Sakamoto H., Haniu H. The formation mechanism and shedding frequency of vortices from a sphere in a uniform shear flow. *J. Fluid Mech.* 1995. V. 287. P. 151–171.
- [256] Chrust M., Goujon-Durand S., Wesfreid J. E. Loss of a fixed plane of symmetry in the wake of a sphere. *J. Fluids Struct.* 2013. V. 41. P. 51–56.
- [257] Thompson M. C., Leweke T., Provansal M. Kinematics and dynamics of sphere wake transition. *J. Fluids Struct.* 2001. V. 15. P. 575–585.
- [258] Gushchin V. A., Kostomorov A. V., Matyushin P. V., Pavlyukova E. R. Direct numerical simulation of the transitional separated fluid flows around a sphere. *Comput. Fluid Dynam. J.* 2001. V. 10. P. 344–349.
- [259] Levi E. Three-dimensional wakes: origin and evolution. *J. Eng. Mech.* 1980. V. 106. P. 659–676.
- [260] Szaltys P., Chrust M., Prządka A., Goujon-Durand S., Tuckerman L. S., Wesfreid J. E. Nonlinear evolution of instabilities behind spheres and disks. *J. Fluids Struct.* 2012. V. 28. P. 483–487.
- [261] Ploumhans P., Winckelmans G. S., Salmon J. K., Leonard A., Warren M. S. Vortex methods for direct numerical simulation of three-dimensional bluff body flows: application to the sphere at  $Re = 300, 500$  and  $1000$ . *J. Comput. Phys.* 2002. V. 178. P. 427–463.
- [262] Mittal R. A Fourier-Chebyshev spectral collocation method for simulating flow past sphere and spheroids. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 1999. V. 30. P. 921–937.

- [263] Mittal R. Planar symmetry in the unsteady wake of a sphere. *J. AIAA*. 1999. V. 37. P. 388–390.
- [264] Mittal R., Najjar F. M. Vortex dynamics in the sphere wake. 30th AIAA Fluid Dynamics Conference (28 June - 1 July, 1999, Norfolk, VA ). AIAA Paper 99-3806, 1999. 8 p.
- [265] Kiya M., Ishikawa H., Sakamoto H. Near-wake instabilities and vortex structures of three-dimensional bluff bodies: a review. *J. Wind Eng. Indust. Aerodynam.* 2001. V. 89. P. 1219–1232.
- [266] Ghidersa B., Dusek J. Breaking of axisymmetry and onset of unsteadiness in the wake of a sphere. *J. Fluid Mech.* 2000. V. 423. P. 33–69.
- [267] Sakamoto H., Haniu H. A study of vortex shedding from spheres in uniform flow. *J. Fluids Eng.* 1990. V. 112. P. 386–392.
- [268] Achenbach E. Vortex Shedding from Spheres. *J. Fluid Mech.* 1974. V. 62. P. 209–221.
- [269] Kim H. J., Durbin P. A. Observations of the frequencies in a sphere wake and of drag increase by acoustic excitation. *Phys. Fluids*. 1988. V. 31. P. 3260–3265.
- [270] Möller W. Experimentelle Untersuchung zur Hydromechanik der Kugel. *Phys. Zeitschrift*. 1938. V. 39, (2). P. 57–80.
- [271] Chomaz J. M., Bonneton P., Hopfinger E. J. The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* 1993. V. 254. P. 1–21.
- [272] Jenny M., Dušek J., Bouchet G. Instabilities and transition of a sphere falling or ascending freely in a Newtonian fluid. *J. Fluid Mech.* 2004. V. 508. P. 201–239.
- [273] Jenny M., Bouchet G., Dušek J. Nonvertical ascension or fall of a free sphere in a Newtonian fluid. *Phys. Fluids*. 2003. V. 15, L9. P. L9–L12.

