

УДК 519.63:628.16

## К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ОБЕЗВОЖИВАНИЯ ОСАДКА НА ФИЛЬТР-ПРЕССЕ

Ю. И. КАЛУГИН, Н. Г. СТЕПОВАЯ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев  
03680 Киев – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4  
email: forkalugin@ukr.net

Получено 23.11.2014

Разработан модифицированный итерационный метод, позволяющий значительно сократить время счета. Метод опробован при численном моделировании процесса обезвоживания осадка на фильтр-прессе. Произведено сравнение времени счета с использованием данного метода (для двух различных шагов) и метода Рунге-Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором длины шага. Установлено, что для шага  $dt = 0.001$  время счета сокращается в 4.8 раза (с 785 до 163.4 с), а для шага  $dt = 0.1$  – в 32 раза (с 785 до 24.5 с). Расхождения в полученных с помощью обоих методов результатов не превышают 6%.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** численные методы, сокращение времени счета, моделирование, обезвоживание осадка, фильтр-пресс

Розроблено модифікований ітераційний метод, що дозволяє значно скоротити час підрахунку. Метод випробуваний при чисельному моделюванні процесу зневоднення осаду на фільтрпресі. Проведене порівняння часу підрахунку з використанням даного методу (для двох різних кроків) і методу Рунге-Кутти четвертого порядку з автоматичним підбором довжини кроку. Встановлено, що для кроку  $dt = 0.001$  час підрахунку скорочується у 4.8 рази (з 785 до 163.4 с), а для кроку  $dt = 0.1$  – у 32 рази (з 785 до 24.5 с). Розбіжності в отриманих за обома методами результатах не перевищують 6%.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** чисельні методи, скорочення часу підрахунку, моделювання, зневоднення осаду, фільтрпрес

A modified iteration method has been developed that permits of essential decrease in calculation time. The method is tested in the course of numerical simulation of sludge dewatering in filter press. The calculation time for the proposed method (at two different step size) is compared with Runge-Kutta's forth-order method with adaptive step size. It is found that the calculation time is 4.8 times shorter at the step size  $dt = 0.001$  (reduced from 785 to 163.4 s), and 32 times shorter at the step size  $dt = 0.1$  (reduced from 785 to 24.5 s). The discrepancy in results between two methods doesn't exceed 6%.

**KEY WORDS:** numerical methods, reducing in calculation time, simulation, sludge dewatering, filter press

### ВВЕДЕНИЕ

Сегодня в основе математического моделирования любого физического процесса лежат численные методы. От их выбора напрямую зависят не только сходимость задачи, точность вычислений, но и общее расчетное время программы [1]. Последний пункт приобретает необычайную важность, когда приходится решать краевую задачу, содержащую десяток и более дифференциальных уравнений [2]. Скорость выполнения программы актуальна и в тех случаях, когда число уравнений невелико, но необходимо проводить многократные просчеты, исследуя влияние тех или иных факторов на процесс [3–5].

Естественно, на скорость счета существенное влияние оказывает и быстродействие вычислительной техники. Однако наращивание используемой компьютерной мощности имеет свой физический предел (установить можно только то обо-

рудование, которое имеется в наличии на рынке). Кроме того, решение данной проблемы часто упирается в финансовую сторону вопроса.

При коммерческой реализации программного продукта проблему быстродействия иногда решают за счет создания программы-эмулятора. В этом случае сначала выполняется “прогонка” компьютерного кода для всех возможных диапазонов изменения исходных данных (с физической или практической точки зрения). Данные при этом задаются с определенным интервалом в виде массива. По завершению просчетов получается массив результатов, состоящий из вычисленных значений искомых величин. На базе этого массива и создается программа-эмулятор, которая уже не задействует итерационные схемы, а для каждого конкретного набора вводимых пользователем исходных данных с помощью интерполяции выбирает необходимые значения из предварительно созданного массива результатов.

Однако реально ускорить расчетное время программы на имеющейся в наличии технике можно только за счет применения более быстродейственных итерационных схем.

Насколько эффективно выбор численного метода может оказывать влияние на сокращение времени работы программы, продемонстрируем на примере моделирования процесса обезвоживания осадка очистных сооружений на фильтр-прессе.

