ISSN 1561-9087 *Прикладна гідромеханіка. 2016. Том 18, N 2. С. 64 – 68*

УДК 532.59

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ НАЛИЧИИ ДОННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

И. Т. СЕЛЕЗОВ, С. А. САВЧЕНКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
ул. Желябова, 8/4, 03680, Киев, Украина
e-mail: selezov@yandex.ru

Получено 12.01.2016

Рассматривается задача о распространении нелинейных волн на воде над неоднородным дном, характеризуемая параметрами нелинейности α и дисперсии β. Получена система двух связанных эволюционных уравнений в случае малых одного порядка $\alpha \sim \beta$. Недетерминированность задачи о распаде солитона при распространении над неоднородным дном следует из представленных в этой статье и полученных Перегрином и Гримшоу нелинейно-дисперсионных аппроксимаций. Получены асимптотическим анализом эволюционные уравнения в случае донной неоднородности, зависящей от времени. Исследуется влияние основания Винклера и более общего двухпараметрического основания Пастернака на распространение волн.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: распространение волн, нелинейно–дисперсионное приближение, донная неоднородность, подвижное дно, упругое основание

Розглядається задача про поширення нелінійних хвиль на воді над неоднорідним дном, яка характеризується параметрами нелінійності α та дисперсії β. Одержано систему двох зв'язанних еволюційних рівнянь у випадку малих одного порядку $\alpha \sim \beta$. Недетермінованість задачі про розпад солітона при розповсюдженні над неоднорідним дном випливає із наведених у цій статті та одержаних Перегріном і Грімшоу нелінійно-дисперсійних апроксимацій. Одержано асимптотичним аналізом еволюційні рівняння у випадку донної неоднорідності, яка залежить від часу. Досліджується вплив основи Вінклера і більш загальної двухпараметричної основи Пастернака на розповсюдження хвиль.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: Ключові слова: розповсюдження хвиль, нелінійно–дисперсійне наближення, донна неоднорідність, рухоме дно, пружна основа

The problem of nonlinear water waves propagation over the inhomogeneous bottom, characterized by the parameters of nonlinearity α and dispersion β is considered. The system of two coupled evolution equations is obtained. Nondetermination of the problem on soliton disintegration at propagation over an inhomogeneous bottom follows from presented in this paper and obtained by Peregrine and Grimshow nonlinear-dispersive approximations. Evolution equations in the case of bottom inhomogeneity depending on time are obtained by asymptotic analysis. The effect of the Winkler's foundation and more general two-parametre Pasternak's foundation on wave propagation is investigated.

KEY WORDS: wave propagation, nonlinear–dispersive approximation, bottom inhomogeneity, moving bottom, elastic bed

ВВЕДЕНИЕ

Проблема исследования влияния неоднородности донной поверхности на распространение уединенных волн всегда была и остается актуальной [12, 16, 19]. Представляет интерес также проблема гашения поверхностных гравитационных волн при их подходе к берегу – это, прежде всего, затопленные волноломы различной формы, которые могут рассматриваться как донные неоднородности. Например, в работе [23] исследуются глубоководные комбинированные волноломы и их эффективность. В работе [22] проводится численное моделирование волновых сил, действующих на полукруглый волнолом в трех случаях: полностью заглубленный волнолом, на уровне свободной поверхности и выступающий.

При выходе волн на мелкую воду сильно проявляются нелинейно–дисперсионные эффекты [19]. Большое влияние на распространение длинных волн оказывает также податливость (упругость) донной поверхности, которая может возбуждаться во времени. Распространение уединенных волн над неоднородным дном исследовали еще ранее [15, 11].

Распространение нелинейных поверхностных гравитационных волн над наклонным дном с малоамплитудными неровностями методом возмущений исследовали в [4]. Разложением потенциала скоростей и отклонения свободной поверхности по малому параметру крутизны на глубокой воде получены аналитические решения для гармонических волн первого и второго порядка. На основе полученных решений проведены расчеты для плоского наклонного, выпуклого и вогнутого дна. Показано удовлетворительное соответствие полученных теоретических результатов с известными экспериментальными данными.

