НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ім. Г.В. КАРПЕНКА

На правах рукопису

Лисечко Віктор Олегович

УДК 534.26

ДИФРАКЦІЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ НА ФРАГМЕНТАХ КОНІЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

01.04.06 – акустика

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Куриляк Дозислав Богданович
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Львів – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Усю сукупність елементів конічної форми можна умовно розділити на дві групи. До першої відносимо структури, які використовують для формування акустичного поля із наперед заданими властивостями. Це, наприклад, гідродинамічні антени, рупори та мікрофони, трансдюсери та перетворювачі акустичної енергії. Сюди також можна віднести різної конфігурації сферо-конічні резонатори. Механічні елементи конічної форми, такі як долота, штампи, підшипники, валки прокатних станів, а також різні конструкції – резервуари, труби змінного діаметру, сопла літальних апаратів – утворюють другий тип конічних поверхонь. Характеристики полів, розсіяних цими структурами, можуть використовуватись як інформативні параметри у неруйнівному контролі, щоб виявити пошкодження, які виникають при їх експлуатації. Крім того, фрагменти конічних поверхонь можна використовувати як моделі дефектів (тріщин, включень).

Для розширення функціональних можливостей конічних структур у різних галузях технічної фізики важливим є встановлення нових фізичних закономірностей взаємодії акустичних полів з такими поверхнями у широкому діапазоні зміни їх геометричних параметрів і частоти. Сучасні засоби теоретичного аналізу полів, розсіяних об'єктами складної форми, базуються на використанні прямих числових методів та (або) наближених асимптотичних підходів. Незважаючи на гнучкість цих підходів стосовно їх застосування до розсіювачів різної геометричної форми, вони володіють рядом недоліків, які принципово складно усунути. Використання прямих числових підходів вимагає значного ресурсу машинного часу, а отже суттєво ускладнює процеси дослідження. Це стосується випадків, коли необхідно проводити великі об'єми розрахунків, наприклад, при розв'язанні обернених задач або реалізації режиму реального часу в неруйнівному контролі. Крім того, при використанні прямих числових методів виникає проблема верифікації отриманих результатів. Це особливо стосується визначення полів в екстремальних ситуаціях – у ближній зоні, біля геометричних сингулярностей поверхні розсіювачів, а також в резонансній області і при переході до надвисоких частот. Стосовно використання асимптотичних методів, далеко не завжди наперед можна встановити їх область використання. Тому дуже важливо розвивати спеціалізовані строгі аналітико-числові методи для структур, які містять фрагменти канонічної форми. Розвиток таких підходів дозволить отримати розв'язки із заданою точністю в широкому частотному діапазоні, які можуть служити реперними для верифікації більш загальних методів, а їх висока швидкодія може бути використана для реалізації дослідження полів у реальному режимі часу. Оскільки фрагменти конічних поверхонь моделюють широкий клас технічних виробів, то розвиток строгих аналітико-числових підходів для вивчення взаємодії акустичних полів з такими розсіювачами є актуальною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дана дисертаційна робота пов'язана з виконанням держбюджетних науково-дослідних робіт, що проводилися в Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка НАН України у відділі фізичних основ діагностики матеріалів: "Вивчення властивостей хвильових полів у матеріалах з дефектами для розроблення методик діагностування і моніторингу відповідальних конструкцій" (2012-2014 рр., № держреєстрації 0112U002784).

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є вивчення закономірностей формування акустичних полів (тисків, коливальних швидкостей) з гармонічною залежністю від часу, розсіяних фрагментами жорстких і м'яких кругових конічних поверхонь у ближній та дальній зонах при різних кутах опромінення плоскою акустичною хвилею.

Для досягнення поставленої мети необхідно було розв'язати такі завдання:

- розв'язати задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на ідеальних (жорсткому, м'якому) скінченному та напівнескінченному зі зрізаною вершиною конусах при осьовому опроміненні;
- розв'язати задачу дифракції плоскої акустичної хвилі на м'якому і жорсткому скінченних конусах при боковому опроміненні;
- встановити залежності характеристик дифрагованих полів від геометричних параметрів конічних розсіювачів і частоти у широкому діапазоні їх зміни за

різних умов опромінення;

- вияснити вплив граничних значень імпедансу конічних поверхонь з краями шляхом порівняння їх дифракційних характеристик для м'яких і жорстких поверхонь;
- вияснити можливість діагностування геометричних параметрів конічних поверхонь з краями за даними зондування плоскою акустичною хвилею.

Об'єктом дослідження є явища взаємодії гармонічних акустичних хвиль із фрагментами конічних структур для двох різних типів поверхонь.

Предметом дослідження є вплив поверхні конуса, вершини, країв та кутів опромінення на розподіли поля у ближній та дальній зонах.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано метод розділення змінних, метод розкладу поля за власними функціями підобластей та метод спряження акустичних полів на межах підобластей. Ці методи застосовано для зведення задач теорії дифракції до систем суматорних рівнянь. Алгебраїзацію отриманих рівнянь проводили методом перерозкладу власних функцій суміжних підобластей і зводили дифракційну задачу до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР). Оскільки основна частина асимптотики матричних елементів НСЛАР утворює сингулярний оператор типу згортки, то для ефективного розв'язування дифракційної задачі використано процедуру аналітичної регуляризації, суть якої полягає у точному аналітичному оберненні сингулярної частини оператора. Це дозволило звести дифракційну задачу до НСЛАР другого роду, яка розв'язується методом редукції із заданою точністю.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у тому, що в роботі вперше:

- у строгій постановці розв'язані задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на м'яких та жорстких конусах з круговими краями при довільному куті опромінення та геометричних параметрах розсіювачів;
- задачі зведено до НСЛАР другого роду методом аналітичної регуляризації, що базується на точному аналітичному оберненні сингулярних частин відповідних операторів;

- отримано НСЛАР другого роду для розв'язання задач дифракції на м'яких та жорстких кругових дисках за довільних кутів опромінення та апертурах при осесиметричному опроміненні; для цих задач запропоновано нові регуляризуючі оператори;
- вияснено фізичні закономірності формування акустичних полів фрагментами конічних поверхонь у широкому частотному діапазоні, включаючи резонансну область, перехідну та область геометричної акустики; у цих діапазонах встановлено залежності дифракційних характеристик м'яких і жорстких конусів від геометричних параметрів та кутів опромінення;
- виявлено ефекти: фокусування та запирання акустичних хвиль апертурою зрізаних конусів; низькочастотного резонансного розсіювання жорсткими скінченними конусами та м'якими конусами зі зрізаною вершиною; встановлено залежності основних дифракційних характеристик від кутів зондування скінченних конусів, а також домінантний вплив поршневої моди на ближнє поле жорстких розсіювачів.

Практичне значення отриманих результатів. Розвинутий метод дозволяє створити швидкодіючі алгоритми для моделювання акустичних полів, розсіяних на м'яких та жорстких конічних поверхнях з круговими краями в режимі реального часу. Такі швидкодіючі алгоритми є важливими при розв'язанні обернених задач, зокрема, для знаходження оптимальних режимів випромінювання. Запропонований підхід дозволяє отримувати дифракційні характеристики конусів із заданою точністю для довільних значень геометричних параметрів, частоти та кута опромінення, а отже отримані результати можуть використовуватись як реперні для верифікації наближених підходів. Порівняння полів, розсіяних м'якими та жорсткими поверхнями однакової геометрії, дозволить оцінити вплив фізичних властивостей поверхонь на їх дифракційні характеристики. Отримані при різних кутах опромінення дифраговані поля на краях та вершинах конусів можна використати в якості початкових наближень у більш загальних підходах до аналізу складних комбінованих структур. Отримані поля, дифраговані на різних конічних структурах з краями, можуть бути використані для інтерпретації даних у неруйнівному контролі.

Особистий внесок здобувача. У статтях [110–114], написаних у співавторстві, внесок автора полягає у виведення основних рівнянь, розробці алгоритмів, проведенні обчислень, верифікації отриманих результатів та прийнятті участі у формуванні висновків.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи за темою дисертації доповідалися та обговорювалися на вітчизняних і міжнародних конференціях:

- International Seminar/Workshop on "Direct and inverse" problems of electromagnetic and acoustic theory", Lviv-Tbilisi (2014, 2015);
- 10-th International Skorobohatko Mathematical Conference, Drohobych, 2015;
- International Young Scientists Forum on Applied Physics, Dnipropetrovsk, 2015;
- Відкритій науковій конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів (2013, 2015);
- Міжнародній математичній конференції «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчю від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, Київ, 2014;
- Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ (2014, 2015);
- 5-тій Міжнародній конференції «Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій», Львів, 2014;
- IX Міжнародній науковій конференції "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур", Львів, 2014;
- III науково-технічній конференції «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації», Львів, 2014;
- Конференції молодих учених «Підстригачівські читання – 2015», Львів, 2015;
- III Міжнародній конференції «Сучасні проблеми механіки», Київ, 2015;
- Акустичному симпозіумі «КОНСОНАНС-2015», Київ, 2015.

Результати роботи також доповідалися на науковому семінарі відділу фізичних основ діагностики матеріалів та на семінарі "Проблеми технічної діагностики та дистанційного зондування" Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України.

Публікації. Матеріали дисертації опубліковано у 20 наукових працях, з них 5 статей [110–114] у фахових спеціалізованих журналах та 15 публікацій і матеріалів доповідей на міжнародних та вітчизняних конференціях [115–129]. Стаття [113] індексується у наукометричних базах: Open Science Directory, SHERPA/RoMEO, Ulrich's Periodicals Directory та ін.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, п'яти розділів, висновку і списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації складається із 142 сторінок, з них 14 – займає список використаних літературних джерел (найменувань). Всього в дисертації 59 малюнків та 3 таблиці.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД І АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРИ

Задачі дифракції акустичних хвиль на конусах протягом багатьох років займають особливе місце в акустиці, що пов'язано із їх широким застосуванням у різних галузях технічної фізики. За допомогою конічних поверхонь моделюють акустичні поля розсіяні підводними об'єктами для їх виявлення та ідентифікації. В неруйнівному контролі вони використовуються для моделювання дефектів, а також самих об'єктів контролю. Конічні поверхні є функціональними елементами випромінювачів (рупорів) для формування необхідно розподілу акустичного поля або мікрофонів для ідентифікації звукового поля. Крім того, конічні поверхні широко використовують при моделюванні взаємодії акустичного поля з різними органами людського тіла. Деякі приклади використання конічних поверхонь у різних технічних виробах показані на рис. 1.1.

Незважаючи на важливість конічних структур при конструюванні різних технічних засобів, теоретичне вивчення взаємодії акустичного полів з конічними поверхнями є недостатнім. Відомі в науковій літературі дослідження явища дифракції на конусах можна умовно розділити на два напрямки. Перший – орієнтований на вивчення розсіяння хвиль конічними поверхнями, які мають вершину і простягаються на нескінченність. Такі конуси будемо далі називати напівнескінченними. В основному вивчають дифракцію хвиль напівнескінченними круговими або еліптичними конічними поверхнями. Розв'язки таких задач враховують дифракцію хвиль на вершині, а також фізичні властивості розсіюючих поверхонь. Другий напрям орієнтований на вивчення розсіяння хвиль скінченними конусами, де, крім вершини, суттєвий вклад у дифраговане поле вноситься краєм.

При вивченні дифракції хвиль на конусах ключовою задачею є знаходження скалярного потенціалу швидкості дифрагованого поля в присутності напівнескінченного конуса, на поверхні якого виконується гранична умова Неймана [1] (абсолютно жорстка поверхня). В [1] розглядався випадок, коли такий конус опромінювався точковим джерелом розміщеним на осі симетрії.

Розв’язок дифракційної задачі знаходився у вигляді контурного інтегралу і зводився до подання поля у вигляді ряду з використанням теореми про лишки. Вивчення дифракції плоских хвиль на такому ж конусі проведено в [2].

Рис. 1.1. Приклади конічних структур:

а – імерсійні трансдюсери; *б* – ультразвуковий п’єзоелектричний керамічний трансдюсер (60Вт, 28кГц); *в* – конічні фланці; *г* – підшипник; *ґ* – свердлильні інструменти; *д* – носова частина винищувача Єврофайтер Тайфун; *е* – рупор; *є* – сопла Лавалля.

У працях [3–6] для подання поля, розсіяного конусом, використали інтеграл Ватсона з контуром інтегрування у комплексній області. Таке подання поля дозволило отримати високочастотне наближення, де для цього використовувався метод стаціонарної фази. Зауважимо, що результати отримані у працях [1–4], згодом були висвітленими в одному із розділів монографії [7].

Для вивчення дифракції сферичної хвилі на нескінченному конусі застосовували метод інтегрального перетворення Лапласа та Конторовича-Лєбедєва [8, 9].

Дифракцію акустичних хвиль на різного роду перешкодах, зокрема, на жорсткому конусі досліджували також в [10].

Знаходження високочастотних асимптотик полів, дифрагованих на конусі, наведено також у працях [11, 12], які далі були розвинуті в [13]. Суть цього підходу полягає у відокремленні радіальної частини рівняння Гельмгольца і і зведенні задачі до розв’язанні рівняння Бельтрамі-Лапласа на одиничній сфері. При цьому поле подається у вигляді контурного інтегралу, який включає функцію Гріна рівняння Бельтрамі-Лапласа. У кінцевому результаті задача зводиться до розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Ці підходи розвивалися також і в працях [14, 15].

Конус, як сильно витягнуте тіло, розглядався в [16], де було уведено параметр “витягності” тіла, тобто відношення радіусів кривизни поверхні в поперечному та поздовжньому напрямках. Коли ці радіуси набагато перевищують довжину падаючої хвилі, то для аналізу використовують параболічне рівняння Леонтовича-Фока.

Для задач дифракції на напівнескінченних еліптичних конусах також вдається отримати точний розв’язок, використовуючи метод відокремлення змінних у сферо-конічній системі координат [17, 18]. Електромагнітні аналоги цієї задачі відомі з робіт [19, 20].

Дифракція акустичних хвиль на конусі з довільним поперечним перерізом, методами розвинутими в [13], вивчалась у працях [21, 22]. У [23] розв’язок стаціонарної задачі дифракції зводився до інтегралу Зомерфельда. В [24] цей метод використали для отримання високочастотних асимптотик дальнього поля в тіньових областях. Ці асимптотики виражались через функції параболічного циліндра.

Інша група задач, до якої в даний час привернута увага дослідників, це задачі дифракції на плоских секторах, які отримують з еліптичного конуса, коли одна з його осей сходиться в точку [17, 25–29].

Підхід запропонований у [30] дозволив отримати подання поля для чверть площини (плоского конуса) з граничною умовою Діріхле. Подальший розвиток цього підходу знаходимо у працях [31, 32] та в [33], де ця задача розв'язується з граничною умовою Неймана.

Задачі дифракції хвиль на плоских секторах вивчали також у [34, 35]. Так у [34], для розв'язування такої задачі із граничною умовою Діріхле та Неймана було запропоновано використовувати метод випадкового блукання, що зводиться до відшукання математичного сподівання на траєкторіях випадкового руху. У праці [35] з допомогою інтегрального перетворення Ватсона-Бесселя та неповного розділення змінних задача дифракції на кутовому секторі з граничною умовою Діріхле зведено до НСЛАР другого роду.

Розглянуті вище структури були математично ідеалізованими, тобто вивчали абсолютно м'які (гранична умова Діріхле) або абсолютно жорсткі поверхні (гранична умова Неймана) конуса, що відповідають граничним значенням імпедансу $Z = 0$ і $Z = \infty$ відповідно.

Розв'язки задач дифракції на конусах з імпедансними граничними умовами наведено в [36–42]. У праці [36] інтегральним перетворенням Конторовича-Лєбедєва крайову задачу дифракції на круговому конусі з імпедансними граничними умовами зведено до крайової задачі Рімана-Гільберта для аналітичних функцій. У роботах [38–42] ця задача досліджувалась з використанням інтегральних перетворень Зоммерфельда-Малюжинця, Конторовича-Лєбедєва та Фур'є.

Дифракція плоскої акустичної хвилі на прозорому конусі вивчалась у працях [43–45], де зводилась до сингулярного інтегрального рівняння. Ці рівняння розв'язувались чисельно. Експериментальне вивчення дифракції хвиль на прозорих конусах і використання цих результатів для дослідження органів людського тіла вивчали в [46].

Що стосується другого напрямку досліджень, пов'язаного з вивченням дифракції хвиль на конічних поверхнях з краями, то тут розвиток аналітико-числових підходів проходить значно складніше.

При розв’язанні задачі дифракції точкового акустичного джерела на скінченному порожнистому жорсткому конусі використовували метод Вінера-Хопфа у поєднанні з методом інтегральних перетворень Конторовича-Лєбедєва [47, 48]. В [49] розглядалась дифракція на м’якому та жорсткому скінченному конусі, де внутрішня область одного із секторів перегороджувалась сферичним сегментом, заповненим акустичним матеріалом. Для розв’язання цієї задачі використовували метод власних функцій підобластей та метод спряження полів. Суттєве покращення збіжності досягали завдяки врахуванню асимптотичної поведінки розв’язку отриманої НСЛАР.

Високочастотні асимптотичні методи, що базуються на законах геометричної оптики [50], а також методах, які наближено враховують розсіяння хвиль краями, як от геометрична теорія дифракції [51] та метод краєвих хвиль [52], також застосовують для дослідження дифракції акустичних хвиль на скінченних конусах. Методи, що базуються на законах геометричної оптики, використовують принципу локальності, коли високочастотне падаюче поле “бачить” тільки локальні структурні особливості поверхні (вершину, край), що спричиняє появу розривів у дифракційних полях на границях перехідних зон, наприклад, поверхні каустики. Даний метод використовувався для аналізу розсіяного поля на скінченному конусі [53]. На відмінну від геометричної теорії дифракції, метод крайових хвиль Уфімцева полягає у розбитті дифрагованого поля на рівномірну складову, сформовану струмами наведених падаючим полем на поверхні тіла, та нерівномірну складову, що викликана локальними особливостями цього тіла, тобто краями і вершинами. Асимптотичні вирази для дифрагованого поля на скінченному конусі, отримані цим методом, наведено у [54].

Експериментально дифракція звукових хвиль на скінченному конусі досліджувалась у [55], де зокрема отримані залежності повного поля у центрі його основи від хвильової довжини твірної. У цій праці відношення довжини твірної до довжини хвилі не перевищувало 1.2732. У праці [56] показано, що подібна залежність розподілу повного поля спостерігається також у центрі диска.

Значна частина публікацій присвячена вивченню дифракції акустичних хвиль на дисках та кругових отворах в площинах (апертурах). Ці структури є частковими випадками скінченних або напівнескінченних конусів зі зрізаною вершиною. При їх дослідженнях умовно виділяють область релеївського розсіювання ($\lambda >> l$), резонансну ($\lambda \sim l$) та високочастотану ($\lambda << l$) області, де λ – довжина хвилі, l – радіус диска. Задачі дифракції на круглому м'якому і жорсткому дисках розв'язувались розкладом невідомого потенціалу в ряд за сфероїдальними функціями [57, 58] і чисельно досліджувалися у діапазоні $0 \le l / \lambda \le 1.523$. Розкладом поля в ряд за сферичними функціями досліджували задачі випромінювання з поверхні диска у [59]. Використання інтегральних рівнянь для розв'язання задач дифракції акустичних хвиль на дисках у випадку нормального падіння наведено в [60–62]. Цим же підходом опромінення диска під кутом досліджено в [63–66], а короткохвильові асимптотики отримані в [67 –69]. Серед наближених підходів, які використовуються для дослідження дифракційних хвиль на дисках, можна виділити методи Кірхгофа [70, 71], Келлера [72], метод Браунбека та Франца [73], а також метод *T*-матриць [74]. Для розв'язання задач дифракції на тілах довільної форми використовують, як правило, метод моментів [75].

Розподіл повного поля вздовж поверхні жорсткого диска числовим методом отримано в [62, 71]. Експериментально розподіл ближнього поля (у центрі, на краю та вздовж поверхні диска досліджувався в [56].

Дифракція електромагнітних хвиль на конусах, у більшості випадках, вивчалась за умови їх ідеальної провідності для *TM*-хвиль (*E*-поляризація) та *TE*-хвиль (*H*-поляризація), що є відповідно аналогами задачі Діріхле і Неймана в акустичному випадку. Ці хвилі відповідно збуджуються електричним і магнітним диполями і задача дифракції полягає у знаходженні азимутальних компонент вектора напруженості магнітного та електричного полів. Ґрунтовні дослідження цієї проблеми проведені на основі аналітичних, напіваналітичних та чисельних методів у працях [77–86]. Зокрема у [86] розвинуто метод аналітичної регуляризації для математично строгого розв'язання широкого класу задач дифракції на конічних поверхнях з краями в однорідних та кусковооднорідних середовищах. У цих працях було обґрунтовано як саму процедуру зведення задач теорії дифракції до НСЛАР другого роду, так і методи побудови необхідних регуляризуючих операторів. Цей метод став основою для розв'язання широкого класу задач збудження електромагнітними хвилями конусів зі щілинами, сферо-конічних резонаторів [87] та біконічних поверхонь [88–90].

Слід відмітити, що деформовано-напружений стан, що зазнають пружні конічні поверхні (див. рис. 1.1) під дією власної ваги чи сторонніх навантажень, розглядаються з погляду механіки деформівного твердого тіла, де визначаються поля напружень та переміщень [91–96].

У результаті проведеного огляду літератури, присвяченій вивченню дифракції на конусах, випливають наступні висновки.

1.1. Висновки до розділу 1

У результаті огляду та аналізу літератури за тематикою дисертаційної роботи встановлено:

1. При вивченні дифракції хвиль на конічних фрагментах з краями в основному застосовуються наближені методи (метод геометричної та фізичної теорії дифракції), а також прямі числові методи, реалізовані у пакетах прикладних програм. Такі підходи не є спеціалізованими, область їх використання є дуже широкою щодо зміни форми розсіювача, проте вони не завжди дозволяють досягнути необхідної точності і потребують верифікації аналітико-числовими методами.
2. На даний час аналітико-числові методи аналізу розвиваються найбільш інтенсивно стосовно вивчення дифракції хвиль напівнескінченними конусами з врахуванням фізичних властивостей їх поверхонь.
3. У літературі аналітико-числові методи дослідження розсіяння хвиль просторовими структурами з краями найбільш розвинуті для дисків, які є частковим випадком конуса.
4. Отже, розвиток аналітико-числових методів дослідження задач дифракції на

фрагментах конусів є актуальним; як випливає з огляду літератури для вивчення задач дифракції акустичних хвиль на таких структурах можна взяти за основу метод аналітичної регуляризації.

РОЗДІЛ 2
ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКОЇ АКУСТИЧНОЇ ХВИЛІ НА СКІНЧЕННОМУ КОНУСІ ПРИ ОСЬОВОМУ ОПРОМІНЕННІ

У цьому розділі розглядаємо осесиметричну задачу дифракції плоскої акустичної хвилі на скінченному порожнистому конусі. Цю задачу формулюємо як крайову для рівняння Гельмгольца відносно скалярного потенціалу швидкості дифрагованого поля, що задовольняє граничним умовам Діріхле або Неймана на боковій поверхні конуса. Тоді дифраговане поле подаємо у вигляді розкладу невідомого потенціалу швидкості у ряди власних функцій для кожної із підобластей існування звукового тиску. Такий підхід широко використовується при розв’язанні задач теорії дифракції хвиль на структурах кусково-канонічниї форми [49, 59, 97]. Далі, використовують властивості ортогональності власних функцій суміжних підобластей і задачі дифракції зводять до НСЛАР, які розв’язують чисельно. На відміну від класичних підходів, у цьому розділі для розв’язування задач дифракції на скінченних конусах використано ідею, яка полягає у виділенні сингулярної частини оператора дифракційної задачі і її точному аналітичному оберненні. Такий підхід дозволяє звести задачу до НСЛАР другого роду, яка допускає розв’язання методом редукції. Цей метод був раніше розвинутий і використовувався для вивчення дифракції електромагнітних хвиль на конусах з краями [86, 102].

Основні результати цього розділу відображено у працях [110, 111, 113, 115 –121, 124, 129].

2.1. Математична постановка задачі

Нехай у сферичній системі координат (r,θ,φ) задано ідеально м’який (*S*-випадок) або жорсткий (*R*-випадок) порожнистий скінченний конус (див. рис. 2.1)

$$Q_2:\{r\in(0,c_2);\theta=\gamma;\varphi\in[0,2\pi)\}, \tag{2.1}$$

де c_2 – довжина твірної конуса; γ – кут розхилу конуса. Конус Q_2 опромінюється полем плоскої монохроматичної акустичної хвилі, яка поширюється вздовж осі симетрії конуса у напрямку $\vec{n}=\vec{i}_z$ і характеризується потенціалом швидкості одиничної амплітуди

$$U^{(i)}(r,\theta)=\exp(ik\vec{r}\vec{n})=\exp(ikr\cos\theta). \tag{2.2}$$

Тут $k=\omega/c_0$ – хвильове число, ω – кругова частота, c_0 – швидкість поширення звуку; $\vec{n}$ – одиничний вектор, $\vec{n}=\vec{n}(0,0,\cos\theta)$. Гармонічну залежність поля від часу $\exp(-i\omega t)$ надалі опускаємо.

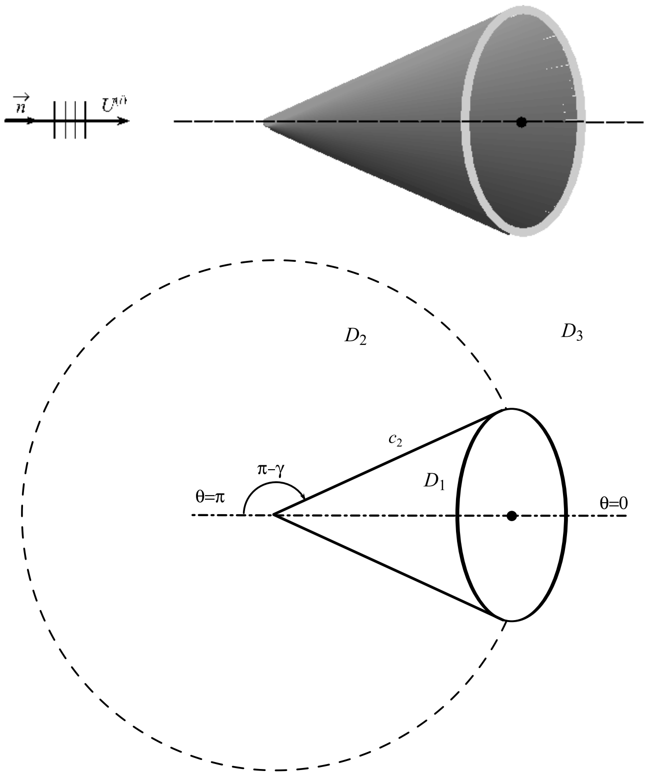


Рис. 2.1. Геометрична схема задачі.

У результаті взаємодії плоскої хвилі з конусом Q_2 в усьому просторі встановиться симетричне поле $U(r,\theta)$, незалежне від координати φ. Знаходження потенціалу швидкості дифрагованого поля $U(r,\theta)$ зведеться до розв'язання осесиметричної змішаної крайової задачі для рівняння Гельмгольца

$$\Delta U(r,\theta)+k^2U(r,\theta)=0, \tag{2.3}$$

де Δ – оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Невідомий потенціал швидкості дифрагованого поля $U(r,\theta)$ задовольняє граничну умову Діріхле або Неймана на поверхні Q_2 відповідно для м'якого і жорсткого конусів, яка записується у вигляді:

$$\left[U(r,\theta) + U^{(i)}(r,\theta)\right]\Big|_{(r,\theta)\in Q_2} = 0 \quad \text{для } S\text{-випадку;} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[U(r,\theta) + U^{(i)}(r,\theta)\right]\Big|_{(r,\theta)\in Q_2} = 0 \ \text{для } R\text{-випадку;} \tag{2.5}$$

Крім того, на шуканий потенціал накладаються умови:

– випромінювання Зомерфельда

$$\frac{\partial U(r,\theta)}{\partial r} - ikU(r,\theta) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty, \tag{2.6}$$

що виключає прихід хвиль із нескінченності;

– обмеженість енергії поля у довільному скінченному об'ємі V [66]

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_V \left\{\left|\nabla U(r,\theta)\right|^2 + k^2\left|U(r,\theta)\right|^2\right\} dV < \infty, \tag{2.7}$$

яка тут зводиться до виконання умови Мейкснера на краю та вершині конуса. Тут $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ – елементарний об'єм в сферичній системі координат.

Крайова задача (2.3)–(2.5) із використанням додаткових умов (2.6), (2.7) має єдиний розв'язок [98].

Введений потенціал швидкості однозначно пов'язаний з фізичними полями тисків і швидкостей з допомогою співвідношень [99]:

$$p = -i\omega\rho_0 U, \ \vec{\vartheta} = -\nabla U, \tag{2.8}$$

де ρ_0 – середня густина; ∇ – оператор набла,

$$\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

а $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ – орти в сферичній системі координат.

2.2. Суматорні рівняння дифракційної задачі

Для розв'язання крайової задачі (2.3)–(2.7), і отримання загального розв'язку, у просторі

$$R^3 : \{ r \in (0,\infty), \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi) \}$$

виділимо підобласті, сформовані конусом Q_2:

$$\begin{aligned} &D_1 : \{ r \in (0,c_2); \theta \in [0,\gamma) \}; \\ &D_2 : \{ r \in (0,c_2); \theta \in (\gamma,\pi] \}; \\ &D_3 : \{ r \in (c_2,\infty); \theta \in [0,\pi] \}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Тут розуміється, що $\varphi \in [0,2\pi)$ для усіх підобластей.

Тоді, в підобластях існування звукового тиску, повне поле подамо так:

$$U^{(t)}(r,\theta) = \begin{cases} U(r,\theta), & (r,\theta) \in D_1, D_2; \\ U^{(i)}(r,\theta) + U(r,\theta), & (r,\theta) \in D_3. \end{cases} \tag{2.10}$$

Загальний розв'язок рівняння Гельмгольца будуємо з використанням методу відокремлення змінних і шуканий потенціал швидкості дифрагованого поля у кожній із виділених підобластей подамо рядами власних функцій так

$$U(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{sr}} \begin{cases} \sum\limits_{p=1}^{\infty} \overline{y}_p^{(2,1)} P_{\nu_p - 1/2}(\cos\theta) \dfrac{I_{\nu_p}(sr)}{I_{\nu_p}(sc_2)}, & (r,\theta) \in D_1; \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{y}_k^{(2,2)} P_{\mu_k - 1/2}(-\cos\theta) \dfrac{I_{\mu_k}(sr)}{I_{\mu_k}(sc_2)}, & (r,\theta) \in D_2; \\ \Phi_2(sr) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{x}_n^{(2)} P_{z_n - 1/2}(\cos\theta) \dfrac{K_{z_n}(sr)}{K_{z_n}(sc_2)}, & (r,\theta) \in D_3. \end{cases} \tag{2.11}$$

Тут $\overline{y}_p^{(2,1)}$, $\overline{y}_k^{(2,2)}$, $\overline{x}_n^{(2)}$ – невідомі коефіцієнти розкладу; $P_{\eta-1/2}(\cdot)$ – функція Лежандра; $I_\eta(\cdot)$ – модифікована функція Бесселя; $K_\eta(\cdot)$ – функція Макдональда; $s = -ik$; ν_p, μ_k – додатні корені трансцендентних рівнянь, які визначаються із

$$P_{\eta-1/2}(\cos\gamma)\Big|_{\eta=\nu_p} = 0, \; P_{\eta-1/2}(-\cos\gamma)\Big|_{\eta=\mu_k} = 0 \text{ для } S\text{-випадку}; \tag{2.12}$$

$$P^1_{\eta-1/2}(\cos\gamma)\Big|_{\eta=\nu_p} = 0, \; P^1_{\eta-1/2}(-\cos\gamma)\Big|_{\eta=\mu_k} = 0 \text{ для } R\text{-випадку}, \tag{2.13}$$

де $P^1_{\eta-1/2}(\cdot)$ – приєднана функція Лежандра [100]

$$P^1_{\eta-1/2}(\pm\cos\gamma) = \pm\partial P_{\eta-1/2}(\pm\cos\gamma)/\partial\gamma\,.$$

У виразі (2.11) також прийнято, що: $z_n = n-1/2$ і $\Phi_2(sr)\equiv 0$ для *S*-випадку та $z_n = n+1/2$ з $\Phi_2(sr)\equiv \overline{x}_0^{(2)} K_{1/2}(sr)/K_{1/2}(sc_2)$, де $\overline{x}_0^{(2)}$ – невідомий коефіцієнт для *R*-випадку. Така різниця у позначеннях тут обумовлена збудженням поршневої моди у *R*-випадку і її відсутністю, коли маємо *S*-випадок.

Потенціал первинного поля (2.2) у сферичній системі координат подамо у вигляді розкладу в ряд за сферичними функціями [100]:

$$U^{(i)}(r,\theta) = \frac{\phi(sr)}{\sqrt{sr}} + \frac{1}{\sqrt{sr}}\sum_{n=1}^{\infty} A_n P_{z_n-1/2}(\cos\theta) I_{z_n}(sr)\,, \tag{2.14}$$

де $A_n = \sqrt{2\pi}(-1)^{z_n-1/2} z_n$; $\phi(sr)\equiv 0$ для *S*-випадку і $\phi(sr)\equiv\sqrt{\pi/2}\,I_{1/2}(sr)$ для *R*-випадку.

Подання потенціалу у вигляді рядів (2.11) забезпечує виконання граничної умови (2.4) для м'якого та (2.5) для жорсткого конусів, умови випромінювання Зомерфельда (2.6), а також умови обмеженості поля у вершині конуса (2.7).

Невідомі коефіцієнти розкладу потенціалу (2.11) шукаємо у класі послідовностей, що забезпечує рівномірну збіжність рядів, а їх перші похідні допускають особливості типу $\rho^{-1/2}$, де ρ – віддаль до краю конуса у локальній системі координат.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу в (2.11) скористаємося умовами спряження повного потенціалу і його нормальної похідної на поверхні уявної сфери $\{r = c_2, \theta\in[0,\pi]\}$, що містить край конуса. Ці умови запишемо відповідно у вигляді

$$U^{(t)}(r,\theta)\Big|_{\substack{r=c_2+0\\ \theta\in[0,\pi]}} = \begin{cases} U^{(t)}(r,\theta)\Big|_{\substack{r=c_2-0\\ \theta\in[0,\gamma)}}; \\ U^{(t)}(r,\theta)\Big|_{\substack{r=c_2-0\\ \theta\in(\gamma,\pi]}}, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\left.\frac{\partial U^{(t)}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{\substack{r=c_2+0\\ \theta\in[0,\pi]}} = \begin{cases} \left.\dfrac{\partial U^{(t)}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{\substack{r=c_2-0\\ \theta\in[0,\gamma)}}; \\ \left.\dfrac{\partial U^{(t)}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{\substack{r=c_2-0\\ \theta\in(\gamma,\pi]}}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Тут $U^{(t)}(r,\theta)$ визначено виразом (2.10).

Підставивши (2.10) в (2.15), (2.16) та врахувавши (2.11) і (2.14), зведемо задачу до розв'язання системи суматорних рівнянь. У зв'язку з особливістю градієнта потенціалу при $r\to c_2\pm 0$ і $\theta\to\gamma\pm 0$, ці рівняння запишемо у вигляді

$$\Phi_2(sc_2)+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\bar{x}_n^{(2)}P_{z_n-1/2}(\cos\theta)+\underset{\theta\in[0,\pi]}{\phi(sc_2)}+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}A_nP_{z_n-1/2}(\cos\theta)I_{z_n}(sc_2)=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P}\bar{y}_p^{(2,1)}P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta), & \theta\in[0,\gamma);\\ \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K}\bar{y}_k^{(2,2)}P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta), & \theta\in(\gamma,\pi];\end{cases}\tag{2.17}$$

$$\Phi_2'(sc_2)+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\bar{x}_n^{(2)}P_{z_n-1/2}(\cos\theta)\frac{K_{z_n}'(sc_2)}{K_{z_n}(sc_2)}+\underset{\theta\in[0,\pi]}{\phi'(sc_2)}+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}A_nP_{z_n-1/2}(\cos\theta)I_{z_n}'(sc_2)=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P}\bar{y}_p^{(2;1)}P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta)\dfrac{I_{\nu_p}'(sc_2)}{I_{\nu_p}(sc_2)}, & \theta\in[0,\gamma);\\ \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K}\bar{y}_k^{(2;2)}P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)\dfrac{I_{\mu_k}'(sc_2)}{I_{\mu_k}(sc_2)}, & \theta\in(\gamma,\pi].\end{cases}\tag{2.18}$$

Тут $N=P+K$ для *S*-випадку і $N=P+K-1$ для *R*-випадку; штрих означає похідну за аргументом ($f'(sc)=\partial f(sc)/\partial(sc)$); граничний перехід буде проведено в кінцевих рівняннях так, щоб забезпечити виконання умови Мейкснера на краю конуса.

Для зведення суматорних рівнянь (2.17), (2.18) до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь використаємо формули перерозкладу функцій Лежандра із дробовим індексом

$$P_{z_n-1/2}(\cos\theta)=q(z_n,\gamma)\begin{cases}\lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P}\dfrac{\nu_p\alpha^+(\nu_p,\gamma)}{\nu_p^2-z_n^2}P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta), & \theta\in[0,\gamma),\\ \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K}\dfrac{\mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)}{\mu_k^2-z_n^2}P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta), & \theta\in(\gamma,\pi].\end{cases}\tag{2.19}$$

Тут

$$q(z_n,\gamma)=\begin{cases}P_{z_n-1/2}(\cos\gamma);\\ P^1_{z_n-1/2}(\cos\gamma),\end{cases}\qquad \alpha^{\pm}(\eta,\gamma)=\begin{cases}-2\left[\partial P_{\nu-1/2}(\pm\cos\gamma)/\partial\nu\right]^{-1}_{\nu=\eta};\\ \mp2\left[\partial P^1_{\nu-1/2}(\pm\cos\gamma)/\partial\nu\right]^{-1}_{\nu=\eta},\end{cases}\tag{2.20}$$

де верхня стрічка відповідає *S*-випадку, а нижня *R*-випадку; $\eta=\nu_p$ при верхньому знаку і $\eta=\mu_k$ – при нижньому.

Справедливе твердження, яке сформулюємо таким чином.

Теорема 2.1. Для усіх $0<\gamma<\pi$ ряди (2.19) збігаються до функції $P_{z_n-1/2}(\cos\theta)/q(z_n,\gamma)$ рівномірно по куту θ відповідно в областях $\theta\in[0,\gamma)$ і $\theta\in(\gamma,\pi]$.

Доведення. Розглянемо інтеграл

$$J_n^{\pm}(\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{tP_{t-1/2}(\pm\cos\theta)}{\left(t^2-z_n^2\right)P^l_{t-1/2}(\pm\cos\gamma)}dt,\tag{2.21}$$

де C_R – коло радіуса $|t|=R$; знак "+" береться, коли $\theta\in[0,\gamma]$ і "–", коли $\theta\in[\gamma,\pi]$; індекс l приймає два значення: $l=0$ відповідає *S*-випадку, а $l=1$ – *R*-випадку.

Підінтегральна функція в (2.21) має прості полюси у точках $t=\pm z_n$ і $t=\pm\eta_p$, де $\eta_p=\nu_p$, коли $\theta\in[0,\gamma]$ і $\eta_p=\mu_p$, коли $\theta\in[\gamma,\pi]$, $p=1,2,3,\ldots$. При $|t|\to\infty$ підінтегральна функція прямує до нуля не повільніше як $t^{-\varepsilon}$, де $\varepsilon=1$ для м'якого конуса і $\varepsilon=2$ – для жорсткого конуса. Отже $J_n^{\pm}(\theta)\to0$, при $R\to\infty$. Якщо тепер C_R не пересікає полюсів підінтегральної функції, то, замінимо інтеграл (2.21) рядом лишків

$$J_n^{\pm}(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Res}\left[\frac{tP_{t-1/2}(\pm\cos\theta)}{(t^2-z_n^2)P^l_{t-1/2}(\pm\cos\theta)}\right]\Bigg|_{t=\pm\eta_k}+\mathrm{Res}\left[\frac{tP_{t-1/2}(\pm\cos\theta)}{(t^2-z_n^2)P^l_{t-1/2}(\pm\cos\gamma)}\right]\Bigg|_{t=\pm z_n}=0.$$

Обчислимо лишки для верхнього знаку аргументу функції Лежандра. У результаті маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_kP_{\eta_k-1/2}(\cos\theta)}{(\eta_k^2-z_n^2)\partial P^l_{t-1/2}(\cos\gamma)/\partial t\Big|_{t=\eta_k}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_kP_{-\eta_k-1/2}(\cos\theta)}{(\eta_k^2-z_n^2)\partial P^l_{t-1/2}(\cos\gamma)/\partial t\Big|_{t=-\eta_k}}+$$

$$+\frac{P_{z_n-1/2}(\cos\theta)}{2P^l_{z_n-1/2}(\cos\gamma)}+\frac{P_{-z_n-1/2}(\cos\theta)}{2P^l_{-z_n-1/2}(\cos\gamma)}=0.$$

Використавши ідентичну процедуру для нижнього знаку "–" та скориставшись властивістю парності функцій Лежандра з дробовими індексами $P^l_{\nu-1/2}(\cos\theta)=P^l_{-\nu-1/2}(\cos\theta)$, отримаємо

$$P_{z_n-1/2}(\cos\theta)=-(\pm)^l\,2P^l_{z_n-1/2}(\cos\gamma)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k P_{\eta_k-1/2}(\pm\cos\theta)}{(\eta_k^2-z_n^2)\partial P^l_{t-1/2}(\pm\cos\gamma)/\partial t\big|_{t=\eta_k}},\quad (2.22)$$

де $l=0$ для S-випадку, а $l=1$ для R-випадку. Зіставивши вираз (2.22) із (2.19) приходимо до твердження теореми 2.1■

2.3. НСЛАР дифракційних задач для м'якого (*S*-випадок) і жорсткого (*R*-випадок) скінченних конусів

2.3.1. *S*-випадок. Підставимо формули (2.19) у ліві частини рівнянь (2.17) і (2.18). Обмежимось далі скінченним числом доданків і прирівняємо коефіцієнти при однакових функціях Лежандра. У результаті прийдемо до скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $N\times N$, де $N=P+K$, яку запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(2)}+q(z_n,\gamma)A_nI_{z_n}(sc_2)}{\nu_p^2-z_n^2}=\frac{\bar{y}_p^{(2,1)}}{\nu_p\alpha^+(\nu_p,\gamma)},\ p=\overline{1,P};\\&\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(2)}+q(z_n,\gamma)A_nI_{z_n}(sc_2)}{\mu_k^2-z_n^2}=\frac{\bar{y}_k^{(2,2)}}{\mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)},\ k=\overline{1,K};\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\nu_p^2-z_n^2}\left[x_n^{(2)}\frac{K'_{z_n}(sc_2)}{K_{z_n}(sc_2)}+q(z_n,\gamma)A_nI'_{z_n}(sc_2)\right]=\frac{\bar{y}_p^{(2,1)}}{\nu_p\alpha^+(\nu_p,\gamma)}\frac{I'_{\nu_p}(sc_2)}{I_{\nu_p}(sc_2)},\ p=\overline{1,P};\\&\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\mu_k^2-z_n^2}\left[x_n^{(2)}\frac{K'_{z_n}(sc_2)}{K_{z_n}(sc_2)}+q(z_n,\gamma)A_nI'_{z_n}(sc_2)\right]=\frac{\bar{y}_k^{(2,2)}}{\mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)}\frac{I'_{\mu_k}(sc_2)}{I_{\mu_k}(sc_2)},\ k=\overline{1,K}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Тут уведена нова змінна $x_n^{(2)}=q(z_n,\gamma)\bar{x}_n^{(2)}$.

У рівняннях (2.23), (2.24) виключаємо невідомі $\bar{y}_p^{(2,1)}$, $\bar{y}_k^{(2,2)}$ $(p,k=\overline{1,\infty})$ і отриману систему запишемо так

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^{(2)} \frac{sc_2 W\left[K_{z_n} I_{\nu_p}\right]_{sc_2}}{\left[\nu_p^2 - z_n^2\right] K_{z_n}(sc_2) I_{\nu_p}(sc_2)} = \sum_{n=1}^{N} \bar{A}_n \frac{sc_2 W\left[I_{z_n} I_{\nu_p}\right]_{sc_2}}{\left[\nu_p^2 - z_n^2\right] I_{z_n}(sc_2) I_{\nu_p}(sc_2)}, \; p = \overline{1,P};$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^{(2)} \frac{sc_2 W\left[K_{z_n} I_{\mu_k}\right]_{sc_2}}{\left[\mu_k^2 - z_n^2\right] K_{z_n}(sc_2) I_{\mu_k}(sc_2)} = \sum_{n=1}^{N} \bar{A}_n \frac{sc_2 W\left[I_{z_n} I_{\mu_k}\right]_{sc_2}}{\left[\mu_k^2 - z_n^2\right] I_{z_n}(sc_2) I_{\mu_k}(sc_2)}, \; k = \overline{1,K}, \tag{2.25}$$

де $\bar{A}_n = -q(z_n, \gamma) A_n I_{z_n}(sc_2)$; $W[\cdot]$ – визначник Вронського, $W[\beta\sigma]_\kappa = \beta(\kappa)\sigma'(\kappa) - -\sigma(\kappa)\beta'(\kappa)$.

Із множин індексів $\left\{\nu_p\right\}_{p=1}^{\infty}$ і $\left\{\mu_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ утворимо зростаючу послідовність коренів трансцендентних рівнянь (2.12)

$$\left\{\xi_q\right\}_{q=1}^{\infty} = \left\{\nu_p\right\}_{p=1}^{\infty} \bigcup \left\{\mu_k\right\}_{k=1}^{\infty}. \tag{2.26}$$

Далі перейдемо в (2.25) до границі, коли $N, P, K \to \infty$ $(N = P + K)$, розмістивши рівняння цієї системи у відповідності до послідовності (2.26). Тоді отриману НСЛАР запишемо у матричному вигляді так

$$A_{22} X^{(2)} = F^{(2)}, \tag{2.27}$$

де $X^{(2)} = \left\{x_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$; A_{11} – нескінченний матричний оператор,

$$A_{22} : \left\{ a_{qn}^{(22)} = \frac{sc_2 W\left[K_{z_n} I_{\xi_q}\right]_{sc_2}}{\left[\xi_q^2 - z_n^2\right] K_{z_n}(sc_2) I_{\xi_q}(sc_2)} \right\}_{q,n=1}^{\infty}; \tag{2.28}$$

$F^{(2)} = \left\{ f_q^{(2)} \right\}_{q=1}^{\infty}$ – відомий вектор,

$$f_q^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \frac{sc_2 W\left[I_{z_n} I_{\xi_q}\right]_{sc_2}}{\left[\xi_q^2 - z_n^2\right] I_{z_n}(sc_2) I_{\xi_q}(sc_2)}. \tag{2.29}$$

2.3.2. *R*-випадок. У цьому випадку із (2.11) та (2.13) випливає, що в областях D_1, D_2, D_3 встановиться незалежне від координати θ поле звукового тиску, яке визначається невідомими $\bar{x}_0^{(2)}$, $\bar{y}_1^{(2,1)}$, $\bar{y}_1^{(2,2)}$, оскільки $\nu_1 = \mu_1 = 1/2$, а $P_0(\cos\theta) \equiv 1$. Підставивши формули (2.19) у ліві частини рівнянь (2.17), (2.18) та обмежившись скінченою кількістю доданків, приходимо до скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Рівняння цієї системи, які включають невідомі

$\overline{x}_0^{(2)}$, $\overline{y}_1^{(2,1)}$, $\overline{y}_1^{(2,2)}$, запишемо так

$$\begin{aligned}
&2\frac{\overline{x}_0^{(2)}+A_0 I_{1/2}(sc_2)}{\alpha^+(1/2,\gamma)}+\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(2)}+q(z_n,\gamma)A_n I_{z_n}(sc_2)}{1/4-z_n^2}=\frac{2\overline{y}_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)},\ p=1;\\
&2\frac{\overline{x}_0^{(2)}+A_0 I_{1/2}(sc_2)}{\alpha^-(1/2,\gamma)}+\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(2)}+q(z_n,\gamma)A_n I_{z_n}(sc_2)}{1/4-z_n^2}=\frac{2\overline{y}_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)},\ k=1;
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\left[\overline{x}_0^{(2)}\frac{K'_{1/2}(sc_2)}{K_{1/2}(sc_2)}+A_0 I'_{1/2}(sc_2)\right]+\\
&+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1/4-z_n^2}\left[x_n^{(2)}\frac{K'_{z_n}(sc_2)}{K_{z_n}(sc_2)}+q(z_n,\gamma)A_n I'_{z_n}(sc_2)\right]=\frac{2\overline{y}_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{I'_{1/2}(sc_2)}{I_{1/2}(sc_2)},\ p=1;\\
&\frac{2}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\left[\overline{x}_0^{(2)}\frac{K'_{1/2}(sc_2)}{K_{1/2}(sc_2)}+A_0 I'_{1/2}(sc_2)\right]+\\
&+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1/4-z_n^2}\left[x_n^{(2)}\frac{K'_{z_n}(sc_2)}{K_{z_n}(sc_2)}+q(z_n,\gamma)A_n I'_{z_n}(sc_2)\right]=\frac{2\overline{y}_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{I'_{1/2}(sc_2)}{I_{1/2}(sc_2)},\ k=1.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Тут $x_n^{(2)}=q(z_n,\gamma)\overline{x}_n^{(2)}$.

Решта рівнянь для визначення $x_n^{(2)}$ записуються як в (2.23), (2.24), де $p=\overline{2,P}$, $k=\overline{2,K}$. Тоді розмірність системи становитиме $N\times N$, де $N=$ $=P+K-1$.

Виключивши із (2.30), (2.31) невідомі $\overline{x}_0^{(2)}$, $\overline{y}_1^{(2,1)}$, $\overline{y}_1^{(2,2)}$ отримуємо рівняння

$$\sum_{n=1}^{N}x^{(2)}\frac{sc_2 W\left[K_{z_n}I_{1/2}\right]_{sc_2}}{\left[1/4-z_n^2\right]K_{z_n}(sc_2)I_{1/2}(sc_2)}=\sum_{n=1}^{N}\overline{A}_n\frac{sc_2 W\left[I_{z_n}I_{1/2}\right]_{sc_2}}{\left[1/4-z_n^2\right]I_{z_n}(sc_2)I_{1/2}(sc_2)}. \tag{2.32}$$

Решта рівнянь системи записуються так як в (2.25) і беруться при $p=\overline{2,P}$ і $k=\overline{2,K}$.

