

УДК 532.465

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВНУТРЕННИХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН ВТОРОЙ БАРОКЛИННОЙ МОДЫ ПРИ ИХ ФРОНТАЛЬНОМ СТОЛКНОВЕНИИ

Е. ТЕРЛЕЦКАЯ, В. МАДЕРИЧ, И. БРОВЧЕНКО

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев  
03187, просп. академика Глушкова, 42  
e-mail: kterletska@gmail.com

Получено 9.06 2015

Рассматривается задача о фронтальном столкновении внутренних уединенных волн второй моды. Численные эксперименты показали наличие нескольких типов взаимодействия в зависимости от нормированной на толщину слоя раздела амплитуды волны второй моды. В случае взаимодействия слабо нелинейных волн они сохраняют свой профиль, амплитуда уменьшается в основном за счет вязкого трения и присутствует небольшой фазовый сдвиг. Особенностью взаимодействия переносящих массу волн при числе Фруда, близком к критическому, оказывается то, что волны до соударения являются волнами переносящими массу, а после соударения они трансформируются в слабо нелинейные волны. Взаимодействие устойчивых, переносящих массу волн происходит таким образом, что взаимодействующие волны проходят дальше, частично захватывая окрашенную жидкость в ядрах. При дальнейшем увеличении амплитуд волн с захваченным ядром, при соударении минимальные числа Ричардсона в волнах падают ниже значений 0.12, что приводит к формированию неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Внутри отразившихся и захваченных волнами ядер происходит интенсивное перемешивание, что приводит к росту потерь энергии.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** фронтальное столкновение, внутренние волны второй бароклиновой моды, численное моделирование

Розглядається задача про фронтальне зіткнення усамітнених внутрішніх хвиль другої моди. Чисельні експерименти показали наявність декількох типів взаємодії в залежності від нормованої на товщину шару розділу амплітуди хвилі другої моди. У разі взаємодії слабо нелінійних хвиль вони зберігають свій профіль, амплітуда зменшується в основному за рахунок в'язкого тертя і присутній невеликий фазовий зсув. Особливістю взаємодії хвиль, що переносять масу, при числі Фруда, близькому до критичного, є те, що хвилі до зіткнення є хвилями, що переносять масу, а після зіткнення вони трансформуються в слабо нелінійні хвилі. Взаємодія стійких хвиль, що переносять масу, відбувається таким чином, що взаємодіючі хвилі проходять далі, частково захоплюючи забарвлену рідину в ядрах. При подальшому збільшенні амплітуд хвиль із захопленням ядром, при зіткненні мінімальні числа Річардсона в хвилях падають нижче значень 0.12, що призводить до формування нестійкості Кельвіна-Гельмгольца. Усередині хвиль, що відбилися, і ядер, що були захоплені хвилями, відбувається інтенсивне перемішування, що призводить до зростання втрат енергії.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** фронтальне зіткнення, внутрішні хвилі другої барокліної моди, чисельне моделювання

The problem of head-on collision of the solitary internal waves of second mode is considered. Numerical simulations have revealed the presence of several interaction types depending on the normalized second mode wave amplitude on the thickness of the interface. In the case of interaction of weakly nonlinear waves, they retain their profile and the amplitude is reduced mainly due to viscous friction and the small phase shift is occurred. Peculiarity of the interaction of waves with the trapped cores with the Froude numbers close to the critical values is that the waves before collision are the waves with the trapped cores and after the collision, they are transformed into weakly nonlinear waves. Interaction of waves with the trapped cores occurs with the capturing dyed fluid from the cores when waves transmit each other. Further increase of amplitude in waves with the trapped cores lead to decrease of minimum Richardson number below 0.12, resulting in the formation of Kelvin-Helmholtz instability. Inside cores that captured by reflected and waves intensive mixing is occurred. And the intensive mixing leads to the increase of energy losses.

**KEY WORDS:** head-on collision, second baroclinic mode internal solitary waves, numerical modeling

## ВВЕДЕНИЕ

Внутренние волны в океане являются важным механизмом переноса и диссипации энергии [1]. В устойчиво стратифицированном океане преобладают внутренние волны первой бароклиновой моды. В зависимости от расположения пикноклина относительно дна и поверхности внутренние волны первой моды бывают двух типов – волны по-

вышения (пикноклин ближе ко дну) и волны понижения (пикноклин ближе к поверхности). В то же время, при наличии прослоек в профиле плотности возможно возникновение волн второй моды, генерируемых бароклиным приливом над неоднородностями дна ([2–7]). Волны второй моды характеризуются симметричными колебаниями в слое раздела и могут представлять собой как сужения пикноклина ("вогнутые" волны второй моды), так и расширение пикноклина ("выпуклые" волны вто-

рой моды). Особенностью "выпуклых" внутренних волн второй моды является возможность захвата и переноса на значительные расстояния жидкости в ядре таких волн [8–11] при достаточно большой амплитуде. Аналогичным свойством обладают волны первой моды, распространяющиеся в тонком пикноклине у поверхности или у дна в океане [8] и в пограничном слое атмосферы [12, 13]. Слабо нелинейная теория таких волн второй моды на глубокой воде была развита в работах [14, 15]. Уединенные волны второй бароклинной моды больших амплитуд хорошо описываются решениями уравнения Дюбрель-Жакотен [16]. Динамика распространения таких волн исследовалась в как в лабораторных экспериментах [8–11], так и численно [17, 18].

В данной работе изучается столкновение уединенных внутренних "выпуклых" волн второй моды. Подобное явление для волн первой моды с захваченным ядром наблюдается в пограничном слое атмосферы [19–20].

Солитонные решения ряда уравнений, в том числе уравнений Кортевега-Де Вриза (КдВ), Гарднера, нелинейного уравнения Шредингера, обладают свойством сохранять форму при взаимодействии [21]. В отличие от этих уравнений, взаимодействие внутренних уединенных волн, описываемое в рамках уравнений Эйлера и Навье-Стокса, отличается от солитонного, хотя отклонения от эластичного взаимодействия (без потерь кинетической энергии) небольшие (см. обзор в [22]). Взаимодействие внутренних волн малой амплитуды в двухслойной жидкости при фронтальном столкновении аналитически и численно изучалось в [23–25], где показано, что оно проявляется в генерации дисперсионных хвостов и некотором малом фазовом сдвиге. Столкновение внутренних уединенных волн понижения большой амплитуды исследовалось численно в работе [26], где было обнаружено, что, кроме фазового сдвига и дисперсионных хвостов, взаимодействие приводит к сдвиговой неустойчивости и формированию вихрей Кельвина-Гельмгольца в слое раздела. Процессы взаимодействия волн с захваченным ядром еще более сложны из-за взаимодействия объемов переносимой жидкости. В работах [27, 28] приведены результаты лабораторных экспериментов, тогда как результаты моделирования взаимодействия волн второй моды одинаковой амплитуды представлены в [17], однако эти результаты имеют качественный характер. Настоящее исследование обобщает известные работы и впервые представляет классификацию процессов взаимодействия.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Расчеты проводились в рамках уравнений Навье-Стокса для стратифицированной по солености воды в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{g_i \rho}{\rho_0}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U_j \frac{\partial S}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2}, \quad (3)$$

