

УДК 532.8

## АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПРЯМОЛИНЕЙНОМ КАНАЛЕ СО ВСТАВКАМИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. В. ШАЛДЕНКО, А. А. ГУРЖИЙ

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев,  
03056, просп. Победы, 37, корп.5,  
e-mail: a.gourjii@gmail.com

Получено 10.05.15

Рассматривается двухмерная конвективно-диффузионная задача теплопередачи от жидкости внутри прямолинейного канала при малых числах Рейнольдса с системой периодических, симметричных вставок различной геометрии во внешнее твердое пространство с постоянной теплопроводностью. Предполагается, что жидкость является вязкой, однородной, несжимаемой с неизменными физическими параметрами. Гидродинамическая задача решается численно в терминах "функция тока-завихренность" с использованием простого явного метода при решении уравнений переноса завихренности, конвективно-диффузионной теплопроводности и метода последовательной верхней релаксации при решении уравнения Пуассона для функции тока. Показано, что введение системы вставок в прямолинейном канале одновременно повышает градиент давления, необходимого для формирования течения с заданными параметрами, и величину теплового потока через ограничивающие канал поверхности. Установлено, что в области чисел Рейнольдса  $Re < 150 \dots 200$  система вставок является неэффективной с энергетической точки зрения. В то же время, вставки высотой  $0.2D$  (где  $D$  – ширина канала), расположенные на расстоянии  $D$  друг от друга, являются наиболее эффективным случаем для увеличения теплового потока через ограничивающие канал поверхности в диапазоне  $Re = 500 \dots 650$ .

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** процессы теплопередачи, двумерный канал, вязкая жидкость

Розглядається двовимірний конвективно-дифузійний завдання теплопередачі від рідини всередині прямолінійного каналу при малих числах Рейнольдса з системою періодичних симетричних вставок різної геометрії у зовнішній твердий простір з постійною теплопровідністю. Передбачається, що рідина є в'язкою, однорідною, нестисливою і з незмінними фізичними параметрами. Гідродинамічна задача розв'язується чисельно в термінах "функція току-завихореність" з використанням простого явного методу при розв'язку рівнянь переносу завихореності, конвективно-дифузійної теплопровідності і методу послідовної верхньої релаксації при розв'язку рівняння Пуассона для функції току. Показано, що введення системи вставок у прямолінійному каналі одночасно підвищує градієнт тиску, необхідного для формування течії із заданими параметрами, і величину теплового потоку через обмежуючі канал поверхні. Встановлено, що в області чисел Рейнольдса  $Re < 150 \dots 200$  система вставок є неефективною зі енергетичної точки зору. У той самий час, вставки висотою  $0.2D$  (де  $D$  – ширина каналу), розташовані на відстані  $D$  один від одного, є найбільш ефективним випадком для збільшення теплового потоку через обмежуючі канал поверхні в діапазоні  $Re = 500 \dots 650$ .

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** процеси теплопередачі, двовимірний канал, в'язка рідина

The two-dimensional convection-diffusion problems of heat transfer from the fluid inside the straight channel at low Reynolds numbers with periodic, symmetric system of fittings of different geometry into an external solid space with constant thermal conductivity is considered. It is assumed that the fluid is viscous, homogeneous, and incompressible with constant physical parameters. The hydrodynamic problem is solved numerically in terms of "stream function-vorticity" using a simple explicit method for solving equations of vorticity transport, convection-diffusion thermal conductivity, and successive over-relaxation method for solving the Poisson equation for stream function. It is shown that the introducing of fittings in the straight channel increases both the pressure gradient required for the formation of the flow with given parameters, and the heat flux through the channel boundaries. It was found that system of fittings in the channel at Reynolds numbers  $Re < 150 \dots 200$  is ineffective from energy point of view. On the other hand, the fittings with height of  $0.2D$  (where  $D$  is channel width) spaced at distance  $D$  from each other, are the most effective case for increasing the heat flow through boundaries of the channel in the range of  $Re = 500 \dots 650$ .

**KEY WORDS:** heat transfer processes, two-dimensional channel, viscous flow

### ВВЕДЕНИЕ

Стремительное развитие инновационных технологий ставит перед современными исследователями новые прикладные задачи, решение которых находит широкое применение в конструкторской и исследовательской деятельности, разработке новых технологий. Большим стимулом к таким ис-

следованиям является непрерывный процесс миниатюризации, использование электронных технологий, которые позволяют конструировать надежное и производительное оборудование меньших масштабов [1, 2]. Большинство технологических процессов связано с выделением (или поглощением) тепла. Поэтому проблема контролируемого и управляемого отвода тепла в современном миниатюрном оборудовании представляет сегодня одну

из актуальных проблем.

Основным назначением теплообменника является передача тепла от жидкого, или двухфазного (паро-жидкого) теплоносителя во внешнюю среду [3]. В теплоносителе используются два основных способа теплопередачи: конвективный механизм, вызванный движением теплоносителя по теплообменнику, и диффузионный механизм, вызванный молекулярной передачей тепла от тел более нагретых к телам менее нагретым. Количественной мерой отвода тепла служит тепловое сопротивление [4], которое встречаются диффузионные потоки в теплообменниках различной конструкции. Снижение теплового сопротивления представляет один из основных путей увеличения теплоотдачи теплотехнических устройств.

В настоящее время существует несколько способов [5, 6] снижения теплового сопротивления диффузионного потока от поверхности теплообменника во внешнюю среду: радиаторные системы, вынужденная конвекция, некоторые конструктивные особенности и другое. Наше внимание направлено на снижение теплового сопротивления от жидкого теплоносителя к поверхности теплоносителя.

Особенностью малогабаритных теплообменников является наличие ламинарного потока теплоносителя. Такие потоки имеют только продольную составляющую компонент скорости, поэтому конвективный тепловой поток в основном направлен вдоль оси каналов теплообменника. Выравнивание поля температур в канале за счет введения в него различных препятствий [3, 4] позволяет направить конвективный поток в сторону границ теплообменника. В результате тепловые потоки в поперечном направлении возрастают и общее тепловое сопротивление теплообменника уменьшается.

В конце прошлого столетия в гидромеханике было открыто явление хаотической адвекции – физического явления, связанного с интенсивными процессами скалярных полей, вызванными неустойчивыми конвективными потоками в жидкости [7, 8]. Для этого явления характерно то, что при определенных условиях интенсивными потоками массопереноса обладают ламинарные течения. Поиск областей интенсивной адвекции представляет собой достаточно сложную научную проблему [8-10]. При этом в течении формируются различные циркуляционные зоны, сепаратриссы в линиях тока (траекториях), системы устойчивых и неустойчивых многообразий, которые, в конечном итоге, приводят в интенсификации процессов переноса.

Динамическая неустойчивость в ламинарных

течениях, как правило, возникает при обтекании острых кромок, периодическом воздействии на течение и некоторых других случаях [8]. Следовательно, введение различных препятствий внутри канала теплообменника может привести к потере устойчивости ламинарного течения, к формированию нестационарных или квазистационарных вихревых зон, которые могут способствовать переносу тепла из нагретой осевой части канала в охлажденную пристеночную область.

