

УДК 532.465

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ВОДОЁМЕ С РЕЗКИМ ИЗМЕНЕНИЕМ ГЛУБИНЫ

И. БРОВЧЕНКО<sup>1</sup>, В. МАДЕРИЧ<sup>1</sup>, С. СЕМИН<sup>2</sup>,  
Ю. СТЕПАНЯНЦ<sup>3</sup>, Е. ТЕРЛЕЦКАЯ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина;

<sup>2</sup> Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Россия;

<sup>3</sup> University of Southern Queensland, Toowoomba, Australia  
e-mail kterletska@gmail.com

Получено 07.06.2014

В работе приводятся результаты численных расчётов по моделированию взаимодействия линейных поверхностных волновых пакетов с донным уступом (ступенчатым изменением профиля дна). Рассмотрены возмущения малой амплитуды с различными длинами волн. Получены зависимости коэффициентов трансформации (коэффициентов прохождения и отражения) поверхностных волн от отношения глубин до и после ступеньки. Обсуждается применимость гидростатического приближения в задаче моделирования соответствующих процессов. Показано, что гидростатическая модель адекватно описывает взаимодействие волновых пакетов с подводной ступенькой в случае достаточно длинных волн. Полученные в этом случае коэффициенты трансформации с высокой точностью описываются известными аналитическими формулами. Сравнение коэффициентов трансформации волн произвольных длин, полученные с использованием негидростатической модели, показали хорошее соответствие с существующими точными и приближенными аналитическими зависимостями коэффициентов трансформации. Расчёты, выполненные с использованием ранее разработанной авторами программы, находятся в согласии с результатами моделирования с использованием общедоступного пакета MITgcm.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** численное моделирование, поверхностные волны, волновые пакеты

У роботі наведено результати чисельних експериментів, що відтворюють взаємодію лінійних поверхневих хвильових пакетів зі сходиною на дні. Розглянуто випадки з різними довжинами хвиль. У результаті чисельного моделювання були отримані залежності коефіцієнтів трансформації поверхневих хвиль від відношення глибин до і після сходинок. Обговорюється застосовність гідростатичного наближення для моделювання відповідної взаємодії. Показано, що моделювання гідростатичною моделлю адекватно описує взаємодію хвильових пакетів із підводною сходиною для довгих хвиль. У цьому випадку отримані коефіцієнти трансформації поверхневих хвиль описуються відомими аналитичними формулами. Порівняння коефіцієнтів трансформації для хвиль довільних довжин при моделюванні негідростатичною моделлю показали відповідність до існуючих наближених аналітичних залежностей коефіцієнтів трансформації для загального випадку, і так само з результатами моделювання негідростатичною моделлю MITgcm.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** чисельне моделювання, поверхневі хвилі, хвильові пакети

The paper presents results of numerical modelling on interaction of linear surface wavetrains with a bottom step. Small-amplitude wavetrains with different wavelengths are examined. Dependence of the transformation coefficients (transmission and reflection coefficients) of surface waves on the ratio of the depths before and after the step is obtained. Applicability of the hydrostatic approximation to simulation of wave transformation is discussed. It is shown that the hydrostatic model can be used for the modelling of wavetrains with sufficiently long carrier waves. Transformation coefficients obtained in this case are in a good agreement with analytical formulae. The results obtained on the basis of earlier developed numerical code are in agreement with results obtained by means of freely available package MITgcm.

**KEY WORDS:** numerical modeling, surface waves, wave packets

## ВВЕДЕНИЕ

Важной задачей динамики волн в прибрежной зоне моря является описание процесса их трансформации над резкими изменениями рельефа дна. При взаимодействии поверхностных возмущений с резкими вариациями профиля дна происходит перераспределении волновой энергии падающей волны между прошедшими и отраженными волнами. В зависимости от параметров набегающей

волны прошедший волновой пакет может сохранять значительную часть начальной энергии и таким образом оказывать существенное воздействие на прибрежные постройки, береговую линию, морские платформы, суда, трубопроводы и другие гидротехнические сооружения. Многие теоретические работы были посвящены определению коэффициентов трансформации волн, однако простые формулы, позволяющие относительно легко и быстро рассчитать основные характеристики (высоты и длины) трансформированных волн, были получе-