Для исследования трехмерной задачи распространения нелинейно-дисперсионных волн над неоднородным возмущенным дном применялся метод степенных рядов, предложенный Коши и Пуассоном [7, 17] и применяемый для построения моделей распространения волн в пластинах и оболочках, а затем и для построения моделей распространения волн на воде конечной глубины [24]. Согласно этому подходу, потенциал скоростей представляется в виде степенного ряда по малой вертикальной координате и в результате трехмерная задача сводится к двумерной.

Распад солитонов рассматривался в работах [2, 5, 18, 21]. Взаимодействие бора с медленно меняющейся топографией приводит к генерации последовательности изолированных солитонов [9]. Рассматривается распространение волнистого бора над пологим монотонным донным склоном, связывающем две области постоянной глубины, в рамках уравнения Кортевега-де Вриза с переменными коэффициентами. Показано, что, когда волнистый бор распространяется из области большей глубины в направлении уменьшающейся глубины, его взаимодействие с медленно изменяющейся топографией приводит к формированию последовательности изолированных солитонов и расширяющемуся модулированному волновому пакету перед бором с амплитудой, большей, чем амплитуда ведущей уединенной волны в волнистом боре.

В работе [21] экспериментально исследовался переход нераспространяющихся солитонов в длинном прямоугольном желобе (длина 39 см, ширина 2.45 см), заполненном водой (глубина 2 см), при возбуждении вертикально гармоническим движением. При увеличении частоты солитоны разрушались, переходя в хаос.

В работе [13] рассматривается взаимодействие слабо вязкой уединенной волны, фронтально набегающей на покоящейся на дне горизонтальный полукруглый цилиндр, на основе двухмерных численных расчетов с высокой разрешающейся способностью.

В работе [6] изучается численно взаимодействие уединенных волн с берегами на основе модели Буссинеска нелинейных уравнений мелкой воды, включающих два ключевых параметра: коэффициент донного трения и параметр разрушения волн. Установлено хорошее соответствие между численными предсказаниями трансформации уединенных волн и наката на плоский берег и измерениями, проведенными в лабораториях Америки и Англии.

Представляет интерес исследование падения регулярных волн на береговой абсорбер. В этом случае можно проанализировать эффект гашения волн вычислением коэффициента отражения, следуя работе [14].

1. ПЕРЕМЕННЫЙ ДОННЫЙ РЕЛЬЕФ

Распространение волн, как известно, в большинстве случаев хорошо описывается моделью идеальной несжимаемой жидкости при ее потенциальном движении. В результате определение векторного поля сводится к скалярной задаче для потенциала скоростей φ и отклонения свободной поверхности η. Исходя из полной нелинейной постановки задачи для жидкости переменной глубины с невозмущенной свободной поверхностью $z = 0$ в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z, рассматривается плоская задача, т. е. решения не зависят от координаты y. Задача характеризуется тремя определяющими безразмерными параметрами:

$$\alpha = a/H_0\,, \quad \beta = (H_0/l)^{\,2},$$
$$\gamma = tg\theta = H_0/l\,, \quad Ur = \alpha/\beta, \qquad (1)$$

где θ – угол донного отклонения; Ur – число Урселла (производный параметр); H_0 – глубина (вертикальный масштаб); l – характерный горизонтальный масштаб; $a = |\eta|_{\max}$ – максимальное отклонение свободной поверхности (амплитуда).

Безразмерные величины вводятся по формулам

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad z^* = \frac{z}{H_0}, \quad t^* = \frac{c_0}{l}t = \frac{\sqrt{gH_0}}{l}t,$$
$$\varphi^* = \frac{c_0}{gla}\varphi, \quad \eta^* = \frac{\eta}{a}. \qquad (2)$$

Начально-краевая задача формулируется с учетом (1) и (2) относительно двух искомых функций φ и η следующим образом (далее звездочки опущены):

$$\beta\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \quad \text{в области } \Omega, \qquad (3)$$

$$z = -H\,(x): \quad \varphi_z + \beta H_x \varphi_x = 0, \qquad (4)$$

$$z = \alpha\eta: \quad \eta_t + \alpha\eta_x\varphi_x - \beta^{-1}\varphi_z = 0,$$
$$\eta + \varphi_t + (\alpha/2)\,\varphi_x^2 + (\alpha/2\beta)\,\varphi_z^2 = 0, \qquad (5)$$

$$t = 0: \quad \varphi\,(x,\ z,\ t) = f_1(x,\ z),$$
$$\varphi_t\,(x,\ z,\ t) = f_2(x,\ z). \qquad (6)$$

Здесь введены три параметра масштабирования H_0, l, a, а не один (достаточный), что необходимо для данного асимптотического анализа. Это находится в соответствии с расширенным анализом Хантли [10].