## 1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

### Физические свойства осадка.

Хотя осадки водопроводных и канализационных очистных сооружений, подаваемых на обезвоживание, отличаются по составу, с физико-химической точки зрения все они могут быть отнесены к коллоидным гелеподобным тиксотропным структурам [6]. Наличие тиксотропности (способности осадка образовывать гель в состоянии покоя и становиться текучим при тряске, взбалтывании или ином внешнем усилии) автоматически переводит его в разряд неньютоновских жидкостей, что не позволяет применять при математическом моделировании, например, уравнение теплопроводности или принцип Онзагера, поскольку данные зависимости справедливы только в области ньютоновской физики. Из этих соображений моделирование проводилось на основе тех уравнений, которые приводятся в специализированной литературе непосредственно для математического описания процесса обезвоживания осадка на фильтр-прессе (например, работы [7–9]).

### Принцип работы фильтр-пресса

Упрощенно схему работы фильтр-пресса можно описать следующим образом (рис. 1). Осадок со слоем  $H_0$  подается в фильтровальную камеру, ограниченную с одной стороны мембраной, а с другой – поршнем, к которому прикладывается внешнее давление  $\Delta P$ . Поршень движется. Вода, содержащаяся в осадке, фильтруется через мембрану, образуя фильтрат. Твердая фаза накапливается внутри фильтровальной камеры. Процесс останавливается, когда внутреннее (осмотическое) давление осадка возрастает до величины внешнего давления  $\Delta P$ . При этом движение поршня прекращается, а величина слоя осадка уменьшается со значения  $H_0$  до  $H_k$ .

На практике более распространены камерные фильтр-прессы, состоящие из ряда секций (рис. 2), где осадок закачивается в каждую из них в пространство между двумя плитами, оборудованными мембранами, до достижения давления 690–1550 кПа [10]. За счет этого избыточного давле-

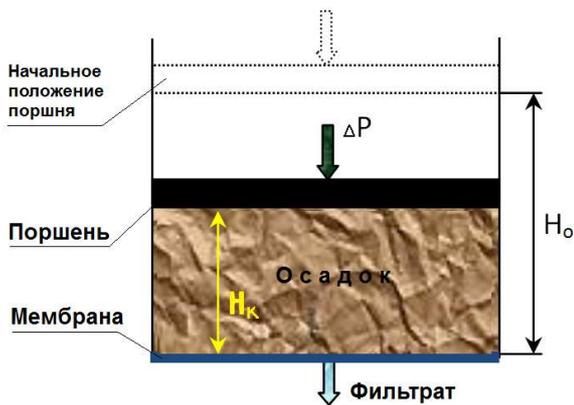


Рис. 1. Схема работы фильтр-пресса

ния вода (фильтрат) удаляется из осадка, просачиваясь через мембраны. Процесс обезвоживания начинается, когда камера толщиной  $2H_0$  заполняется осадком с концентрацией твердой фазы  $\sigma_0$ , и заканчивается, когда у внутренней поверхности мембраны формируется слой обезвоженного осадка  $H_k$ , имеющий концентрацию  $\sigma_\infty$  (рис. 3). Поскольку сила тяжести, действующая на осадок, мала по сравнению с силой давления осадка на мембрану, ею при моделировании можно пренебречь. При этом схема процесса, изображенная на рис. 1, становится аналогичной схеме, представленной на рис. 3.

### Математическая модель процесса

В качестве постулата при моделировании фильтр-пресса принимается, что тиксотропный осадок с объемным содержанием твердой фазы  $\phi$ , жидкость в котором находится исключительно в связанном виде (для этого концентрация взвешенных веществ должна составлять более 5 г/л [11]), обладает свойствами твердого тела до тех пор, пока прикладываемое к нему внешнее усилие не превысит предел эластичности, обусловленный его коллигативными свойствами. Как только это произошло, твердая структура осадка мгновенно разрушается, часть связанной жидкости отделяется в виде фильтрата, а структура осадка переформируется с локальным увеличением твердой фазы. Принимается, что процесс разрушения и переформирования структуры осадка протекает настолько быстро по сравнению с общим временем фильтрования, что внешнее давление в каждом элементарном объеме суспензии всегда только на бесконечно малую величину больше предела эластичности [12]. Процесс завершается, когда внешнего давления становится недостаточно, чтобы превысить