Для знаходження невідомого значення $\overline{x}_0^{(2)}$ сформуємо систему із перших рівнянь виразів (2.30) і (2.31) у вигляді

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}x_n^{(2)}\frac{sc_2 W\left[K_{z_n}I_{1/2}\right]_{sc_2}}{\left[1/4-z_n^2\right]K_{z_n}(sc_2)I_{1/2}(sc_2)}=\\
&=\frac{2\overline{x}_0^{(2)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)K_{1/2}(sc_2)I_{1/2}(sc_2)}+\sum_{n=1}^{N}\overline{A}_n\frac{sc_2 W\left[I_{z_n}I_{1/2}\right]_{sc_2}}{\left[1/4-z_n^2\right]I_{z_n}(sc_2)I_{1/2}(sc_2)}.
\end{aligned}$$

Врахувавши тепер (2.32) знаходимо, що $\overline{x}_0^{(2)} \equiv 0$.

Із множини індексів $\{1/2\}$, $\{\nu_p\}_{p=2}^{\infty}$, $\{\mu_k\}_{k=2}^{\infty}$ сформуємо зростаючу послідовність

$$\{\xi_q\}_{q=1}^{\infty} = \{1/2\} \cup \{\nu_p\}_{p=2}^{\infty} \cup \{\mu_k\}_{k=2}^{\infty}. \tag{2.33}$$

Далі перейдемо до границі, коли $N, P, K \to \infty$ $(N = P + K - 1)$, розмістивши отримані рівняння у відповідності до послідовності (2.33), приходимо до НСЛАР, яка записується у вигляді (2.27) із $z_n = n + 1/2$.

Зауважимо, що при формальній редукції НСЛАР (2.27), з достатньо великим порядком N, задовольняються співвідношенню $P/K = \gamma/(\pi - \gamma)$. Це твердження безпосередньо випливає із асимптотичної поведінки коренів рівнянь (2.12), (2.13) [101]:

$$\nu_p = \frac{\pi}{\gamma}\left(p - \frac{1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right),\ \mu_k = \frac{\pi}{\pi - \gamma}\left(k - \frac{1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{k}\right) \text{ для } S\text{-випадку}; \tag{2.34}$$

$$\nu_p = \frac{\pi}{\gamma}\left(p - \frac{3}{4}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right),\ \mu_k = \frac{\pi}{\pi - \gamma}\left(k - \frac{3}{4}\right) + O\left(\frac{1}{k}\right) \text{ для } R\text{-випадку}. \tag{2.35}$$

2.4. Побудова регуляризуючих операторів і регуляризація НСЛАР

Для елементів матричного оператора (2.28) справедливі асимптотичні співвідношення [86]:

$$a_{qn}^{(22)} = \frac{1}{\xi_q - z_n} + \begin{cases} O\left(\left\langle \xi_q z_n \left(\xi_q - z_n\right)\right\rangle^{-1}\right), \xi_q, z_n >> |sc_2|; \\ O\left(\left(sc_2/2\right)^2\right), \qquad |sc_2| \to 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Для отримання асимптотичних оцінок (2.36) використано наступні співвідношення при $\nu >> |\eta|$

$$\frac{K_\nu'(\eta)}{K_\nu(\eta)} = -\frac{\nu}{\eta}, \qquad \frac{I_\nu'(\eta)}{I_\nu(\eta)} = \frac{\nu}{\eta}. \tag{2.37}$$

Враховуючи (2.36), виділимо головні члени асимптотик і введемо до розгляду матричний оператор типу згортки

$$A:\left\{a_{qn}=\frac{1}{\xi_q-z_n}\right\}_{q,n=1}^{\infty}. \tag{2.38}$$

Для знаходження оператора, оберненого до (2.38), розглянемо парну мероморфну функцію $M(\nu,\gamma)$ регулярну у смузі $\Pi:\{|\operatorname{Re}\nu|<1/2\}$. За межами Π $M(\nu,\gamma)$ має прості нулі і полюси відповідно у точках $\nu=\pm z_k$, $\nu=\pm\xi_q$ ($k,q=\overline{1,\infty}$). Цю функцію записуємо так

$$M(\nu,\gamma)=\frac{\cos\pi\nu}{\pi}\begin{cases}\left\{P_{\nu-1/2}(\cos\gamma)P_{\nu-1/2}(-\cos\gamma)\right\}^{-1};\\ -\left\{P^1_{\nu-1/2}(\cos\gamma)P^1_{\nu-1/2}(-\cos\gamma)\right\}^{-1}.\end{cases} \tag{2.39}$$

Тут верхній рядок відповідає *S*-випадку, а нижній – *R*-випадку.

Функція (2.39) допускає факторизацію у вигляді

$$M(\nu,\gamma)=M_+(\nu,\gamma)M_-(\nu,\gamma), \tag{2.40}$$

де $M_+(\nu,\gamma)$, $M_-(\nu,\gamma)$ – функції регулярні відповідно у півплощинах $\operatorname{Re}\nu>-1/2$ і $\operatorname{Re}\nu<1/2$; $M_+(\nu,\gamma)=M_-(-\nu,\gamma)=O\left(\nu^{\pm1/2}\right)$ при $|\nu|\to\infty$ в областях регулярності (верхній знак відповідає випадку м'якого конуса, а нижній – жорсткого).

Вирази для функцій $M_\pm(\nu,\gamma)$ отримуємо методом нескінченних добутків:

$$M_\pm(\nu,\gamma)=B_0\left\{\Gamma\left(\nu\pm1/2\right)e^{\chi\nu}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1\pm\frac{\nu}{\nu_n}\right)e^{\mp\frac{\nu}{\nu_n}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1\pm\frac{\nu}{\mu_n}\right)e^{\mp\frac{\nu}{\mu_n}}\right\}^{-1}. \tag{2.41}$$

Тут уведено такі позначення:

$$B_0=\varsigma^{-1/2};$$

$$\chi=\frac{\gamma}{\pi}\ln\frac{\gamma}{\pi}+\frac{\pi-\gamma}{\pi}\ln\frac{\pi-\gamma}{\pi}-\psi(\alpha)-S(\gamma)-S(\pi-\gamma);$$

$$S(\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma}{\pi(n-\beta)}-\frac{1}{\nu_n}\right\},\qquad S(\pi-\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\pi-\gamma}{\pi(n-\beta)}-\frac{1}{\mu_n}\right\},$$

де $\psi(\cdot)$ – логарифмічна похідна гамма-функції; $\varsigma=P_{-1/2}(\cos\gamma)P_{-1/2}(-\cos\gamma)$, $\alpha=3/4$, $\beta=1/4$ для *S*-випадку; $\varsigma=-P^1_{-1/2}(\cos\gamma)P^1_{-1/2}(-\cos\gamma)$, $\alpha=1/4$, $\beta=3/4$ для *R*-випадку; ν_n, μ_n – розв'язки трансцендентних рівнянь відповідно (2.12) для м’якого і (2.13) для жорсткого конуса.

Тоді оператор обернений до (2.38) знаходимо за правилом [86, 102]

$$A^{-1}:\left\{\tau_{kq}=\frac{1}{\left\{M_-^{-1}\left(\xi_q,\gamma\right)\right\}'M_-'\left(z_k,\gamma\right)\left(z_k-\xi_q\right)}\right\}_{k,q=1}^{\infty}, \qquad (2.42)$$

де

$$M_-'\left(z_k,\gamma\right)=\frac{d}{d\nu}M_-(\nu,\gamma)\Big|_{\nu=z_k},\ \left\{M_-^{-1}\left(\xi_q,\gamma\right)\right\}'=\frac{d}{d\nu}\left[M_-(\nu,\gamma)\right]^{-1}\Big|_{\nu=\xi_q}. \qquad (2.43)$$

Матричні елементи оператора (2.42) знаходимо з використанням співвідношень (2.43). При цьому враховуємо той факт, що z_k і ξ_q – це відповідно нулі і полюси функції (2.39), що дає змогу спростити запис оберненого оператора A^{-1} використовуючи співвідношення

$$M_-'\left(z_k,\gamma\right)=-\frac{1}{\left[P_{k-1}(\cos\gamma)\right]^2 M_+(k-1/2)};$$

$$\left\{M_-^{-1}\left(\xi_q,\gamma\right)\right\}'=\frac{\pi M_+\left(\xi_q,\gamma\right)}{\cos\pi\xi_q}\begin{cases}P_{\xi_q-1/2}(-\cos\gamma)\dfrac{\partial P_{\nu-1/2}(\cos\gamma)}{\partial\nu}\Bigg|_{\nu=\xi_q\in\left\{\nu_p\right\}_{p=1}^{\infty}}; \\ P_{\xi_q-1/2}(\cos\gamma)\dfrac{\partial P_{\nu-1/2}(-\cos\gamma)}{\partial\nu}\Bigg|_{\nu=\xi_q\in\left\{\mu_k\right\}_{k=1}^{\infty}};\end{cases}$$

для *S*-випадку;

$$M_-'\left(z_k,\gamma\right)=-\frac{1}{\left[P_k^1(\cos\gamma)\right]^2 M_+(k+1/2)};$$

$$\left\{M_-^{-1}\left(\xi_q,\gamma\right)\right\}'=-\frac{M_+\left(\xi_q,\gamma\right)}{\pi\cos\pi\xi_q}\begin{cases}P^1_{\xi_q-1/2}(-\cos\gamma)\dfrac{\partial P^1_{\nu-1/2}(\cos\gamma)}{\partial\nu}\Bigg|_{\nu=\xi_q\in\left\{\nu_p\right\}_{p=2}^{\infty}}; \\ P^1_{\nu-1/2}(\cos\gamma)\dfrac{\partial P^1_{\nu-1/2}(-\cos\gamma)}{\partial\nu}\Bigg|_{\nu=\xi_q\in\left\{\mu_k\right\}_{k=2}^{\infty}}.\end{cases}$$

для *R*-випадку і $\left\{M_-^{-1}(1/2,\gamma)\right\}'=M_+(1/2,\gamma)$.

Для оператора A^{-1} справедлива наступна асимптотична оцінка

$$\tau_{kq}=\begin{cases}O\left(z_k^{-1/2}\xi_q^{1/2}\left(z_k-\xi_q\right)^{-1}\right);\\ O\left(z_k^{1/2}\xi_q^{-1/2}\left(z_k-\xi_q\right)^{-1}\right),\end{cases}\qquad k,q\to\infty,$$

де верхня стрічка відповідає *S*-випадку, а нижня – *R*-випадку.

Виділимо в НСЛАР (2.27) матричний оператор (2.38) і, використовуючи обернений оператор (2.42), отримаємо НСЛАР другого роду, яку запишемо так:

$$X^{(2)}=A^{-1}\left(A-A_{22}\right)X^{(2)}+A^{-1}F^{(2)}. \tag{2.44}$$

Єдиний розв'язок НСЛАР (2.44) існує у просторі

$$b(\sigma):\left\{\left\|x_n^{(2)}\right\|=\sup_n\left|x_n^{(2)}n^{\sigma}\right|,\ \lim_{n\to\infty}\left|x_n^{(2)}n^{\sigma}\right|=0\right\}$$

при $0\le\sigma<3/2$ для *S*-випадку і $0\le\sigma<1/2$ для *R*-випадку, що забезпечує виконання умов Мейкснера на краю [86].

Для розв'язання НСЛАР (2.44) використовували метод редукції. Точність розв'язку відповідної скінченної системи оцінювали так

$$e(N)=\frac{\max\limits_{n\le N}\left|\left\{x_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{N+1}-\left\{x_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{N}\right|}{\max\limits_{n\le N}\left|\left\{x_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{N}\right|}. \tag{2.45}$$

На рис. 2.2 ілюструється залежність похибки $x_n^{(2)}$ від параметра редукції N для кута розхилу м'якого конуса $\gamma=60°$. Як видно із цього рисунку, для забезпечення похибки $e<0.2\%$ параметр редукції потрібно вибирати з умови: $N=\left[|sc_2|\right]+\iota_2$, де $\iota_2=4...10$.

Невідомі коефіцієнти розкладу у (2.11) знаходимо із НСЛАР (2.44) у вигляді

$$\bar{x}_n^{(2)}=\frac{x_n^{(2)}}{q(z_n,\gamma)}; \tag{2.46}$$

$$\bar{y}_p^{(2,1)}=\phi(sc_2)\delta_p^1+\nu_p\alpha^{+}(\nu_p,\gamma)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^{(2)}}{\nu_p^2-z_n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q(z_n,\gamma)}{\nu_p^2-z_n^2}A_nI_{z_n}(sc_2)\right); \tag{2.47}$$

$$\bar{y}_k^{(2,2)}=\phi(sc_2)\delta_k^1+\mu_k\alpha^{-}(\mu_k,\gamma)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^{(2)}}{\mu_k^2-z_n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q(z_n,\gamma)}{\mu_k^2-z_n^2}A_nI_{z_n}(sc_2)\right). \tag{2.48}$$

Тут δ_p^1 – символ Кронекера.

Вирази (2.46)–(2.48) дозволяють визначати акустичне поле відповідно в підобластях $D_1 \div D_3$.

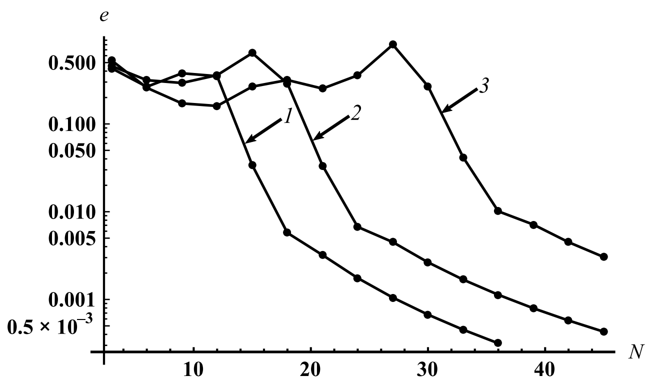


Рис. 2.2. Залежність похибки розв’язку від параметра редукції N для м’якого конуса з кутом розхилу $\gamma = 60°$:

1 – $kc_2 = 12$; *2* – $kc_2 = 18$; *3* – $kc_2 = 30$.

2.5. Низькочастотне наближення

Перепишемо НСЛАР (2.44) у вигляді

$$x_k^{(2)} = \sum_{q=1}^{\infty} \tau_{kq} \left(a_{qn} - a_{qn}^{(22)} \right) x_n^{(2)} + \sum_{q=1}^{\infty} \tau_{kq} f_q^{(2)}, \qquad (2.49)$$

де $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Приймаючи до уваги (2.37), низькочастотна асимптотика доданків в (2.29) записується так

$$\left. \frac{sc_2 W\left[I_{z_n} I_{\xi_q} \right]_{sc_2}}{\left[\xi_q^2 - z_n^2 \right] I_{z_n}(sc_2) I_{\xi_q}(sc_2)} \right|_{sc_2 \to 0} = \frac{1}{\xi_q + z_n} + O\left(\left(\frac{sc_2}{2} \right)^2 \right). \qquad (2.50)$$

Тоді, враховуючи (2.29), (2.36), (2.50) і нехтуючи членами порядку $O\left((sc_2/2)^2 \right)$, низькочастотне наближення розв’язку НСЛАР (2.49) записуємо так

$$x_k^{(2)} = -\sum_{q=1}^{\infty} \tau_{kq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(z_n, \gamma) A_n I_{z_n}(sc_2)}{\xi_q + z_n}. \qquad (2.51)$$

Розглянемо інтеграл

$$J_{nk}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{M_-(t,\gamma)}{(z_n+t)(z_k-t)}dt\,, \qquad (2.52)$$

де C_R – коло радіуса $|t|=R$, що охоплює прості полюси підінтегрального виразу у точках $t=\xi_q$ $(q=1,2,3,...)$ і $t=z_n$. Підінтегральний вираз в (2.52) прямує до нуля як $t^{-\varepsilon}$ при $t\to\infty$, де $\varepsilon=3/2$ для м'якого конуса і $\varepsilon=5/2$ для жорсткого. Тоді, використавши теорему про лишки, знаходимо, що

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{\left\{\left[M_-(\xi_q,\gamma)\right]^{-1}\right\}'\left(z_k-\xi_q\right)\left(\xi_q+z_n\right)}=-\frac{M_+(z_n,\gamma)}{z_n+z_k}. \qquad (2.53)$$

Врахувавши (2.42), (2.53), вираз (2.51) переписуємо у вигляді

$$x_k^{(2)}=\frac{\sqrt{2\pi}}{M'_-(z_k,\gamma)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{z_n-1/2}q(z_n,\gamma)M_+(z_n,\gamma)}{(z_n+z_k)\Gamma(z_n)}\left(\frac{sc_2}{2}\right)^{z_n}. \qquad (2.54)$$

Тут використано асимптотичне подання модифікованої функції Бесселя при малих значеннях аргументів $(\eta\to 0)$ [100]

$$I_\nu(\eta)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{\nu}. \qquad (2.55)$$

Вираз (2.54) сумісно з виразами (2.46)–(2.48) та (2.11) дають наближений розв'язок задачі дифракції у низькочастотному випадку як розклад у ряд за зростаючими степенями sc_2.

2.6. Редукція нескінченних добутків

При проведенні чисельного експерименту ключовим моментом є обчислення функції $M_+(\nu,\gamma)$, заданої нескінченним добутком. Для того, щоб обмежитись якомога меншою скінченною кількістю членів добутку у виразі (2.41) і при цьому покращити збіжність нескінченних добутків використали співвідношення [103]

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\nu}{\alpha n+\beta}\right)e^{-\frac{\nu}{\alpha n}}=\frac{\Gamma\left(1+\beta/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+\nu/\alpha+\beta/\alpha\right)}e^{-\frac{C\nu}{\alpha}}, \qquad (2.56)$$

де C – стала Ейлера.

Тоді разом із (2.56) та врахуванням асимптотик коренів (2.34), (2.35) запишемо

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\nu}{\nu_n}\right)e^{-\frac{\nu}{\nu_n}}=\Gamma(\sigma)e^{-C\frac{\nu\gamma}{\pi}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\dfrac{\nu}{\nu_n}\right)}{\left(1+\dfrac{\nu\gamma}{\pi n-\beta\pi}\right)}e^{\nu\left[-\frac{1}{\nu_n}+\frac{\gamma}{\pi n}\right]},$$
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\nu}{\mu_n}\right)e^{-\frac{\nu}{\mu_n}}=\Gamma(\sigma)e^{-C\frac{\nu\gamma}{\pi}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\dfrac{\nu}{\mu_n}\right)}{\left(1+\dfrac{\nu(\pi-\gamma)}{\pi n-\beta\pi}\right)}e^{\nu\left[-\frac{1}{\mu_n}+\frac{\pi-\gamma}{\pi n}\right]}, \qquad (2.57)$$

де $\sigma=3/4,\ \beta=1/4$ для *S*-випадку; $\sigma=1/4,\ \beta=3/4$ для *R*-випадку.

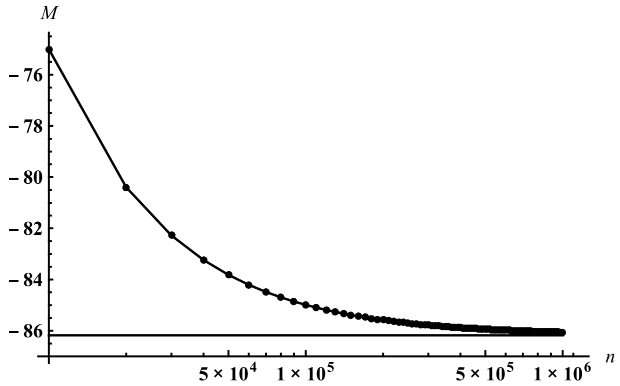
На рис. 2.3 показано приклад обчислення функції $M(\nu,\gamma)$ (2.39) при фіксованих параметрах $\nu=50$, $\gamma=\pi/3$. Обчислення проводили двома різними способами. Спочатку безпосередньо обчислювали добутки за формулами (2.40), (2.41), а далі за формулами (2.40), (2.41) з врахуванням (2.57). Із рис. 2.3, *б* видно, що (2.57) для обчислення добутку (2.41) дозволяє обмежиться на декілька порядків меншою кількістю утримуваних членів n. Так при $n=70$ маємо $M(50,\pi/3)=-86.174998$, тоді як із формули (2.39) отримуємо, що $M(50,\pi/3)=-86.177908$.

2.7. Граничний перехід до диска

Розглянемо граничний випадок переходу конуса у диск, що відповідає куту розхилу $\gamma=\pi/2$. У цьому випадку індекси z_n і ξ_q для м’якого і жорсткого дисків виражаються відповідно так

$$z_n=2n-3/2,\ \xi_q=2q-1/2;$$
$$z_n=2n-1/2,\ \xi_q=2q-3/2, \qquad (2.58)$$

де $n,q=1,2,3,\ldots$.



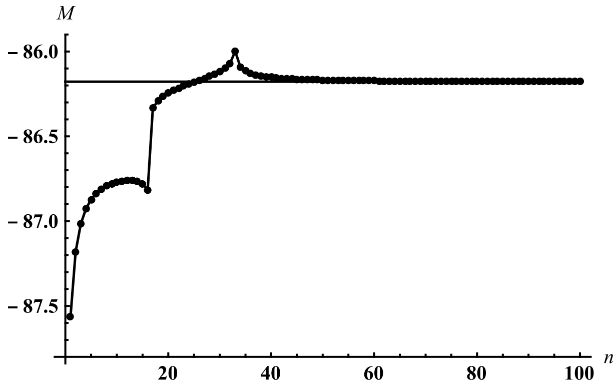


Рис. 2.3. Розрахунок функції $M(\nu,\gamma)$ для *S*-випадку при $\nu = 50$, $\gamma = \pi/3$:

n – кількість співмножників добутків;

суцільна лінія – згідно (2.39); маркована лінія – згідно (2.41);

а – без урахування виразу (2.57), *б* – із врахуванням виразу (2.57).

Для побудови виразу для характеристичної функції $M(\nu,\gamma)$ у випадку, коли $\gamma = \pi/2$ використаємо подання функцій $\cos\pi\nu$, $P_{\nu-1/2}(0)$, $P^1_{\nu-1/2}(0)$ через гамма-функцію [100]:

$$\cos\pi\nu = \frac{\pi}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(-\nu+1/2)};$$
$$P_{\nu-1/2}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu/2+3/4)\Gamma(-\nu/2+3/4)}; \qquad (2.59)$$
$$P^1_{\nu-1/2}(0) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu/2+1/4)\Gamma(-\nu/2+1/4)}.$$

Тоді відповідно до (2.59), функцію (2.39) подамо так

$$M(\nu,\pi/2) = \frac{1}{4\pi\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(-\nu+1/2)}\begin{cases}4\Gamma^2(\nu/2+3/4)\Gamma^2(-\nu/2+3/4);\\ -\Gamma^2(\nu/2+1/4)\Gamma^2(-\nu/2+1/4).\end{cases} \qquad (2.60)$$

Регуляризація виразу (2.60) відносно уявної осі запишеться у вигляді

$$M_+(\nu,\pi/2) = \frac{2^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\begin{cases}2\Gamma^2\left(\nu/2+3/4\right);\\ i\,\Gamma^2\left(\nu/2+1/4\right).\end{cases}$$

Елементи оберненого оператора знаходимо за формулою (2.42) враховуючи, що

$$M'_-(\nu,\pi/2)\Big|_{\nu=z_k} = \frac{i\pi\Gamma(k)}{\sqrt{8}\Gamma(k+1/2)}\begin{cases}i\left(2k-1\right);\\ 1;\end{cases}$$

$$\left\{M_-^{-1}(\nu,\pi/2)\right\}'\Big|_{\nu=\xi_q}=\frac{\pi\,\Gamma(q)}{\sqrt{8}\Gamma(q+1/2)}\begin{cases}1;\\ i(2q-1).\end{cases}$$

Тоді пара регуляризуючих операторів запишеться так

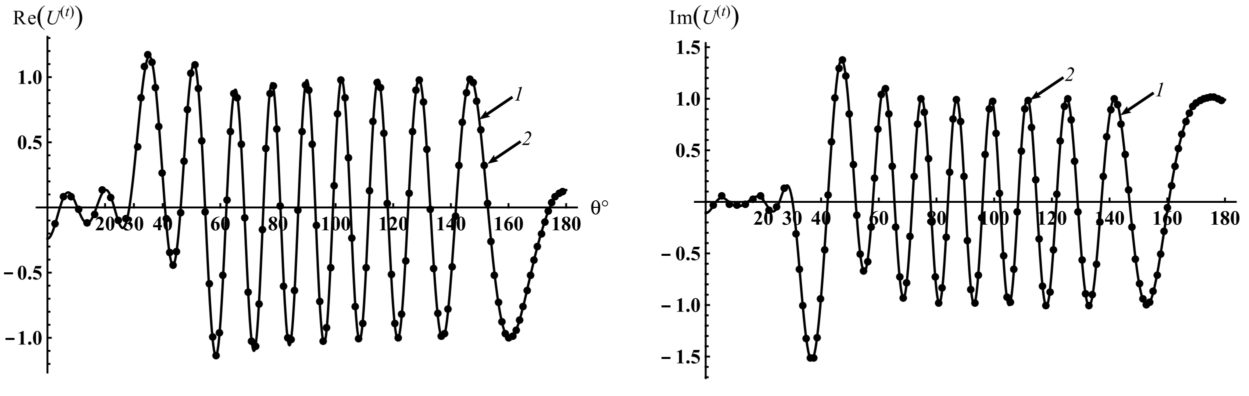
$$a_{qn}=\begin{cases}(2q-2n+1)^{-1};\\ (2q-2n-1)^{-1},\end{cases} \tag{2.61}$$

$$\tau_{kq}=\frac{8\Gamma(q+1/2)\Gamma(k+1/2)}{\pi^2\Gamma(q)\Gamma(k)}\begin{cases}(1-2k)^{-1}(2k-2q-1)^{-1};\\ (1-2q)^{-1}(2k-2q+1)^{-1}.\end{cases} \tag{2.62}$$

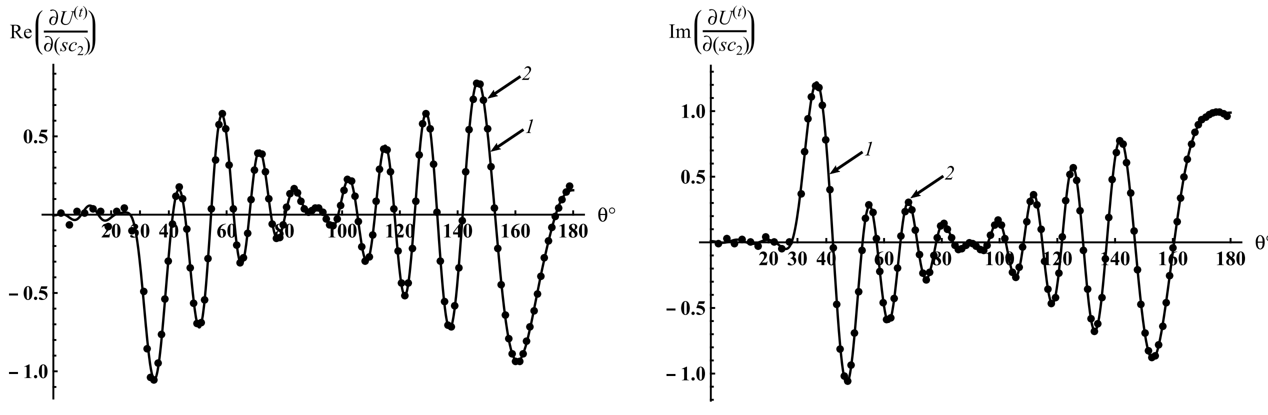
У виразах (2.61), (2.62) верхня стрічка відповідає випадку м’якого конуса, а нижня – жорсткого.

2.8. Аналіз результатів розрахунку

Спочатку перевіримо виконання умов неперервності повного тиску (2.15) і нормальної компоненти швидкості (2.16) як функції полярного кута θ на поверхні уявної сфери радіусу $r=c_2$. Відповідні зіставлення приведені на рис. 2.4 для м’якого конуса і на рис. 2.5 для жорсткого конуса. Із порівняння кривих на цих рисунках бачимо, що вони із графічною точністю співпадають, що є підтвердженням достовірності обчислень. Із рис. 2.4, *б* спостерігаємо локальні особливості коливальної швидкості. Це зумовлено тим, що коливальна швидкість в околі краю конуса має особливість $O\left((r-c_2)^{-1/2}\right)$.



а *б*



в *г*

Рис. 2.4. Дійсні та уявні частини акустичного поля на границі спряження підобластей D_1, D_2, D_3, для м'якого конуса із параметрами $\gamma = 30°$, $kc_2 = 30$:
а, б – повне поле; *в, г* – нормальна складова коливальної швидкості;
1 – зі сторони сферичної області $0 \le \theta \le \pi$;
2 – зі сторони конічних областей $0 \le \theta \le \gamma$ і $\gamma \le \theta \le 180°$.

При дослідженні просторового розподілу дифрагованого поля у зоні випромінювання аналізували діаграми спрямованості, які визначали так

$$D = \lim_{r\to\infty} \left| rU(r,\theta)\exp(-ikr) \right|. \tag{2.63}$$

Із асимптотичного подання функції Макдональда при великих значеннях аргументу

$$K_\nu(sr) = \sqrt{\frac{\pi}{2sr}}\exp(-sr) + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

та виразу (2.11) для області D_3 знаходимо

$$D = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{x}_n^{(2)} P_{z_n - 1/2}(\cos\theta)}{K_{z_n}(sc_2)} \right|. \tag{2.64}$$

На рис. 2.6 показано вплив хвильової довжини твірної kc_2 м'якого конуса на діаграми спрямованості при його опроміненні плоскою звуковою хвилею зі сторони вершини. Коли довжина твірної конуса $kc_2 \le 3$, то дифраговане поле слабо залежить від параметра kc_2 і практично рівномірно розподілене по куту θ. У цьому випадку розсіяне поле має монопольний характер розсіювання. Із ростом параметра kc_2 головна пелюстка діаграм спрямованості формується у напрямку $\theta = 0°$. Тобто основне випромінювання дифрагованого поля зосереджується у напрямку падіння плоскої хвилі. При $kc_2 = 8$ спостерігаємо утворення бокової пелюстки в околі кута спостереження $\theta = 80°$ і її зміщення до $\theta = 60°$ при рості хвильового параметра ($kc_2 = 10$), що відповідає напрямку геометричного відбивання від бокової поверхні Q_2. Зворотне випромінювання ($\theta = 180°$) з ростом kc_2 практично прямує до нуля. Ріст параметра kc_2 призводить до формування "глухої" області для кутів $\theta > 100°$ (див. рис. 2.6, *б*), де модуль потенціалу швидкості дифрагованого поля близький до нуля.

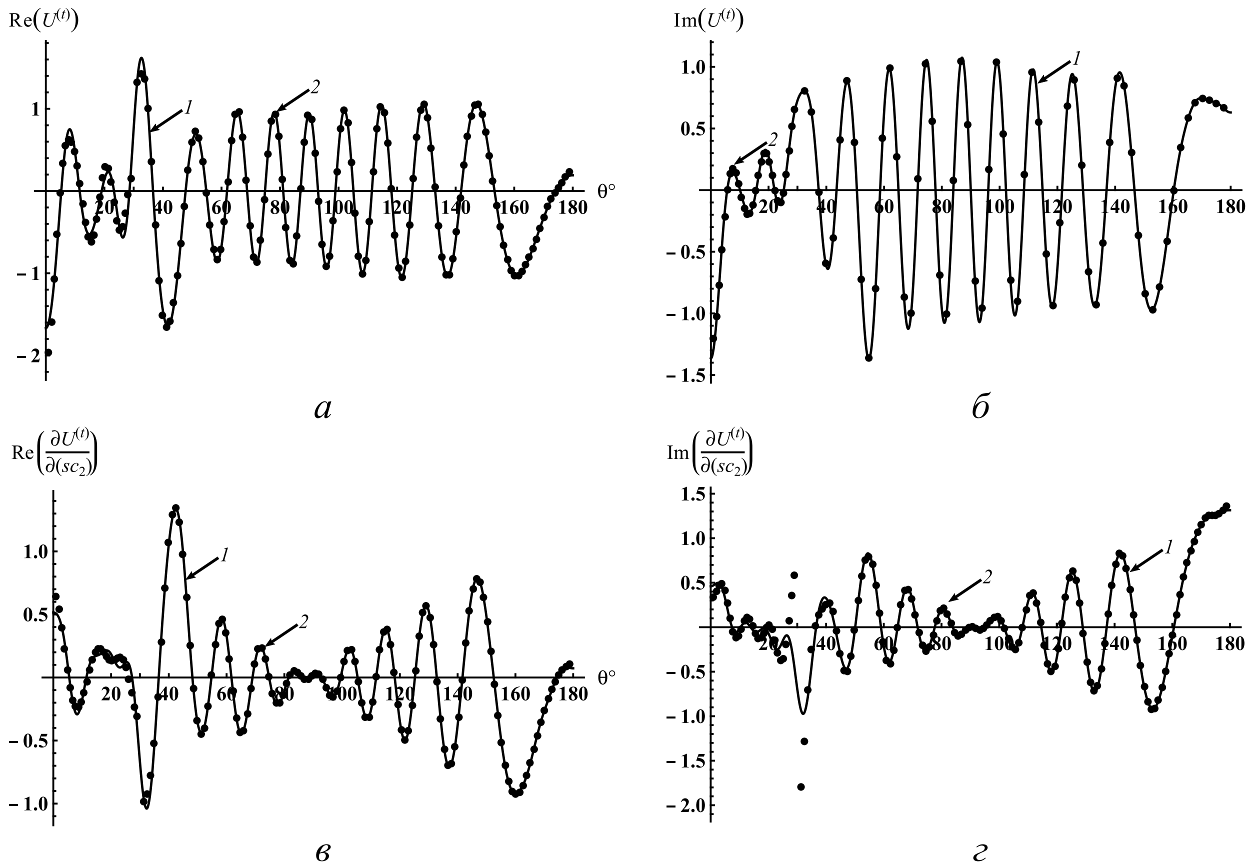
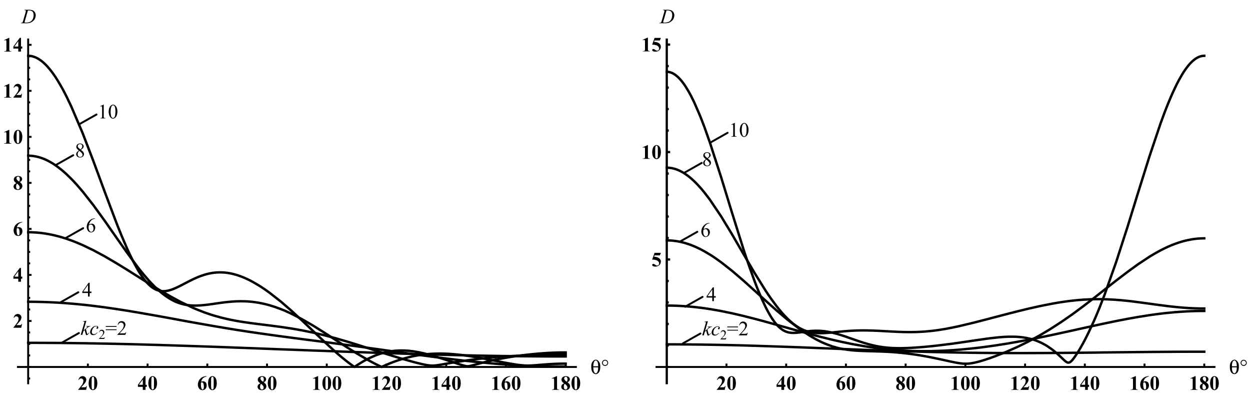


Рис. 2.5. Дійсні та уявні частини поля на границі спряження підобластей D_1, D_2, D_3 виділених жорстким конусом із параметрами: $\gamma = 30°$, $kc_2 = 30$: *а, б* – повне поле; *в, г* – нормальна складова коливальної швидкості; *1* – зі сторони сферичної області $0 \le \theta \le \pi$; *2* – зі сторони конічних областей $0 \le \theta \le \gamma$ і $\gamma \le \theta \le 180°$.

На рис. 2.6, *б* ілюструються аналогічні залежності діаграм спрямованості, коли конус опромінюється зі сторони основи ($\gamma = 150°$). Як видно із порівняння кривих на рис. 2.6, *а* і рис. 2.6, *б*, при $kc_2 \le 3$ діаграми спрямованості скінченних вузьких конусів, коли їх опромінювати плоскою хвилею вздовж осі як зі сторони вершини, так зі сторони основи, є близькими за формою. На відміну від попереднього випадку тепер достатньо високий рівень випромінювання дифрагованого поля спрямоване “назад” ($\theta = 180°$). Крім того, достатньо високий рівень випромінювання дифрагованого поля спостерігаємо і у напрямі поширення падаючої хвилі ($\theta = 0°$). Ця тенденція зберігається при всіх значеннях kc_2. При зростанні параметра kc_2 тут також формується область “глуха” до проникнення дифрагованого поля при $40° < \theta < 120°$, що видно із поведінки кривих на рис. 2.6, *б*. Ширина цієї області із ростом kc_2 звужується, що свідчить про формування спрямованості випромінювання у двох напрямках: вздовж напрямку поширення хвилі ($\theta = 0°$) та у напрямку зворотного розсіяння ($\theta = 180°$).



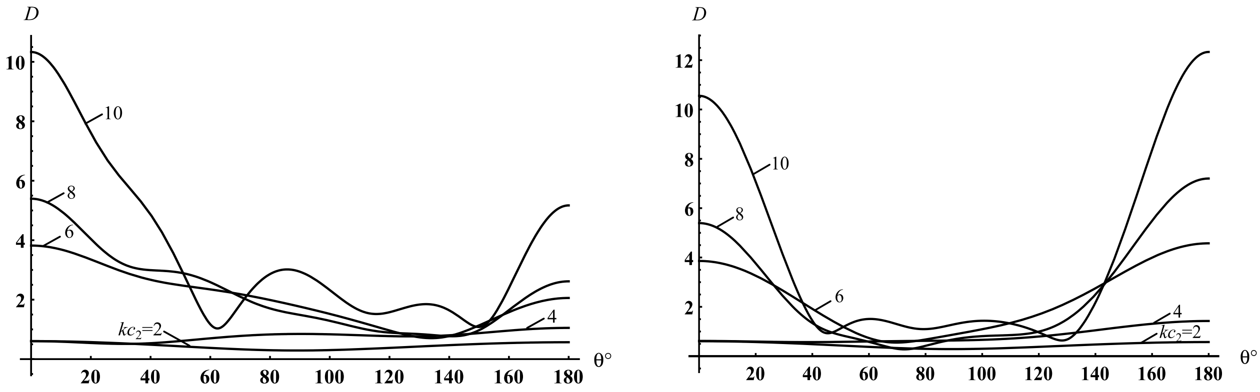
а *б*

Рис. 2.6. Вплив параметра kc_2 на діаграми спрямованості поля дифрагованого на м’якому конусі:

а – $\gamma = 30°$; *б* – $\gamma = 150°$.

Далі дослідили діаграми спрямованості жорсткого конуса Q_2 із такими геометричними параметрами як і у м’якого, розглянутого вище. Зіставлення кривих на рис. 2.6 та рис. 2.7 показує якісно подібні розсіювальні властивості м’якого та жорсткого конусів. Зокрема спостерігаємо формування з ростом kc_2

спрямованого випромінювання у напрямі поширення падаючої хвилі, а у випадку опромінення зі сторони основи формування також значного випромінювання назад.



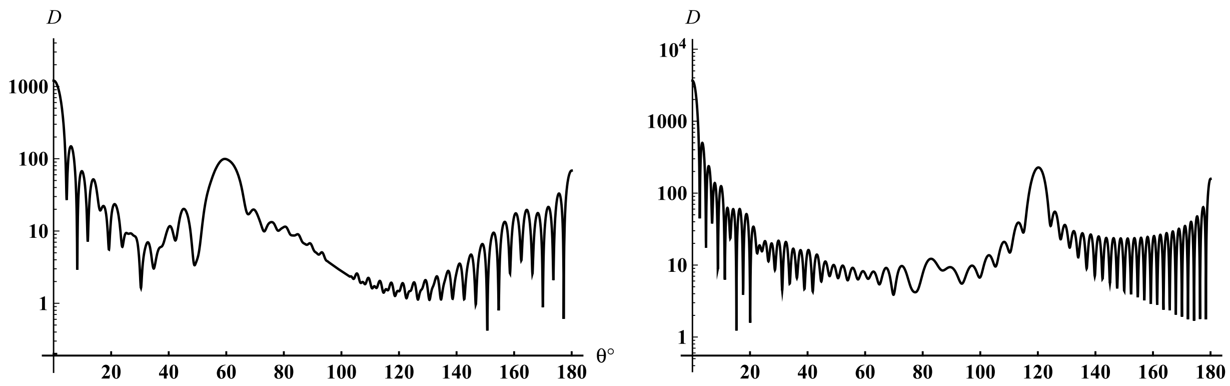
а *б*

Рис. 2.7. Вплив параметра kc_2 на діаграми спрямованості жорсткого конуса:

а – $\gamma = 30°$; *б* – $\gamma = 150°$.

На рис. 2.8 показано діаграми спрямованості для жорсткого конуса великого розміру ($c_2 > 15\lambda$) з кутами розхилу $\gamma = 30°$ (рис. 2.8, *а*) і $\gamma = 60°$ (рис. 2.8, *б*), що відповідає опроміненню у вершину. На цьому рисунку добре видно пелюстку, що відповідає дзеркальному відбиванню поля плоскої хвилі від бокової поверхні конуса у напрямку $\theta = 2\gamma$. Як бачимо із рис. 2.8, діаграма спрямованості на високих частотах є сильно “порізаною”, що вказує на значні перевідбиття хвиль від поверхні конуса, його країв та вершини і їх інтерференцію.

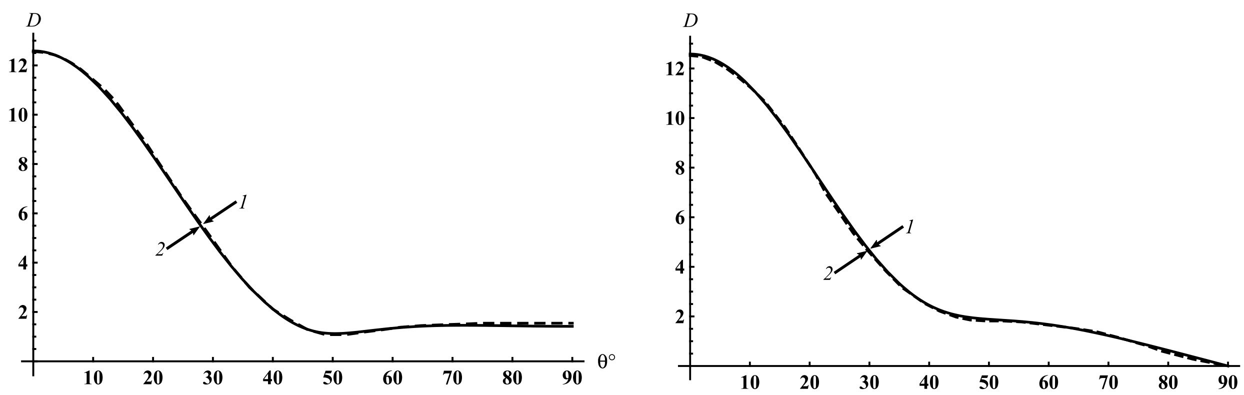
На рис. 2.9 проілюстровано діаграми спрямованості для м’якого (рис. 2.9, *а*) і жорсткого (рис. 2.9, *б*) дисків, які отримуємо з конусів при $\gamma = \pi/2$. Оскільки у цьому випадку дифраговане поле є антисиметричним відносно площини диска, то і діаграми спрямованості зображаємо в області $0° \le \theta \le 90°$. На цьому рисунку порівнюються наші криві *1* (суцільні лінії) із кривими *2* (штрихова лінія), які отримані незалежним методом, використовуючи розклад поля в ряд за сфероїдальними функціями [7]. Як видно із цього рисунку, криві *1* та криві *2* очікувано співпадають в усьому кутовому діапазоні, що підтверджує достовірність отриманих результатів. Зауважимо, що основна відмінність між характером поведінки діаграм спрямованості для м'яких і жорстких дисків спостерігається при $60° < \theta \le 90°$.



а *б*

Рис. 2.8. Діаграми спрямованості жорсткого конуса при $kc_2 = 100$:

а – $\gamma = 30°$; *б* – $\gamma = 60°$.



а *б*

Рис. 2.9. Порівняння діаграм спрямованості для диска при $kc_2 = 5$:

а – м'який диск; *б* – жорсткий диск;

1 – наші розрахунки ; *2* – отримані в [7].

2.8.1. Енергетичні характеристики дифрагованого поля. Дослідимо спочатку коефіцієнт концентрації, який згідно із визначенням запишемо так [104]:

$$\Omega = \frac{2\left\{D(\theta=0)\right\}^2}{\int\limits_0^\pi \left\{D(\theta)\right\}^2 \sin\theta d\theta}. \tag{2.65}$$

Використовуючи формулу (2.64) та властивість ортогональності функцій Лежандра

$$\int\limits_0^\pi P_{z_n-1/2}(\cos\theta) P_{z_k-1/2}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{\delta_n^k}{z_n}, \tag{2.66}$$

коефіцієнт концентрації Ω запишемо у вигляді

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\overline{x}_n^{(2)}|^2}{|K_{z_n}(sc_2)|^2} \Bigg/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\overline{x}_n^{(2)}|^2}{2z_n |K_{z_n}(sc_2)|^2}. \tag{2.67}$$

На рис. 2.10 показано залежність коефіцієнта концентрації Ω від хвильового параметра kc_2 при фіксованих значеннях кута розхилу γ для м'якого (рис. 2.10, *а*) та жорсткого (рис. 2.10, *б*) конусів. З рис. 2.10, *а* спостерігаємо монотонне зростання коефіцієнта концентрації з ростом хвильового параметра kc_2 та кута розхилу γ. У випадку жорсткого конуса (рис. 2.10, *б*), коефіцієнт концентрації Ω також зростає, проте спостерігаємо осциляції Ω, що вказує на немонотонність зростання випромінювання у напрямку $\theta = 0°$ із збільшенням kc_2. Глибина осциляцій Ω із ростом кута γ зменшується. Максимум Ω, як і слід було очікувати, спостерігаємо для широких конусів ($\gamma \to \pi/2$). Коли $kc_2 \to 0$, отримаємо $\Omega = 1$ ($\Omega = 3$) для м'якого (жорсткого) конуса. Це еквівалентно пульсуючому (осцилюючому) диску [59].

Згідно із [104], повний переріз розсіювання визначається так:

$$\sigma_t = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \left\{D(\theta,\varphi)\right\}^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{2.68}$$

Тоді користуючись формулами (2.64), (2.66) та (2.68), нормований повний переріз розсіювання записується у вигляді

$$\frac{\sigma_t}{2\pi c_2^2} = \frac{\pi}{2(kc_2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\overline{x}_n^{(2)}|^2}{z_n |K_{z_n}(sc_2)|^2}. \tag{2.69}$$

На рис. 2.11 наведені залежності нормованих перерізів розсіяння σ_t від хвильового параметра kc_2 при різних кутах розхилу γ для м'якого (рис. 2.11, *а*) та жорсткого (рис. 2.11, *б*) конусів. Як видно із поведінки кривих на рис. 2.11, *а* залежності σ_t зі збільшенням кута розхилу γ і при $kc_2 > 5$ прямують до постійного значення. Як і слід було очікувати, σ_t максимальний у випадку диска $(\gamma = 90°)$. Тоді переріз розсіяння стає рівний подвоєній площі диска, тобто $\sigma_t = 2\pi c_2^2$ і відповідає значенню, яке отримуємо за геометро-оптичного наближення. Зауважимо, що енергія розсіяна на конусі, не залежить від напряму опромінення ($\theta = 0°$ чи $\theta = 180°$), тому перерізи розсіяння для конусів з кутами розхилу γ і $\pi - \gamma$ співпадають.

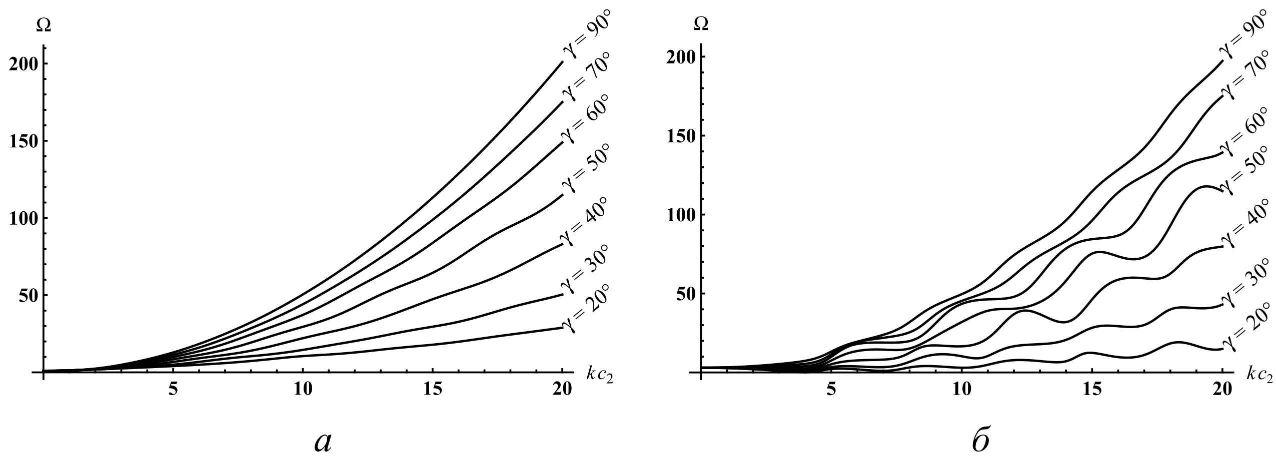


Рис. 2.10. Залежності $\Omega(kc_2)$ при різних значеннях γ:

а – м'який конус; *б* –жорсткий конус.

