

УДК 532.591

## ВЛИЯНИЕ СИММЕТРИИ ПОДВОДНОГО ПРЕПЯТСТВИЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ\*, Т. Н. ЩЕРБАК\*\*, В. И. НИКИШОВ\*

\*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев  
вул. Желябова, 8/4, 03680, МСП, Київ-180, Україна

\*\*Национальный транспортный университет, г. Киев  
ул. Киквидзе, 42, 01103, Киев  
E-mail: vinihm@gmail.com

Получено 16.11.2015

Изложены особенности метода улучшенной редукции применительно к задаче о рассеянии поверхностных гравитационных волн на донной неоднородности в виде прямоугольной призмы. В развитие известного метода решения подобных задач на основе разложения решения в ряд по собственным функциям задачи в работе выделены особенности по скоростям в окрестности угловых точек препятствия. Это позволило асимптотически оценить вклад мод высших порядков. Показаны преимущества предлагаемого метода по сравнению с обычной редукцией. Приведены результаты расчетов коэффициентов отражения и прохождения для разных глубин канала до и после препятствия.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** поверхностные волны, рассеяние, препятствие, собственные функции

Викладено особливості методу поліпшеної редукції, стосовно до задачі про розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль на донній неоднорідності у вигляді прямокутної призми. Відомий метод розв'язання подібних задач на основі розв'язання розв'язку в ряд власним функціям у роботі модифіковано шляхом виділення особливості по швидкості в околі куткових точок перешкоди. Це дозволило асимптотично оцінити внесок мод високих порядків. Показано переваги запропонованого методу в порівнянні із звичайною редукцією. Приведено результати розрахунків коефіцієнтів відбиття та проходження для різних глибин каналу до і після перешкоди.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** поверхневі хвилі, розсіювання, перешкоди, власні функції

The features of the improved reduction method in respect to the problem of scattering of surface gravity waves by bottom irregularity of rectangular shape have been expounded. The known method of solving of similar tasks on the basis of expanding of solution in series of eigenfunctions has been developed by selection of singularity relative to velocity in neighborhood of angular point of the obstacle. This makes possible to estimate the contribution of higher order modes by asymptotically. The advantages of the proposed method in compared with usual reduction has been demonstrated. The results of calculation of the reflection and transmitting coefficients for different depths of the channel before and behind obstacle have been represented.

**KEY WORDS:** surface waves, scattering, obstacle, eigenfunctions

### ВВЕДЕНИЕ

Известно, что под воздействием волн могут происходить разрушение расположенных в шельфовой зоне гидротехнических сооружений, эрозия берегов. Поэтому задача защиты сооружений и берегов с помощью искусственных конструкций разнообразной формы, зависящей от волнового климата, наклона берегов, глубины места установки волнолома, а также доступности и стоимости материалов, остается актуальной. Наиболее распространенные волноломы представляют собой каменную наброску и бетонные конструкции или комбинацию обоих типов. Поскольку к волноломам предъявляются высокие требования, их конструкции становятся все более и более сложными, и они проектируются с учетом понимания процес-

сов взаимодействия волн со структурами и берегами. Примеры конструкций используемых волноломов можно найти в обобщающих монографиях [1-3].

Задача расчета параметров волн, распространяющихся над волноломами, продолжает вызывать интерес у исследователей в связи с необходимостью совершенствования их характеристик, улучшения экологических качеств. Понимание процесса взаимодействия волн с препятствиями основывается на изучении простых, "канонических" форм волноломов типа уступ, барьер, барьер конечной толщины и др. Более сложные конструкции волноломов представляют собой, как правило, различные комбинации простых форм волноломов. Этим объясняется интерес к теоретическому анализу рассеяния волн на волноломах про-

стых форм.

Анализ форм волноломов и конфигураций донной поверхности показывает, что можно выделить класс задач, в которых область, занимаемую жидкостью, можно условно разделить на подобласти, характеризующиеся постоянной глубиной и отделенные друг от друга вертикальными плоскостями. К этому классу относятся задачи рассеяния волн на уступе, барьере, прямоугольном препятствии, подводной траншее и др. Следует отметить, что на основе решений указанных задач могут быть изучены вопросы распространения волн в случае произвольной конфигурации донной поверхности, когда она заменяется рядом ступенек.

Для расчета параметров волн, рассеивающихся на волноломах, используются различные теоретические подходы. Одним из эффективных методов, применяемых для этой цели, является разложение решения в ряд по системе собственных функций рассматриваемой подобласти. В результате выполнения условий сопряжения на границах между подобластями получаем систему функциональных уравнений, которую с использованием свойств ортогональности собственных функций сводим к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений. Такой подход к решению задачи о рассеянии поверхностных гравитационных волн на системе вертикальных барьеров конечной ширины был применен в работе [4]. Получаемая система уравнений была решена среднеквадратичным методом, который является, по сути, интегральным методом. Возможен другой подход, который заключается в численном решении получаемой системы.

Хорошо известно решение задачи о трансформации длинных волн на подводном уступе [5]. Основываясь на уравнении сохранения массы и условии непрерывности распределения высоты подъема свободной поверхности, в этой работе получены выражения для коэффициентов отражения и прохождения поверхностной волны. Отметим, что для получения решения в длинноволновом приближении подробной информации о характере течения в окрестности граней уступа не требуется. Более строгий подход к решению этой проблемы был осуществлен в работе [6], в которой задача была сведена к интегральному уравнению относительно горизонтальной компоненты скорости  $U(z)$ , однако решение уравнения было найдено только для предельного случая длинных волн. Следующий шаг был сделан в работе [7], в которой рассмотрено нормальное падение поверхностной волны на зону резкого изменения донной поверхности (между

областям с конечной и бесконечной глубинами). Автор получил интегральное уравнение, подобное рассмотренному в работе [6], и свел его к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений путем разложения  $U(z)$  в ряд по собственным функциям, характерным для области конечной глубины, с использованием свойства их ортогональности. Полученная система уравнений решалась численно, причем учитывался вклад до 80 нераспространяющихся мод. Было показано, что в длинноволновом приближении результаты находятся в соответствии с результатами работы [5]. Отметим, что в другой работе [8] автор применил аналогичный подход к рассмотрению распространения поверхностных волн над длинным симметричным препятствием в жидкости конечной глубины.

Распространение поверхностных волн над уступом в жидкости конечной глубины изучено в работе [9] на основе построения так называемой “матрицы рассеяния”, которая связывает коэффициенты распространяющихся мод по обе стороны скачка глубины. Характерной особенностью данного подхода является использование асимптотического приближения плоских волн (“plane-wave approximation”), при котором по обе стороны от области резкого изменения глубины потока рассматриваются только распространяющиеся моды и влиянием нераспространяющихся мод пренебрегается.

В работе [10] рассматривалась задача о распространении поверхностных волн в канале со случайным дном. Предполагалось, что неоднородности донной поверхности имеют ступенчатую форму, а случайным является длина каждой ступеньки, что, по сути, каждая неоднородность имеет на концах вид уступа. Авторы сформулировали постановку граничной задачи для потенциала, однако конкретные расчеты проводились путем построения “матрицы рассеяния”, т.е. следуя работе [9]. При этом влиянием возникающих неоднородных волн пренебрегалось. Основанием для этого служило введенное ограничение на длину ступеньки, что приводило к тому, по суждению авторов, что влиянием неоднородных волн, генерируемых на одном конце ступеньки, на условии сопряжения на другом конце можно пренебречь, если длина достаточно велика.

В работе [11] рассматривается рассеяние поверхностных волн на прямоугольном препятствии в жидкости конечной глубины. Использовалась вариационная формулировка задачи. Проводился учет вклада неоднородных волн с целью проверки сходимости решения. Установлено, что при увеличении отношения глубины жидкости над

препятствием к общей глубине потока требуется увеличивать число учитываемых неоднородных волн для достижения необходимой точности. Продемонстрирован осциллирующий характер поведения коэффициента отражения в зависимости от волнового числа, причем с увеличением длины препятствия число осцилляций увеличивается. Этот вывод согласуется с выводами работы [9], в которой рассмотрено распространение волн над длинным препятствием в жидкости конечной глубины. Физическое объяснение возникновения осцилляций в поведении коэффициента отражения приведено в работе [27], в которой показано, что коэффициент отражения может достигать нулевых значений (прозрачный волновод). Такое поведение указанного коэффициента заключается во взаимодействии волн, отраженных от разных концов препятствия.

