

СОПРОТИВЛЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАВИТАТОРОВ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ КАВИТАЦИИ

В. В. СЕРЕБРЯКОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
ул. Желябова, 8/4, 03680, ГСП, Киев-180, Украина
E-mail: serebryakov_vladimir@yahoo.com

Получено 13.08.2014

Исследованы особенности формирования коэффициентов кавитационного сопротивления осесимметричных кавитаторов при малых числах кавитации. Основное внимание уделено совершенствованию зависимостей для расчета удлиненных кавитаторов в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Детально изучено влияние формы кавитаторов, числа кавитации и вязкости на их сопротивление. На основе асимптотических и известных численных решений разработаны универсальные асимптотические аппроксимации для расчета коэффициентов сопротивления кавитаторов различной формы, включая конусы с углами полураствора ($0 \dots 90^\circ$) при числах кавитации ($0 \dots 0.2$).

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: осесимметричный кавитатор, коэффициент сопротивления, число кавитации, аппроксимационная зависимость

Досліджені особливості формування коефіцієнтів опору осесимметричних кавитаторів при малих числах кавітації. Основну увагу приділено удосконаленню залежностей для розрахунку видовжених кавітаторів у рамках моделі ідеальної нестисливої рідини. Детально досліджено вплив форми кавітаторів, числа кавітації та в'язкості на їхній опір. На основі асимптотичних і відомих чисельних зв'язків розроблені універсальні асимптотичні апроксимації для розрахунку коефіцієнтів опору кавітаторів різної форми, включаючи конуси з кутами напіврозкряву ($0 \dots 90^\circ$) при числах кавітації ($0 \dots 0.2$).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: осесимметричний кавітатор, коефіцієнт опору, число кавітації, апроксимаційна залежність

The paper deals with considering of peculiarities of formation of drag coefficients for axisymmetric cavitators at low cavitation numbers. The special attention was paid to improving of the dependences for calculation of elongated cavitators within the frameworks of the model of ideal incompressible liquid. The influence of the cavitator's shape, cavitation number and viscosity on the drag is investigated in detail. On the base of the asymptotic relations and known numerical solutions, the universal asymptotic approximations are developed for calculation of drag coefficients for cavitators of different shapes, including the cones with semi-angles of ($0 \dots 90^\circ$) and cavitation numbers of ($0 \dots 0.2$).

KEY WORDS: an axisymmetric cavitator, drag coefficient, cavitation number, the approximation dependency

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время применяются несколько нелинейных численных методов расчета коэффициентов сопротивления c_d осесимметричных кавитаторов. Одними из наиболее точных считаются численные расчеты в приближении идеальной несжимаемой жидкости в рамках симметричной модели Рябушинского [1, 2]. Их результаты пригодны, в частности, для оценки c_d конуса в диапазоне углов полураствора до $\gamma = 90^\circ$ (за исключением очень малых углов полураствора). Следует также упомянуть нелинейный численный метод расчета [3], разработанный на основе модели Рябушинского при замыкании на диск применительно к специфическому случаю тонких кавитаторов, в частности, при конусах с углами полураствора в диапазоне $\gamma = (0 \dots 15)^\circ$.

Под тонким принято понимать кавитатор, взаимодействующая с жидкостью поверхность кото-

рого имеет достаточно гладкую форму, а поперечные размеры сечения малы по сравнению с длиной смоченной части поверхности. Он может быть заостренным (например, конус), тупым (параболоид) или представлять композицию форм различных типов при их гладком сопряжении. В общем случае граница отрыва жидкости может быть как фиксированной (в случае конуса), так и не фиксированной. Область применения тонких и очень тонких кавитаторов достаточно ограничена. Однако, в отличие от дисковых, удлиненные кавитаторы, благодаря возможности реализовать на них значительные поперечные силы, могут служить достаточно эффективным средством управления движением. Кроме того, установка подобных устройств под углом атаки позволяет использовать их для компенсации влияния гравитации при моделировании высокоскоростных суперкавитационных течений в кавитационных трубах и каналах при малых скоростях обтекания.

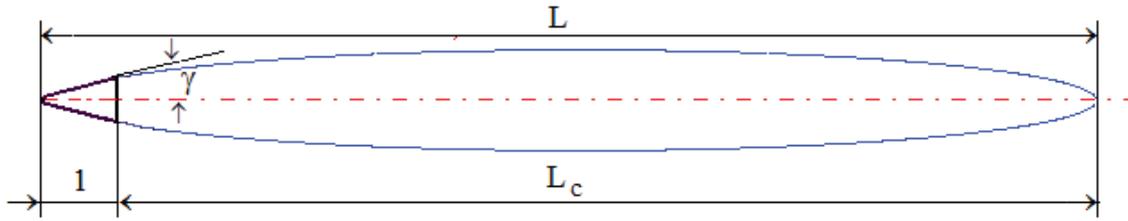


Рис. 1. Форма и основные размеры каверны

На основании численных данных [1] получены достаточно точные аппроксимационные зависимости для конуса, отдельно для малых ($\gamma = (0 \dots 15)^\circ$ – тонкие кавитаторы) и для больших ($\gamma = (15 \dots 90)^\circ$) углов полураствора. При этом для случая $\gamma = (0 \dots 15)^\circ$ известна аппроксимация только для коэффициента сопротивления c_{do} при нулевом числе кавитации $\sigma = 0$.