ны либо в асимптотическом пределе бесконечно длинных волн [1], либо на основе полуэмпирического подхода [2, 3]. Строгий подход, предложенный в работе [4] и развитый впоследствии в работах [5–9], к сожалению, не позволяет выразить коэффициенты трансформации в обозримом виде; их можно получить лишь численно, решая интегральное уравнение или бесконечную систему алгебраических уравнений. Для преодоления этого неудобства в работах [2, 3] предложены аппроксимационные формулы, которые, как было показано, с хорошей точностью согласуются с результатами строгой теории. Вместе с тем, до недавнего времени подробного сравнения теоретических результатов с численными расчётами или лабораторными экспериментами выполнено не было, хотя некоторые данные, далеко не полные, представлены в работах [6, 9] (отметим также многочисленные исследования по трансформации солитонов на донном уступе [10–14]).

Подробное исследование трансформации квази-монохроматических волновых пакетов на донном уступе было выполнено в работах [2, 3] путём численного моделирования этого процесса с помощью программы MITgcm [15, 16], в которой реализована возможность расчётов волновых процессов произвольной частоты с учётом негидростатических эффектов. Несмотря на то, что при этом было получено весьма хорошее согласие теоретических и численных результатов, представляется полезным проведение независимых расчётов с помощью иных численных программ с целью подтверждения ранее полученных результатов, а также для верификации самих численных программ, сравнения их эффективности и возможностей. Этим вопросам посвящена данная работа, в которой моделирование трансформации поверхностных волновых пакетов осуществлялось на основе разработанной ранее программы решения уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости [17, 18].

Разработанная программа основана на гидродинамической модели с учётом негидростатических эффектов, что позволяет моделировать поверхностные волны произвольной длины и частоты (но без учёта капиллярности). Детальное описание модели и численных алгоритмов представлено в указанных работах [17, 18]. Модель имеет две опции: гидростатическую H-model (более экономную с точки зрения вычислительных ресурсов) и негидростатическую NH-model, в которой учитывается вертикальная составляющая движения жидкости. Для численного моделирования океанских волн гидростатическое приближение приме-

нено в случае, когда отношение глубины к длине волны относительно мало (приближение длинных волн) [16].

Используемая здесь численная модель ранее успешно применялась для описания различных волновых процессов. В частности, в работах [14, 19, 20] эта модель с учетом стратификации жидкости была применена к описанию трансформации внутренних уединённых волн на донном уступе. Теоретические выводы, полученные для внутренних волн в работе [21], были сопоставлены с данными прямого численного моделирования [19, 20]. В результате было показано, что теория хорошо описывает трансформацию внутренних уединённых волн как малой, так и умеренной амплитуды. Эта же модель успешно использовалась для моделирования трансформации длинных поверхностных волн над подводными препятствиями различной формы [22], однако для коротких поверхностных волн расчёты не проводились.

Целью данной работы – проведение численных расчётов по моделированию трансформации поверхностных волновых пакетов над донным уступом и сопоставление результатов моделирования с данными, полученными ранее в работах [2, 3] как на основе альтернативного численного моделирования, так и с помощью приближённого теоретического подхода. Здесь же мы рассматриваем вопрос о возможности использования гидростатического приближения для данного типа задач и границах его применимости. Проводится сравнение результатов моделирования по двум негидростатическим программам, использующим разные численные алгоритмы: дополненной негидростатическим блоком программой POM [17] и программой MITgcm [15, 16]. Численная модель MITgcm [15, 16] – одна из первых негидростатических моделей, разработанная в Массачусетском Технологическом Институте. Она широко применяется для моделирования процессов различных масштабов: от глобальной циркуляции атмосферы и океана до коротковолновых возмущений в лабораторных лотках. Обе использованные модели основываются на полнонелинейных уравнениях гидродинамики трёхмерной несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска (если учитывается стратификация жидкости). (Отметим, однако, что в модели MITgcm для поверхностных волн реализованы только линейные граничные условия, что для наших целей было не существенно, ибо расчёты выполнялись в рамках линейной теории для волн малой амплитуды, когда нелинейными эффектами можно пренебречь.)

