ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2016. Том 18, N 2. С. 76 – 80

УДК 532.5

ПОТЕНЦІАЛ ШВИДКОСТІ СТАЦІОНАРНОГО РУХУ В КАНАЛІ СИСТЕМИ ДВОХ ОДИНИЧНИХ ДЖЕРЕЛ

О. Г. СТЕЦЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України,
ул. Желябова, 8/4, 03680, Киев,
e-mail: office@hydromech.com.ua

Одержано 07.04.2016

Одержано аналітичний розв'язок для потенціалу швидкості течії, генерованої стаціонарно рухомою системою двох одиничних джерел, симетрично розміщених відносно вертикальної площини симетрії каналу з прямокутною формою поперечного перерізу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стаціонарний рух, джерело, канал, потенціал швидкості

Получено аналитическое решение для потенциала скорости течения, генерированного стационарно движущейся системой двух единичных источников, симметрично раположенных относительно вертикальной плоскости симетрии канала с прямоугольной формой поперечного сечения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: стационарное движение, источник, канал, потенциал скорости

An analytic solution for flow velosity potential generated by a stationary moving system of two singular sources symmetricaly located with respect to a vertical plane of symmetry of a channel of rectangular cross section is obtained.

KEY WORDS: stationary movemen, source, channel, velosity potencial

ВСТУП

Одним із головних напрямків дослідження гідродинаміки руху суден є підхід, пов'язаний з використанням потенціалу швидкості одиночного рухомого джерела [1–4]. Якщо такий потенціал знайдено у вигляді, який задовольняє всім граничним умовам, то розв'язок лінійних задач визначення збуреного рухом судна або підводного об'єкта, потенціалу швидкості в усій області середовища знаходиться простим інтегруванням по змоченій поверхні відповідного тіла вкладу від розподілених там джерел певної інтенсивності. Характер цього розподілу визначається з граничної умови непротікання. Такий метод дозволяє значно зменшити кількість невідомих при чисельній реалізації розв'язку задачі.

Визначальними у застосуванні такого підходу для розв'азання означеного класу задач стали роботи Кочина М.Є. [2] для глибокого моря та Хаскінда М.Д. [3] для шару рідини скінченої глибини, де знайдені розв'язки для відповідних потенціалів швидкості одиничного джерела. Використання цих потенціалів дозволяє одержати у вигляді квадратур розв'язок гідродинамічної задачі руху судна при його симетричному обтіканні. При несиметричному обтіканні необхідно використовувати також потенціали швидкості рухомих диполів. Вони можуть бути визначені диференціюванням потенціалів джерел у напрямку вісей цих диполів. Виконані дослідження в цьому напрямку дозволили ще у 50–70-х роках минулого століття одержати загальні розв'язки задач гідродинаміки руху суден у вигляді квадратур [5, 6] як для глибоких, так і для мілких морів.

Для каналів з прямокутною формою поперечного перерізу відповідні задачі розв'язувалися з використанням нескінченої системи джерел, дзеркально відображених відносно бічних стінок до рухомих джерел. Це дає можливість виконати граничні умови на бічних стінках каналу. Аналіз кінематичної картини обтікання тонкого судна і його динамічних хагактеристик, одержаних з використанням потенціалу одиничного джерела [7], показав добру узгодженість їх з попередніми роботами [8, 9], в яких використовувалися інші підходи для знаходження збуреного судном потенціалу швидкості.

Розрахунки хвильових полів за суднами та їх гідродинамічних характеристик з використанням потенціалу швидкості одиничного джерела виявилось складною обчислювальною задачею. Це пов'язано як з необхідністю знаходженням інтенсивності розподілених по корпусу судна джерел, так і з труднощами обчислення у виразі для потенціалу одиничного джерела подвійного інтегралу, в якому кожен із обох є збіжним невласним інтегралом. Відмічені трудноці є головним недоліком підходу з використанням таких потенціалів одиничних джерел, який обмежив його застосування. Розрахунки конкретних суден стали можливими лише з використанням електронно-обчислювальних машин. Це дозволило одержати вказаним методом розв'язки ряду лінійних задач для тонких тіл, коли розподіл інтенсивності джерел по поверхні судна відомий і визначається геометрією його обводів [6]. Для суден з довільними формами обводів розрахунки цим методом не проводились.