Однако введение различного рода препятствий в поток жидкости в канале приводит к увеличению потерь на давление. В этом случае для формирования течения в канале с заданной скоростью необходимо приложить больший градиент давления. При этом возникает вопрос: насколько эффективным является введение в канал различных препятствий, компенсируются ли потери на давления увеличением теплового потока через ограничивающие поверхности. Получение оценки эффективности увеличения теплового потока при введении системы периодических вставок в двухмерный прямолинейный канал является основной целью настоящих исследований.

## 1. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Процессы теплопереноса в канале (рис. 1), заполненном однородной вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью  $\rho$ , кинематической вязкостью  $\nu$  и температуропроводностью  $\alpha$  описываются уравнениями Навье-Стокса, уравнением неразрывности и уравнением конвективно-диффузионной теплопроводности, консервативная форма записи которых при отсутствии действия внешних сил и источников тепловыделения в прямоугольной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\}, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial UT}{\partial x} + \frac{\partial VT}{\partial y} = \alpha \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right\}, \quad (4)$$

где  $U(x, y, t)$ ,  $V(x, y, t)$  – проекции поля скорости

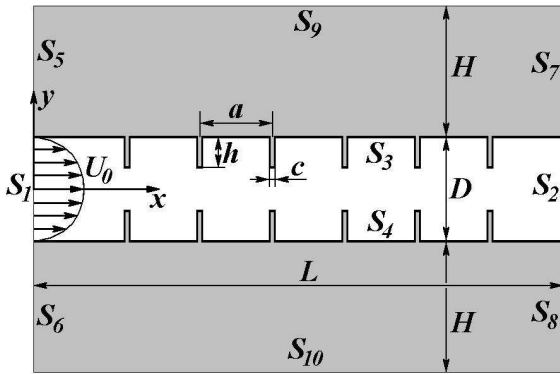


Рис. 1. Геометрия задачи с симметричной системой вставок

рассматриваемого течения;  $p(x, y, t)$  – поле давления;  $T(x, y, t)$  – поле температур. Во внешней области процессы теплопереноса описываются уравнением (4) при условии  $U = V = 0$ .

Дифференцирование уравнения (1) по координате  $x$ , уравнения (2) – по координате  $y$  и последующее их сложение с учетом (3) приводит к двумерному уравнению Пуассона для давления:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right\}. \quad (5)$$

Если уравнение (2) продифференцировать по координате  $x$ , уравнение (1) – по координате  $y$ , затем определить разность полученных выражений, то, принимая во внимание уравнение (3), получим уравнение переноса завихренности [11]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U \omega}{\partial x} + \frac{\partial V \omega}{\partial y} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right\}, \quad (6)$$

где поле завихренности в двумерном случае определяется выражением

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (7)$$

Введение функции тока в соответствии с выражением [12]

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (8)$$

и подстановка (8) в уравнение (7) приводит к уравнению Пуассона для функции тока:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega, \quad (9)$$

которое связывает распределение функции тока в рассматриваемом течении с распределением поля завихренности.

**Граничные условия.** При движении вязкой жидкости должно выполняться граничное условие прилипания (смотри обозначения на рис. 1):

$$\begin{aligned} U(x, y, t)|_{S_3} &= 0, & U(x, y, t)|_{S_4} &= 0, \\ V(x, y, t)|_{S_3} &= 0, & V(x, y, t)|_{S_4} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

На входе и выходе канала задается ламинарное распределение поля скорости:

$$\begin{aligned} U(0, y, t)|_{S_1} &= U_{in} 4y \left( \frac{1}{D_{in}} - \frac{y}{D_{in}^2} \right), \\ U(L, y, t)|_{S_2} &= U_{out} 4y \left( \frac{1}{D_{out}} - \frac{y}{D_{out}^2} \right), \\ V(0, y, t)|_{S_1} &= 0, & V(L, y, t)|_{S_2} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $U_{in}$  и  $U_{out}$  – максимальные скорости течения (в середине) на входе и выходе канала;  $D_{in}$  и  $D_{out}$  – ширина канала на входе и выходе соответственно.

Уравнение Пуассона для функции тока (9) необходимо дополнить следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t)|_{S_3} &= 0, & \Psi(x, y, t)|_{S_4} &= \Psi_w, \\ \Psi(0, y, t)|_{S_1} &= U_{in} \frac{4y^2}{D_{in}} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{3D_{in}} \right), \\ \Psi(L, y, t)|_{S_2} &= U_{out} \frac{4y^2}{D_{out}} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{3D_{out}} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что для заданного параболического профиля скорости на входе канала  $\Psi_w = 2D_{in}U_{in}/3$ .

Граничными условиями для поля температур являются:

$$\begin{aligned} T_f(0, y, t)|_{S_1} &= T_1, & T_f(0, y, t)|_{S_2} &= T_{out}(y, t), \\ \frac{\partial T_f}{\partial n} \Big|_{S_3} &= \gamma \frac{\partial T_s}{\partial n} \Big|_{S_3}, & \frac{\partial T_f}{\partial n} \Big|_{S_4} &= \gamma \frac{\partial T_s}{\partial n} \Big|_{S_4}, \\ \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{S_5, S_6, S_7, S_8} &= 0, & T_s|_{S_9, S_{10}} &= T_0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\gamma = \gamma_s/\gamma_f$  – отношение теплопроводностей твердой среды и жидкости в канале;  $T_0$  – температура охладителя на удалении  $H$  от канала;  $T_1$  – температура жидкости на входе канала;  $n$  – вектор нормали к поверхности. В приведенных выражениях  $T_f(x, y, t)$ ,  $T_s(x, y, t)$  – поле температур в жидкой и твердых средах соответственно. Профиль температур  $T_{out}(y, t)$  на выходе канала определяется при проведении вычислений.

Для поля завихренности граничными условиями на входе и выходе канала являются:

$$\begin{aligned} \omega(0, y, t)|_{S_1} &= \frac{4U_{in}}{D_{in}} \left(1 - \frac{2y}{D_{in}}\right), \\ \omega(L, y, t)|_{S_2} &= \frac{4U_{in}}{D_{in}} \left(1 - \frac{2y}{D_{out}}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Граничные условия на твердых поверхностях канала (S3,S4) будут определены позднее.

Для поля давления граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} p(0, y, t)|_{S_1} &= P_f, & p(L, y, t)|_{S_2} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{S_3} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{S_4} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $p_f$  – разность приложенных давлений между входом и выходом канала.

**Начальные условия.** В качестве начальных условий задаются распределения полей функции тока  $\Psi(x, y, 0)$ , завихренности  $\omega(x, y, 0)$ , соответствующие ламинарному течению внутри прямолинейного канала, и поле температур  $T(x, y, 0)$ . Для определения начального распределения гидродинамических параметров течения необходимо решить задачу (9) с учетом (7) и (8) с соответствующими начальными условиями (12). При необходимости можно определить начальное распределение поля давления,  $p(x, y, 0)$ . В этом случае необходимо решить уравнение (5) с начальными условиями (15) для заданного распределения поля скорости,  $U(x, y, 0)$  и  $V(x, u, 0)$ .