Одними из первых работ, в которых был применен метод разложения решения по системе собственных функций с последующим сведением задачи к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, были работы [12,13]. В первой из них рассматривалась задача о рассеянии поверхностных волн, падающих нормально на неподвижную поверхностную преграду конечной длины, во второй в качестве препятствия рассматривался порог конечной длины. Этот подход был развит в работе [14], в которой изучалась дифракция волн на двумерной подводной прямоугольной впадине для случая наклонного падения. Особое внимание было сосредоточено на рассмотрении случая больших углов падения. Показано, что для нормального падения результаты соответствуют данным работы [15].

Развитый подход для получения точного решения задачи был применен в ряде работ при изучении рассеяния поверхностных волн на пороге (впадине) произвольной конфигурации. В этом случае поверхность порога заменялась рядом ступенек прямоугольной формы, и в каждой области, соответствующей данной ступеньке, строилось решение на основе описанного выше подхода [16]. Для расчетов был использован также метод, развитый в работе [10], когда влиянием неоднородных волн пренебрегается. В этом методе решения задачи, заключающимся в разбиении области, занимаемой препятствием, на более мелкие подобласти, имеется, однако, естественное ограничение. Оно связано с требованием, чтобы размеры области, в которой необходимо учитывать неоднородные (нераспространяющиеся) волны, концентрирующиеся около сторон разрывов, были малы по сравнению с расстояниями между ступенками.

Размеры этих областей можно оценить численно путем вычисления относительного вклада неоднородных волн, которые эмитируются от каждой из двух близлежащих ступенек [17].

Отметим, что в работе [16] получено также решение задачи с помощью подхода, основанного на построении матрицы рассеяния Майлса. Обнаружено, что возникает заметная разница в результатах, полученных на основе полной модели (с учетом нераспространяющихся мод) и аппроксимационной модели Майлса при уменьшении длины бара. В частности, распределение амплитуды волны претерпевает разрыв в вертикальной плоскости, соответствующей границе бара. Это связано с тем, что матрицы рассеяния Майлса строятся на основе использования приближения плоских волн ("plane-wave approximation"), которое может описывать волновое поле в дальней зоне, но не вблизи угловых плоскостей бара, где проявляется сильное влияние нераспространяющихся мод. Здесь же проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов авторов. Показано, что имеет место неплохое их соответствие. Анализируется влияние формы угла бара на характер волн. Показано, что при наличии острой кромки имеет место сворачивание вихревых возмущений, вызванных кромкой, в результате формируются вихри, которые могут проникать в поток. Сглаживание кромки приводит к исчезновению такого эффекта. Интересно отметить, что была сделана попытка осуществить моделирование закругленной кромки рядом ступенек (до 10 ступенек), однако никаких оценок влияния нераспространяющихся мод, эмитируемых с одного конца ступеньки на другой, не приведено.

В работе [18] изучено распространение поверхностных волн над подводной траншеей. Рассмотрены случаи симметричной и несимметричной форм указанных донных углублений. Показано, что в симметричном случае коэффициент отражения носит осциллирующий характер и его локальные минимумы достигают нуля (брегоское рассеяние). Несимметрия формы траншеи приводит к тому, что этот коэффициент отличен от нуля, хотя и осциллирует.

Некоторая разновидность обсуждаемого метода разработана в работе [19], в которой изучается рассеяние поверхностных гравитационных волн на неоднородности донной поверхности, рассматриваемой в виде ступенчатой структуры, а также на некоторых видах отдельных препятствий. На основе условий сопряжения для горизонтальных компонент скорости на вертикальных границах, которые соответствуют границам отдельных ступенек

в общей ступенчатой структуре, авторы получили систему интегральных уравнений. Используя разложение выражения для скорости по системе собственных функций, в чем и заключается главное отличие от рассмотренного выше подхода, когда осуществлялось разложение в ряд величины потенциала скорости, авторы на основе свойства ортогональности собственных функций свели указанную систему к системе алгебраических уравнений. В работе проведено сравнение рассчитанных интегральных параметров задачи (коэффициентов отражения и прохождения) с результатами, полученными в других работах на основе традиционного подхода. Показано, что точность данного метода не хуже традиционного, продемонстрировано соответствие результатов. Обсуждаются преимущества предложенного подхода.

В работе [20] также рассматривалось распространение поверхностных волн над ступенчатой подводной структурой, с помощью которой осуществлялось моделирование гладкого произвольного профиля донной поверхности. Использовался метод решения задачи, разработанный в работе [10], который заключался в построении матрицы рассеяния Майлса с последующим применением к ступенчатой конфигурации донной поверхности. Авторы выполнили расчеты коэффициентов отражения и прохождения для простых конфигураций (одна и две ступеньки) при учете нераспространяющихся мод, т.е. в полной постановке. Показано, что расчеты по разработанной методике неплохо согласуются с точным решением. Обнаружено, что для сложных профилей донной поверхности и для участков с крутыми склонами точность расчетов падает. Анализ результатов работы [10], в которой, как указано выше, были введены определенные ограничения на длину ступеньки (длина должна быть большой по сравнению с локальной глубиной потока), показал, что описанная широко-интервальная аппроксимация (wide-spacing approximation) может быть сведена к плоско-волновой аппроксимации, если отношение высоты ступеньки к локальной глубине потока меньше, чем 0.02.

Следует также отметить работу [21], в которой рассмотрено распространение поверхностных гравитационных волн над подводным препятствием конечной ширины. Для решения задачи был использован метод представления решения по системе собственных функций, как в работах [12–14]. Полученная бесконечная система алгебраических уравнений решалась методом редукции. Было рассмотрено также приближенное решение, полученное на основе плоско-волнового приближе-

ния (plane-wave approximation), а также в длинноволновом приближении. Показано, что для определенных частот возникает известное резонансное явление, когда коэффициент отражения принимает нулевое значение, а фаза волны изменяется на 180 градусов (волна “не чувствует” препятствия).

Особенностью конструкций волноломов, представляющих собой прямоугольное препятствие, находящееся на дне, является наличие у них острых кромок. Это приводит к появлению степенной сингулярности ( $\propto r^{-1/3}$ , где  $r$  - радиальная координата полярной системы координат с центром в вершине острой грани) в выражении для скорости потока [22, 23], что обуславливает необходимость увеличения числа используемых уравнений, т.е. учета мод высокого порядка. Отметим, что в работах [24, 25] было использовано разложение решения в ряд по собственным функциям, затем с использованием инверсионной формулы Хавелока и выполнения условий сопряжения на вертикальной плоскости, проходящей через угловую кромку препятствия, задача свелась к интегральному уравнению для неизвестной горизонтальной компоненты скорости. Это интегральное уравнение решалось путем разложения по Галеркину, причем в качестве координатных функций применялись ультрасферические полиномы Гегенбауера степени  $1/6$ , что позволило учесть упомянутую степенную особенность. Более подробно указанный подход освещен в монографии [26].

В данной работе на основе разложения решения в ряд по собственным функциям рассмотрена задача рассеяния поверхностных гравитационных волн подводным прямоугольным препятствием в случае нормального падения. Выполнен учет описанных особенностей распределения скорости в окрестности острых кромок препятствия. Найдена асимптотика неизвестных коэффициентов разложения для больших номеров  $n$ . Учет вклада мод высоких порядков позволил улучшить качество получаемого решения при уменьшении размерности системы для нахождения искомых коэффициентов. Рассмотрено симметричное расположение препятствия, в том числе в приближении плоских волн. Изучено влияние несимметрии конструкции, когда глубины потока до и после препятствия отличаются друг от друга.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоская задача о рассеивании поверхностных гравитационных волн на неоднородности донной поверхности в жидкости конечной глубины. Предполагается, что монохроматическая

волна с частотой  $\omega_{dim}$  падает нормально на неоднородность, которая представляет собой прямоугольное препятствие длины  $2b$  с резкими кромками. Волна распространяется вдоль горизонтальной оси  $x$  из  $x = -\infty$ . Направленная вверх вертикальная ось  $z$  декартовой системы координат проходит через середину верхней грани препятствия с началом отсчета на свободной поверхности. Расположение препятствия и системы координат представлено на рис. 1. Полагается, что глубина жидкости перед препятствием,  $H_1$ , в общем

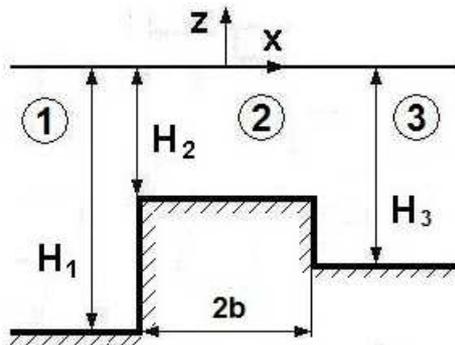


Рис. 1. Расположение препятствия и системы координат

случае не равна глубине за препятствием,  $H_3$ . Глубина жидкости над препятствием составляет  $H_2$ . Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой.