- [274] Veldhuis C. H. J., Biesheuvel A. An experimental study of the regimes of motion of spheres falling or ascending freely in a Newtonian fluid. *Int. J. Multiphase Flow*. 2007. V. 33. P. 1074–1087.
- [275] Veldhuis C. H. J., Biesheuvel A., Lohse D. Freely rising light solid spheres. *Int. J. Multiphase Flow*. 2009. V. 35. P. 312–322.
- [276] Drikakis D. Development and implementation of parallel high resolution schemes in 3D flows over bluff bodies. *Parallel Computational Fluid Dynamics '95: Implementations and Results Using Parallel Computers*, ed. A.Ecer, J.Periaux, N.Satofuka, S.Taylor. Elsevier Science. 1995. p. 191–198.
- [277] Constantinescu G., Chapelet M., Squires K. Turbulence Modeling Applied to Flow over a Sphere. *AIAA J*. 2003. V. 41. P. 1733–1742.
- [278] Биркгоф Г. Гидродинамика. Москва: Из-во иностранной литературы, 1963. 246 с.
- [279] Constantinescu G. S., Squires K. D. Numerical investigations of flow over a sphere in the subcritical and supercritical regimes. *Phys. Fluids*. 2004. V. 16. P. 1449–1466.
- [280] Jones D. A., Clarke D. B. Simulation of flow past a sphere using the Fluent code. Defence Science and Technology Organisation, technical report: DSTO-TR-2232, AR-014-365, 2008. 29 p.
- [281] Taneda S. Visual observations of the flow past a sphere at Reynolds numbers between  $10^4$  and  $10^6$ . *J. Fluid Mech.* 1978. V. 85. P. 187–192.
- [282] Achenbach E. Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 1972. V. 54. P. 565–575.
- [283] Bakić V., Perić M. Visualization of flow around sphere for reynolds numbers between 22000 and 400000. *Thermophys. Aeromech.* 2005. V. 12. P. 307–315.

- [284] Clift R., Grace J. R., Weber M. E. Bubbles, Drops and Particles. New York: Academic Press, 1978. 380 p.
- [285] Tabata M., Itakura K. A precise computation of drag coefficients of a sphere. *Int. J. Comput. Fluid Dynam.* 1998. V. 9. P. 303–311.
- [286] Le Clair B. P., Hamielec A. E., Pruppacher H. R. A numerical study of the drag on a sphere at low and intermediate Reynolds numbers. *J. Atmos. Sci.* 1970. V. 27. P. 308–315.
- [287] Shirayama S. Flow past a sphere: Topological transitions of the vorticity field. *AIAA J.* 1992. V. 30. P. 349–358.
- [288] Roos F. W., Willmarth W. W. Some experimental results on sphere and disk drag. *AIAA J.* 1971. V. 9. P. 285–291.
- [289] Giacobello M. Wake structure of a transversely rotating sphere at moderate Reynolds numbers. PhD Thesis. Melbourne: University of Melbourne, 2005. 306 p.
- [290] Kim D., Choi H. Laminar flow past a sphere rotating in the streamwise direction. *J. Fluid Mech.* 2002. V. 461. P. 365–386.
- [291] Constantinescu G. S., Squires K. D. LES and DES investigation of turbulent flow over a sphere. 38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (January 10-13, 2000, Reno, Nevada, USA). AIAA Paper 2000-0540, 2000. 11 p.
- [292] Yun G., Kim D., Choi H. Vortical structures behind a sphere at subcritical Reynolds numbers. *Phys. Fluids.* 2006. V. 18. P. 015102-1 – 015102-14.
- [293] Poon E. K. W., Iaccarino G., Ooi A. S. H., Giacobello M. Numerical studies of high Reynolds number flow past a stationary and rotating sphere. Seventh International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries CSIRO (December 9-11, 2009, Melbourne, Australia). 2009. P. 1–7.

- [294] Rodriguez I., Lehmkuhl O., Borrell R., Oliva A. Flow dynamics in the turbulent wake of a sphere at sub-critical Reynolds numbers. *Computers Fluids*. 2013. V. 80. P. 233–243.
- [295] Hardin J. C., Pope D. S. Sound generation by a stenosis in a pipe. *AIAA Journal*. 1992. V. 30. P. 312–317.
- [296] Abdallah S. A., Hvang N. H. C. Arterial stenosis murmurs: an analysis of flow and pressure fields. *J.A.S.A.*. 1988. V. 83. P. 318–334.
- [297] Rockwell D., Schachenmann A. Self-generation of organized waves in an impinging turbulent jet at low Mach number. *J. Fluid. Mech.*. 1982. V. 117. P.425–441.
- [298] Borisjuk A. O. Noise field in the human chest due to turbulent flow in a larger blood vessel. *Flow, Turbul. And Combust.* 1999. V. 61. P. 269–284.
- [299] Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Наука, 1997. 495 с.
- [300] Денисихина, Д. М. Численное моделирование автоколебательных вентиляционных течений. Диссертации на соискание ученой степени к. ф.-м. н. С-Пб: Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2005. 104 с.
- [301] Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. Киев: Наукова думка, 1986. 240 с.
- [302] Буланая, М. А., Вовк, И. В., Гринченко, В. Т., Мацыпура, В. Т. Особенности распространения звукового импульсного сигнала в плоском регулярном волноводе. *Акустичний Вісник*. 2008. V. 11, N 4. С. 9–23.
- [303] Буланая, М. А., Мацыпура, В. Т. Распространение звукового сигнала в волноводе со скачкообразным изменением поперечного сечения. *Акустичний Вісник*. 2009. V. 12, N 1. P. 19–31.