## 1. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Конфигурация численного эксперимента показана на рис. 1. Рассматривается численная модель волнового лотка длиной  $L$  и фиксированной глубиной  $h_1 = 0.5$  м с вертикальным подводным уступом, высота которого варьировалась в численных расчётах. Край уступа был задан на расстоянии  $x_{st}$  от левого торца лотка. В начальный момент времени на свободной поверхности задавался линейный волновой пакет с помощью функции:

$$\eta(x, t) = \eta_0(x) \cos k_0 x, \quad (1)$$

где  $\eta_0(x)$  – функция, задающая огибающую волнового пакета,

$$\eta_0(x) = A_i \exp \left[ \frac{-(x - x_0)^2}{D^2} \right]. \quad (2)$$

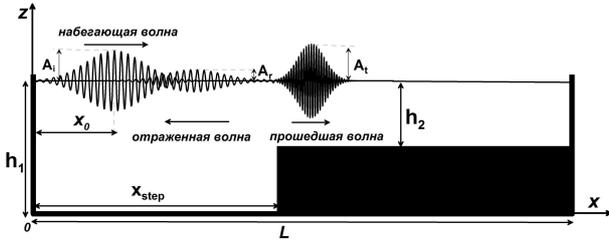


Рис. 1. Конфигурация численного эксперимента

Начальные горизонтальная и вертикальная компоненты скорости вычислялись также на основе линейной теории потенциальных движений идеальной жидкости [1]:

$$u(x, z, t) = \frac{gk_0\eta_0(x)}{\omega_0} \frac{\cos hk_0(z - h_1)}{\operatorname{ch} k_0 h_1} \cos k_0 x, \quad (3)$$

$$v(x, z, t) = -\frac{gk_0\eta_0(x)}{\omega_0} \frac{\sin hk_0(z - h_1)}{\operatorname{ch} k_0 h_1} \cos k_0 x, \quad (4)$$

где  $\omega_0$  – частота;  $k_0$  – волновое число начального возмущения;  $g = 9.806$  м/с<sup>2</sup> – ускорение свободного падения;  $A_i$  – максимальная амплитуда волнового пакета, набегающего на ступеньку вдали от неё;  $x_0$  – координата начального положения центра волнового пакета;  $D$  – характерная ширина пакета. Волновое число исходного возмущения  $k_0$  варьировалось, при этом характерная ширина пакета задавалась равной  $D = 6\lambda_0$  (здесь  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$  – длина несущей волны).

Амплитуда волнового пакета выбиралась таким образом, чтобы с течением времени проявлением нелинейных эффектов можно было пренебречь. Это достигалось путём задания  $A_i = \min(h_1, h_2)/500$ . Моделирование проводилось для трёх значений безразмерного волнового числа  $\kappa = k_0 h_1$  исходного возмущения –  $\kappa = 0.1, 1$  и  $10$ , и девяти значений отношений глубин за краем уступа и перед ним:  $h_2/h_1 = 0.026, 0.043, 0.07, 0.113, 0.183, 0.298, 0.483, 0.788, 1$ . Положение ступеньки  $x_{st}$  для каждой серии численных экспериментов тоже варьировалось, с тем чтобы центр начального возмущения находился достаточно далеко от края уступа.

Молекулярная вязкость жидкости задавалась равной типичному значению для воды  $\mu = 1.1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>с<sup>-1</sup>. В данной серии экспериментов вязкость практически не оказывала влияния на динамику волнового пакета, но для устойчивости численной схемы требовалось задать ненулевое значение  $\mu$ .

Размеры лотка и параметры волновых пакетов в приводимой ниже серии численных экспериментов даны в таблице 1.

## 2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРАНСФОРМАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НАД УСТУПОМ

Определим, следуя Лэмбу [1], коэффициенты трансформации поверхностной волны в зависимости от отношения глубин за краем уступа  $h_2$  и перед ним  $h_1$ : коэффициент прохождения  $T$  – отношение амплитуд прошедшей волны к падающей, и коэффициент отражения  $R$  – отношение амплитуд отраженной волны к падающей:

$$T = \frac{A_t}{A_i}, \quad R = \frac{A_r}{A_i}, \quad (5)$$

где  $A_t$  и  $A_r$  есть максимальные амплитуды прошедшего и отраженного волновых пакетов соответственно. В линейном приближении для этих величин из условий непрерывности массы и давления Лэмбом были получены приведенные ниже выражения для бесконечно длинных волн в канале с резким изменением глубины [1]:

$$T = \frac{2c_i}{c_i + c_t} = \frac{2}{1 + \sqrt{h_2/h_1}}, \quad (6)$$

$$|R| = \frac{|c_i - c_t|}{c_i + c_t} = \frac{1 - \sqrt{h_2/h_1}}{1 + \sqrt{h_2/h_1}}. \quad (7)$$