Незважаючи на постійно зростаючі можливості обчислювальних систем, розрахунок навіть лінійних режимів руху судна з реальними обводами залишається складною обчислювальною проблемою. У зв'язку з цим, домінантним напрямком розробки методик відповідних розрахунків стали чисельні методи. В роботі Гедда Г.Е. [10] розроблено метод граничних елементів (панелей) для виконання граничних умов на тілі і на вільній поверхні. Даусон С.В. [11] розробив метод розрахунку, який дозволяє враховувати умови розсіювання поверхневих хвиль попереду судна і за ним. Характерною особливістю цих методів є використання потенціалу одиничного джерела для необмеженого середовища, який співпадає там з функцією Гріна для рівняння Лапласа. Ці підходи набули широкого застосування. Нині в дослідних центрах, пов'язаних з суднобудуванням, для розрахунку гідродинаміки руху суден розроблені комплекси комп'ютерних програм, на основі яких створено ряд обчислювальних пакетів прикладного призначеня.

Аналіз розв'язання задач гідродинаміки руху суден показує, що у випадку знаходження потенціалу одиничного джерела, який задовольняє всім граничним умовам, крім умови на змоченій поверхні судна, у вигляді, який не потребує великої кількості операцій для його обчислення у заданій точці, ефективність підходу з використанням таких потенціалів до відміченого класу задач різко зростає.

Саме з цією метою виконані дослідження даної роботи, де одержано аналітичний розв'язок лінійної стаціонарної задачі знаходження потенціалу системи двох одиничних джерел, які рухаються під вільною поверхнею рідини в каналі з прямокутною формою поперечного перерізу і знаходяться симетрично відносно вертикальної площини, що проходить через поздовжню вісь каналу.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розв'язується лінійна задача знаходження потенціалу швидкості збуреного руху $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, обумовленого рівномірним рухом зі швидкістю U системи двох одиничних джерел під вільною поверхнею ідеальної нестисливої рідини густиною ρ в каналі з прямокутною формою поперечного перерізу. Джерела розміщені симетрично відносно вертикальної площини, що проходить через поздовжню вісь каналу. Ширина каналу $2l$, а товщина шару рідини в ньому h. Вибирається рухома система координат, початок якої знаходиться на вільній поверхні рідини на вісі симетрії каналу (посередині між джерелами), при цьому вісь $0x$ направлена в сторону напрямку руху джерел, а вісь $0z$ направлена вгору.

В безрозмірній формі, де в якості масштабів вибрано: довжини – товщину водного шару h, тиску – ρU^2, потенціалу швидкості – Uh, відповідна задача для знаходження $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) + G_1(x, y, z, \xi, -\eta, \zeta)$, де $G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ – потенціал відповідного одиничного джерела рухомої системи (ξ, η, ζ – координати джерела), формулюється у вигляді

$$\Delta G = 0 \qquad (1)$$

з граничними умовами

$$\lambda \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{при } z = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = -1, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } y = \pm l, \qquad (4)$$

та умовами випромінювання

$$G \to 0 \qquad \text{при } x \to \infty. \qquad (5)$$

Тут $\Delta = \dfrac{\partial}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y^2} + \dfrac{\partial}{\partial z^2}$ – трьохвимірний оператор Лапласа, $\lambda = \dfrac{gh}{U^2}$ – обернене значення квадрату числа Фруда.

2. СХЕМА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$

.