В дальнейшем удобно задачу пронормировать на ширину канала  $D = D_{in}$ , максимальную скорость течения в средней части на входе канала  $U_0 = U_{in}$ , плотность жидкости  $\rho$  и на разницу температур,  $\Delta T = T_1 - T_0$ , жидкости на входе канала ( $T_1$ ) и на бесконечном удалении от него ( $T_0$ ). В результате получаем следующую систему безразмерных величин:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{D}, & y^* &= \frac{y}{D}, & t^* &= \frac{tU_0}{D}, \\ U^* &= \frac{U}{U_0}, & V^* &= \frac{V}{U_0}, & \Psi^* &= \frac{\Psi}{DU_0}, \\ p^* &= \frac{p}{\rho U_0^2}, & \omega^* &= \frac{\omega D}{U_0}, & Q^* &= \frac{T - T_0}{\Delta T}. \end{aligned} \quad (16)$$

В этом случае нормированные уравнения переноса завихренности (6), уравнение Пуассона для функции тока (9) и уравнение конвективно-диффузионной теплопроводности (4) принимают вид (здесь и далее звездочки у безразмерных ве-

личин опущены):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U \omega}{\partial x} + \frac{\partial V \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right\}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega, \quad (18)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial U Q}{\partial x} + \frac{\partial V Q}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left\{ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right\}, \quad (19)$$

где  $\text{Re} = U_0 D / \nu$  – число Рейнольдса;  $\text{Pe} = U_0 D / \alpha$  – число Пекле. Отметим, что  $\text{Pe} = \text{Pr Re}$ , где  $\text{Pr} = \nu / \alpha$  – число Прандтля. Вид уравнений (7), (8) и (9) с использованием безразмерных переменных не меняется.

При необходимости для заданного распределения поля скорости можно определить нормированное распределение поля давления из уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (20)$$

Приведенные уравнения будут в дальнейшем использоваться при проведении численного моделирования процессов теплопередачи в прямолинейном канале.

## 2. ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ УРАВНЕНИЙ

Задача о переносе тепла в криволинейном канале, заполненном однородной, вязкой, несжимаемой жидкостью, решалась численно на равномерной сетке в шагом пространственной дискретизации  $\delta$  по обеим координатам и шагом  $\Delta$  по временной координате.

Введем обозначение индексов узлов вычислительной сетки

$$F(x, y, t) = F(i\delta, j\delta, n\Delta) \equiv F_{i,j}^n, \quad (21)$$

которое будет в дальнейшем использоваться при проведении дискретизации физических полей в рассматриваемой задаче.

В этом случае уравнения (7) и (8) имеют следующие дискретные аналоги второго порядка точности [13]:

$$\omega_{i,j}^n = \frac{-V_{i+1,j}^n + V_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\delta}, \quad (22)$$

$$U_{i,j}^n = \frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\delta}, \quad (23)$$

$$V_{i,j}^n = \frac{\Psi_{i-1,j}^n - \Psi_{i+1,j}^n}{2\delta}. \quad (24)$$

Уравнения (18) и (20) представляют собой уравнения эллиптического типа, которые можно представить в общем виде:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = S. \quad (25)$$

где  $S$  – источниковое слагаемое.

Для решения этого уравнения применялся метод последовательной верхней релаксации – итерационный метод, который обладает достаточно высокой сходимостью [14]. В общем виде численная схема этого метода со вторым порядком точности представления производных по пространственным переменным имеет вид (индекс вверху в скобках означает номер итерации)

$$F_{i,j}^{(k+1)} = F_{i,j}^{(k)}(1 - \lambda) + \frac{\lambda}{4} \left\{ F_{i+1,j}^{(k)} + F_{i-1,j}^{(k)} + F_{i,j+1}^{(k)} + F_{i,j-1}^{(k)} - S_{i,j}^{(k)} \delta^2 \right\}, \quad (26)$$

которая применяется для всех внутренних узлов течения до тех пор, пока  $|F_{i,j}^{(k+1)} - F_{i,j}^{(k)}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – точность решения поставленной задачи. Здесь  $\lambda$  – параметр релаксации, который выбирается в диапазоне  $1 < \lambda < 2$ , следуя рекомендациям в [14].

Значение завихренности на стенке определяется из условия прилипания жидкости к твердой поверхности. Рассмотрим плоскую поверхность снизу и запишем разложение значения функции тока  $\Psi(x, y + \delta)$  в ряд Тейлора относительно точки  $(x, y)$ , принадлежащей границе.

$$\Psi(x, y + \delta) = \Psi(x, y) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_{(x,y)} \delta^2 + O(\delta^3). \quad (27)$$

Из граничного условия прилипания на границе следует, что  $\partial \Psi / \partial y|_S = U(x, y) = 0$ . В то же время, из этого же условия получаем, что на твердой поверхности  $V(x, y) = 0$  и  $\partial V / \partial x|_S = 0$ . Получаем  $\partial^2 \Psi / \partial y^2|_S = -\omega(x, y)$ .

Таким образом, из уравнения (27) следует, что [14]

$$\omega(x, y) = \frac{2[\Psi(x, y) - \Psi(x, y + \delta)]}{\delta^2} + O(\delta). \quad (28)$$

Другими словами, значение завихренности на границе определяется в первом приближении скоростью изменения значений функции тока около поверхности.

Уравнение переноса завихренности (17) и уравнение конвективно-диффузионной теплопроводности (19) представляют собой уравнения параболического типа. Общий вид этих уравнений можно

записать

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial U F}{\partial x} + \frac{\partial V F}{\partial y} = \frac{1}{Ze} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right). \quad (29)$$

Здесь  $Ze$  – параметр уравнения.

Для решения этого уравнения использовалась простая явная схема второго порядка точности по пространственным координатам и первого порядка точности по времени с разностями против потока:

$$F_{i,j}^{n+1} = -\Delta ([UF]_{i,j}^n + [VF]_{i,j}^n) + (1 - 4\beta)F_{i,j}^n + \beta \{F_{i+1,j}^n + F_{i-1,j}^n + F_{i,j+1}^n + F_{i,j-1}^n\}, \quad (30)$$

В этом выражении использовались обозначения

$$\beta = \frac{\Delta}{Ze\delta^2}. \quad (31)$$

$$\frac{\partial U F}{\partial x} \Big|_{i,j} = [UF_x]_{i,j} \quad (32)$$

$$= \begin{cases} \frac{(UF)_{i,j} - (UF)_{i-1,j}}{\delta} & \text{при } U_{i,j} > 0, \\ \frac{(UF)_{i+1,j} - (UF)_{i,j}}{\delta} & \text{при } U_{i,j} \leq 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial V F}{\partial y} \Big|_{i,j} = [VF_y]_{i,j} \quad (33)$$

$$= \begin{cases} \frac{(VF)_{i,j} - (VF)_{i,j-1}}{\delta} & \text{при } V_{i,j} > 0, \\ \frac{(VF)_{i,j+1} - (VF)_{i,j}}{\delta} & \text{при } V_{i,j} \leq 0. \end{cases}$$