Табл. 1. Размеры лотка и параметры волновых пакетов

N	$\kappa$	$\lambda_0$ (м)	$\gamma$	$L_{max}$ (м)	$x_{st}$ (м)	Сеточное разрешение
1	10	0.314	1.6	25	11.3	3000 × 500
2	1	3.14	0.16	250	113	3000 × 300
3	0.1	31.4	0.016	2500	1130	3000 × 100

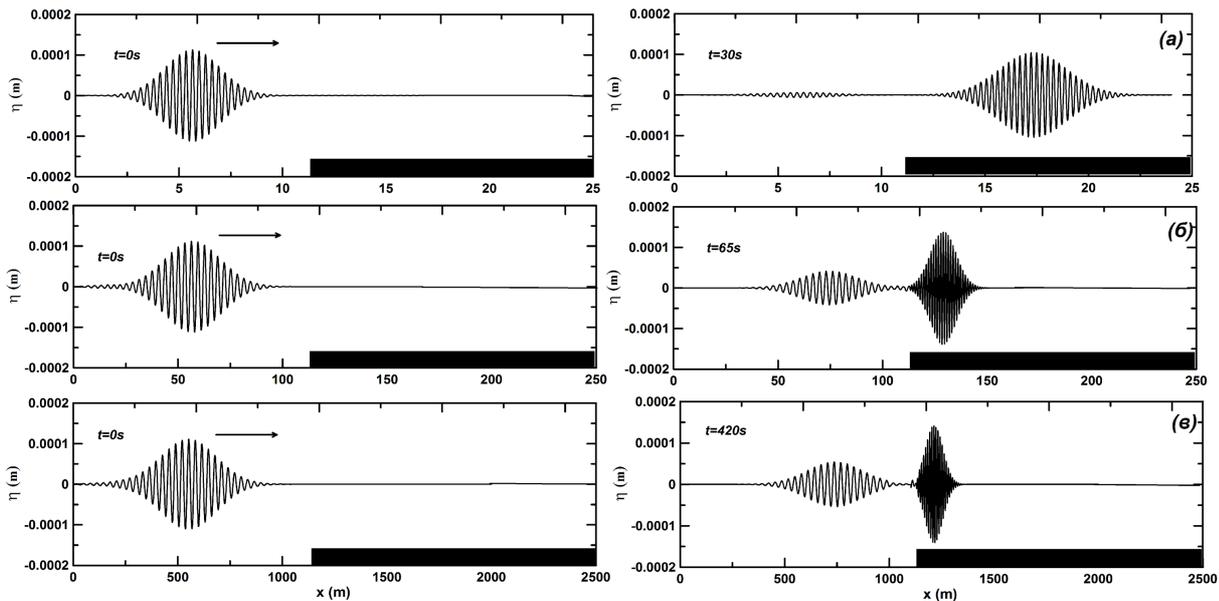


Рис. 2. Трансформация волнового пакета над донным уступом для случая  $h_2/h_1 = 0.113$  для трех значений безразмерного волнового числа: а -  $\kappa = 10$ , б -  $\kappa = 1$ , в -  $\kappa = 0.1$ . График справа приведен для начального момента времени, а слева - для времени  $t = 30$  с (а),  $t = 65$  с (б) и  $t = 420$  с (в). Донный уступ показан схематически

В этих формулах  $c_i = \sqrt{gh_1}$ ,  $c_t = \sqrt{gh_2}$  есть скорости распространения длинных волн ( $\gamma \equiv h_{1,2}/\lambda \ll 1$ ) в областях с глубинами  $h_1$  и  $h_2$ , соответственно. В работах [2, 3] были предложены приближенные зависимости для коэффициентов трансформации  $T$  и  $R$  для общего случая волн произвольной длины. При этом для вычисления волнового числа прошедшей волны использовались дисперсионное уравнение поверхностных волн и условие постоянства частоты в стационарной среде, параметры которой не зависят от времени:

$$\omega = \sqrt{gk_0 \operatorname{th} k_0 h_1} = \sqrt{gk_t \operatorname{th} k_t h_2}, \quad (8)$$

где  $k_0$  и  $k_t$  – волновые числа падающей и прошедшей волн.