Поведение линейных поверхностных волн, которые распространяются вдоль свободной поверхности, описывается уравнением Лапласа для потенциала скорости [5]:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -H_1, \tag{3}$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести.

Полагаем, что переменные изменяются во времени по гармоническому закону  $e^{-i\omega t}$ . Разделяя переменные в уравнении (1), находим выражение для потенциала скорости [27]:

$$\Phi = -\frac{ia g}{\omega} \frac{\text{ch } k(z + H_1)}{\text{ch } k H_1} e^{i(kx - \omega t)},$$

где  $a$  – амплитуда падающей волны;  $k$  – волновое число, которое является корнем дисперсионного уравнения

$$\omega_{dim}^2 = k g \text{th } k H_1.$$

Приведем указанные уравнения к безразмерному виду, введя следующие характерные масштабы длины  $L_{ch} = H_1$  и времени  $T_{ch} = \sqrt{H_1/g}$ . Тогда выражение для потенциала и соответствующее дисперсионное уравнение можно представить в виде

$$\Phi = \frac{a}{\omega} \frac{\text{ch } k_1(z + H_1)}{\text{ch } k_1 H_1} e^{i(k_1 x - \omega t)}, \tag{4}$$

$$\omega^2 = k_1 H_1 \text{th } k_1 H_1, \tag{5}$$

где  $a$  и  $\omega$  теперь уже безразмерные величины амплитуды и частоты, соответственно. Величину  $H_1$  для удобства оставим в прежнем виде, хотя она и равна 1.

Волновое число  $k_1$  является действительным положительным корнем дисперсионного уравнения (4) и характеризует распространяющуюся волну. Кроме этого корня, указанное уравнение имеет бесконечное множество чисто мнимых корней, которые относятся к неоднородным волнам и определяются уравнением

$$\omega^2 = -\alpha_n H_1 \text{tg } \alpha_n H_1. \tag{6}$$

Корням дисперсионного уравнения  $k_1, \alpha_n$  соответствует ортогональная система собственных функций  $\text{ch } k_1(z + H_1), \cos \alpha_n(z + H_1)$ , где  $n = 1, 2, \dots, N, \dots$

Запишем выражения для потенциалов скорости в областях 1–3 (множитель  $e^{-i\omega t}$  опускаем):

$$\Phi_1 = (e^{i k_1(x+b)} + R e^{-i k_1(x+b)}) \varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha_n(x+b)} A_n \varphi_n(z), \tag{7}$$

$$\Phi_2 = (B_0 \cos k_2 x + C_0 \sin k_2 x) \psi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n \frac{\text{ch } \beta_n x}{\text{ch } \beta_n b} + C_n \frac{\text{sh } \beta_n x}{\text{sh } \beta_n b} \right) \psi_n(z), \tag{8}$$

$$\Phi_3 = T e^{i k_3(x-b)} f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma_n(x-b)} D_n f_n(z), \tag{9}$$

где

$$\varphi_0(z) = \frac{\text{ch } k_1(z + H_1)}{\text{ch } k_1 H_1}, \varphi_n(z) = \frac{\cos \alpha_n(z + H_1)}{\cos \alpha_n H_1},$$

$$\psi_0(z) = \frac{\text{ch } k_2(z + H_2)}{\text{ch } k_2 H_2}, \psi_n(z) = \frac{\cos \beta_n(z + H_2)}{\cos \beta_n H_2},$$

$$f_0(z) = \frac{\operatorname{ch} k_3(z + H_3)}{\operatorname{ch} k_3 H_3}, f_n(z) = \frac{\cos \gamma_n(z + H_3)}{\cos \gamma_n H_3}.$$

Решение задачи заключается в нахождении коэффициентов отражения и прохождения  $R, T$  и коэффициентов разложений  $A_n, B_n, C_n, D_n$  путем удовлетворения условиям сопряжений выражений для потенциала и скорости в плоскостях  $x = -b$  и  $x = b$ , которые могут быть представлены в виде в плоскости  $x = -b$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \text{при } -H_2 < z < 0, \\ 0 & \text{при } -H_1 < z < -H_2, \end{cases} \quad (10)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{при } -H_2 < z < 0, \quad (11)$$

и в плоскости  $x = b$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \text{при } -H_2 < z < 0, \\ 0 & \text{при } -H_1 < z < -H_3, \end{cases} \quad (12)$$

$$\Phi_3 = \Phi_2 \quad \text{при } -H_2 < z < 0. \quad (13)$$

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Подставляя выражения для потенциалов (7)–(9) в условия сопряжения (10)–(13), получаем бесконечную систему функциональных уравнений, которую преобразуем в систему алгебраических уравнений путем их умножения на соответствующие собственные функции и интегрирования по вертикальной оси  $z$  с учетом свойств их ортогональности. Таким образом, задача сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов отражения и прохождения  $R, T$  и коэффициентов разложений  $A_n, B_n, C_n, D_n$ . Полученная система решается, как правило, методом редукции. Однако наличие особенности по скорости в угловой точке обуславливает плохую сходимость решения и возникает необходимость учета большого количества неоднородных мод, что приводит к существенному увеличению размерности системы.

В отличие от простой редукции в работе предлагается использовать асимптотические выражения коэффициентов разложений при больших значениях  $n$ , которые могут быть найдены исходя из конкретного вида сингулярности, в данном случае сингулярности по скорости степенного вида.

Из (5) следует, что выражение, описывающее поведение горизонтальной компоненты скорости в области 1 при  $x = -b$ , имеет вид

$$U_1|_{x=-b} = ik_1(1 - R) \frac{\operatorname{ch} k_1(z + H_1)}{\operatorname{ch} k_1 H_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n \frac{\cos \alpha_n(z + H_1)}{\cos \alpha_n H_1}. \quad (14)$$

Ранее было указано, что скорость жидкости в окрестности угловой точки в рассматриваемом случае имеет особенность порядка  $r^{-1/3}$ . Отсюда следует, что поведение горизонтальной компоненты скорости в плоскости  $x = -b$  при  $z \rightarrow -H_2 + 0$  описывается следующим выражением:

$$U_1(z)|_{x=-b} = \frac{V_1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}}, \quad (15)$$

где  $V_1$  – константа, требующая определения.

Представим это выражение в виде ряда по собственным функциям:

$$\frac{V_1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} = V_1 E_0 \frac{\operatorname{ch} k_1(z + H_1)}{\operatorname{ch} k_1 H_1} + V_1 \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{\cos \alpha_n(z + H_1)}{\cos \alpha_n H_1}. \quad (16)$$

Прибавим и отнимем от правой части (12) выражение (13) и после ряда преобразований получим:

$$U_1|_{x=-b} = ik_1(1 - R) \frac{\operatorname{ch} k_1(z + H_1)}{\operatorname{ch} k_1 H_1} + \sum_{n=1}^N \kappa_n A_n \frac{\cos \alpha_n(z + H_1)}{\cos \alpha_n H_1} + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n \frac{\cos \alpha_n(z + H_1)}{\cos \alpha_n H_1}. \quad (17)$$

Выражение (13) в приведенном виде получено на основе предположения, что при больших значениях  $n$ , больших некоторого  $N$ , характер коэффициентов  $A_n$  определяется поведением скорости в окрестности угловой точки. Следующее равенство отображает эту связь:

$$\kappa_n A_n \cong V_1 E_n \quad \text{при } n \geq N, \quad (18)$$

Для коэффициентов  $E_n$  находим асимптотическую зависимость для больших значений  $n$ . Для этого умножаем выражение (12) на  $\cos \alpha_m(z + H_1)$  и интегрируем по интервалу  $[-H_1, 0]$ . С учетом ортогональности собственных функций получаем:

$$\int_{-H_1}^0 \frac{\cos \alpha_m(z + H_1)}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} dz = \frac{E_m}{N_m \cos \alpha_m H_1}.$$

Вычисляя интеграл на основе табличного интеграла [28]

$$\int_0^a (a^2 - t^2)^{\beta-1} \left\{ \begin{matrix} \sin bt \\ \cos bt \end{matrix} \right\} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2a}{b} \right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) \left\{ \begin{matrix} H_{\beta-1/2}(ab) \\ J_{\beta-1/2}(ab) \end{matrix} \right\},$$