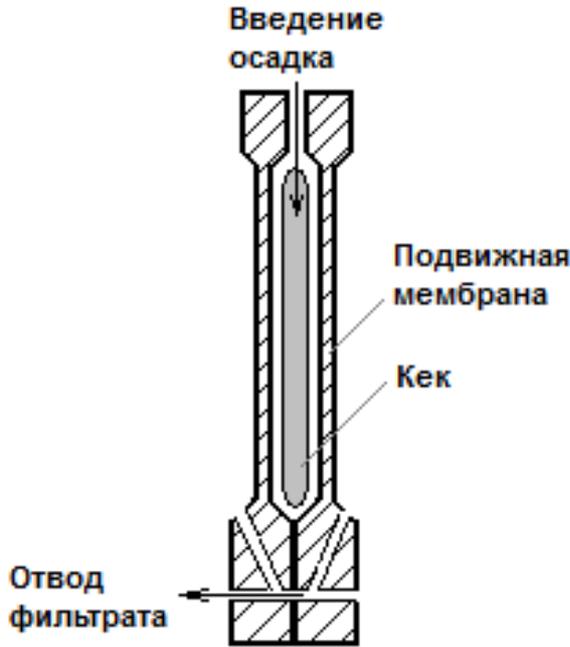


Рис. 2. Секция камерного фильтр-пресса

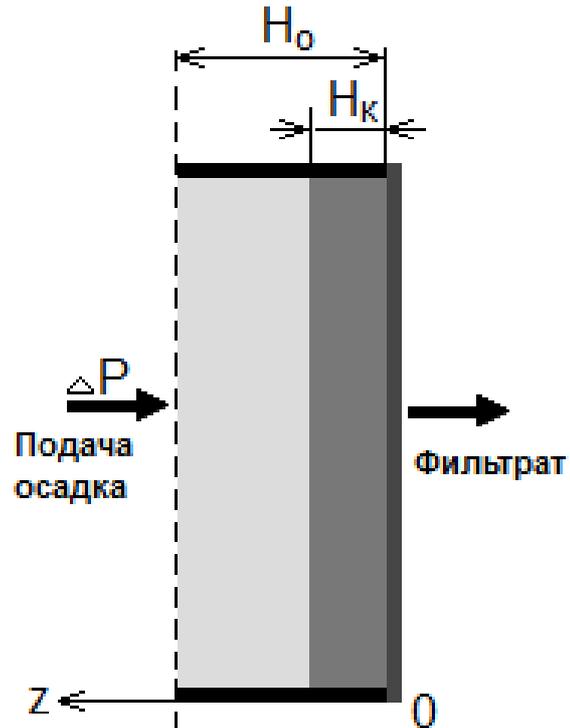


Рис. 3. Схематическое представление секции

предел эластичности осадка.

Для прогнозирования изменения содержания твердой фазы осадка в процессе отжима разработана компьютерная программа, в основу которой положена математическая модель фильтр-пресса, описанная в работах [7 – 9, 12]. Модель базируется на следующем одномерном дифференциальном уравнении:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \sigma \frac{dh}{dt} \right]. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma$  – объемная концентрация твердой фазы;  $dh/dt$  – скорость движения поршня (скорость увеличения слоя концентрированного осадка у поверхности мембраны);  $D(\sigma)$  – коэффициент дисперсии.

Принимается, что в камеру фильтр-пресса осадок подается с постоянной концентрацией твердой фазы  $\sigma_0$ , в то время как возле поверхности мембраны формируется слой концентрированного осадка с содержанием твердой фазы  $\sigma_\infty$ :

$$\sigma_\infty = \sigma_g \left( \frac{\Delta P}{p_1} + 1 \right)^{\frac{1}{p_2}}. \quad (2)$$

Здесь  $\sigma_g$  – объемная концентрация, при которой достигается точка гелеобразования;  $\Delta P$  – величина внешнего избыточного давления, прикладываемая

к осадку;  $p_1, p_2$  – эмпирические коэффициенты, характеризующие свойства конкретного осадка.