В указанных работах [2, 3] было предложено вместо линейных скоростей  $c_i$ ,  $c_t$  в формуле (6) для  $T$  использовать групповые скорости волн, а в формуле (7) для  $R$  – фазовые скорости. В результате для коэффициентов трансформации были получены следующие аппроксимационные формулы:

$$T = \frac{2(V_g)_i}{(V_g)_i + (V_g)_t}, \quad |R| = \frac{|(V_p)_i - (V_p)_t|}{(V_p)_i + (V_p)_t}, \quad (9)$$

где

$$V_g = \frac{\omega}{2k} \left( 1 + kh \frac{\operatorname{sech}^2 kh}{\operatorname{th} kh} \right), \quad V_p = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} kh}. \quad (10)$$

Таким образом, выражения для групповой и фазовой скоростей вместе с уравнением (8), связывающим волновые числа прошедшей и падающей волн, позволяют определить коэффициенты

трансформации. При этом очевидно, что длина отраженной волны совпадает с длиной падающей волны, так как оба пакета распространяются в среде с одинаковыми параметрами, имея равные временные частоты.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной работе моделирование трансформации волн осуществлялось на основе негидростатической модели NH-model (POM). На рис. 2 представлены результаты трансформации волнового пакета для трех значений безразмерного волнового числа падающей волны  $\kappa = 10$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\kappa = 0.1$ . Амплитуда исходного волнового пакета для всех случаев задавалась одинаковой  $A_i = 1.13 \cdot 10^{-4}$  м, а длина волны варьировалась и составляла  $\lambda_0 = 0.314$ ,  $3.14$  и  $31.4$  м. Глубина над ступенькой в этих расчётах составляла  $h_2 = 0.0564$  м. На рис. 2 слева схематично (не в масштабе) показано возмущение свободной поверхности в начальный момент времени, а справа – в моменты времени, соответствующие полному прохождению пакета за уступ:  $t = 30$  с в случае  $\lambda_0 = 0.314$  м ( $\kappa = 10$ );  $t = 65$  с в случае  $\lambda_0 = 3.14$  м ( $\kappa = 1$ ); и  $t = 420$  с в случае  $\lambda_0 = 31.4$  м ( $\kappa = 0.1$ ).

Как видно уже из этого рисунка, характеристики прошедшей и отраженной волн (амплитуда и длина волны) существенно зависят от безразмерного волнового числа падающей волны. При достаточно малых значениях безразмерного волнового числа, когда справедливо приближение длинных волн, амплитуда волны, прошедшей за ступеньку, растет, а длина, наоборот, уменьшается. Как было показано путём численного моделирования в работах [2, 3], даже при не слишком малых значениях  $\kappa = 0.1$  коэффициенты прохождения  $T$  и отражения  $R$  довольно хорошо описываются аналитическими зависимостям Лэмба (6) и (7).

На рис. 3 представлены зависимости коэффициентов трансформации поверхностных волн в зависимости от отношения глубин за уступом и перед ним  $h_2/h_1$ , полученные на основе проведенного нами независимого численного моделирования с помощью модели POM [17]. При этом моделирование осуществлялось с использованием негидростатической (NH-model) и гидростатической (H-model) версий модели POM. Полученные данные сравниваются с данными, полученными в работах [2, 3] с помощью модели MITgcm, и с приближёнными аналитическими формулами (9), (10). Во всех случаях при  $h_2 = h_1$  (при отсутствие уступа) отраже-

ние, естественно, не наблюдалось ( $R = 0$ ), а волна проходила из области с глубиной  $h_1$  в область с глубиной  $h_2$  без изменений ( $T = 1$ ). Когда же  $h_2/h_1 \rightarrow 0$ , то набегающая волна почти полностью отражается и  $R \rightarrow 1$ ,  $T \rightarrow 2$ . В этом случае, формально говоря, образуется заплеск удвоенной амплитуды с нулевой длиной волны.