Для знаходження $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ використовується підхід, подібний до застосованого М.Д.Хаскіндом [3] для знаходження потенціалу одиничного джерела, яке рівномірно рухається в шарі рідини скінченої глибини, коли шуканий розв'язок знайдено у вигляді

$$G_1 = G_{1r} + G_{1h},$$

де

$$G_{1r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \ ,$$

$$r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\,,$$
$$r_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+2+\zeta)^2},$$

а $G_{1h}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ – добавочна функція, яка враховує вплив вільної поверхні на G_1 і сама задовольняє умовам на дні і вільній поверхні.

Для знаходження G_{1h} використано інтегральне представлення для G_{1r}, яке задовольняє граничній умові на дні:

$$G_{1r} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left[e^{-k|z-\zeta|} + e^{-k(z+2+\zeta)}\right] e^{ik\omega} d\theta dk,$$

де $\omega = (x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta$. Розв'язок для G_{1h} знаходився у вигляді подібного представлення, а гранична умова на вільній поверхні для неї визначалась з відповідного представлення там складової G_{1r}.

Ця функція одержана у [3] у вигляді (в прийнятих тут позначеннях і обезрозміреній формі)

$$G_{1h} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-k}(k\cos^2\theta + \lambda)}{\lambda \mathrm{sh}\, k - k\cos^2\theta \mathrm{ch}\, k}\times$$
$$\times \mathrm{ch}\,[k(\zeta+h)]\mathrm{ch}\,[k(z+h)]e^{ik\omega}dkd\theta.$$

З використанням цього виразу і пов'язані обчислювальні труднощі підходу при застосуванні потенціалу одиничного джерела для розв'язання задач гідродинаміки рухомого судна.

Подібний метод застосовується і в даній задачі, розв"язок якої знаходиться у вигляді

$$G = G_r(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) + G_h(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) \qquad (6)$$

3. ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ $G_r(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$

.

Для знаходження $G_r(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ використовується рівнозначне представлення виразу для G_{1r} після введення там горизонтальних хвильових чисел $k_1 = k\cos\theta$ і $k_2 = k\sin\theta$, де $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$:

$$G_{1r} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} De^{i[k_1(x-\xi)+k_2(y-\eta)]}dk_1dk_2.$$

Тут $\quad D(k_1,k_2,z) = e^{-k|z-\zeta|} + e^{-k(z+2+\zeta)}$.

Для випадку руху двох симетрично розташованих відносно вертикальної площини $(\xi 0 \zeta)$ одиничних джерел з наведеного вище для

$$G_r = G_{1r}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) + G_{1r}(x,y,z,\xi,-\eta,\zeta)$$

має місце симетричне по y і η представлення

$$G_r = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} De^{ik_1(x-\xi)}\cos(k_2 y)\cos(k_2\eta)dk_1dk_2.$$

У випадку руху цієї системи джерел у каналі для виконання граничної умови на бічних стінках використовується метод розміщення для кожного з джерел нескінченої системи дзеркально відображених відносно цих стінок відповідних одиничних джерел. Тоді ця складова розв'язку $G_r(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = G_{1r}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) + G_{1r}(x,y,z,\xi,-\eta,\zeta)$, що має задовольняти умові рівності нулю її похідної по y, представляється як [7]

$$G_r = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} D\times$$
$$\times e^{ik_1(x-\xi)-2ik_2nl}\cos(k_2y)\cos(k_2\eta)dk_1dk_2.$$

Інтегрування по k_2 в цьому виразі може бути виконане з використанням формули Пуассона:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(t)e^{int}dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\psi(2\pi m).$$

В результаті складова $G_r(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ набуває вигляду, який задовольняє граничним умовам на дні і бічних стінках каналу:

$$G_r = \frac{2}{l}\sum_{m=0}^{\infty} a_m\cos\left(\frac{\pi m y}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi m\eta}{l}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_m e^{ik_1(x-\xi)}dk_1. \qquad (7)$$

Тут $\quad D_m = e^{-k_m|z-\zeta|} + e^{-k_m(z+2+\zeta)}$, $a_m = 0.5$ при $m = 0$ і $a_m = 1$ при $m \geq 1$, а $k_m = \sqrt{k_1^2 + \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2}$. При $m = 0$ $k_m = |k_1|$.