Для вывода эволюционных уравнений в жидкости малой глубины применяется метод степенных рядов, т. е. разложения искомых функций по малой толщинной координате (глубине), следуя алгоритму, развитому в теории упругих тел малой толщины, начиная от Коши и Пуассона [7, 17].

Функция φ представляется в виде разложения

$$\varphi\left(x,\ z,\ t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(z+H\right)^{n}\beta^{n}f_{n}\left(x,\ t\right). \qquad (7)$$

Разложения (7) по параметру β и $z+H$ эквивалентны, и из полностью нелинейной постановки (3)–(6) с учетом (7) выведена асимптотическим методом после длинных выкладок система эволюционных уравнений [19]:

$$\eta_t\ +\ (h\,u)_x\ =\ 0, \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}
&u_t+\eta_x+\alpha\,u\,u_x=\\
&=\beta\left(\frac{H^3}{3}u_{x\,x\,t}+HH_xu_{x\,t}+\frac{H}{2}H_{x\,x}u_t\right)+\\
&+\alpha\beta\left[(\eta\,H)_x\,u_{xt}\ +\ H\,H_x\,u\,u_{xx}\ +\ \frac{2}{3}\,\eta\,H\,u_{xxt}\ +\right.\\
&+\frac{H^2}{3}\,u\,u_{xxx}\ -\ \frac{H^2}{3}\,u_x\,u_{xx}\ +\ \frac{H}{2}\,H_{xx}\,u_t+\\
&\left.+\frac{3}{2}\,H\,H_{xx}\,u\,u_x\ +\ \frac{H}{2}\,H_{xxx}\,u^2\ +\ \eta_x\,H_x\,u_t\right]+\\
&+L_1+\,O(\beta^2),
\end{aligned} \qquad (9)$$

где $u\,(x,\ t)$ – осредненная по глубине продольная скорость; L_1 – оператор, учитывающий нелинейности более высокого порядка, т.е. $O(\alpha^2\beta,\ \alpha^3\beta,\ \alpha^4\beta)$, $h=H\,(x)+\alpha\eta$.

Система (8), (9) описывает распространение уединенных волн при малых дисперсионных эффектах $\beta << 1$ по сравнению с нелинейными эффектами порядка α. Система эволюционных уравнений (8), (9) описывает распространение нелинейных волн при отсутствии течения.

В случае, когда параметр нелинейности α мал и он такого же порядка, как параметр дисперсии β, $\alpha \sim \beta << 1$, система уравнений (8), (9) сводится к уравнениям

$$h_t\ +\ (h\,u)_x\ =\ 0, \qquad (10)$$

$$u_t+\eta_x+\alpha\,u\,u_x=$$

$$=\beta\left(\frac{H^3}{3}u_{x\,x\,t}+HH_xu_{x\,t}+\frac{H}{2}H_{x\,x}u_t\right). \qquad (11)$$

В случае малых градиентов донной поверхности уравнение (11) упрощается:

$$u_t+\eta_x+\alpha uu_x=\frac{1}{3}\beta H^3u_{xxt}. \qquad (12)$$

Применяемый подход может быть обобщен на случай наличия стационарного течения над искривленным дном, следуя работе [8].

Анализ обнаруживает, что полученное выше приближение (10)–(12) и другие такого типа приближения, ($\alpha \sim \beta << 1$), построенные, например, в работах [9, 12 и 16], отличаются членами малого порядка, т.е. отличаются по характеру асимптотического приближения. Поэтому они не определяют единственное решение распада солитона над неоднородным дном. Аналогичная ситуация имеет место и при построении уравнений теории оболочек [1].

Основной интерес представляет анализ видов неоднородностей донной поверхности, при которых возможен распад солитона. В постановке (3)–(6) возможен только дальнейший численный анализ.