Коэффициент дисперсии в уравнении (1) определяется, исходя из следующего выражения:

$$D(\sigma) = d_1 \sigma^{d_2} (1 - \sigma)^{d_3}. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma$  – объемная концентрация твердой фазы в определенный момент времени  $t$  на расстоянии  $z$  от поверхности мембраны;  $d_1, d_2, d_3$  – эмпирические коэффициенты, более детальное описание которых приведено в работе [5].

Данная краевая задача решалась с помощью следующих граничных и начальных условий.

#### Граничные условия

1. Условие для объемной фракции у поверхности мембраны ( $z = 0$ ).

В любой момент времени содержание твердой фракции возле поверхности мембраны равно  $\sigma_\infty$  (см. уравнение (2)):

$$\sigma(0, t) = \sigma_\infty, \quad t > 0. \quad (4)$$

2. Условие непроницаемости поршня ( $z = h$ ):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z}(h, t) = 0, \quad t > 0. \quad (5)$$

Начальное условие: содержание твердой фазы по всей глубине фильтр-пресса ( $0 < z < H_0$ ) в начальный момент времени ( $t = 0$ ) соответствует той концентрации  $\sigma_0$ , с которой осадок подается на обезвоживание в фильтр-пресс:

$$\sigma(z, 0) = \sigma_0, \quad 0 < z < H_0. \quad (6)$$

Дополнительное условие непроницаемости мембраны для частиц, составляющих твердую фазу осадка:

$$\int_0^{h(t)} dz \sigma(z, t) = \sigma_0 H_0, \quad t > 0. \quad (7)$$

Здесь  $H_0$  – начальная высота осадка в фильтр-прессе.

Численная реализация модели

Для получения численного решения все параметры модели были обезразмерены:

$$Z = \frac{z}{H_0},$$

$$H(T) = \frac{h(t)}{H_0},$$

$$T = \frac{t D_\infty}{H_0^2} \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma_0} \right)^2,$$

где

$$D_\infty = D(\sigma_\infty).$$

Модель в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[ d(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial Z} - \sigma \frac{dH}{dT} \right], \quad (8)$$

$$d(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial Z} - \sigma \frac{dH}{dT} = C_1,$$

где

$$d(\sigma) = \frac{D(\sigma)}{D_\infty} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_\infty} \right)^2.$$

Начальное и граничные условия:

$$\sigma(0, T) = \sigma_\infty, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \sigma(H, T)}{\partial Z} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\sigma_0} \int_0^{H(T)} \sigma(Z, T) dZ = 1, \quad (11)$$

$$\sigma(Z, 0) = \sigma_0, \quad 0 < Z < 1. \quad (12)$$

Уравнения (10)–(12) составляют полную математическую модель фильтр-пресса. Однако численное решение нелинейного диффузионного уравнения с подвижной границей – сложная проблема, для упрощения которой исходная задача была переформулирована. Для этой цели подвижная граница, отвечающая положению поршня  $Z = H(T)$ , была изъята, а дифференциальное уравнение упрощено введением материальной координаты  $w$  (как это сделано, например, в работе [13]). Данная материальная координата определяется как

$$w(Z, T) = \frac{1}{\sigma_0} \int_0^Z \sigma(Z, T) dZ. \quad (13)$$

Следует заметить, что

$$w(0, T) = 0, \quad (14)$$

$$w(H(T), T) = 0. \quad (15)$$

После соответствующей замены переменных ( $\sigma(Z, T) \rightarrow \sigma(w, T)$ ) краевая задача была переформулирована как

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = \sigma^2 \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{d(\sigma)}{\sigma_0^2} \frac{\partial \sigma}{\partial w} \right), \quad (16)$$

$$d(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial w} = C_1.$$

При этом граничные и начальные условия примут вид:

$$\sigma = C_1 \int \frac{dw}{d(\sigma)} + C_2, \quad (17)$$

$$\sigma(0, T) = \sigma_\infty, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w}(1, T) = 0, \quad (19)$$

$$\sigma(w, 0) = \sigma_0. \quad (20)$$

В результате аппроксимации уравнения (16) по пространственной координате  $w$  решение краевой задачи (16)–(20) сводится к решению аппроксимирующей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial T} = \sigma_i^2 (U_i \sigma_{i-1} - (U_{i+1} - U_i) \sigma_i + U_{i+1} \sigma_{i+1}), \quad (21)$$

$$i = \overline{1, N},$$

где

$$U_i = \frac{d(\sigma_i) + d(\sigma_{i-1})}{2(\Delta w)^2 \sigma_0^2},$$

а  $N$  – количество узлов равномерного разбиения по оси  $w$ ;  $\Delta w$  – шаг разбиения.