**Условие устойчивости.** Несмотря на простоту схемы (30) решения параболических уравнений, простая явная схема обладает недостатком, связанным с условием устойчивости. Любое возмущение  $\varepsilon = \varepsilon_{i,j}^n$ , внесенное в узел  $(i, j)$  схемы, на каждой последующей итерации интегрирования по времени, должно быть

$$\left| \frac{\varepsilon_{i,j}^n}{\varepsilon} \right| \leq 1, \quad (34)$$

Это условие накладывает ограничение на величину шага дискретизации по времени (смотри подробности в [14, разделы 3.1.4 и 3.1.5]):

$$\Delta = \frac{2}{\frac{U_{i,j}}{\delta} - \frac{2Ze}{\delta^2}}. \quad (35)$$

Некоторые особенности устойчивости простой явной схемы решения параболических уравнений в области малых значений параметра  $Ze$  можно найти в недавней публикации [15]. Условие (35) использовалось при проведении дальнейших вычислений.

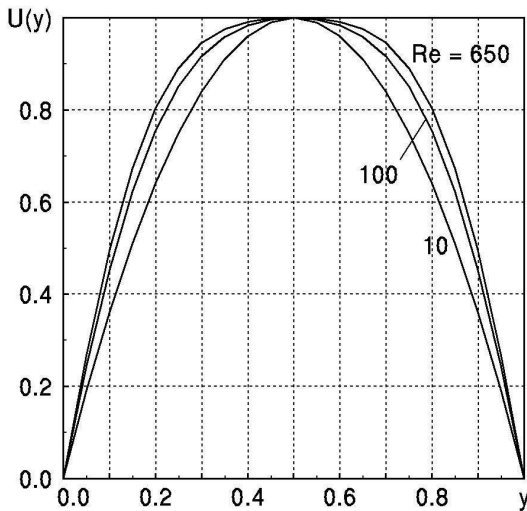


Рис. 2. Профиль продольной скорости при разных значениях Re в прямолинейном канале

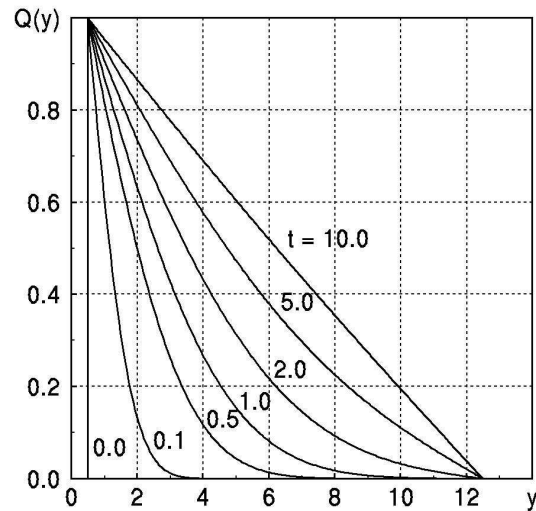


Рис. 3. Профиль температур в тестовой задаче

### 3. ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ

Тестирование гидродинамической части программы было проведено на аналитическом решении стационарной задачи ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости внутри прямолинейного канала без вставок, в котором при малых числах Рейнольдса Re формируется параболический профиль продольной компоненты скорости  $U(y)$  [12, 16]. При увеличении Re профиль сглаживается в центральной части канала и формирует большой градиент  $dU(y)/dy$ .

В качестве теста рассмотрим случай:  $L = 18$ ,  $\delta = 0.05$ . Нормированные профили продольной скорости, построенные в сечении  $x = L/2$  при различных числах Рейнольдса Re, показаны на рис. 2. Максимальная по модулю разность между значениями скорости  $E_{max}^U = \max\{|U(L/2, y) - U_{теор}(L/2, y)|\}$  при  $-0.5 < y < 0.5$ , полученными при вычислениях и в аналитическом решении, показаны в табл. 1 для различных значений Re.

Табл. 1. Максимальная ошибка численного решения тестовой гидродинамической задачи

Re	25	65	100	250	650
$E_{max}^U$	0.005	0.075	0.092	0.107	0.124

Тестирование термической части программы было проведено на одномерной нестационарной задаче диффузионного распространения тепла в однородной среде от нагретой стенки  $y = 0.5$  с температурой  $Q_1 = 1.0$  к холодной стенке  $y = H$  с тем-

пературой  $Q_2 = 0.0$ . Тест проводился для случая  $\gamma \gg 1$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $Pe = 5.0$  и  $H = 12.5$ . Результаты вычислений поля температур  $Q(D/10, y, t)$  показаны на рис. 3 для различных моментов времени.

Аналитическое решение тестовой задачи теплопроводности имеет вид [17]

$$Q(y, t) = \operatorname{erf} \frac{y - 0.5}{2\sqrt{\alpha t}} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{erfc} \frac{2nH + y - 0.5}{2\sqrt{\alpha t}} - \operatorname{erfc} \frac{2nH - y + 0.5}{2\sqrt{\alpha t}} \right), \quad (36)$$

где  $\operatorname{erf}(z)$  и  $\operatorname{erfc}(z)$  – интегралы вероятностей [18].

Максимальная разность между вычисленными значениями поля температур и для различных моментов времени сведены в таблицу 2. Видно, что максимальная ошибка в определении значений поля температур не превышает 0.3%.

Табл. 2. Максимальная ошибка численного решения тестовой задачи теплопроводности

y	1.0	2.0	4.0	8.0
$t = 0.1$	0.0020	0.0006	0.0000	0.0000
$t = 0.5$	0.0026	0.0018	0.0005	0.0000
$t = 1.0$	0.0026	0.0022	0.0010	0.0001
$t = 2.0$	0.0022	0.0023	0.0015	0.0003
$t = 4.0$	0.0017	0.0021	0.0018	0.0008
$t = 10.0$	0.0013	0.0017	0.0018	0.0011

Таким образом, простая явная схема для решения параболических уравнений и метод последовательной верхней релаксации для решения эллиптических уравнений в двухмерной задаче

конвективно-диффузионного теплопереноса в прямолинейном канале с хорошей точностью описывает физические поля в области малых значений числа Рейнольдса ( $Re < 1000$ ).

#### 4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим процессы диффузионно-конвективной теплопередачи в двухмерном прямолинейном канале с длиной  $L = 18.0$ , заполненным вязкой несжимаемой жидкостью (вода) с кинематической вязкостью  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , плотностью  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ , коэффициентом теплопроводности  $\gamma_f = 0.6 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{град})$  и коэффициентом температуропроводности  $\alpha_f = 1.43 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$  [5]. Внешняя теплопроводящая среда толщиной  $H = 8.5$  представляет собой твердое тело с тепловыми свойствами, соответствующими воздуху: коэффициент теплопроводности  $\gamma_s = 0.026 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{град})$  и коэффициент температуропроводности  $\alpha_s = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . В этом случае получаем следующие нормированные параметры:  $\gamma = 0.04$ ,  $Re = 7.0$ . Течение развивается в сторону положительных значений оси  $0x$ .