Цель данного исследования состоит в разработке универсальных аппроксимационных формул для расчетов c_d осесимметричных кавитаторов (в частности, для конуса во всем диапазоне углов раскрытия $\gamma = (0 \dots 90)^\circ$) с учетом влияния их формы, числа кавитации и вязкости жидкости. Это достигается за счет использования асимптотических разложений совместно с результатами специфического численного метода расчета [3] и численными данными [1, 2], включая аппроксимационные зависимости [1].

1. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Применим обезразмеривание относительно системы величин ρ , U_∞ , l , определяющих массовую плотность жидкости, скорость движения и длину кавитатора. Для удобства выкладок в дальнейшем полагаем $l = 1$. Используем цилиндрическую систему координат (r, θ, x) с началом в носу кавитатора. Форма и основные размеры каверны показаны на рис. 1.

Предположим, что форма осесимметричного кавитатора может быть представлена в виде $\bar{r}_n = \varepsilon \bar{r}'_n(\bar{x})_{x=1} = \varepsilon$, где $\varepsilon = \text{tg } \gamma$ – отношение радиуса кавитатора в сечении отрыва струй к его длине. Величина локального угла наклона в сечении отрыва, обозначенная через γ_o ($\bar{r}'_n = \varepsilon \bar{r}''_n(\bar{x})_{x=1} = \varepsilon_o$, $\varepsilon_o = \text{tg } \gamma_o$), в общем случае зависит от формы кавитатора. Для тонкого кавитатора как ε , так и ε_o малы, а в частном случае конуса ($r_n = \varepsilon x$) совпадают: $\gamma = \gamma_o$, $\varepsilon = \varepsilon_o$.

Динамическая часть давления ΔP_n на поверхности тонкого осесимметричного кавитатора опреде-

ляются из линейной части уравнения Бернулли:

$$\Delta P_n = P_n - P_\infty = -\frac{\rho}{2}(U_\infty + \Delta U)^2 - \frac{\rho}{2}U_r^2, \quad (1a)$$

$$\Delta \bar{P}_n \approx -(2\Delta \bar{U} + \bar{U}_r^2) = -\left(2\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} + \bar{U}_r^2\right). \quad (1b)$$

Здесь P_n , P_∞ – величины полного и гидростатического давления; ΔU – возмущение продольной скорости; U_r – радиальная скорость; φ – потенциал скорости. В приближении (1b) \bar{P}_n следует понимать как значение давления, нормированного к плотности жидкости.

Величина производной потенциала скорости φ (черту, обозначающую обезразмеривание, в дальнейшем опускаем) в рамках модели источников на оси с учетом специфики формы поверхности кавитатора и каверны определяется зависимостью

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{4} \int_0^L \frac{f(x_1) dx_1}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + r^2}} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ -\frac{f_n(0)}{\sqrt{x^2 + r^2}} - \int_0^1 \frac{f'_n(x_1) dx_1}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + r^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_n(0)}{\sqrt{(1-x)^2 + r^2}} - \frac{f_c(1)}{\sqrt{(1-x)^2 + r^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \frac{f'_c(x_1) dx_1}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + r^2}} + \frac{f_c(L)}{\sqrt{(L-x)^2 + r^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $f = S'(x)/\pi$; $S(x)$ – площадь поперечных сечений обтекаемой поверхности; f_n соответствует кавитатору, f_c – каверне.

С учетом известного разложения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_0^{L_*} \frac{f(x_1) dx_1}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + r^2}} \Big|_{r \rightarrow 0} = \\ & = \frac{1}{4} \left[f(x) \ln \frac{4x(L_* - x)}{r^2} + \right. \\ & \left. + \int_0^{L_*} \frac{f(x) - f(x_1)}{|x_1 - x|} dx_1 \right] + O(r^2 \ln 1/r) \end{aligned} \quad (3)$$