Одержаний вираз для G_r визначає граничну умову на вільній поверхні для складової G_h таким чином, щоб там виконувалась відповідна умова для $G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$.

4. ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ $G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$

.

Розв'язок для складової

$$G_h = G_{1h}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) + G_{1h}(x,y,z,\xi,-\eta,\zeta)$$

знаходиться у вигляді інтегрального представлення, відповідного по структурі виразу (7), в якому з очевидністю виконується гранична умова на бічних стінках каналу.

$$G_h = \frac{2}{l}\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{\pi m y}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi m \eta}{l}\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(x-\xi)} \bar{G}_{hm}(k_1, z, \xi, \zeta) dk_1. \qquad (8)$$

З (1)–(5) (7)та (8) для $\bar{G}_{hm}$ формулюється гранична задача ($'$ означає похідну по z):

$$\bar{G}''_{hm} - k_1^2 \bar{G}_{hm} = 0. \qquad (9)$$

з граничними умовами

$$k_m \lambda \bar{G}'_{hm} - k_1^2 \bar{G}_{hm} = b_m(\lambda k_m + k_1^2) \quad \text{при } z = 0\,, \qquad (10)$$

$$\bar{G}'_{hm} = 0 \qquad \text{при } z = -1\,, \qquad (11)$$

$$\bar{G}_{hm} \to 0 \qquad \text{при} x \to \infty\,. \qquad (12)$$

Для $m = 0$ має місце наступний розв'язок задачі (9)–(12):

$$\bar{G}_{h0} = \frac{b_0(\lambda\frac{|k_1|}{k_1} + k_1)}{\lambda \text{sh}\, k_1 - k_1 \text{ch}\, k_1} \text{ch}\,[k_1(z+1)]\,, \qquad (13)$$

де

$$b_0 = e^{-|k_1||\zeta|} + e^{-|k_1|(2+\zeta)},$$

а для $m \geq 1$

$$\bar{G}_{hm} = \frac{b_m(\lambda k_m + k_1^2)}{\lambda k_m \text{sh}\, k_m - k_1^2 \text{ch}\, k_m} \text{ch}\,[k_m(z+1)]\,, \qquad (14)$$

де

$$b_m = e^{-k_m|\zeta|} + e^{-k_m(2+\zeta)}.$$

В комплексній k_1-площині $\bar{G}_{hm}$ задовольняють умовам леми Жордана, тому для їх визначення використовується апарат теорії лишків. Ці функції в k_1-площині мають полюси в точках, де виконується рівність

$$\lambda k_m \text{sh}\, k_m - k_1^2 \text{ch}\, k_m = 0 \qquad (15)$$

а також точки розгалуження $k_1 = \pm\dfrac{i\pi m}{l}$ для всіх m.

Рівняння (15) для кожного з m має два дійсних коренів $\pm k_{1mr}$, які при $m = 0$ за умови $\lambda > 1$ ($Fr < 1$) представляють поперечні, а при $m \geq 1$ (для всіх λ) - поздовжні хвилі в каналі, та нескінчену множину чисто уявних коренів $\pm i k_{1mn}$. Функції $\bar{G}_{hm}$ для всіх m на протипежних берегах розрізів вздовж уявних осей не змінюють своїх значень, а обхід точок розгалкження недає вкладу у розв'язок. Отже, вклад у загальний розв'язок G_{hm} дають лише означені вище полюси.