где  $x_i = (x, y, z)$  – декартовы координаты, ось  $z$  направлена вертикально вверх;  $U_i = (U, V, W)$  – составляющие поля скорости;  $P$  – давление;  $\rho$  – плотность воды;  $S$  – соленость;  $g_i = (0, 0, g)$  – ускорение свободного падения;  $\nu$  – кинематическая вязкость;  $\chi$  – молекулярная диффузия. Система уравнений дополнялась уравнением состояния. На свободной поверхности касательные напряжения отсутствуют, а на твердых границах используются условия скольжения. Детально алгоритм решения системы (1)–(3) описан в [29].

Данная численная модель применялась для проведения серии численных экспериментов по фронтальному взаимодействию волн второй моды в слое раздела. Конфигурация лотка показана на рис. 1. Лоток длиной  $L = 3$  м и высотой  $2H = 0.92$  м заполнен двухслойной жидкостью с плотностью верхней жидкости  $\rho_1$ , нижней жидкости –  $\rho_2$ , которые разделены тонким слоем раздела толщиной  $2h$ . Стратификация в лотке симметрична относительно середины глубины лотка и описывается функцией:

$$\rho(z) = \rho_0 \left( 1 - \frac{\Delta\rho}{2} \text{th} \left( \frac{z}{2h} \right) \right), \quad (4)$$

где  $h$  – толщина слоя раздела. Внутренние волны генерировались коллапсом перемешанной области [30], когда в бассейне выделяется часть объема, заполненная водой с плотностью  $\rho_0$ , где  $\rho_0 = (\rho_2 + \rho_1)/2 = 1009.5 \text{ кг м}^{-3}$  и  $\Delta\rho = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_0 = 0.022$ , молекулярная вязкость  $\nu = 1.14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$  и молекулярной диффузии соли  $\chi = 10^{-9} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ . Начальный объем перемешанной жидкости с плотностью  $\rho_0$  был помечен пассивной примесью. На твердых границах расчетной области задавались условия скольжения.

Основные характеристики волны, используемые при анализе, изображены на рис. 1. Волна характеризуется амплитудой  $a$ , которая определяется как максимальное отклонение изоликны от уровня

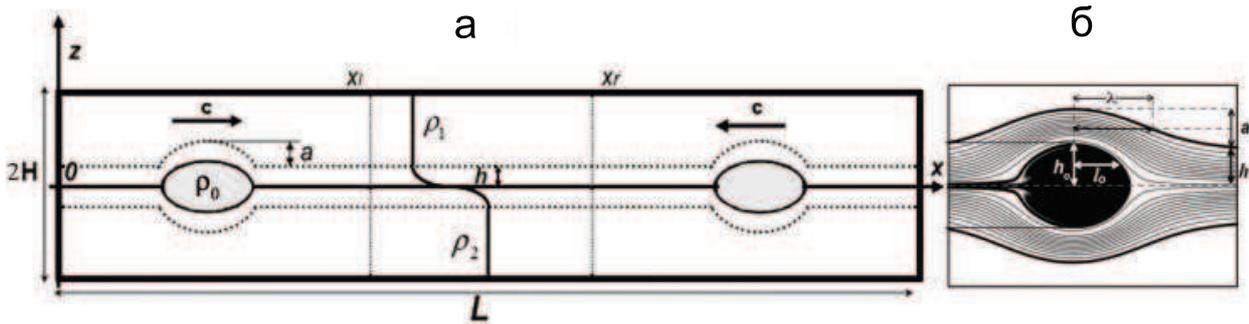


Рис. 1. Схема численного эксперимента (а), основные характеристики волн, используемые при анализе (б)

$h$ , длиной волны  $\lambda$ , которая равна половине расстояния, на котором амплитуда волны уменьшается вдвое. Аналогично определяется горизонтальный размер ядра волны  $l_0$  как половина расстояния, на котором половинная высота ядра  $h_0$  падает в два раза. Высота ядра волны определяется как расстояние от оси симметрии до границы области, переносящей массу, то есть области, где локальные скорости превышают скорость длинных линейных волн. Фазовая скорость волны  $U_c$  вычисляется как скорость вершины волны.  $U_m$  – максимальная скорость в вертикальном сечении волны. Эффект влияния высоты вычислительного лотка на распространение внутренних волн описывается с помощью параметра  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{H}{h}. \quad (5)$$

Известно, что распространение волн второй моды в лотке сопровождается появлением волны первой моды [31]. В работе проведено исследование влияния первой моды на распространение волны второй моды. Для этого результаты моделирования полного лотка, изображенного на рис. 1, сравнивались с расчетами для моделирования только верхней симметричной половины лотка  $z > 0$ , при котором было исключено появление первой бароклинной моды. В данном численном эксперименте  $h = 0.5$  см и амплитуда волны  $a/h = 4.5$ . Сравнение результатов моделирования показало, что на расстояниях 10-15 длин волн влияние первой моды не существенно. Амплитуды волн, после прохождения 15 длин волн, отличаются на 2.5%. Разница в оценках потерь энергии для этих случаев будет обсуждаться при анализе процессов взаимодействия. Основные расчеты приведены для верхней половины лотка  $z > 0$ . Задача решалась в квазидвумерной постановке, когда уравнения дискретизировались в нескольких узлах поперек бас-

сейна при условии скольжения на боковых стенках бассейна. Разрешение сетки по длине, высоте и ширине для верхней половины лотка составляло  $3000 \times 300 \times 5$  узлов.

Приведем далее основные параметры, характеризующие динамику волн второй моды. Характерная скорость длинных волн второй моды определяется как

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{gh\Delta\rho}. \quad (6)$$

Характерное время вычисляется по формуле

$$\tau_0 = 2\sqrt{\rho_0 h / \Delta\rho g}. \quad (7)$$

Отношение максимальной локальной скорости  $U_m$  к фазовой скорости волн  $U_c$  определяет внутреннее число Фруда:

$$Fr_{max} = U_m / U_c. \quad (8)$$

Число Рейнольдса будет

$$Re = Ch/\nu. \quad (9)$$

Эффективное число Рейнольдса  $Re_{eff}$ , характеризующее влияние вязкости на волны конечной амплитуды, определяется как

$$Re_{eff} = \frac{U_m a}{\nu}. \quad (10)$$

Устойчивость волн характеризуется числом Ричардсона:

$$Ri = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} / \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2. \quad (11)$$

Отметим, что в работе [18] была показана неполная автомодельность динамики волн по числу

Рейнольдса, которая выражается в не исчезающей при больших  $Re_{eff}$  зависимости минимального значения параметра Ричардсона  $Ri_{min}$  и скорости затухания амплитуд волн от  $Re_{eff}$ .