На рис. 3, а показано сравнение результатов моделирования с использованием негидростатической модели NH-model (POM) [17] с результатами моделирования с помощью негидростатической модели MITgcm [15, 16]. Видно, что результаты, полученные с использованием разных алгоритмов, хорошо согласуются друг с другом.

На рис. 3, б показаны результаты моделирования в рамках негидростатической модели NH-model (POM) в сравнении с приближенными аналитическими зависимостями (9), (10). Анализ показал хорошее соответствие результатов численного моделирования с приближенными зависимостями коэффициентов трансформации (9), (10) практически для всех длин волн исходного возмущения. Заметные расхождения наблюдаются лишь для коэффициента отражения при малых длинах волн  $\kappa = 10$  и малых перепадах глубин  $h_2/h_1 < 0.05$ .

На рис. 3, в показаны результаты моделирования с использованием упрощенной гидростатической модели H-model (POM). Результаты приведены для относительно длинных волн с  $\kappa = 0.1$  и для волн умеренной длины с  $\kappa = 1$ ; при этом определённый выше параметр негидростатичности  $\gamma = 0.016$  и  $\gamma = 0.16$  соответственно. Применение гидростатической модели для моделирования трансформации коротких поверхностных волн с  $\kappa = 10$  приводит к существенному искажению формы прошедшего волнового пакета, поэтому при таких длинах волн использование гидростатической модели нецелесообразно. Как видно из рис. 3, в, коэффициенты трансформации, полученные с использованием гидростатической модели, хорошо согласуются с аналитическими зависимостями (9), (10) при  $\kappa = 0.1$ . Однако даже при  $\kappa = 1$  разница в коэффициентах трансформации, полученных с помощью гидростатической и негидростатической моделей, составила не более 5%.

### ВЫВОДЫ

В работе проведено численное моделирование взаимодействия волновых пакетов поверхностных волн малой амплитуды с донным уступом. Донный уступ представляет собой широко распространённую модель морского шельфа с резким измене-