Сначала рассмотрим физические процессы в прямолинейном канале без вставок, а потом разместим в канале систему одинаковых вставок толщиной  $c = 0.1$ , высотой  $h$ , смещенные друг относительно друга на расстояние  $a$  (рис. 1). Необходимо выяснить изменения градиента давления, необходимые для формирования течения с заданной продольной скоростью, и тепловые потоки через ограничивающие канал поверхности при изменении высоты  $h$  вставок и расстояния  $a$  между ними.

Вычисления показывают, что в прямолинейном канале без вставок градиент давления  $dp/dx$  достигает равномерного распределения по длине канала и оказывается прямо пропорциональным (с точностью до трех знаков) числу Рейнольдса  $Re$ , что соответствует аналитическому решению [12, 19]

$$\frac{dp}{dx} = \frac{8\rho\nu U_m}{D^2} = \frac{8\rho\nu^2}{D^3} Re, \quad (37)$$

где  $U_m$  – максимальная скорость жидкости на оси канала. Эта зависимость представлена на рис. 4 в виде горизонтальной сплошной линии, соединяющей кружочки.

Если в прямолинейном канале разместить вставки, то для достижения потоком скорости, соответствующей скорости жидкости в канале без вставок, необходимо приложить большую разность давлений. При этом образуется больший градиент

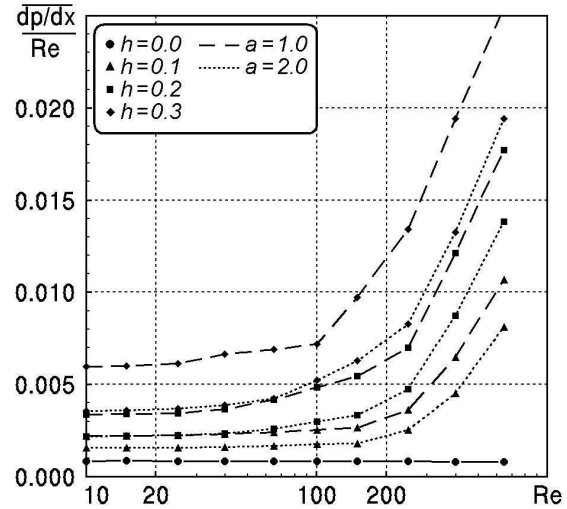


Рис. 4. Зависимость нормированного градиента давления, усредненного по длине канала от числа Рейнольдса  $Re$

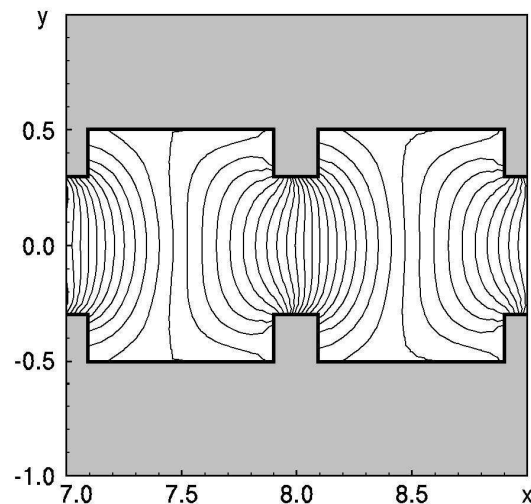


Рис. 5. Пример распределение нормированного давления внутри канала со вставками

давления в области течения между вставками, который формирует ускорение жидкости в меньшем сечении канала. На рис. 5 показаны линии равного уровня поля давления с шагом дискретизации  $\Delta p = 0.02$  в центральной части канала при  $Re, a = 1.0, h = 0.2$ .

Результаты вычислений усредненного по длине канала нормированных значений градиента давления  $dp/dx$  показаны на рис. 4. Видно, что увеличение количества вставок и их высоты приводят

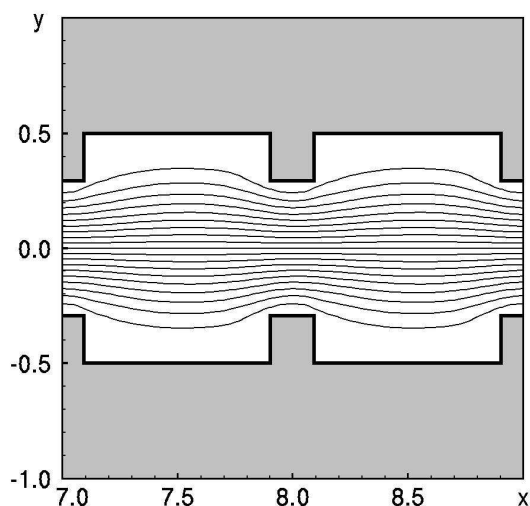


Рис. 6. Распределение функции тока в течении канала при  $Re=40$ ,  $a = 1.0$ ,  $h = 0.2$

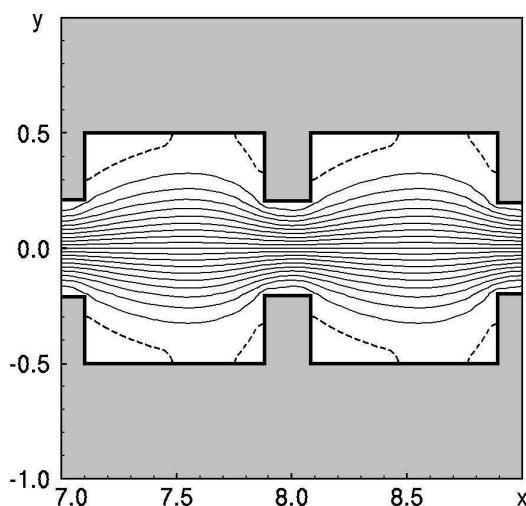


Рис. 7. Распределение функции тока в течении канала при  $Re=40$ ,  $a = 1.0$ ,  $h = 0.3$

к заметному увеличению градиента давления. Например, для случая  $a = 2.0$ ,  $h = 0.2$  усредненный градиент давления в канале при  $Re < 65$  примерно в 2.7 раза больше по сравнению с соответствующим режимом в канале без вставок, а при  $Re = 650$  это значение увеличивается до 17.6. Другими словами, наличие системы поперечных вставок в канале вносят существенное гидродинамическое сопротивление по сравнению с прямолинейным каналом без вставок.

Высокие гидродинамические потери в канале со вставками вызваны не только периодическим сужением поперечного сечения канала, но и особенностями течения около препятствий. При обтекании жидкостью вставок на малых числах Рейнольдса в жидкости появляются поперечные компоненты скорости, для формирования которых необходимо затратить дополнительную энергию. На рис. 6 показан характерный пример распределения поля функции тока для стационарного ламинарного течения жидкости при  $Re = 40$ . На рисунке показаны линии равного уровня с шагом дискретизации  $\Delta\Psi = 0.0133$  в центральной части канала. Видно, что жидкость плавно обтекает препятствия, формируя поперечное течение перед и за препятствиями. Сгущение линий тока в области между вставками свидетельствует о большей скорости потока в этой части канала. Поперечное течение за вставками протекает существенно медленнее по сравнению с осевой скоростью в центральной части канала.