находим:

$$E_m = \sqrt{N_m} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2H_2}{k_1} \right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \times \\ \times [\cos \alpha_m H_1 \times J_{1/6}(\alpha_m H_2) + \\ + \sin \alpha_m H_1 \times H_{1/6}(\alpha_m H_2)]. \quad (19)$$

Здесь  $\Gamma(\beta)$  – гамма-функция;  $H_{\beta-1/2}(ab)$  – модифицированная функция Струве;  $J_{\beta-1/2}(ab)$  – функция Бесселя первого рода;

$$N_m = \frac{4\alpha_m}{\text{sh } 2\alpha_m H_1 + 2\alpha_m H_1}.$$

Для расчетов применялись асимптотические выражения для коэффициентов  $E_m$  для больших значений  $m$ , которые находились с использованием асимптотик функций Струве и Бесселя с учетом известной зависимости  $\alpha_m$  от  $m$ [29]:

$$\alpha_m H \approx (m-1)\pi.$$

В итоге получаем

$$E_m = I_1 \cdot N_m \cos \alpha_m H_1, \quad (20)$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2H_2}{\alpha_m} \right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \times \\ \times [S_1 \cos \alpha_m H_1 + (S_2 + S_3) \sin \alpha_m H_1],$$

где

$$S_1 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_m H_2}} \left( \cos \tilde{\alpha}_m - \frac{1}{9} \frac{1}{\alpha_m H_2} \sin \tilde{\alpha}_m \right),$$

$$S_2 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_m H_2}} \left( \sin \tilde{\alpha}_m + \frac{1}{9} \frac{1}{\alpha_m H_2} \cos \tilde{\alpha}_m \right),$$

$$S_3 \approx \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left( \frac{2}{\alpha_m H_2} \right)^{5/6},$$

$$\tilde{\alpha}_m = \alpha_m H_2 - \frac{\pi}{3}.$$

Переходя к области 2, запишем выражение для горизонтальной скорости в плоскости  $x = -b$ , исходя из (8):

$$U_2|_{x=-b} = k_2 (B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b) \psi_0(z) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left( -B_n \frac{\text{sh } \beta_n b}{\text{ch } \beta_n b} + C_n \frac{\text{ch } \beta_n b}{\text{sh } \beta_n b} \right) \psi_n(z).$$

Как и ранее, прибавляем и отнимаем от правой части этого уравнения выражение, описывающее указанную выше степенную особенность, которую также разлагаем в ряд по системе собственных функций, но теперь относящихся к области 2. Процедура нахождения асимптотических выражений

для коэффициентов  $B_n$  и  $C_n$  та же, что и при вычислении  $E_n$ . После ряда преобразований получаем:

$$U_2|_{x=-b} = k_2 (B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b) \psi_0(z) + \\ + \sum_{n=1}^N \beta_n \left( -B_n \frac{\text{sh } \beta_n b}{\text{ch } \beta_n b} + C_n \frac{\text{ch } \beta_n b}{\text{sh } \beta_n b} \right) \psi_n(z) + \\ + (V_2^+ + V_2^-) \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n \psi_n(z),$$

где

$$V_2^+ R_n = -\beta_n B_n \text{th } \beta_n b, \quad (21)$$

$$V_2^- R_n = \beta_n C_n \text{cth } \beta_n b. \quad (22)$$

В итоге имеем

$$R_n = I_2 \cdot M_n \cos \beta_n H_2,$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2H_2}{\beta_n} \right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \times \\ \times [L_1 \cos \beta_n H_2 + (L_2 + L_3) \sin \beta_n H_2],$$

$$L_1 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \beta_n H_2}} \left( \cos \tilde{\beta}_n - \frac{1}{9} \frac{1}{\beta_n H_2} \sin \tilde{\beta}_n \right),$$

$$L_2 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \beta_n H_2}} \left( \sin \tilde{\beta}_n + \frac{1}{9} \frac{1}{\beta_n H_2} \cos \tilde{\beta}_n \right),$$

$$S_3 \approx \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left( \frac{2}{\beta_n H_2} \right)^{5/6},$$

$$\tilde{\beta}_n = \beta_n H_2 - \frac{\pi}{3},$$

$$M_n = \frac{4\beta_n}{\text{sh } 2\beta_n H_2 + 2\beta_n H_2}.$$

Аналогичным образом находятся выражения для горизонтальных компонент скорости на границе  $x = b$  и соответствующие зависимости для коэффициентов разложений при больших значениях  $n$ . Удовлетворяя условиям сопряжения, получаем систему  $4N + 4$  уравнений для такого же количества неизвестных. Необходимые для замыкания системы коэффициенты  $V_i$  выбирались из условий (13), (17), (18) и подобных, которые находятся при рассмотрении выражений для поля скорости в плоскости  $x = b$ .

Полученная система алгебраических уравнений является системой второго рода, т.е. хорошо обусловленной. Граничные задачи, которые сводятся к таким системам, как правило, дают приемлемые результаты при простой редукции системы уравнений, когда величины коэффициентов отражения  $R$  и прохождения  $T$  практически не изменяются при расчетах, начиная с некоторого  $N$ . В

данной задаче, начиная с 50 членов ряда, величины коэффициентов  $R$  и  $T$  практически не изменялись и совпадали до 5 значащих цифр, независимо от того, учитывается асимптотическое поведение неизвестных коэффициентов или нет. Однако при проверке выполнения условий сопряжения ситуация иная. Если условия сопряжения по потенциалу скорости (11), (13) выполняются с достаточной точностью даже при простой редукции системы, то для условий сопряжения по скорости (10), (11) простая редукция системы приводит к значительной погрешности их выполнения в окрестности угловых точек. При использовании метода улучшенной редукции, в котором учитывается асимптотическое поведение неизвестных, для  $N = 50$  ошибка выполнения условий сопряжения по потенциалу не превышала 0.1 % потенциала падающей волны. О качестве выполнения усло-

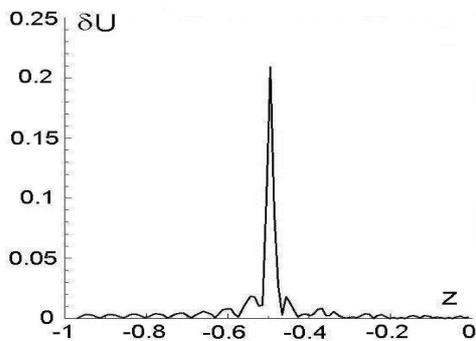


Рис. 2. График точности условий сопряжения по скорости при  $x = -b$

вий сопряжения по скоростям можно судить по данным, представленным на рис. 2. Здесь представлена зависимость модуля разности скоростей  $\delta U = |U_1 - U_2|$  для сечения  $x = -b$ . Расчеты проведены для  $H_2 = 0.5$ ,  $H_3 = 1.0$ ,  $b = 0.5$ ,  $N = 100$ ,  $k_1 H_1 = 2$ . Как видно из рисунка, погрешность выполнения условий сопряжения по скоростям не превышает 2% от скорости падающей волны для всех  $z = -H_2 \pm \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0.15$ . Интересно отметить, что область, в которой условия сопряжения выполняются с данной точностью, расположена симметрично относительно  $z = -H_2$ . При возрастании  $N$  величина  $\varepsilon$  уменьшалась. Аналогичные результаты получены при рассмотрении условий сопряжения по скорости в плоскости  $x = b$ . Величина  $\varepsilon$  оказалась практически одинаковой как для  $x = b$ , так и для  $x = -b$ . Также отметим, что погрешности выполнения условий сопряжения для  $x = -b$  и для  $x = b$  оказались очень близки.

### 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Путем численного решения описанной выше системы  $4N + 4$  уравнений были найдены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от волнового числа падающей волны для разных соотношений глубин до и за препятствием, глубины над препятствием, длины препятствия.

#### Симметричное препятствие

Для симметричного препятствия необходимо принять в вышеприведенных формулах  $H_3 = H_1 = 1.0$ . Результаты расчетов коэффициентов  $R$  и  $T$  в зависимости от волнового числа падающей волны для некоторых соотношений глубин и длины препятствия представлены в виде графиков на рисунках, приведенных ниже.

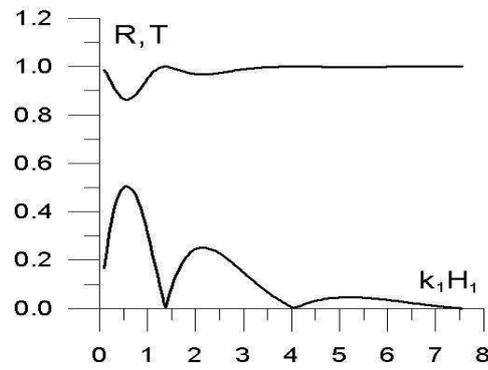


Рис. 3. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.3$  и  $b = 0.5$

На рис. 3–5 представлены результаты расчетов коэффициентов отражения  $R$  и прохождения  $T$  в зависимости от величины волнового числа падающей волны для разных длин препятствия.