Были проведены серии расчетов при толщинах пикноклина  $h=0.5;1;2$  см (соответствующие численным экспериментам из работы [18]). Параметры для серий этих расчетов приведены в таблице 1. Изменяя размеры перемешанного объема, в каждой серии расчетов были получены наборы волн различных амплитуд  $a$ , характеризующихся безразмерной скоростью  $U_c/C$ , числом Фруда  $Fr_{max}$ , числом Рейнольдса  $Re_{eff}$  и минимальным значением числа Ричардсона  $Ri_{min}$ .

Табл. 1. Параметры расчетов

$h$ (см)	Re	$\varepsilon$
0.5	75	92
1	200	46
2	575	23

В зависимости от значений параметров  $Fr_{max}$  и минимального числа Ричардсона  $Ri_{min}$  выделены три основных класса симметричных уединенных волн второй моды, распространяющихся в слое раздела между двумя глубокими однородными слоями воды [18]:

1. Слабо нелинейные внутренние уединенные волны при  $Fr_{max} < 1$  и  $Ri_{min} > 1$ , распространяющиеся в слое раздела без захвата жидкости в ядре. Линии тока в движущейся системе координат у таких волн разомкнуты. Динамика таких волн описывается теорией Бенджамина-Оно [14].

2. Сильно нелинейные внутренние волны с устойчивым ядром захваченной жидкости при  $Ri_{min} > 0.15$  и  $1 < Fr_{max} < 1.3$

3. Сильно нелинейные локально неустойчивые волны  $Fr_{max} \approx 1.3$ . При значениях  $Ri_{min} \leq 0.1$  происходит развитие сдвиговой неустойчивости, которая приводит к формированию вихрей Кельвина-Гельмгольца. Волна, в целом, устойчива и переносит массу, которая, однако, теряется за счет неустойчивости КГ.

В последующих разделах рассматривается фронтальное взаимодействие волн второй моды для каждого из классов и приведены примеры для серии экспериментов для  $h=0.5$  см.

## 2. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

### 2.1. Взаимодействие слабо нелинейных волн

Взаимодействие волн без захвата жидкости в ядре показано на рис. 2,а. Амплитуда набегающей волны  $a/h = 0.81$ . При соударении волна сохраняет свой профиль, амплитуда уменьшается в основном за счет вязкого трения. Траектория вершин взаимодействующих волн представлена на рис. 4,а, из которого видно, что присутствует небольшой фазовый сдвиг, но в целом при данном типе взаимодействия отклонения от эластичного соударения малы.

### 2.2. Взаимодействие переносящих массу волн при числе Фруда, близком к критическому

Особенность данного типа взаимодействия заключается в том, что волны до соударения являются волнами, переносящими массу, с числом Фруда  $Fr_{max}$  в окрестности критического значения 1, а после соударения они трансформируются в слабо-нелинейные волны. На рис. 2,б показано столкновение волн в случае, когда нормированные амплитуды набегающих волн  $a/h = 1.6$ , а число Фруда  $Fr_{max}=1.1$ . На рис. 3 приведены профили волны до и после соударения. На рис. 3,а показан профиль набегающей волны с амплитудой  $a/h = 1.6$ , переносящей массу, а на рис. 3,б – профиль волны после взаимодействия имеющей амплитуду  $a/h = 1.1$  и число Фруда  $Fr_{max}=1.1$ . Видно, что в результате взаимодействия амплитуда прошедшей волны упала на треть и профиль волны описывается слабо-нелинейной теорией Бенджамина-Оно [14]. После соударения сами ядра перемешанной жидкости остаются на месте, постепенно растекаясь под действием сил плавучести, а волны распространяются далее без переноса массы. Траектория вершин взаимодействующих волн представлена на рис. 4,в. Как видно на рисунке, фазовый сдвиг становится уже значительным.

### 2.3. Взаимодействие устойчивых, переносящих массу волн

При значениях  $Fr_{max} > 1$  волны второй моды характеризуются устойчивым ядром и достаточно долгое время после формирования в этих ядрах, захвативших жидкость, завихренность незначительна по сравнению с завихренностью за пределами ядра [32]. На рис. 2,в показан случай столкновения для волн с нормированной амплитудой  $a/h = 3.3$ . На рис. 5,а-г показано поле завихренности