С увеличением высоты вставки поперечное сече-

ние канала между вставками уменьшается и скорость жидкости в этой области увеличивается. Быстрое движение жидкости в осевой части канала начинает формировать вихревые зоны перед и за препятствиями. В современной научной литературе такие крупномасштабные вихревые структуры часто называют вихрями Моффатта [20]. Характерный случай обтекания вставок при  $Re = 40$  показан на рис. 7, который выполнен по аналогии с рис. 5. На рисунке штриховой линией нанесены вихревой области течения жидкости, в которой линии тока представляют собой замкнутые кривые. Жидкость в этих областях движется со скоростью, примерно на порядок меньшей, чем характерная скорость течения жидкости в канале. Течение при этом формируется квазистационарное, граница раздела вихревой зоны и осевого течения с течением времени периодически смещается вдоль боковой границы. В результате часть жидкости из осевого течения попадает в вихревую зону и с течением времени достигает боковой границы канала. Интересно отметить, что в рассматриваемом случае имеют место вихревые зоны течения не только за препятствиями, но и перед ними. Однако площадь этих зон за вставками в несколько раз больше по сравнению с площадями вихревых зон перед препятствиями.

При дальнейшем увеличении скорости течения размеры вихревых зон увеличиваются и при некотором значении числа Рейнольдса  $Re$  образуется единая вихревая зона, расположенная между вставками канала. Характерный случай показан



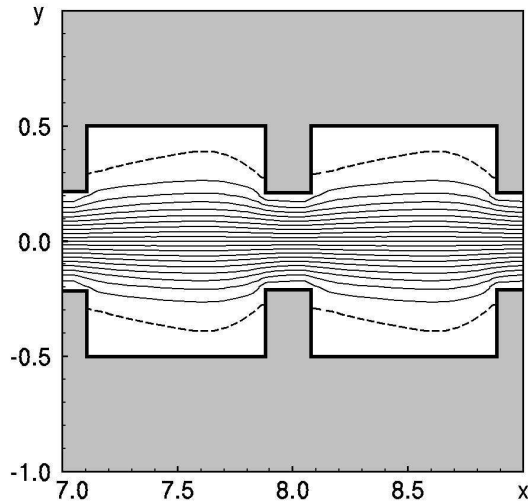


Рис. 8. Распределение функции тока в течении канала при  $Re=100$ ,  $a = 1.0$ ,  $h = 0.3$

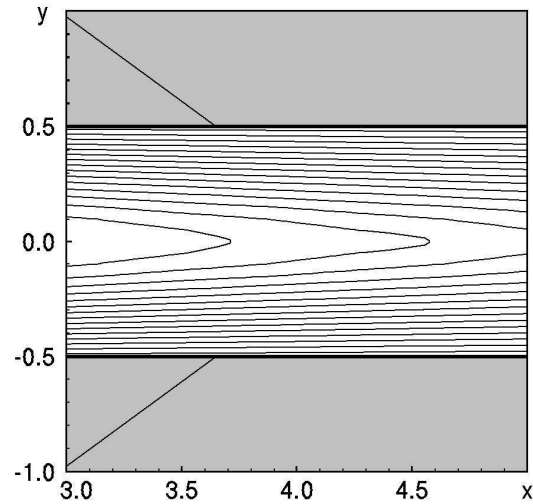


Рис. 9. Распределение нормированного поля температур в канале без вставок при  $Re = 40$

на рис. 8 (при  $\Delta\Psi = 0.0333$ ) для геометрии вставок, которые соответствуют случаю на рис. 7. Течение в канале при этих параметрах является квазистационарным, форма и размеры вихревой зоны с течением времени претерпевают незначительные изменения. Следовательно, жидкость из осевой области течения проникает в область, прилегающую к боковым стенкам канала. Исследования показывают, что с увеличением числа Рейнольдса  $Re$  в канале происходит постепенное сужение эффективного сечения канала. Этот процесс протекает тем быстрее, чем чаще располагаются в канале вставки и чем больше их высота. Такая тенденция “запирания” канала приводит к заметному увеличению усредненного по длине канала градиента давления (смотри рис. 4).

При движении теплосодержащей жидкости по каналу проявляются два механизма теплопередачи: конвективный механизм, вызванный движением жидкости, и диффузионный механизм, связанный с теплопередачей тепла от нагретых областей течения к более холодным. Во внешней неподвижной среде имеет место только диффузионный механизм теплопередачи. На рис. 9 показан пример распределения нормированного поля температур  $Q(x, y)$  в момент времени  $t = 100.0$  в прямолинейном канале без вставок. На рисунке показаны линии равного уровня с шагом дискретизации  $\Delta Q = 0.05$  в начальной области канала. Видно, что в рассматриваемом течении преобладающим является конвективный перенос тепла вдоль канала. По направлению к стенке значения поля тем-

ператур постепенно уменьшается, формируя ненулевой диффузионный поток во внешнюю среду.

На рис. 10 показано аналогичное распределение поля температур в канале со вставками для случая  $Re = 40$ ,  $a = 1.0$  и  $h = 0.2$  (смотри рис. 6) в момент времени  $t = 100.0$ . В этом случае горячая жидкость из осевой части течения приближается к границе течения значительно ближе, уменьшая градиент температур в осевой части канала и формируя достаточно большой градиент температур около боковой границы канала. Следовательно, в канале со вставками формируется более интенсивный диффузионный поток через границы канала по сравнению с аналогичным каналом без вставок. Заметим, что в области между вставками встречаются потоки жидкости с разными температурами. Диффузионные процессы сглаживают поле температур в этой области, и, как следствие, горячая жидкость после следующей вставки движется к боковой границе канала в соответствии с траекториями жидких частиц, показанными на рис. 6.