Табл. 1. Характеристики компьютера, на котором проводились расчеты

Название	Описание
Тип компьютера	ACPI компьютер на базе x86 (Mobile)
Операционная система	Microsoft Windows Vista Home Basic
Тип центрального процессора	Mobile DualCore Intel Pentium T2080, 1733 MHz (13 x 133)
Системная плата	Asus F5000R Series Notebook
Чипсет системной платы	ATI Radeon Xpress 1100
Системная память	896 Мб (DDR2-667 DDR2 SDRAM)
DIMM3: Нуніх НУМР512S64CP8-Y5	1 Гб DDR2-667 DDR2 SDRAM (5-5-5-15 @ 333 МГц) (4-4-4-12 @ 266 МГц) (3-3-3-9 @ 200 МГц)
Тип BIOS	AMI (12/21/07)

В результате конечно-разностной аппроксимации по времени  $T$  с шагом  $\tau$  получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, аппроксимирующую краевую задачу (16)-(20):

$$\frac{\sigma_i^{k+1} - \sigma_i^k}{\tau} = \quad (22)$$

$$= (\sigma_i^{k+1})^2 (U_i \sigma_{i-1}^{k+1} - (U_{i+1} - U_i) \sigma_i^{k+1} + U_{i+1} \sigma_{i+1}^{k+1}).$$

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ДИСКУССИЯ

Сначала для решения системы уравнений (22) был применен метод Рунге-Кутты четвертого порядка как один из наиболее распространенных среди классических численных методов [14–16]. К его преимуществам можно отнести достаточную для решения широкого круга задач точность, устойчивость, легкость программирования; кроме того, существует возможность легко изменять шаг интегрирования на любом этапе вычислений. В данном случае был использован метод Рунге-Кутты с автоматическим выбором длины шага интегрирования, что позволяет обеспечить более высокую точность расчетов по сравнению с методом Рунге-Кутты с постоянной длиной шага [14].

В ходе решения была составлена компьютерная программа, с помощью которой на основании исходных данных (таких как начальный слой осадка, точка гелеобразования, начальная концентрация твердой фазы, коэффициент дисперсии) можно рассчитать содержание твердой фазы в произвольной точке фильтр-пресса в любой момент времени, а также удельный выход фильтрата [3].

Существенным недостатком программы, составленной на основе метода Рунге-Кутты, является

Табл. 2. Время работы программы с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка

Номер расчета	Время счета	
	секунды	мин:сек
1	760	12:40
2	795	13:15
3	802	13:22
4	790	13:10
5	778	12:58
Среднее время (по 5-ти расчетам)		
	785	13:05

значительная продолжительность ее работы. Для выполнения только одной прогонки с одним набором исходных данных на компьютере, характеристики которого приведены в табл. 1, необходимо потратить более 13 минут времени (см. табл. 2).

В табл. 2 приведена информация о времени расчета. Для получения осредненного значения программа запускалась в течение пяти раз с одним и тем же набором исходных данных ( $H_o = 0.015$  м;  $\sigma_g = 0.007$ ;  $\sigma_o = 0.0104$ ;  $\Delta P = 1$  МПа;  $p_1 = 1.15$  Па;  $p_2 = 4.667$ ;  $d_1 = 0.00353$  м<sup>2</sup>/с;  $d_2 = 3.667$ ;  $d_3 = 35.104$ ;  $f = 0.9999$ ). Здесь  $f$  – коэффициент остановки (программа прекращает работу, когда концентрация твердой фазы у поршня достигает величины  $\sigma = f * \sigma_\infty$ ). Обозначение остальных параметров приведено выше.

Для ускорения работы программы был применен разработанный Калугиным Ю.И., одним из авторов данной статьи, метод, позволяющий существенно, в некоторых случаях более чем на порядок (в зависимости от значений исходных данных), ускорить расчеты.