В результаті, з (13)- (15) для

$$G_{hm} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(x-\xi)} \bar{G}_{hm}(k_1, z, \xi, \eta) dk_1$$

на підставі використання теореми Коші, після виділення дійсних частин одержаних виразів, мають місце наступні розв'язки, які задовольняють граничним умовам задачі (2)(3)(5):

$$G_{h0}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{4\pi b_{0r}(\lambda + k_{10r})}{(\lambda-1)\text{ch}\, k_{10r} - k_{10r}\text{sh}\, k_{10r}} \times \\ \times \text{ch}\,[k_{10r}(z+1)] \sin[k_{10r}(x-\xi)] H(\xi - x) + \\ +2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{0rn}(\lambda - k_{10r})}{(\lambda-1)\cos k_{10n} + k_{10n}\sin k_{10n}} \times \\ \times \cos[k_{10n}(z+1)] e^{-k_{10n}|x-\xi|}\,, \qquad (16)$$

$$G_{hm}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{4\pi k_{mr} b_{mr}(\lambda k_{mr} + k_{1mr}^2)}{k_{1mr} B_{mr}} \times \\ \times \text{ch}\,[k_{mr}(z+1)] \sin[k_{1mr}(x-\xi)] H(\xi - x) - \\ -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{mn}(\lambda k_{mn} b_{min} + k_{1mn}^2 b_{mrn})}{k_{1mn} B_{mn}} \times \\ \times \cos[k_{mn}(z+1)] e^{-k_{1mn}|x-\xi|}\,, \qquad (17)$$

де

$$B_{mr} = \lambda\left(1 - k_{1mr}^2\right) \text{sh}\, k_{mr} + k_{mr}(\lambda-2)\text{ch}\, k_{mr}\,,$$
$$B_{mn} = \left[\left(\lambda + k_{1mn}^2\right)\sin k_{mn} + k_{mn}(\lambda-2)\cos k_{mn}\right]\,,$$
$$k_{10r} > 0\,,\ k_{10n} > 0\,, k_{1mr} > 0\,,\ k_{1mn} > 0\,,$$
$$k_{mr} = \sqrt{k_{1mr}^2 + \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2}\,, k_{mn} = \sqrt{k_{1mn}^2 - \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2}\,,$$
$$b_{0r} = e^{-k_{10r}|\zeta|} + e^{-k_{10r}(2+\zeta)}\,,$$
$$b_{0rn} = \cos(k_{10n}|\zeta|) + \cos[k_{10n}(2+\zeta)],$$
$$b_{0in} = -\sin(k_{10n}|\zeta|) - \sin[k_{10n}(2+\zeta)]\,,$$
$$b_{mr} = e^{-k_{mr}|\zeta|} + e^{-k_{mr}(2+\zeta)}\,,$$
$$b_{mrn} = \cos(k_{mn}|\zeta|) + \cos[k_{mn}(2+\zeta)]\,,$$
$$b_{min} = -\sin(k_{mn}|\zeta|) - \sin[k_{mn}(2+\zeta)]\,,$$

а $H(\xi - x)$ – одинична функція Хевісайда.

Дійсні частини інтегралів розв'язку G_r у (7), використавши відомі вирази для інтегралів [14], можна одержати у явному вигляді:

для $m=0$

$$G_{r0I}=2\int\limits_0^\infty \cos[k_1(x-\xi)]\left[e^{-k_1|z-\zeta|}+e^{-k_1(z+2+\zeta)}\right]dk_1=$$

$$=\frac{2|z-\zeta|}{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}+\frac{2(z+2+\zeta)}{(x-\xi)^2+(z+2+\zeta)^2}\,,$$

і для $m\geq 1$

$$G_{rmI}=2\int\limits_0^\infty \cos[k_1(x-\xi)]D_m dk_1=\frac{2}{l}\left(I_{1m}+I_{2m}\right)\,,$$

де

$$I_{1m}=\frac{\pi m|z-\zeta|}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}}\times$$
$$\times K_1\left[\frac{\pi m}{l}\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}\right]\,,$$
$$I_{2m}=\frac{\pi m(z+2+\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z+2+\zeta)^2}}\times$$
$$\times K_1\left[\frac{\pi m}{l}\sqrt{(x-\xi)^2+(z+2+\zeta)^2}\right]\,,$$

а $K_1[\,]$ – модифіковані функції Бесселя.