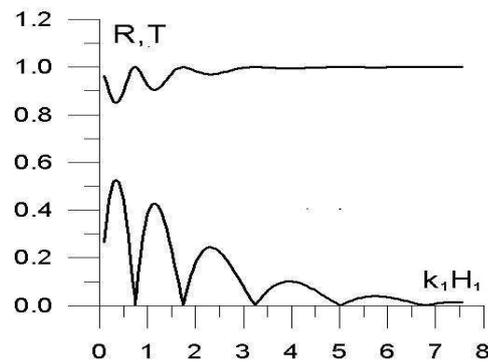


Рис. 4. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.3$  и  $b = 1.0$

Глубина воды над препятствием в области 2 (см.

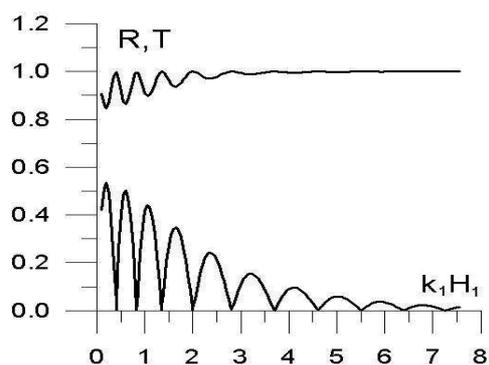


Рис. 5. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.3$  и  $b = 2.0$

рис. 1) составляла  $H_2 = 0.3$ . Видно, что изменение длины препятствия вызывает небольшие изменения максимальных величин максимумов коэффициентов отражения: с ростом  $b$  эти максимальные значения растут, что связано с увеличением загромождения канала. Однако эти изменения  $R$  невелики. В то же время, для определенных значений волнового числа  $k_1$  коэффициент отражения становится равным нулю, так называемое “береговское” рассеяние. Причина появления нулевых значений коэффициента  $R$  связана с взаимодействием волны, отраженной от границы  $x = -b$  с волной, прошедшей через эту границу, распространившейся в области над препятствием до границы  $x = b$ , отраженной от нее и дошедшей обратно до границы  $x = -b$ . В случае, когда фазы этих волн противоположны, коэффициент отражения становится равным нулю и волнолом оказывается полностью “открытым”. Подробно этот механизм рассмотрен в монографии [27].

Увеличение длины препятствия приводит к появлению новых локальных минимумов в распределении коэффициента  $R$  и его график становится сильно изрезанным. Что касается коэффициента прохождения  $T$ , то его поведение четко коррелирует с поведением коэффициента  $R$ , поскольку выполняется закон сохранения энергии, который в данном случае принимает вид  $R^2 + T^2 = 1$ .

Уменьшение высоты препятствия (увеличение глубины воды над препятствием) приводит, как и следовало ожидать, к уменьшению максимальных значений коэффициента отражения. Это наглядно видно на рис. 6-8. Здесь глубина воды  $H_2$  равнялась 0.5. Как и при величине  $H_2 = 0.3$ , коэффициент отражения принимает при определенных значениях волнового числа падающей волны нулевые значения, число которых возрастает с ростом длины препятствия. Интересно отметить, что величи-

ны  $k_1 H_1$ , при которых коэффициент  $R$  обращается в нуль в случае  $H_2 = 0.3$ , отличаются от аналогичных величин при  $H_2 = 0.5$  для равных длин препятствий. Это связано с тем, что длины волн (а значит и скорости волн), распространяющихся над препятствиями, будут отличаться в этих случаях в соответствии с дисперсионным уравнением (5). Это приводит к изменению набега фазы в волне и смещению условий, при которых фазы волн отличаются на  $\pi$ .

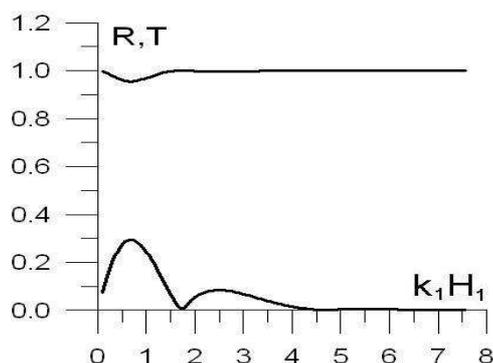


Рис. 6. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.5$  и  $b = 0.5$

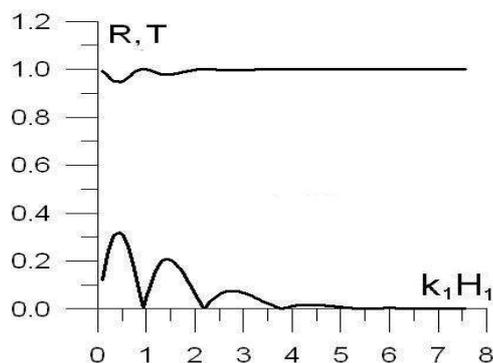


Рис. 7. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.5$  и  $b = 1.0$

Как и в предыдущем случае ( $H_2 = 0.3$ ), наблюдается небольшое увеличение максимальных значений коэффициента отражения при возрастании длины препятствия. Были также проведены расчеты коэффициентов отражения и прохождения для случаев, когда глубина жидкости над препятствием составляла  $H_2 = 0.7$  и  $H_2 = 0.9$ . Полученные результаты отличаются от вышеприведенных только количественно.

Анализ приведенных результатов показал, при уменьшении глубины жидкости над препятствием относительная роль длины препятствия в измене-

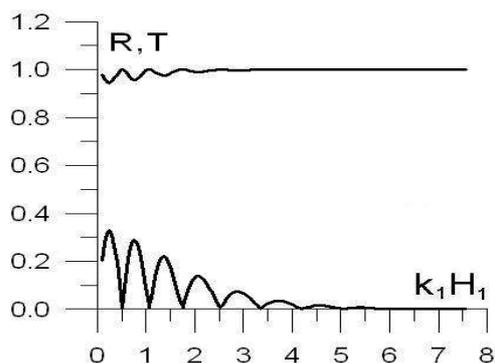


Рис. 8. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.5$  и  $b = 2.0$

нии максимальных значений коэффициента  $R$  возрастает. Но, в целом, основные выводы остаются прежними: (i) максимальные значения коэффициента отражения существенно зависят от высоты препятствия; (ii) коэффициент отражения при определенных значениях волнового числа падающей волны становится равным нулю; (iii) изменение высоты препятствия приводит к изменению значений волнового числа  $k_1$ , при котором коэффициент  $R$  становится равным нулю; (iv) увеличение длины препятствия приводит к росту числа осцилляций коэффициента отражения.

Отметим, что полученные результаты, касающиеся зависимости коэффициентов отражения от волнового числа падающей волны, совпадают с графической точностью с данными расчетов, приведенными в работе [21], при одинаковых параметрах задачи.

#### Несимметричное препятствие

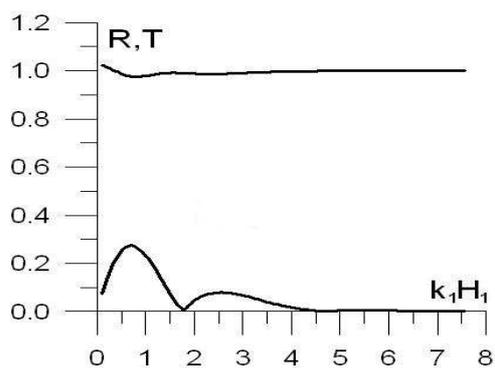


Рис. 9. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.5, H_3 = 0.9$  и  $b = 0.5$

Рассмотрим сначала результаты расчета коэффициентов отражения и прохождения в зависимо-

сти от волнового числа падающей волн для разных длин  $2b$ , когда  $H_2 = 0.5$  и глубина жидкости за препятствием меняется. На рис. 9-11 представлены такие графики для случая, когда глубина жидкости за препятствием  $H_3 = 0.9$ , т.е. отличия от симметричного случая невелики.