Суть метода состоит в том, что значения функции в  $i$ -ом узле в момент времени  $T = T_{k+1}$  относим к  $(s + 1)$ -му итерационному слою. При этом итерационная схема метода после несложных пре-

образований примет вид:

$$\sigma_i^{k+1,s+1} = \frac{\sigma_i^k + \tau \left(\sigma_i^{k+1,s}\right)^2 \left(U_i \sigma_{i-1}^{k+1,s} + U_{i+1} \sigma_{i+1}^{k+1,s}\right)}{1 + \tau \left(\sigma_i^{k+1,s}\right)^2 \left(U_{i+1} - U_i\right)} \quad (23)$$

Как показывает анализ, предложенная итерационная схема удовлетворяет условиям устойчивости и сходимости.

Таким образом, уравнения (22) можно записать в виде следующих зависимостей:

$$\sigma_i^{k+1} = \sigma_i^k + \tau \left(\sigma_i^{k+1}\right)^2 \times \left(U_i \sigma_{i-1}^{k+1} - \left(U_{i+1} - U_i\right) \sigma_i^{k+1} + U_{i+1} \sigma_{i+1}^{k+1}\right), \quad (24)$$

$$\sigma_{i-1}^{k+1} = \sigma_{i-1}^k + \tau \left(\sigma_{i-1}^{k+1}\right)^2 \times \left(U_{i-1} \sigma_{i-2}^{k+1} - \left(U_i - U_{i-1}\right) \sigma_{i-1}^{k+1} + U_{i+1} \sigma_i^{k+1}\right), \quad (25)$$

$$\sigma_{i+1}^{k+1} = \sigma_{i+1}^k + \tau \left(\sigma_{i+1}^{k+1}\right)^2 \times \left(U_{i+1} \sigma_i^{k+1} - \left(U_{i+2} - U_{i+1}\right) \sigma_{i+1}^{k+1} + U_{i+2} \sigma_{i+2}^{k+1}\right). \quad (26)$$

С учетом (25) и (26) в результате несложных, но громоздких преобразований систему уравнений (24) можно записать в виде:

$$\sigma_i^{k+1} = \sigma_i^k + 2\tau A_1 - \tau A_2 \sigma_i^{k+1} - \tau^2 A_3 \sigma_i^{k+1} + \tau^2 \times \left(A_4 \sigma_{i-2}^{k+1} - A_5 \sigma_{i-1}^{k+1} - A_6 \sigma_{i+1}^{k+1} + A_7 \sigma_{i+2}^{k+1}\right), \quad (27)$$

где

$$A_1 = \left(\sigma_i^{k+1}\right)^2 \left(U_i \sigma_{i-1}^k + U_{i+1} \sigma_{i+1}^k\right),$$

$$A_2 = \left(\sigma_i^{k+1}\right)^2 \left(U_{i+1} - U_i\right),$$

$$A_3 = U_{i+1} \left(\sigma_i^{k+1}\right)^2 \left(\left(\sigma_{i+1}^{k+1}\right)^2 U_{i+1} - \left(\sigma_{i-1}^{k+1}\right)^2 U_i\right),$$

$$A_4 = \left(\sigma_{i-1}^{k+1}\right)^2 \left(\sigma_i^{k+1}\right)^2 U_i U_{i-1},$$

$$A_5 = \left(\sigma_{i-1}^{k+1}\right)^2 \left(\sigma_i^{k+1}\right)^2 U_i \left(U_i - U_{i-1}\right),$$

$$A_6 = \left(\sigma_{i+1}^{k+1}\right)^2 \left(\sigma_i^{k+1}\right)^2 U_{i+1} \left(U_{i+2} - U_{i+1}\right),$$

$$A_7 = \left(\sigma_{i+1}^{k+1}\right)^2 \left(\sigma_i^{k+1}\right)^2 U_{i+1} U_{i+2}.$$

Тогда итерационная схема метода согласно разработанной методике будет иметь вид:

$$\sigma_i^{k+1} = \left(\sigma_i^k + 2\tau A_1 + \tau^2 \left(A_4 \sigma_{i-2}^{k+1,s} - A_5 \sigma_{i-1}^{k+1,s} - A_6 \sigma_{i+1}^{k+1,s} + A_7 \sigma_{i+2}^{k+1,s}\right)\right) \left(1 + \tau A_2 + \tau^2 A_3\right), \quad (28)$$