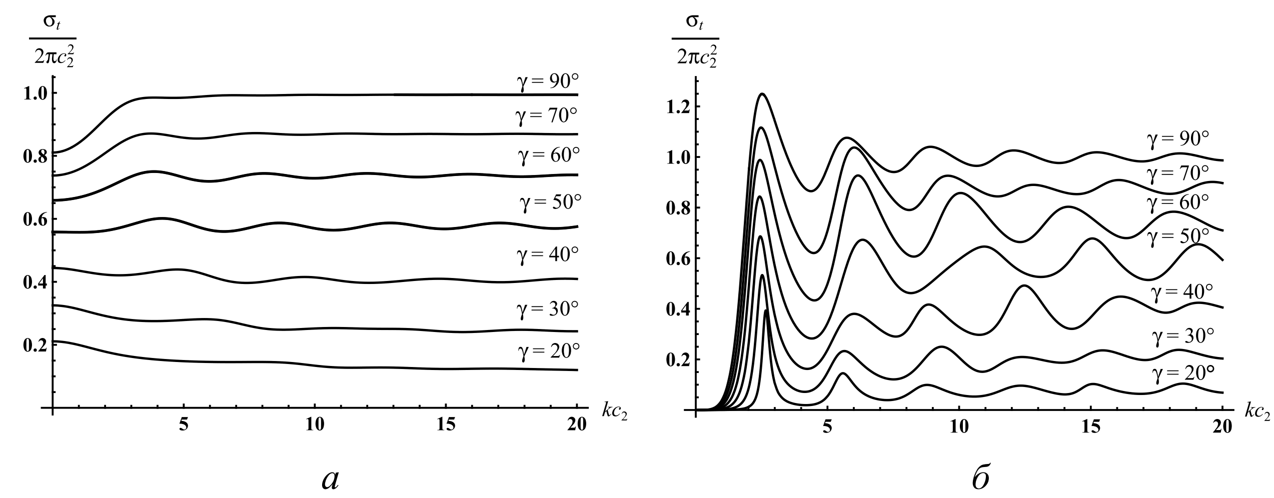


Рис. 2.11. Нормовані залежності $\sigma_t(kc_2)$ для різних значень кута розхилу γ:

а – м'який конус; *б* – жорсткий конус.

Як видно із поведінки кривих на рис. 2.11, *б* залежності $\sigma_t(kc_2)$ мають осцилюючий характер. Для усіх γ перший локальний максимум є яскраво виражений і свідчить про резонансний характер розсіювання. Ріст кута розхилу конуса приводить до зсуву головного максимуму у низькочастотну область до значень $kc_2 = 2.522$ для $\gamma = 90°$, а ефективна площа розсіяння зростає. На частотах $kc_2 \approx 3$ спостерігаємо зменшення перерізу розсіяння, де проявляється ефект акустичного замикання [59]. У довгохвильовому наближенні ($kc_2 \to 0$) для випадку жорсткого конуса $\sigma_t \to 0$, тоді як при $kc_2 \to 0$ для м'якого конуса значення σ_t відмінне від нуля (див. рис. 2.11, *а* і табл. 2.1). Цей ефект спостерігаємо на діаграмах спрямованості. На рис. 2.12, *а*, як приклад, наведено діаграми спрямованості м'якого (крива *1*) і жорсткого (крива *2*) конусів з параметрами $\gamma = 60°$ і $kc_2 = 0.01$. Із цього рисунку бачимо значні відмінності у рівнях амплітуд діаграми спрямованості.

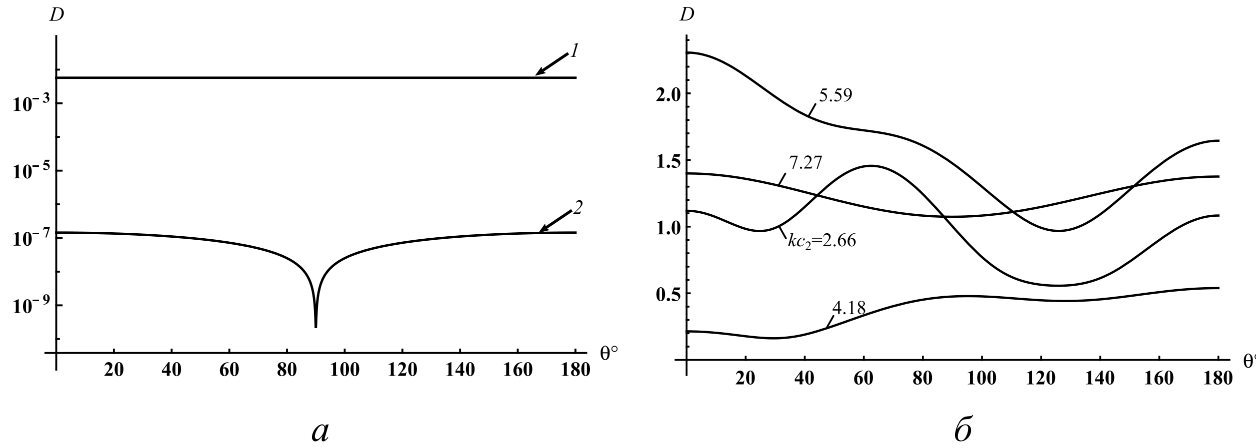


Рис. 2.12. Діаграми спрямованості поля дифрагованого на конусі:

а – $\gamma = 60°$, $kc_2 = 0.01$;

крива *1* – м'який конус, крива *2* – жорсткий конус;

б – жорсткий конус з параметрами $\gamma = 20°$, $kc_2 = 2.66;\ 4.19;\ 5.59;\ 7.27$.

Діаграми спрямованості для вузького жорсткого конуса з кутом розхилу $\gamma = 20°$ і хвильовими параметрами $kc_2 = 2.66$ та $kc_2 = 4.18$, при яких спостерігаємо відповідно резонансне підсилення ($\sigma_t / 2\pi c_2^2 = 0.39343$) і послаблення

($\sigma_t / 2\pi c_2^2 = 0.0191858$) σ_t, показано на рис. 2.12, *б*. На цьому рисунку також показано діаграми спрямованості для жорсткого конуса з хвильовими параметрами при яких виникає другий максимум ($kc_2 = 5.59$, $\sigma_t / 2\pi c_2^2 = 0.146258$) та мінімум ($kc_2 = 7.27$, $\sigma_t / 2\pi c_2^2 = 0.0394822$) σ_t. Із поведінки кривих на рис. 2.12, *б* спостерігаємо зростання рівня випромінювання в усіх напрямках для $kc_2 = 2.66$ і $kc_2 = 5.59$.

Таблиця 2.1.

Перший член розкладу перерізу розсіювання для м'якого конуса при $kc_2 \to 0$ в діапазоні кутів розхилу $5° \le \gamma \le 90°$ (див. рис. 2.10)

$\gamma°$	5	10	20	30	40
$\sigma_t / 2\pi c_2^2$	0.0626093	0.108625	0.211077	0.325297	0.443974
$\gamma°$	50	60	70	80	90
$\sigma_t / 2\pi c_2^2$	0.558198	0.658833	0.737536	0.787636	0.810569

Зауважимо, що переріз розсіювання, згідно оптичної теореми, можна виразити через уявну складову діаграми спрямованості при $\theta = 0°$ (розсіяння "вперед") [104]:

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k^2} \mathrm{Im}\left[\lim_{r\to\infty} \left(rU(r, \theta = 0°) e^{-ikr} \right) \right]. \tag{2.70}$$

Взявши до уваги формулу (2.70) та вираз для потенціалу (2.11) в області D_3 отримаємо

$$\frac{\sigma_t}{2\pi c_2^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{(kc_2)^2} \mathrm{Im}\left[i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_n^{(2)}}{K_{z_n}(sc_2)} \right]. \tag{2.71}$$

На рис. 2.13 показано порівняння нормованих перерізів розсіяння для м'якого (криві *1, 2*) та жорсткого (криві *3, 4*) конусів із кутом розхилу $\gamma = 30°$. На цьому рисунку криві *1, 3* отримані згідно формули (2.69), а криві *2, 4* згідно формули (2.71) добре співпадають у всьому діапазоні зміни хвильового параметра $0 \le kc_2 \le 20$.

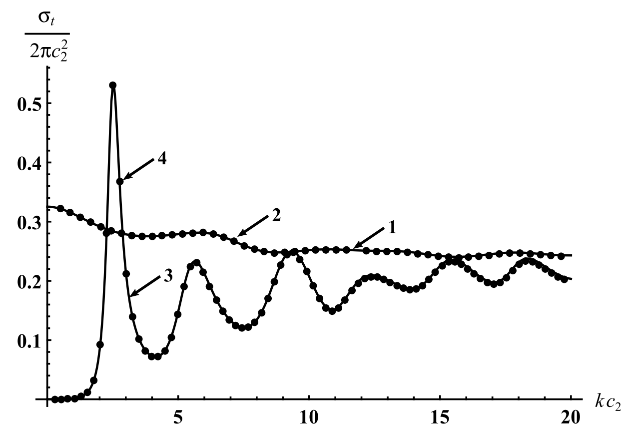


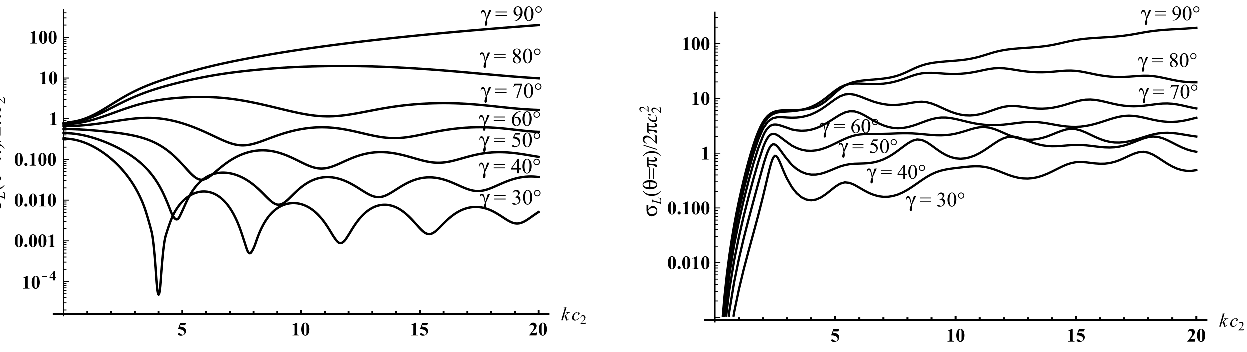
Рис. 2.13. Порівняння результатів розрахунків нормованих повних перерізів розсіювання для м'якого (криві *1, 2*) і жорсткого (криві *3, 4*) конуса з $\gamma = 30°$: криві *1, 3* – розраховано за формулою (2.69); криві *2, 4* – отримані згідно формули (2.71).

Дослідили позиційні перерізи розсіювання [99], які розраховували так

$$\frac{\sigma_L}{2\pi c_2^2} = \frac{\pi}{(kc_2)^2}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{x}_n^{(2)}}{K_{z_n}(sc_2)}P_{z_n-1/2}(\cos\theta)\right|^2 .$$

На рис. 2.14 показано нормований позиційний переріз розсіювання $\sigma_L(\theta = \pi)$ визначений у напрямку розсіювання "назад" ($\theta = \pi$) для м'якого (рис. 2.14, *а*) і жорсткого (рис. 2.14, *б*) конусів при фіксованих кутах розхилу γ. Бачимо, що залежності позиційних перерізів зворотного розсіювання від параметру kc_2 при $\gamma < 50°$ мають осциляційний характер, а перехід конуса в диск ($\gamma = 90°$) приводить до швидкого зростання $\sigma_L(\theta = \pi)$.

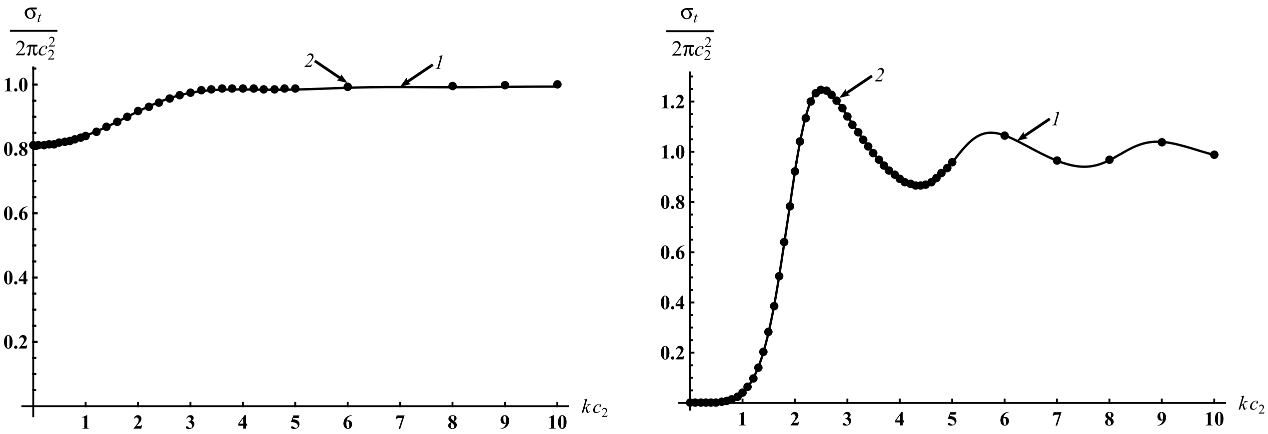
Порівняння нормованих перерізів розсіювання отриманих для м'якого і жорсткого дисків ($\gamma = 90°$) показано на рис. 2.15. Тут подано зіставлення наших кривих *1* із кривими *2* отриманими у праці [58] для $0 \le kc_2 \le 10$. Як видно із цього рисунку, перерізи розсіювання співпадають у всьому частотному діапазоні.



а *б*

Рис. 2.14. Нормовані перерізи зворотного розсіювання для різних γ:

а – м’який конус; *б* – жорсткий конус.



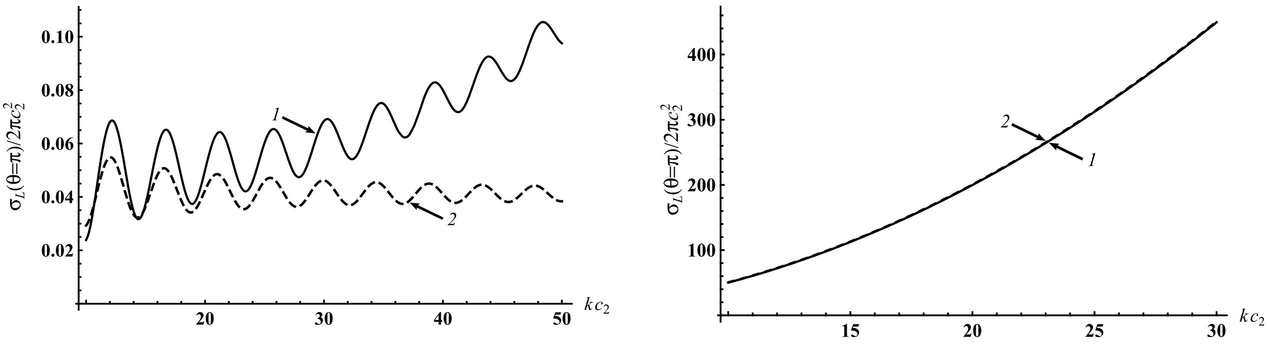
а *б*

Рис. 2.15. Порівняння нормованих перерізів розсіяння для диска:

а – м’який диск; *б* – жорсткий диск;

1 – наші результати; *2* – отримані у праці [58].

На рис. 2.16 наведено порівняння перерізів зворотного розсіювання $\sigma_L(\theta=\pi)$ отриманих нами (крива *1*) із результатами, що базуються на методі краєвих хвиль [54] (крива *2*) для двох кутів розхилу м’якого конуса: $\gamma=60°$ (рис. 2.16, *а*) і $\gamma=90°$ (рис. 2.16, *б*). Із рис. 2.16, *а* спостерігаємо, що криві *1* і *2* добре співпадають у мінімумах залежностей $\sigma_L(\theta=\pi)$, що лежать в околі $kc_2=14;\ 19$, і починають розходитися при $kc_2>20$. У випадку диска (рис. 2.16, *а*) криві *1*, *2* є практично ідентичними.



а *б*

Рис. 2.16. Нормовані перерізи зворотного розсіювання м’якого конуса:

а – $\gamma = 60°$; *б* – $\gamma = 90°$;

1 – наші результати; *2* – отримані у праці [58].

Отже, отримані результати у часткових випадках збігаються з відомими результатами, а отже використаний метод дає достовірні результати.

2.8.2. Ближнє поле жорсткого конуса. Перейдемо до аналізу ближнього поля конуса. Для цього спочатку дослідимо нормоване до амплітуди падаючого поля $U^{(i)}$ значення повного поля $U^{(t)}$ у вершині жорсткого конуса при $r = 0$. Взявши до уваги вирази (2.11) та використовуючи асимптотику модифікованої функції Бесселя при малих значеннях аргументів ($sr \to 0$) (2.55), нормоване повне поле запишемо у вигляді

$$\frac{U^{(t)}}{U^{(i)}} = \frac{\sqrt{sc_2}}{\operatorname{sh}(sc_2)} \begin{cases} \bar{y}_1^{(2,1)} \text{ в області } D_1; \\ \bar{y}_1^{(2,2)} \text{ в області } D_2. \end{cases} \tag{2.72}$$

Тут верхня стрічка відповідає тіньовій (тильній) стороні, а нижня – освітленій (фронтальній) стороні. Формула (2.72) описує поведінку повного поля у вершині конуса при куті розхилу $\gamma < 90°$ та на “дні” конічної каверни, коли $\gamma > 90°$.

Для ілюстрації залежностей $\left|U^{(t)} / U^{(i)}\right|$ в точці $r = 0$ від kc_2 розглянемо три кути розхилу конуса: $\gamma = 30°$ (рис. 2.17, *а*, *б*), $\gamma = 90.01°$ (рис. 2.17, *в*, *г*) і $\gamma = 150°$ (рис. 2.17, *ґ*, *д*). Тут рисунки з індексами *а*, *в*, *ґ* відповідають освітленій стороні, а *б*, *в*, *г* – тіньовій. Розглянемо спочатку освітлену вершину конуса (див. рис. 2.17, *а*, *в*, *ґ*). Як бачимо, тут поле має складну осцилюючу залежність від хвильового параметра kc_2, і, відповідно, криві на цих рисунках послідовно проходять через максимуми і мінімуми. Для $\gamma = 30°$ і $kc_2 > 12$ (рис. 2.17, *а*) залежності стають практично періодичними з періодом $kc_2 = 7$ не перевищуючи

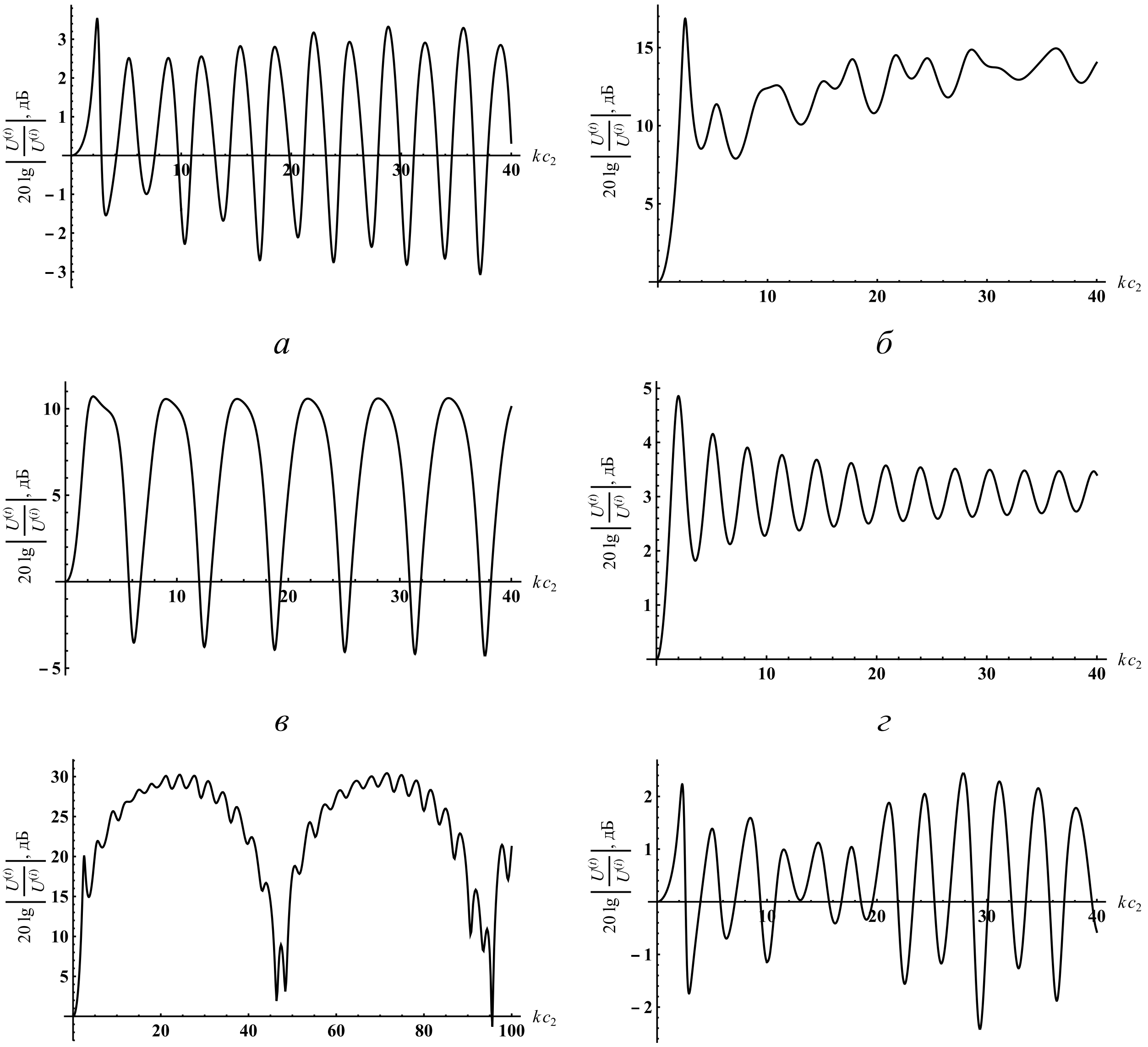


Рис. 2.17. Нормовані розподіли повного поля у вершині жорсткого конуса:

а, *б* – $\gamma = 30°$; *в*, *г* – $\gamma = 90.01°$; *ґ*, *д* – $\gamma = 150°$;

а, *в*, *ґ* – освітлена частина; *б*, *г*, *д* – тіньова частина.

при цьому значення 3.6 дБ. При наближенні кута розхилу γ до прямого $\gamma = 90.01°$ (рис. 2.17, *в*) спостерігаємо потроєння тиску $\left(|U^{(t)}| \approx 3|U^{(i)}|\right)$, коли довжина твірної c_2 близька до величини кратної непарному числу півхвиль

$kc_2 = (2n-1)\pi$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ і його послаблення при $kc_2 = 2n\pi$, де значення тиску практично наближається до величина падаючого $\left(|U^{(t)}| \approx |U^{(i)}|\right)$. Це вказує на утворення зон Френеля. При освітлені конуса зі сторони основи, тобто при $\gamma = 150°$ (рис. 2.17, *г*) повне поле у його вершині змінюється практично періодично із періодом $kc_2 = 45$. Крім того, тут спостерігаємо тонку структуру розсіяння, яка проявляється в дрібних осциляціях основної залежності на періоді.

Наступним розглянемо випадок, коли вершина конуса знаходиться в тіні (див. рис.2.17, *б*, *г*, *д*), тобто екранується. Як видно із рис. 2.17, *б*, *г* у розподілах тиску формується виражений максимум для $\gamma = 30°$ при $kc_2 = 2.5$ (16.851 дБ), що зміщується до значень $kc_2 = 2$ для $\gamma = 90.01°$ з максимумом 4.8561 дБ. Із рис. 2.17, *г* бачимо, що нормоване повне поле у випадку $\gamma = 90.01°$ в тіньовій частині осцилює періодично. Ці осциляції плавно спадають зі зростанням kc_2. Розмах їх у два рази менший, ніж на освітленій частині диска (див. рис. 2.17, *в*). Тут, на відміну від попереднього випадку, максимуми тисків формуються при $kc_2 = (2n-1)\pi/2$, а мінімумами при $kc_2 = n\pi$. Фізично це означає, що формування максимумів поля в центрі диска на освітленій стороні приводить до формування мінімуму в його центрі у тіньової області.

Порівняння наших розрахунків із отриманими теоретичними [7] і експериментальними результатами [56] ілюструється на рис. 2.18. Основна відмінність наших результатів (крива *1*) і даних експерименту (крива *3*) пов’язана із двома двома причинами: скінченною товщиною диска (0.25 дюйми) використаною в експерименті, та похибкою обумовленою зовнішнім мікрофоном. З рис. 2.18 також спостерігаємо чудове узгодження наших результатів (крива *1*) із результатами отриманими незалежним методом (крива *2*).

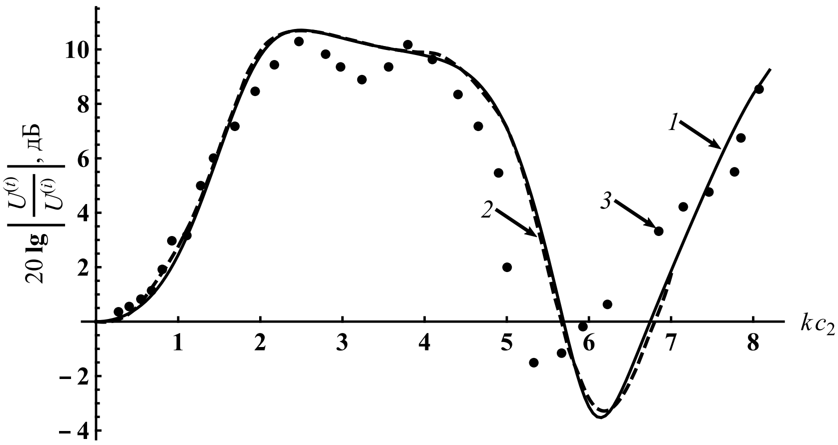


Рис. 2.18. Відношення звукового тиску $U^{(t)}$ у вільному просторі до тиску $U^{(i)}$ на поверхні освітленої сторони диска як функція kc_2:

1 – наші розрахунки; *2* – наведено в [7]; *3* – експериментальні результати [56].

Далі розглянемо розподіл тиску на поверхні жорсткого конуса. Тоді у виразах (2.11) для підобластей D_1, D_2 слід зафіксувати кут $\theta = \gamma$ і в результаті

$$U^{(t)}(r,\gamma) = \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \bar{y}_p^{(2,1)} \\ \bar{y}_p^{(2,2)} \end{matrix} \right\} P_{\eta_p - 1/2}(\pm\cos\gamma) \frac{I_{\eta_p}(sr)}{I_{\eta_p}(sc_2)}, \; 0 \le r \le c_2 . \qquad (2.73)$$

Тут верхній знак і $\eta_p = \nu_p$ відповідає області D_1, а нижній знак і $\eta_p = \mu_p$ області D_2.

На рис. 2.19 показано нормований розподіл повного тиску вздовж бічної поверхні конуса ($\theta = \gamma$), побудований на основі формули (2.73). На цьому рисунку вздовж горизонтальної осі відкладено відстань від вершини ($r = 0$) до краю ($r = c_2$) конуса для трьох кутів розхилу $\gamma = 30°$ (рис. 2.19, *а*, *б*), $\gamma = 90.01°$ (рис. 2.19, *в, г*), $\gamma = 150°$ (рис. 2.19, *г, д*). Знак “+” на графіках позначає розподіл тиску на освітленій частині конуса, а знак “–” – тіньову сторону конуса. Цифри *1, 2, 3, 4* на цьому рисунку відповідають відповідно хвильовим параметрам конуса $kc_2 = 1; 6; 18; 30$.

У низькочастотному випадку ($kc_2 = 1$) розподіл тиску вздовж поверхні конуса ($\gamma = 30°$, $\gamma = 150°$) і диска ($\gamma = 90.01°$) у тіньовій і освітленій частинах практично не змінюється та відповідає рівню падаючого поля $|U^{(t)}| \approx |U^{(i)}|$ при прямуванні до краю ($r = c_2$) конуса. Ситуація змінюється, коли довжина твірної

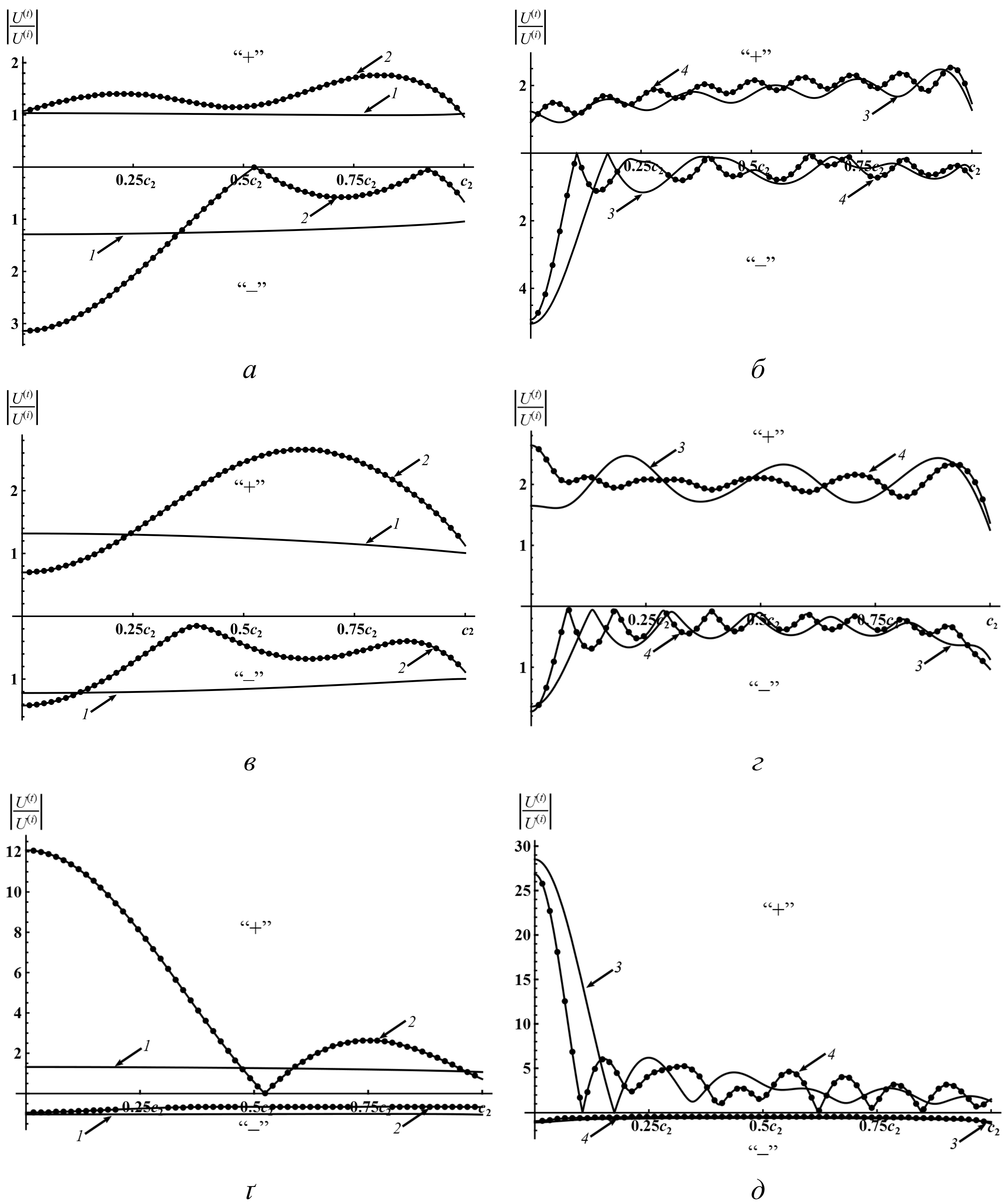


Рис. 2.19. Розподіл нормованих значень повного тиску $U^{(t)}$ вздовж поверхні конуса ($\theta = \gamma$) як функція кута розхилу γ і хвильового параметра kc_2:

а, б – $\gamma = 30°$; *в, г* – $\gamma = 90.01°$; *ґ, д* – $\gamma = 150°$;

“+” – освітлена сторона (область D_2); “+” – тіньова сторона (область D_1);

1 – $kc_2 = 1$; *2* – $kc_2 = 6$; *3* – $kc_2 = 18$; *4* – $kc_2 = 30$.

c_2 і довжина хвилі λ практично рівні ($kc_2 = 6$). Розглянемо спочатку поведінку поля на освітленій поверхні конуса. При $kc_2 = 6$ важливу роль починають відігравати дифракційні ефекти. Так, для кута розхилу $\gamma = 30°$ (рис. 2.19, *а*, крива *2*) тиск розподіляється практично симетрично з двома максимумами біля $r = 0.25c_2$, $r = 0.75c_2$, де $|U^{(t)} / U^{(i)}|$ не перевищує значення 1.6. У випадку диска ($\gamma = 90.01°$) (див рис. 2.19, *в*, крива *2*) відбувається формування максимуму тиску біля $r = 0.75c_2$ ($|U^{(t)}| = 2.6|U^{(i)}|$) і мінімуму у центрі диска $r = 0$ ($|U^{(t)}| = 0.7|U^{(i)}|$). При куті розхилу $\gamma = 150°$ (рис. 2.19, *ґ*, крива 2) максимум тиску $|U^{(t)} / U^{(i)}| = 12$ формується на "дні" конічної каверни ($r = 0$) плавно зменшуючись до нуля при $r < 0.5c_2$. При зростанні хвильового параметра kc_2 із рис. 2.19, *д* ($kc_2 = 18; 30$) спостерігаємо формування вузького піку поля в центрі і додаткових осциляцій тиску вздовж поверхні конуса. Така поведінка обумовлена збудженням поршневої моди і вказує на можливість акумулювання енергії всередині жорсткої конічної каверни.

Дослідимо розподіл тиску на тіньовій поверхні жорстких конусів. Для цього умовно розділимо тіньову зону на три частини: перехідну зону ($0.75c_2 < r < c_2$), область глибокої тіні ($0.25c_2 < r < 0.75c_2$) та світлу пляму ($r = 0$). Тобто "світла пляма" на тіньовій поверхні охоплює вершину конуса (центр диска). Із рис. 2.19, *а*, *б*, бачимо, що при $kc_2 = 6; 18; 30$ максимум тиску тут формується в околі вершини або центра диску в тіньовій області. Величина тиску на тіньовій поверхні конусів зменшується при віддалені від вершини вздовж твірної конуса (диска). Мінімум поля отримуємо в області глибокої тіні, а при наближенні до краю тиск $|U^{(t)}|$ вирівнюється з падаючим полем $|U^{(i)}|$.

Тепер розглянемо розподіл акустичного поля на поверхні м'якого конуса. У цьому випадку (див. формулу (2.8)) нормований розподіл коливальної швидкості частинок $\vartheta = \vartheta_\theta$ виражається формулою

$$\left|\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right| = \left|\frac{1}{\sin\gamma (sr)^{3/2}} \sum_{p=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} \bar{y}_p^{(2,1)} \\ \bar{y}_p^{(2,2)} \end{Bmatrix} P^1_{\eta_p - 1/2}(\pm\cos\gamma) \frac{I_{\eta_p}(sr)}{I_{\eta_p}(sc_2)}\right|, \; 0 \le r < c_2. \qquad (2.74)$$

Тут $\vartheta_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\gamma} = -ik\sin(\gamma)\exp(ikr\cos\gamma)$.

На рис. 2.20 показано розподіл нормованої компоненти коливальної швидкості на боковій поверхні конуса з освітленої (“+”) та тіньової (“–”) сторони розрахований згідно (2.74). Цифрами *1–4* на цьому рисунку позначено залежності, що відповідають хвильовому параметру kc_2 рівному 1; 6; 18; 30. Із рис. 2.20 видно, що коливальна швидкість ϑ зростає при підході до вершини конуса з освітленої сторони, коли $\gamma < \pi/2$ (див. рис. 2.20, *а*, *б*). Коли $\gamma > \pi/2$ також спостерігаємо різке зростання ϑ, проте, в тіньовій області (див. рис. 2.20, *г*, *д*) при підході до вершини конуса ($r \to 0$). У випадку диска ($\gamma = 90.01°$) коливальна швидкість $|\vartheta/\vartheta_0| \approx 2$ з освітленої сторони при $kc_2 = 6; 18; 30$ (див. рис. 2.20, *в, г*). Із ростом хвильового параметра різниця між кривими встає все менш помітною окрім підходу до краю.

На рис. 2.21 порівнюються результати розрахунків нормованого повного поля вздовж поверхні жорсткого диска для двох хвильових параметрів: $kc_2 = 3$ (рис. 2.21, *а*) і $kc_2 = 7$ (рис. 2.21, *б*). Цифрами *1–3* на цьому рисунку позначено криві, отримані відповідно нами для $\gamma = 90.01°$ (крива *1*) та наведеними у праці [62]. Точкам *3* відповідають експериментальні дані, що отримані у п’яти точках на поверхні диска: $r = 0$ (центр диска); $r = 0.25c_2$; $r = 0.5c_2$; $r = 0.75c_2$; $r = c_2$ (край диска). З порівняння кривих *1* і *2* бачимо їх практично повне співпадіння вздовж поверхні диска. Із рисунків спостерігаємо також незначне розходження кривих *1* із даними експерименту *3*, проте повторюють поведінку кривих *1*, *2*. Зауважимо, що перші дані по дослідженню розподілу тиску на поверхні диска наведені у праці [71].

2.8.3. Визначення геометричних параметрів конуса за значеннями виміряного поля. На рис. 2.22 наведено залежності модуля потенціалу швидкості поля, дифрагованого у напрямах $\theta = 0°$ (розсіяння “вперед” – у напрямі поширення падаючої хвилі; рис. 2.22, *а*) і $\theta = 180°$ (“зворотне” розсіяння; рис. 2.22, *б*), від кута γ для різних значень хвильового параметра.

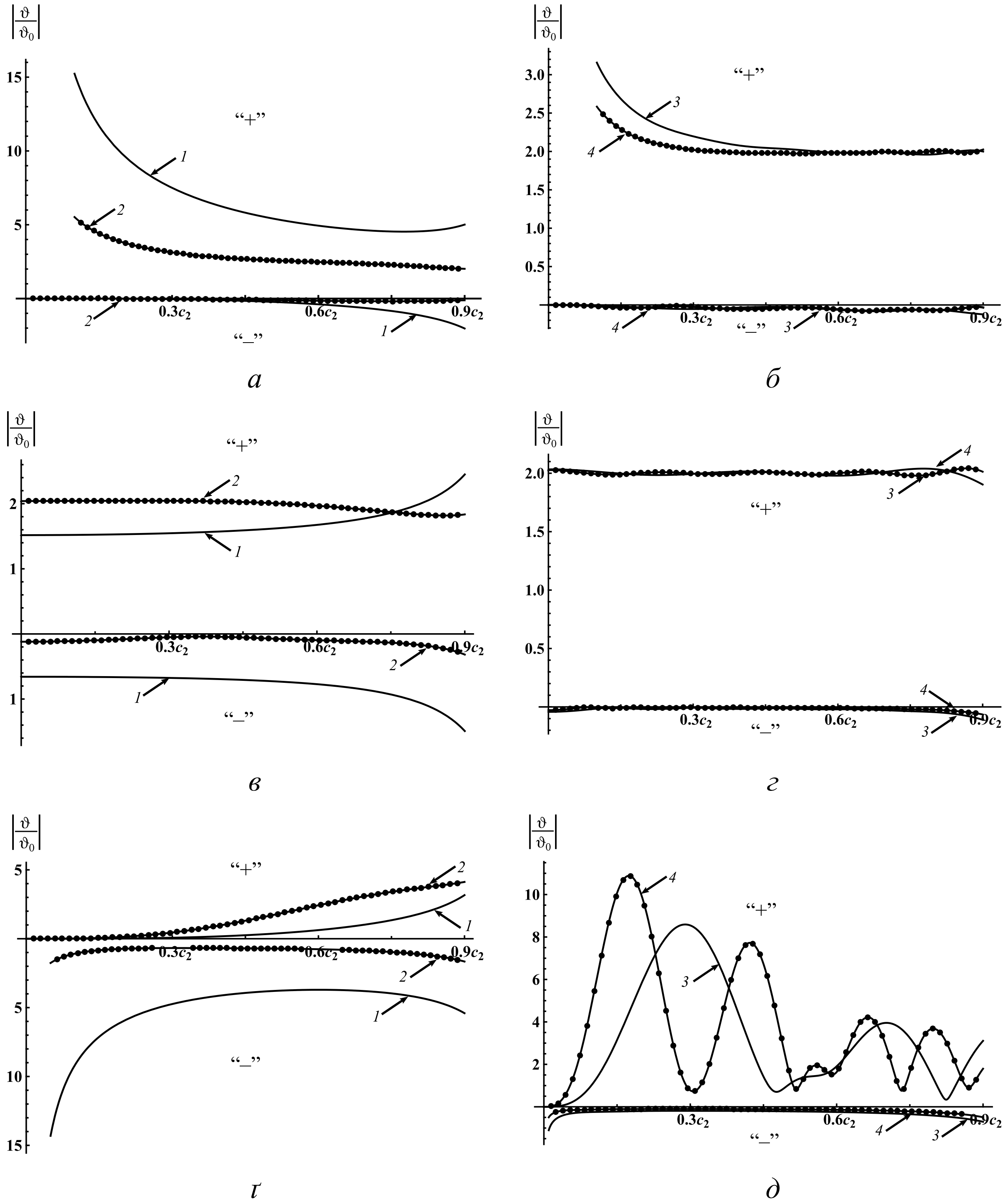
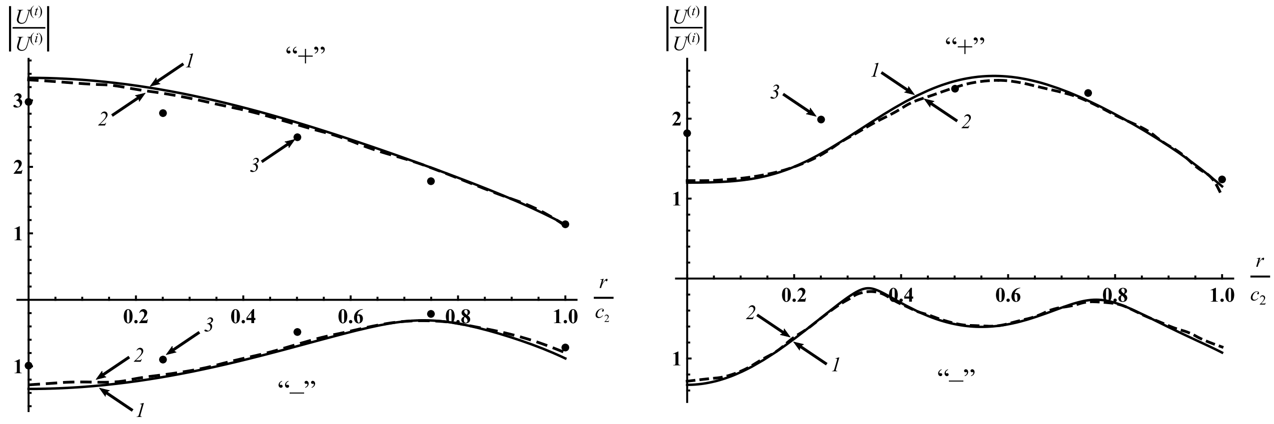


Рис. 2.20. Розподіл нормованих значень швидкості ϑ вздовж поверхні м’якого конуса ($\theta = \gamma$) як функція кута розхилу γ і хвильового параметра kc_2:

а, б – $\gamma = 30°$; *в, г* – $\gamma = 90.01°$; *ґ, д* – $\gamma = 150°$;

“+” – освітлена сторона (область D_2); “+” – тіньова сторона (область D_1);

1 – $kc_2 = 1$; *2* – $kc_2 = 6$; *3* – $kc_2 = 18$; *4* – $kc_2 = 30$.



а *б*

Рис. 2.21. Порівняння нормованих значень тиску вздовж поверхні жорсткого диска:

$a - kc_2 = 3$; $б - kc_2 = 7$;

1 (суцільні криві) – $\gamma = 90.01°$; *2, 3* – наведено у [62];

"+" – освітлена сторона; "–" – тіньова сторона.

Такі залежності дозволяють визначити один із двох геометричних параметрів конуса (c_2 або γ) за даними одночастотного зондування, коли відомим є один із них (швидкість поширення звукової хвилі c_0 вважається відомою).

Дійсно, $D(\theta = 0°)$ як функція кута розхилу конуса γ є симетричною відносно $\gamma = \pi / 2$ (див. рис. 2.22, *а*) і, як видно із цього рисунку характер поведінки кривих, наведених для різних kc_2, дозволяє однозначно встановити довжину твірної конуса за $D(\theta = 0°)$ при відомому куті розхилу γ, частоті ω і швидкості поширення звукової хвилі c_0.

Аналогічні залежності $D(\theta = 180°)$ на рис. 2.22, *б* при $c_2 > \lambda / 2$ є несиметричними відносно $\gamma = \pi / 2$. Поведінка кривих, наведених на цьому рисунку вказує, що при фіксованому kc_2 існує не менше двох кутів розхилу ($\gamma \neq \pi / 2$), що відповідає одному значенню $D(\theta = 180°)$. Проте відсутність симетричності $D(\theta = 180°)$ відносно γ, дозволяє за значеннями $D(\theta = 0°)$ і $D(\theta = 180°)$, отриманими при одночастотному зондуванні і фіксованому kc_2, однозначно встановити параметр γ.

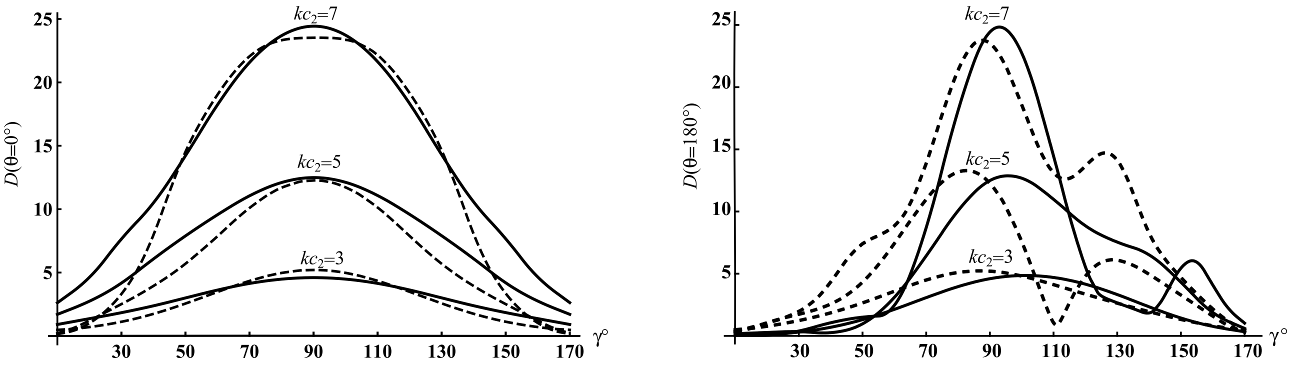


Рис. 2.22. Залежності $D(\theta)$ від кута розхилу конуса при різних значеннях kc_2: неперервна лінія – м’який конус, штрихова лінія – жорсткий конус; *а* – $\theta=0°$; *б* – $\theta=180°$.

Зауважимо, що при відомому куті розхилу конуса для однозначного визначення довжини твірної c_2 можемо використати також дані по “зворотному” розсіюванні, наведені на рис. 2.22, *б*.

2.9. Висновки до розділу 2

1. Отримано розв’язок задач дифракції плоскої акустичної хвилі на скінченному порожнистому абсолютно м’якому і жорсткому кругових конусах при осьовому опроміненні. На основі подання потенціалу швидкості рядами власних функцій підобластей, сумісно з методами спряження полів і аналітичної регуляризації, задачі дифракції зведено до НСЛАР другого роду, розв’язок яких знаходиться методом редукції із заданою точністю. Параметр редукції НСЛАР визначається хвильовим параметром конуса і кутом розхилу.
2. Отримано НСЛАР другого роду для задач дифракції на мяких та жорстких кругових дисках при осьовому опроміненні; побудовано регуляризуючі оператори для цих задач.
3. Отримано аналітичний розв’язок дифракційної задачі у статичному випадку.
4. Вияснено особливості формування діаграм спрямованості: встановлено, що при опроміненні конуса зі сторони вершини основна пелюстка дифрагованого поля спрямована “вперед” у напрямі падіння плоскої хвилі;

характерним є утворення інтенсивного випромінювання у напрямі дзеркального відбивання на високих частотах ($c_2 > 15\lambda$); показано, що при опроміненні конуса зі сторони основи формується інтенсивне випромінювання дифрагованого поля як “вперед” так і “назад”.

5. Показано, що на відміну від м’якого конуса повний переріз розсіювання для жорсткого конуса носить резонансний характер у низькочастотній області ($c_2 < \lambda / 2$); у квазістатичній області ($kc_2 \to 0$) домінантне розсіяння енергії спостерігається тільки для м’яких конусів.
6. Показано, що поршнева мода вносить основний вклад при формуванні повного поля в ближній зоні.
7. Встановлено можливість визначення геометричних параметрів конуса: кута та твірної у резонансній області.

РОЗДІЛ 3 ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКОЇ АКУСТИЧНОЇ ХВИЛІ НА НАПІВНЕСКІНЧЕННОМУ КОНУСІ ЗІ ЗРІЗАНОЮ ВЕРШИНОЮ

У даному розділі розв’язано задачу дифракції плоскої акустичної хвилі на напівнескінченному конусі зі зрізаною вершиною у випадку м’якої та жорсткої бокових поверхонь. Інтерес до вивчення такої структури, перш за все, зумовлений краєм, який формує дифраговане поле. Розсіяння акустичних хвиль напівнескінченним конусом зі зрізаною вершиною досліджено тільки у частковому випадку для круглої апертури у необмеженій м’якій або жорсткій площині [58, 105–106]. Тому розв’язання задачі дифракції на круговій апертурі, утвореній зрізом вершини конуса, дозволить вияснити механізми формування поля, а отже з’ясувати потенційні можливості розширення застосовності таких структур. Крім того, дослідження даних розподілу розсіяних полів на краю важливе для діагностування параметрів зрізу вершини конічного розсіювача, де таку можливість встановлено раніше у [108].

Задача дифракції на напівнескінченному конусі зі зрізаною вершиною є, по суті справи, доповнюючою до задачі, сформульованої у розділі 2. Тут для її розв’язку використаємо метод власних функцій та процедуру аналітичної регуляризації.

Результати даного розділу опубліковано у [112, 114, 123, 125, 126].