2. НЕОДНОРОДНОЕ ПОДВИЖНОЕ ДОННОЕ ОСНОВАНИЕ

Особый интерес представляет задача возбуждения нелинейных волн донной поверхностью. Рассматривается задача для идеальной несжимаемой жидкости, что позволяет ввести потенциал скоростей в декартовой системе координат $x,\ y,\ z$. Жидкость в невозмущенном состоянии занимает область $\Omega = \{(x,\,y,\,z):-\infty<x,\ \ y<\infty,\ \ x_3\in[0,\,-h_0]\}$. Исходная задача распространения нелинейных волн на воде над неоднородным движущимся дном формулируется для потенциала скорости $\varphi\ (x,\,y,\,z,\,t)$ в виде [3]

$$\beta\,\nabla^2\varphi+\varphi_z=0\ \text{ в }\ \Omega\,, \qquad (13)$$

$$\eta_t\ +\ \alpha\,\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\eta\ =\ \frac{1}{\beta}\,\varphi_z\ \text{ при }\ z\ =\ \alpha\,\eta\,, \qquad (14)$$

$$\eta\ +\ \varphi_t\ +\ \frac{\alpha}{2\,\beta}\,\varphi_z^2\ +\ \frac{\alpha}{2}\,(\vec{\nabla}\,\varphi)^2\ =\ 0\ \text{ при }\ z\ =\ \alpha\,\eta\,, \qquad (15)$$

$$\gamma(\xi_t\ +\ \alpha\,\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\xi)\ -\ \alpha\,\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}h_0\ =\ \frac{\alpha}{\beta}\,\varphi_z$$

$$\text{при }\ z=-h_0(x,y)+\gamma\,\xi(x,y,t), \qquad (16)$$

где ∇^2 и $\vec{\nabla}$ – горизонтальные операторы; $\varphi_z \equiv \partial\varphi/\partial z$, $\eta_t \equiv \partial\eta/\partial t$, η – возвышение свободной поверхности; h_0 – глубина воды; ξ – возмущение донной поверхности.

Уравнения (13)–(16) записаны в безразмерной форме в соответствии с формулами (звездочки опущены)

$$(x^*,\, y^*) = (x,\, y)/\, l, \quad (z^*,\, h_0^*) = (z,\, h_0)/h_0,$$

$$\xi^* = \xi/\xi_0, \quad \eta^* = \eta/a,$$

$$\varphi^* = \varphi\sqrt{g\,h_0}/g\,l\,a, \quad t^* = t\sqrt{g\,h_0}/l,$$

где l и h_0 – характерная длина и глубина; η и ξ_0 – амплитуды возмущения свободной поверхности и дна соответственно. Система (13)–(16) характеризуется безразмерными параметрами: параметром нелинейности $\alpha = a/h_0$, параметром дисперсии $\beta = (h_0/l)^2$ и параметром нестационарности положения дна $\gamma = \xi_0/h_0$.

Введем предположения теории длинных волн, малой, но конечной амплитуды: $\alpha << 1$, $\beta << 1$, $\gamma = O\,(\alpha)$. Пренебрегая в (13)–(16) членами порядка $O\,(\alpha,\, \beta)$ по сравнению с членами $O\,(1,\, \alpha,\, \beta)$, получаем:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \beta\nabla^2 = 0, \qquad (17)$$

$$\beta\,\frac{\partial^2\,\varphi}{\partial\,t^2} + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,z} = 0, \quad \eta = -\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,t} \text{ при } z = \alpha\,\eta, \qquad (18)$$

$$\beta\,\left[\frac{\partial\,\xi}{\partial\,t} - \vec{\nabla}\,\varphi\,\cdot\,\vec{\nabla}\,h_0\right] = \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,z}, \quad z = -\,h_0 + \gamma\,\xi. \qquad (19)$$

Величина ξ – в общем случае произвольная заданная функция, но в случае упругого дна равна его вертикальному перемещению u_z.

Соотношения (13)–(16) можно использовать для исследования слабонелинейных слабодисперсионных волн поверхности жидкости переменной глубины. Ограничиваясь в дальнейшем случаем постоянной невозмущенной глубины $H = 1$, представим функцию φ в виде степенного ряда

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x, y, t)\,(z+1)^n. \qquad (20)$$

После подстановки разложения (21) в (18)–(20) получаем:

$$\beta\nabla^2\varphi_n + (n+1)\,(n+2)\,\varphi_{n+2} = 0, \qquad (21)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\beta\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial t^2} + (n+1)\,\varphi_{n+1}\right](1+\alpha\eta)^n = 0, \qquad (22)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,\varphi_{n+1}\,(\gamma\xi)^n = \beta\frac{\partial\xi}{\partial t}^n. \qquad (23)$$

Таким образом, задача (17)–(19) сведена к бесконечной системе уравнений, которая включает в себя и рекуррентные соотношения (21).