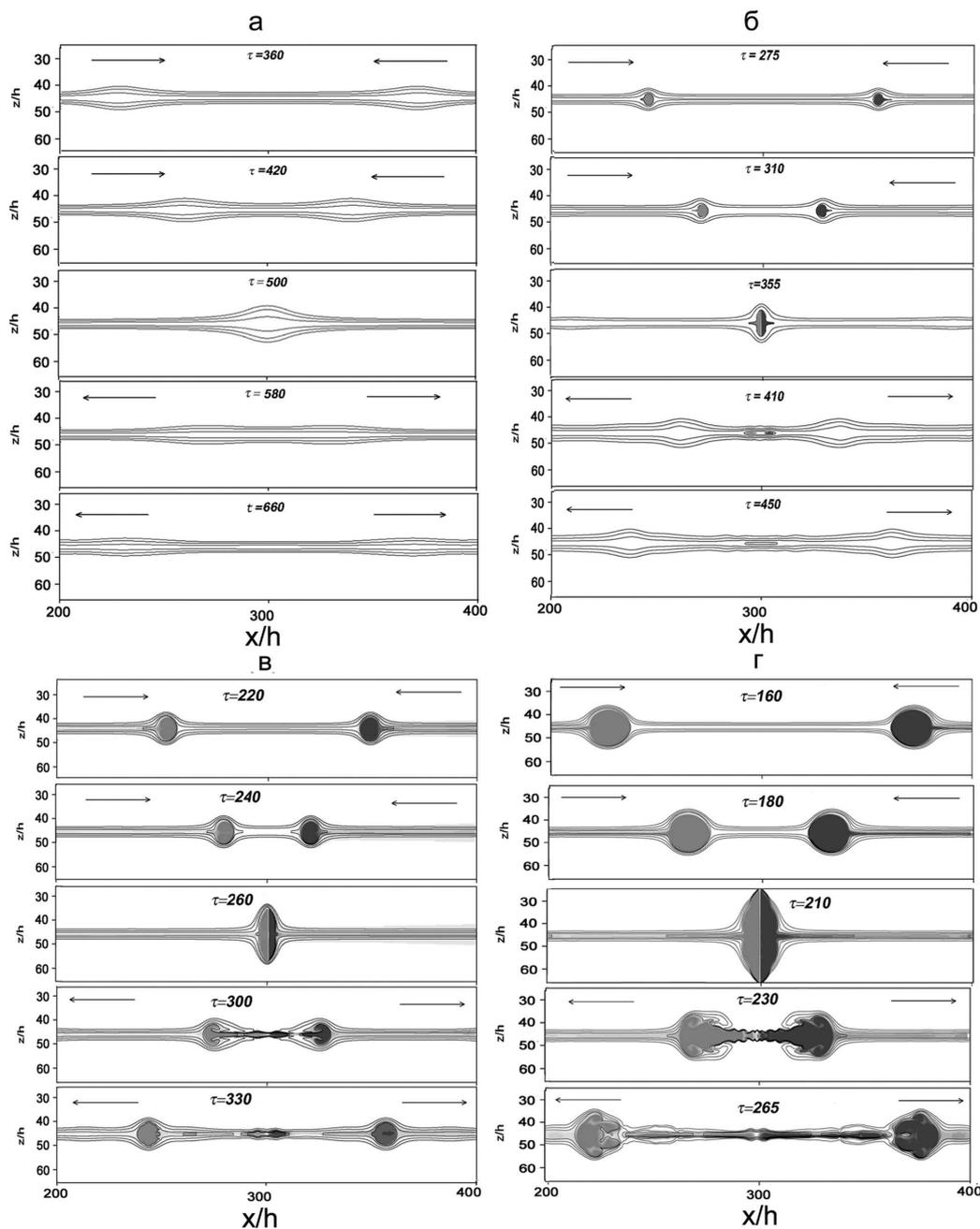


Рис. 2. Взаимодействие внутренних волн второй моды, при толщине слоя раздела  $h = 0.5$  см с амплитудами до взаимодействия:  
 $a - a/h = 0.81$ ;  $б - a/h = 1.6$ ;  $в - a/h = 3.3$ ;  $г - a/h = 4.5$ .  
 Показаны изолинии и визуализированы ядра (окрашенная жидкость)

сти и изолинии. В момент сближения между волнами образуется вертикальная струя (рис. 6,б) с максимальной нормированной вертикальной скоростью  $W/C \approx 3$ , а потом жидкость, вытолкнутая струей, растекается, обтекая слившиеся объемы. При этом образуется область, в которой находя-

тся столкнувшиеся ядра (окрашенная жидкость). Как видно из рис. 2,в, ядра не перемешиваются при столкновении, что было отмечено в лабораторных экспериментах [33]. Затем волны проходят дальше, частично захватывая окрашенную жидкость в ядрах. Этот процесс сопровождается не-

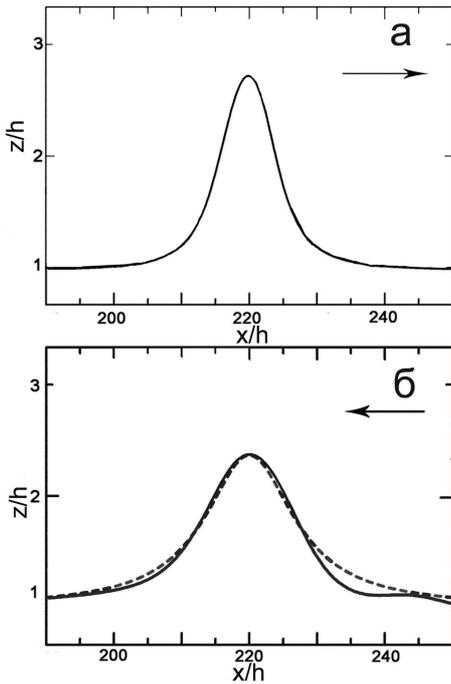


Рис. 3. Взаимодействие для случая  $h = 0.5$  см:  
 а – профиль волны (изоликна  $1015 \text{ кг/м}^3$ ), переносящей массу, до соударения в сечении  $x_l$  с амплитудой  $a/h = 1.6$ ;  
 б – профиль волны после соударения в сечении  $x_l$ , с амплитудой  $a/h = 1.1$ , распространяющейся без переноса массы, и теоретический профиль [14]

которым перемешиванием, так что плотность захваченной жидкости в прошедших волнах отличается от плотности в ядрах до столкновения. На рис. 5,д показаны вертикальные профили скорости в центре набегающей и прошедшей волн для сечения  $x_r$  до и после столкновения. Профили скорости подобны наличию ядра почти постоянной скорости. После взаимодействия максимальная скорость падает на 8 процентов. Траектория вершин взаимодействующих волн представлена на рис. 4,б. Соответствующий фазовый сдвиг, как видно на рис. 4,г, обусловленный взаимодействием волн, также значителен.

К этому же типу взаимодействия относится лабораторный эксперимент [27], в котором моделировалось отражение волны второй моды с вертикальной стенкой. В этом эксперименте  $a/h = 2.75$ ,  $\Delta\rho = 0.1$ ,  $h = 2.5$  мм. Соответствующие числа Фруда и Ричардсона падающей волны  $Fr_{max} = 1$  и  $Ri_{min} = 0.3$ . На рис. 7,а-б показано сравнение результатов моделирования с результатами лабораторного эксперимента. Как следует из рисунка, отражение волны от вертикальной стенки подобно взаимодействию двух волн, в результате которого

объем захваченной жидкости отражается вместе с волной. Экспериментальные и расчетные траектории вершины волны, изображенные на рис. 8, совпадают.

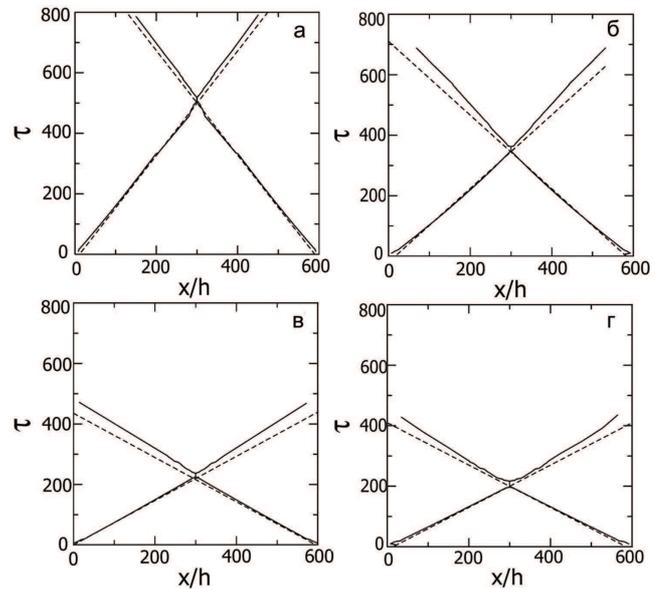


Рис. 4. Траектории вершин взаимодействующих волн, эксперименты с волнами:  
 а –  $a/h = 0.81$ ; б –  $a/h = 1.6$ ; в –  $a/h = 3.3$ ;  
 г –  $a/h = 4.5$