- [304] Буланая, М. А., Вовк, И. В., Гринченко, В. Т., Мацьпура, В. Т. Распространение звукового сигнала в волноводе с неоднородностью в виде камеры. *Акустичний Вісник*. 2009. V. 12, N 3. С. 3–19.
- [305] Мунин А. Г., Кузнецов В. М., Леонтьев Е. А. Аэродинамические источники шума. Москва: Машиностроение, 1981. С. 247.
- [306] Anderson A. B. Structure and velocity of the periodic vortex-ring flow pattern of a Primary Pfeifenton (Pipe ton) jet. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1955. V. 27, N 6. P. 1048–1053.
- [307] Brown R. S., Dunlap R., Young S. W., Waugh R. C. Vortex shedding as a source of acoustic energy in segmented solid rockets. *J. Spacecraft Rockets*. 1981. V. 18, N 4. P. 312–319.
- [308] Carmicino C. Acoustic, vortex shedding and low-frequency dynamics interaction in an unstable hybrid rocket. *J. Propulsion Power*. 2009. V. 25, N 6. P. 1322–1335.
- [309] Boyer G., Casalis G., Estivalezes J.-L. Stability analysis and numerical simulation of simplified solid rocket motors. *Phys. Fluids*. 2013. V. 25, N 8. 084109.
- [310] Вовк И.В., Малюга В.С. Звуковое поле, генерируемое потоком в канале со стенозами. *Прикл. гідромех.* 2012. Т. 14, N 1. С. 23–48.

## Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації:

1. Meleshko V. V., Malyuga V. S., Gomilko A. M. Steady Stokes flow in a finite cylinder. *Proc. R. Soc. Lond. A*. V. 456. 2000. P. 1741–1758
2. Гомилко А. М., Малуґа В. С., Мелешко В. В., Вербрюгген М. Обтекание системы кольцевых дисков потоком Стокса. *Прикл. гідромех.* Т. 3(74), № 1. 2001. С. 20–27.
3. Malyuga V. S., Gomilko A. M. Steady Stokes flow in a trihedral corner. In: Bajzer K., Moffatt H.K. (eds) *Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics. Fluid Mechanics and Its Applications*. Springer, Dordrecht. V. 71. 2001. P. 355–360.
4. Malyuga V. S., Meleshko V. V., Speetjens M. F. M., Clercx H. J. H., van Heijst G. J. F. Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container. *Proc. R. Soc. Lond. A*. V. 458. 2002. P. 1867–1885.
5. Gomilko A. M., Malyuga V. S., Meleshko V. V. On steady Stokes flow in a trihedral rectangular corner. *J. Fluid Mech.* V. 476. 2003. P. 159–177.
6. Malyuga V. S. Viscous eddies in a circular cone. *J. Fluid Mech.* V. 522. 2005. P. 101–116.
7. Maire, O., Duchêne, J. C., Grémare, A., Malyuga V. S., Meysman, F.J.R. A comparison of sediment reworking rates by the surface deposit-feeding bivalve *Abra ovata* during summertime and wintertime, with a comparison between two models of sediment reworking. *J. Exp. Marine Biol. Ecol.* V. 343. 2007. P. 21–36.

8. Meysman F. R. J., Malyuga V., Boudreau B. P., Middelburg J. J. The influence of porosity gradients on mixing coefficients in sediments. *Geochimica et Cosmochimica Acta*. V. 71. 2007. P. 961-973.
9. Meysman F. R. J., Malyuga V., Boudreau B. P., Middelburg J. J. Quantifying particle dispersal in aquatic sediments at short time scales: model selection. *Aquatic Biol.* V. 2. 2008. P. 239–254.
10. Meysman F. R. J., Malyuga V. S., Boudreau B. P., Middelburg J. J. A generalized stochastic approach to particle dispersal in soils and sediments. *Geochimica et Cosmochimica Acta*. V. 72. 2008. P. 3460–3478.
11. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Малюга В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами. *Прикл. гідромех.* Т. 11, N 4. 2009. С. 17–30.
12. Вовк И.В., Малюга В. С. Численное моделирование потока в канале с двумя стенозами. Консонанс-2009, Праці акустичного симпозіуму. Київ. 2009. С. 122–127.
13. Вовк И. В., Малюга В. С. Численное моделирование течения в канале с двумя последовательными сужениями (стенозами). *Допов. НАНУ*. N 4. 2010. С. 53–58.
14. Малюга В. С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения. *Прикл. гідромех.*. Т. 12, N 4. 2010. С. 45-62
15. Вовк И. В., Малюга В. С. Об одном методе оценки звукового поля эоловых тонов. *Акуст. вісн.*. Т. 13, N 2. 2010. С. 3–19.
16. Малюга В. С. Численный расчет акустического поля эоловых тонов. *Допов. НАНУ*. N 9. 2011. С. 56–61.
17. Вовк И. В., Малюга В. С. Звуковое поле, генерируемое потоком в канале со стенозами. *Прикл. гідромех.* Т. 14, N 1. 2012. С. 23–48.