С учетом (21) уравнения (22) и (23) сводятся с точностью до членов порядка $O(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ к эволюционным уравнениям [20]

$$\frac{\partial^2\,\varphi_0}{\partial\,t^2} - c_0^2(\eta,\, \xi)\,\nabla^2\,\varphi_0 -$$

$$-\frac{\beta}{2}\,\frac{\partial^2\,\nabla^2\varphi_0}{\partial t^2} + \frac{\beta}{6}\,\nabla^4\varphi_0 = \frac{\partial\,F}{\partial\,t}, \qquad (24)$$

$$F = -\xi - \beta\,\frac{\partial^2\xi}{\partial\,t^2} + \frac{\beta}{2}\,\nabla^2\xi, \quad \eta_0 = -\frac{\partial\,\varphi_0}{\partial\,t},$$

$$c_0^2(\eta,\, \xi) = 1 + \alpha\,\eta_0 - \gamma\,\xi. \qquad (25)$$

В случае отсутствия дисперсии в линейном приближении мелкой воды $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, но переменной глубины, система (24)–(25) сводится к уравнению

$$\vec{\nabla}\cdot\left(h_0\,\vec{\nabla}\,\eta_0\right) - \frac{\partial^2\eta_0}{\partial\,t^2} = -\frac{\partial^2\xi}{\partial\,t^2}. \qquad (26)$$

Как видно из уравнения (26), наличие подвижного дна приводит к появлению силы возбуждения и изменению скорости распространения c_0.

В случае податливого дна для плоской задачи при $h_0 = 1$ уравнение (26) принимает вид

$$\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\eta_0}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \qquad (27)$$

Рассматриваемое упругоподатливое дно описывается законом

$$\xi = \frac{1}{\mu}\eta_0, \qquad (28)$$

где μ – постоянный модуль основания. Это самая простая так называемая однопараметрическая модель (основание Винклера).

Подставляя (28) в (27), получаем:

$$\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2} - \frac{1}{\hat{c}^2}\,\frac{\partial^2\eta_0}{\partial t^2} = 0, \qquad (29)$$

где

$$\hat{c} = \sqrt{\mu/\mu - 1}. \qquad (30)$$

Из (30) следует, что при $\mu \leq 1$ решение не существует. Следовательно, значение μ изменяется в интервале

$$1 < \mu < \infty. \qquad (31)$$

При $\mu \to \infty$ величина $w = 0$ и $\hat{c} = 1 = c_{sh}^*$, что соответствует жесткому дну. При условии $\mu \to 1$ имеем $\eta = w$, что соответствует резонансному поведению. Приближая величину μ от ∞ к 1, приходим к увеличению скорости распространения $\hat{c}$.

Как следует из вышесказанного, учет податливости дна приводит к увеличению скорости распространения $\hat{c}$. Оценки для реальных упругих свойств дна показывают, что скорость волны на мелкой воде может возрастать до 20%.

В случае более общей двухпараметрической модели (основание Пастернака)

$$\eta_0 = \mu\xi - G\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad (32)$$

для фазовой скорости получаем выражение

$$c_p = \left[1 + \frac{G}{\mu}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right]^{1/2}\left[1 - \frac{1}{\mu} + \frac{G}{\mu}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right]^{-1/2}. \qquad (33)$$

Скорость $\hat{c}$ (30) получается из (33) как предельный случай, когда $G \to 0$ или когда длина волны $\lambda \to \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены нелинейно–дисперсионные эволюционные уравнения распространения волн над переменным рельефом. Уравнения учитывают дисперсионные эффекты – параметр β, и нелинейные эффекты – параметр α, которые предполагаются малыми одного порядка $\alpha \sim \beta \ll 1$. Выведены уравнения, учитывающие неоднородность донного основания. Показано влияние податливости основания, приводящее к уменьшению скорости распространения волн при наличии винклерового основания.

1. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. "Механика твердых деформируемых тел". – М.: ВИНИТИ, 1973. – **5**. – 272 с.
2. *Королевич В. Ю., Селезов И. Т.* Нелинейно-дисперсионные волны в жидкости переменной глубины: от солитонов до детерминированного хаоса // Механика жидкости и газа.– 2012.– **14**, N 2.– С. 80–83.
3. *Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г.* Математические методы в задачах распространения и дифракции волн.– Киев: Наук. думка, 2012.– 232 с.
4. *Bai Yu., Xu H., Lu D.* Nonlinear evolution of wave on small amplitude uneven sloping bed // Appl. Mathematics and Mechanics.– 2005.– **26**, N 5.– P. 654–661.
5. *Benjamin T. B., Feir J. E.* The disintegration of wave trains in deep water. Part 1 // J. Fluid Mech.– 1967.– **27**.– P. 417–430.
6. *Borthwick A.G.L., Ford M., Weston B. P., Taylor P. H., Stansby P. K.* Solitary wave transformation, breaking and run-up at a beach // Maritime Engineering.– 2006.– **159**, Issue MA3.– P. 97–105.
7. *Cauchy A. L.* Sur l'equilibre et le mouvement d'une lame solide // Exercices Math.– 1828.– **3**.– P. 245–326.
8. *Dressler R. F.* New nonlinear shallow flow equations with curvature // J. Hydraul. Res.– 1978.– **16**(3).– P. 205–222.
9. *El G. A., Grimshaw R.H.J., Tiong W. K.* Transformation of a shoaling undular bore // J. Fluid Mech. – 2012. – **709**. – P. 371–395.
10. *Huntley H. E.* Dimensional analysis. – London: McDonald and Company, 1952. – 158 p. Перевод на русск. яз. *Хантли Г.* Анализ размерностей. – М.: Мир, 1970. – С. 176.
11. *Johnson R. S.* On the development of a solitary wave moving.over an uneven bottom // Proc. Cambridge Phil. Soc.– 1973.– **73**.– P. 183–203.
12. *Kevorkian J., Yu J.* Passage through the critical Froude number for shallow-water waves over a variable bottom // J. Fluid Mech.– 1989.– **204**.– P. 31–56.
13. *Klettner C. A., Eames I.* Momentum and energy of a solitary wave interacting with a submerged semi-circular cylinder // J. Fluid Mech.– 2012.– **708**.– P. 576–595.
14. *Lean G. H.* A simplified theory of permeable wave absorber // J. Hydraul. Res.– 1967.– **5**, N 1.– P. 15–30.
15. *Miles J. W.* On the Korteweg-de Vries equation for a gradually varying channel // J. Fluid Mech.– 1979.– **91**.– P. 131–147.
16. *Peregrine D. H.* Long waves on a beach // J. Fluid Mech.– 1967.– **27**, N 4.– P. 815–827.
17. *Poisson S. D.* Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques // Mém. Acad. Roy. Sci.– 1829.– **8**.– P. 357–570.
18. *Pudjaprasetya S.R., Van Groesen E., Soewono E.* The splitting of solitary waves running over a shallower water // Wave Motion.– 1999.– **29**.– P. 375–389.
19. *Selezov I. T.* Some degenerate and generalized wave models in elasto- and hydrodynamics // J. Appl. Math. Mech.– 2003.– **67**, N 6.– P. 871–877.
20. *Selezov I. T., Korsunsky S. V.* Transformation of plane waves over moving, or elastic bottom inhomogeneity // Rozprawy Hydrotechniczne.– 1991.– N 54.– P. 49–54.
21. *Wei R., Wang B., Mao Yi., Zheng X., Miao G.* Further investigation of nonpropagating solitons and their transition to chaos // J. Acoust Soc. Am.– 1990.– **88**(1).– P. 469–472.
22. *Xu J., Tao J.* Simulation of wave forces on a semi-circular breakwater using multilayer feed forward network // China Ocean Engineering.– 2003.– **17**, N 2.– P. 227–238.
23. *Yu D., Tang P., Song Q.* Feasibility study on common methods for wave force estimation of deep water combined breakwaters // J. Ocean Univ. China.– 2015.– **14**(4).– P. 629–635.
24. *Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves. – New York: Willey, 1974. – 636 p. Перевод на русск. яз. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.