#### 2.4. Взаимодействие переносящих массу волн с развитием сдвиговой неустойчивости КГ

На рис. 2,г представлен процесс взаимодействия волн большой амплитуды  $a/h = 4.5$  при числе Ричардсона  $Ri_{min} = 0.2$ , близкому к критическому значению  $Ri_{min} = 0.15$  [18]. При столкновении волн, как и в предыдущем случае, возникает интенсивная вертикальная струя, которая затем формирует течение, обтекающее слившиеся объемы, и порождает сдвиговую неустойчивость прошедших волн, при которой числа Ричардсона падают до значений 0.11. В результате неустойчивости в ядре с захваченной жидкостью происходит перемешивание и наблюдается обмен жидкости между ядром и окружающей средой. С течением времени амплитуда прошедших волн уменьшается и волны вновь становятся устойчивыми. Как видно на рис. 4,д, за счет переформирования волн с захваченными ядрами увеличивается временная задержка при взаимодействии.

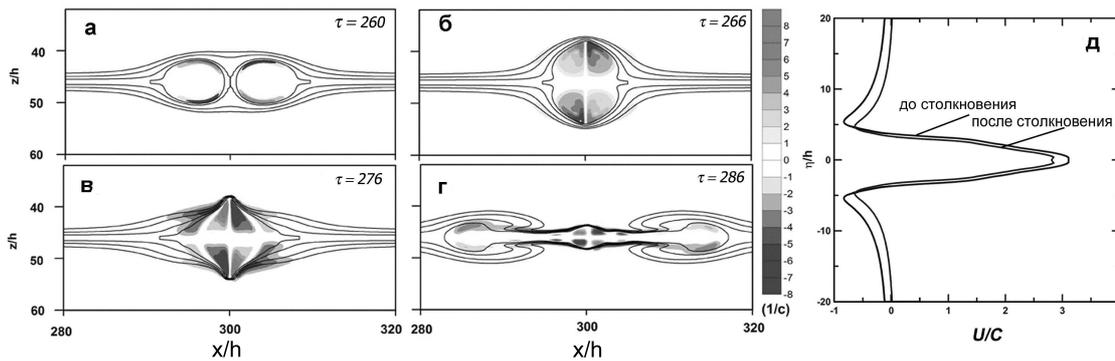


Рис. 5. Взаимодействие внутренних волн второй моды с амплитудой  $a/h = 3.3$  для случая  $h = 0.5$  см: на рисунках (а-г) показана эволюция поля завихренности и поля плотности (представлены изолинии); на рисунке д представлены вертикальные профили скорости по центру волны в сечении  $x_r$  до и после столкновения

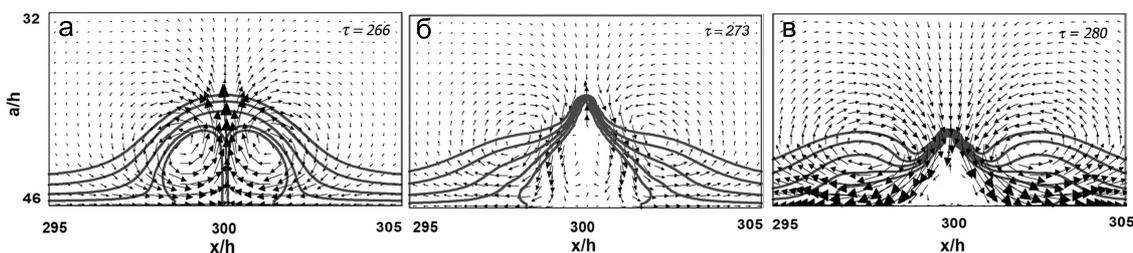


Рис. 6. Детали взаимодействия волн второй моды с амплитудой набегающих волн  $a/h = 3.3$

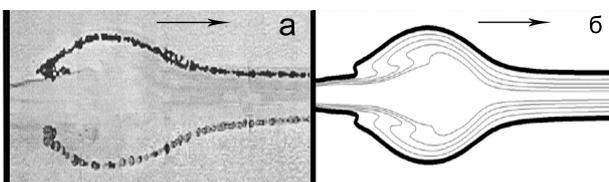


Рис. 7. Отражение волны с захваченным ядром от вертикальной стенки: а – лабораторный эксперимент [27], б – поле солёности, полученное моделированием

### 2.5. Взаимодействие волн различной амплитуды

Процессы взаимодействия волн с захваченными ядрами при столкновении волн разных амплитуд приводят к новому эффекту – обмену масс захваченной жидкости между сталкивающимися волнами. Эти процессы до сих пор не рассматривались, за исключением единственного лабораторного эксперимента [27], параметры которого не приведены. Расчеты, рассмотренные ниже, проводились для волн, переносящих массу. Параметры этих волн для двух численных экспериментов представлены в таблице 2. На рис. 9 показаны вертикальные разрезы поля солёности и пассивного трассера, переносимого волнами в процессе взаимодействия волн различной амплитуды. В первом случае, когда взаимодействуют устойчивые волны с амплитудой  $a/h=2.1$  и  $a/h=3.3$ , в результате взаимодействия происходит обмен массой между волнами: в прошедшую волну большей амплитуды вовлекается жидкость из падающей волны большей амплитуды, медленно перемешивающаяся с водой, захваченной волной меньшей амплитуды. Во втором случае, когда взаимодействуют волны боль-

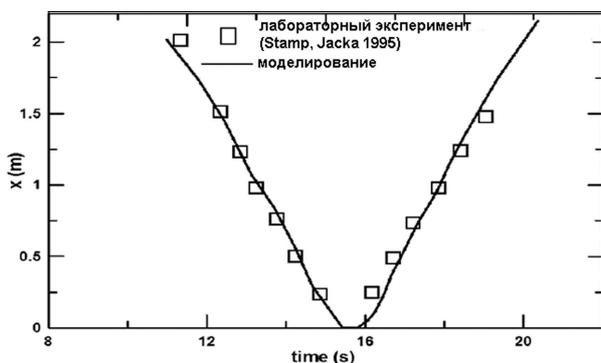


Рис. 8. Отражение волны с захваченным ядром от вертикальной стенки. Траектории вершины волны