величина давления на поверхности тонкого кавитатора $r_n = r_n(x)$ в пределах модели гидродинамики тонких тел с точностью до малых $O(\varepsilon^2 \ln 1/\varepsilon^2, \sigma)$ задается выражением

$$\Delta P = \Delta P_o + \Delta P_c, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta P_o = & \frac{1}{2} \left[f'_n(x) \ln \frac{4x(1-x)}{r_n^2(x)} + \frac{f_n(0)}{x} + \right. \\ & \left. + \int_0^1 \frac{f'_n(x) - f'_n(x_1)}{|x_1 - x|} dx \right] - U_r^2; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta P_c = & \frac{1}{2} \left[- \frac{f_n(1) - f_c(1)}{\sqrt{(1-x)^2 + r_n^2(x)}} - \right. \\ & \left. - \frac{f_c(L)}{L-x} + \int_1^L \frac{f'_c(x_1)}{x_1 - x} dx_1 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Исходя из соотношений (3)–(6) для ΔP , величина c_d с учетом обезразмеривания определяется зависимостью

$$c_d = \frac{1}{R_n^2} \int_0^1 \Delta P(x) \frac{dr_n^2(x)}{dx} dx \quad (7)$$

при $r_n|_{x=1} = R_n$ в сечении отрыва.

Принимая во внимание обычную зависимость для кавитационного сопротивления D :

$$D = \pi R_n^2 \frac{\rho U_\infty^2}{2},$$

и формулы (3)–(7), замечаем, что структурно коэффициент сопротивления кавитатора c_d при стационарном обтекании включает три основных части:

$$c_d = c_{do} + \Delta c_d, \quad \text{где} \quad \Delta c_d = \Delta c_{d\sigma} + \sigma, \quad (8a)$$

$$c_d = c_{do} + \kappa_\sigma \sigma. \quad (8b)$$

Здесь c_{do} – коэффициент сопротивления при нулевых числах кавитации $\sigma = 0$; $\Delta c_{d\sigma}$ определяет воздействие каверны на обтекание поверхности кавитатора; σ соответствует воздействию разности гидростатического давления и давления в каверне. Удобным оказывается представление c_d (8b) в виде двух частей, одна из которых зависит от формы кавитатора, а вторая – от формы каверны.

2. КОЭФФИЦИЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ НУЛЕВОМ ЧИСЛЕ КАВИТАЦИИ

Если форма кавитатора задана, то зависимость для c_{do} при нулевом числе кавитации в приближении гидродинамики тонких тел определяется выражением

$$\begin{aligned} c_{do} = & \frac{1}{R_n^2} \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 r_n^2(x)}{dx^2} \ln \frac{4x(1-x)}{r_n^2(x)} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^1 \left(\frac{d^2 r_n^2(x)}{dx^2} - \frac{d^2 r_n^2(x_1)}{dx_1^2} \right) \frac{dx_1}{|x_1 - x|} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{x} \frac{dr_n^2(0)}{dx} \right) - \left(\frac{dr_n(x)}{dx} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. + \int_1^\infty \left(\frac{d^2 R_c^2(x_1)}{dx_1^2} \frac{1}{|x_1 - x|} \right) dx_1 \right] \frac{dr_n^2(x)}{dx} \right\} dx, \end{aligned} \quad (9)$$

позволяющим получить аналитические зависимости для кавитаторов простейших форм.

2.1. Определение c_{do} для конусов

Линейная зависимость для c_{do} конуса предложена в монографии [4]:

$$c_{do} = 2\varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (10a)$$

Нелинейное соотношение для c_{do} конуса

$$c_{do} = 2 \left[1 - (1 + \varepsilon^2) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \ln \frac{4}{\varepsilon^2} \right) \right] \quad (10b)$$

выведено в работе [5] методом последовательных приближений с использованием дельтообразности ядра при $r \rightarrow 0$ для потенциала течения источников на оси. В определенном смысле этот подход эквивалентен приближению гидродинамики тонких тел.

Зависимость, являющаяся разложением второго порядка формулы (10b), была предложена независимо в исследовании [6]:

$$c_{do}|_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow 2\varepsilon^2 \left[\ln \frac{1}{\varepsilon} + (\ln 2 - 1) + \dots \right]. \quad (10c)$$

Следует, однако, отметить, что оценки, доставляемые приведенными формулами, существенно превышают данные нелинейного численного расчета [3]. Об этом же свидетельствует сравнение выражений (10b), (10c) с известной аппроксимационной зависимостью на основе данных нелинейного численного расчета [1] для диапазона углов $\gamma = (0 \dots 15)^\circ$:

$$c_{do} = \frac{\beta(\gamma)}{2} \left[0.915 + 9.5 \frac{\beta(\gamma)}{2} \right], \quad \gamma \leq 15^\circ. \quad (11)$$

Здесь и далее $\beta(\gamma) = \gamma/90$.

Поскольку в предельной ситуации малых углов численные решения могут давать существенную погрешность, дополнительно был получен третий член асимптотической зависимости для c_{do} :

$$R_o^2 = \varepsilon^2 \left[\frac{2x}{\sqrt{(\ln x / \varepsilon^2) / (\ln 1 / \varepsilon^2)}} - 1 \right]_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{2\varepsilon^2}{\sqrt{\ln x}}, \quad (12a)$$

$$c_{do} = 2\varepsilon^2 \left[\ln 1/\varepsilon + (\ln 2 - 1) - \frac{0.25}{\ln 1/\varepsilon} + \dots \right], \quad (12b)$$

$$c_{do} = 2\varepsilon^2 \ln \frac{3[1 + (4/3)\varepsilon]}{2e\varepsilon}. \quad (12c)$$

При этом использовалось асимптотическое решение второго порядка для формы каверны за тонким конусом при $\sigma = 0$ (12a) [7]. Трехчленная зависимость для c_{do} представлена в виде (12b).