3.1. Постановка задачі

Розглянемо осесиметричну задачу дифракції плоскої акустичної хвилі на ідеально м’якому або жорсткому напівнескінченному конусі (рис. 3.1) зі зрізаною вершиною, який у сферичній системі координат (r,θ,φ) запишемо так

$$Q_1:\{r\in(c_1,\infty);\,\theta=\gamma;\,\varphi\in[0,2\pi)\}. \tag{3.1}$$

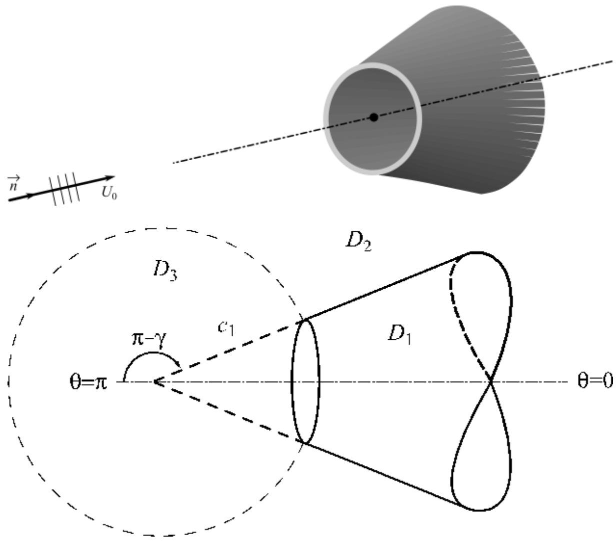


Рис. 3.1. Геометрична схема задачі.

Нехай конус Q_1 опромінюється плоскою монохроматичною акустичною хвилею, яка поширюється вздовж осі симетрії конуса у напрямку $\theta = 0$ і характеризується потенціалом швидкості $U_0(r,\theta) = \exp(ikr\cos\theta)$. Знаходження невідомого потенціалу $U(r,\theta)$ зводиться до розв'язання змішаної крайової задачі для рівняння Гельмгольца (2.3) із граничною умовою (2.4) для м'якого і (2.5) для жорсткого конуса на поверхні Q_1. Крім того, розв'язок задачі повинен забезпечувати виконання умови граничного поглинання на нескінченності та умови обмеженості енергії.

Без обмеження загальності будемо вважати, що первинне поле міститься в області D_2. Тоді, згідно методу частинних областей, повне поле подамо так

$$U^{(t)}(r,\theta) = \begin{cases} U(r,\theta), & (r,\theta) \in D_1, D_3; \\ U^{(i)}(r,\theta) + U(r,\theta), & (r,\theta) \in D_2, \end{cases} \tag{3.2}$$

де підобласті D_1, D_2, D_3 визначаються у вигляді (див. рис.3.1)

$$\begin{aligned} &D_1 : \{ r \in (c_1, \infty),\ \theta \in [0,\gamma) \}; \\ &D_2 : \{ r \in (c_1, \infty), \theta \in (\gamma, \pi] \}; \\ &D_3 : \{ r \in (0, c_1),\ \theta \in [0,\pi] \}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

У кожній з областей (3.3) потенціал швидкості дифрагованого поля шукає-мо у вигляді:

$$U(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{sr}}\begin{cases}\sum\limits_{p=1}^{\infty} y_p^{(2,1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta)\dfrac{K_{\nu_p}(sr)}{K_{\nu_p}(sc_1)}, & (r,\theta)\in D_1;\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^{(2,2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)\dfrac{K_{\mu_k}(sr)}{K_{\mu_k}(sc_1)}, & (r,\theta)\in D_2;\\ \Phi_1(sr)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{x}_n^{(1)} P_{z_n-1/2}(\cos\theta)\dfrac{I_{z_n}(sr)}{I_{z_n}(sc_1)}, & (r,\theta)\in D_3.\end{cases} \tag{3.4}$$

Тут $y_p^{(2,1)}$, $y_k^{(2,2)}$, $\overline{x}_n^{(1)}$ – невідомі коефіцієнти розкладу; $z_n = n-1/2$ і $\Phi_1(sr)\equiv 0$ для *S*-випадку; $z_n = n+1/2$ і $\Phi_1(sr)\equiv \overline{x}_0^{(1)} I_{1/2}(sr)/I_{1/2}(sc_1)$, де $\overline{x}_0^{(1)}$ – невідомий коефіцієнт, для *R*-випадку; індекси ν_p, μ_k визначаються з рівнянь (2.12) для *S*-випадку та з рівнянь (2.13) для *R*-випадку.

Подання поля у вигляді (3.4) забезпечує виконання граничної умови (2.4) і (2.5) на поверхні Q_1 в області D_1, а в області D_2 гранична умова виконується тільки для дифрагованого поля. Крім того, подання (3.4) забезпечує виконання умови граничного поглинання на нескінченності і умови обмеженості поля у початку сферичної системи координат. Знайдемо спочатку подання поля плоскої хвилі в напівнескінченній конічній області. Для цього розв'яжемо допоміжну задачу.

3.2. Подання поля плоскої хвилі в нескінченній конічній області (допоміжна задача)

Розглянемо у сферичній системі координат (r,θ,φ) ідеально м'який (жорсткий) напівнескінченний конус

$$Q_0:\{r\in(0,\infty);\theta=\gamma;\varphi\in[0,2\pi)\},$$

який опромінює плоска монохроматична акустична хвиля $U_0(r,\theta)= =\exp(ikr\cos\theta)$, скалярний потенціал швидкості якої у сферичній системі координат (r,θ,φ) виразимо через інтеграл Конторовича-Лєбедєва так

$$U_0(r,\theta)=\frac{\sqrt{\pi^3/2}}{\pi i\sqrt{sr}}\int\limits_{\Gamma}\nu\frac{P_{\nu-1/2}(\cos\theta)}{\cos\pi\nu}I_\nu(sr)d\nu, \tag{3.5}$$

де Γ – контур інтегрування в комплексній площині, що проходить паралельно до уявної осі, $\Gamma \subset \Pi : \{ |\operatorname{Re}\nu| < 1/2 \}$.

Задача знаходження поля, дифрагованого на Q_0 зводиться до розв’язання рівняння Гельмгольца (2.3) відносно невідомого потенціалу швидкості дифрагованого поля $U^{(\infty)}(r,\theta)$. Крім того, шукана функція $U^{(\infty)}(r,\theta)$ повинна задовольняти граничну умову Діріхле (Неймана) на боковій поверхні конуса Q_0.

Для знаходження невідомого потенціалу швидкості $U^{(\infty)}(r,\theta)$ розв’язок рівняння Гельмгольца подамо у вигляді інтегралу Конторовича-Лєбедєва так

$$U^{(\infty)}(r,\theta) = \frac{1}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{\Gamma} \nu F(\nu) P_{\nu-1/2}(-\cos\theta) I_{\nu}(sr)\, d\nu, \tag{3.6}$$

де $F(\nu) = F(-\nu)$ – невідома трансформанта, регулярна у смузі Π; властивість парності шуканої функції $F(\nu)$ забезпечує виконання умови випромінювання на нескінченності.

Розглянемо спочатку ситуацію, коли на боковій поверхні конуса Q_3 виконується умова Діріхле

$$\left[U^{(\infty)}(r,\theta) + U_0(r,\theta) \right]_{(r,\theta)\in Q_0} = 0. \tag{3.7}$$

Тоді взявши до уваги вирази (3.5), (3.6) та задовільнивши граничній умові (3.7) знаходимо

$$F(\nu) = -\sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \frac{P_{\nu-1/2}(\cos\gamma)}{\cos\pi\nu P_{\nu-1/2}(-\cos\gamma)}. \tag{3.8}$$

Функція (3.8) має прості полюси у точках $\nu = \mu_k$ і $\nu = n - 1/2$, де $k, n = \overline{1,\infty}$, а індекси μ_k визначаються із (2.12). Підставимо вираз (3.8) в інтеграл (3.6) і замкнемо контур інтегрування Γ у правій півплощині півколом радіусу R. Спрямувавши $R \to \infty$ та застосувавши лему Жордана, замінимо інтеграл рядами лишків. У результаті отримаємо подання рядами дифрагованого поля при осьовому опроміненні напівнескінченного м’якого конуса Q_0 плоскою хвилею

$$U^{t(\infty)}(r,\theta) = \sqrt{\frac{2\pi^3}{sr}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k P_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma) P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)}{\cos\pi\mu_k \partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu} I_{\mu_k}(sr). \tag{3.9}$$

Тут $U^{t(\infty)}(r,\theta)$ визначає повне поле,

$$U^{t(\infty)}(r,\theta)=U^{(\infty)}(r,\theta)+U_0(r,\theta). \tag{3.10}$$

Перейдемо тепер до розгляду випадку, коли на поверхні конуса Q_0 виконується гранична умова Неймана

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[U^{(\infty)}(r,\theta)+U_0(r,\theta)\right]_{(r,\theta)\in Q_0}=0. \tag{3.11}$$

Тоді, аналогічно до попереднього випадку, із (3.5), (3.6) та (3.11) отримаємо вираз для невідомої трансформанти, який запишемо так

$$F(\nu)=\sqrt{\frac{\pi^3}{2}}\frac{P^1_{\nu-1/2}(\cos\gamma)}{\cos\pi\nu P^1_{\nu-1/2}(-\cos\gamma)}. \tag{3.12}$$

Функція (3.12) має прості полюси у точках $\nu=1/2$, $\nu=\mu_k$ і $\nu=n-1/2$, де $k,n=\overline{2,\infty}$, індекси μ_k визначаються із рівняння (2.13). У точці $\nu=1/2$ трансформанта (3.12) має полюс першого порядку і невизначеність типу $0/0$, яка усувається за правилом Лопіталя.

Підставляємо тепер вираз (3.12) в інтеграл (3.6) і замикаємо контур інтегрування Γ у правій півплощині півколом радіусу R. Спрямувавши $R\to\infty$ та застосувавши лему Жордана, замінимо інтеграл рядами лишків. У результаті приходимо до такого подання повного поля в конічній області $\{r\in(0,\infty)$, $\theta\in(\gamma,\pi]\}$:

$$\begin{aligned}U^{t(\infty)}(r,\theta)=\sqrt{\frac{\pi}{2sr}}\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)I_{1/2}(sr)-\\ -\sqrt{\frac{2\pi^3}{sr}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu_k P^1_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma)P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)}{\cos\pi\mu_k\ \partial P^1_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu}I_{\mu_k}(sr).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Отже, для розв'язання основної задачі приймаємо

$$U^{(i)}(r,\theta)=U^{t(\infty)}(r,\theta),$$

де $U^{t(\infty)}(r,\theta)$ – приймає значення (3.9) у випадку м'якого конуса і (3.13) для жорсткого, що з урахуванням розкладу (3.4) забезпечить виконання граничних умов для повного поля на боковій поверхні конуса Q_1.

3.3. Розв'язання задачі

Для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу в (3.4) використаємо умови неперервності повного потенціалу та його нормальної похідної на сферичній поверхні радіусом $r = c_1$. Ці умови записуємо так

$$U^{(t)}(r,\theta)\Big|_{\substack{r=c_1-0\\ \theta\in[0,\pi]}} = \begin{cases} U^{(t)}(r,\theta)\Big|_{\substack{r=c_1+0\\ \theta\in[0,\gamma)}}; \\ U^{(t)}(r,\theta)\Big|_{\substack{r=c_1+0\\ \theta\in(\gamma,\pi]}}, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\left.\frac{\partial U^{(t)}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{\substack{r=c_1-0\\ \theta\in[0,\pi]}} = \begin{cases} \left.\dfrac{\partial U^{(t)}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{\substack{r=c_1+0\\ \theta\in[0,\gamma)}}; \\ \left.\dfrac{\partial U^{(t)}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{\substack{r=c_1+0\\ \theta\in(\gamma,\pi]}}, \end{cases} \tag{3.15}$$

Загальна схема зведення рівнянь (3.14), (3.15) до НСЛАР є такою ж як описано у розділі 2. У зв'язку із тим, що поданням поля первинної хвилі для м'якого і жорсткого конусів Q_1 є різним, тому більш детально розглянемо ці два випадки.

Спочатку, скориставшись умовами (3.14), (3.15) для м'якого конуса приходимо до систем суматорних рівнянь, які записуємо у вигляді

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\overline{x}_n^{(1)}P_{z_n-1/2}(\cos\theta) = $$
$$\theta\in[0,\pi]$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P} y_p^{(2,1)}P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta), \qquad \theta\in[0,\gamma); \\ \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K} y_k^{(2,2)}P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta) + \\ +\sqrt{2\pi^3}\lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K}\dfrac{\mu_k P_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma)P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)}{\cos\pi\mu_k\,\partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu} I_{\mu_k}(sc_1),\ \theta\in(\gamma,\pi], \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\overline{x}_n^{(1)}P_{z_n-1/2}(\cos\theta)\frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)} = $$
$$\theta\in[0,\pi]$$

$$
= \begin{cases} \lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P} y_p^{(2,1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta)\dfrac{K'_{\nu_p}(sc_1)}{K_{\nu_p}(sc_1)}, & \theta\in[0,\gamma); \\ \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K} y_k^{(2,2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)\dfrac{K'_{\mu_k}(sc_1)}{K_{\mu_k}(sc_1)}+ & \\ +\sqrt{2\pi^3}\lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K}\dfrac{\mu_k P_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma)P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)}{\cos\pi\mu_k\partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu} I'_{\mu_k}(sc_1), & \theta\in(\gamma,\pi]. \end{cases} \tag{3.17}
$$

Тут $N = P + K$.

Для алгебраїзації системи суматорних рівнянь (3.16), (3.17) застосуємо метод перерозкладу функцій Лежандра (2.19) та обмежившись скінченною кількістю членів, приходимо до скінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$
\begin{gathered} \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{\nu_p^2 - z_n^2} = \frac{y_p^{(2,1)}}{\nu_p\alpha^+(\nu_p,\gamma)}, \; p=\overline{1,P}; \\ \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{\mu_k^2 - z_n^2} = \frac{y_k^{(2,1)}}{\mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)} + \frac{\sqrt{2\pi^3}P_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma)I_{\mu_k}(sc_1)}{\cos\pi\mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)\,\partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu}, k=\overline{1,K}; \end{gathered} \tag{3.18}
$$

$$
\begin{gathered} \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{\nu_p^2 - z_n^2}\frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)} = \frac{y_p^{(2,1)}}{\nu_p\alpha^+(\nu_p,\gamma)}\frac{K'_{\nu_p}(sc_1)}{K_{\nu_p}(sc_1)}, \quad p=\overline{1,P}; \\ \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{\mu_k^2 - z_n^2}\frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)} = \frac{y_k^{(2,2)}}{\mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)}\frac{K'_{\mu_k}(sc_1)}{K_{\mu_k}(sc_1)} + \\ + \frac{\sqrt{2\pi^3}P_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma)I'_{\mu_k}(sc_1)}{\cos\pi\mu_k\;\alpha^-(\mu_k,\gamma)\partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu}, \quad k=\overline{1,K}. \end{gathered} \tag{3.19}
$$

Тут $x_n^{(1)} = q(z_n,\gamma)\overline{x}_n^{(1)}$.

Вилучимо із систем рівнянь (3.18), (3.19) невідомі коефіцієнти $y_p^{(2,1)}$, $y_k^{(2,2)}$ і отримані рівняння запишемо так

$$
\sum_{n=1}^{N} x_n^{(1)}\frac{sc_1 W\left[K_{\nu_p} I_{z_n}\right]_{sc_1}}{\left[\nu_p^2 - z_n^2\right]K_{\nu_p}(sc_1)I_{z_n}(sc_1)} = 0, \;\; p=\overline{1,P}; \tag{3.20}
$$

$$
\sum_{n=1}^{N} x_n^{(1)}\frac{sc_1 W\left[K_{\mu_k} I_{z_n}\right]_{sc_1}}{\left[\mu_k^2 - z_n^2\right]K_{\mu_k}(sc_1)I_{z_n}(sc_1)} = -\sqrt{\frac{\pi^3}{2}}\frac{P_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma)}{\cos\pi\mu_k K_{\mu_k}(sc_1)}, \;\; k=\overline{1,K}. \tag{3.21}
$$

Перейшовши у виразах (3.20), (3.21) до границі, коли $N, P, K \to \infty$

($N = P + K$) та розмістивши рівняння цієї системи у відповідності до послідовності (2.26), отримаємо НСЛАР, яку запишемо у матричному вигляді:

$$A_{11} X^{(1)} = F^{(1)}, \tag{3.22}$$

де $X^{(1)} = \left\{ x_n^{(1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$; A_{11} – матричний оператор з елементами

$$A_{11} : \left\{ a_{qn}^{(11)} = \frac{sc_1 W \left[K_{\xi_q} I_{z_n} \right]_{sc_1}}{\left[\xi_q^2 - z_n^2 \right] K_{\xi_q}(sc_1) I_{z_n}(sc_1)} \right\}_{q,n=1}^{\infty}; \tag{3.23}$$

$F^{(1)} = \left\{ f_q^{(1)} \right\}_{q=1}^{\infty}$ – відомий вектор,

$$f_q^{(1)} = \begin{cases} 0, & \xi_q \notin \mu_k; \\ -\sqrt{\dfrac{\pi^3}{2}} \dfrac{P_{\xi_q - 1/2}(\cos\gamma)}{\cos\left(\pi \xi_q\right) K_{\xi_q}(sc_1)}, & \xi_q \in \mu_k. \end{cases}$$

Для випадку, коли бокова поверхня конуса Q_1 є жорсткою, умови неперервності повного потенціалу (3.14) та його нормальної похідної (3.15) на сфері радіуса $r = c_1$ приводять до систем функціональних рівнянь такого вигляду

$$\underset{\theta \in [0,\pi]}{\bar{x}_0^{(1)} + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \bar{x}_n^{(1)} P_{z_n - 1/2}(\cos\theta) =}$$

$$= \begin{cases} y_1^{(2,1)} + \lim\limits_{P\to\infty} \sum\limits_{p=2}^{P} y_p^{(2,1)} P_{\nu_p - 1/2}(\cos\theta), & \theta \in [0,\gamma); \\ y_1^{(2,2)} + \lim\limits_{K\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{K} y_k^{(2,2)} P_{\mu_k - 1/2}(-\cos\theta) + \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \left(1 + \mathrm{tg}^2 \dfrac{\gamma}{2} \right) I_{1/2}(sc_1) - & \\ -\sqrt{2\pi^3} \lim\limits_{K\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{K} \mu_k \dfrac{P_{\mu_k - 1/2}^1(\cos\gamma) P_{\mu_k - 1/2}(-\cos\theta)}{\cos\pi\mu_k \, \partial P_{\mu_k - 1/2}^1(-\cos\gamma)/\partial\mu} I_{\mu_k}(sc_1), & \theta \in (\gamma,\pi]; \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\underset{\theta \in [0,\pi]}{\bar{x}_0^{(1)} \frac{I'_{1/2}(sc_1)}{I_{1/2}(sc_1)} + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \bar{x}_n^{(1)} P_{z_n - 1/2}(\cos\theta) \frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)} =}$$

$$
=\begin{cases}
y_1^{(2,1)}\dfrac{K'_{1/2}(sc_1)}{K_{1/2}(sc_1)}+\lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=2}^{P}y_p^{(2,1)}P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta)\dfrac{K'_{\nu_p}(sc_1)}{K_{\nu_p}(sc_1)}, & \theta\in[0,\gamma);\\
y_1^{(2,2)}\dfrac{K'_{1/2}(sc_1)}{K_{1/2}(sc_1)}+\lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{K}y_k^{(2,2)}P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)\dfrac{K'_{\mu_k}(sc_1)}{K_{\mu_k}(sc_1)}- & \\
-\sqrt{2\pi^3}\lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{K}\mu_k\dfrac{P^1_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma)P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)}{\cos\pi\mu_k\,\partial P^1_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu}I'_{\mu_k}(sc_1)+ & \\
+\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\gamma}{2}\right)I'_{1/2}(sc_1), & \theta\in(\gamma,\pi].
\end{cases}
\tag{3.25}
$$

Розв’язок системи рівнянь (3.24), (3.25) будуємо аналогічно як у розділі 2. Використовуючи (2.19) переходимо від суматорних рівнянь до систем лінійних алгебраїчних рівнянь, де врахувавши їх кількість, приходимо до систем порядку $N=P+K-1$, яку записуємо так

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{1/4-z_n^2}=\frac{2y_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}-\frac{2\overline{x}_0^{(1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)},\ p=1;\\
\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{\nu_p^2-z_n^2}=\frac{y_p^{(2,1)}}{\nu_p\alpha^+(\nu_p,\gamma)},\ p=\overline{2,P};
\end{gathered}
\tag{3.26}
$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{1/4-z_n^2}=\frac{2y_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}-\frac{2\overline{x}_0^{(1)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}+\frac{\sqrt{2\pi}(1+\mathrm{tg}^2\gamma/2)}{\alpha^-(1/2,\gamma)}I_{1/2}(sc_1),\ k=1;\\
\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{\mu_k^2-z_n^2}=\frac{y_k^{(2,2)}}{\mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)}-\frac{\sqrt{2\pi^3}P^1_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma)I_{\mu_k}(sc_1)}{\cos\pi\mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)\,\partial P^1_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu},\ k=\overline{2,K};
\end{gathered}
\tag{3.27}
$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{1/4-z_n^2}\frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)}=\frac{2y_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{K'_{1/2}(sc_1)}{K_{1/2}(sc_1)}-\frac{2\overline{x}_0}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{I'_{1/2}(sc_1)}{I_{1/2}(sc_1)},\ p=1;\\
\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{\nu_p^2-z_n^2}\frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)}=\frac{y_p^{(2,1)}}{\nu_p\alpha^+(\nu_p,\gamma)}\frac{K'_{\nu_p}(sc_1)}{K_{\nu_p}(sc_1)},\ p=\overline{2,P};
\end{gathered}
\tag{3.28}
$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{1/4-z_n^2}\frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)}=\frac{2y_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{K'_{1/2}(sc_1)}{K_{1/2}(sc_1)}-\frac{2\overline{x}_0}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{I'_{1/2}(sc_1)}{I_{1/2}(sc_1)}+$$
$$+\frac{\sqrt{2\pi}(1+\mathrm{tg}^2\gamma/2)}{\alpha^-(1/2,\gamma)}I'_{1/2}(sc_1),\ k=1;$$
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{\mu_k^2-z_n^2}\frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)}=\frac{y_k^{(2,2)}}{\mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)}\frac{K'_{\mu_k}(sc_1)}{K_{\mu_k}(sc_1)}-\tag{3.29}$$
$$-\frac{\sqrt{2\pi^3}P^1_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma)I'_{\mu_k}(sc_1)}{\cos\pi\mu_k\ \alpha^-(\mu_k,\gamma)\partial P^1_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu},\ k=\overline{2,K}.$$

Тут $x_n^{(1)}=q(z_n,\gamma)\overline{x}_n^{(1)}$.

Вирази (3.26)–(3.29) записані так, щоб коректно врахувати незалежні від координати θ коефіцієнти розкладу.

Із виразів (3.26)–(3.29) виключаємо невідомі $\overline{x}_0^{(1)}$, $y_p^{(2,1)}$, $y_k^{(2,2)}$ і зведемо задачу до системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $N\times N$, яку запишемо у вигляді

$$\sum_{n=1}^{N}x_n^{(1)}\frac{sc_1W\left[K_{1/2}I_{z_n}\right]_{sc_1}}{\left[1/4-z_n^2\right]K_{1/2}(sc_1)I_{z_n}(sc_1)}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}(\gamma/2)}{K_{1/2}(sc_1)},\ p=k=1;\tag{3.30}$$

$$\sum_{n=1}^{N}x_n^{(1)}\frac{sc_1W\left[K_{\nu_p}I_{z_n}\right]_{sc_1}}{\left[\nu_p^2-z_n^2\right]K_{\nu_p}(sc_1)I_{z_n}(sc_1)}=0,\ p=\overline{2,P};\tag{3.31}$$

$$\sum_{n=1}^{N}x_n^{(1)}\frac{sc_1W\left[K_{\mu_k}I_{z_n}\right]_{sc_1}}{\left[\mu_k^2-z_n^2\right]K_{\mu_k}(sc_1)I_{z_n}(sc_1)}=-\sqrt{\frac{\pi^3}{2}}\frac{P^1_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma)}{\cos\pi\mu_k\ K_{\mu_k}(sc_1)},\ k=\overline{2,K}.\tag{3.32}$$

Визначимо тепер невідомий коефіцієнт $\overline{x}_0^{(1)}$. Для цього сформуємо із перших рівнянь систем (3.26)–(3.29) при $p=1,\ k=1$ наступну систему рівнянь

$$\sum_{n=1}^{N}x_n^{(1)}\frac{sc_1W\left[I_{z_n}K_{1/2}\right]_{sc_1}}{\left[1/4-z_n^2\right]I_{z_n}(sc_1)K_{1/2}(sc_1)}=\frac{2\overline{x}_0^{(1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{1}{I_{1/2}(sc_1)K_{1/2}(sc_1)},\ p=1;$$
$$\sum_{n=1}^{N}x_n^{(1)}\frac{sc_1W\left[I_{z_n}K_{1/2}\right]_{sc_1}}{\left[1/4-z_n^2\right]I_{z_n}(sc_1)K_{1/2}(sc_1)}=\tag{3.33}$$
$$=\frac{2\overline{x}_0^{(1)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{1}{I_{1/2}(sc_1)K_{1/2}(sc_1)}-\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^-(1/2,\gamma)K_{1/2}(sc_1)}\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right),\ k=1.$$

Із рівнянь (3.33) отримуємо

$$\overline{x}_0^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} I_{1/2}(sc_1). \tag{3.34}$$

Перейшовши у виразах (3.30)–(3.32) до границі, коли $N, P, K \to \infty$ ($N = P + K - 1$) та розмістивши рівняння цієї системи у відповідності до послідовності (2.33), отримаємо НСЛАР (3.22) із правою частиною $F^{(1)}$ у вигляді

$$f_q^{(1)} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}(\gamma/2)}{K_{1/2}(sc_1)}, & \xi_q \in 1/2; \\ 0, & \xi_q \notin \mu_k; \\ -\sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \frac{P_{\xi_q - 1/2}(\cos\gamma)}{\cos\left(\pi\xi_q\right) K_{\xi_q}(sc_1)}, & \xi_q \in \mu_k. \end{cases}$$

Для елементів матричного оператора (3.23) справедлива наступна асимптотична оцінка

$$a_{qn}^{(11)} = \left. \frac{sc_1 W\left[K_{\xi_q} I_{z_n}\right]_{sc_1}}{\left[\xi_q^2 - z_n^2\right] K_{\xi_q}(sc_1) I_{z_n}(sc_1)} \right|_{\substack{\xi_q, z_n >> |sc_1| \\ sc_1 \to 0}} = \frac{1}{\xi_q - z_n} + \begin{cases} O\left(\left\langle \xi_q z_n (\xi_q - z_n) \right\rangle^{-1}\right); \\ O\left(\left(sc_1/2\right)^2\right). \end{cases} \tag{3.35}$$

Отже, із співвідношення (3.35) слідує, що матричний оператор A_{11} у статичному випадку утворює оператор типу згортки (2.38). Тоді застосувавши процедуру аналітичної регуляризації до (3.22) приходимо до НСЛАР другого роду, яку запишемо так

$$X^{(1)} = A^{-1}\left(A - A_{11}\right) X^{(1)} + A^{-1} F^{(1)}, \tag{3.36}$$

де A^{-1} визначається аналогічно як у розділі 2.

Єдиний розв’язок НСЛАР (3.36) існує у просторі

$$b(\sigma): \left\{ \left\| x_n^{(1)} \right\| = \sup_n \left| x_n^{(1)} n^\sigma \right|, \lim_{n\to\infty} \left| x_n^{(1)} n^\sigma \right| = 0 \right\}.$$

при $0 \le \sigma < 3/2$ для *S*-випадку і $0 \le \sigma < 1/2$ для *R*-випадку, що забезпечує виконання умов Мейкснера на краю [86].

Невідомі коефіцієнти розкладу в (3.4) виражаємо через розв’язки НСЛАР (3.36) у вигляді

$$\overline{x}_n^{(1)} = \frac{x_n^{(1)}}{q(z_n,\gamma)}; \tag{3.37}$$

$$y_p^{(2,1)} = \begin{cases} \nu_p \alpha^+(\nu_p,\gamma)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n^{(1)}}{\nu_p^2 - z_n^2}; \\ \nu_p \alpha^+(\nu_p,\gamma)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n^{(1)}}{\nu_p^2 - z_n^2} - \overline{x}_0\delta_p^1; \end{cases} \tag{3.38}$$

$$y_k^{(2,2)} = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2\pi^3}\mu_k P_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma) I_{\mu_k}(sc_1)}{\cos\pi\mu_k \partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu} + \mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n^{(1)}}{\mu_k^2 - z_n^2}; \\ \dfrac{\sqrt{2\pi^3}\mu_k P^1_{\mu_k-1/2}(\cos\gamma) I_{\mu_k}(sc_1)}{\cos\pi\mu_k \partial P^1_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu} - \overline{x}_0 \mathrm{tg}^2\dfrac{\gamma}{2}\delta_k^1 + \\ +\mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n^{(1)}}{\mu_k^2 - z_n^2}. \end{cases} \tag{3.39}$$

У виразах (3.38) і (3.39) верхня стрічка відповідає *S*-випадку, а нижня *R*-випадку.

Рівняння (3.36) і вирази (3.37)–(3.39) практично завершують розв'язок поставленої у цьому розділі задачі.

Приймаючи до уваги визначення матричних операторів A_{11} і A_{22} (див. формулу (2.28)) отриманих відповідно для задачі дифракції на напівнескінченному конусі зі зрізаною вершиною Q_1 та скінченному конусі Q_2 випливає наступне твердження.

Теорема 3.1. Зв'язок між матричними операторами, які описують дифракцію хвиль на круговій апертурі напівнескінченного конуса зі зрізаною вершиною Q_1 та на апертурі доповнюючого скінченного конуса Q_2 визначається співвідношенням

$$a_{qn}^{(11)} = -a_{qn}^{(22)} \left(\xi_q \to z_n,\, z_n \to \xi_q\right),$$

$$a_{qn}^{(22)} = -a_{qn}^{(11)} \left(\xi_q \to z_n,\, z_n \to \xi_q\right),$$

де позначення $\xi_q \to z_n$, $z_n \to \xi_q$ вказують на заміну індексів.

Доведення цього твердження випливає безпосередньо із виразів для матричних елементів операторів.

3.3.1. Кругова апертура у необмеженій площині. У цьому випадку індекси для м'якого і жорсткого випадків визначаються відповідно із виразів (2.58). Тоді розв'язок задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на м'якому (жорсткому) конусі Q_1 при $\gamma = \pi / 2$ знаходиться виходячи із НСЛАР (3.36), де пара регуляризуючих операторів $A,\ A^{-1}$ визначаються відповідно виразами (2.61) і (2.62), а праві частини $F^{(1)}$ записуються так

$$f_q = \frac{(-1)^q \pi\Gamma(q)}{\sqrt{8}\Gamma(q+1/2)} \begin{cases} \dfrac{1}{K_{2q-1/2}(sc_1)} & \text{для } S\text{-випадку;} \\ \dfrac{2q-1}{K_{2q-3/2}(sc_1)} & \text{для } R\text{-випадку.} \end{cases}$$

Для кругової апертури у необмеженій площині вирази (3.38), (3.39) суттєво спрощуються і записуються так

$$y_p^{(2,1)} = \begin{cases} (-1)^{p+1} \dfrac{4\xi_p \Gamma(p+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(p)} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n^{(1)}}{\xi_p^2 - z_n^2}; \\ (-1)^{p+1} \dfrac{2\xi_p \Gamma(p-1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(p)} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n^{(1)}}{\xi_p^2 - z_n^2}; \end{cases}$$

$$y_k^{(2,2)} = \begin{cases} -\sqrt{2\pi}\xi_k I_{\xi_k}(sc_1) + (-1)^{k+1} \dfrac{4\xi_k \Gamma(k+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k)} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n^{(1)}}{\xi_k^2 - z_n^2}; \\ -\sqrt{2\pi}\xi_k I_{\xi_k}(sc_1) - x_0 \delta_k^1 + (-1)^k \dfrac{2\xi_k \Gamma(k-1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k)} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n^{(1)}}{\xi_k^2 - z_n^2}. \end{cases}$$

3.4. Аналіз результатів розрахунку

Для вивчення дифракції плоскої акустичної хвилі на конусі Q_1 використали розв'язки НСЛАР (3.36).

Спершу перевіримо виконання умов спряження акустичних полів (3.14), (3.15) на межі підобластей $D_1,\ D_2,\ D_3$. Відповідні зіставлення приведені на рис. 3.2 для м'якого конуса і на рис. 3.3 для жорсткого конуса. Із цих рисунків бачимо, що криві із графічною точністю співпадають. Незначні відхилення спостерігаємо в околі краю, що обумовлено особливістю градієнту потенціалу на краю.

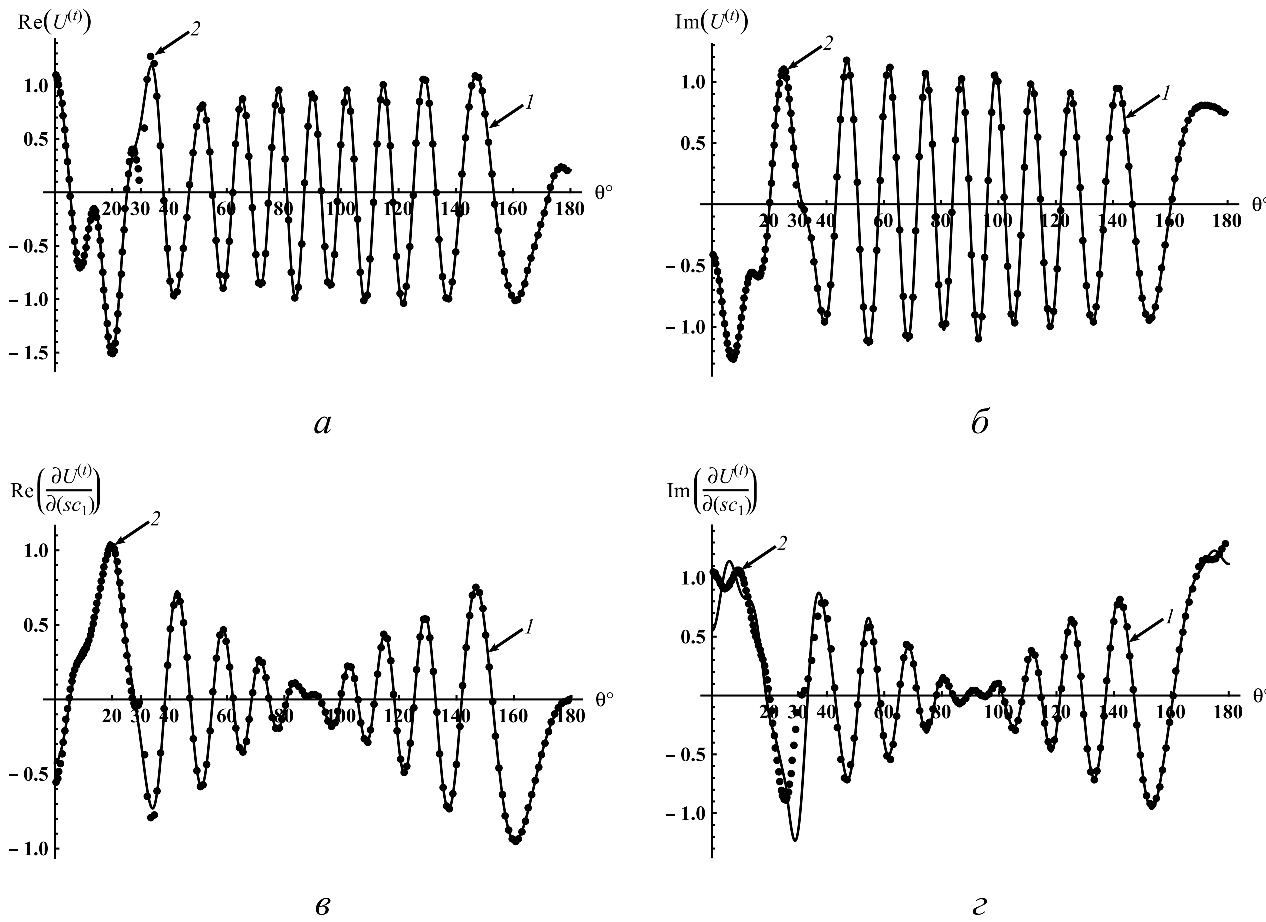


Рис. 3.2. Дійсні та уявні складові акустичних полів на границі спряження підобластей D_1, D_2, D_3, утворених м'яким конусом при $\gamma = 30°$, $kc_1 = 30$:

а, б – повне дифраговане поле;

в, г – нормальна складова коливальної швидкості;

1 – зі сторони D_3 ($0° \le \theta \le 180°$);

2 – зі сторони D_1 ($0° \le \theta \le \gamma$) і D_2 ($\gamma \le \theta \le 180°$).

3.4.1. Дослідження характеристик поля у зоні випромінювання. Дослідимо звукове поле створюване конусом Q_1 у дальній зоні. Для цього проаналізуємо діаграми спрямованості D, які на основі виразів (2.63), (3.4), записуються у вигляді

$$D(\theta)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\begin{cases}\left|\sum\limits_{p=1}^{\infty}\dfrac{y_p^{(2,1)}P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta)}{K_{\nu_p}(sc_1)}\right|, & 0\le\theta<\gamma;\\ \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{y_k^{(2,2)}P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)}{K_{\mu_k}(sc_1)}\right|, & \gamma<\theta\le\pi.\end{cases} \tag{3.40}$$

Вираз (3.40) за своїм фізичним змістом у діапазоні $\gamma<\theta\le\pi$ визначає дифраговане поле в області D_2 і повне поле в області D_1 в області $0\le\theta<\gamma$.

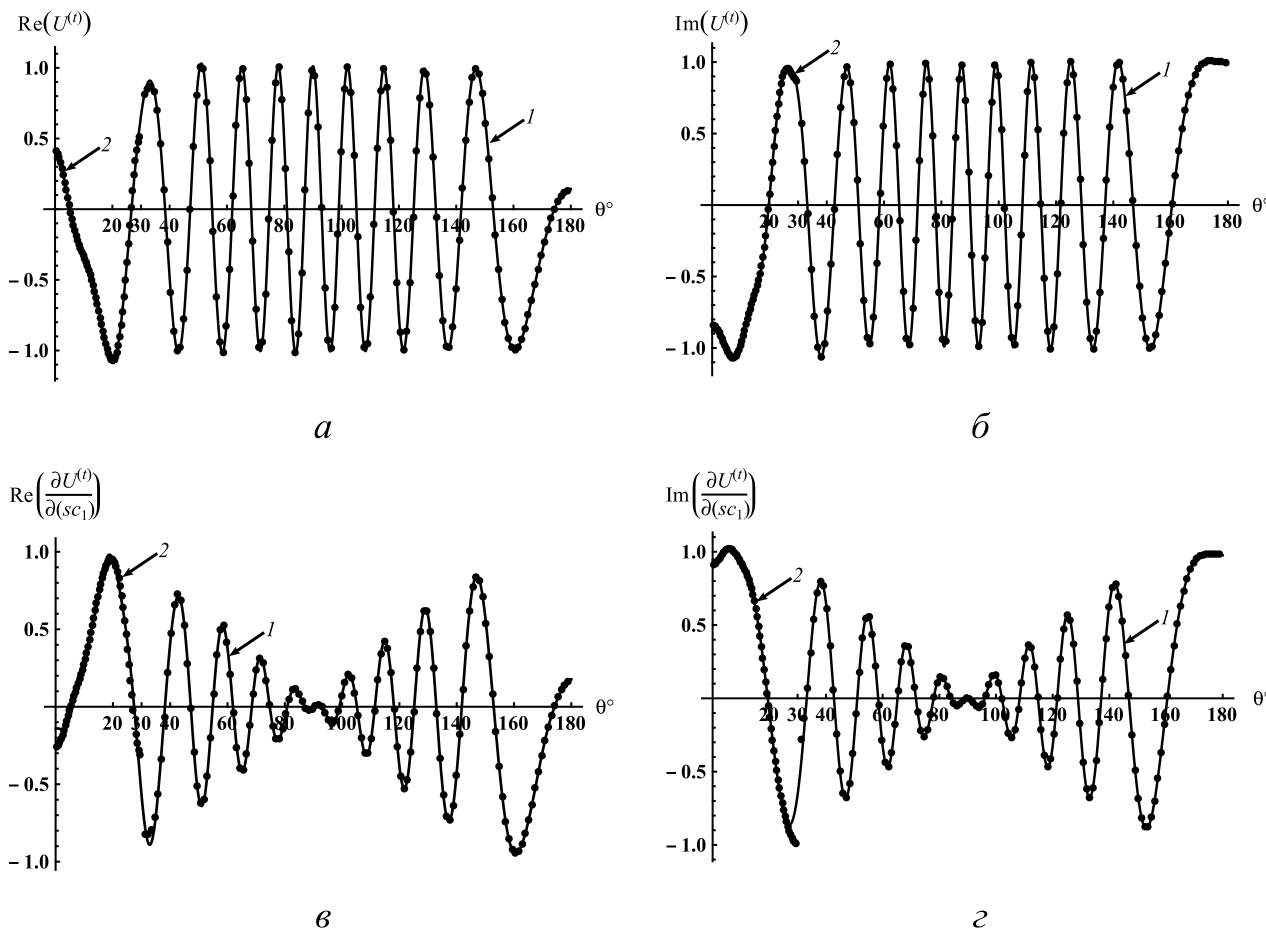


Рис. 3.3. Дійсні та уявні складові акустичного поля на границі спряження підобластей D_1, D_2, D_3, утворених жорстким конусом при $\gamma=30°$, $kc_1=30$:

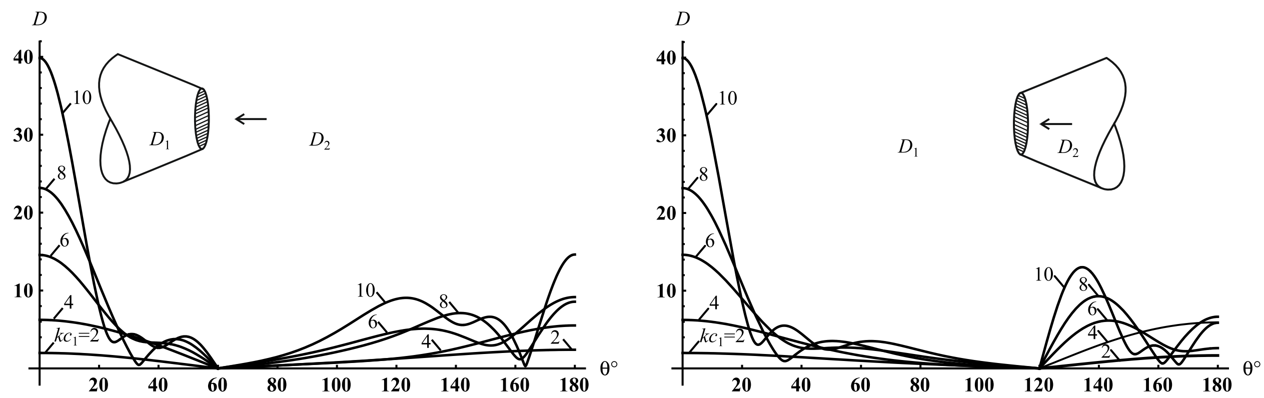
а, б – повне дифраговане поле;

в, г – нормальна складова коливальної швидкості;

1 – зі сторони D_3 ($0°\le\theta\le180°$);

2 – зі сторони D_1 ($0°\le\theta\le\gamma$) і D_2 ($\gamma\le\theta\le180°$).

На рис. 3.4 проілюстровано вплив хвильового радіусу зрізу вершини конуса kc_1 на діаграми спрямованості м'якого конуса Q_1 при його опроміненні плоскою звуковою хвилею зі сторони зрізу. Тобто аналізуємо ситуацію, коли хвиля проникає у конічну каверну через отвір сформований зрізом вершини. Із поведінки кривих на рис. 3.4, *а*, коли $kc_1 \le 4$ слідує, що випромінювання в областях D_1 і D_2 не є спрямованим. Зі зростанням параметра kc_1 спостерігаємо формування інтенсивного випромінювання у напрямі поширення падаючої хвилі ($\theta = 0°$), де головна пелюстка діаграми спрямованості при $kc_1 = 10$ займає область $0° \le \theta < 20°$. Зростання амплітуди цього випромінювання залежить від kc_1 монотонно. В області D_2 максимум випромінювання дифрагованого поля формується у напрямку зворотного розсіяння ($\theta = 180°$), а кутова область $60° \le \theta \le 80°$ є практично "вільною" від проникнення дифрагованого поля. Крім того, відбувається формування бічних пелюсток, що займають кутову область $100° < \theta < 160°$. В околі $\theta = 60°$, що відповідає куту розхилу конуса, поле випромінювання рівне нулю, що демонструє виконання граничної умови на поверхні Q_1.



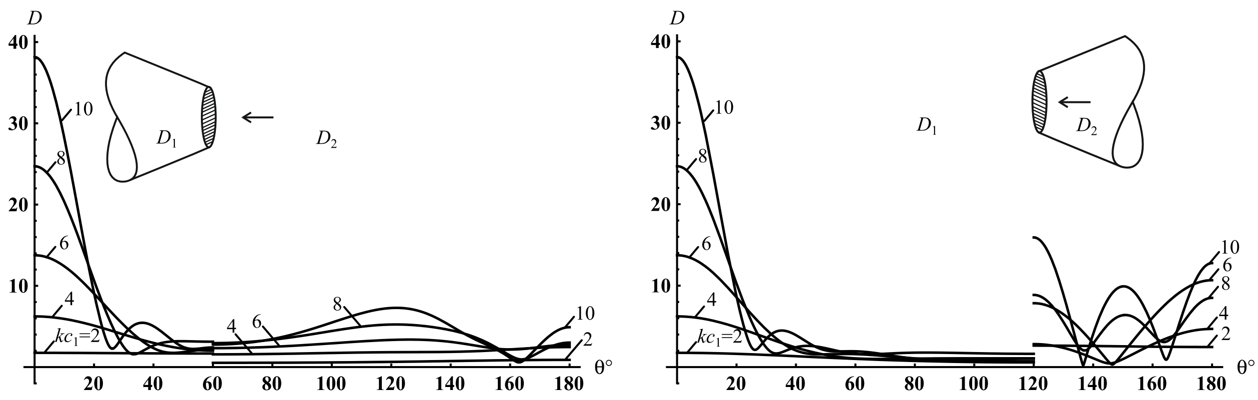
а *б*

Рис. 3.4. Вплив параметра kc_1 на діаграми спрямованості м'якого конуса:

$а$ – $\gamma = 60°$, $б$ – $\gamma = 120°$.

У випадку, коли конус Q_1 опромінювати зі сторони основи зрізу ($\gamma = 120°$), діаграми спрямованості наведено на рис. 3.4, *б*. Тепер аналізується випадок, коли хвиля виходить через отвір із конічної каверни. Аналогічно із попереднім випадком, тут зі зростанням параметра kc_1, також спостерігаємо монотонний ріст поля випромінювання у напрямі падаючої хвилі ($\theta = 0°$). Тобто спостерігаємо ефект “фокусування” звукового поля конічною каверною у напрямі опромінення (рис. 3.4, *б*). В області D_2 (див. рис. 3.4, *б*) максимальне випромінювання формується в околі кутів спостереження близьких до бокової поверхні конуса ($130° < \theta < 140°$). У точці спостереження $\theta = \gamma$, як і повинно бути, поле випромінювання рівне нулю.

Наступним розглянемо випадок, коли поверхня конуса Q_1 є жорсткою. На рис. 3.5 показано вплив хвильового радіусу зрізу kc_1 на діаграми спрямованості при опроміненні плоскою звуковою хвилею зі сторони зрізу конуса (рис. 3.5, *а*) та зі сторони основи конуса (рис. 3.5, *б*).



а *б*

Рис. 3.5. Вплив параметра kc_1 на діаграми спрямованості жорсткого конуса:

а – $\gamma = 60°$, *б* – $\gamma = 120°$.

Із поведінки кривих на рис. 3.5, *а* спостерігаємо формування інтенсивного випромінювання у напрямі поширення падаючої хвилі ($\theta = 0°$) зі зростанням параметра kc_1. При цьому також бачимо суттєве зростання рівня дифрагованого поля в області дзеркального відбиванням хвиль від бокової поверхні конуса Q_1 в діапазоні зміни полярного кута $100 < \theta < 140°$. На рис. 3.5, *б* ілюструємо діаграми спрямованості, коли кут розхилу конуса рівний $\gamma = 120°$, тобто випромінювання проходить зі сторони конічної каверни. Порівнюючи відповідні криві на рис. 3.5, *а* та рис. 3.5, *б* спостерігаємо їх практичне співпадіння при $0° < \theta < 60°$ (область D_1) і значимі розходження в області спостережень $\theta > 120°$. Із поведінки кривих на рис. 3.5, *б* видно значний рівень розсіяння у напрямі твірної $\theta = 120°$ і у зворотному напрямі ($\theta = 180°$).

Проаналізуємо випадок впливу радіусу зрізу kc_1 на діаграми спрямованості вузьких конусів: $\gamma = 20°$ і $\gamma = 160°$ з м'якою (рис. 3.6) і жорсткою (рис. 3.7) боковою поверхнею.

При опроміненні м'якого конуса Q_1 (див. рис. 3.6, *а*) у напрямі зрізу в області D_2 можна виділити дві ділянки: область зумовлена дзеркальним відбиванням від бокової поверхні конуса біля $\theta = 60°$ і область зворотного розсіювання $\theta = 180°$. В околі цих кутів із ростом kc_1 формується дифраговане поле, де для $kc_1 = 10$: $D(\theta = 60°) = 3.28337$ і $D(\theta = 180°) = 2.82564$. В області D_1 модуль потенціалу швидкості дифрагованого поля зосереджений у вузькій області $0° \le \theta \le 20°$, де його випромінювання спрямоване у напрямку $\theta = 0°$. При цьому із ростом kc_1 випромінювання зростає монотонно.