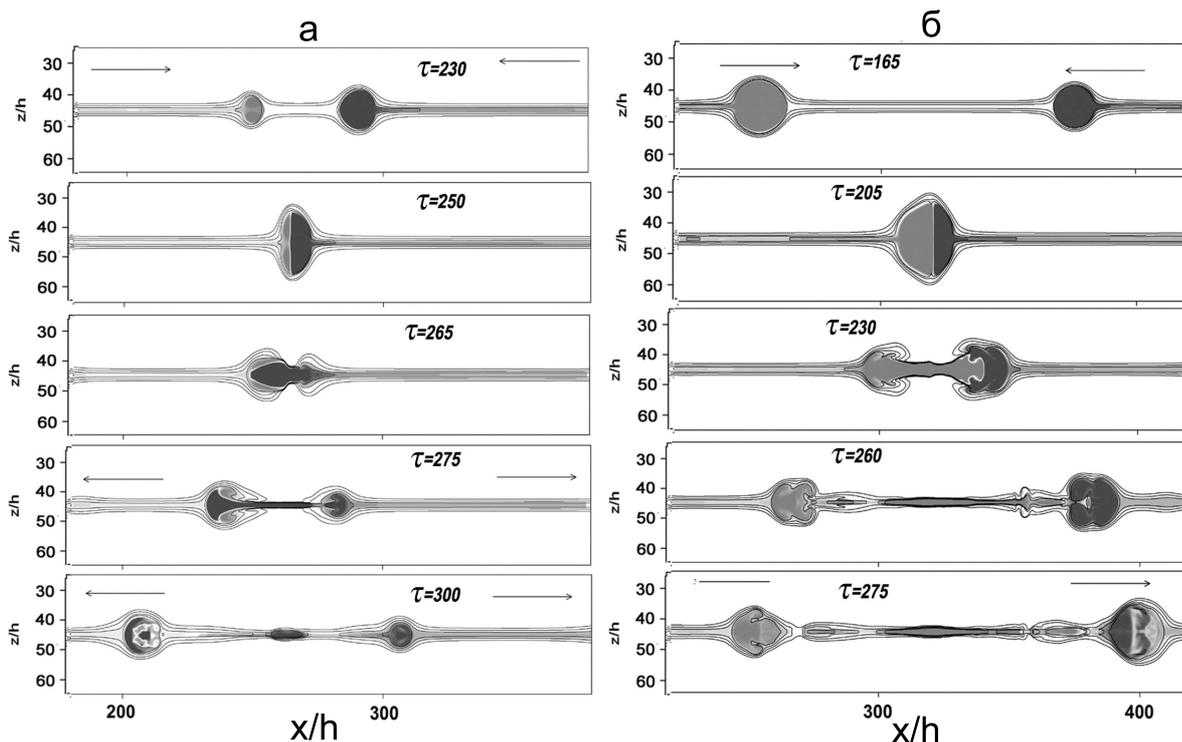


Рис. 9. Взаимодействие волн разных амплитуд: (а) –  $a/h = 2.1$  и  $a/h = 3.3$ ; (б) –  $a/h = 4.5$  и  $a/h = 3.3$

шой амплитуды ( $a/h=4.5$  и  $a/h=3.3$ ), в результате взаимодействия также происходит обмен массой между волнами, но при этом волны становятся локально неустойчивыми, развивается неустойчивость КГ, а перемешивание в захваченных ядрах происходит более интенсивно.

Табл. 2. Характеристики взаимодействия волн различных амплитуд, для случая толщины слоя раздела  $h=0.5$  см

Эксп	$a_{il}/h$	$a_{ir}/h$	$a_{rl}/h$	$a_{rr}/h$	$E_{tot}$	$dt$
1	2.1	3.3	3.3	2.05	20	2.7
2	4.5	3.3	4.45	3.15	25	2.1

Из графиков траекторий вершин сталкивающихся волн разных амплитуд, приведенных на рис. 10, видно, что траектория волны большей амплитуды в меньшей степени подвергается изменениям при соударении. В первом эксперименте наиболее устойчива волна с амплитудой  $a/h = 3.3$  – ее амплитуда незначительно уменьшается, а траектория остается почти неизменной. Во втором эксперименте волна с амплитудой  $a/h = 4.5$  после соударения становится локально неустойчивой, переносимая масса захваченной жидкости уменьша-

ется, вследствие чего ее скорость при дальнейшем движении падает.

## 2.6. Энергетика взаимодействия

Важной характеристикой взаимодействия являются потери энергии при взаимодействии волн. Потери энергии за счет диссипации и перемешивания, приводящего к переходу в недоступную фоновую потенциальную энергию, могут быть оценены, исходя из бюджета энергии волн до и после взаимодействия. Сумма кинетической и доступной потенциальной энергии называется псевдоэнергией [34]. Метод расчета доступной потенциальной энергии детально описан в [34]. Обозначим псевдоэнергию волн, перемещающихся слева направо в сечениях  $x_l$ ,  $x_r$  и справа налево в сечениях  $x_r$ ,  $x_l$  как  $PSE_l^-, PSE_r^+, PSE_r^-, PSE_l^+$  соответственно. Тогда потери псевдоэнергии на перемешивание за счет неустойчивости и потери псевдоэнергии за счет вязкости и диффузии можно оценить как

$$\Delta E = \frac{PSE_l^- + PSE_r^- - PSE_l^+ - PSE_r^+}{PSE_l^- + PSE_r^-}. \quad (12)$$

Характеристики набегающей волны фиксировались в сечении, отстоящем от левого торца лотка

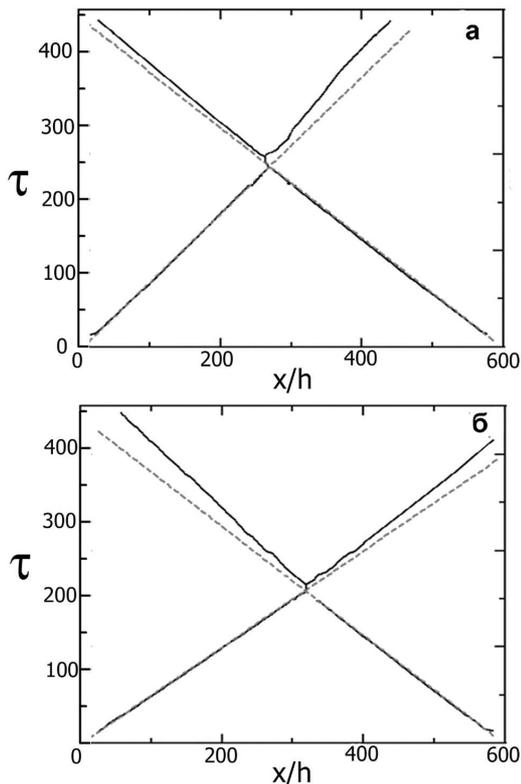


Рис. 10. Траектории вершин сталкивающихся волн амплитудой: а –  $a/h = 2.1$  и  $a/h = 3.3$ ; б –  $a/h = 4.5$  и  $a/h = 3.3$