Увеличение скорости движения жидкости приводит к тому, что при больших значениях числа Рейнольдса  $Re$  в осевой части канала формируется поток нагретой жидкости. В каждой ячейке канала между вставками формируется квазистационарная вихревая область, которая захватывает часть нагретой жидкости и переносит к стенкам канала. Диффузионные процессы внутри вихревых областей постепенно выравнивают поле температур, что в конечном итоге приводит к формированию большего градиента температур на по-

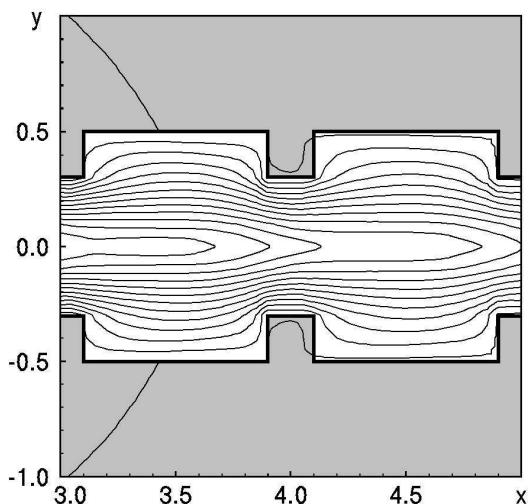


Рис. 10. Распределение нормированного поля температур в канале при  $Re=40$ ,  $a = 1.0$ ,  $h = 0.2$

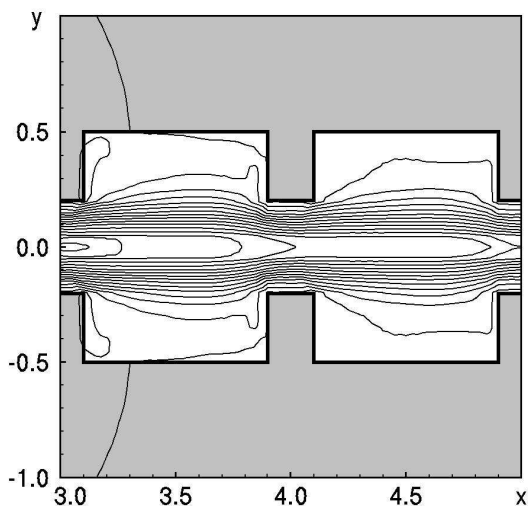


Рис. 11. Распределение нормированного поля температур в канале при  $Re=100$ ,  $a = 1.0$ ,  $h = 0.3$

верхности канала и к большему тепловому потоку. Характерный пример распределения нормированного поля температур для случая  $Re = 100$ ,  $a = 1.0$ ,  $h = 0.3$  показан на рис. 11 с шагом дискретизации  $\Delta Q = 0.05$ . На этом рисунке можно заметить процесс захвата нагретой жидкости из осевой части канала перед вставкой и соответствующий вынос охлажденной жидкости за вставкой в осевую часть канала.

Исследования показывают, что для потока с малыми числами Ренольдса  $Re$  диффузионные по-

токи на заданной длине канала успевают охладить жидкость в канале. При увеличении скорости движения жидкости объемный поток поступающей жидкости увеличивается и нагретая жидкость быстрее протекает через канал. Это приводит к тому, что на выходе канала температура жидкости увеличивается по мере увеличения числа Рейнольдса  $Re$  для всех рассмотренных случаев. Тепловые потоки через границу течения имеют максимальные значения на входе канала, постепенно уменьшаясь по мере продвижения к его выходу. Анализ численных результатов показывает, что диффузионные потоки в первом приближении прямо пропорциональны скорости движения жидкости в канале, однако эта пропорциональность постепенно уменьшается по мере увеличения числа Рейнольдса  $Re$ .

На рис. 12 показана зависимость нормированного теплового потока  $\bar{W}$ , усредненного по всей длине канала. Зависимость для прямолинейного канала без вставок на рисунке показана сплошной линией, соединяющей кружочки. Видно, что тепловой поток в первом приближении прямо пропорционален значению  $Re$ . Однако, по мере увеличения скорости жидкости, значения  $\bar{W}$  фактически выходят на константу в рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса  $Re$ . Другие кривые нанесены на рисунке по аналогии с рис. 4.

Анализ количественных результатов показывает, что величина усредненного диффузионного теплового потока через боковые поверхности канала в первую очередь зависит от высоты вставок. Фактически, увеличение  $h$  в три раза увеличивает наклон зависимости  $\bar{W}(Re)$  примерно в четыре раза. в то же время, количество вставок (или расстояние между вставками) оказывает меньшее влияние на величину общего диффузионного потока в канале. Интересно отметить, что каналы со вставками  $a = 1.0$  обладают большим тепловым потоком при прочих равных условиях в рассматриваемом диапазоне значений чисел Рейнольдса  $Re$ .

Другими словами, введение системы симметричных вставок в прямолинейный канал позволяет увеличить тепловой диффузионный поток через боковые поверхности канала за счет увеличения потерь на давление, необходимого для формирования течения с заданной скоростью на входе канала. Потери на давление зависят не только от количества вставок в канале, но и от их высоты. Поэтому, для определения эффективности введения системы симметричных вставок в прямолинейный канал введем параметр, равный отношению увеличения величины усредненного теплового потока в канале со вставками к увеличению усредненных

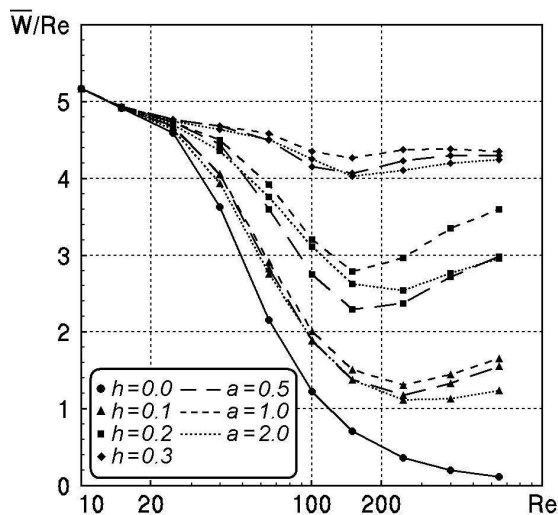


Рис. 12. Зависимость усредненного по длине канала нормированного теплового потока через боковые поверхности канала от числа Рейнольдса

потерь на давление по отношению к соответствующим гидродинамическим и тепловым параметрам течения в прямолинейном канале без вставок в виде

$$K = \frac{K_w}{K_p}, \quad K_w = \frac{\bar{W}}{\bar{W}_0}, \quad K_p = \frac{\overline{dp/dx}}{\overline{dp/dx}_0}, \quad (38)$$

где  $K_w$  – отношение усредненных по длине тепловых потоков через боковые поверхности канала со вставками ( $\bar{W}$ ) и без вставок ( $\bar{W}_0$ );  $K_p$  – отношение усредненных по длине канала градиентов давления течения жидкости канала со вставками ( $\overline{dp/dx}$ ) и без вставок ( $\overline{dp/dx}_0$ ). Это отношение позволяет определить эффективность введения вставок различного размера в прямолинейный канал для различных значений числа Рейнольдса  $Re$  в рассматриваемом течении.