где

$$A_1 = \left(\sigma_i^{k+1,s}\right)^2 \left(U_i \sigma_{i-1}^k + U_{i+1} \sigma_{i+1}^k\right),$$

Табл. 3. Время счета по предложенному модифицированному методу итераций

Номер	Время счета, с	
	Для шага dt=0.001	Для шага dt=0.1
1	163.0	24.6
2	163.3	24.4
3	163.9	24.3
4	164.2	24,4
5	163.4	24.7
Среднее время (по 5-ти расчетам)		
	163.4	24.5

$$A_2 = \left(\sigma_i^{k+1,s}\right)^2 \left(U_{i+1} - U_i\right),$$

$$A_3 = U_{i+1} \left(\sigma_i^{k+1,s}\right)^2 \left(\left(\sigma_{i+1}^{k+1,s}\right)^2 U_{i+1} - \left(\sigma_{i-1}^{k+1,s}\right)^2 U_i\right),$$

$$A_4 = \left(\sigma_{i-1}^{k+1,s}\right)^2 \left(\sigma_i^{k+1,s}\right)^2 U_i U_{i-1},$$

$$A_5 = \left(\sigma_{i-1}^{k+1,s}\right)^2 \left(\sigma_i^{k+1,s}\right)^2 U_i \left(U_i - U_{i-1}\right),$$

$$A_6 = \left(\sigma_{i+1}^{k+1,s}\right)^2 \left(\sigma_i^{k+1,s}\right)^2 U_{i+1} \left(U_{i+2} - U_{i+1}\right),$$

$$A_7 = \left(\sigma_{i+1}^{k+1,s}\right)^2 \left(\sigma_i^{k+1,s}\right)^2 U_{i+1} U_{i+2}.$$

Использование итерационной схемы (28) позволяет существенно сократить время счета, так как в данном случае учитываются значения функции в большем количестве узлов, и зависимость от времени задается с учетом второго порядка точности.

Приведенные в таблице 3 данные иллюстрируют, насколько сокращается время счета, если вместо классического метода Рунге-Кутты четвертого порядка воспользоваться предложенным методом. Данные приведены для двух случаев:

- 1) шаг интегрирования составляет 0.1;
- 2) шаг интегрирования составляет 0.001.

Исходные данные для расчетов такие же, как и для метода Рунге-Кутты, и приведены выше.

Как видно из сравнения табл. 2 и 3, замена численного метода позволила сократить среднее время счета в 4.8 раза (при шаге  $dt = 0.001$ ) и в 32 раза (при шаге  $dt = 0.1$ ).

Однако, кроме времени счета, при сравнении различных методов следует учитывать и расхождение в полученных результатах. Для этого воспользуемся такой величиной, как относительное время фильтрования  $T$ . Данная величина представляет собой приведенное к безразмерному виду время, за которое средняя концентрация твердой фазы в камере фильтр-пресса достигает величины  $f * \sigma_\infty$ . Для набора исходных данных, по которому

проводились все сравнительные расчеты,  $f * \sigma_{\infty} = 0.131$ .

Установлено, что при использовании метода Рунге-Кутты содержание твердой фазы 0.131 достигается за время  $T=32.905$ . Для предложенного модифицированного метода итераций это значение достигается за время  $T=34.682$  (при шаге  $dt = 0.001$ ) и  $T=35.000$  (при шаге  $dt = 0.1$ ). Для получения эталонного значения параметра  $T$  необходимо иметь строгое аналитическое решение, поскольку результат, полученный на основе численных методов – лишь аппроксимационное приближение к аналитическому результату. Так как аналитического решения в виду его сложности получено не было, более точным можно считать тот вариант, при котором число шагов итерации будет наименьшим, поскольку существующая при расчетах погрешность увеличивается с каждым дополнительным шагом. Количество шагов будет минимальным там, где наименьшим будет время счета.

Таким образом, наиболее точным можно считать время фильтрования  $T=35.000$ . Приняв эту величину за 100%, рассчитаем отклонения между значениями  $T$ , полученными с помощью различных методов. Величина отклонения составляет соответственно 0.9% (для модифицированного метода итераций с шагом  $dt = 0.001$ ) и 6% (для метода Рунге-Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором длины шага).