З одержаного представлення для G_r та виразів (16), (17), які визначають розв'язки для G_{h0} та G_{hm}, шуканий розв'язок для потенціалу швидкості розглянутої системи одиничних джерел представляється аналітичним виразом

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{l}(G_{r0I}+G_{h0})+$$
$$+\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}(G_{rmI}+G_{hm})\cos\left(\frac{\pi m y}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi m\eta}{l}\right).\quad(18)$$

ЗАКЛЮЧЕННЯ

В роботі одержано розв'язок лінійної задачі знаходження потенціалу швидкості, генерованого системою двох одиничних джерел, які рухаються з постійною швидкістю в каналі з прямокутною формою поперечного перерізу і розташовані симетрично відносно вертикальної площини, що проходить через поздовжню вісь каналу. Розв'язок знайдено в аналітичному вигляді, що дозволяє ефективно використовувати його при розв'язанні лінійних задач гідродинаміки руху суден з симетричними обводами вздовж вісі каналу. Використання такого потенціалу в стаціонарних задачах руху судна в каналі зводить ці задачі до знаходження розподілу густини джерел лише на поверхні судна. Це суттєво зменшує кількість невідомих у сучасних методах чисельного розрахунку гідродинаміки руху суден, таких як панедьний метод і метод граничних елементів. Враховуючи відмічені переваги, використання одержаного розв'язку може бути корисним при розв'язанні лінійних задач гідродинаміки руху суден у каналах.

1. *Michell J.H.* The Wave -Resistance of a Ship // Philosophical Magasine.– 1898.– **45** , N 272.– P. 106–123.
2. *Кочин Н.Е.* О волновом сопротивлении и подьемной силе погруженных в жидкость тел.– Собр.соч. т.2: АН СССР, 1949.– 105 - 182 с.
3. *Хаскинд М.Д.* Общая теория волнового сопротивления при движении тела в жидкости конечной глубины // Прикладная математика и механика.– 1945.– **9**, N 3.– С. 257–264.
4. *Костюков А.А.* О формулах для вычисления волнового сопротивления и подьемной силы тел, погруженных в жидкость // Изв. Ан СССР, ОТН.– 1954.– N 9.– С. 235–242.
5. *Костюков А,А.* Теория корабельных волн и волнового сопротивления.– Ленинград: Судпромгиз, 1959.– 311 с.
6. *Басин А.М., Веледницкий И.О., Лязовицкий А.Г.* Гидродинамика судов на мелководье.– Ленинград: Судостроение, 1976.– 320 с.
7. *Костюков А.А.* О волнообразовании и волновом сопротивлении судов в ограниченном фарватере жидкости // Прикладная математика и механика.– 1955.– **19**, N 5.– С. 557–570.
8. *Келдыш М.В.Ю Седов Л.И.* Теория волнового сопротивления в канале конечной глубины // Труды конференции по теории волнового сопротивления.– Москва.– 1937.– С. 143–157.
9. *Сретенский А.М.* Теоретическое исследование о волновом сопротивлении // Труды ЦАГИ.– 1937.– вып. 9.– С. 47–52.
10. *Gadd G.E.* A method for computing the flow and surface wave pattern around full forms // Trans RINA 1976.– London.– 1976.– P. 207–220.
11. *Dowson C.W.* A practical computer method for solving wave problems // In: Proceedings of second Internationals Conference on Numerical Ship Hydrodynamics.– Berceley.– 1977.– P. 30–39.
12. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды.– Москва: Наука, ГРФМЛ, 1981.– 800 с.