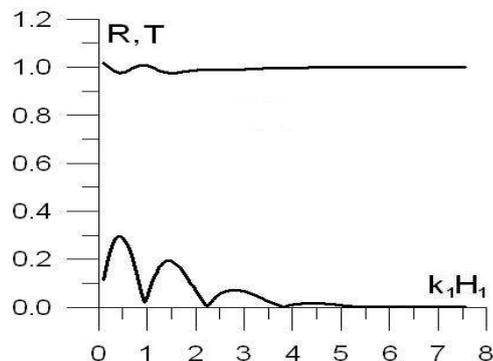


Рис. 10. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.5, H_3 = 0.9$  и  $b = 1.0$

Сравнение с графиками, которые соответствуют симметричному случаю при той же глубине жидкости над препятствием, т.е.  $H_2 = 0.5$  (см. рис. 6–8), показывает, что осциллирующий характер изменений коэффициента отражения в зависимости от  $k_1 H_1$  остается и в несимметричном случае. Однако есть принципиальное отличие, которое заключается в том, что нет полного гашения отраженной волны для относительно больших длин волн. Другими словами, локальные минимумы коэффициента отражения не равны нулю, по крайней мере, до величин  $k_1 H_1 \approx 2.0$ , причем с возрастанием длины препятствия эти отличия становятся более выраженными. Для малых длин волн, когда влияние препятствия становится малым, эти отличия нивелируются.

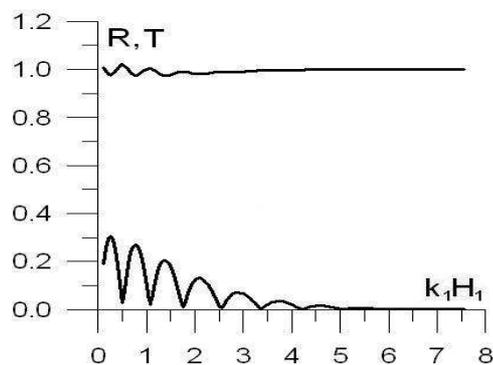


Рис. 11. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.5, H_3 = 0.9$  и  $b = 2.0$

Увеличение глубины жидкости за препятствием приводит к тому, что влияние несимметрии возрастает.

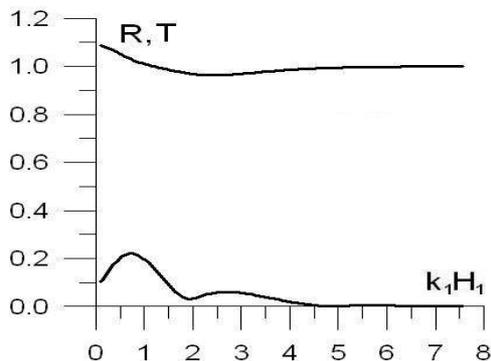


Рис. 12. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.5, H_3 = 0.7$  и  $b = 0.5$

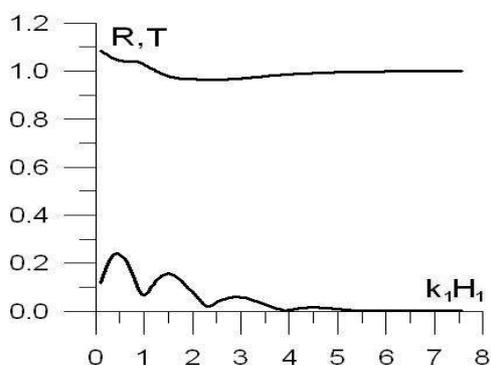


Рис. 13. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.5, H_3 = 0.7$  и  $b = 1.0$

На рис. 12–14 представлены результаты расчетов упомянутых коэффициентов для случая, когда  $H_3 = 0.7$ , а глубина жидкости над препятствием остается той же самой,  $H_2 = 0.5$ .

Из рисунков видно, что для более выраженной несимметрии (глубина жидкости за препятствием уменьшилась от величины 0.9 до 0.7) вызывает заметные отличия локальных минимумов в распределении коэффициента отражения от нуля, причем это наблюдается до величин  $k_1 H_1 \approx 4.0$ , т.е. эти отличия наблюдаются и в более высокочастотной области по сравнению со случаем, когда глубина жидкости за препятствием ( $H_3 = 0.9$ ) была близка к соответствующей глубине до препятствия ( $H_1 = 1.0$ ).

Были также проведены расчеты коэффициентов отражения и прохождения для более высокого препятствия (высота жидкости над ним составляла  $H_2 = 0.3$ ). Отметим, что относитель-

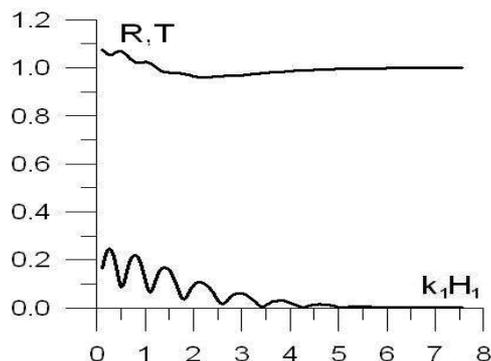


Рис. 14. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.5, H_3 = 0.7$  и  $b = 2.0$

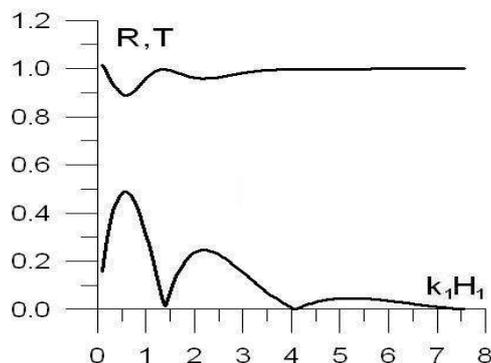
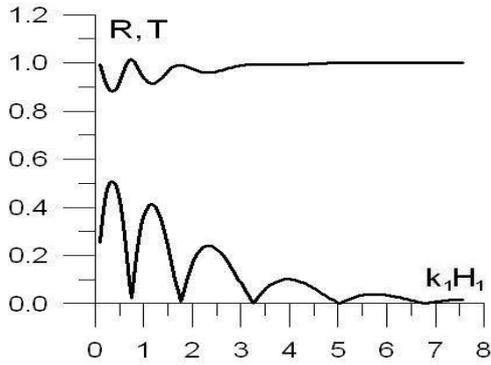
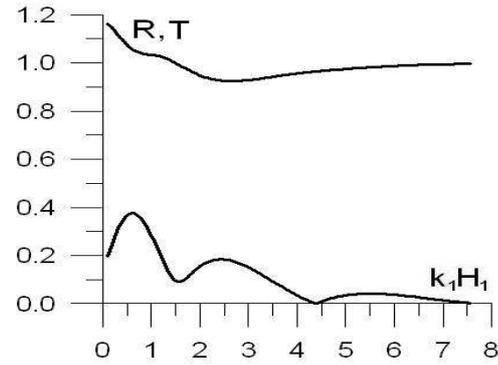
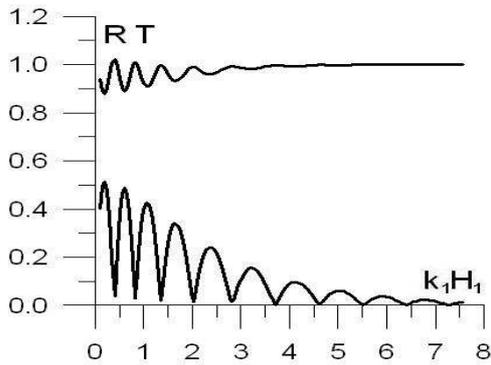
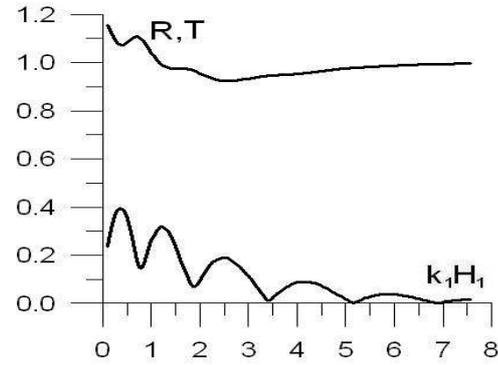


Рис. 15. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.3, H_3 = 0.9$  и  $b = 0.5$

ная роль глубины жидкости ( $H_3 = 0.9$ ) за препятствием в данном случае, когда высота препятствия заметно возросла по сравнению с предыдущим случаем ( $H_2 = 0.5$ ), казалось бы, должна нивелироваться. Однако для длинных волн отличие локальных минимумов коэффициента  $R$  от нуля продолжает наблюдаться, хотя и очень незначительное, особенно для более короткого препятствия. Это видно из рисунков 15–17, которые соответствуют таким длинам препятствия:  $b = 0.5; 1.0; 2.0$ , глубина жидкости за препятствием составляла  $H_3 = 0.9$ .