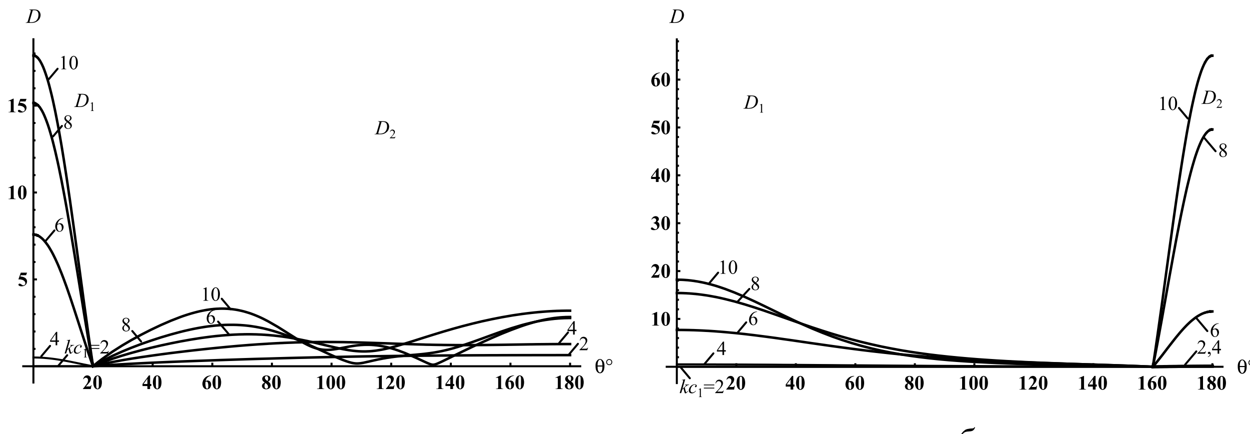


Рис. 3.6. Вплив параметра kc_1 на діаграми спрямованості м'якого конуса: *а* – $\gamma = 20°$, *б* – $\gamma = 160°$.

Із рис. 3.6, *б* спостерігаємо, що при виході хвилі з вузької каверни, стінки якої є м'якими, дифраговане поле в області D_2 значно перевищує поле в D_1. Так для $kc_1 = 10$: $D(\theta = 0°) = 18.1237$ і $D(\theta = 180°) = 65.1049$. Проте, коли $kc_1 \le 4$

дифраговане поле в D_2 і повне в D_1 практично рівні нулю. В області D_1 ділянка $100° < \theta < 160°$ є "вільною" від проникнення поля вже для різних значень kc_1. Тут слід зауважити, що формування поля відбувається без утворення додаткових пелюсток. Це означає, що для конуса з кутом розхилу $\gamma = 160°$ і $kc_1 = 10$ при діаметрі отвору d_1 ($d_1 = 2a_1 \sin\gamma$) співмірному з довжиною хвилі поле не проходить в отвір каверни ($kd_1 = 2ka_1 \sin 20° = 6.84$).

У випадку опромінення жорсткого конуса Q_1, у дифрагованому полі також не спостерігаємо утворення бокових пелюсток. Із поведінки кривих на рис. 3.7, *а* бачимо, що при проникненні поля у каверну зі сторони зрізу повне поле (область D_1) значно перевищує дифраговане (область D_2). Протилежну поведінку поля спостерігаємо при опроміненні Q_1 зі сторони каверни (див. рис. 3.7, *б*).

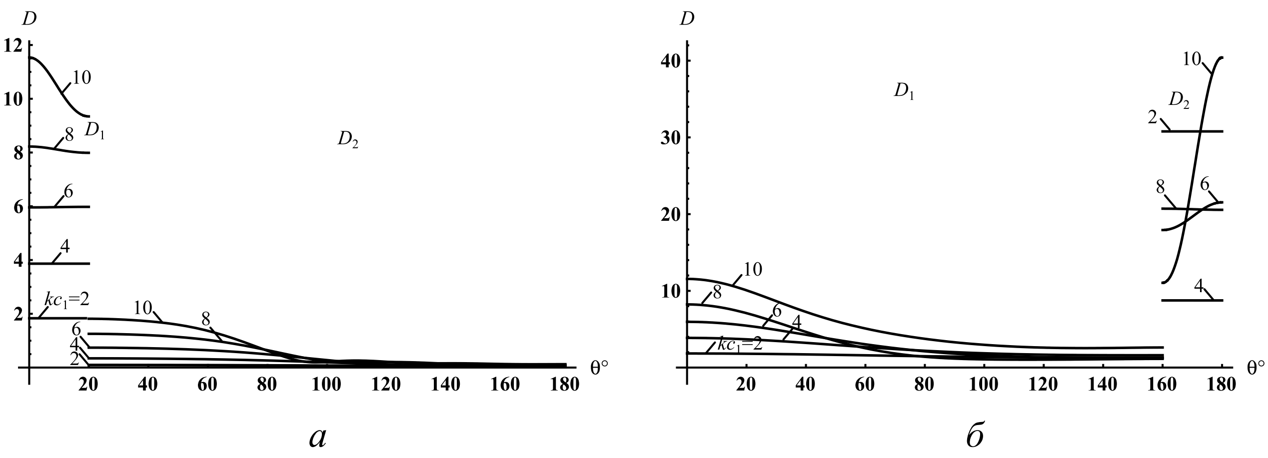
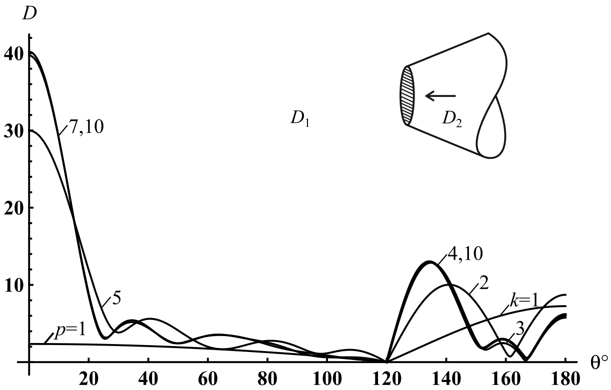


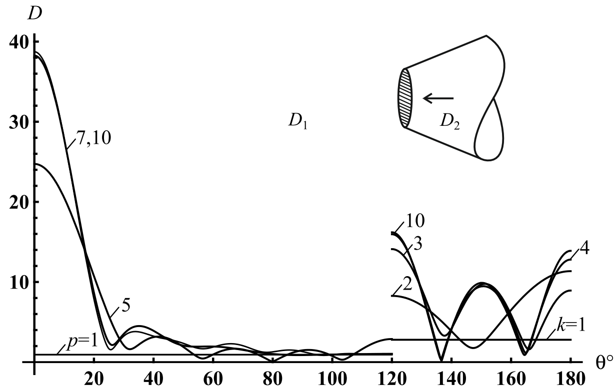
Рис. 3.7. Вплив параметра kc_1 на діаграми спрямованості жорсткого конуса:

$$а - \gamma = 20°,\ б - \gamma = 160°.$$

Для вияснення модової структури поля дослідили їх вплив на формування діаграм спрямованості. На рис. 3.8 показано залежності діаграм спрямованості від кількості врахованих мод. Як видно з цього рисунку, в освітленій області D_2 як для м'якого, так і для жорсткого конусів, поле практично повністю формується, коли кількість мод $n \approx [kc_1 / 2]$. В тіньовій області D_1 кількість мод, яка необхідна для повного формування діаграм спрямованості приблизно рівна $n \approx [kc_1]$.



а



б

Рис. 3.8. Помодове формування $D(\theta)$ для параметрів конуса $\gamma = 120°$ і $kc_1 = 10$: *а* – м’який конус; *б* – жорсткий конус.

Для оцінки розсіяної потужності введемо до розгляду, подібно до того як це робиться при розв’язанні задач електродинаміки [86], коефіцієнт відбивання за потужністю W_-, який за фізичним змістом визначає нормовану потужність випромінювання акустичної хвилі в кутову область $\gamma \le \theta \le \pi$. Тоді записавши цю потужність у вигляді

$$W = -\frac{\rho_0 c_0}{2k} \operatorname{Re}\left\{ \lim_{r\to\infty} r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\gamma^\pi iU(r,\theta)\left(\frac{\partial U(r,\theta)}{\partial r}\right)^* \sin\theta d\theta \right\}$$

та пронормувавши її до максимальної потужності плоскої хвилі, що падає на апертуру радіусом c_1

$$W_0 = \frac{\pi c_1^2}{2\rho_0 c_0},$$

знаходимо

$$W_- = \frac{\pi \sin\gamma}{2(kc_1)^2} \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| y_k^{(2,2)} \right|^2 \dfrac{\left| P^1_{\mu_k - 1/2}(-\cos\gamma) \partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu \right|}{\mu_k \left| K_{\mu_k}(sc_1) \right|^2} \text{ для } S\text{-випадку;} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| y_k^{(2,2)} \right|^2 \dfrac{\left| P_{\mu_k - 1/2}(-\cos\gamma) \partial P^1_{\mu_k-1/2}(-\cos\gamma)/\partial\mu \right|}{\mu_k \, | K_{\mu_k}(sc_1) |^2} \text{ для } R\text{-випадку.} \end{cases} \quad (3.41)$$

Залежності $W_- = W_-(kc_1)$, отримані згідно формули (3.41) для м’якого конуса Q_1, проілюстровано на рис. 3.9. Як видно із поведінки кривих на цьому рисунку, залежності $W_-(kc_1)$ мають осцилюючий характер, причому амплітуда осциляцій спадає зі збільшенням радіусу зрізу kc_1. Як видно із цього рисунку, для вузьких конусів $\gamma < 20°$ коефіцієнт відбивання практично не залежить від kc_1. Із розкриттям конуса $\gamma > 20°$ спостерігаємо формування вираженого максимуму в околі $kc_1 = 2.5$ (див. табл. 3.1). У цій точці $W_- > 1$, тобто значна частина поля не проходить через апертуру.

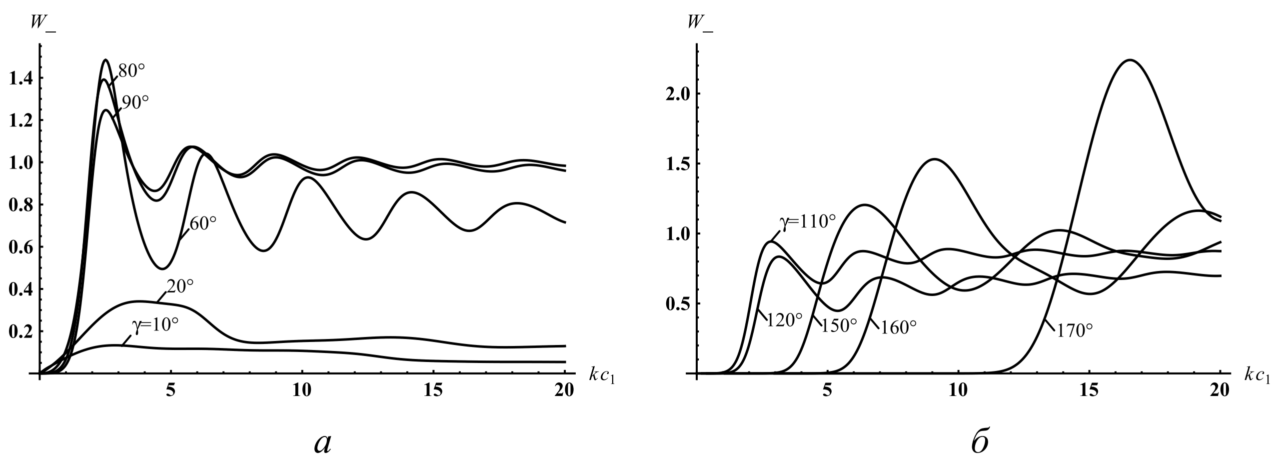


Рис. 3.9. Залежності $W_-(kc_1)$ для різних кутів розхилу м'якого конуса:

$a - \gamma \leq 90°$, $б - \gamma > 90°$.

Таблиця 3.1.

Резонансні значення W_- для кутів $\gamma \leq 90°$

γ	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
W_-	0.72858	1.11746	1.36969	1.4783	1.47272	1.38617	1.24266
kc_1	3.45	2.97	2.68	2.51	2.44	2.45	2.52
ka_1	1.76	1.91	2.05	2.17	2.11	2.41	2.52

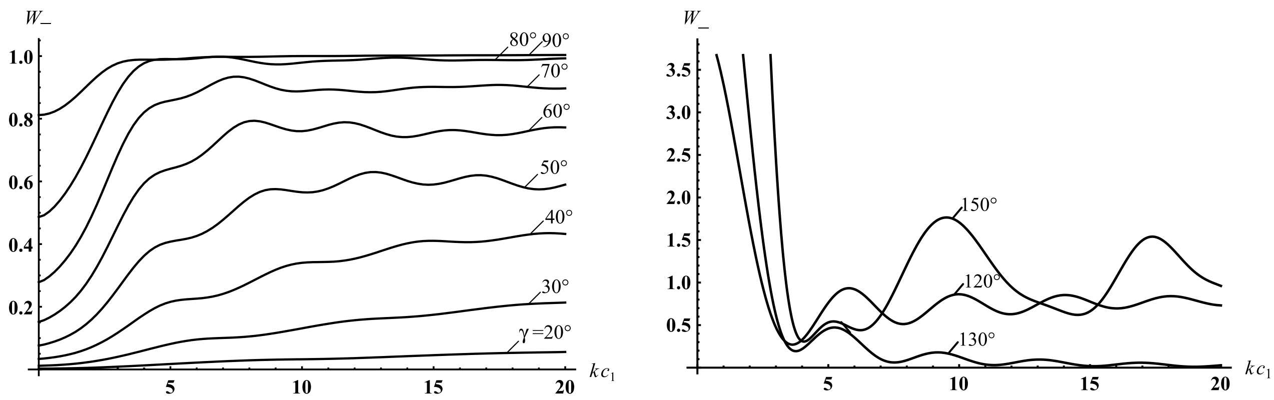
Розглянемо тепер випадок, коли хвиля виходить із каверни, тобто $\gamma > 90°$ (див. рис. 3.9, *б*). У цьому випадку, максимум зсувається у високочастотну область і проявляється, коли радіус отвору $a_1 = c_1 \sin\gamma$ є близький до половини довжини хвилі $a_1 \sim \lambda / 2$ (див. табл. 3.2). Максимальну амплітуду відбитої від краю енергії дифрагованого поля спостерігаємо для кутів $\gamma \geq 150°$. Максимуми на рис. 3.9 можна трактувати як частоти "відсічки", тобто частоти, на яких апертура не дозволяє полю проникнути із області D_2 в область D_1.

Таблиця 3.2.

Резонансні значення W_- для кутів $\gamma > 90°$

γ	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
W_-	1.0903	0.93844	0.829071	0.81932	0.947344	1.1937	1.50703	2.43491
kc_1	2.65	2.85	3.15	3.70	4.50	6.43	9.11	16.20
ka_1	2.61	2.68	2.73	2.83	2.89	3.16	3.12	2.81

На рис. 3.10 показані залежності коефіцієнта відбивання за потужністю для жорсткого конуса Q_1 у двох випадках: $\gamma \leq 90°$ (рис. 3.10, *а*) і $\gamma > 90°$ (рис. 3.10, *б*). Як видно з рис. 3.10, *а*, криві монотонно зміщуються до більших значень $W_-(kc_1)$ з ростом γ. Зі зростанням параметра kc_1, W_- прямує до постійного значення. Максимальна потужність випромінювання в область D_2 при $\gamma \to \pi / 2$ не перевищує 1.



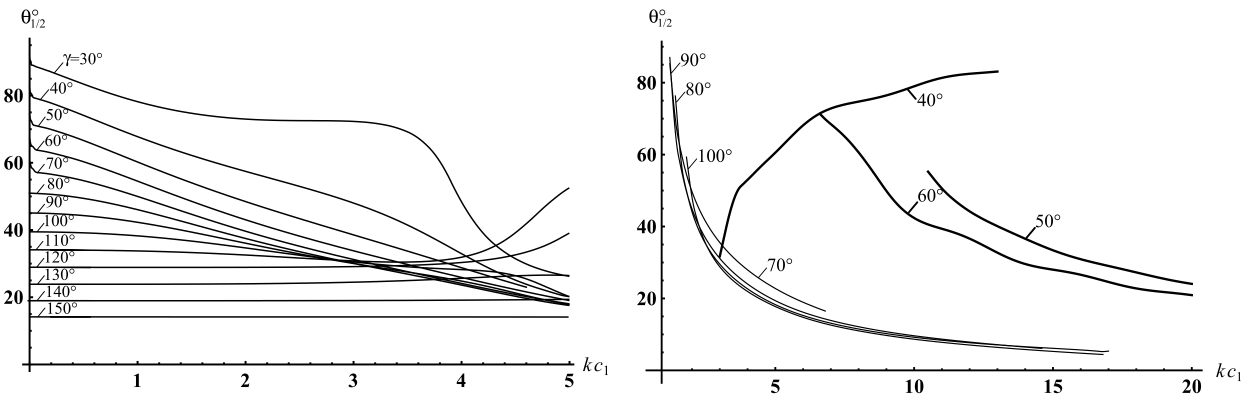
а *б*

Рис. 3.10. Залежності $W_-(kc_1)$ для різних кутів розхилу жорсткого конуса:

а – $\gamma \leq 90°$; *б* – $\gamma > 90°$.

У випадку, коли хвиля виходить із каверни (див. рис. 3.10, *б*), бачимо, що у довгохвильовій області $kc_1 \to 0$ (каверна практично закрита, отвір малий) коефіцієнт відбивання за потужністю перевищує 1 ($W_- >> 1$). Це вказує на те, що розсіяне поле в область D_1 практично не проникає. Починаючи вже із значень параметра $kc_1 > 5$, криві $W_-(kc_1)$ мають осцилюючий характер, який загасає при розширенні каверни. Тобто широкі каверни створюють меншу перешкоду до проникнення поля в отвір зрізу.

Вимірювання амплітудних значень дифрагованого поля дає можливість оцінити радіус зрізу апертури [108]. На рис. 3.11 наведено залежності кутової ширини $\theta_{1/2}(kc_1)$ головної пелюстки на рівні половини інтенсивності випромінювання $\left\{D(\theta_{1/2})\right\}^2$ як функції радіуса зрізу конуса kc_1. Такі залежності розраховувались для різних кутів розхилу конуса γ ($30° \le \gamma \le 150°$). Криві на рис. 3.11 дозволяють встановити радіус апертури при відомому куті розхилу $\gamma < 90°$ і $c_1 < \lambda / 2$. Для значень $\gamma > 90°$, що відповідає випадку, коли джерело опромінення знаходиться в конічній каверні, величина $\theta_{1/2}(kc_1)$ практично не залежить від kc_1, а отже визначення радіусу отвору за цією характеристикою стає практично неможливим. Тобто для визначення радіусу отвору каверни необхідно опромінювати конус зі сторони зрізу.



а *б*

Рис. 3.11. Залежності $\theta_{1/2}(kc_1)$ для різних значень кута розхилу конуса:

а – м’який конус; *б* – жорсткий конус.

У випадку, коли поверхні конуса жорстка (див. рис. 3.11, *б*) визначення радіусу зрізу вдається провести для кутів розкриву $\gamma \le 60°$. Для широких конусів $\gamma > 60°$ залежності $\theta_{1/2} = \theta_{1/2}(kc_1, \gamma)$ накладаються, що утруднює їх розділення.

На рис. 3.12 співставлено залежність $W_{\_}(kc_1)$ отримані для м'якої (криві *1*, *2*) та жорсткої (криві *3*, *4*) апертури у необмеженій площині ($\gamma = \pi/2$) у діапазоні $0 \le kc_1 \le 10$. Криві *1*, *3* отримані для $\gamma = 90°$, а криві *2*, *4* відповідають результатам [58]. Порівняння кривих на рис. 3.12 показує співпадіння наших результатів з отриманими в [58] у всьому діапазоні зміни хвильового параметра kc_1.

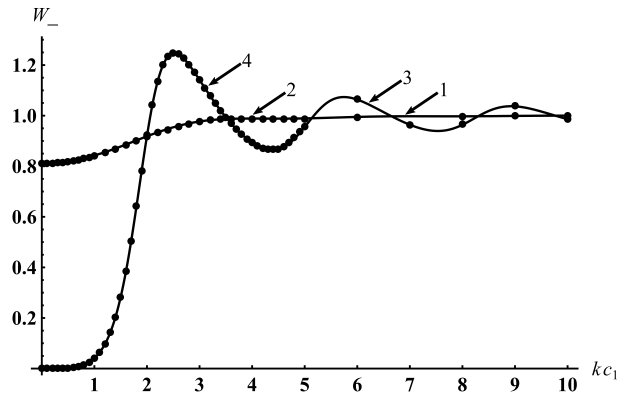
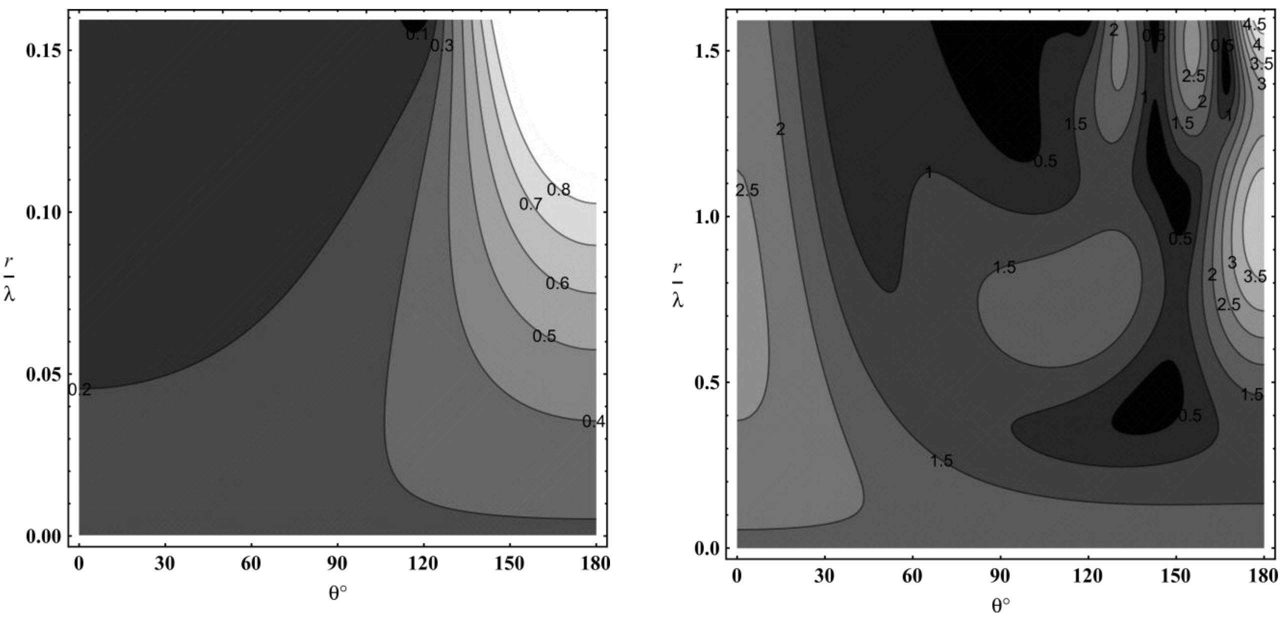


Рис. 3.12. Коефіцієнт відбивання (пропускання) для апертури у м'якій (*1*, *2*) і жорсткій (*3*, *4*) необмеженій площині:
1, *3* – наші розрахунки для $\gamma = 90°$; *2*, *4* – отримані у [58].

3.4.2. Дослідження характеристик поля у ближній зоні. На рис. 3.13 показано ізобари ближнього поля м'якого напівнескінченного конуса в координатах (θ, kr). Розглядали випадок, коли кут розхилу рівний $\gamma = 120°$ (хвиля виходить з каверни див. рис. 3.1) для двох значень хвильового параметра: $c_1/\lambda = 0.1592$ (малий отвір; рис. 3.13, *а*) і $c_1/\lambda = 1.5916$ (великий отвір; рис. 3.13, *б*). Тут максимумам відповідають білі області, а мінімумам – чорні. Із рис. 3.13, *а* спостерігаємо, що розподіли ізобар зі зміною параметрів конуса формуються монотонно. Бачимо, що "засвічена" область обмежена координатами $\{0.1 < r/\lambda \le 0.15592,\ \ 140° < \theta \le 180°\}$ і прилягає безпосередньо до отвору. Повне поле у цій області $0.8 < |U^{(t)}| < 0.9$ практично визначається первинним полем з амплітудою $|U^{(i)}|=1$. Зауважимо, що на практиці завжди дотримуються умови $\lambda >> a_1$ (де $a_1 = c_1 \sin\gamma$ – радіус кругового отвору), щоб виключити явища зумовлені дифракцією. Як видно із рис. 3.13, *а* максимально освітлена область займає приблизно $2/3$ кутового сектора апертури, що дозволяє використовувати таку структуру у якості зонда при діагностуванні. При віддалені від апертури приблизно на $r/\lambda = 0.1$ (до $r/\lambda = 0.05$), максимум поля спадає трохи менше, ніж на половину. Незначне спадання поля при віддалені від апертури можна використати при діагностуванні і об'ємних дефектів. Коли $c_1/\lambda = 1.5916$ (див. рис. 3.13, *б*), то вже проявляються дифракційні ефекти і не вдається виділити яскраво освітлених ділянок.

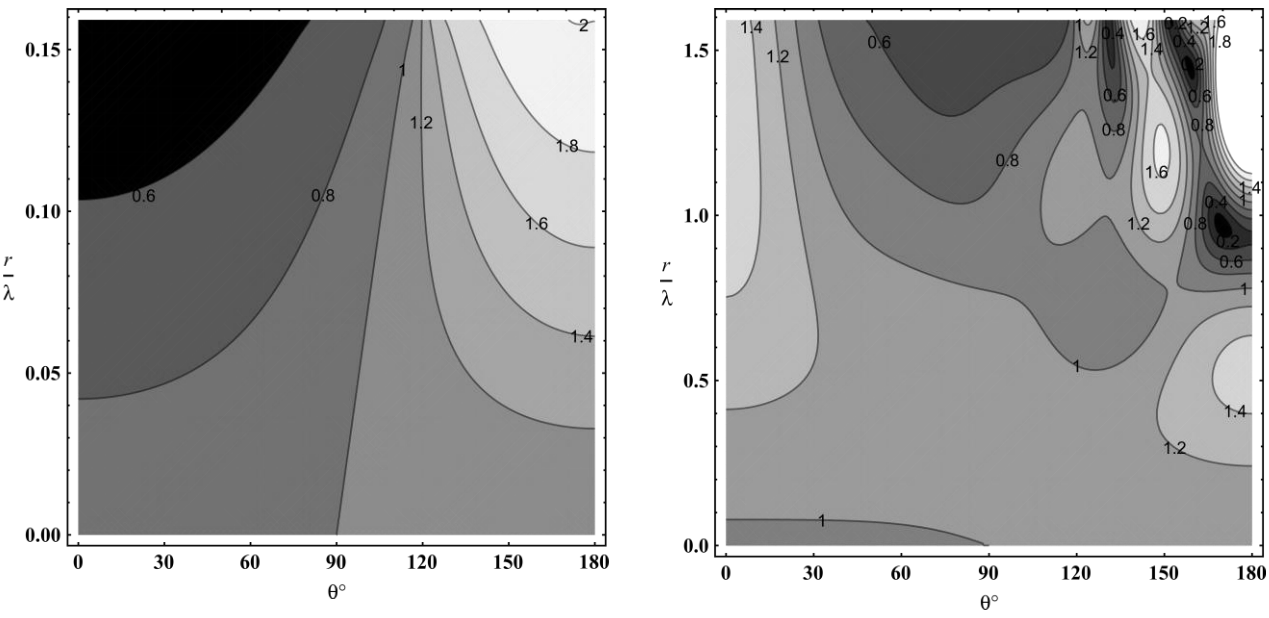


в *г*

Рис. 3.13. Розподіл нормованої амплітуди тиску у ближньому полі м'якого напівнескінченного конуса зі зрізаною вершиною з кутом розхилу $\gamma = 120°$: $а - c_1/\lambda = 0.1592$, $б - c_1/\lambda = 1.5916$.

Аналогічний розподіли ближнього поля спостерігаємо для жорсткого конуса Q_1 при $c_1/\lambda = 0.1592$ (рис. 3.14, *а*) і $c_1/\lambda = 1.5916$ (рис. 3.14, *б*). У цьому випадку слід зауважити, що у формування ближнього поля суттєвий вклад дає поршнева мода, що визначається формулою (3.34). Із рис.3.14, *а* видно, що при

$c_1/\lambda = 0.1592$, як і у попередньому випадку, поле формується монотонно. Проте завдяки існування поршневої моди розподіл тиску тут має більшу амплітуду. Яскраво освітлена область, яка прилягає до апертури $\{0.12 \le r/\lambda \le 0.1592$, $140° < \theta \le 180°\}$, де повне поле $U^{(t)}$ практично у два рази перевищує падаюче поле $U^{(i)}$. Цей ефект можна використати при зондуванні. Із рис. 3.14, *б* спостерігаємо вузьку яскраво освітлену область $\{1.1 < r/\lambda \le 1.5916,\ 170° < \theta \le 180°\}$, формування якої при $a_1/\lambda \approx 1$ обумовлене дифракційним ефектом. Тобто в круговій апертурі жорсткого конуса можна формувати яскраве поле тиску і при $a_1/\lambda \approx 1$.



а *б*

Рис. 3.14. Розподіл нормованої амплітуди тиску у ближньому полі жорсткого напівнескінченного конуса зі зрізаною вершиною з кутом розхилу $\gamma = 120°$: $а - c_1/\lambda = 0.1592$, $б - c_1/\lambda = 1.5916$.

3.5. Висновки до розділу 3

1. Розв'язано задачу дифракції поля плоскої акустичної хвилі на м'якому і жорсткому напівнескінченному конусі зі зрізаною вершиною при осьовому опроміненні. Цю задачу методом аналітичної регуляризації зведено до

НСЛАР другого роду, розв'язок якої знаходиться методом редукції із заданою точністю.

2. На основі числового розв'язку отриманих НСЛАР досліджено характеристики розсіяння напівнескінченного м'якого і жорсткого конусів у широкому діапазоні зміни геометричних параметрів і частоти; встановлено ефект "фокусування" звукового поля конічною каверною у напрямі опромінення; для м'якого зрізаного конуса виявлено резонансний характер поведінки потужності розсіяного поля на низьких частотах ($c_1 < \lambda / 2$); виявлено ефект запирання поля при його виході із конічної каверни.
3. Показано можливість визначення радіусу кругових апертур за значеннями вимірюваної ширини інтенсивності випромінювання на рівні половини амплітуди за даними одночастотного зондування, коли відомі частота і кут розхилу апертури.
4. Досліджено особливості формування зон високого тиску в апертурі конічного зонда з м'якого і жорсткого матеріалів. Виявлено можливість утворення таких зон як у випадку, коли розмір отвору є меншим за довжину хвилі, так і коли його розмір порівняльний із довжиною хвилі і суттєвими є дифракційні ефекти.

РОЗДІЛ 4
ДИФРАКЦІЯ ПЛОКОЇ АКУСТИЧНОЇ ХВИЛІ НА СКІНЧЕННОМУ КОНУСІ ЗІ ЗРІЗАНОЮ ВЕРШИНОЮ

У цьому розділі вивчається задача дифракції плоскої акустичної хвилі на скінченному м’якому та жорсткому конусах зі зрізаною вершиною. Досліджувана структура володіє двома краями і виступає як “бінарна”, оскільки у часткових випадках здатна моделювати скінченний (розділ 2) та напівнескінченний зі зрізаною вершиною (розділ 3) конуси. Розв’язок задачі дифракції на скінченному конусі зі зрізаною вершиною будемо шукати методами власних функцій та аналітичної регуляризації. Ці два методи, зокрема, використані при дослідженні даної структури в електромагнітному випадку [84–86].

У цьому розділі чисельно вивчаємо розсіювальні характеристики м’якого конуса та круглого кільця. Часткові випадки цієї задачі розглянуті у [110–112, 114].

4.1. Постановка задачі

Розглянемо ідеально м’який (жорсткий) круговий скінченний конус зі зрізаною вершиною (рис. 4.1), який у сферичній системі (r,θ,φ) координат запишемо так

$$Q_{12}:\left\{r\in(c_1,c_2);\,\theta=\gamma;\,\varphi\in[0,2\pi)\right\}. \tag{4.1}$$

Тут c_1, c_2 – сферичні радіуси країв конуса, $c_2>c_1$; γ – кут розхилу конуса. Часткові випадки цієї задачі, коли $c_1=0$ розв’язано у розділі 2, а коли $c_2\to\infty$ – в розділі 3.

Нехай конус Q_{12} опромінюється полем плоскої монохроматичної акустичної хвилі $U^{(i)}(r,\theta)=\exp(ikr\cos\theta)$, яка поширюється вздовж осі симетрії конуса у напрямку $\theta=0$.

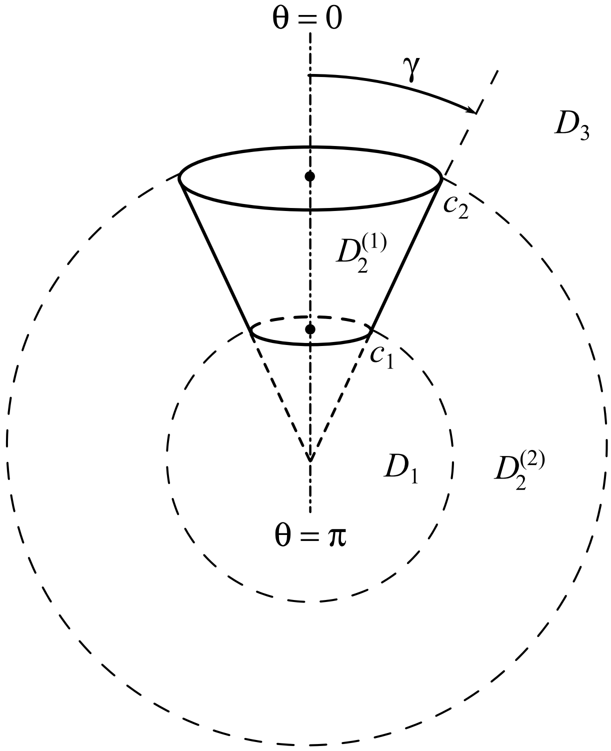


Рис. 4.1. Геометрична схема скінченного конуса зі зрізаною вершиною.

Шуканий потенціал швидкості дифрагованого поля $U(r,\theta)$ повинен задовольняти рівнянню Гельмгольца (2.3) із граничними умовами відповідно Діріхле (2.4) для м'якої та Неймана (2.5) для жорсткої поверхонь конуса Q_{12}. Крім того, поведінка розсіяного поля повинна задовольняти умову випромінювання та умову обмеженості енергії поля у скінченному об'ємі, яка у нашому випадку зводиться до виконання умови Мейкснера на краях.

4.2. Зведення змішаної крайової задачі до НСЛАР другого роду

Для розв'язання сформульованих тут крайових задач, розіб'ємо простір R^3 на чотири підобласті:

$$\begin{aligned} &D_1: \ \{r \in (0,c_1);\ \theta \in [0,\pi]\};\\ &D_2^{(1)}: \{r \in (c_1,c_2);\ \theta \in [0,\gamma)\};\\ &D_2^{(2)}: \{r \in (c_1,c_2);\ \theta \in (\gamma,\pi]\};\\ &D_3: \ \{r \in (c_2,\infty);\ \theta \in [0,\pi]\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

У кожній із виділених підобластей (4.2) повне поле подамо так

$$U^{(t)}(r,\theta)=\begin{cases}U(r,\theta), & (r,\theta)\in D_1, D_2^{(1)}, D_2^{(2)};\\ U^{(i)}(r,\theta)+U(r,\theta) & (r,\theta)\in D_3,\end{cases} \tag{4.3}$$

а шуканий потенціал швидкості дифрагованого поля запишемо у вигляді

$$U(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{sr}}\begin{cases}\Phi_1(sr)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{x}_n^{(1)}P_{z_n-1/2}(\cos\theta)\dfrac{I_{z_n}(sr)}{I_{z_n}(sc_1)}, & (r,\theta)\in D_1;\\ \sum\limits_{p=1}^{\infty}P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta)\left[y_p^{(2,1)}\dfrac{K_{\nu_p}(sr)}{K_{\nu_p}(sc_1)}+\overline{y}_p^{(2,1)}\dfrac{I_{\nu_p}(sr)}{I_{\nu_p}(sc_2)}\right], & (r,\theta)\in D_2^{(1)};\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)\left[y_k^{(2,2)}\dfrac{K_{\mu_k}(sr)}{K_{\mu_k}(sc_1)}+\overline{y}_k^{(2,2)}\dfrac{I_{\mu_k}(sr)}{I_{\mu_k}(sc_2)}\right], & (r,\theta)\in D_2^{(2)};\\ \Phi_2(sr)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{x}_n^{(2)}P_{z_n-1/2}(\cos\theta)\dfrac{K_{z_n}(sr)}{K_{z_n}(sc_2)}, & (r,\theta)\in D_3.\end{cases} \tag{4.4}$$

Тут $\overline{x}_n^{(1)}$, $y_p^{(1,1)}$, $\overline{y}_p^{(1,2)}$, $y_k^{(2,1)}$, $\overline{y}_k^{(2,2)}$, $\overline{x}_n^{(2)}$ – невідомі коефіцієнти розкладу; ν_p, μ_k – додатні корені трансцендентних рівнянь відповідно для м'якого (2.12) і жорсткого (2.13) конусів. Також приймаємо (див. розділ 2), що $z_n=n-1/2$ і $\Phi_{1(2)}(sr)\equiv 0$ для S-випадку та $z_n=n+1/2$ і $\Phi_1(sr)\equiv\overline{x}_0^{(1)}I_{1/2}(sr)/I_{1/2}(sc_1)$, $\Phi_2(sr)\equiv\overline{x}_0^{(2)}K_{1/2}(sr)/K_{1/2}(sc_2)$ для R-випадку, де $\overline{x}_0^{(1)}$, $\overline{x}_0^{(2)}$ – невідомі.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу в (4.4) використаємо умови спряження повного потенціалу та його нормальної похідної на сферичних поверхнях $\{r=c_1,\ \theta\in[0,\pi]\}$, $\{r=c_2,\ \theta\in[0,\pi]\}$. Ці умови запишемо у вигляді

$$U^{(t)}(r,\theta)\Big|_{\substack{r=c_{1(2)}\mp 0\\ \theta\in[0,\pi]}}=\begin{cases}U^{(t)}(r,\theta)\Big|_{\substack{r=c_{1(2)}\pm 0\\ \theta\in[0,\gamma)}};\\ U^{(t)}(r,\theta)\Big|_{\substack{r=c_{1(2)}\pm 0\\ \theta\in(\gamma,\pi]}};\end{cases} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial U^{(t)}(r,\theta)}{\partial r}\Bigg|_{\substack{r=c_{1(2)}\mp 0\\ \theta\in[0,\pi]}}=\begin{cases}\dfrac{\partial U^{(t)}(r,\theta)}{\partial r}\Bigg|_{\substack{r=c_{1(2)}\pm 0\\ \theta\in[0,\gamma)}};\\ \dfrac{\partial U^{(t)}(r,\theta)}{\partial r}\Bigg|_{\substack{r=c_{1(2)}\pm 0\\ \theta\in(\gamma,\pi]}}.\end{cases} \tag{4.6}$$

Використовуючи (4.3)–(4.6) приходимо до систем із чотирьох суматорних рівнянь, які по аналогії з отриманими в розділі 2, записуємо так

$$\Phi_1(sc_1)+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\overline{x}_n^{(1)}P_{z_n-1/2}(\cos\theta)\underset{\theta\in[0,\pi]}{=}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P}P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta)\left[y_p^{(2,1)}+\overline{y}_p^{(2,1)}\dfrac{I_{\nu_p}(sc_1)}{I_{\nu_p}(sc_2)}\right], & \theta\in[0,\gamma);\\ \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K}P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)\left[y_k^{(2,2)}+\overline{y}_k^{(2,2)}\dfrac{I_{\mu_k}(sc_1)}{I_{\mu_k}(sc_2)}\right], & \theta\in(\gamma,\pi];\end{cases} \tag{4.7}$$

$$\Phi_1'(sc_1)+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\overline{x}_n^{(1)}P_{z_n-1/2}(\cos\theta)\frac{I_{z_n}'(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)}\underset{\theta\in[0,\pi]}{=}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P}P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta)\left[y_p^{(2,1)}\dfrac{K_{\nu_p}'(sc_1)}{K_{\nu_p}(sc_1)}+\overline{y}_p^{(2,1)}\dfrac{I_{\nu_p}'(sc_1)}{I_{\nu_p}(sc_2)}\right], & \theta\in[0,\gamma);\\ \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K}P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)\left[y_k^{(2,2)}\dfrac{K_{\mu_k}'(sc_1)}{K_{\mu_k}(sc_1)}+\overline{y}_k^{(2,2)}\dfrac{I_{\mu_k}'(sc_1)}{I_{\mu_k}(sc_2)}\right], & \theta\in(\gamma,\pi];\end{cases} \tag{4.8}$$

$$\Phi_2(sc_2)+\phi(sc_2)+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}P_{z_n-1/2}(\cos\theta)\left[\overline{x}_n^{(2)}+A_nI_{z_n}(sc_2)\right]\underset{\theta\in[0,\pi]}{=}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{K}P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta)\left[y_p^{(2,1)}\dfrac{K_{\nu_p}(sc_2)}{K_{\nu_p}(sc_1)}+\overline{y}_p^{(2,1)}\right], & \theta\in[0,\gamma);\\ \lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{P}P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)\left[y_k^{(2,2)}\dfrac{K_{\mu_k}(sc_2)}{K_{\mu_k}(sc_1)}+\overline{y}_k^{(2,2)}\right], & \theta\in(\gamma,\pi];\end{cases} \tag{4.9}$$

$$\Phi_2'(sc_2)+\phi'(sc_2)+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}P_{z_n-1/2}(\cos\theta)\left[\overline{x}_n^{(2)}\frac{K_{z_n}'(sc_2)}{K_{z_n}(sc_2)}+A_nI_{z_n}'(sc_2)\right]\underset{\theta\in[0,\pi]}{=}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P}P_{\nu_p-1/2}(\cos\theta)\left[y_p^{(2,1)}\dfrac{K_{\nu_p}'(sc_2)}{K_{\nu_p}(sc_1)}+\overline{y}_p^{(2,1)}\dfrac{I_{\nu_p}'(sc_2)}{I_{\nu_p}(sc_2)}\right], & \theta\in[0,\gamma);\\ \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K}P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta)\left[y_k^{(2,2)}\dfrac{K_{\mu_k}'(sc_2)}{K_{\mu_k}(sc_1)}+\overline{y}_k^{(2,2)}\dfrac{I_{\mu_k}'(sc_2)}{I_{\mu_k}(sc_2)}\right], & \theta\in(\gamma,\pi].\end{cases} \tag{4.10}$$

Тут $\phi_2(sc_2)$ визначено у (2.14); $A_n = \sqrt{2\pi}(-1)^{z_n - 1/2} z_n$; $N = P + K$ для S-випадку і $N = P + K - 1$ для R-випадку.

Розглянемо спочатку S-випадок. У цьому випадку для зведення системи суматорних рівнянь (4.7)–(4.10) до системи алгебраїчних рівнянь скористаємось формулами перерозкладу для функцій Лежандра, що задані виразом (2.19). Підставимо формули (2.19) у ліві частини суматорних рівнянь (4.7)–(4.10) і прирівняємо члени із однаковими функціями Лежандра. Тоді приходимо до таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{(1)}}{\nu_p^2 - z_n^2} = \frac{1}{\nu_p \alpha^+(\nu_p, \gamma)} \left[y_p^{(2,1)} + \bar{y}_p^{(2,1)} \frac{I_{\nu_p}(sc_1)}{I_{\nu_p}(sc_2)} \right], \; p = \overline{1,P};$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{(1)}}{\mu_k^2 - z_n^2} = \frac{1}{\mu_k \alpha^-(\mu_k, \gamma)} \left[y_k^{(2,2)} + \bar{y}_k^{(2,2)} \frac{I_{\mu_k}(sc_1)}{I_{\mu_k}(sc_2)} \right], \; k = \overline{1,K}; \tag{4.11}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{(1)}}{\nu_p^2 - z_n^2} \frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)} = \frac{1}{\nu_p \alpha^+(\nu_p, \gamma)} \left[y_p^{(2,1)} \frac{K'_{\nu_p}(sc_1)}{K_{\nu_p}(sc_1)} + \bar{y}_p^{(2,1)} \frac{I'_{\nu_p}(sc_1)}{I_{\nu_p}(sc_2)} \right], \quad p = \overline{1,P};$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{(1)}}{\mu_k^2 - z_n^2} \frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)} = \frac{1}{\mu_k \alpha^-(\mu_k, \gamma)} \left[y_k^{(2,2)} \frac{K'_{\mu_k}(sc_1)}{K_{\mu_k}(sc_1)} + \bar{y}_k^{(2,2)} \frac{I'_{\mu_k}(sc_1)}{I_{\mu_k}(sc_2)} \right], \quad k = \overline{1,K}; \tag{4.12}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{(2)} + q(z_n, \gamma) A_n I_{z_n}(sc_2)}{\nu_p^2 - z_n} = \frac{1}{\nu_p \alpha^+(\nu_p, \gamma)} \left[y_p^{(2,1)} \frac{K_{\nu_p}(sc_2)}{K_{\nu_p}(sc_1)} + \bar{y}_p^{(2,1)} \right], \quad p = \overline{1,P};$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{(2)} + q(z_n, \gamma) A_n I_{z_n}(sc_2)}{\mu_k^2 - z_n} = \frac{1}{\mu_k \alpha^-(\mu_k, \gamma)} \left[y_k^{(2,2)} \frac{K_{\mu_k}(sc_2)}{K_{\mu_k}(sc_1)} + \bar{y}_k^{(2,2)} \right], \quad k = \overline{1,K}; \tag{4.13}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\nu_p^2-z_n^2}\left[x_n^{(2)}\frac{K'_{z_n}(sc_2)}{K_{z_n}(sc_2)}+q(z_n,\gamma)A_nI'_{z_n}(sc_2)\right]=$$
$$=\frac{1}{\nu_p\alpha^+(\nu_p,\gamma)}\left[y_p^{(2,1)}\frac{K'_{\nu_p}(sc_2)}{K_{\nu_p}(sc_1)}+\bar{y}_p^{(2,1)}\frac{I'_{\nu_p}(sc_2)}{I_{\nu_p}(sc_2)}\right],\ p=\overline{1,P};$$
$$(4.14)$$
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\mu_k^2-z_n^2}\left[x_n^{(2)}\frac{K'_{z_n}(sc_2)}{K_{z_n}(sc_2)}+q(z_n,\gamma)A_nI'_{z_n}(sc_2)\right]=$$
$$=\frac{1}{\mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)}\left[y_k^{(2,2)}\frac{K'_{\mu_k}(sc_2)}{K_{\mu_k}(sc_1)}+\bar{y}_k^{(2,2)}\frac{I'_{\mu_k}(sc_2)}{I_{\mu_k}(sc_2)}\right],\ k=\overline{1,K};$$

Тут $x_n^{\binom{1}{2}}=q(z_n,\gamma)\bar{x}_n^{\binom{1}{2}}$, де $q(z_n,\gamma)$ визначено в (2.20).

Виключимо із отриманих систем лінійних алгебраїчних рівнянь (4.11)–(4.14) невідомі коефіцієнти розкладу $y_p^{(2,1)}$, $\bar{y}_p^{(2,1)}$, $y_k^{(2,2)}$, $\bar{y}_k^{(2,2)}$. У результаті приходимо до скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $2N\times 2N$ вигляду

$$\sum_{n=1}^{N}a_{qn}^{(11)}x_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{N}a_{qn}^{(12)}x_n^{(2)}=f_q^{(1)},$$
$$\sum_{n=1}^{N}a_{qn}^{(21)}x_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{N}a_{qn}^{(22)}x_n^{(2)}=f_q^{(2)},\qquad(4.15)$$

Тут матричні елементи $a_{qn}^{(11)}$, $a_{qn}^{(12)}$, $a_{qn}^{(21)}$, $a_{qn}^{(22)}$ та елементи відомих векторів $f_q^{(1)}$, $f_q^{(2)}$ відповідно записуються так

$$a_{qn}^{(11)}=\frac{sc_1W\left[K_{\xi_q}I_{z_n}\right]_{sc_1}}{\left[\xi_q^2-z_n^2\right]K_{\xi_q}(sc_1)I_{z_n}(sc_1)};\qquad a_{qn}^{(12)}=\frac{sc_2W\left[K_{z_n}K_{\xi_q}\right]_{sc_2}}{\left[\xi_q^2-z_n^2\right]K_{\xi_q}(sc_1)K_{z_n}(sc_2)};\qquad(4.16)$$

$$a_{qn}^{(21)}=\frac{sc_1W\left[I_{\xi_q}I_{z_n}\right]_{sc_1}}{\left[\xi_q^2-z_n^2\right]I_{\xi_q}(sc_2)I_{z_n}(sc_1)};\qquad a_{qn}^{(22)}=\frac{sc_2W\left[K_{z_n}I_{\xi_q}\right]_{sc_2}}{\left[\xi_q^2-z_n^2\right]K_{z_n}(sc_2)I_{\xi_q}(sc_2)};\qquad(4.17)$$

$$f_q^{(1)}=\sum_{n=1}^{N}\bar{A}_n\frac{sc_2W\left[I_{z_n}K_{\xi_q}\right]_{sc_2}}{\left[\xi_q^2-z_n^2\right]I_{z_n}(sc_2)K_{\xi_q}(sc_1)};\ f_q^{(2)}=\sum_{n=1}^{N}\bar{A}_n\frac{sc_2W\left[I_{z_n}I_{\nu_p}\right]_{sc_2}}{\left[\xi_q^2-z_n^2\right]I_{z_n}(sc_2)I_{\xi_q}(sc_2)},\ (4.18)$$

де $q,n=\overline{1,N}$; $\bar{A}_n=-q(z_n,\gamma)A_nI_{z_n}(sc_2)$; індекси ξ_q визначаються в (2.26).