Результаты вычислений показаны на рис. 13 с принятыми ранее обозначениями. Видно, что в области значений  $Re < 150 \dots 300$  введение вставок в прямолинейный канал оказывается неэффективным,  $K < 1.0$ . Дополнительные потери на давление в канале со вставками становятся больше, чем повышение диффузионного теплового потока через ограничивающие поверхности. В то же время, в области значений  $Re > 500 \dots 600$  появление вставок значительно увеличивает эффективность прямолинейного канала,  $K > 1.0$ . При этом наиболее эффективным каналом является канал с частыми вставками  $a = 0.5$  умеренной высоты  $h = 0.2$ . Эффективность каналов с  $a = 1.0$  и  $h =$

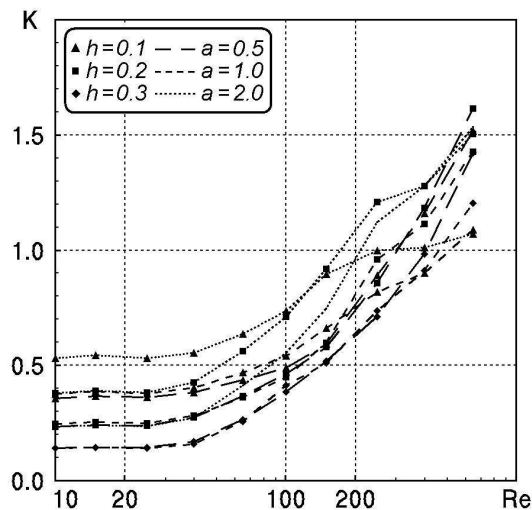


Рис. 13. Коэффициент эффективности теплопередачи через боковые поверхности прямолинейного канала со вставками

0.1...0.2 остается также высокой. Основной причиной высокого уровня эффективности теплопередачи через ограничивающие поверхности прямолинейных каналов со вставками является образование крупномасштабных, квазистационарных вихревых структур между вставками, которые интенсифицируют выравнивание поля температур в областях, прилегающих к границам. Анализ зависимостей на рис. 13 указывает на то, что эффективность вставок существенно уменьшается для высоких ( $h = 0.3$ ) вставок по сравнению с каналами, содержащими вставки меньшей высоты.

## ВЫВОДЫ

В работе решена задача конвективно-диффузионной теплопередачи от нагретой жидкости внутри прямолинейного канала со вставками различного размера во внешнюю среду при малых числах Рейнольдса  $Re$ . Теплоноситель представляет собой вязкую однородную, несжимаемую жидкость с постоянными параметрами, а внешняя среда – твердое тело с неизменными теплопроводными свойствами. Задача решалась численно на равномерной сетке в прямоугольной системе координат путем одновременного решения гидродинамической задачи в терминах “функция тока - завихренность” и тепловой задачи для заданных начальных и граничных условий. При численном решении применялся простой явный метод решения уравнений параболического типа (уравнения переноса завихренности и уравнения

конвективно-диффузионной теплопроводности) и метод последовательной верхней релаксации для решения уравнений эллиптического типа (уравнения Пуассона для функции тока и уравнения Пуассона для давления).

Проведен анализ точности численного решения тестовых задач, связанных с стационарным ламинарным течением вязкой несжимаемой жидкости в прямолинейном канале без вставок и одномерной нестационарной задачи теплопередачи от стенки канала в твердую среду с неизменной температурой на фиксированном расстоянии. Установлены ограничения на шаг дискретизации по времени численного решения простой явной схемой для параболических уравнений в рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса  $Re$ . Показано, что тестовые задачи решены с хорошей точностью, не превышающей 0.5% значения продольной компоненты скорости в гидродинамической задаче при малых числах Рейнольдса  $Re$  и 0.2% значения поля температур в задаче теплопроводности.

Установлено, что при увеличении скорости осевого потока в прямолинейном канале со вставками в областях между вставками образуются стационарные и квазистационарные вихревые зоны, которые формируют тепловой поток от осевой части канала к боковым его поверхностям. Конвективный поток, наведенный полем скорости вихрей, и диффузионный поток в вихревой зоне между вставками приводят к выравниванию поля температур около границ. Градиент поля температур на стенках канала повышается, что приводит в конечном итоге к увеличению диффузионного теплового потока во внешнюю среду.

Исследования показали, что вихревые зоны сначала формируются около вставок и, по мере увеличения числа Рейнольдса  $Re$ , увеличиваются в размерах, образуя вихревую пристеночную область. Этот процесс начинается тем раньше, чем больше высота вставок и меньше расстояние между вставками в канале.

Анализ результатов численного моделирования показал, что в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re < 150...200$  введение вставок в прямолинейный канал оказывается неэффективным. При медленном движении жидкости в канале увеличение градиента давления, необходимого для формирования течения с заданной осевой скоростью, не компенсируется соответствующим увеличением диффузионного потока через ограничивающие поверхности во внешнюю среду. При  $Re > 500...650$  появление вставок с относительной высотой  $0.2D$  и расстоянием  $D$  между вставками, где  $D$  – ширина канала, приводит к существенному увеличению тепло-

вого потока. Исследования показали, что ставки с относительно высотой  $0.2D$  оказываются наиболее эффективными по отношению ко вставкам другой высоты при одинаковых расстояниях между вставками и неизменными параметрами потоков.

1. *Ottino J.M.* Complex systems // *Am. Inst. Chem. Eng. J.*– 2003.– **49**, N.2.– P. 292–299.
2. *Stroock A.D.* Chaotic mixer for microchannel // *Science.*– 2002.– **295**.– P. 647–651.
3. *Кутателадзе С.С.* Основы теории теплообмена.– М.: Атомиздат, 1979.– 416 с.
4. *Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М.* Теория тепло- и массообмена.– М.,Л.: Госэнергоиздат, 1961.– 680 с.
5. *Кутателадзе С.С., Боришанский В.И.* Справочник по теплопередаче.– М.,Л.: Госэнергоиздат, 1958.– 414 с.
6. *Михеев М.А.* Основы теплопередачи.– М.,Л.: Госэнергоиздат, 1949.– 396 с.
7. *Aref H.* Stirring by chaotic advection // *J. Fluid Mech.*– 1984.– **143**.– P. 1–23.
8. *Ottino J.M.* The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport.– Cambridge: Cambridge University Press, 1989.– 364 p.
9. *Краснопольская Т.С., Мелешко В.В.* Ламинарное смешивание жидкостей. Часть 1. Методологические аспекты исследования // *Прикладная гидромеханика.*– 2004.– Т.6, N.4.– С. 45–58.
10. *Гуржий А.А., Пеерхосаини Х.* Локальные карты растяжений: приложение для задачи об адвекции в произвольном поле скорости // *Прикладная гидромеханика.*– 2000.– Т.2, N.1.– С. 28–43.
11. *Вилля Г.* Теория вихрей.– М.,Л.: Гостехиздат, 1936.– 266 с.
12. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
13. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.1. Основные положения и общие методы.– М.: Мир, 1991.– 504 с.
14. *Роуч П.* Вычислительная гидромеханика.– М.: Мир, 1980.– 616 с.
15. *Шалденко А.В.* Анализ устойчивости простой явной схемы численного решения параболических уравнений в гидромеханике // *Сб. "Сучасні аспекти розробки програмного забезпечення".*– 2015.– Вып.2.– С. 80–92.
16. *Александров В.Л.* Техническая гидромеханика.– М.: Гостехиздат, 1946.– 432 с.
17. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности.– М.: Высшая школа, 1967.– 600 с.
18. *Абрамовиц А.* Справочник по специальным функциям.– М.: Наука, 1979.– 832 с.
19. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.1.– М.: Наука, 1970.– 492 с.
20. *Moffatt H.K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *J. Fluid Mech.*– 1964.– **18**.– P. 1–18.