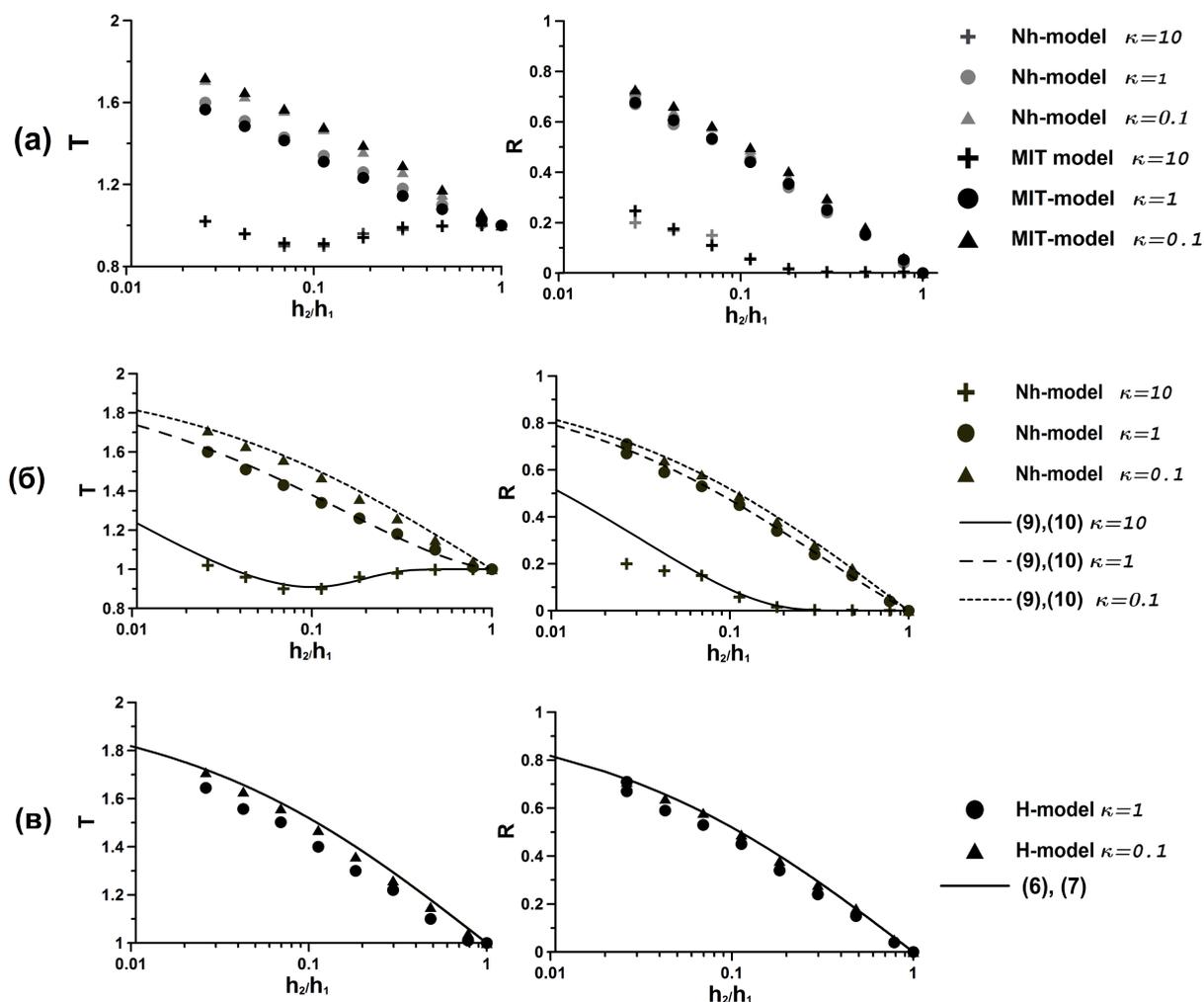


Рис. 3. Сравнение коэффициентов трансформации (слева – коэффициент прохождения, справа – коэффициент отражения) в зависимости от отношения глубин: *a* – полученных в результате численного моделирования с помощью моделей NH-model (POM) и MITgcm; *б* – полученных в результате численного моделирования NH-model (POM) и приближенных аналитических зависимостей (9) и (10); *в* – полученных в результате численного моделирования на основе гидростатического режима H-model (POM) и аналитических зависимостей (9) и (10)

нием глубины в прибрежной зоне [23]. Рассмотрены случаи трансформации волн различной длины. Показано, что коэффициенты трансформации (коэффициент прохождения  $T$  и коэффициент отражения  $R$ ) зависят как от длины несущей волны, так и от перепада глубин на уступе  $h_2/h_1$ . Представлены численно полученные зависимости этих коэффициентов от перепада глубин для трёх значений безразмерного волнового числа падающей волны  $\kappa \equiv k_0 h_1 = 0.1, 1, 10$ . Показано, что для расчёта коэффициентов трансформации длинных волн и волн умеренной длины вплоть до  $\kappa = 1$  можно пользоваться упрощенной численной моделью, основанной на гидростатическом приближе-

нии. Результаты моделирования в этом случае хорошо согласуются с известными аналитическими зависимостями [1–3] и результатами строгой теории ([4–9]).

Негидростатическая модель [17] использовалась для моделирования трансформации как длинных, так и коротких волн. Полученные на её основе результаты хорошо согласуются с результатами расчётов по другой негидростатической модели MITgcm и с приближёнными формулами [2, 3]. Хорошее соответствие результатов, полученных в рамках двух независимых численных моделей, а также их соответствие теоретическим выводам является, с одной стороны, подтверждением достовер-

ности результатов моделирования, а с другой стороны - придаёт уверенности в пригодности использованных программ для расчёта подобного рода задач.

Данная работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (Задание № 5.30.2014/К).