С учетом завышения величин, определяемых формулами (10b), (10c), в [8] получено более удобное для расчета соотношение (12c), учитывающее влияние третьего члена разложения. Известна также аппроксимационная зависимость для c_{do} конуса в диапазоне $\gamma = (15 \dots 90)^\circ$ [1]:

$$c_{do} = 0.5 + 1.81 \left[\frac{\beta(\gamma)}{2} - 0.25 \right] - 2 \left[\frac{\beta(\gamma)}{2} - 0.25 \right]^2, \quad (13)$$

$$15^\circ < \gamma \leq 90^\circ.$$

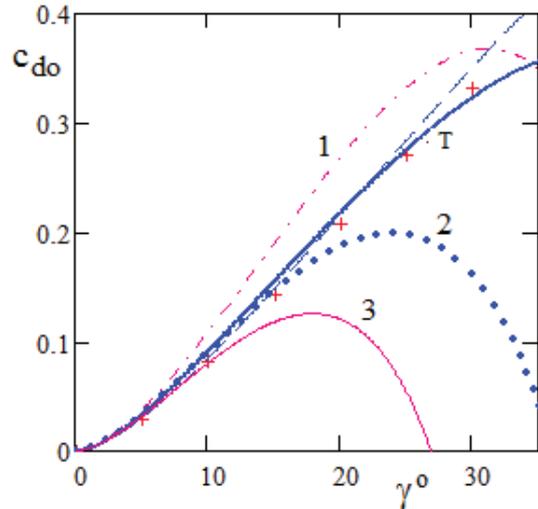


Рис. 2. Диапазоны пригодности различных приближений для $c_{do} = c_{do}(\gamma)$ тонкого конуса:

1 – формула (10a), T – формула (10b), 2 – формула (10c), 3 – формула (12b), - - - - формула (12c), + – формула (14)

Наличие простых асимптотических зависимостей для малых углов совместно с данными нелинейных численных расчетов позволяет построить достаточно точную удобную для практических расчетов универсальную зависимость для расчета c_{do} во всем диапазоне углов $0^\circ < \gamma \leq 90^\circ$:

$$c_{do} = \frac{[\pi\beta(\gamma)]^2}{2} \times \ln \left[\frac{1.74[1 - 0.45\sqrt{\beta(\gamma)} + 2\beta(\gamma)]}{\pi\beta(\gamma)} \right] - 0.87\beta(\gamma)^{1.7}, \quad (14)$$

$$0^\circ < \gamma \leq 90^\circ.$$

Результаты расчета по асимптотическим зависимостям первого, второго и третьего приближений (10a)–(10c), (12b), (12c), а также по формуле (14), наиболее близкой к данным нелинейных численных расчетов, приведены на рис. 2. Оценим их диапазоны пригодности. Наиболее широк он у зависимости не менее второго порядка (10b) – $\gamma = (0 \dots 30)^\circ$. Существенно более узкий диапазон, $\gamma = (0 \dots 15)^\circ$, у зависимости второго порядка (10c) и наименьший, $\gamma \sim 0 \div 10^\circ$, – у зависимости третьего порядка (12b). Наиболее удобно для расчетов соотношение (12c), пригодное в достаточно широком диапазоне углов $\sim (0 \dots 25)^\circ$. В то же время, оно наиболее близко к третьему приближению и данным нелинейных численных расчетов.

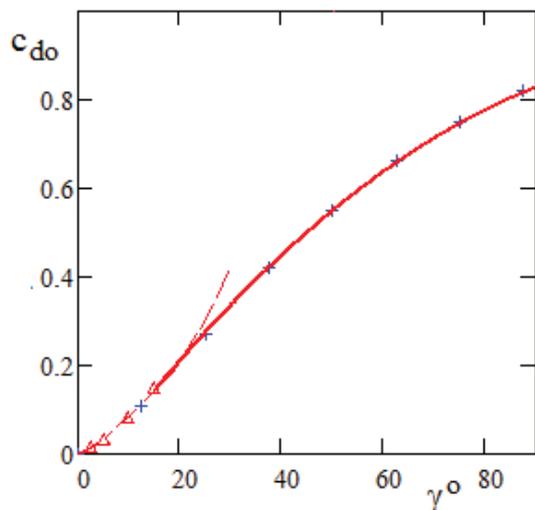


Рис. 3. Сравнение универсальной зависимости для c_{do} конуса в диапазоне $\gamma = (0 \dots 90)^\circ$ с данными нелинейного численного расчета:

Δ – данные численного расчета $\gamma \leq 15^\circ$ [3],
 $+$ – универсальная зависимость (14) $0 < \gamma \leq 90^\circ$,
 штриховая – аппроксимация (11) для $\gamma \leq 15^\circ$ [1],
 сплошная – аппроксимация (13) для $15^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ [1]

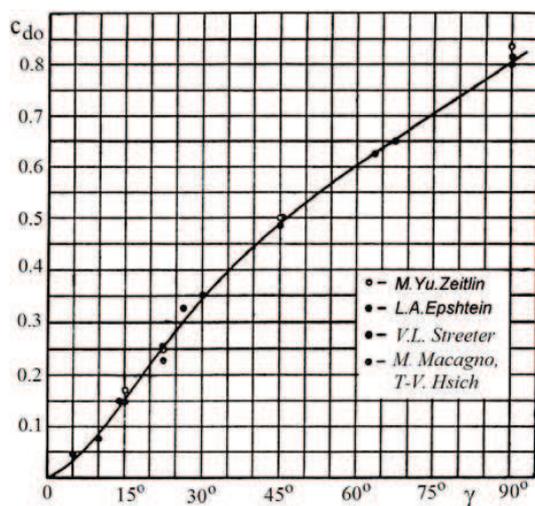


Рис. 4. Экспериментальные данные для c_{do} конусов [12]

Сравнение точности универсальной зависимости (14) в диапазоне углов $0^\circ < \gamma \leq 90^\circ$ и аппроксимационных зависимостей (11), (13) [1], построенных на основе нелинейного численного расчета, иллюстрируется рис. 3.

В таблице приведены результаты расчетов c_{do} по приведенным в этом разделе формулам, что позволяет сопоставить и оценить точность различных приближений. Ряд теоретических и экспериментальных исследований по сопротивлению ка-

витаторов различных типов обсуждается также в работах [9–11]. Данные экспериментов по определению c_{do} приведены на рис. 4, заимствованном из статьи [12]. Близость результатов, полученных с применением асимптотических и численных решений, подтверждает возможность получения достаточно точных оценок для c_{do} кавитаторов других форм на их основе.

2.2. Влияние формы кавитаторов на c_{do}

В общем случае величина c_{do} тонкого кавитатора в рамках второго приближения записывается в следующем виде [13]:

$$c_{do} = 2\varepsilon_o^2 \ln \chi / \varepsilon.$$

Величина χ определяется геометрией кавитатора. Отметим, что величина ε_o оказывает на сопротивление c_{do} значительно большее влияние, чем форма кавитатора.

С учетом существующего достаточно простого решения для потенциала обтекания параболоида зависимости для c_{do} тонкого кавитатора параболоидальной формы $r_n^2 = \varepsilon^2 x$, для которого справедливо $\varepsilon = 2\varepsilon_o$, может быть представлена одним из двух альтернативных выражений:

$$c_{do} = \frac{\varepsilon^2}{2} \ln \frac{\sqrt{4 + \varepsilon^2}}{\varepsilon}, \tag{15a}$$

$$c_{do} = 2\varepsilon_o^2 \ln \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_o^2}}{\varepsilon_o}. \tag{15b}$$

Приближенный вариант для соотношения (15a) приведен в работе [9]. На рис. 5 показаны результаты сравнения c_{do} , полученного по формуле (10b) для конуса, с зависимостями для параболоидальных кавитаторов в двух случаях:

- при совпадении величин ε ;
- при совпадении величин ε_o .

2.3. Составные кавитаторы сложной формы

Одной из наиболее простых конфигураций, позволяющих существенно уменьшить длину и, соответственно, величину поверхности кавитатора при практически одном и том же сопротивлении, является комбинация его передней части в форме параболоида с конической задней частью. При этом должно быть обеспечено равенство углов наклона образующих обеих поверхностей в сечении их сопряжения – рис. 6. Условие такого гладкого

Таблиця. Оценки величины c_{do} по различным зависимостям

γ	2.5	5	10	15	20	25	30	45	60	75	90
(10b)	0.0108	0.0327	0.0906	0.1546	0.2174	0.275	0.3234	—	—	—	—
(10c)	0.0108	0.0326	0.0888	0.145	—	—	—	—	—	—	—
(12c)	0.0099	0.0299	0.0841	0.1476	0.2151	0.2835	—	—	—	—	—
(12b)	0.0105	0.031	0.0799	—	—	—	—	—	—	—	—
(10a)	0.0119	0.0373	—	—	—	—	—	—	—	—	—
[3, $\gamma=0.01$]	0.0166	0.0349	0.0847	0.1447	—	—	—	—	—	—	—
[1, (11)]	0.0145	0.0327	0.0802	0.1422	—	—	—	—	—	—	—
(14)	0.0094	0.0287	0.0814	0.1424	0.206	0.2694	0.3312	0.4998	0.6393	0.7498	0.8337
[1, (13)]	—	—	—	0.1423	0.2096	0.2739	0.335	0.5000	0.6372	0.7466	0.8282