18. Голіченко О. Л., Малюга В. С. Мелешко В. В. Асимптотична поведінка коефіцієнтів розв'язку задачі стаціонарної Стоксової течії в скінченному циліндрі. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. науки*. N 1. 2012. С. 61–64.
19. Вовк І. В., Малюга В. С. Обтікання сфери в'язкою нестисливою рідиною. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. науки*. N 3. 2013. С. 102–105.
20. Малюга В. С. Численное моделирование обтекания сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости. *Прикл. гідромех.* Т. 15, N 3. 2013. С. 43–67.
21. Голіченко О. Л., Малюга В. С. Рух рідини в скінченному, круговому циліндрі. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. наук.* N 2. 2013. С. 51–56.
22. Krasnopol'skaya T. S., Malyuga V. S., Golichenko O. L. Mixing and coherent structures in two and three dimensional containers. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*. V. 3. 2013. P. 403–411.
23. Вовк І. В., Малюга В. С. Возбуждение звука при обтекании сфери. Консонанс-2013, Праці акустичного симпозиуму. Київ. 2013. Р. 65–70.
24. Малюга В. С. Генерация звука потоком, обтекающим сферу. *Доп. НАНУ*. N 11. 2014. С. 46–52.
25. Вовк І. В., Малюга В. С. Контроль излучения звука потоком в нерегулярном канале. *Доп. НАНУ*. N 1. 2015. С. 50–55.
26. Голіченко О. Л., Малюга В. С. Особливості перемішування рідини в скінченному циліндрі. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. наук.* N 2. 2015. С. 55–60.
27. Вовк І. В., Грінченко В. Т., Малюга В. С. Автоколивання струменя, що натікає на клин. Механізм виникнення зворотного зв'язку. *Нелінійні коливання*. Т. 18, N 3. 2015. С. 323–331.
28. Вовк І. В., Малюга В. С. Генерация автоколебаний струи, натекающей на клин. *Доп. НАНУ*. N 12. 2015. С. 41–48.

29. Малуґа В. С. Характеристики звукового поля, що генерується при обтіканні сфери. *Вісн. КНУ. Серія фіз-мат. науки*. N 4. 2015. С. 87–92.
30. Vovk I. V., Grinchenko V. T., Malyuga V. S. Self-induced oscillations of a jet flowing over the wedge. The mechanism of appearance of the feedback. *J. Math. Sci.* V. 220. 2017. P. 265–272.
31. Вовк І. В., Малуґа В. С. Генерація автоколебаний при обтекании циліндра с плоским сплиттером. *Доп. НАНУ*. N 11. 2017. P. 30–36.

Відомості про апробацію результатів дисертації:

- IUTAM Symposium "Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics". 2–7 September 2001. Zakopane, Poland
- International Petrovskii Centenary Conference "Differential equations and related topics". 22-27 May 2001. Moscow. Russian Federation.
- First Nereis Park conference. "Bioturbation: The Ever Changing Seafloor". 7-9 November 2004. Carry-Le-Rouet. Bouches-du-Rhone. France
- ASLO Summer Meeting. "A pilgrimage through global aquatic sciences". 19-24 June 2005. Santiago de Compostela. Spain.
- "Консонанс-2009". Акустичний симпозіум. Інститут гідромеханіки НАН України. 29 вересня – 1 жовтня 2009 року. Київ.
- Науково-практична конференція "Комп'ютерна гідромеханіка". Інститут гідромеханіки НАН України. 29 – 30 вересня 2010 року. Київ
- "Консонанс-2011". Акустичний симпозіум. Інститут гідромеханіки НАН України. 27 – 29 вересня 2011 року. Київ.
- Науково-практична конференція "Комп'ютерна гідромеханіка". Інститут гідромеханіки НАН України. 29 – 30 вересня 2012 року. Київ

- "Консонанс-2013". Акустичний симпозіум. Інститут гідромеханіки НАН України. 1 – 2 жовтня 2013 року. Київ.
- II Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки". Київський національний університет ім. Т.Шевченка. 28–30 серпня 2013 року. Київ.
- III Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки". Київський національний університет ім. Т.Шевченка. 27–29 серпня 2015 року. Київ (дві презентації).
- Науково-практична конференція "Комп'ютерна гідромеханіка". Інститут гідромеханіки НАН України. 29 – 30 вересня 2016 року. Київ
- Республіканський семінар з гідромеханіки, під керівництвом академіка НАН України В.Т.Грінченка. Інст-т гідромеханіки НАН України. 12.10.2017. Київ