Тем не менее, упомянутое отличие от нуля хорошо наблюдается. Интересно сравнить приведенные результаты с данными, представленными на рис. 3–5, которые соответствуют симметричному случаю ( $H_3 = H_1 = 1.0, H_2 = 0.3$ ) и рис. 9–11, на которых представлены результаты расчетов несимметричного случая ( $H_1 = 1.0, H_2 = 0.5, H_3 = 0.9$ ). Сравнение показывает, что даже небольшая несимметрия расположения препятствия приводит к отличию минимумов коэффициента  $R$  от нуля.


 Рис. 16. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.3, H_3 = 0.9$  и  $b = 1.0$ 

 Рис. 18. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.3, H_3 = 0.5$  и  $b = 0.5$ 

 Рис. 17. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.3, H_3 = 0.9$  и  $b = 2.0$ 

 Рис. 19. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.3, H_3 = 0.5$  и  $b = 1.0$ 

Возрастание глубины за препятствием приводит к тому, что отличие локальных минимумов от нуля становится существенным. На рис.18–20 представлены результаты расчетов упомянутых коэффициентов в случае, когда  $H_2 = 0.3$ , а глубина жидкости за препятствием существенно больше, чем в предыдущем случае,  $H_3 = 0.5$ . Видно, что рост глубины жидкости за препятствием приводит к существенному увеличению значений локальных минимумов коэффициента  $R$ .

Аналогичные выводы следуют из анализа результатов расчетов коэффициентов  $R$  и  $T$  в случае других глубин жидкости над препятствием, в частности,  $H_2 = 0.5, H_3 = 0.7$ .

Анализ рис. 15–17 и 18–20 наглядно подтверждает сделанный выше вывод о влиянии уменьшения глубины жидкости за препятствием на коэффициенты отражения, а значит и прохождения. Действительно, для случая  $H_2 = 0.3$  длинноволновой части отличия минимальных значений коэффициента  $R$  сопоставимы с максимальными значениями. Так, для  $b = 2.0$  первый минимум достигает значений, равных приблизительно 0.16 (см.

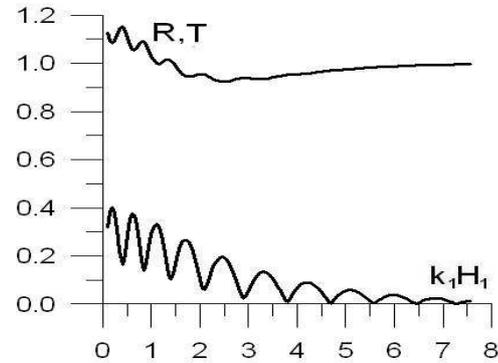

 Рис. 20. Зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  от  $k_1 H_1$  при  $H_2 = 0.3, H_3 = 0.5$  и  $b = 2.0$ 

рис. 20), в то время как первый максимум  $\approx 0.4$ . И здесь уже говорить о равенстве нулю, как в симметричном случае, не приходится.

В то же время, количество минимумов, например, до значений  $k_1 H_1 = 7.0$  при  $b = 2.0$  и  $H_2 = 0.3$  остается одинаковым в симметричном (рис. 5) и несимметричном (рис. 20) случаях.

Аналогичные выводы относительно влияния не-

симметричности препятствия на поведение коэффициента отражения сделаны в работе [30], в которой в приближении длинных волн рассмотрено рассеяние поверхностных гравитационных волн на препятствии при наличии примыкающих к нему углублений. Авторы показали, что в симметричном случае, когда указанные углубления одинаковы, то коэффициент  $R$  достигает нулевых значений, и его величина отлична от нуля при наличии несимметричных склонов в углублениях. Следует также упомянуть работу [18], в которой изучено распространение поверхностных волн над подводной траншеей. Показано, что коэффициент отражения носит осциллирующий характер, и локальные минимумы равны нулю для прямоугольной траншеи. В случае, когда склоны траншеи наклонны и имеют разные формы, то локальные минимумы этого коэффициента отличны от нуля.

### Плоско-волновое приближение

Решение рассматриваемой задачи заключалось, в том числе, в выполнении условий сопряжения, для чего необходимо учитывать существование неоднородных волн. Если пренебрегать этими волнами, то волновое поле вблизи рассмотренных выше вертикальных границ будет определяться с ошибкой, в частности, величины отклонений свободной поверхности будут отличаться по разные стороны от границы. С этой точки зрения важно оценить расстояние  $X$  по горизонтали от места формирования неоднородных волн, на котором влияние этих волн пренебрежимо мало по сравнению с положением  $x = 0$ . В ряде случаев, например, в целях нахождения аналитических зависимостей для коэффициентов отражения и прохождения указанными модами пренебрегают. Это так называемое плоско-волновое приближение (“plane-wave approximation”) [27]. Для нахождения указанного выше расстояния  $X$  следует оценить вклад от самой низкой моды ( $n = 1$ ), поскольку она затухает медленнее всех других,  $\alpha_1 < \alpha_m, m = 2, 3, \dots$ . Как показывает анализ распределения корней уравнения (4), величина  $\alpha_n H$  находится в пределах  $(n - 1/2)\pi < \alpha_n H < n\pi$  [31]. Тогда для  $n = 1$  в качестве наименьшего значения величины  $\alpha_n H$  можно принять  $\pi/2$ . Выражение для потенциала  $\Phi \propto \exp(-\alpha_n X)$  или  $\Phi \propto \exp(-\pi X/2H)$ . Отсюда следует, что для оценки вклада в волновое поле от неоднородных мод величиной 1% расстояние  $X_e$  должно быть [29]  $X \geq 3H$ . Для альтернативной оценки затухания неоднородных мод полагаем, что их вклад является существенным на расстоянии  $X \propto 1/\alpha_2$  [29]. Тогда получаем  $\Phi \propto \exp(-\alpha_n X) = \exp(-1)$ , т.е. оценка в четыре раза больше, чем в предыдущем

случае, когда  $\pi X/2H \approx 4.6$  и полагалось, что вклад на расстоянии  $X$  не более 1%. Таким образом, влияние неоднородных волн простирается на достаточно большое расстояние. Рассмотрим в качестве примера случай, когда  $H_1 = 3$  м,  $H_2 = 1$  м,  $2b = 3$  м. Тогда вклад неоднородных волн в волновое поле над препятствием достигнет уровня 1% по сравнению с их влиянием на границе раздела на расстоянии 3 м, т.е. их влияние распространится на всю область над препятствием.

В случае длинного препятствия влиянием неоднородных мод можно пренебречь при изучении волнового поля над препятствием за исключением областей, примыкающих к границам. Остановимся на указанном приближении применительно к рассматриваемой задаче. Потенциалы скоростей в областях 1–3, исходя из выражений (7)–(9), можно представить в виде:

$$\Phi_1 = \left( e^{i k_1(x+b)} + R e^{-i k_1(x+b)} \right) \varphi_0(z),$$

$$\Phi_2 = (B_0 \cos k_2 x + C_0 \sin k_2 x) \psi_0(z),$$

$$\Phi_3 = T e^{i k_3(x-b)} f_0(z).$$

Для нахождения коэффициентов отражения и прохождения удовлетворяем условиям сопряжения (10)–(13). Рассмотрим случай, когда глубины до и за препятствием равны друг другу, т.е.  $H_1 = H_3$ . В результате получаем функциональные уравнения, алгебраизацию которых осуществляем путем умножения на собственные функции и интегрируя по соответствующему интервалу. В результате получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} i k_1(1 - R) \frac{1}{N_0 \operatorname{ch} k_1 H_1} &= \\ &= k_2(B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b) \frac{P_1}{\operatorname{ch} k_2 H_2}, \\ (1 + R) \frac{P_1}{\operatorname{ch} k_1 H_1} &= \\ &= (B_0 \cos k_2 b + C_0 \sin k_2 b) \frac{1}{M_0 \operatorname{ch} k_2 H_2}, \\ i k_1 T \frac{1}{N_0 \operatorname{ch} k_1 H_1} &= \\ &= k_2 (-B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b) \frac{P_1}{\operatorname{ch} k_2 H_2}, \end{aligned}$$

$$T \frac{P_1}{\operatorname{ch} k_1 H_1} =$$

$$= (B_0 \cos k_2 b + C_0 \sin k_2 b) \frac{1}{M_0 \operatorname{ch} k_2 H_2},$$

где

$$P_1 = \frac{\operatorname{sh}(k_1 H_1 + k_2 H_2)}{2(k_1 + k_2)} + \frac{\operatorname{sh}(k_1 H_1 - k_2 H_2)}{2(k_1 - k_2)} -$$

$$- \frac{k_1}{k_1^2 - k_2^2} \operatorname{sh}(k_1 H_1 - k_1 H_2),$$

$$N_0 = \frac{4 k_1}{\operatorname{sh} 2 k_1 H_1 + 2 k_1 H_1},$$

$$M_0 = \frac{4 k_2}{\operatorname{sh} 2 k_2 H_2 + 2 k_2 H_2}.$$

Введем обозначения  $q = -ik_2/k_1$ ,  $\Lambda = P_1^2 N_0 M_0$ . Решая полученную систему уравнений, находим следующие выражения для коэффициентов отражения и прохождения:

$$R = \frac{\operatorname{tg} k_2 b (1 + \Lambda^2 q^2)}{(\operatorname{tg} k_2 b - q\Lambda)(1 + q\Lambda \operatorname{tg} k_2 b)},$$

$$T = \frac{q\Lambda (1 + \operatorname{tg}^2 k_2 b)}{(q\Lambda - \operatorname{tg} k_2 b)(1 + q\Lambda \operatorname{tg} k_2 b)}.$$