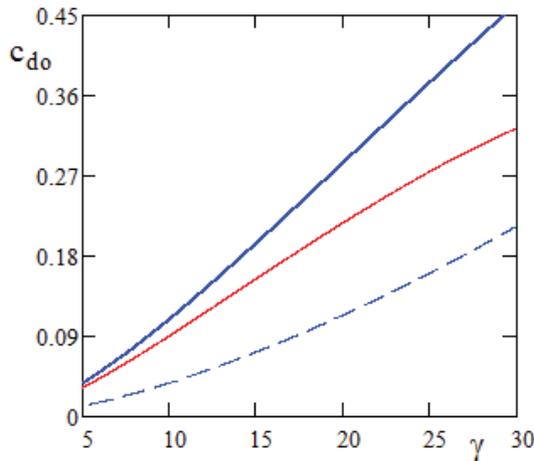


Рис. 5. Сравнение величин c_{do} для конуса и кавитатора папараболоидальной формы:
 сплошная – конус, зависимость (10b),
 штриховая – параболоид, зависимость (15a),
 жирная – параболоид, зависимость (15b) при совпадении угла γ_o касательной параболоида в сечении отрыва с углом полураствора конуса $\gamma_o = \gamma$ при равных радиусах кавитаторов в этом сечении

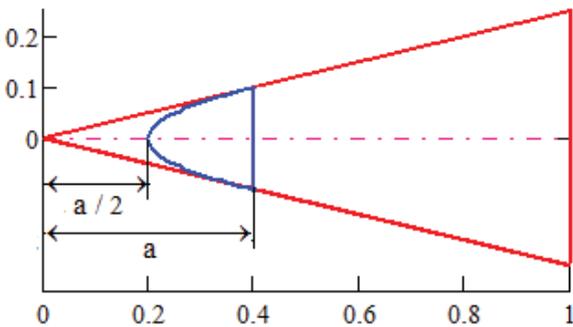


Рис. 6. Форма составного кавитатора: параболоид + конус при гладком сопряжении

сопряжения по углу и радиусу кавитатора в сечении отрыва предполагает, что длина параболоидальной части будет в два раза меньше, чем длина описанного вокруг нее конуса, опирающегося на сечение сопряжения.

Интегральное выражение (9) для c_{do} описанного кавитатора в приближении гидродинамики тонких тел имеет вид

$$c_{do} = 2\varepsilon^2 \left\{ a^2 \ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon} + a \int_{a/2}^a \ln \frac{1-x}{a-x} dx + \int_a^1 \left(\ln \frac{4(x-a)(1-x)}{\varepsilon^2 x^2 - 1} \right) x dx + a \int_a^1 \frac{x}{x-a/2} dx \right\}. \quad (16)$$

Здесь длина конуса, в который вписывается комбинированный кавитатор, предполагается равной 1 при ε , соответствующем конической части поверхности. Интегрирование соотношения (16) позволяет определить достаточно простую аналитическую формулу для c_{do} :

$$c_{do} = 2\varepsilon^2 \left\{ \ln \left[\frac{2(1-a)}{e\varepsilon} \right] + \frac{a^2}{2} \ln(1+\varepsilon^2) + a \ln \left[\frac{e(2-a)}{2(1-a)} \right] \right\}. \quad (17)$$

Сравнение величин c_{do} параболоида, конуса и составного кавитатора с сечением сопряжения при $a=0.9$ при равных радиусах и углах в сечении отрыва дано на рис. 7. Зависимости коэффициента сопротивления составного кавитатора от координаты сечения сопряжения $x = A$ при углах полураствора конусной части $\gamma=5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ показаны на рис. 8. Как следует из графиков, применение кавитатора этого типа приводит к небольшому увеличению c_{do} . Существенно большего роста этой характеристики можно добиться, используя составной кавитатор с формой передней части, соответству-

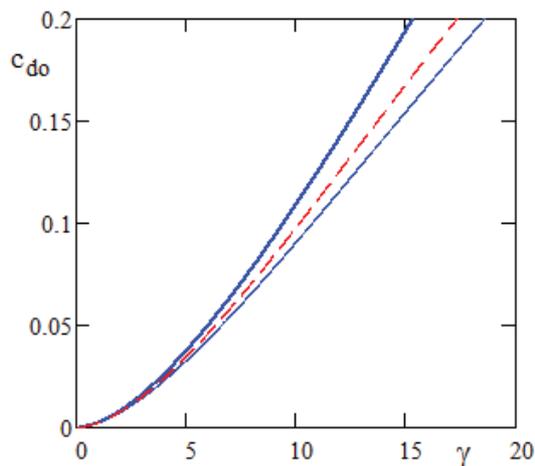


Рис. 7. Сравнение величин c_{do} для конуса и параболоида с величиной c_{do} составного кавитатора при координате сечения сопряжения $a=0.9$ и равных радиусах и углах в сечении отрыва:
 жирная – параболоид, зависимость (15b),
 сплошная – конус, зависимость (10b),
 штриховая – составной кавитатор, зависимость (17)