Авторы придерживаются принципа алфавитного порядка следования фамилий. Автор, ответственный за публикацию, Е. Терлецкая, e-mail: KTerletska@gmail.com

1. Lamb H. Hydrodynamics.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1933.– 295 p.
2. Giniyatullin A.R., Kurkin A.A., Semin S.V., Y.A. Stepanyants Transformation of narrowband wavetrains of surface gravity waves passing over a bottom step. // *Math. Model. Nat. Phenom.*– 2014.– **9**.– P. 73–82.
3. Куркин А.А., Семенов С.В., Степанянц Ю.А. Трансформация поверхностных волн над донным уступом. // *Изв. РАН, ФАО.*– 2015.– **51**, N **2**.– P. 15–21.
4. Bartholomeusz L.F. The reflection of long waves at a step. // *Proc. Camb. Philos. Soc.*– 1958.– **54**.– P. 106–118.
5. Takano K. Effets d'un obstacle parallelepipedique sur la propagation de la houle. // *La Houille Blanche.*– 1960.– **15**.– P. 247–267.
6. Newman J.N. Propagation of water waves over an infinite step. // *J. Fluid Mech.*– 1965.– **23**.– P. 339–415.
7. Takano K. Effet d'un changement brusque de profondeur sur une houle irrotationnelle. // *La mer.*– 1967.– **5**.– P. 100–116.
8. Miles J.W. Surface-wave scattering matrix for a shelf. // *J. Fluid Mech.*– 1967.– **28**.– P. 755–767.
9. Massel S.R. Hydrodynamics of the coastal zone // Elsevier.– Amsterdam.– 1989.– P. 336.
10. Seabra-Santos F.J., Renouard D.P., Temperville A.M Numerical and experimental study of the transation of a form solitary wave over a shelf or isolated obstacle. // *J. Fluid Mech.*– 1987.– **176**.– P. 17–134.
11. Losada M.A., Vidal C., Medina R. Experimental study of the evolution of a solitary wave at the abrupt junction. // *J. Geophys. Res.*– 1989.– **94**.– P. 14,557–14,566.
12. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами.– Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996.– 274 с.
13. Pelinovsky E., Choi B.H., Talipova T., Wood S.B., Kim D.Ch. Solitary wave transformation on the underwater step: Asymptotic theory and numerical experiments. // *Appl. Math. and Comp.*– 2010.– **217**.– P. 1,704–1,718.
14. Talipova T., Terletska K., Maderich V., Brovchenko I., Pelinovsky E., Jung K.T., Grimshaw R. Solitary wave transformation on the underwater step: Asymptotic theory and numerical experiments // *Physics of Fluids.*– 2013.– **25**.– P. doi: 10.1063/1.4797455.
15. Marshal J., Adcroft A., Hill C., Perelman L., Heisey C. A finite-volume, incompressible Navier–Stokes model for studies of the ocean on parallel computers. // *J. Geophys. Res.*– 1997.– **102**.– P. 5733–5766.
16. Marshal J., Hill C., Perelman L., Adcroft A. Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modelling. // *J. Geophys. Res.*– 1997.– **102**.– P. 5733–5752.
17. Kanarska Y., Maderich V. A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // *Ocean Dynamics.*– 2003.– **53**.– P. 176–185.
18. Maderich V., Brovchenko I., Terletska K., Hutter K. Numerical simulations of the nonhydrostatic transformation of basin-scale internal gravity waves and wave-enhanced meromixis in lakes // Ch. 4 in Hutter K. (Ed.) *Nonlinear internal waves in lakes* – Springer. Series: *Advances in Geophysical and Environmental Mechanics.*– 2012.– P. 193–276.
19. Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Pelinovsky E., Choi B. H., Brovchenko I., Terletska K., Kim D. C. The transformation of an interfacial solitary wave of elevation at a bottom step // *Nonlinear Processes in Geophysics* .– 2009.– **16**.– P. 33–42.
20. Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Terletska K., Brovchenko I., Pelinovsky E., Choi B.H. Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a bottom step. // *Physics of Fluids.*– 2010.– **22**.– P. doi:10.1063/1.3455984.
21. Grimshaw R., Pelinovsky E., and Talipova T. Fission of a weakly nonlinear interfacial solitary wave at a step // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*– 2008.– **102**.– P. 179.
22. Канарская Ю.В., Мадерич В.С. Численная негидростатическая модель стратифицированных течений со свободной поверхностью // *Прикладная гидромеханика.*– 2002.– **76**.– С. 12–21.
23. Ефимов В.В., Куликов Е.А., Рабинович А.Б., Файн И.В. Волны в пограничных областях океана.– Л: Гидрометеиздат, 1985.– 280 с.