Из этих выражений следует, что коэффициент отражения обращается в ноль при  $\operatorname{tg} k_2 b = 0$  или  $2b = n\lambda_2$ , т.е. на длине препятствия должно укладываться четное число полуволн.

Другая особая точка в вышеприведенных уравнениях –  $\operatorname{tg} k_2 b = \infty$ . Делаем замену  $\operatorname{tg} k_2 b = 1/\operatorname{ctg} k_2 b$  и находим:

$$R = \frac{\operatorname{ctg} k_2 b (1 + \Lambda^2 q^2)}{(1 - q\Lambda \operatorname{ctg} k_2 b)(q\Lambda + \operatorname{ctg} k_2 b)}.$$

Видно, что коэффициент  $R$  обращается в ноль при  $\operatorname{ctg} k_2 b = 0$ , т.е.  $2b = (n + 1/2)\lambda_2$ . Другими словами,  $R$  равен нулю, если на расстоянии  $2b$  укладывается нечетное число полуволн. Объединяя с вышеприведенными соображениями, можно сказать, что коэффициент отражения обращается в ноль, если на длине препятствия укладывается целое число полуволн. Этот вывод согласуется с результатами, приведенными в монографии [27], полученными несколько иным способом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача о рассеивании поверхностных гравитационных волн на прямоугольном погруженном препятствии. Рассмотрен

случай нормального падения. Для решения задачи использован метод разложения решений в ряд по собственным функциям задачи с последующим удовлетворением условий сопряжения. Для решения получаемой в итоге системы уравнений применен улучшенный метод редукции, в котором коэффициенты разложения высокого порядка учитываются асимптотически. Вид этих зависимостей определяется для конкретного типа особенностей задачи, в данном случае особенности по скоростям степенного типа. Сделана проверка точности выполнения условий сопряжения.

Проведены расчеты коэффициентов отражения и прохождения поверхностной волны для симметричного и несимметричного случая. Показано, что для симметричного случая коэффициент отражения обращается в ноль для определенных значений волнового числа падающей волны. Сравнение результатов с известными данными при одинаковых параметрах задачи показало их соответствие.

Проведены систематические расчеты коэффициентов отражения и прохождения для несимметричного случая. Показано, что отсутствие симметрии расположения препятствия, в частности, неравенства глубин жидкости до и после препятствия, приводит к тому, что характер поведения коэффициента отражения остается осциллирующим, как и в симметричном случае, однако его значения в точках локального минимума отличны от нуля. Это отличие становится существенным с возрастанием высоты препятствия и ростом глубины жидкости за препятствием.

Приведены аналитические зависимости для коэффициентов отражения и прохождения, полученные в рамках плоско-волнового приближения ("plane-wave approximation").

1. *Sawaragi T.* Coastal engineering – waves, beaches, wave-structures interactions//Elsevier.–1995.–P.497.
2. *Gerwick B.C.* Construction of marine and offshore structures//CRC Press:2007.– P.802
3. *Kamphuis J.W.* Introduction to coastal engineering and management//World Scientific Publishing:2000.– 470 P.
4. *Dalrymple R.A., Martin P.A.* Wave diffraction through offshore breakwaters // J.of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering.– 1990.– **116**, N 6.– P. 727-741.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика.– М.-Л: Гостехиздат, 1947.– 928 с.
6. *Bartholomeusz E.F.* The reflexion of long waves at a step // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.– 1958.– **54**, N 1.– P. 106–118.
7. *Newman J.N.* Propagation of water waves over an infinite step // J. Fluid Mech.– 1965.– **23**, part 2.– P. 399-415.

8. Newman J.N. Propagation of water waves past long two-dimensional obstacles // *J. Fluid Mech.*– 1965.– **23**, part 1.– P. 23-29.
9. Miles J.W. Surface-wave scattering matrix for a shelf // *J. Fluid Mech.*– 1967.– **28**, part 4.– P. 755-767.
10. Devillard P., Dunlop F., Souillard B. Localization of gravity waves on a channel with a random bottom // *J. Fluid Mech.*– 1988.– **186**– P. 521-538.
11. Mei C.C., Black J.L. Scattering of surface waves by rectangular obstacles in waters of finite depth // *J. Fluid Mech.*– 1969.– **38**, pt. 3.– P. 499-511.
12. Takano K. Effets d'un obstacle parallélépipédique sur la propagation de la houle // *La Houille Blanche.*– 1960.– **15**, N 3.– P. 247-267.
13. Takano K., Nakazawa H. Effets d'un obstacle de parallélépipédique rectangle sur la propagation de la houle // *J. of the Oceanogr Soc. of Japan.*– 1966.– **22**, N 5.– P. 1-9.
14. Kirby J.T., Dalrymple R.A. Propagation of obliquely incident water waves over a trench // *J. Fluid Mech.*– 1983.– **133**– P. 47-63.
15. Lee J.-J., Ayer R.M. Wave propagation over a rectangular trench // *J. Fluid Mech.*– 1981.– **110**– P. 335-347.
16. Rey V., Belzone M., Guazzelli E. Propagation of surface gravity waves over a rectangular bar // *J. Fluid Mech.*– 1992.– **235**– P. 453-479.
17. Guazzelli E., Rey V., Belzone M. Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds // *J. Fluid Mech.*– 1992.– **245**– P. 301-317.
18. Bender Ch.J., Dean R.G. Wave transformation by two-dimensional bathymetric anomalies with sloped transitions // *Coastal Engineering.*– 2003.– **50**– P. 61-84.
19. Tsai C.-C., Hsu T.-W., Lin Y.-T. On step approximation for Roseau's analytical solution of water waves // *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering.*– 2011.– **2011**– P. Article ID 607196.P. 1-20
20. O'Hare T.J., Davies A.G. A new model for surface wave propagation over undulating topography // *Coastal Engineering.*– 1992.– **18**– P. 251-266.
21. Abul-Azm A.G. Diffraction through wide submerged breakwater under oblique waves // *Ocean Engng.*– 1994.– **21**, N 7.– P. 683-706.
22. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // *Мат. методы и физ.-мех. поля.*– 1998.– **41**, N 1.– С. 12-34.
23. Городецкая Н.С., Щербак Т.Н., Никишов В.И. Расcеяние поверхностных гравитационных волн подводным уступом // *Прикладная гидромеханика.*– 2015.– **17(89)**, N 4.– С. 24-35.
24. Chakraborty R., Mandal B.N. Water wave scattering by a rectangular trench // *J. Eng. Math.*– 2014.– **89**– P. 101-112.
25. Kanoria M., Dolai D.P., Mandal B.N. Water-wave scattering by thick vertical barriers // *J. Eng. Math.*– 1999.– **35**– P. 361-384.
26. Mandal B.N., De S. *Water Wave Scattering*// CRC Press.–2015.–P.375
27. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P. *Theory and applications of ocean surface waves*//World Scientific Publishing.–2005.–P.1135
28. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды.*– М.: Наука, 1981.– 798 с.
29. Hudspeth R.T. *Waves and wave forces on coastal and ocean structures*//World Scientific Publishing.–2006.– P. 954
30. Xie J.-J., Liu H.-W., Liu P. Analytical Solution for Long-Wave Reflection by a Rectangular Obstacle with Two Scour Trenches // *J. Eng. Mech.*– 2011.– **137**, N 12.– P. 919-930
31. Linton C.M., P. McIver P. *Handbook of Mathematical Techniques for Wave / Structure Interactions*// Chapman & Hull/CRC.–2001.–P. 298