У R-випадку задача знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу також зводиться до розв'язання системи рівнянь, які мають таку ж структуру як і рівняння (4.11)–(4.14), починаючи з $p = k = 2$. Врахування поршневої моди в R-випадку приводить до додаткових рівнянь, відносно невідомих коефіцієнтів $\overline{x}_0^{(1)}$, $\overline{x}_0^{(2)}$, $y_1^{(1,1)}$, $y_1^{(1,2)}$, $\overline{y}_1^{(2,1)}$, $\overline{y}_1^{(2,2)}$, які записуємо так

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{1/4-z_n^2}=\frac{2y_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}+\frac{2\overline{y}_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{I_{1/2}(sc_1)}{I_{1/2}(sc_2)}-\frac{2\overline{x}_0^{(1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)},\ p=1;\\ \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{1/4-z_n^2}=\frac{2y_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}+\frac{2\overline{y}_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{I_{1/2}(sc_1)}{I_{1/2}(sc_2)}-\frac{2\overline{x}_0^{(1)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)},\ k=1;\end{gathered} \tag{4.19}$$

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{1/4-z_n^2}\frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)}=\frac{2y_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{K'_{1/2}(sc_1)}{K_{1/2}(sc_1)}+\\ +\frac{2\overline{y}_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{I'_{1/2}(sc_1)}{I_{1/2}(sc_2)}-\frac{2\overline{x}_0^{(1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{I'_{1/2}(sc_1)}{I_{1/2}(sc_1)},\ p=1;\\ \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(1)}}{1/4-z_n^2}\frac{I'_{z_n}(sc_1)}{I_{z_n}(sc_1)}=\frac{2y_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{K'_{1/2}(sc_1)}{K_{1/2}(sc_1)}+\\ +\frac{2\overline{y}_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{I'_{1/2}(sc_1)}{I_{1/2}(sc_2)}-\frac{2\overline{x}_0^{(1)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{I'_{1/2}(sc_1)}{I_{1/2}(sc_1)},\ k=1;\end{gathered} \tag{4.20}$$

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(2)}}{1/4-z_n^2}=\frac{2y_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{K_{1/2}(sc_2)}{K_{1/2}(sc_1)}+\frac{2\overline{y}_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}-\\ -\frac{2\overline{x}_0^{(2)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}-\frac{2A_0I_{1/2}(sc_2)}{\alpha^+(1/2,\gamma)}-\sum_{n=1}^{N}\frac{q(z_n,\gamma)A_n}{1/4-z_n^2}I_{z_n}(sc_2),\ p=1;\\ \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(2)}}{1/4-z_n^2}=\frac{2y_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{K_{1/2}(sc_2)}{K_{1/2}(sc_1)}+\frac{2\overline{y}_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}-\\ -\frac{2\overline{x}_0^{(2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}-\frac{2A_0I_{1/2}(sc_2)}{\alpha^-(1/2,\gamma)}-\sum_{n=1}^{N}\frac{q(z_n,\gamma)A_n}{1/4-z_n^2}I_{z_n}(sc_2),\ k=1;\end{gathered} \tag{4.21}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(2)}}{1/4-z_n^2}\frac{K'_{z_n}(sc_2)}{K_{z_n}(sc_2)}=\frac{2y_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{K'_{1/2}(sc_2)}{K_{1/2}(sc_1)}+\frac{2\overline{y}_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{I'_{1/2}(sc_2)}{I_{1/2}(sc_2)}-$$
$$-\frac{2\overline{x}_0^{(2)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{K'_{1/2}(sc_2)}{K_{1/2}(sc_2)}-\frac{2A_0I'_{1/2}(sc_2)}{\alpha^+(1/2,\gamma)}-\sum_{n=1}^{N}\frac{q(z_n,\gamma)A_n}{1/4-z_n^2}I'_{z_n}(sc_2),\ p=1;$$
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(2)}}{1/4-z_n^2}\frac{K'_{z_n}(sc_2)}{K_{z_n}(sc_2)}=\frac{2y_1^{(2,2)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{K'_{1/2}(sc_2)}{K_{1/2}(sc_1)}+\frac{2\overline{y}_1^{(2,2)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{I'_{1/2}(sc_2)}{I_{1/2}(sc_2)}-$$
$$-\frac{2\overline{x}_0^{(2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{K'_{1/2}(sc_2)}{K_{1/2}(sc_2)}-\frac{2A_0I'_{1/2}(sc_2)}{\alpha^-(1/2,\gamma)}-\sum_{n=1}^{N}\frac{q(z_n,\gamma)A_n}{1/4-z_n^2}I'_{z_n}(sc_2),\ k=1. \qquad (4.22)$$

Після спрощення, рівняння (4.19)–(4.22) перепишемо у вигляді

$$\sum_{n=1}^{N}x_n^{(1)}\frac{sc_1W\left[I_{z_n}K_{1/2}\right]_{sc_1}}{\left[1/4-z_n^2\right]I_{z_n}(sc_1)K_{1/2}(sc_1)}=$$
$$=-\frac{2\overline{y}_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{1}{K_{1/2}(sc_1)I_{1/2}(sc_2)}+\frac{2\overline{x}_0^{(1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{1}{I_{1/2}(sc_1)K_{1/2}(sc_1)},\ p=1;$$
$$\sum_{n=1}^{N}x_n^{(1)}\frac{sc_1W\left[I_{z_n}K_{1/2}\right]_{sc_1}}{\left[1/4-z_n^2\right]I_{z_n}(sc_1)K_{1/2}(sc_1)}=$$
$$=-\frac{2\overline{y}_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{1}{K_{1/2}(sc_1)I_{1/2}(sc_2)}+\frac{2\overline{x}_0^{(1)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{1}{I_{1/2}(sc_1)K_{1/2}(sc_1)},\ k=1; \qquad (4.23)$$

$$\sum_{n=1}^{N}x_n^{(1)}\frac{sc_1W\left[I_{z_n}I_{1/2}\right]_{sc_1}}{\left[1/4-z_n^2\right]I_{z_n}(sc_1)I_{1/2}(sc_1)}=\frac{2y_1^{(2,1)}}{\alpha^+(1/2,\gamma)}\frac{1}{K_{1/2}(sc_1)I_{1/2}(sc_1)},\ p=1;$$
$$\sum_{n=1}^{N}x_n^{(1)}\frac{sc_1W\left[I_{z_n}I_{1/2}\right]_{sc_1}}{\left[1/4-z_n^2\right]I_{z_n}(sc_1)I_{1/2}(sc_1)}=\frac{2y_1^{(2,2)}}{\alpha^-(1/2,\gamma)}\frac{1}{K_{1/2}(sc_1)I_{1/2}(sc_1)},k=1; \qquad (4.24)$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^{(2)} \frac{sc_2 W\left[K_{z_n} I_{1/2}\right]_{sc_2}}{\left[1/4 - z_n^2\right] K_{z_n}(sc_2) I_{1/2}(sc_2)} = \frac{2y_1^{(2,1)}}{\alpha^{+}(1/2,\gamma)} \frac{1}{K_{1/2}(sc_1) I_{1/2}(sc_2)} -$$

$$-\frac{2\overline{x}_0^{(2)}}{\alpha^{+}(1/2,\gamma)} \frac{1}{K_{1/2}(sc_2) I_{1/2}(sc_2)} + \sum_{n=1}^{N} \overline{A}_n \frac{sc_2 W\left[I_{z_n} I_{1/2}\right]_{sc_2}}{\left[1/4 - z_n^2\right] I_{z_n}(sc_2) I_{1/2}(sc_2)}, \; p = 1;$$

(4.25)

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^{(2)} \frac{sc_2 W\left[K_{z_n} I_{1/2}\right]_{sc_2}}{\left[1/4 - z_n^2\right] K_{z_n}(sc_2) I_{1/2}(sc_2)} = \frac{2y_1^{(2,2)}}{\alpha^{-}(1/2,\gamma)} \frac{1}{K_{1/2}(sc_1) I_{1/2}(sc_2)} -$$

$$-\frac{2\overline{x}_0^{(2)}}{\alpha^{-}(1/2,\gamma)} \frac{1}{K_{1/2}(sc_2) I_{1/2}(sc_2)} + \sum_{n=1}^{N} \overline{A}_n \frac{sc_2 W\left[I_{z_n} I_{1/2}\right]_{sc_2}}{\left[1/4 - z_n^2\right] I_{z_n}(sc_2) I_{1/2}(sc_2)}, k = 1.$$

Далі виключивши у (4.23)–(4.25) невідомі $y_1^{(2,1)}$, $y_1^{(2,2)}$, $\overline{y}_1^{(2,1)}$, $\overline{y}_1^{(2,2)}$ встановлюємо, що для $p = k = 1$ справедливе рівняння

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^{(1)} \frac{sc_1 W\left[I_{z_n} I_{1/2}\right]_{sc_1}}{\left[1/4 - z_n^2\right] I_{z_n}(sc_1) I_{1/2}(sc_1)} + \sum_{n=1}^{N} x_n^{(2)} \frac{sc_2 W\left[K_{z_n} I_{1/2}\right]_{sc_2}}{\left[1/4 - z_n^2\right] K_{z_n}(sc_2) I_{1/2}(sc_2)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \overline{A}_n \frac{sc_2 W\left[I_{z_n} I_{1/2}\right]_{sc_2}}{\left[1/4 - z_n^2\right] I_{z_n}(sc_2) I_{1/2}(sc_2)}, \tag{4.26}$$

а також рівності

$$\overline{x}_0^{(1)} \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}} I_{1/2}(sc_1), \; \overline{x}_0^{(2)} \equiv 0 .$$

В результаті приходимо до повної системи рівнянь для R-випадку. Слід відзначити, що при виведенні цих рівнянь враховано, той факт, що індекси функцій Лежандра визначаються із трансцендентних рівнянь (2.13).

Далі для S, R-випадків перейдемо від скінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь до НСЛАР, аналогічно як це було проведено в розділах 2 і 3. Ці рівняння приймають такий вигляд

$$\begin{aligned} A_{11} X^{(1)} + A_{12} X^{(2)} = F^{(1)}, \\ A_{21} X^{(1)} + A_{22} X^{(2)} = F^{(2)}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Тут $X^{(1)} = \left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $X^{(2)} = \left\{x_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ – невідомі вектори, які визначаються як у розділах 2 і 3; $A_{ij}=\left\{a_{qn}^{(ij)}\right\}_{q,n=1}^{\infty}$ $(i,j=1,2)$ – нескінченні матриці, елементи яких задаються виразами (4.16), (4.17) $N,P,K\to\infty$; $F^{(1)}=\left\{f_q^{(1)}\right\}_{q=1}^{\infty}$ і $F^{(2)}=\left\{f_q^{(2)}\right\}_{q=1}^{\infty}$ – компоненти відомого вектора задачі (4.18). При побудові матричних операторів і відомих векторів в *R*-випадку використовується послідовність (2.33).

Розглянемо асимптотичні оцінки матричних операторів A_{ij} $(i,j=1,2)$. Головні частини асимптотик елементів $a_{qn}^{(11)}$ і $a_{qn}^{(22)}$ визначають матричний оператор типу згортки (2.38), а відповідний обернений оператор задається формулою (2.42). Для елементів решти матричних операторів справедлива така асимптотична оцінка [86]:

$$a_{qn}^{(12)},\, a_{qn}^{(21)} \underset{q,n\to\infty}{=} O\left(\frac{\left(c_1/c_2\right)^{\xi_q}}{\xi_q+z_n}\right).$$

Для зведення (4.27) до НСЛАР другого роду використовуємо оператори (2.38) і (2.42). В результаті отримуємо

$$\begin{aligned}X^{(1)}&=A^{-1}\left(A-A_{11}\right)X^{(1)}-A^{-1}A_{12}X^{(2)}+A^{-1}F^{(1)},\\ X^{(2)}&=A^{-1}\left(A-A_{22}\right)X^{(2)}-A^{-1}A_{21}X^{(1)}+A^{-1}F^{(2)}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Невідомі коефіцієнти розкладу у поданні поля (4.4) знаходимо через розв'язки НСЛАР (4.28) так

$$\overline{x}_n^{(1)}=x_n^{(1)}/q(z_n,\gamma);$$
$$\overline{x}_n^{(2)}=x_n^{(2)}/q(z_n,\gamma);$$

$$y_p^{(2,1)}=\nu_p\alpha^{+}(\nu_p,\gamma)K_{\nu_p}(sc_1)I_{\nu_p}(sc_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^{(1)}}{\nu_p^2-z_n^2}\frac{sc_1W\left[I_{z_n}I_{\nu_p}\right]_{sc_1}}{I_{z_n}(sc_1)I_{\nu_p}(sc_1)},\ p=\overline{1,P};$$

$$y_k^{(2,2)}=\mu_k\alpha^{-}(\mu_k,\gamma)K_{\mu_k}(sc_1)I_{\mu_k}(sc_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^{(1)}}{\mu_k^2-z_n^2}\frac{sc_1W\left[I_{z_n}I_{\mu_k}\right]_{sc_1}}{I_{z_n}(sc_1)I_{\mu_k}(sc_1)},\ k=\overline{1,K};$$

$$\bar{y}_p^{(2,1)} = \phi(sc_2)\delta_p^1 - \nu_p\alpha^+(\nu_p,\gamma)K_{\nu_p}(sc_2)I_{\nu_p}(sc_2)\times$$

$$\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(2)}}{\nu_p^2 - z_n^2}\frac{sc_2W\left[K_{z_n}K_{\nu_p}\right]_{sc_2}}{K_{z_n}(sc_2)K_{\nu_p}(sc_2)} + \sum_{n=1}^{N}\frac{q(z_n,\gamma)A_nI_{z_n}(sc_2)}{\nu_p^2 - z_n^2}\frac{sc_2W\left[I_{z_n}K_{\nu_p}\right]_{sc_2}}{I_{z_n}(sc_2)K_{\nu_p}(sc_2)}\right], p=\overline{1,P};$$

$$\bar{y}_k^{(2,2)} = \phi(sc_2)\delta_k^1 - \mu_k\alpha^-(\mu_k,\gamma)K_{\mu_k}(sc_2)I_{\mu_k}(sc_2)\times$$

$$\times\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(2)}}{\mu_k^2 - z_n^2}\frac{sc_2W\left[K_{z_n}K_{\mu_k}\right]_{sc_2}}{K_{z_n}(sc_2)K_{\mu_k}(sc_2)} + \sum_{n=1}^{N}\frac{q(z_n,\gamma)A_nI_{z_n}(sc_2)}{\mu_k^2 - z_n^2}\frac{sc_2W\left[I_{z_n}K_{\mu_k}\right]_{sc_2}}{I_{z_n}(sc_2)K_{\mu_k}(sc_2)}\right], k=\overline{1,K};$$

Чисельно досліджуються характеристики тільки м’якого конуса Q_{12}.

4.2. Аналіз результатів для м’якого конуса

Для встановлення достовірності отриманих результатів перевіряли виконання умов спряження. Порівнювали абсолютні значень повних полів $|U^{(t)}|$ (рис. 4.2, *а*, *б*) та коливальних швидкостей $|\partial U^{(t)}/\partial(sr)|$ (рис. 4.2, *в*, *г*) на сферичних поверхнях $\{r=c_1,\ 0\le\theta\le\pi\}$, $\{r=c_2,\ 0\le\theta\le\pi\}$ для м’якого конуса з кутом розхилу $\gamma=30^\circ$ і хвильовими параметрами $kc_1=10$, $kc_2=30$. Цифрами *1, 2, 3* на рис. 4.2 позначено області D_1, $\left(D_2^{(1)},D_2^{(2)}\right)$, D_3 на межі яких відбувається перевірка умов неперервності повного поля та його нормальної похідної. Із цього рисунка бачимо, що досліджувані поля на границях підобластей з графічною точністю співпадають.

Розглянемо як формується поле випромінювання м’якого скінченного конуса. На рис. 4.3 показано вплив хвильового радіусу зрізу kc_1 на діаграми спрямованості при освітлені конуса зі сторони зрізу (рис. 4.3, *а*), коли $\gamma=30^\circ$ та зі сторони основи (рис. 4.3, *б*), коли $\gamma=150^\circ$. Конус Q_{12} вибирався з $kc_2=20$ і трьома різними радіусами зрізу: $kc_1=1$, $kc_1=10$, $kc_1=15$. Очевидно, що при $c_1\to 0$, зрізаний конус Q_{12} вироджується у скінченний Q_2 (див. розділ 2).

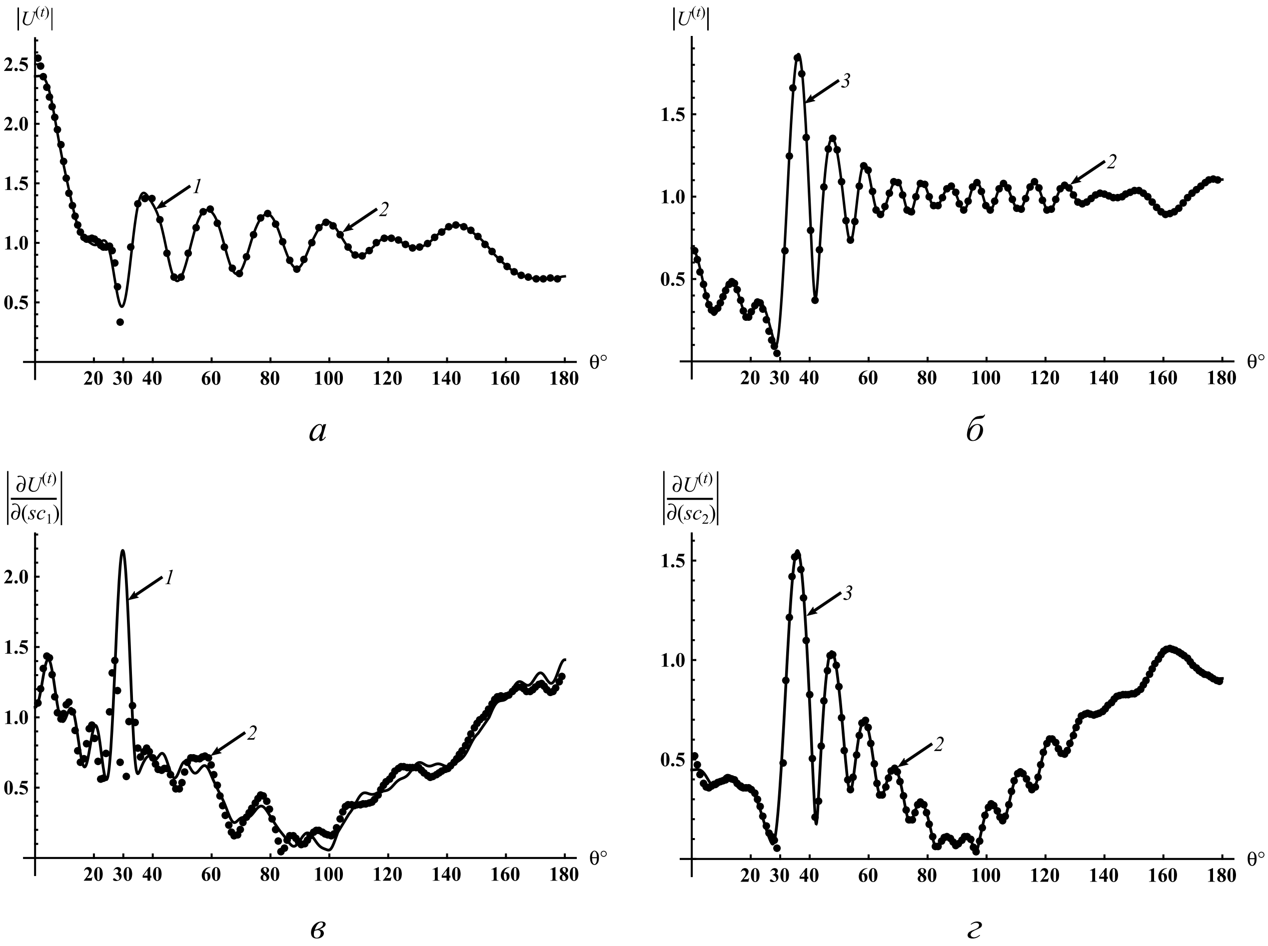


Рис. 4.2. Розподіл акустичного поля на сферичних поверхнях, виділених м'яким конусом з параметрами $\gamma = 30°$; (*а, в*) $kc_1 = 10$; (*б, г*) $kc_2 = 30$:

а, б – модуль повного поля;

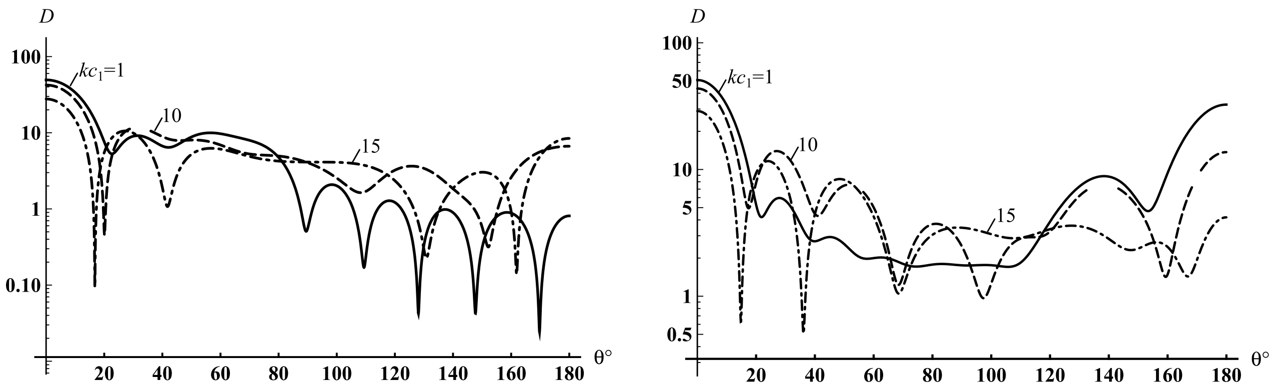
в, г – модуль нормальної складової коливальної швидкості;

1 – зі сторони області D_1; *2* –зі сторони областей $D_2^{(1)}$, $D_2^{(2)}$;

3 – зі сторони області D_3.

Із рис. 4.3, *а* спостерігаємо, що максимальне випромінювання формується у напрямку $\theta = 0°$ при малих зрізах вершини ($kc_1 = 1$). Зростання kc_1 зумовлює зменшення амплітуди дифрагованого поля у напрямі $\theta = 0°$ ("вперед") і спостерігаємо незначне збільшення випромінювання у напрямку зворотного розсіювання $\theta = 180°$.

Із рис. 4.3, *б* , де показано діаграми спрямованості при освітленні Q_{12} в основу, бачимо, що аналогічно до попереднього випадку, основне випромінювання формується у напрямі $\theta = 0°$. Проте, на відміну від попереднього випадку, тут спостерігаємо суттєвий рівень випромінювання у зворотному напрямку $\theta = 180°$. Зростання параметра kc_1 приводить до суттєвого зменшення випромінювання “назад” ($\theta = 180°$) та до утворення бокових пелюсток у діапазоні $20° < \theta < 60°$.



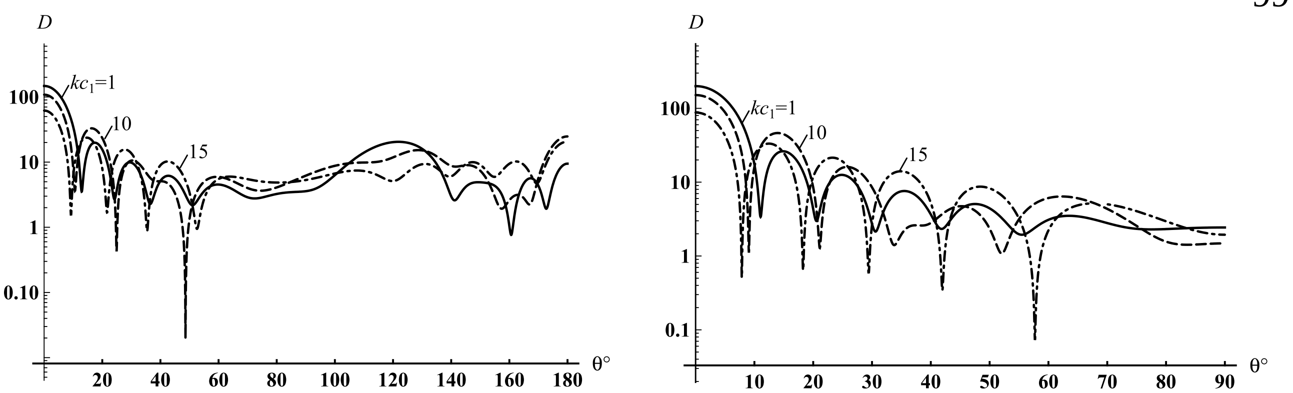
а *б*

Рис. 4.3. Вплив хвильового радіусу зрізу kc_1 на діаграми спрямованості м’якого конуса при $kc_2 = 20$:

a – $\gamma = 30°$; $б$ – $\gamma = 150°$.

На рис. 4.4 наведено діаграми спрямованості для широкого конуса з кутом розхилу $\gamma = 60°$ (рис. 4.4, *а*) і для круглого кільця $\gamma = 90°$ (рис. 4.4, *б*). Як і у попередніх випадках із поведінки кривих на рис. 4.4 спостерігаємо суттєвий рівень випромінювання у напрямку $\theta = 0°$ як для конуса так і для кільця.

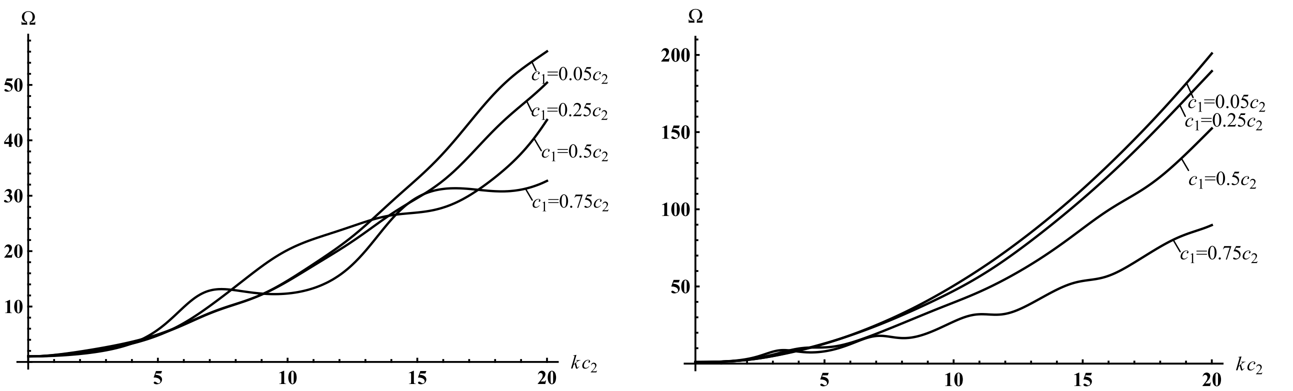
На рис. 4.5 наведено залежності коефіцієнтів концентрацій Ω від хвильового параметра kc_2 для чотирьох радіусів зрізу: $c_1 = 0.05c_2$ (малий отвір); $c_1 = 0.25c_2$; $c_1 = 0.5c_2$; $c_1 = 0.75c_2$ (великий отвір) та двох кутів розкриву $\gamma = 30°$; $\gamma = 90°$. Із цього рисунку спостерігаємо монотонне зростання коефіцієнта концентрації для малих отворів $c_1 = 0.05c_2$ при збільшенні kc_2. Зростання відношень c_1 / c_2 приводить до зменшення Ω і утворення осциляцій.



а *б*

Рис. 4.4. Вплив хвильового радіусу зрізу kc_1 ($kc_1 = 1;10;15$) на діаграми спрямованості м'якого конуса при фіксованих параметрах кута розхилу і хвильової довжини твірної $kc_2 = 20$:

а – $\gamma = 60°$; *б* – $\gamma = 90°$.

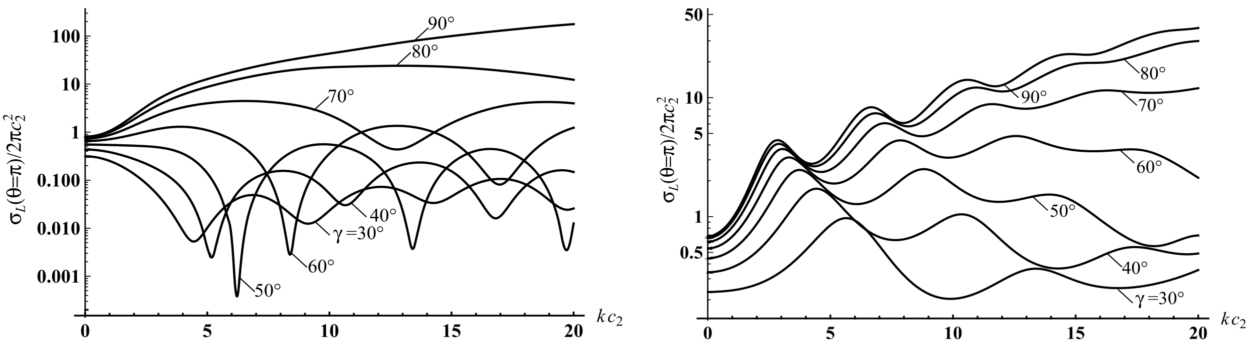


а *б*

Рис. 4.5. Залежність $\Omega(kc_2)$ при різних значеннях відношень c_1 / c_2 :

а – $\gamma = 30°$; *б* – $\gamma = 90°$.

Дослідили вплив радіусу зрізів на формування нормованих позиційних перерізів зворотного розсіювання $\sigma_L(\theta = \pi)$ у діапазоні $0 \le kc_2 \le 20$ для різних значень кута розхилу γ при $c_1 = 0.25c_2$ (рис. 4.6, *а*) і $c_1 = 0.75c_2$ (рис. 4.6, *б*). Із поведінки кривих на рис. 4.6, *а* бачимо, що для конусів з $c_1 / c_2 = 0.25$ можна визначити кут розхилу конуса γ за глибокими мінімумами залежностей $\sigma_L(\theta = \pi)$, що добре спостерігається при $30° \le \gamma \le 60°$. Збільшення відношення c_1 / c_2 (див. рис. 4.6, *б*) екстремуми кривих стають розмитими, що утруднює ідентифікацію кута розхилу конуса.

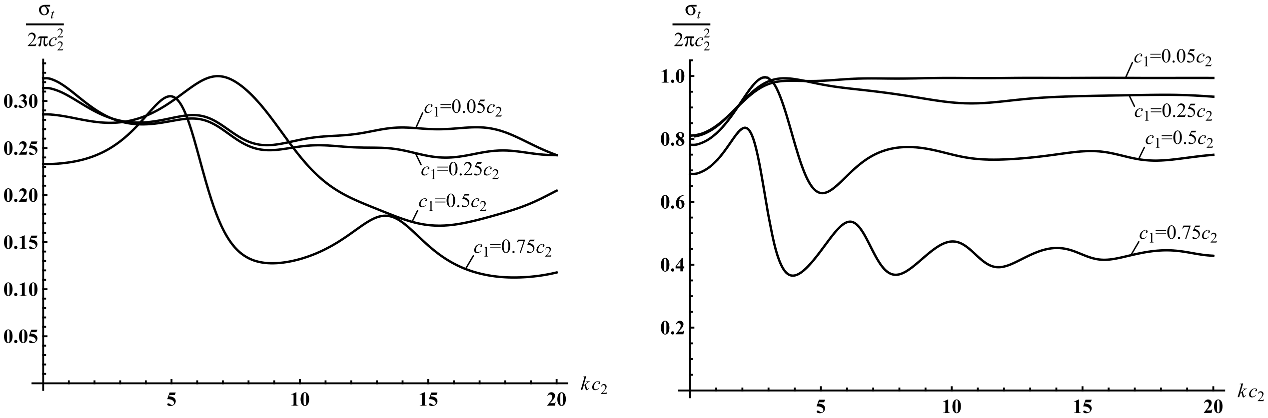


а *б*

Рис. 4.6. Нормовані залежності позиційних перерізів зворотного розсіювання як функція параметрів kc_2 і γ:

$a - c_1 = 0.25c_2$; $б - c_1 = 0.75c_2$.

На рис. 4.7 показані нормовані повні перерізи розсіювання σ_t, отримані за формулою (2.69). Ці залежності побудовані як функції хвильового параметра kc_2 для чотирьох різних радіусів зрізу: $c_1 = 0.05c_2$, $c_1 = 0.25c_2$, $c_1 = 0.5c_2$, $c_1 = 0.75c_2$. Для аналізу вибирали два кути розхилу конуса: $\gamma = 30°$ (рис. 4.7, *а*) і $\gamma = 90°$ (рис. 4.7, *б*). Як видно із графіків, нормований повний переріз розсіювання зі зростанням радіусу зрізу c_1 зменшується, що фізично є передбачуваним у зв'язку із зменшенням площі розсіювача.



а *б*

Рис. 4.7. Нормовані залежності $\sigma_t(kc_2)$ при різних відношеннях c_1 / c_2:

$a - \gamma = 30°$; $б - \gamma = 90°$.

Отже, у цьому розділі вперше досліджено вплив зрізу вершини на класичні характеристики розсіювання. З отриманих результатів можна зробити наступні висновки.

4.3. Висновки до розділу 4

1. Вперше отримано розв'язок осесиметричної задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на м'якому і жорсткому скінченному конусі зі зрізаною вершиною при осьовому опроміненні. Методом спряження полів та аналітичної регуляризації отримано НСЛАР другого роду, розв'язок яких знаходиться із заданою точністю.
2. Вивчено вплив параметрів зрізу вершини м'якого конуса та кільця на характеристики дифрагованих полів. Виявлено зменшення рівня інтенсивності випромінювання в напрямі головної пелюстки діаграми спрямованості зі збільшенням радіусу зрізу вершини конуса.
3. Показано, що при зростанні відношення c_1 / c_2, де $c_1 < c_2$ – сферичні радіуси отворів конічної оболонки, для м'якого конуса спостерігається спадання енергії акустичного випромінювання в широкому діапазоні частот ($kc_2 \leq 20$).

РОЗДІЛ 5
ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКОЇ АКУСТИЧНОЇ ХВИЛІ НА СКІНЧЕННОМУ КОНУСІ ПРИ БОКОВОМУ ОПРОМІНЕННІ

У цьому розділі продовжуємо розгляд задач дифракції на скінченному м'якому і жорсткому конусах. Розглядаємо випадок опромінення конуса плоскою акустичною хвилею під довільним кутом. Ця задача піддається розв'язанню за допомогою методу аналітичної регуляризації. Тут встановлюємо залежності основних дифракційних характеристик від кута опромінення скінченного конуса.

Результати, отримані у цьому розділі, опубліковано у [127, 128].

5.1. Постановка задачі

Нехай у сферичній системі координат (r,θ,φ) задано ідеально м'який (жорсткий) скінченний порожнистий конус $Q_2:\left\{r\in(0,c_2);\theta=\gamma;\varphi\in[0,2\pi)\right\}$. Конус Q_2 опромінюється плоскою монохроматичною акустичною хвилею, яка поширюється у напрямку заданому одиничним вектором $\vec{n}$ і який утворює із додатною віссю Oz кут α так, що $(\vec{n},\vec{i}_z)=\cos\alpha$ (рис. 5.1). Тоді скалярний потенціал швидкості акустичної хвилі запишеться у вигляді

$$U^{(i)}(r,\theta,\varphi)=\exp(ik\vec{r}\vec{n})=\exp(ikr\cos\psi), \tag{5.1}$$

де $\cos\psi=\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi+\cos\alpha\cos\theta$; $\vec{r}$ – радіус-вектор (вектор положення точки), $\vec{r}=\vec{r}(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$, $r=|\vec{r}|$; $\vec{n}=\vec{n}(\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha)$; $\vec{i}_z$ – одиничний вектор, $\vec{i}_z=\vec{i}_z(0,0,1)$. Гармонічну залежність від часу $\exp(-i\omega t)$ надалі опускаємо.

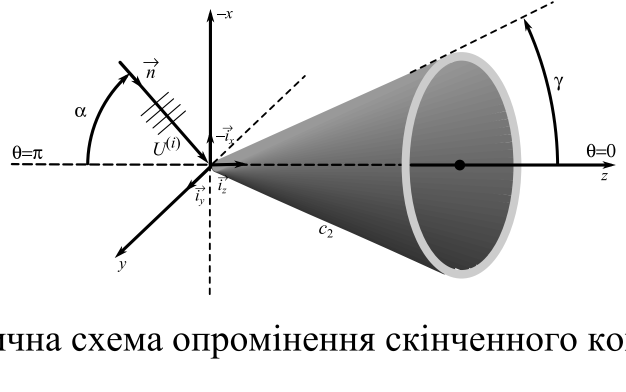


Рис. 5.1. Геометрична схема опромінення скінченного конуса під кутом α.

Задачу дифракції сформулюємо відносно скалярного потенціалу швидкості $U = U(r,\theta,\varphi)$. Для її розв’язання подамо шуканий потенціал $U = U(r,\theta,\varphi)$ рядом Фур’є за косинусами азимутальної координати φ у вигляді

$$U(r,\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(r,\theta)\cos m\varphi, \tag{5.2}$$

де $U_m(r,\theta)$ – невідомі гармоніки Фур’є.

Тоді відповідну дифракційну задачу формулюємо як змішану крайову задачу для рівняння Гельмгольца

$$\Delta U_m(r,\theta) + k^2 U_m(r,\theta) = 0, \tag{5.3}$$

з граничними умовами

$$\left[U_m(r,\theta) + U_m^{(i)}(r,\theta)\right]\Big|_{(r,\theta)\in Q_2} = 0 \quad \text{для } S\text{-випадку}; \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[U_m(r,\theta) + U_m^{(i)}(r,\theta)\right]\Big|_{(r,\theta)\in Q_2} = 0 \text{ для } R\text{-випадку}, \tag{5.5}$$

де $U_m^{(i)}(r,\theta)$ – гармоніки Фур’є розкладу падаючого поля (5.1) в ряд типу (5.2);

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}.$$

5.2. Розв’язання задачі

Згідно із методом часткових підобластей, повне поле подамо так

$$U_m^{(t)}(r,\theta) = \begin{cases} U_m(r,\theta), & (r,\theta)\in D_1, D_2; \\ U_m^{(i)}(r,\theta) + U_m(r,\theta) & (r,\theta)\in D_3, \end{cases} \tag{5.6}$$

де області D_1, D_2, D_3 визначені у (2.9).

Потенціал швидкості дифрагованого поля записуємо у вигляді:

$$U_m(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{sr}}\begin{cases}\sum_{p=1}^{\infty}\overline{y}_p^{(m;2,1)}P^m_{\nu_p^{(m)}-1/2}(\cos\theta)\dfrac{I_{\nu_p^{(m)}}(sr)}{I_{\nu_p^{(m)}}(sc_2)}, & (r,\theta)\in D_1;\\ \sum_{k=1}^{\infty}\overline{y}_k^{(m;2,2)}P^m_{\mu_k^{(m)}-1/2}(-\cos\theta)\dfrac{I_{\mu_k^{(m)}}(sr)}{I_{\mu_k^{(m)}}(sc_2)}, & (r,\theta)\in D_2;\\ \Phi_2(sr)\delta_m^0+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{x}_n^{(m;2)}P^m_{z_n^{(m)}-1/2}(\cos\theta)\dfrac{K_{z_n^{(m)}}(sr)}{K_{z_n^{(m)}}(sc_2)}, & (r,\theta)\in D_3.\end{cases} \tag{5.7}$$

Тут $\overline{y}_p^{(m;2,1)}$, $\overline{y}_k^{(m;2,2)}$, $\overline{x}_n^{(m;2)}$ – невідомі коефіцієнти розкладу; $P^m_{\eta-1/2}(\cdot)$ – приєднані функції Лежандра m-го порядку; $\nu_p^{(m)}$, $\mu_k^{(m)}$ – залежні від γ додатні корені трансцендентних рівнянь

$$P^m_{\eta-1/2}(\cos\gamma)\Big|_{\eta=\nu_p^{(m)}}=0,\ P^m_{\eta-1/2}(-\cos\gamma)\Big|_{\eta=\mu_k^{(m)}}=0 \qquad \text{для } S\text{-випадку}; \tag{5.8}$$

$$\frac{d}{d\gamma}P^m_{\eta-1/2}(\cos\gamma)\Big|_{\eta=\nu_p^{(m)}}=0,\ \frac{d}{d\gamma}P^m_{\eta-1/2}(-\cos\gamma)\Big|_{\eta=\mu_k^{(m)}}=0 \ \text{для } R\text{-випадку}. \tag{5.9}$$

У виразі (5.7) $z_n^{(m)}=n+m-1/2$ і $\Phi_2(sr)\equiv 0$ для S-випадку та $z_n^{(m)}=n+m-1/2+\delta_m^0$ і $\Phi_2(sr)\equiv\overline{x}_0^{(m;2)}K_{1/2}(sr)/K_{1/2}(sc_2)$, де $\overline{x}_0^{(m;2)}$ – невідомий коефіцієнт, для R-випадку.

Розклад потенціалу $U^{(i)}(r,\theta,\varphi)$ в ряд за сферичними функціями із використанням теореми складення для поліномів Лежандра [100] записуємо так

$$U^{(i)}(r,\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}U_m^{(i)}(r,\theta)\cos m\varphi. \tag{5.10}$$

Тут

$$U_m^{(i)}(r,\theta)=\frac{\phi(sr)}{\sqrt{sr}}\delta_m^0+\frac{1}{\sqrt{sr}}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(m)}(\alpha)P^m_{z_n^{(m)}-1/2}(\cos\theta)I_{z_n^{(m)}}(sr),$$

$$A_n^{(m)}(\alpha)=\sqrt{2\pi}(2-\delta_m^0)\frac{(-1)^{z_n^{(m)}-1/2}z_n^{(m)}\Gamma(z_n^{(m)}-m+1/2)}{\Gamma(z_n^{(m)}+1/2+m)}P^m_{z_n^{(m)}-1/2}(\cos\alpha),$$

де $\phi(sr)\equiv 0$ для S-випадку і $\phi(sr)\equiv\sqrt{\pi/2}I_{1/2}(sr)$ для R-випадку.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу у виразі (5.7) використаємо умови спряження повного потенціалу та його нормальної похідної на поверхні сфери $\{r\in[0,c_2],\theta\in[0,\pi]\}$, що містить край конуса. У результаті отримуємо суматорні рівняння задачі, які у зв'язку з особливістю градієнта потенціалу $gradU = O(\rho^{-1/2})$ при $\rho \to 0$ (ρ – відстань до краю конуса у локальній системі координат), запишуться у вигляді

$$\Phi_2(sc_2)\delta_m^0 + \phi(sc_2)\delta_m^0 + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} P^m_{z_n^{(m)}-1/2}(\cos\theta)\left[\bar{x}_n^{(m;2)} + A_n^{(m)}(\alpha) I_{z_n^{(m)}}(sc_2)\right] \underset{\theta\in[0,\pi]}{=}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P} \bar{y}_p^{(m;2,1)} P_{\nu_p^{(m)}-1/2}(\cos\theta), & \theta\in[0,\gamma); \\ \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K} \bar{y}_k^{(m;2,2)} P_{\mu_k^{(m)}-1/2}(-\cos\theta), & \theta\in(\gamma,\pi]; \end{cases} \tag{5.11}$$

$$\Phi_2'(sc_2)\delta_m^0 + \phi'(sc_2)\delta_m^0 + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} P_{z_n^{(m)}-1/2}(\cos\theta)\left[\bar{x}_n^{(m;2)} \frac{K'_{z_n^{(m)}}(sc_2)}{K_{z_n^{(m)}}(sc_2)} + A_n^{(m)}(\alpha) I'_{z_n^{(m)}}(sc_2)\right] \underset{\theta\in[0,\pi]}{=}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P} \bar{y}_p^{(m;2,1)} P_{\nu_p^{(m)}-1/2}(\cos\theta) \dfrac{I'_{\nu_p^{(m)}}(sc_2)}{I_{\nu_p^{(m)}}(sc_2)}, & \theta\in[0,\gamma); \\ \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K} \bar{y}_k^{(m;2,2)} P_{\mu_k^{(m)}-1/2}(-\cos\theta) \dfrac{I'_{\mu_k^{(m)}}(sc_2)}{I_{\mu_k^{(m)}}(sc_2)}, & \theta\in(\gamma,\pi]. \end{cases} \tag{5.12}$$

Для зведення системи суматорних рівнянь (5.11), (5.12) до НСЛАР використаємо формули перерозкладу функцій Лежандра [86]

$$P^m_{z_n^{(m)}-1/2}(\cos\theta) = q_m(z_n^{(m)},\gamma) \begin{cases} \lim\limits_{P\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{P} \dfrac{\nu_p^{(m)}\alpha_m^+(\nu_p^{(m)},\gamma)}{(\nu_p^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2} P^m_{\nu_p^{(m)}-1/2}(\cos\theta), & \theta\in[0,\gamma); \\ \lim\limits_{K\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{K} \dfrac{\mu_k^{(m)}\alpha_m^-(\mu_k^{(m)},\gamma)}{(\mu_k^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2} P^m_{\mu_k^{(m)}-1/2}(-\cos\theta), & \theta\in(\gamma,\pi]. \end{cases} \tag{5.13}$$

Тут

$$q_m(z_n^{(m)},\gamma) = \begin{cases} P^m_{z_n^{(m)}-1/2}(\cos\gamma) & \text{для } S\text{-випадку;} \\ \dfrac{d}{d\gamma} P^m_{z_n^{(m)}-1/2}(\cos\gamma) & \text{для } R\text{-випадку;} \end{cases} \tag{5.14}$$

$$\alpha_m^{\pm}(\eta,\gamma) = -2\begin{cases} \left[\partial P^m_{\eta-1/2}(\pm\cos\gamma)/\partial\eta\right]^{-1} & \text{для } S\text{-випадку;} \\ \left[\partial^2 P^m_{\eta-1/2}(\pm\cos\gamma)/\partial\eta\partial\gamma\right]^{-1} & \text{для } R\text{-випадку,} \end{cases} \tag{5.15}$$

де $\eta = \nu_p^{(m)}$ при верхньому знаку і $\eta = \mu_k^{(m)}$ – при нижньому.

Підставимо формулу (5.13) у ліві частини рівнянь (5.11)–(5.12). Далі обмежимось скінченним числом доданків і прирівняємо коефіцієнти при однакових функціях Лежандра. В результаті приходимо до скінченної системи рівнянь порядку $N \times N$, яку для S-випадку запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \frac{q(z_n^{(m)},\gamma)\left(\overline{x}_n^{(m;2)} + A_n^{(m)}(\alpha) I_{z_n^{(m)}}(sc_2)\right)}{(\nu_p^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2} = \frac{\overline{y}_p^{(m;2,1)}}{\nu_p^{(m)} \alpha_m^{+}(\nu_p^{(m)},\gamma)}, \ p = \overline{1,P};\\
&\sum_{n=1}^{N} \frac{q(z_n^{(m)},\gamma)\left(\overline{x}_n^{(m;2)} + A_n^{(m)}(\alpha) I_{z_n^{(m)}}(sc_2)\right)}{(\mu_k^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2} = \frac{\overline{y}_k^{(m;2,2)}}{\mu_k^{(m)} \alpha_m^{-}(\mu_k^{(m)},\gamma)}, \ k = \overline{1,K};
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \frac{q(z_n^{(m)},\gamma)}{(\nu_p^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2} \left[x_n^{(m;2)} \frac{K'_{z_n^{(m)}}(sc_2)}{K_{z_n^{(m)}}(sc_2)} + A_n^{(m)}(\alpha) I'_{z_n^{(m)}}(sc_2) \right] =\\
&= \frac{\overline{y}_p^{(m;2,1)}}{\nu_p^{(m)} \alpha_m^{+}(\nu_p^{(m)},\gamma)} \frac{I'_{\nu_p^{(m)}}(sc_2)}{I_{\nu_p^{(m)}}(sc_2)}, \ p = \overline{1,P};\\
&\sum_{n=1}^{N} \frac{q(z_n^{(m)},\gamma)}{(\mu_k^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2} \left[x_n^{(m;2)} \frac{K'_{z_n^{(m)}}(sc_2)}{K_{z_n^{(m)}}(sc_2)} + A_n^{(m)}(\alpha) I'_{z_n^{(m)}}(sc_2) \right] =\\
&= \frac{\overline{y}_k^{(m;2,2)}}{\mu_k^{(m)} \alpha_m^{-}(\mu_k^{(m)},\gamma)} \frac{I'_{\mu_k^{(m)}}(sc_2)}{I_{\mu_k^{(m)}}(sc_2)}, \ k = \overline{1,K},
\end{aligned} \tag{5.17}$$

де $N = P + K$.

Виключивши із (5.16)–(5.17) невідомі коефіцієнти $\overline{y}_p^{(m;2,1)}$, $\overline{y}_k^{(m;2,2)}$, отримані рівняння запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} x_n^{(m;2)} \frac{sc_2 W\left[K_{z_n^{(m)}} I_{\nu_p^{(m)}}\right]_{sc_2}}{\left[(\nu_p^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2\right] K_{z_n^{(m)}}(sc_2) I_{\nu_p^{(m)}}(sc_2)} =\\
&= \sum_{n=1}^{N} \overline{A}_n^{(m)}(\alpha) \frac{sc_2 W\left[I_{z_n^{(m)}} I_{\nu_p^{(m)}}\right]_{sc_2}}{\left[(\nu_p^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2\right] I_{z_n^{(m)}}(sc_2) I_{\nu_p^{(m)}}(sc_2)}, \ p = \overline{1,P};
\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} x_n^{(m;2)} \frac{sc_2 W\left[K_{z_n^{(m)}} I_{\mu_k^{(m)}}\right]_{sc_2}}{\left[(\mu_k^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2\right] K_{z_n^{(m)}}(sc_2) I_{\mu_k^{(m)}}(sc_2)} =\\
&= \sum_{n=1}^{N} \overline{A}_n^{(m)}(\alpha) \frac{sc_2 W\left[I_{z_n^{(m)}} I_{\mu_k^{(m)}}\right]_{sc_2}}{\left[(\mu_k^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2\right] I_{z_n^{(m)}}(sc_2) I_{\mu_k^{(m)}}(sc_2)}, \ k = \overline{1,K};
\end{aligned} \tag{5.19}$$

де $x_n^{(m;2)} = q_m(z_n^{(m)},\gamma)\overline{x}_n^{(m;2)}$; $\overline{A}_n^{(m)} = -q_m(z_n^{(m)},\gamma)A_n^{(m)} I_{z_n}(sc_2)$.