на расстоянии  $x_l = 1.1$ , а отраженной в сечении  $x_r = 1.9$ . Для того чтобы учесть эффект вязкого и диффузионного затухания уединенных волн, для всех численных экспериментов проводились расчеты с одиночной волной, распространяющейся слева направо, и рассчитывались потери энергии для волны при ее распространении от сечения  $x_l$ , до  $x_r$ . Потери энергии на перемешивание при столкновении  $\delta E$  (рис. 11,б) определялись как разность между потерями энергии в экспериментах с двумя сталкивающимися волнами  $\Delta E_{tot}$  (рис.11,а) и в экспериментах, в которых одна волна проходит между сечениями  $x_l = 1.1$  и  $x_r = 1.9$ , теряя при этом количество энергии  $\Delta E_{diss}$  (рис. 11,а):

$$\delta E = \Delta E_{tot} - \Delta E_{diss}. \tag{13}$$

Сравнение результатов взаимодействия волн второй моды для конфигураций с половинным и полным лотком показало, что на расстояниях 10–15 длин волн влияние первой моды не существенно. Разница в потерях энергии для волны большой амплитуды  $a/h = 4.5$  составила для полного лотка

12 процентов, а для половинного – 9 процентов.

Расчеты показали, что общие потери энергии  $\Delta E_{tot}$  немонотонно зависят от безразмерной амплитуды волн  $a/h$ . Как следует из рис. 11,а,  $\Delta E_{tot}$  растет в интервале  $0 \leq a/h \leq 1$ , достигая локального максимума в интервале  $1 \leq a/h \leq 2$ , затем падает и снова медленно растет с увеличением  $a/h$ . Диссипация энергии уединенной волны  $\Delta E_{diss}$  максимальна при малых  $a/h$ , затем она уменьшается и снова растет. Вклад диссипации в полную потерю энергии доминирует над потерями энергии при взаимодействии. Результаты расчетов показали, что зависимость относительных потерь энергии при взаимодействии от амплитуды немонотонна, а именно, характеризуется хорошо выраженным максимумом в окрестности значений  $a/h = 1.5$ . В этом диапазоне после соударения сами ядра перемешанной жидкости остаются на месте, постепенно растекаясь под действием сил плавучести, а волны распространяются далее без переноса массы.

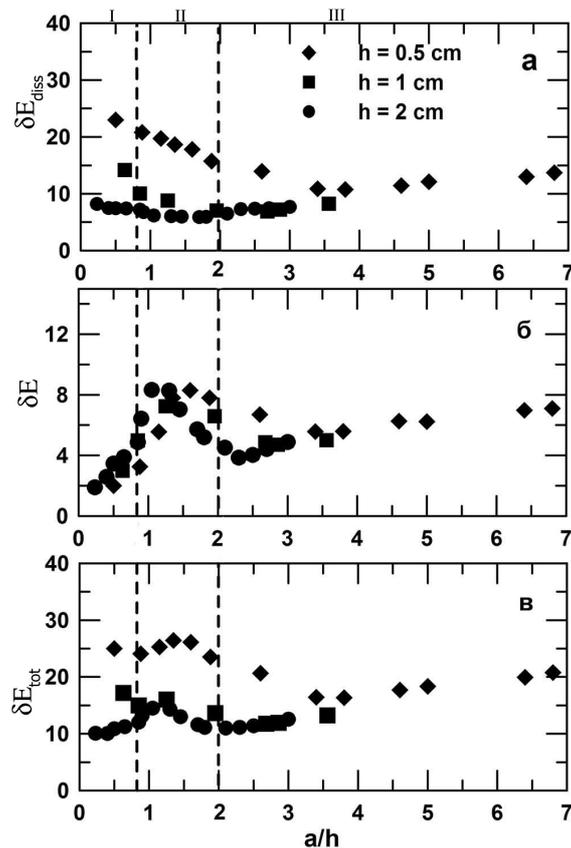


Рис. 11. График зависимости потерь энергии от нормированной амплитуды волны  $a/h$ : а – потери энергии за счет вязкости и диффузии на отрезке  $x_l$ , до  $x_r$   $\Delta E_{diss}$ ; б – потери энергии при соударении  $\delta E$ ; в – общие потери энергии  $\Delta E_{tot}$

## ВЫВОДЫ

В работе исследуется столкновение внутренних волн второй моды. Численные эксперименты показали наличие нескольких типов взаимодействия в зависимости от нормированной на толщину слоя раздела амплитуды волн второй моды  $a/h$ . В зависимости от значений локального максимального числа Фруда  $Fr_{max}$  и минимального числа Ричардсона  $Ri_{min}$  выделены три основных класса симметричных уединенных волн второй моды:

- 1) слабо нелинейные внутренние уединенные волны при  $Fr_{max} < 1$  и  $Ri_{min} > 1$ , распространяющиеся в слое раздела без захвата жидкости в ядре;
- 2) сильно нелинейные внутренние волны с устойчивым ядром захваченной жидкости при  $Ri_{min} > 0.15$  и  $1 < Fr_{max} < 1.3$ ;
- 3) сильно нелинейные локально неустойчивые волны  $Fr_{max} \approx 1.3$ .

При взаимодействии слабонелинейных волн волна сохраняет свой профиль, амплитуда уменьшается в основном за счет вязкого трения и присутствует небольшой фазовый сдвиг. Потери энергии при взаимодействии волн растут с увеличением  $a/h$ . Особенностью взаимодействия переносящих массу волн при числе Фруда, близком к критическому, является то, что волны до соударения оказываются волнами, переносящими массу, а после соударения они трансформируются в слабонелинейные волны. Относительные потери энергии в диапазоне  $1 \leq a/h \leq 2$  максимальны за счет потери жидкости в захваченных ядрах волн второй моды. Взаимодействие устойчивых переносящих массу волн происходит таким образом, что взаимодействующие волны проходят дальше, частично захватывая окрашенную жидкость в ядрах. Этот процесс сопровождается некоторым перемешиванием, так что плотность захваченной жидкости в прошедших волнах отличается от плотности в ядрах до столкновения. При дальнейшем увеличении амплитуд волн с захваченным ядром при соударении минимальные числа Ричардсона в волнах падают ниже значений 0.12, что приводит к формированию неустойчивости КГ, аналогично случаю взаимодействия волн больших амплитуд первой моды [26]. Внутри отразившихся и захваченных волнами ядер происходит интенсивное перемешивание, что увеличивает потери энергии.