## ВЫВОДЫ

1. Предложен модифицированный метод итерации, позволяющий существенно сократить время счета программы. Метод опробован при моделировании процесса обезвоживания осадка на фильтр-прессе с использованием шагов  $dt = 0.001$  и  $dt = 0.1$ .

2. При сравнении с методом Рунге-Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором длины шага было установлено, что программа, составленная на основе предложенного метода, выполняет расчет в 4.8 раза быстрее при использовании шага  $dt = 0.001$  (163.4 с против 785 с) и в 32 раза быстрее при шаге  $dt = 0.1$  (24.5 с против 785 с). При этом расхождения между результатами счета не превышают 6%.

1. Reinhard Hinkelmann Efficient Numerical Methods and Information-Processing Techniques for Modeling Hydro- and Environmental Systems.– Springer-Verlag: Berlin Heidelberg, 2005.– 306 p.
2. Кремез В.С., Калугин Ю.И., Яковлев В.В. Математическое моделирование фильтрационных процессов при разработке газоконденсатных месторождений // Прикладна гідромеханіка.– 2007.– 9, №2-3.– С. 69–85.
3. Н.Г. Степова, Ю.И. Калугін, О.М. Кушка Проблеми зневоднення осаду водопровідних і каналізаційних очисних споруд та шляхи їх вирішення // Водопостачання та водовідведення.– 2012.– №1.– С. 24–29.
4. Н.І. Скоренька, Н.Г. Степова, Ю.І. Калугін Моделювання процесу зневоднення осаду на фільтр-пресах // Збірник тез студентських доповідей 73-ї науково-практичної конференції КНУБА.– 3–7 квітня.– 2012.– С. 38.
5. Н.Г. Степова, Ю.І. Калугін, О.М. Кушка Моделювання механічного зневоднення осаду очисних споруд на фільтр-пресі // Екологічна безпека та природокористування.– 2014.– №15.– С. 80–89.
6. Н.Г. Степова Вплив фізико-хімічних властивостей осаду каналізаційних очисних споруд на його здатність до зневоднення // Екологічна безпека та природокористування.– 2011.– №7.– С. 73–81.
7. Landman, Sirakoff & White Dewatering of flocculated suspensions by pressure filtration // American Institute of Physics, Phys. Fluids A.– June 1991.– 6, vol. 3.– P. 1495–1509.
8. Landman K.A., White L.R., Eberl M. Pressure Filtration of Flocculated Suspensions // AIChE Journal.– 1995.– vol.41, No7.– P. 1687–1700.
9. Stickland et al Numerical modeling of fixed-cavity plate-and-frame filtration: formulation, validation and optimization // Chem. Eng. Sci.– 2006.– 61.– P. 3818–3829.
10. Дегремон Технический справочник по обработке воды, пер. с фр. В 2 т.– Новый журнал: Санкт-Петербург, 2007.– 1696 с.
11. Schumacher S. Leistungsbestimmende Prozesse in Nachklaerbecken, (Abschnitt 3.3.5. Rheologie) / Sebastian Schumacher.– Hannover: Institut fuer Stroemungsmechanik und Elektronisches Rechnen im Bauwesen der Universitaet Hannover: (Bericht Nr. 73/2006), 2006.– 137 p.
12. Buscall R., White L.R. The Consolidation of Concentrated Suspensions // J.Chem.Soc., Faraday Trans. 1.– 1987.– 83.– P. 873–891.
13. Kirby, J.M., Smiles D.E. Hydraulic Conductivity of Aqueous Bentonite Suspensions.– Aust.J.Soil Res.: 26, 1988.– 561 p.
14. J.C. Butcher, G.Wanner Runge-Kutta methods: some historical notes // Applied Numerical Mathematics.– 1996.– 22.– P. 113–151.
15. Roberto Garrappa Order conditions for Volterra Runge-Kutta methods // Applied Numerical Mathematics.– 2010.– 60.– P. 561–573.
16. G.Yu. Kulikov, S.K. Shindin Adaptive nested implicit Runge-Kutta formulas of Gauss type // Applied Numerical Mathematics.– 2009.– 59.– P. 707–722.