Утворимо із систем (5.18)–(5.19) НСЛАР наступним чином. Із множин індексів $\left\{\nu_p^{(m)}\right\}_{p=1}^{\infty}$ і $\left\{\mu_k^{(m)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ утворимо зростаючу послідовність

$$\left\{\xi_q^{(m)}\right\}_{q=1}^{\infty} = \left\{\nu_p^{(m)}\right\}_{p=1}^{\infty} \bigcup \left\{\mu_k^{(m)}\right\}_{k=1}^{\infty}. \tag{5.20}$$

Далі у виразах (5.18), (5.19) перейдемо до границі, коли $N, P, K \to \infty$ $(N = P + K)$, розмістивши рівняння цієї системи у відповідності до послідовності (5.20). Тоді отриману НСЛАР запишемо у матричному вигляді так

$$A_{22}(m)X^{(m;2)} = F^{(m;2)}, \tag{5.21}$$

де $X^{(m;2)} = \left\{x_n^{(m;2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$; $A_{22}(m)$ – нескінченний матричний оператор,

$$A_{22}(m): \left\{ a_{qn}^{(22)}(m) = \frac{sc_2 W\left[K_{z_n^{(m)}} I_{\xi_q^{(m)}}\right]_{sc_2}}{\left[(\xi_q^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2\right] K_{z_n^{(m)}}(sc_2) I_{\xi_q^{(m)}}(sc_2)} \right\}_{q,n=1}^{\infty}; \tag{5.22}$$

$F_2^{(m)} = \left\{ f_q^{(m;2)} \right\}_{q=1}^{\infty}$ – відомий вектор,

$$f_q^{(m;2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n^{(m)}(\alpha) \frac{sc_2 W\left[I_{z_n^{(m)}} I_{\xi_q^{(m)}}\right]_{sc_2}}{\left[(\xi_q^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2\right] I_{z_n^{(m)}}(sc_2) I_{\xi_q^{(m)}}(sc_2)}.$$

Для задачі Неймана (R-випадок) скінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь запишуться так

$$\begin{gathered}
\frac{\overline{x}_0^{(m;2)} + A_0^{(0)}(\alpha) I_{\nu_p^{(m)}}(sc_2)}{\nu_p^{(m)} \alpha_m^{+}(\nu_p^{(m)},\gamma)} \delta_p^1 \delta_m^0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{q(z_n^{(m)},\gamma)\left(\overline{x}_n^{(m;2)} + A_n^{(m)}(\alpha) I_{z_n^{(m)}}(sc_2)\right)}{(\nu_p^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2} \\
= \frac{\overline{y}_p^{(m;2,1)}}{\nu_p^{(m)} \alpha_m^{+}(\nu_p^{(m)},\gamma)},\ p = \overline{1,P}; \\
\frac{\overline{x}_0^{(m;2)} + A_0^{(0)}(\alpha) I_{\mu_k^{(m)}}(sc_2)}{\mu_k^{(m)} \alpha_m^{-}(\mu_k^{(m)},\gamma)} \delta_k^1 \delta_m^0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{q(z_n^{(m)},\gamma)\left(\overline{x}_n^{(m;2)} + A_n^{(m)}(\alpha) I_{z_n^{(m)}}(sc_2)\right)}{(\mu_k^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2} = \\
= \frac{\overline{y}_k^{(m;2;2)}}{\mu_k^{(m)} \alpha_m^{-}(\mu_k^{(m)},\gamma)},\ k = \overline{1,K}.
\end{gathered} \tag{5.23}$$

$$\frac{\delta_p^1\delta_m^0}{\nu_p^{(m)}\alpha_m^+(\nu_p^{(m)},\gamma)}\left[\overline{x}_0^{(m;2)}\frac{K'_{1/2}(sc_2)}{K_{1/2}(sc_2)}+A_0^{(0)}(\alpha)I'_{1/2}(sc_2)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(\nu_p^{(m)})^2-(z_n^{(m)})^2}\left[x_n^{(m;2)}\frac{K'_{z_n^{(m)}}(sc_2)}{K_{z_n^{(m)}}(sc_2)}+A_n^{(m)}(\alpha)q(z_n^{(m)},\gamma)I'_{z_n^{(m)}}(sc_2)\right]=$$

$$=\frac{\overline{y}_p^{(m;2,1)}}{\nu_p^{(m)}\alpha_m^+(\nu_p^{(m)},\gamma)}\frac{I'_{\nu_p^{(m)}}(sc_2)}{I_{\nu_p^{(m)}}(sc_2)},\ p=\overline{1,P};$$

$$\frac{\delta_k^1\delta_m^0}{\mu_k^{(m)}\alpha_m^-(\mu_k^{(m)},\gamma)}\left[\overline{x}_0^{(m;2)}\frac{K'_{1/2}(sc_2)}{K_{1/2}(sc_2)}+A_0^{(0)}(\alpha)I'_{1/2}(sc_2)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(\mu_k^{(m)})^2-(z_n^{(m)})^2}\left[x_n^{(m;2)}\frac{K'_{z_n^{(m)}}(sc_2)}{K_{z_n^{(m)}}(sc_2)}+A_n^{(m)}(\alpha)q(z_n^{(m)},\gamma)I'_{z_n^{(m)}}(sc_2)\right]=$$

$$=\frac{\overline{y}_k^{(m;2,2)}}{\mu_k^{(m)}\alpha_m^-(\mu_k^{(m)},\gamma)}\frac{I'_{\mu_k^{(m)}}(sc_2)}{I_{\mu_k^{(m)}}(sc_2)},k=\overline{1,K}; \tag{5.24}$$

Тут враховано формування незалежного від координати θ тиску в підобластях D_1, D_2, D_3 при $m=0$; $N=P+K-\delta_m^0$.

Виключимо в (5.23), (5.24) невідомі $\overline{y}_p^{(m;2,1)}$, $\overline{y}_k^{(m;2,2)}$ $\overline{x}_0^{(m;2)}$ та перейдемо до границі, коли $N,P,K\to\infty$ ($N=P+K-\delta_m^0$). У результаті отримаємо НСЛАР (5.21) з $z_n^{(m)}=n+m-1/2+\delta_m^0$, де зростаюча послідовність коренів трансцендентних рівнянь (5.9) запишеться так

$$\left\{\xi_q^{(m)}\right\}_{q=1}^{\infty}=\begin{cases}\{1/2\}\cup\left\{\nu_p^{(m)}\right\}_{p=2}^{\infty}\cup\left\{\mu_k^{(m)}\right\}_{k=2}^{\infty}, m=0;\\ \left\{\nu_p^{(m)}\right\}_{p=1}^{\infty}\cup\left\{\mu_k^{(m)}\right\}_{k=1}^{\infty}, \qquad m>0.\end{cases}$$

5.3. Регуляризація НСЛАР

Головні члени асимптотик оператора (5.22) при $\xi_n^{(m)},z_n^{(m)}>>|sc_2|$ і у статичному випадку, коли $|sc_2|\to 0$ складають матричний оператор типу згортки (див. розділ 2):

$$A_{22}(m):\left\{a_{qn}(m)=\frac{1}{\xi_q^{(m)}-z_n^{(m)}}\right\}_{q,n=1}^{\infty}. \tag{5.25}$$

Для знаходження оберненого оператора $A^{-1}(m)$ вводимо до розгляду парну мероморфну функцію $M(\nu,\gamma;m)$, яка регулярна у смузі $\Pi:\{|\operatorname{Re}\nu|<1/2\}$, а за межами Π має прості нулі і полюси відповідно у точках $\pm z_n^{(m)}$, $\pm\xi_q^{(m)}$. Цю функцію запишемо так

$$M(\nu,\gamma;m)=\frac{1}{\Gamma(\nu-m+1/2)\Gamma(-\nu-m+1/2)}\times$$

$$\times\begin{cases}\left\{P_{\nu-1/2}^{m}(\cos\gamma)P_{\nu-1/2}^{m}(-\cos\gamma)\right\}^{-1} & \text{для } S\text{-випадку;}\\ \left\{\dfrac{d}{d\gamma}P_{\nu-1/2}^{m}(\cos\gamma)\dfrac{d}{d\gamma}P_{\nu-1/2}^{m}(-\cos\gamma)\right\}^{-1} & \text{для } R\text{-випадку.}\end{cases} \tag{5.26}$$

Функція $M(\nu,\gamma;m)$ допускає факторизацію у вигляді

$$M(\nu,\gamma;m)=M_+(\nu,\gamma;m)M_-(\nu,\gamma;m), \tag{5.27}$$

де $M_+(\nu,\gamma;m)$, $M_-(\nu,\gamma;m)$ регулярні і не мають нулів у відповідно у півплощинах $\operatorname{Re}\nu>-1/2$, $\operatorname{Re}\nu<1/2$ і знаходяться методом нескінченних добутків; $M(\nu,\gamma;m)=O\left(\nu^{\pm1}\right)$; $M_+(\nu,\gamma;m)=M_-(\nu,\gamma;m)=O\left(\nu^{\pm1/2}\right)$ при $|\nu|\to\infty$ в областях регулярності, де верхній знак відповідає випадку м'якого конуса, а нижній – жорсткого конуса.

Вирази для функцій $M_\pm(\nu,\gamma;m)$ записуємо так [86]:

$$M_\pm(\nu,\gamma;m)=B_m\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m)}\left\{\Gamma\left(1/2\pm\nu\right)e^{\pm\nu\chi_m}\prod_{n=1}^{m}\left(1\pm\frac{\nu}{n-1/2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{n=1}^{\infty}\left(1\pm\frac{\nu}{\nu_n^{(m)}}\right)e^{\mp\frac{\nu}{\nu_n^{(m)}}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1\pm\frac{\nu}{\mu_n^{(m)}}\right)e^{\mp\frac{\nu}{\mu_n^{(m)}}}\right\}^{-1},$$

де $\nu_n^{(m)}$, $\mu_n^{(m)}$ є відповідно розв'язками трансцендентних рівнянь (5.8) для м'якого і (5.9) для жорсткого конусів;

$$\chi_m=\frac{\gamma}{\pi}\ln\frac{\gamma}{\pi}+\frac{\pi-\gamma}{\pi}\ln\frac{\pi-\gamma}{\pi}-\psi(\tau+m/2)-S_m(\gamma)-S_m(\pi-\gamma);$$

$$S_m(\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma}{\pi(n+m/2-\beta)}-\frac{1}{\nu_n^{(m)}}\right\},\ S_m(\pi-\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\pi-\gamma}{\pi(n+m/2-\beta)}-\frac{1}{\mu_n^{(m)}}\right\};$$

$$B_m(\gamma)=\left\{P_{-1/2}^m(\cos\gamma)P_{-1/2}^m(-\cos\gamma)\right\}^{-1/2},\ \tau=3/4,\ \beta=1/4 \text{ для } S\text{-випадку;}$$

$$B_m(\gamma)=\left\{\frac{d}{d\gamma}P_{-1/2}^m(\cos\gamma)\frac{d}{d\gamma}P_{-1/2}^m(-\cos\gamma)\right\}^{-1/2},\ \tau=1/4,\ \beta=3/4 \text{ для } R\text{-випадку.}$$

Оператор обернений до (5.25) записуємо у вигляді [86]:

$$A^{-1}(m):\left\{\tau_{kq}^{(m)}=\left\langle\left\{M_-^{-1}\left(\xi_q^{(m)},\gamma;m\right)\right\}' M_-'\left(z_k^{(m)},\gamma;m\right)\left(z_k^{(m)}-\xi_q^{(m)}\right)\right\rangle^{-1}\right\}_{k,q=1}^{\infty}. \tag{5.28}$$

При знаходженні елементів оператора (5.28) враховувались вирази (2.43), а також той факт, що $z_k^{(m)}$, $\xi_q^{(m)}$ є відповідно простими нулями і полюсами функції (5.26) у S та R-випадках. Тоді похідні $M_-'\left(z_k^{(m)},\gamma;m\right)$ $\left\{\left[M_-\left(\xi_q^{(m)},\gamma;m\right)\right]^{-1}\right\}'$ записуються у вигляді:

для S-випадку:

$$M_-'\left(z_k^{(m)},\gamma;m\right)=-\frac{\Gamma(k+2m)}{\Gamma(k)\left[P_{z_k^{(m)}-1/2}^m(\cos\gamma)\right]^2 M_+\left(z_k^{(m)},\gamma;m\right)}, \tag{5.29}$$

$$\left\{\left[M_-\left(\xi_q^{(m)},\gamma;m\right)\right]^{-1}\right\}'=(-1)^m\frac{\pi M_+\left(\xi_q^{(m)},\gamma;m\right)}{\cos\pi\xi_q^{(m)}}\frac{\Gamma\left(\xi_q^{(m)}-m+1/2\right)}{\Gamma\left(\xi_q^{(m)}+m+1/2\right)}\times$$

$$\times\begin{cases}P_{\nu-1/2}^m(-\cos\gamma)\left.\dfrac{\partial P_{\nu-1/2}^m(\cos\gamma)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\xi_q^{(m)}\in\left\{\nu_p^{(m)}\right\}_{p=1}^{\infty}}; \\ P_{\nu-1/2}^m(\cos\gamma)\left.\dfrac{\partial P_{\nu-1/2}^m(-\cos\gamma)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\xi_q^{(m)}\in\left\{\mu_k^{(m)}\right\}_{k=1}^{\infty}},\end{cases} \tag{5.30}$$

для R-випадку:

$$M_-'\left(z_k^{(m)},\gamma;m\right)=\frac{\Gamma(k+2m)}{\Gamma(k)\left[\partial P_{z_k^{(m)}-1/2}^m(\cos\gamma)/\partial\gamma\right]^2 M_+\left(z_k^{(m)},\gamma;m\right)}, \tag{5.31}$$

$$\left\{\left[M_-\left(\xi_q^{(m)},\gamma;m\right)\right]^{-1}\right\}'=(-1)^m\frac{\pi M_+\left(\xi_q^{(m)},\gamma;m\right)}{\cos\pi\xi_q^{(m)}}\frac{\Gamma\left(\xi_q^{(m)}-m+1/2\right)}{\Gamma\left(\xi_q^{(m)}+m+1/2\right)}\times$$

$$\times\begin{cases} P_{\nu-1/2}^{m}(-\cos\gamma)\dfrac{\partial^2 P_{\nu-1/2}^{m}(\cos\gamma)}{\partial\gamma\partial\nu}\Bigg|_{\nu=\xi_q^{(m)}\in\left\{\nu_p^{(m)}\right\}_{p=1}^{\infty}}; \\ P_{\nu-1/2}^{m}(\cos\gamma)\dfrac{\partial^2 P_{\nu-1/2}^{m}(-\cos\gamma)}{\partial\gamma\partial\nu}\Bigg|_{\nu=\xi_q^{(m)}\in\left\{\mu_k^{(m)}\right\}_{k=1}^{\infty}}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Для матричних елементів оберненого оператора (5.28) при $k,q\to\infty$ справедлива наступна асимптотична оцінка

$$\tau_{kq}^{(m)}=\begin{cases} O\left(\left(z_n^{(m)}/\xi_q^{(m)}\right)^{-1/2}\left(\xi_q^{(m)}-z_n^{(m)}\right)^{-1}\right) \text{ для } S\text{-випадку;} \\ O\left(\left(\xi_q^{(m)}/z_n^{(m)}\right)^{-1/2}\left(\xi_q^{(m)}-z_n^{(m)}\right)^{-1}\right) \text{для } R\text{-випадку.} \end{cases}$$

Виділимо з НСЛАР (5.21) матричний оператор (5.25) і, використовуючи обернений оператор (5.28), отримаємо НСЛАР другого роду, яку запишемо так

$$X^{(m;2)}=A^{-1}(m)\left(A(m)-A_{22}(m)\right)X^{(m;2)}+A^{-1}(m)F^{(m;2)}. \quad (5.33)$$

Єдиний розв'язок НСЛАР (5.33) існує в

$$b_m(\sigma):\left\{\left\|x_n^{(m;2)}\right\|=\sup_n\left|x_n^{(m;2)}n^{\sigma}\right|,\ \lim_{n\to\infty}\left|x_n^{(m;2)}n^{\sigma}\right|=0\right\}$$

при $0\le\sigma<3/2$ для S-випадку і $0\le\sigma<1/2$ для R-випадку, що забезпечує виконання умов Мейкснера на краю.

Невідомі коефіцієнти розкладу в (5.7) виражаються через розв'язки НСЛАР (5.33) так

$$\overline{x}_n^{(m;2)}=\frac{x_n^{(m;2)}}{q(z_n^{(m)},\gamma)}; \quad (5.34)$$

$$\overline{y}_p^{(m;2,1)}=\phi(sc_2)\delta_p^1\delta_m^0+$$
$$+\nu_p^{(m)}\alpha_m^{+}(\nu_p^{(m)},\gamma)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^{(m;2)}}{(\nu_p^{(m)})^2-(z_n^{(m)})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q(z_n^{(m)},\gamma)A_n^{(m)}(\alpha)}{(\nu_p^{(m)})^2-(z_n^{(m)})^2}I_{z_n^{(m)}}(sc_2)\right); \quad (5.35)$$

$$\overline{y}_k^{(m;2,2)}=\phi(sc_2)\delta_p^1\delta_m^0+$$
$$+\mu_k^{(m)}\alpha_m^{-}(\mu_k^{(m)},\gamma)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^{(m;2)}}{(\mu_k^{(m)})^2-(z_n^{(m)})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q(z_n^{(m)},\gamma)A_n^{(m)}(\alpha)}{(\mu_k^{(m)})^2-(z_n^{(m)})^2}I_{z_n^{(m)}}(sc_2)\right). \quad (5.36)$$

5.3.1. Регуляризуючі оператори при $\gamma=\pi/2$ (диск). У випадку, коли конус вироджується у диск ($\gamma=\pi/2$) індекси $z_n^{(m)}$ і $\xi_q^{(m)}$ для м'якого і жорсткого дисків відповідно записуються

$$z_n^{(m)} = 2n + m - 3/2,\ \ \xi_q^{(m)} = 2q + m - 1/2;$$
$$z_n^{(m)} = 2n + m - 1/2,\ \xi_q^{(m)} = 2q + m - 3/2, \tag{5.37}$$

де $n, q = 1, 2, 3, ...$

Для побудови виразу характеристичної функції $M(\nu, \gamma; m)$ у випадку, коли $\gamma = \pi/2$ використаємо подання приєднаної функції Лежандра та її похідної по аргументу у вигляді [100]:

$$\left. P_{\nu-1/2}^{m}(\pm\cos\gamma)\right|_{\gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{2^m\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu/2 - m/2 + 3/4)\Gamma(-\nu/2 - m/2 + 3/4)};$$
$$\left. \frac{dP_{\nu-1/2}^{m}(\pm\cos\gamma)}{d\gamma}\right|_{\gamma=\frac{\pi}{2}} = \mp \frac{2^{m+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu/2 - m/2 + 1/2)\Gamma(-\nu/2 - m/2)}. \tag{5.38}$$

Тоді, відповідно до (5.38), регуляризація функцій (5.26) і відносно уявної осі запишеться так

$$M_{+}(\nu, \pi/2; m) = \frac{2^{\nu-m-1}}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} 2\dfrac{\Gamma^2(\nu/2 - m/2 + 3/4)}{\Gamma(\nu + 1/2)}; \\ i\dfrac{\Gamma^2(\nu/2 - m/2 + 1/4)}{\Gamma(\nu - m + 1/2)}. \end{cases}$$

Елементи оберненого оператора (5.28) подамо у вигляді

$$M'_{-}\left(z_k^{(m)}, \pi/2; m\right) = \frac{i\pi\Gamma(k+m)}{\sqrt{8}\Gamma(k+m+1/2)} \begin{cases} i\left(2k + 2m - 1\right); \\ 1; \end{cases}$$

$$\left\{M_{-}^{-1}\left(\xi_q^{(m)}, \pi/2; m\right)\right\}' = \frac{\pi\,\Gamma(q+m)}{\sqrt{8}\Gamma(q+m+1/2)} \begin{cases} 1; \\ i\left(2q + 2m - 1\right). \end{cases}$$

Тоді пара регуляризуючих операторів запишеться так

$$a_{qn}(m) = a_{qn} = \begin{cases} \left(2q - 2n + 1\right)^{-1}; \\ \left(2q - 2n - 1\right)^{-1}; \end{cases} \tag{5.39}$$

$$\tau_{kq}^{(m)} = \frac{8\Gamma(q+m+1/2)\Gamma(k+m+1/2)}{\pi^2\Gamma(q+m)\Gamma(k+m)} \begin{cases} \left(1 - 2k - 2m\right)^{-1}\left(2k - 2q - 1\right)^{-1}; \\ \left(1 - 2q - 2m\right)^{-1}\left(2k - 2q + 1\right)^{-1}. \end{cases} \tag{5.40}$$

У виразах (5.39), (5.40) верхня стрічка відповідає *S*-випадку, а нижня – *R*-

випадку.

5.4. Фізичні характеристики розсіювання

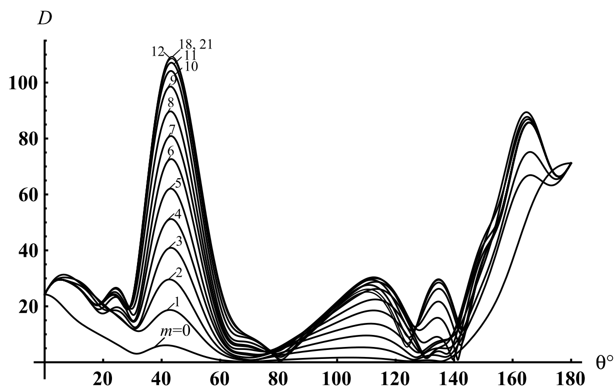
Розв'язки НСЛАР (5.33) використали для дослідження дифрагованого поля у зоні випромінювання, що відповідає підобласті D_3. Аналізували діаграми спрямованості:

$$D(\theta,\varphi) = \left|S(\theta,\varphi)\right|, \tag{5.41}$$

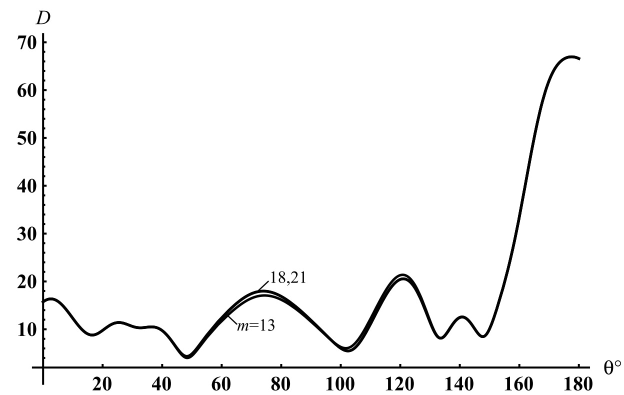
$$S(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\varphi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{x}_n^{(m;2)}P^m_{z_n^{(m)}-1/2}(\cos\theta)}{K_{z_n^{(m)}}(sc_2)}. \tag{5.42}$$

Кількість невідомих у подвійному ряді утримували, виходячи із умов $n = [|sc_2|] + \iota_1$, $\iota_1 = 4...10$; $m = [|sc_2|] + \iota_2$, $\iota_2 = 1...5$.

На рис. 5.2 показано вплив кількості врахованих азимутальних гармонік m на форму діаграм спрямованості жорсткого конуса з кутом розхилу $\gamma = 70°$. Із поведінки кривих на цьому рисунку спостерігаємо, що для кута опромінення $\alpha = 45°$ і $\alpha = 90°$ діаграма спрямованості сформована вже при $m = \left[|sc_2|\right]$.



а

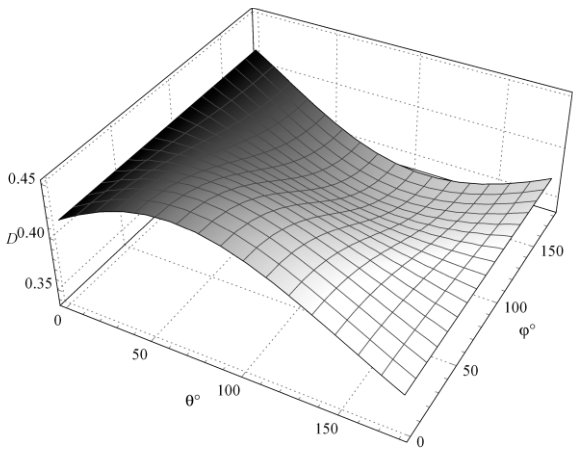


б

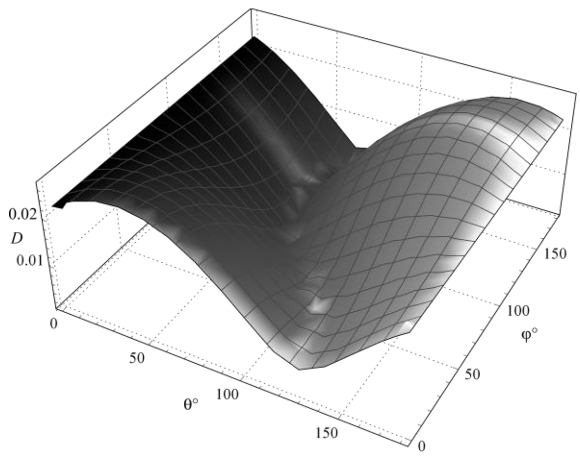
Рис. 5.2. Вплив кількості азимутальних гармонік m на форму діаграм спрямованості жорсткого конуса з параметрами $\gamma = 70°$; $kc_2 = 18$ при $\varphi = 0°$: *а* – $\alpha = 45°$; *б* – $\alpha = 90°$.

Розглянемо поле розсіяне конусом Q_2 малих розмірів із кутом розхилу

$\gamma = 30°$ і хвильовим параметром $kc_2 = 1$ при опроміненні під кутом $\alpha = 30°$. Дослідили просторові діаграми спрямованості $D = D(\theta, \varphi)$ у координатах $0° \le \theta \le 180°$, $0° \le \varphi \le 180°$. На рис. 5.3 показані діаграми спрямованості $D(\theta, \varphi)$ отримані для м'якого (рис. 5.3, *а*) і жорсткого (рис. 5.3, *б*) конусів. Як видно із рис. 5.3, *а*, розсіяне поле рівномірно розподіляється по кутах (θ, φ), створюючи таким чином монопольний характер розсіювання для м'якого конуса. У випадку жорсткого конуса рівень випромінювання є незначним (на порядок меншим, ніж у випадку м'якого конуса). В околі $\theta = 100°$ виділяються дві пелюстки характерні для дипольного типу розсіювання.



а

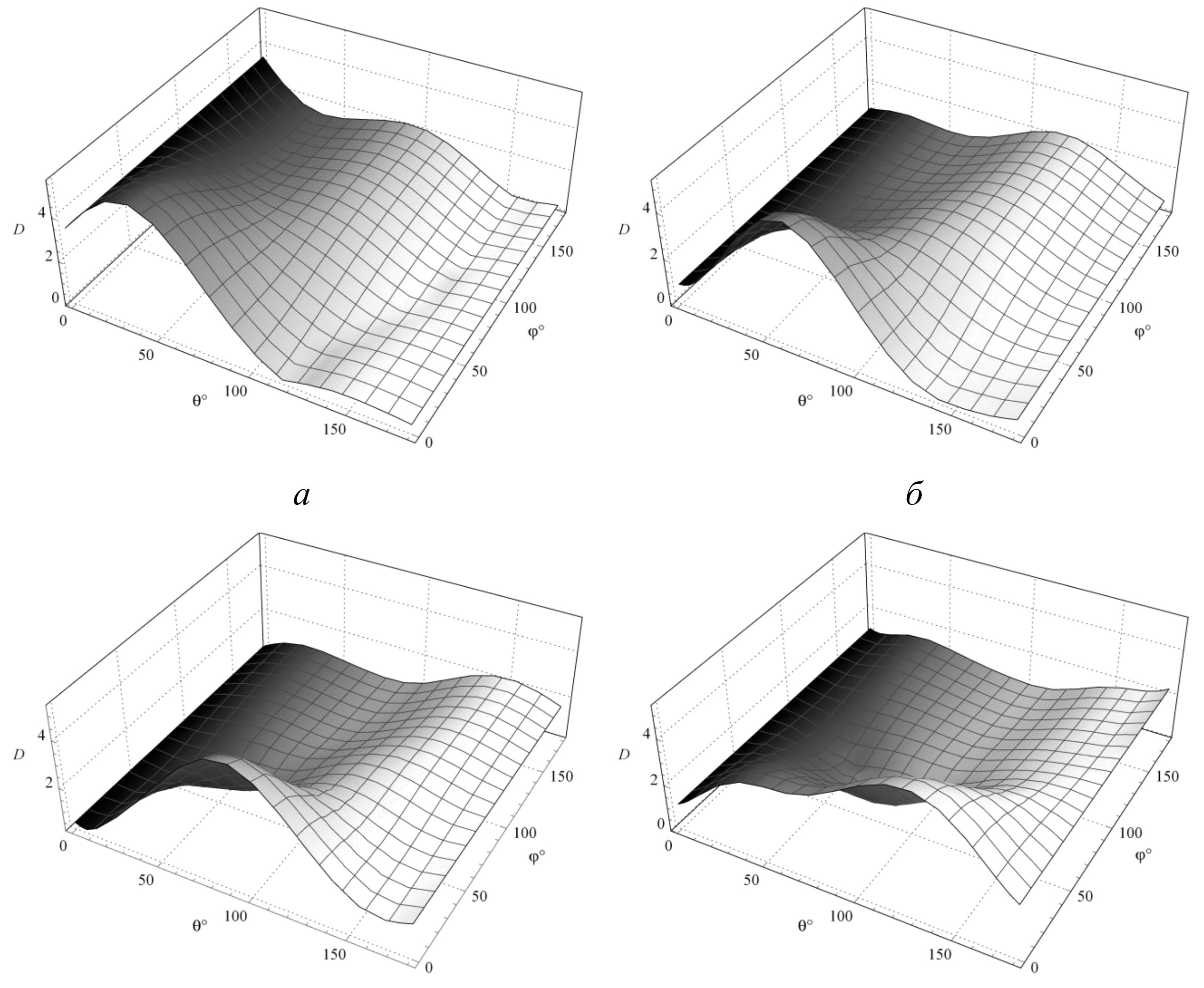


б

Рис. 5.3. Просторові діаграми спрямованості дифрагованого поля як функції кутів спостереження (θ, φ) для конуса з $\gamma = 30°$, $kc_2 = 1$ при $\alpha = 60°$: *а* – м'який конус; *б* – жорсткий конус.

Дослідимо тепер вплив кута опромінення α на діаграми спрямованості конуса із кутом розхилу $\gamma = 30°$ у резонансній області, коли довжина хвилі співмірна із довжиною твірної. На рис. 5.4 проілюстровані просторові діаграми спрямованості м'якого конуса для кутів падіння $\alpha = 30°, 60°$, $90°$, $120°$. Зрозуміло, що у випадках $\alpha = 0°$ і $\alpha = 180°$ діаграми спрямованості стають незалежними від азимутальної координати φ. Як видно з рис. 5.4, *а* головна пелюстка діаграми спрямованості формується у площині $\varphi = 0°$ із характерним максимумом при $\theta = \alpha$, що відповідає куту падіння. З протилежного боку

($\varphi = 180°$) формуються два максимуми, що відповідають кутам спостереження



а *б*

в *г*

Рис. 5.4. Просторові діаграми спрямованості дифрагованого поля як функції кутів спостереження (θ, φ) для м'якого конуса при $\gamma = 30°$, $kc_2 = 6$:
а – $\alpha = 30°$; *б* – $\alpha = 60°$; *в* – $\alpha = 90°$; *г* – $\alpha = 120°$.

$\theta = 0°$ і $\theta = 100°$ із трохи меншими амплітудами. В область $\theta > 130°$ поле практично не потрапляє. Зростання кута падіння α приводить до формування головної пелюстки, що охоплює область $\varphi < 50°$ з максимумом в околі $\theta = \alpha$ (див. рис. 5.4, *б*, *в*, *г*). Інша пелюстка випромінювання займає область $50° < \varphi \leq 180°$ (див. рис. 5.4, *б*, *в*) з максимумом, що зміщується до $\theta = 180°$ при прямуванні $\alpha \to 120°$ (див. рис. 5.4, *г*). Коли кут падіння становить $\alpha = 60°$, область ($0° < \theta < 50°$; $50° < \varphi < 180°$) стає практично "глухою" до проникнення дифрагованого поля. Ця область суттєво розширюється, коли $\alpha = 120°$ (див. рис. 5.4, *г*).

Аналогічні просторові діаграми спрямованості для жорсткого конуса наведені на рис. 5.5. Із поведінки кривих на рис. 5.5, *а*, *б* спостерігаємо, що дифраговане поле практично повністю займає область ($0° \le \theta \le 180°$, $0° \le \varphi \le 180°$) із утворенням просторових максимумів. Із цих рисунків також спостерігаємо тенденцію до формування максимуму діаграми спрямованості в околі кута падіння $\theta = \alpha$ ($\varphi = 0°$). Ця тенденція порушується при кутах $\alpha \ge 90$ (див. рис. 5.5, *в*, *г*), де два характерні максимуми формуються при ($\theta = 60°$; $\varphi = 0°$) і ($\theta = 60°$; $\varphi = 120°$), коли $\alpha = 90°$ і при ($\theta = 40°$; $\varphi = 0°$) і ($\theta = 140°$; $\varphi = 0°$), коли $\alpha = 120°$.

Введемо до розгляду позиційний (двопозиційний) переріз розсіювання

$$\sigma_L(\theta,\varphi) = \frac{4}{k^2}\left\{D(\theta,\varphi)\right\}^2, \tag{5.43}$$

а повний поперечний переріз запишемо так

$$\sigma_t = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma_L(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi. \tag{5.44}$$

Тоді згідно із формулами (5.43), (5.44) і (5.41), нормований повний переріз розсіювання запишемо формулою

$$\frac{\sigma_t}{2\pi c_2^2} = \frac{\pi}{2(kc_2)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2-\delta_m^0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\,\overline{x}_n^{(m;2)}\,|^2}{z_n^{(m)}\,|\,K_{z_n^{(m)}}(sc_2)\,|^2}\,\frac{\Gamma(z_n^{(m)}+m+1/2)}{\Gamma(z_n^m-m+1/2)}. \tag{5.45}$$

На рис. 5.6 наведено нормовані повні перерізи розсіювання для двох кутів розхилу ($\gamma = 30°$; $60°$) м'якого (рис. 5.6, *а*) та жорсткого (рис. 5.6, *б*) конусів при різних кутах падіння плоскої хвилі α. Із поведінки кривих на рис. 5.6, *а* бачимо, що при $kc_2 > 3$ перерізи розсіювання σ_t при різних кутах опромінення ($\alpha = 0° \div 90°$) прямують до постійного значення. Для конуса з кутом розхилу $\gamma = 30°$ спостерігаємо незначний вплив кута падіння α на переріз розсіювання. Так, для $kc_2 = 10$ абсолютна зміна перерізу розсіювання при зміні кута падіння від $\alpha = 0°$ до $\alpha = 90°$ становить 0.044485. Для широких конусів, коли $\gamma = 60°$ ця різниця на порядок більша і становить 0.440973.

Із наведених залежностей на рис. 5.6, *б* (жорсткий конус) спостерігаємо резонансний характер поведінки $\sigma_t(kc_2)$ з формуванням головного максимуму в околі $kc_2 = 2.58$ при різних кутах опромінення α. При прямуванні кута опромінення α до нормального ($\alpha = 90°$) спостерігаємо спадання головного максимуму. При цьому, осцилюючий характер кривих зберігається. Тобто, поведінка перерізу розсіяння має резонансний характер (див. розділ 2).

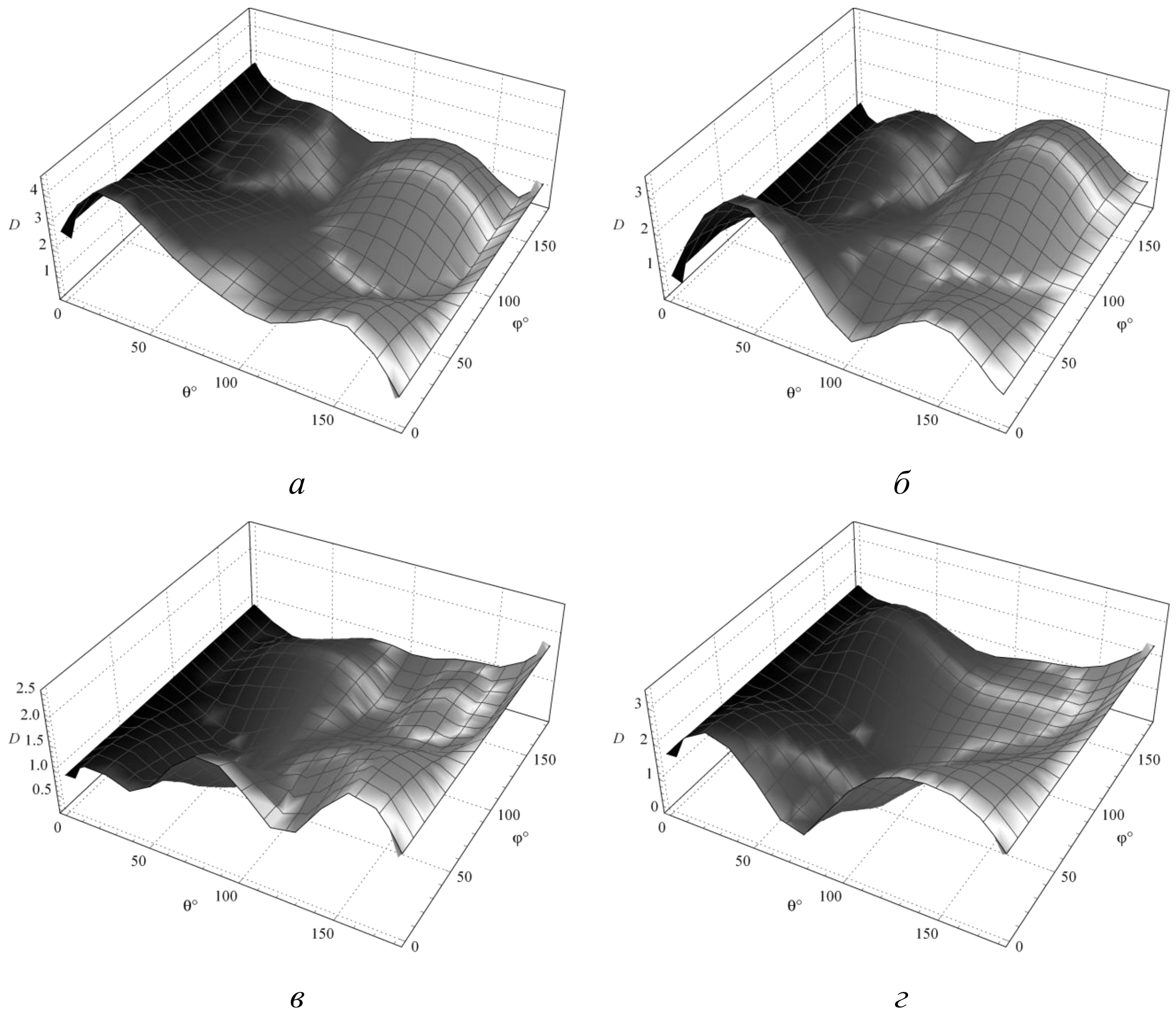
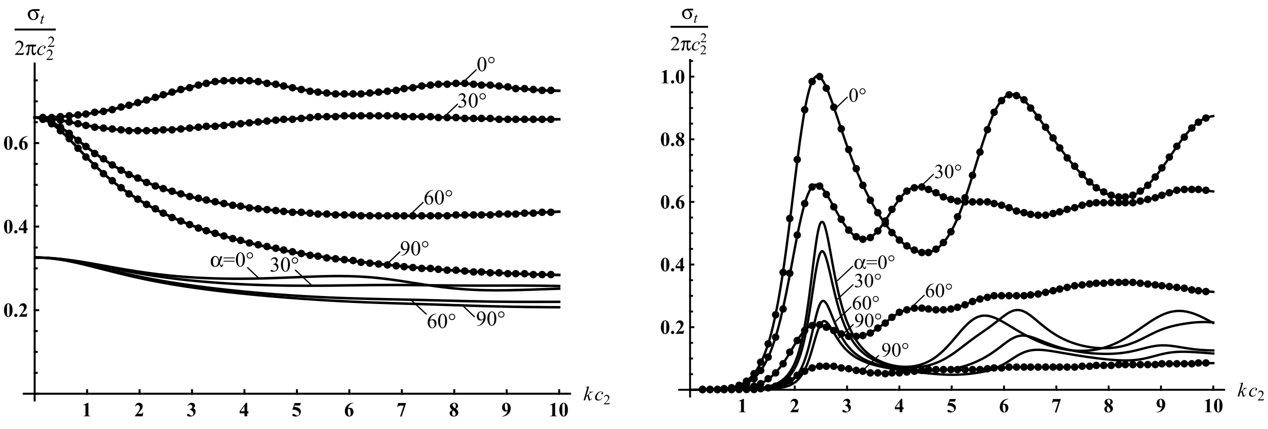


Рис. 5.5. Просторові діаграми спрямованості дифрагованого поля як функції кутів спостереження (θ; φ) для жорсткого конуса при $\gamma = 30°$ і $kc_2 = 6$:

а – $\alpha = 30°$; *б* – $\alpha = 60°$; *в* – $\alpha = 90°$; *г* – $\alpha = 120°$.

На рис. 5.7 показано сімейства залежностей нормованих повних перерізів розсіювання від кута опромінення α при фіксованому параметрі $kc_2 = 6$ для м’якого (рис. 5.7, *а*) і жорсткого (рис. 5.7, *б*) конусів. Із поведінки кривих на рис. 5.7 спостерігаємо зменшення перерізу розсіювання зі збільшенням кута опромінення α для м’яких і жорстких конусів. При цьому, зі зростанням кута розкриву конуса γ і при фіксованих кутах падіння, значення σ_t зростає. У випадку жорстких конусів, як видно з рис. 5.7, *б*, залежності $\sigma_t(\alpha)$ в околі кутів опромінення $60° < \alpha < 80°$ перетинаються.

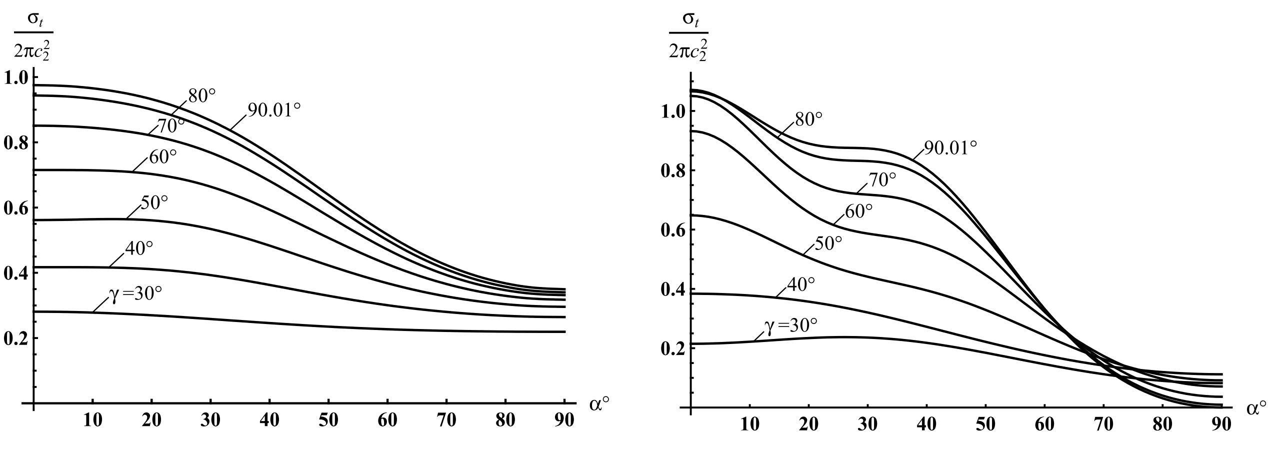


а *б*

Рис. 5.6. Нормовані залежності $\sigma_t(kc_2)$ при різних значеннях α:

суцільна лінія – $\gamma = 30°$, маркована лінія – $\gamma = 60°$;

а – м’який конус, *б* – жорсткий конус.



а *б*

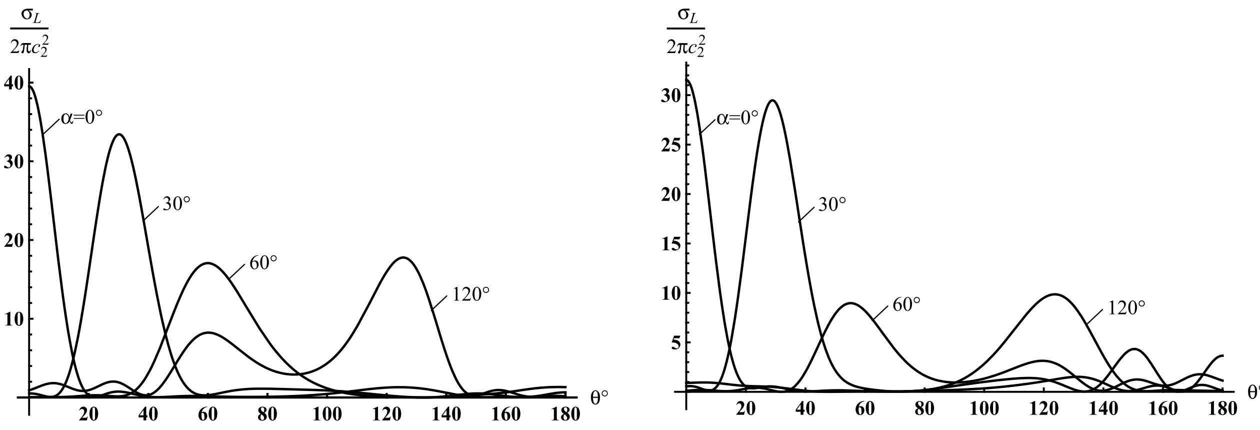
Рис. 5.7. Нормовані залежності $\sigma_t(\alpha)$ для $kc_2 = 6$ при різних значеннях γ:

а – м’який конус, *б* – жорсткий конус.

Нормований позиційний переріз розсіювання згідно формул (5.43) і (5.41) визначали так

$$\frac{\sigma_L}{2\pi c_2^2} = \frac{\pi}{(kc_2)^2}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\varphi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{x}_n^{(m;2)}}{K_{z_n^{(m)}}(sc_2)}P^m_{z_n^{(m)}-1/2}(\cos\theta)\right|^2 . \qquad (5.46)$$

На рис. 5.8 показано залежності позиційних перерізів $\sigma_L(\theta)$ в площині $\varphi = 0°$ для м'якого (рис. 5.8, *а*) і жорсткого (рис. 5.8, *б*) конусів з параметрами $\gamma = 60°$, $kc_2 = 12$ при різних значеннях кута опромінення α. Із рис. 5.8 бачимо виділення яскраво виражених максимумів σ_L у напрямках, що відповідають куту опромінення $\theta = \alpha$. Із порівняння кривих, зображених на рис. 5.8, *а* і рис. 5.8, *б*, спостерігаємо суттєві відмінності у величині розмаху амплітуд осциляцій σ_L для м'якого і жорсткого конусів.



а *б*

Рис. 5.8. Нормовані залежності $\sigma_L(\theta, \varphi = 0)$ для конуса з параметрами $\gamma = 60°$, $kc_2 = 12$ при різних значеннях α:
а – м'який конус; *б* – жорсткий конус.

На рис. 5.9 показано нормовані залежності зворотного перерізу розсіювання $\sigma_L = \sigma_L(\pi - \alpha, 0)$ як функцію параметра kc_2 при $\gamma = 30°$ (рис. 5.9, *а*) і $\gamma = 90.01°$ (рис. 5.9, *б*), отриманого згідно (5.46), де поклали $\theta = \pi - \alpha$, $\varphi = 0$. Із поведінки кривих на рис. 5.9, *б*, для жорсткого випадку, спостерігаємо зменшення $\sigma_L(\pi - \alpha, 0)$, коли α зростає, як для вузьких ($\gamma = 30°$), так і широких

($\gamma = 90.01°$) конусів. Проте для м'якого вузького конуса (рис. 5.9, *а*) позиційний переріз зростає (див. криву на рис. 5.9, *а* при $\alpha = 90°$).

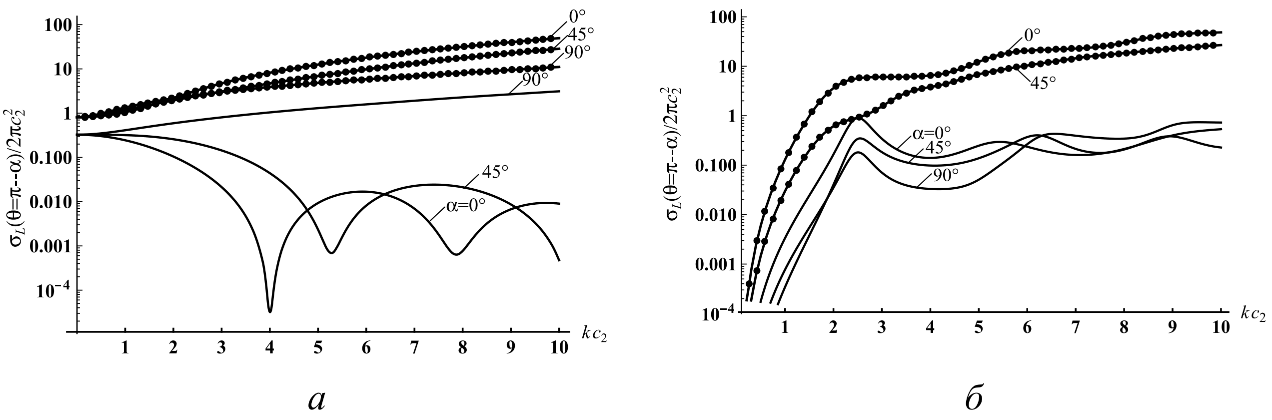


Рис. 5.9. Нормовані залежності перерізів зворотного розсіювання як функції хвильового параметра kc_2 при різних значеннях α: суцільна лінія – $\gamma = 30°$, маркована – $\gamma = 90.01°$; *а* – м'який конус; *б* – жорсткий конус.

На рис. 5.10 наведено нормовані залежності зворотних перерізів розсіювання $\sigma_L(\theta = \pi - \alpha, \varphi = 0)$ від кута опромінення α для м'якого (рис. 5.10, *а*) і жорсткого (рис. 5.10, *б*) конусів з хвильовим параметром $kc_2 = 6$ при різних значеннях γ. Із рис. 5.10, *а* в межах $0° \le \alpha < 60°$ спостерігаємо зростання $\sigma_L(\theta = \pi - \alpha, \varphi = 0)$ зі зростанням γ для м'яких конусів. Для жорсткого конуса (див. рис. 5.10, *б*) позиційні перерізи зворотного розсіювання досягають своїх мінімумів при кутах опромінення $80° < \alpha < 120°$. При прямуванні $\gamma \to \pi/2$ (перехід жорсткого конуса в жорсткий диск) мінімум випромінювання назад спостерігаємо при освітлені диска в торець, що може свідчити про достовірність результатів.