1. Helfrich K. R., Melville W. K. Long nonlinear internal waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.*– 2006.– **38**.– P. 395 – 425.

2. Konyaev, K. V., Sabinin K. D., Serebryany A. N. Large amplitude internal waves at the Mascarene Ridge in the Indian Ocean // *Deep Sea Res. Part I.*– 1995.– **42**.– P. 2075 – 2091.
3. Yang Y. J., Fang Y. C., Chang M.-H., Ramp S. R., Kao C.-C., Tang T. Y. Observations of second baroclinic mode internal solitary waves on the continental slope of the northern South China Sea // *J. Geophys. Res.*– 2009.– **114**.– P. doi:10.1029/2009JC005305.
4. Yang Y. J., Fang Y. C., Tang T. Y., Ramp S. R. Convex and concave types of second baroclinic mode internal solitary waves // *Nonlin. Processes Geophys.*– 2010.– **17**.– P. 605–614.
5. Shroyer E. L., Moun J. N., Nash J. D. Mode-2 waves on the continental shelf: ephemeral components of the nonlinear internal wave field // *J. Geophys. Res.*– 2010.– **1115**.– P. doi:10.1029/2009JC005605.
6. Ramp S. R. Y. J. Yang D. B. Reeder, and F. L. Bahr Observations of a mode-2 nonlinear internal wave on the northern Heng-Chun Ridge south of Taiwan // *Journal of Geophysical Research.*– 2012.– **117**.– P. 30–43.
7. Liu K., Su F.-C., Hsu M.-K., Kuo N.-J., Ho C.-R. Generation and evolution of mode-two internal waves in the South China Sea // *Continental Shelf Research.*– 2013.– **59**.– P. 18–27.
8. Davis, R. E., Acrivos A. Solitary internal waves in deep water // *J. Fluid Mech.*– 1967.– **29**.– P. 593–607.
9. Maderich, V. S., Kulik, A. I Laboratory experiments on the collapse of an intrusion in a layered medium // *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Phys. Atmos. Ocean.*– 1992.– **28**.– P. 1197–1204.
10. Maderich, V. S., Heijst, G. J. F. van Brandt, A. Laboratory experiments on intrusive flows and internal waves on a pycnocline // *J. Fluid Mech.*– 2001.– **432**.– P. 285–311.
11. Carr M. , Davies P. A. , Hoebbers R. P. Experiments on the structure and stability of mode-2 internal solitary-like waves propagating on an offset pycnocline // *Phys. Fluids.*– 2015.– **27**.– P. 046602.
12. Rottman, J., Simpson, J The formation of internal bores in the atmosphere - a laboratory model // *Quarterly Journal Of The Royal Meteorological Society.*– 1989.– **76**.– P. 177–185.
13. Christie, D. R. The morning glory of the Gulf of Carpentaria: a paradigm for non-linear waves in the lower atmosphere // *Austral. Met. Mag.*– 1992.– **41**.– P. 21–60.
14. Benjamin, T. B. waves of permanent form in fluids of great depth. // *J. Fluid Mech.*– 1967.– **29**.– P. 559–592.
15. Ono H. Algebraic solitary wave in stratified fluids. // *J. Phys. Soc. Jpn.*– 1974.– **39**.– P. 1082–1091.
16. Dubreil-Jacotin L. Sur les ondes type permanent dans les liquides heterogenes // *Atti R. Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sci. Fis., Mat. Nat.*– 1932.– **15**.– P. 44–72.
17. Terez, D. E., Knio, O. M. Numerical simulations of large-amplitude internal solitary waves // *J. Fluid Mech.*– 1998.– **362**.– P. 53–82.
18. Maderich V., Jung K.T., Terletska K., Brovchenko I. and Talipova T. Incomplete similarity of internal solitary waves with trapped cores // *Fluid Dyn. Res.*– 2015.– **47**.– P. doi:10.1088/0169-5983/47/3/035511.

19. *Clarke, R. H.* Colliding sea breezes and the creation of internal atmospheric waves: a numerical model // *Austral. Met. Mag.*– 1984.– **32**.– P. 207–226.
20. *Alan Lapworth* Collision of two sea-breeze fronts observed in Wales // *Weather.*– November 2005.– **60**.– P. 316.
21. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett.*– 1965.– **15**.– P. 240–243.
22. *Lamb K.G* Are solitary internal waves solitons? // *Studies Appl. Math.*– 1998.– **101**.– P. 289–308.
23. *Mirie R.M., Su C. H.* Internal solitary waves and their head-on collision. I // *J. Fluid Mech.*– 1984.– **147**.– P. 213–231.
24. *Mirie R.M., Su C. H.* Internal solitary waves and their head-on collision. II // *Phys. Fluids.*– 1986.– **29**.– P. 31–37.
25. *Nguyen H.Y., Dias F.* A Boussinesq system for two-way propagation of interfacial waves. // *Physica D.*– 2008.– **237**. – P. 2365–2389.
26. *Терлецкая Е.В., Мадерич В.С. Бровченко И.А.* Взаимодействие уединенных внутренних волн при их фронтальном столкновении // *Прикладна гідромеханіка.*– 2011.– **13(85)**.– С. 68–77.
27. *Stamp, A. P., Jacka, M* Deep-water internal solitary waves // *J. Fluid Mech.*– 1995.– **305**.– P. 347–341.
28. *Honji H., Matsunaga N. Sugihara Y. Sakai K.* Experimental observation of internal symmetric solitary waves in a two-layer fluid // *Fluid Dyn. Res.*– 1995.– **15**.– P. 89–102.
29. *Kanarska Y., Maderich V.* A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // *Ocean Dynamics.*– 2003.– **53**.– P. 176–185.
30. *Kao T.W., Pan F.S., Renouard D.* Internal solitons on the pycnocline: generation, propagation, shoaling and breaking over a slope // *J. Fluid Mech.*– 1985.– **159**.– P. 19–53.
31. *Akylas T. and Grimshaw R.* Solitary internal waves with oscillatory tails // *J. Fluid Mech.*– 1992.– **242**.– P. 279–298.
32. *Козлов В. Ф., Макаров, В. Г.* Об одном классе стационарных гравитационных течений со скачком плотности. // *Изв. РАН, Физ. Атм. Океана.*– 1990.– **26**.– С. 395–402.
33. *Kamachi, M. and H. Honji* Steady flow patterns of internal solitary bulges in a stratified fluid // *Phys. Fluids* .– 1982.– **15**.– P. 1119 - 1120.
34. *Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Terletska K., Brovchenko I., Pelinovsky E., Choi B.H.* Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a bottom step. // *Physics of Fluids.*– 2010.– **22**.– P. doi:10.1063/1.3455984.