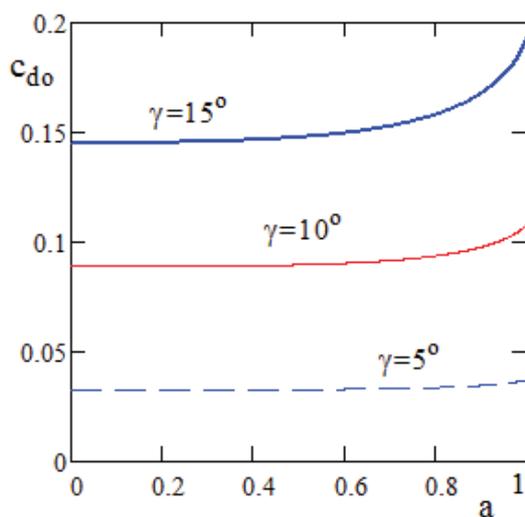


Рис. 8. Сравнение величин c_{do} составного кавитатора (17) при углах полураствора конусной части $\gamma=5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ в зависимости от координаты сечения сопряжения $x=A$

ющей обтеканию источника, гладко состыкованной с параболоидом. Заметим, однако, что решение для него может быть получено исключительно в численной форме.

Принципиально возможно также применение других типов кавитаторов, образованных состыковкой двух или более составляющих при условии обеспечения гладкости сечений сопряжения, что позволяет избежать возникновения локальных каверн.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ c_d

Наиболее распространены простые приближенные формулы для сопротивления кавитаторов типа диска:

$$c_d = c_{do}(1 + \sigma), \quad (18a)$$

и тонких кавитаторов:

$$c_d = c_{do} + \sigma. \quad (18b)$$

Соотношение (18a) может использоваться для оценок c_d кавитаторов различной формы с фиксированным сечением отрыва. В частности, в случае конуса его можно считать пригодной вплоть до углов полураствора $\gamma \sim 45^\circ$. Что касается зависимости (18b), то она справедлива лишь при очень малых углах в сечении отрыва (в частности, для конусов с $\gamma \ll 5^\circ$) и практически непригодна в диапазоне $\gamma = (5 \dots 15)^\circ$.

Более точное определение влияния σ на величину c_d весьма существенно, особенно в тех случаях, когда сам c_{do} и добавка к нему за счет σ оказываются близкими по величине.

3.1. Возможности аналитического определения влияния σ на c_d

Зависимость для Δc_d может быть получена на основе интегральных выражений (5), (6) и определения входящих в них параметров каверны. В первом приближении для этого можно использовать решение простой задачи [14–16]:

$$\frac{d^2 R^2}{dx^2} + \frac{\sigma}{\mu_c} = 0,$$

$$\left. \frac{dR^2}{dx} \right|_{\bar{x}=0} = R_n \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu_c}}, \quad (19)$$

$$R^2|_{x=0} = R_n^2,$$

$$\mu \approx \ln \sqrt{\frac{1.5}{\sigma}} \quad \mu_c = \left(\frac{0.82}{0.82 - k\sigma} \right) \mu. \quad (20)$$

Здесь $R=R(x)$ – уравнение тонкой осесимметричной каверны при сечении отрыва в начале координат $x=0$; R_n – радиус кавитатора в этом сечении; μ_c – уточненное значение инерционного коэффициента.

В этом случае форма каверны при $\sigma = \text{const}$ определяется выражением

$$R^2 = R_n^2 + R_n \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu_c}} x - \frac{\sigma}{2\mu_c} x^2. \quad (21)$$

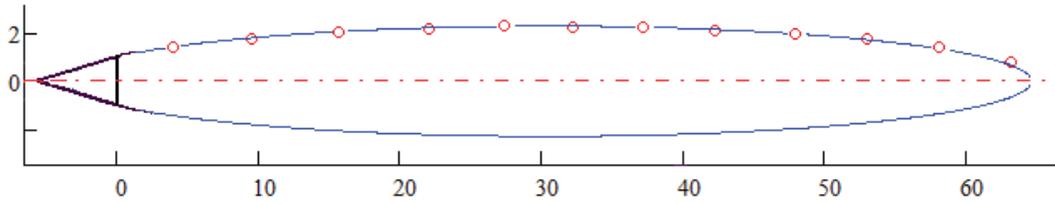


Рис. 9. Результаты расчета каверны за конусом при $\gamma = 10^\circ$, $\sigma = 0.02$ на основе решения (21) в сравнении с данными нелинейного численного расчета [3]: сплошная – решение (21), \circ – численный расчет [3]

Хорошая точность, обеспечиваемая решением (21) даже при грубом допущении $k \sim 0.96$ [10], иллюстрируется сравнением результатов расчета каверны за конусом при $\gamma = 10^\circ$, $\sigma = 0.02$ с данными нелинейного численного расчета [3], см. рис. 9.