Використаємо далі вираз для повного перерізу розсіювання через уявну частину діаграми спрямованості при опроміненні скінченного конуса під кутом $\theta = \alpha$ в площині $\varphi = 0°$:

$$\frac{\sigma_t}{2\pi c_2^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{(kc_2)^2} \mathrm{Im}\left[i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{x}_n^{(m;2)} P^m_{z_n^{(m)}-1/2}(\cos\alpha)}{K_{z_n^{(m)}}(sc_2)} \right]. \tag{5.47}$$

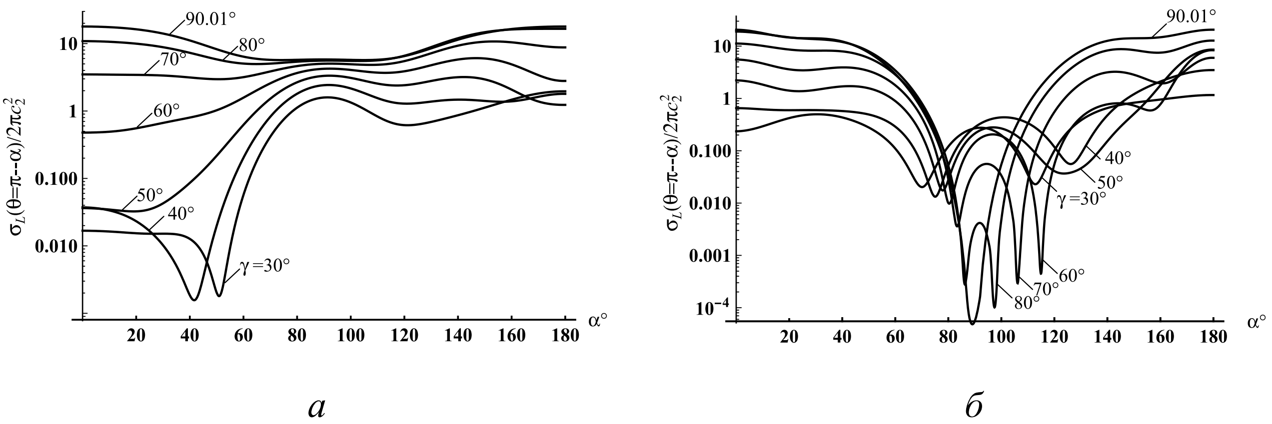


Рис. 5.10. Нормовані залежності перерізів зворотного розсіювання як функції α при різних значеннях кута розкриву γ і $kc_2 = 6$:
а – м'який конус; *б* – жорсткий конус.

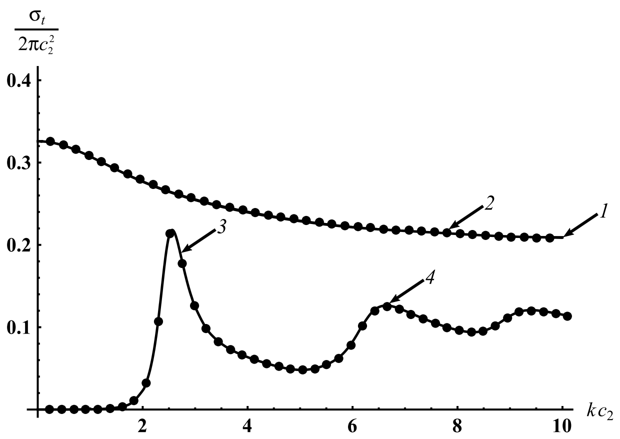


Рис. 5.11. Нормовані повні перерізи розсіювання м'якого (криві *1*, *2*) і жорсткого (криві *3*, *4*) конусів з кутом розхилу $\gamma = 30°$ при $\alpha = 90°$:
криві *1*, *3* – розраховано за формулою (5.45);
криві *2*, *4* – отримані згідно формули (5.48).

На рис. 5.11 порівнюємо нормовані перерізи розсіяння для м'якого (криві *1, 2*) та жорсткого (криві *3, 4*) конусів. На цьому рисунку криві *1, 3* отримані згідно формули (5.45), а криві *2, 4* згідно формули (5.47) добре співпадають в усьому діапазоні зміни хвильового параметра $0 \le kc_2 \le 10$, що свідчить про достовірність результатів.

5.5. Верифікація отриманих результатів

Криві приведені на рис. 5.12 та рис. 5.13 ілюструють виконання умов спряження для кута розхилу конуса $\gamma = 30°$ і хвильового параметру $kc_2 = 10$ при опроміненні під кутом $\alpha = 60°$. Ці дані підтверджують достовірність отриманих результатів.

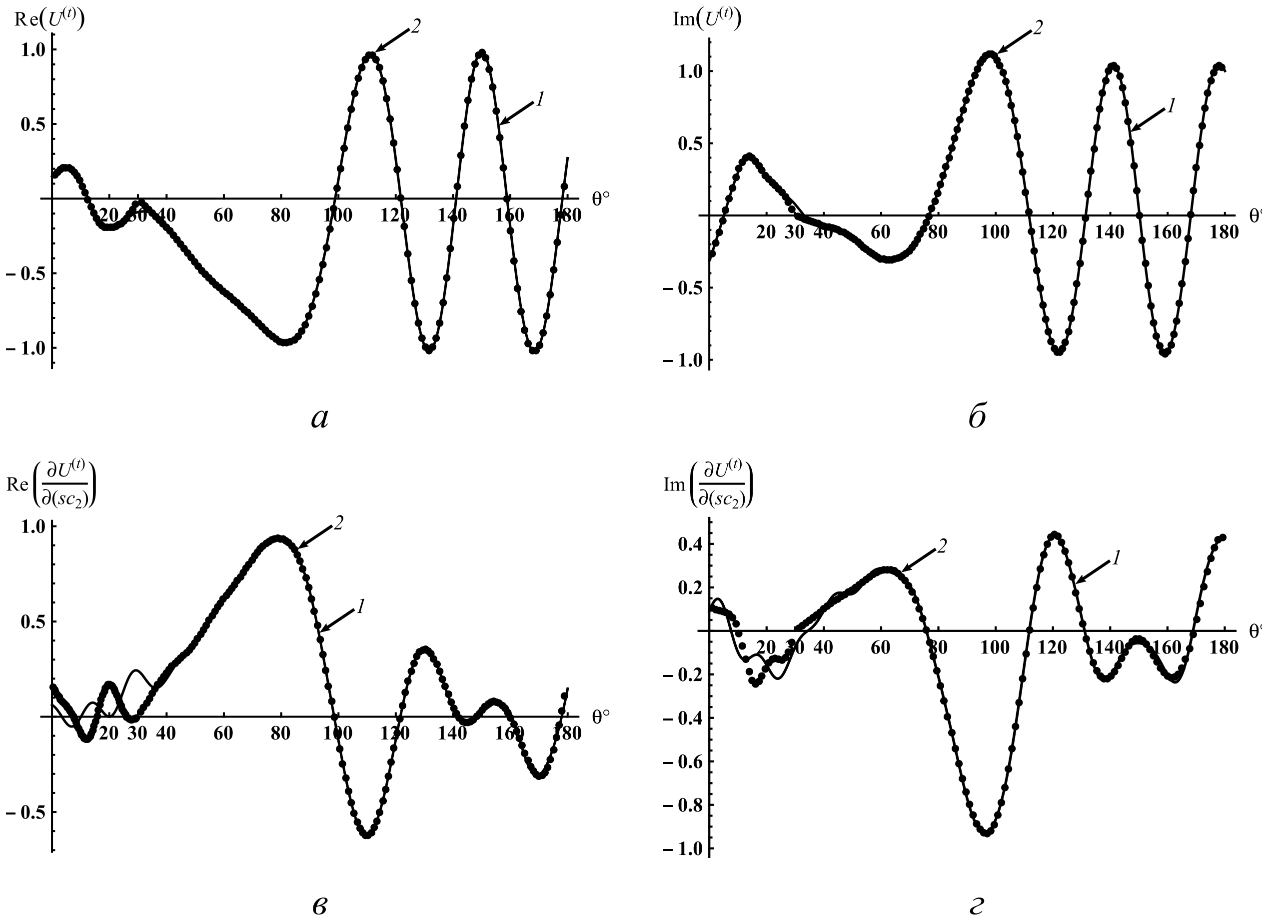


Рис. 5.12. Дійсні (Re) та уявні (Im) складові акустичного потенціалу на межі спряження підобластей виділених м'яким конусом з параметрами

$\gamma = 30°$, $kc_2 = 10$ при $\alpha = 60°$, $\varphi = 0°$:

а, б – повне поле; *в, г* – нормальна складова коливальної швидкості;

1 – з боку області D_3; *2* – з боку областей D_1, D_2.

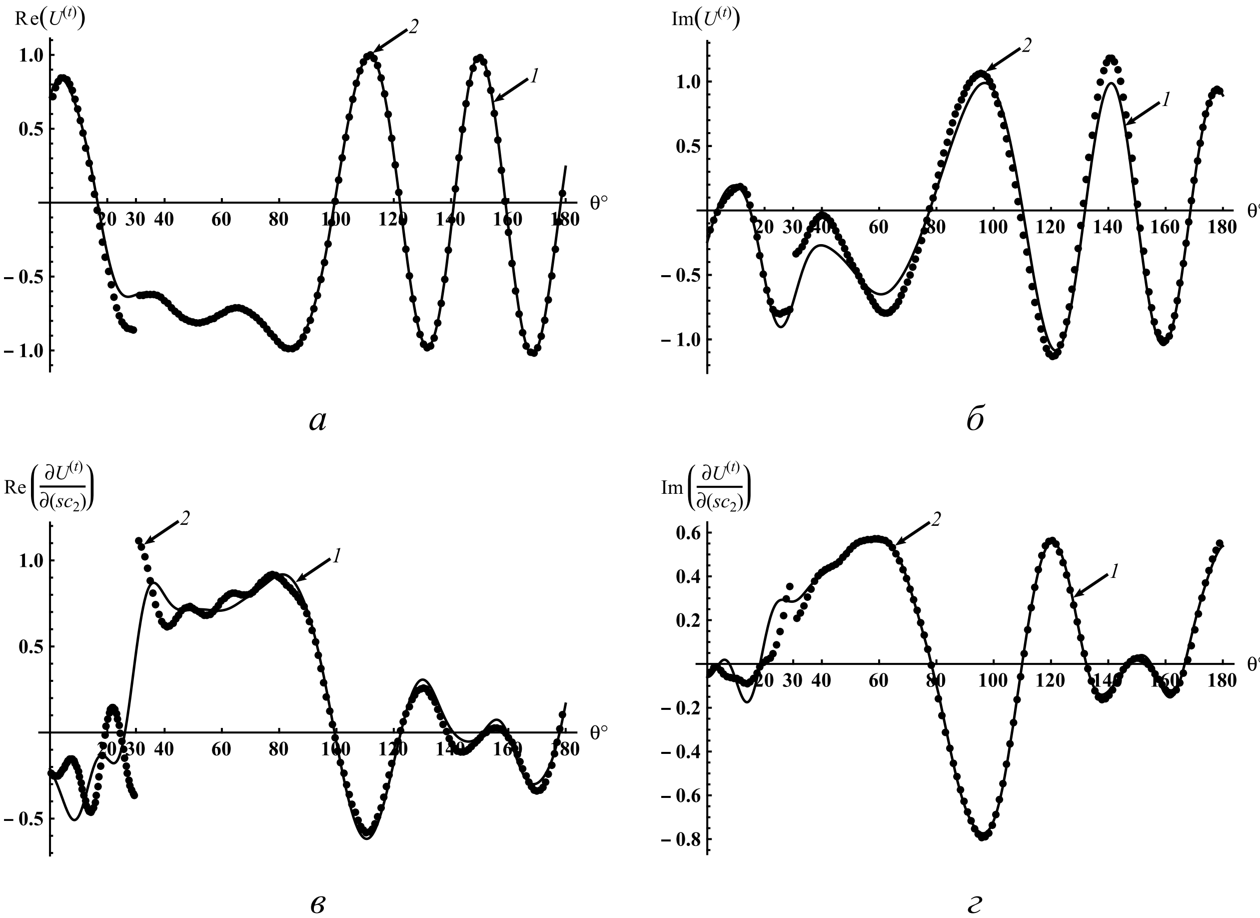


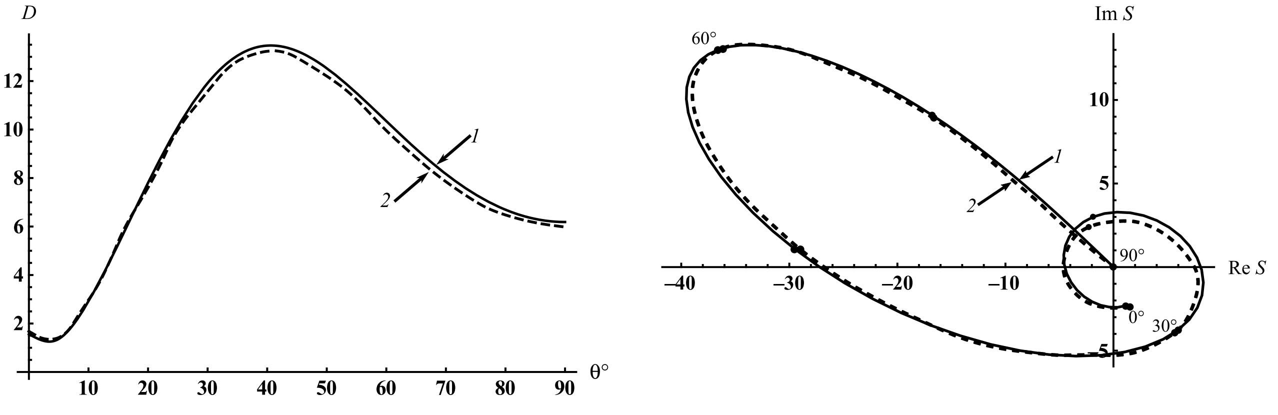
Рис. 5.13. Дійсні (Re) та уявні (Im) складові акустичного потенціалу на межі спряження підобластей виділених жорстким конусом з параметрами $\gamma = 30°$, $kc_2 = 10$ при $\alpha = 60°$, $\varphi = 0°$:

а, б – повне поле; *в, г* – нормальна складова коливальної швидкості;

1 – з боку області D_3; *2* – з боку областей D_1, D_2.

На рис. 5.14, *а* наведено порівняння діаграм спрямованості дифрагованого поля м'якого диска з хвильовим параметром $kc_2 = 6$ при $\alpha = 45°$ і $\varphi = 0°$ Крива *1* на цьому рисунку – наші результати, крива *2* – отримані в [109]. Спостерігаємо добре співпадіння цих кривих практично в усьому діапазоні кутів спостереження.

На рис. 5.14, *б* показано годографи поля в зоні випромінювання (5.42) для жорсткого диска. Крива *1* – наші результати, крива *2* – результати отримані в [74]. Тут також бачимо практично повну збіжність результатів.



а *б*

Рис. 5.14. Порівняння полів дифрагованих на дисках:

а – діаграми спрямованості $D(\theta, \varphi = 0°)$ м'якого диска при $kc_2 = 6$ і $\alpha = 45°$:

1 – $\gamma = 90.01°$, *2* – отримано методом *Т* матриць в [109];

б – дійсні та уявні частини $S(\theta, \varphi = 0°)$ жорсткого диска при $kc_2 = 12$, $\alpha = 60°$:

1 – $\gamma = 90.01°$, *2* – отримано методом *Т* матриць [74].

Порівняння нормованих залежностей перерізів розсіювання від кута падіння α отриманих для м'якого диска з хвильовим параметром $kc_2 = 5$ показано на рис. 5.15. Цифрам *1, 2, 3* на цьому рисунку позначено залежності отримані відповідно нами для $\gamma = 90.01°$, наведені у [74] та отримані методом геометричної оптики. Як видно із рис. 5.15. криві *1* і *2* співпадають в усьому діапазоні зміни кута падіння α, тоді як крива *3* добре описує переріз розсіювання тільки до значень $\alpha < 60°$, що також підтверджує достовірність результатів.

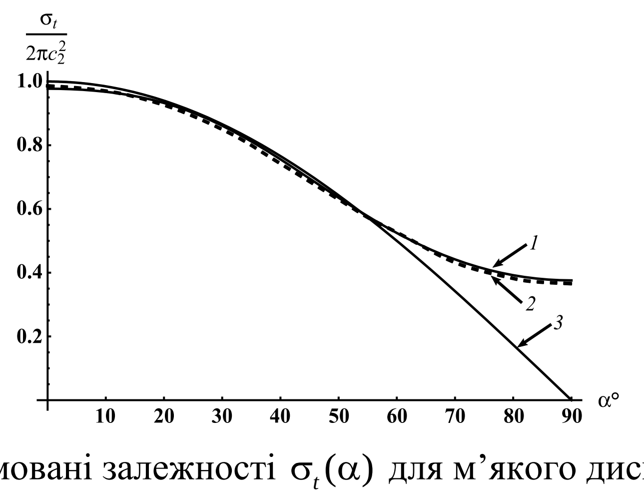


Рис. 5.15. Нормовані залежності $\sigma_t(\alpha)$ для м'якого диска при $kc_2 = 5$:

1 – $\gamma = 90.01°$; *2* – наведено в [74]; *3* – наближення геометричної оптики ($\cos\alpha$).

5.6. Висновки до розділу 5

1. Отримано розв'язок задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на порожнистому м'якому і жорсткому скінченних конусах при боковому опроміненні.
2. Вияснено залежність форми діаграм спрямованості від кількості азимутальних мод, утриманих при розрахунках. Встановлено, що для повного формування діаграм спрямованості кількість мод практично визначається величиною хвильового параметра $m=[kc_2]+q(\alpha,\gamma)$, $q(\alpha,\gamma)=1\div 4$.
3. Досліджено просторові розподіли дифрагованих полів у резонансному режимі розсіювання. Показано, що максимум головної пелюстки діаграми спрямованості формується у напрямку опромінення конуса для обох типів поверхні.
4. Виявлено зменшення інтенсивності випромінювання при боковому опроміненні скінченних конусів.
5. Показано монотонне спадання повних перерізів розсіювання, коли кут опромінення наближається до напрямку перпендикулярного осі конуса. Виявлено глибокі мінімуми зворотних позиційних перерізів розсіяння для широких жорстких конусів $\gamma > 60°$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню взаємодії плоскої акустичної хвилі, що гармонічно залежить від часу, з м’якими і жорсткими конічними поверхнями з круговими краями. У результаті виконання роботи встановлені закономірності та вияснені особливості формування полів у ближній та дальній зонах, позиційних і повних перерізів розсіювання в залежності від геометричних параметрів розсіювачів, частоти і кута падіння зондувальної хвилі.

Найважливіші результати досліджень полягають у наступному:

1. Методом розкладу потенціалу швидкості в ряди за власними функціями підобластей сумісно з методами спряження полів і аналітичної регуляризації задачі дифракції на м’яких та жорстких конусах з круговими краями при довільному куті опромінення плоскою акустичною хвилею зведено до НСЛАР другого роду для кожної азимутальної гармоніки поля. Розв’язки отриманих НСЛАР забезпечують виконання усіх необхідних умов, включаючи умови на краях і враховують збудження поршневої моди для жорстких розсіювачів. Встановлено зв’язок між хвильовими розмірами конусів і порядком редукції меридіональних та азимутальних гармонік для встановлення поля в зоні випромінювання.
2. Отримано коректні граничні переходи від задач дифракції на конусах з краями до задач дифракції на дисках та кільцях. Для цих випадків у явному вигляді побудовано нові регуляризуючі оператори; отримано наближені аналітичні розв’язки задач дифракції на м’яких та жорстких дисках та конусах з краями у низькочастотній області.
3. Встановлено закономірності формування дифрагованих полів, розсіяних м’якими і жорсткими конусами скінченної довжини, в широкому діапазоні зміни геометричних параметрів і частоти при їх осьовому опроміненні зі сторони вершини і основи у ближній і дальній зонах; показано, що при опроміненні конуса зі сторони вершини та основи

головний максимум дифрагованого поля орієнтований в напрямі $\theta = 0°$; для великих конусів ($c_2 > 15\lambda$) характерним є формування інтенсивного дзеркального відбивання; у довгохвильовій області ($c_2 < \lambda / 2$) виявлено резонансний характер розсіювання жорсткого скінченного конуса; показано домінантний вклад поршневої моди при формуванні повного поля в ближній зоні жорстких розсіювачів; встановлено можливість визначення одного з геометричних параметрів конуса (c_2 або γ), при одному відомому, за даними одночастотного зондування.

4. Встановлено закономірності впливу геометричних параметрів і частоти на випромінювання акустичного поля круговою апертурою конічної каверни, утвореної зрізом вершини напівнескінченних м'яких і жорстких конусів, зокрема виявлено ефект фокусування та запирання поля при його виході з каверни, а також ефект низькочастотного резонансного розсіювання м'якою каверною; показано можливість визначення радіусу апертури каверни за характеристиками дифрагованого поля; встановлено вплив радіусу апертури зрізаного конуса на розподіл ближнього поля і показано, що при $c_1 \sin\gamma << \lambda$ поле монотонно розподілене в околі апертури.
5. Встановлено вплив зрізу вершини скінченного м'якого конуса на його дифракційні характеристики при осьовому опроміненні плоскою акустичною хвилею; показано, що зі зростанням радіуса зрізу інтенсивність випромінювання в напрямку головної пелюстки діаграми спрямованості спадає; при $c_1 / c_2 > 0.25$, де $c_1 < c_2$ – сферичні радіуси отворів конічної оболонки, спадання інтенсивності випромінювання є значним.
6. Вперше встановлено закономірності дифракційних характеристик від кута опромінення м'якого і жорсткого скінченного конусів плоскою хвилею. Показано, що максимум дифрагованого поля формується в напрямку опромінення для обох типів поверхні, а також монотонне спадання повних перерізів розсіювання, коли кут опромінення

наближається до напрямку перпендикулярного осі конуса. Виявлено глибокі мінімуми зворотних позиційних перерізах розсіяння для широких жорстких конусів $\gamma > 60^{\circ}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Carslaw H. S. The scattering of sound waves by a cone / H.S. Carslaw // Math. Ann. – 1914. – Vol. 75, № 1. – P. 133–147. http://dx.doi.org/10.1007/BF01564524

2. Siegel K. M. Electromagnetic and acoustical scattering from a semi-infinite cone / K. M. Siegel, J. W. Crispin, C. E. Schensted // J. Appl. Phys. – 1955. – Vol. 26, № 3. – P. 309–313. http://dx.doi.org/10.1063/1.1721983

3. Felsen L. B. Backscattering from wide-angle and narrow-angle cone / L. B. Felsen // J. Appl. Phys. – 1955. – Vol. 26, № 2. – P. 138–151. http://dx.doi.org/10.1063/1.1721952

4. Felsen L. B. Plane wave scattering by small-angle cone / L. B. Felsen // IEEE Trans. Antennas. Propag. – 1957. – Vol. 5, № 1. – P. 121–129. http://dx.doi.org/ 10.1109/TAP.1957.1144470

5. Николаев Б. Г. О волновых процессах, возникающих при дифракции идеально отражающим конусом в осесимметричном случае / Б. Г. Николаев // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – Т. 25. – С. 151–171.

6. Nikolaev B. G. Wave processes in diffraction by a perfectly reflecting cone in the axisymmetric case / B. G. Nikolaev // J. Math. Sci. – 1975. – Vol. 3, № 1 – P. 125–141. http://dx.doi.org/10.1007/BF01084811

7. Bowman J. J. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes / J. J. Bowman, T. B. A. Senior, P. L. E. Uslenghi, J. S. Asvestas – Amsterdam: North-Holland, 1969. – 728 p.

8. Poruchikov V. B. Solution of the problem of the diffraction of an acoustic wave by a cone / V. B. Poruchikov // J. Appl. Math. Mech. – 1968. – Vol. 32, № 2. – P. 312–316. http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928(68)90134-2

9. Poruchikov V. B. Diffraction of a spherical acoustic wave on a cone / V. B. Poruchikov // Fluid Dynamics. – 1977. – Vol. 11, № 2. – P. 345–347. http://dx.doi.org/10.1007/BF01017407

10. Tsoi P. I. Diffraction of (short) sound waves at an obstacle (cylinder, sphere, cone and plane) / P. I. Tsoi // J. Appl. Math. Mech. – 1961. – Vol. 25, № 2. – P. 536–544. http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928(61)90085-5

11. Cheeger J. On the diffraction of waves by conical singularities. I / J. Cheeger, M. Taylor // Comm. Pure Appl. Math. – 1982. – Vol. 35, № 3. – P. 275–331. http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160350302

12. Cheeger J. On the diffraction of waves by conical singularities. II / J. Cheeger, M. Taylor // Comm. Pure Appl. Math. – 1982. – Vol. 35, № 4. – P. 487–529. http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160350403

13. Smyshlyaev V. P. Diffraction by conical surface at high frequency / V. P. Smyshlyaev // Wave motion. – 1990. – Vol. 12, № 4. – P 329–339. http://dx.doi.org/10.1016/0165-2125(90)90003-M

14. Bonner B. D. The computation of conical diffraction coefficients in high-frequency acoustic wave scattering / B. D. Bonner, I. G. Graham, V. P. Smyshlyaev // SIAM J. Numer. Anal. – 2005. – Vol. 43, № 3. – P. 1202–1230.

15. Шанин А. В. Асимптотики волнового поля при дифракции на конусе и дифракционный ряд на сфере / А. В. Шанин // Зап. науч. сем. ЛОМИ – 2011. – Т. 393. – С. 234–258.

16. Андронов И. В. Дифракция на узком круговом конусе как на сильно вытянутом теле / И. В. Андронов, Д. Буш // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 2011. – Т. 393. – С. 12–22.

17. Kraus L. Diffraction by an elliptic cone / L. Kraus, L. M. Levine // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – Vol. 14, № 1. – P. 49–68. http://dx.doi.org/10.1002/ cpa. 3160140104

18. Blume S. Spherical-multipole analysis of electromagnetic and acoustical scattering by a semi-infinite elliptic cone / S. Blume // IEEE Antennas propag. – 1996. – Vol. 38. – № 2. – P. 33–44. http://dx.doi.org/10.1109/74.500230

19. Klinkenbusch L. Electromagnetic scattering by semi-infinite circular and elliptic cones / L. Klinkenbusch // Radio Sci. – 2007. – Vol. 42, № 6. http://dx.doi.org/ 10.1029/ 2007RS003649

20. Brüns H. Electromagnetic diffraction and scattering of a complex-source beam by a semi-infinite circular cone / H. Brüns., L. Klinkenbusch // Adv. Radio Sci. – 2013. – Vol. 11. – P. 31–36. http://dx.doi.org/10.5194/ars-11-31-2013

21. Babich V. M. On the diffraction of high-frequency waves by a cone of arbitrary

shape / V. M. Babich, D. B. Dement'ev, B. A. Samokish // Wave Motion. – 1995. – Vol. 21, № 3. – P. 203–207. http://dx.doi.org/10.1016/0165-2125(94)00049-B
22. Babich V. M. On evaluation of the diffraction coefficients for arbitrary "nonsingular" directions of a smooth convex cone / V. M. Babich, D. B. Dement'ev, B. A. Samokish, V. P. Smyshlyaev // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2000. – Vol. 60, № 2. – P. 536–573. http://dx.doi.org/10.1137/S003613999833366X
23. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. / В.А. Боровиков – М.: Наука, 1966. – 455 с.
24. Popov A. Uniform asymptotics of the wave diffracted by a cone of arbitrary cross-section / A. Popov, A. Ladyzhensky, S. Khoziosky // Russ. J. Math. Phys. – 2009. – Vol. 16, № 2. – P. 296–299. http://dx.doi.org/10.1134/S1061920809020137
25. Satterwhite R. Diffraction by a quarter plane, the exact solution, and some numerical results / R. Satterwhite// IEEE Trans. Antennas Propag. – 1974. – Vol. 22, № 3. – P. 500–503. http://dx.doi.org/10.1109/TAP.1974.1140803
26. Hansen T. B. Corner diffraction coefficients for the quarter plane / T. B. Hansen // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1991. – Vol. 39, № 2. – P. 976–984. http://dx.doi.org/10.1109/8.86918
27. Hansen T. B. Diffraction by a plane angular sector, a new derivation / T. B. Hansen // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1990. – Vol. 38, № 11. –P. 1892–1894. http://dx.doi.org/10.1109/8.102757
28. Albani M. On Radlow's quarter-plane diffraction solution / M. Albani // Radio Science. – 2007. – Vol. 42, № 6 http://dx.doi.org/10.1029/2006RS003528
29. Radlow J. Diffraction by a quarter-plane / J. Radlow // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1961. – Vol. 8, № 2 – P. 139–158. http://dx.doi.org/10.1007/BF00277435
30. Shanin A. V. Modified Smyshlyaev's formulae for the problem of diffraction of a plane wave by an ideal quarter-plane / A. V. Shanin // Wave motion. – 2005. – Vol. 41, № 1. – P. 79–93. http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.05.005
31. Skelton E. A. Embedding formulae for scattering by three-dimensional structures / E. A. Skelton, R. V. Craster, A. V. Shanin, V. Valyaev // Wave motion. – 2010. – Vol. 47, № 5. – P. 299–317. http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2009.11.006

32. Valyaev V. Embedding formulae for Laplace–Beltrami problems on the sphere with a cut / V. Valyaev, A. Shanin // Wave Motion. – 2012. – Vol. 49, № 1. – P. 83–92. http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2011.07.004
33. Assier R. C. On the diffraction of acoustic waves by a quarter-plane / R. C. Assier, N. Peake // Wave Motion. – 2012. – Vol. 49, № 1. – P. 64–82. http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2011.07.003
34. Budaev B. Diffraction of a plane wave by a sector with Dirichlet or Neumann boundary conditions / B. Budaev, D. Bogy // IEEE Trans. Antennas. Propag. – 2005. – Vol. 53, № 2. – P. 711–718. http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2004.841303
35. Lyalinov M. A. Scattering of acoustic waves by a sector / M. A. Lyalinov // Wave Motion. – 2013. – Vol. 50, № 4. – P. 739–762. http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.02.001
36. Antipov Y. A. Diffraction of a plane wave by a circular cone with an impedance boundary condition / Y. A. Antipov // SIAM J. Appl. Math. – 2002. – Vol. 62, № 4. – P. 1122–1152. http://dx.doi.org/10.1137/S0036139900363324
37. Лялинов М. А. О дифракции плоской волны на импедансном конусе / М. А. Лялинов // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 2003. – Т. 297. – С. 191–215.
38. Bernard J. M. L. Analytical-numerical calculation of diffraction coefficients for a circular impedance cone / J. M. L. Bernard, M. A. Lyalinov , N. Y. Zhu // IEEE Trans. Antennas. Propag. – 2008. – Vol. 56, № 6. – P. 1616–1623.
39. Lyalinov M. A. Scattering of an acoustic axially symmetric surface wave propagating to the vertex of a right-circular impedance cone / M. A. Lyalinov // Wave Motion. – 2010. – Vol. 47, № 4. – P. 241–252. http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2009.10.006
40. Lyalinov M. A. The far field asymptotics in the problem of diffraction of an acoustic plane wave by an impedance cone / M. A. Lyalinov // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2009. – Vol. 16, № 2. – P. 277–286.
41. Bernard J.-M. L. Diffraction of scalar waves by an impedance cone of an arbitrary cross-section / J.-M. L. Bernard, M. A. Lyalinov // Wave Motion. – 2001. – Vol. 33, № 2. – P. 155–181. http://dx.doi.org/10.1016/S0165-2125(00)00055-X

42. Bernard J.-M. L. Analytical-numerical calculation of diffraction coefficients for a circular impedance cone / J.-M.L. Bernard, M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu // IEEE Trans. Antennas. Propag. – 2008. – Vol. 56, № 6. – P. 1616–1622. http://dx.doi.org/ 10.1109/TAP.2008.923349

43. Лялинов М. А. Об интегральном уравнении в задаче дифракции плоской волны на прозрачном круговом конусе / М. А. Лялинов // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 2004. – Т. 308. – С. 101–123.

44. Lyalinov M. A. Acoustic scattering of a plane wave by a circular penetrable cone / M. A. Lyalinov // Wave Motion. – 2011. – Vol. 48, № 1. – P. 62–82. http://dx.doi.org/ 10.1016/j.wavemoti.2010.07.002

45. Lyalinov M. A. Acoustic scattering by a circular semi-transparent conical surface / M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu // J. Eng. Math. – 2007. – Vol. 59, №4. – P. 385–398. http://dx.doi.org/10.1007/s10665-007-9171-5

46. Huthwaite P. On the measurement of ultrasound transmission through a penetrable acoustic cone / P. Huthwait, F. Simonetti // SPIE Medical Imaging. – International Society for Optics and Photonics, 2011. – P. 79681H–79681H-8.

47. Вайслейб Ю. В. Рассеяние звуковых волн на конечном конусе / Ю. В. Вайслейб // Акуст. журн. – 1971. – Т. 17, № 1. – С. 33–42.

48. Leitner A. Radiation by disks and conical structures / A. Leitner, C. Wells // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1956. – Vol. 4, № 4. – P. 637–640. http://dx.doi.org/ 10.1109/TAP.1956.1144446

49. Вовк И. В. Излучение звуковой волны из полого конечного конуса / И. В. Вовк, В. Т. Гринченко // Линейные краевые задачи мат. физики. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 129–139.

50. Keller J. B. Geometrical theory of diffraction / J. B. Keller // J. Opt. Soc. Am. – 1962. – Vol. 52, № 2. – P. 116–130. http://dx.doi.org/10.1364/JOSA.52.000116

51. Боровиков В. А. Геометрическая теория дифракции / В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер – М.: Связь, 1978. – 247 с.

52. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции / П. Я. Уфимцев. – М.: Сов. радио, 1962. – 242 с.

53. Keller J. B. Backscattering from a finite cone / J. B. Keller // IEEE Trans. Antennas. Propag. – 1960. – Vol. 8, № 2. – P.175–182 http://dx.doi.org/ 10.1109/ TAP.1960.1144832
54. Ufimtsev P. Y. Fundamentals of the physical theory of diffraction. – John Wiley & Sons, 2007. http://dx.doi.org/10.1002/0470109017
55. Wiener F. M. Notes on sound diffraction by rigid circular cones / F. M. Wiener // J. Acoust. Soc. Am. – 1948. – Vol. 20, № 4. – P. 367–369. http://dx.doi.org/ 10.1121/1.1906386
56. Wiener F. M. The diffraction of sound by rigid disks and rigid square plates / F. M. Wiener // J. Acoust. Soc. Am. – 1949. – Vol. 21, № 4. – P. 334–347. http:// dx.doi.org/ 10.1121/1.1906518
57. Spence R. D. The diffraction of sound by circular disks and apertures / R. D. Spence // J. Acoust. Soc. Am. – 1948. – Vol. 20, № 4. – P. 380–386. http://dx.doi.org/10.1121/1.1906389
58. Bouwkamp C. J. Theoretical and numerical treatment of diffraction through a circular aperture / C. J. Bouwkamp // IEEE Trans. Antennas. Propag. – 1970. – Vol. 18, № 2. – P. 152–176. http://dx.doi.org/10.1109/TAP.1970.1139646
59. Вовк И. В. Новый подход к оценке акустических свойств излучателя звука в виде диска / И. В. Вовк, В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура // Акуст. вісн. – Т. 11, №3. – 2008. – С. 13–26.
60. Jones D. S. A new method for calculating scattering with particular reference to the circular disc / D. S. Jones // Comm. Pure Appl. Math. – 1956. – Vol. 9. – № 4. – P. 713–746. http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160090406
61. Wolfe P. Diffraction of a plane wave by a circular disk \ P. Wolfe \\ J. Math. Anal. Appl. – 1979. – Vol. 67, № 1. – 35–57. http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(79)90005-2
62. Yang S. A. An investigation into integral equation methods involving nearly singular kernels for acoustic scattering / S. A. Yang // J. Sound Vib. – 2000. – Vol. 234, №2. – P. 225–239. http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1999.2875

63. Collins W. D. On the solution of some axisymmetric boundary value problems by means of integral equations / W. D. Collins // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1961. – Vol. 14, №1. – P. 101–117. http://dx.doi.org/10.1093/qjmam/14.1.101

64. Бражникова Л. Н. Об одном методе исследования задачи о дифракции на круглом диске / Л. Н. Бражникова, В. Г. Сологуб // Акуст. журн.– 1973. – Т. 19, № 2.– С. 280–283.

65. Хижняк А. Н. Дифракция плоской волни на тонком диске / А. Н. Хижняк // Акуст. журн.– 1989. –Т. 35, № 5.– С. 929–933.

66. Vinogradov S. S. Canonical problems in scattering and potential theory part II: Acoustic and electromagnetic diffraction by canonical structures. / S. S. Vinogradov, P. D. Smith, E. D. Vinogradova. – Monographs & Surveys in Pure & Applied Math, 2002. http://dx.doi.org/10.1201/9780849387067

67. Jones D. S. Diffraction at high frequencies by a circular disc / D. S. Jones // Math. Proc. Cambridge. – 1965. – Vol. 61, № 01. – P. 223–245. http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100038810

68. Williams W. E. High frequency diffraction by a circular disc / W. E. Williams // Math. Proc. Cambridge. – 1972. – Vol. 71, № 02. – P. 423–430. http://dx.doi.org/10.1017/ S0305004100050659

69. Сологуб В. Г. Коротковолновая асимптотика решения задачи о дифракции на круглом диске / В. Г. Сологуб // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1972. – Т. 12, № 2.– С. 135–164.

70. Spence R. D. A note on the Kirchhoff approximation in diffraction theory / R. D. Spence // J. Acoust. Soc. Am. – 1949. – Vol. 21. – № 2. – P. 98–100. http://dx.doi.org/10.1121/1.1906489

71. Leitner A. Diffraction of sound by a circular disk / A. Leitner // J. Acoust. Soc. Am. – 1949. – Vol. 21, № 4. – P. 331–334. http://dx.doi.org/10.1121/1.1906517

72. Keller J. B. Diffraction by an aperture / J. B.Keller// J. Appl. Phys.– 1957.– Vol. 28, № 4.– P. 426–444. http://dx.doi.org/10.1063/1.1722767

73. Хёнл Х. Теория дифракции. / Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. – М.: Мир, 1964. – 428 с.

74. Kristensson G. The *T* matrix for acoustic and electromagnetic scattering by circular disks / G. Kristensson, P. C. Waterman // J. Acoust. Soc. Am. – 1982. – Vol. 72, № 5. – P. 1612–1625. http://dx.doi.org/10.1121/1.388497

75. Chandrasekhar B. Acoustic scattering from complex shaped three dimensional structures / B. Chandrasekhar, S. M. Rao // CMES-COMP MODEL ENG – 2005. – Vol. 8, № 2. – P. 105–118.

76. Wiener F. M. The diffraction of sound by rigid disks and rigid square plates / F. M. Wiener // J. Acoust. Soc. Am. – 1949. – Vol. 21, № 4. – P. 334–347. http://dx.doi.org/ 10.1121/1.1906518

77. Northover F. H. The diffraction of electromagnetic waves around a finite, perfectly conducting cone Pt.1. The mathematical solution / F. H. Northover // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – Vol. 10, № 1. – P. 37–49. http://dx.doi.org/10.1016/ 0022-247X(65)90145-9

78. Northover F. H. The diffraction of electric waves around a finite, perfectly conducting cone. Pt.2. The field singularities / F. H. Northhover // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – Vol. 10, № 1. – P. 50–69. http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(65)90146-0

79. Pridmore-Brown D. C. A Wiener-Hopf solution of a radiation problem in conical geometry / D. C. Pridmore-Brown // J. Math. Phys. – 1968. – Vol. 47, № 1–4. – P. 79–94. http://dx.doi.org/10.1002/sapm196847179

80. Шестопалов В. П. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов. – Киев: Наук. думка. – 1984. – 294 с.

81. Syed A. The diffraction of arbitrary electromagnetic field by a finite perfectly conducting cone / A. Syed // J. Nat. Sci. Math. – 1981.– Vol. 2, № 1.–P. 85–114.

82. Senior T. High-frequency backscattering from a finite cone / T. Senior, P. Uslenghi // Radio Sci. – 1971. – Vol. 6, №3. – P. 393–406. http://dx.doi.org/ 10.1029/RS006i003p00393

83. Куриляк Д. Б. О симметричном электромагнитном облучении конечного конуса / Д. Б. Куриляк, З. Т. Назарчук // Радиофизика и радиоастрономия. – 2000.– Т. 5, №1. – С. 29 – 37.

84. Куриляк Д. Б. Осесимметричное поле электрического диполя над полубесконечным конусом с усеченной вершиной I. Сопоставление метода рядов и метода интегральных преобразований / Д. Б. Куриляк // Радиофизика и радиоастрономия. – 1999. – Т. 4, № 2. – С. 121–128.

85. Куриляк Д.Б. Осесимметричное поле электрического диполя над полубесконечным конусом с усеченной вершиной II. Численное моделирование / Д. Б. Куриляк // Радиофизика и радиоастрономия. – 2000. – Т. 5, № 3. – С. 284–290.

86. Куриляк Д. Б. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. / Д. Б. Куриляк, З. Т. Назарчук. – Київ: Наук. думка, 2006. – 280 с.

87. Тріщук О. Б. Збудження конічних та сферо-конічних структур елементарними джерелами електромагнітного поля: Дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.04.03. – Харків, 2014.– С. 141.

88. Гошин Г. Г. Граничние задачи електродинамики в конических областях / Г. Г. Гошин. – Томск: Узд-во Томского ун-та.– 1987. – 128 с.

89. Дорошенко В. А. Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых конических структурах / В. А. Дорошенко, В. Ф. Кравченко. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.

90. Шарабура О. М. Дифракція осесиметричних електромагнітних хвиль на металевих біконічних поверхнях з краями: Дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.04.03. – Харків, 2015.– С. 148.

91. Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости / А.Ф.Улитко – Киев: Академпериодика, 2002. – 341с.

92. Улітко А. Ф. Фрикційний контакт жорсткого конуса з пружним півпростором / А. Ф. Улітко, В. І. Острик// Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2012. – № 55, № 4. – С. 106–116.

93. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В. Т. Гринченко. – Киев: Наукова думка, 1978. – 321 с.

94. Вайсфельд Н.Д. Осесимметричная задача теории упругости для кругового конуса с острием при учете его собственного веса / Н.Д. Вайсфельд, А.В. Реут //

Вісник ОНУ. – 2012. – Т. 17, № 3. – С. 99 – 107.

95. Вайсфельд Н. Д. Осесимметричная задача о напряженном состоянии дважды усеченного конуса / Вайсфельд Н. Д., Попов Г. Я., Реут А. В. // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2015. – Т. 56, № 1. – С. 185–196.

96. Реут А. В. Осесиметричні мішані задачі теорії пружності для зрізаного скінченного конуса: Дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Одеса, 2016.– С. 106.

97. Гринченко В. Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках / В. Т. Гринченко , И. В. Вовк. – Киев: Наукова думка, 1986. – 240 с.

98. Фельд Я. Н. Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых металических поверхностях / Я. Н. Фельд // Радиотехника и электроника. – 1975. – Т. 20, № 1–4. – С. 28–38.

99. Грінченко В. Т. Основи акустики: Навчальний посібник / В. Т. Грінченко, І. В. Вовк, В. Т. Маципура. – Київ: Наукова думка, 2007. – 640 с.

100. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

101. Гобсон Е. Теория сферических и эллипсоидальных функций. / Е. Гобсон – М.: ИЛ, 1952. – 370 с.

102. Kuryliak D. B. Convolution type operators for wave diffraction by conical structures / D. B. Kuryliak, Z. T. Nazarchuk // Radio Sci. – 2008. – 43. http://dx.doi.org/10.1029/2007RS003792

103. Миттра Р. Аналитические методы теории волноводов. / Р. Миттра, С. Ли. – М.: Мир, 1974. – 327 с.

104. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. \ Е. Л. Шендеров – Л.: Судостроение, 1989.– 304 с.

105. Levine H. On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. I / H. Levine, J. Schwinger // Phys. Rev.– 1948.– Vol. 74, № 8.– P. 958–974.

106. Levine H. On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. II / H. Levine, J. Schwinger // Phys. Rev. – 1949.– Vol. 75, № 9.– P. 1423–1432.

107. Bekefi G. Diffraction of sound waves by a circular aperture / G. Bekefi // J. Acoust. Soc. Amer. – 1953.– Vol. 25, № 2. – P. 205–211.

108. Obermüller C. Far field characterization of diffracting circular apertures / C. Obermüller, K. Karrai // Appl. Phys. Letters. – 1995. – Vol. 67, № 23. – P. 3408–3410.

109. Kristensson G. Acoustic scattering by a soft elliptic disk / G. Kristensson // J. Sound Vib. – 1985. – Vol. 103, № 4. – P. 487–498. http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X(85)80017-1

110. Куриляк Д. Б. Дифракція плоскої акустичної хвилі на скінченному жорсткому конусі при осьовому опроміненні / Д. Б. Куриляк, В. О. Лисечко // Акуст. вісн. – 2013–2014. – Т. 16, № 2. – С. 8–17.

111. Куриляк Д. Б. Дифракція плоскої акустичної хвилі на скінченному м'якому конусі при осьовому опроміненні / Д. Б. Куриляк, В. О. Лисечко // Акуст. вісн. – 2013–2014. – Т. 16, № 3. – С. 23–30.

112. Куриляк Д. Б. Дифракція плоскої акустичної хвилі на напівнескінченному м'якому конусі зі зрізаною вершиною / Д. Б. Куриляк, В. О. Лисечко // Акуст. вісн. – 2013–2014. – Т. 16, № 4. – С. 33–41.

113. Kuryliak D. B. Diffraction of a plane acoustic wave from a finite soft (rigid) cone in axial irradiation / D. B. Kuryliak, Z. T. Nazarchuk, V. O. Lysechko // Open Journal of Acoustics. – 2015 –Vol. 5, №4. – P. 193–206. http://dx.doi.org/10.4236/oja.2015.54015

114. Куриляк Д. Б. Розсіювання плоскої акустичної хвилі на жорстких зрізаному та скінченному конусах / Д. Б. Куриляк, В. О. Лисечко // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2015. – Спецвипуск – С. 143–148.

115. Лисечко В. О. Опромінення скінченого конуса плоскою звуковою хвилею / В. О. Лисечко, О. М. Шарабура // Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: відкрита наукова конференція молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України: Матеріали конференції КМН-2013 / Національна академія наук України, Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України. – Львів, 2013. – С. 308–311.

116. Куриляк Д. Б. Дифракція плоскої акустичної хвилі на скінченному жорсткому (м'якому) конусі / Д. Б. Куриляк, В. О. Лисечко // Міжнародна

математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчю від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23–24 квітня 2014 р., м. Київ, Україна: Матеріали конференції. – К., 2014. – С. 80.
117. Лисечко В. О. Розсіяння плоскої акустичної хвилі скінченним конусом / В. О. Лисечко, Д. Б. Куриляк // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 15–17 травня 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування / Інститут математики НАН України [та ін.]. – К., 2014. – С. 195.
118. Куриляк Д. Дифракція плоскої акустичної хвилі на скінченному м'якому (жорсткому) конусі при осьовому опроміненні / Д. Куриляк, В. Лисечко // Механіка руйнування матеріалів і конструкцій: Зб. наук. пр. 5-ої Міжнародної конференції (24–27 червня 2014 р., Львів) / під. заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів, 2014. – С. 85–90.
119. Куриляк Д. Розсіяння плоскої звукової хвилі на скінченному м'якому (жорсткому) конусі / Д. Куриляк, В. Лисечко // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: [наук. пр.] / під заг. ред. І. О. Луковського, Г .С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Львів, 2014. – С. 359–361.
120. Kuryliak D. Diffraction of the sound wave by a finite soft (rigid) cone / D. Kuryliak, V. Lysechko // Proc. of XIXth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). − Tbilisi, 2014. – P. 160–162.
121. Лисечко В. О. Дифракція плоскої акустичної хвилі на скінченному м'якому конусі при осьовому опроміненні / В. О. Лисечко // III науково-технічна конференція «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації», 25–26 вересня 2014 р., Львів: Зб. пр. / Національна академія наук України, Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України. – Львів, 2014. – С. 143–144.
122. Куриляк Д. Б. Дифракція плоскої акустичної хвилі на м'яких зрізаному і скінченному конусах при осьовому опроміненні / Д. Б. Куриляк, В. О. Лисечко

// Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 14–15 травня 2015 р., Київ: Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування / Інститут математики НАН України [та ін.]. – К., 2015. – С. 148.
123. Лисечко В. Розсіяння плоскої акустичної хвилі на напівнескінченному м'якому конусі зі зрізаною вершиною [Електронний ресурс] / В. Лисечко // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання–2015», 26–28 травня 2015р., Львів. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: *http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/ theses/Lysechko.pdf*. – Назва з екрану. – Дата звернення: 06.12.2015.
124. Kuryliak D. Functional series equations for acoustic axially symmetric wave diffraction by finite soft and rigid cone / D. Kuryliak, V. Lysechko // International V. Skorobohatko mathematical conference (August 25–28, Drohobych, Ukraine): Abstracts. – Lviv, 2015. – P. 89.
125. Куриляк Д. Б. Розсіювання плоскої акустичної хвилі на жорстких зрізаному та скінченному конусах / Д. Б. Куриляк, В. О. Лисечко // III Міжнародна конференція «Сучасні проблеми механіки»: Матеріали конференції, Київ, Україна, 27–29 серпня 2015. – К., 2015. – С. 44.
126. Lysechko V. Diffraction of a plane acoustic wave by a semi-infinite truncated rigid cone in axial irradiation [Електронний ресурс] / V. Lysechko // International Young Scientists Forum on Applied Physics. – Dnipropetrovsk, 2015. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM). – Заголовок з етикетки диску.
127. Kuryliak D. Diffraction of the sound wave from a soft disc / D. Kuryliak, V. Lysechko // Proc. of XXth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). − Lviv, 2015. – P. 179–182.
128. Куриляк Д. Б. Бокове опромінення м'якого скінченного конуса плоскою акустичною хвилею / Д. Б. Куриляк, В. О. Лисечко // Акустичний симпозіум «КОНСОНАНС-2015», Київ, 29–30 вересня 2015 р: зб. наук. пр. / Національна академія наук України, Інститут гідромеханіки. – К.: ІГМ НАНУ, 2015. – С. 129–134.

129. Лисечко В. О. Дифракція звукової хвилі на жорсткому диску / В. О. Лисечко // Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: відкрита наукова конференція молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України: Матеріали конференції КМН-2015 / Національна академія наук України, Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України. – Львів, 2015. – С. 236–239.