Полная длина каверны L_c , начиная от сечения отрыва, и длина задней части каверны L_k после ее миделя определяются следующими зависимостями:

$$L_c = \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu_c}{k}} (\sqrt{c_d - k\sigma} + \sqrt{c_d}), \quad (22a)$$

$$L_c \sim \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{2\mu} (\sqrt{c_{do}} + \sqrt{c_{do} + \sigma}), \quad (22b)$$

$$L_k = \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu_c c_d}{k}}, \quad (23a)$$

$$L_k \sim \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{2\mu(c_{do} + \sigma)}. \quad (23b)$$

Отметим, что из-за малого влияния поправок, учитываемых в точных зависимостях (22a), (23a), здесь допустимо применение грубых, более простых зависимостей (22b), (23b). Удовлетворительное качество обеспечиваемых ими результатов иллюстрируется сравнением с данными нелинейного численного расчета [3], см. рис. 10.

На основе соотношений (5), (6) и решения для формы каверны (21) интегральное выражение зависимости для Δc_d тонкого кавитатора, учитывающее влияние σ , определяется как

$$\Delta c_d = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{\left(\varepsilon^2 \frac{d\tilde{r}_n^2}{dx} \Big|_{x=1} - \varepsilon \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu}} \right)}{\sqrt{(1-x)^2 + \varepsilon^2 \tilde{r}_n^2}} + \frac{\sigma}{\mu} \left(-\int_1^L \frac{dx_1}{x_1 - x} + \frac{L_k}{L - x} \right) \right] \frac{d\tilde{r}_n^2}{dx} dx + \sigma. \quad (24)$$

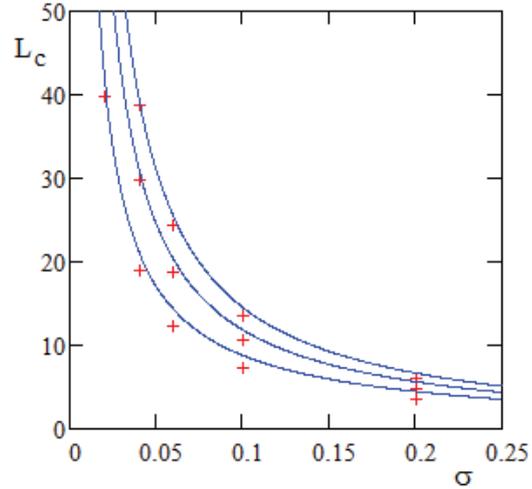


Рис. 10. Оценка точности грубых зависимостей для длины каверны L_c за конусом при $\gamma = 10^\circ$: сплошная – зависимость для L_c (22b), + – нелинейный численный расчет [3]

В частном случае конуса аналитическое выражение зависимости для Δc_d имеет вид:

$$\Delta c_d = - \left(\varepsilon^2 \frac{d\tilde{r}_n^2}{dx} \Big|_{x=1} - \varepsilon \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu}} \right) \ln \frac{2.5}{\varepsilon \varepsilon} + \frac{\sigma}{\mu} \left[-\ln \left(\frac{l}{L-1} \right) (L^2 - 2L_k) + (L - 2L_k) - \ln[e(L-1)] \right] + \sigma. \quad (25)$$

Здесь первая часть зависимости учитывает влияние угла излома меридиана в сечении отрыва, моделирующего достаточно интенсивный поворот течения на этом участке каверны. Аналогично упрощенной формуле (22b), для L_c можно также использовать менее точное соотношение:

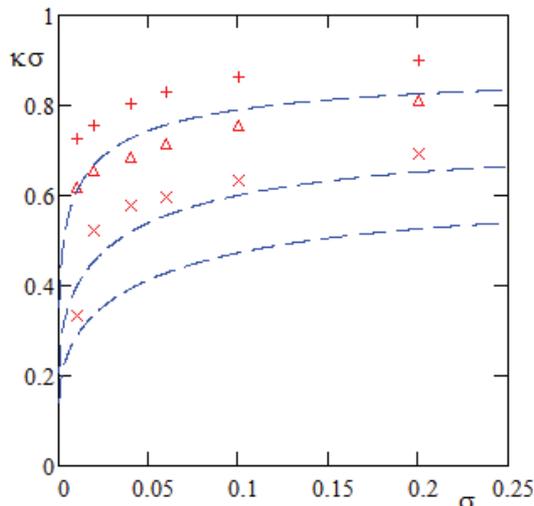


Рис. 11. Зависимость добавки к c_d/σ от σ и γ в случае конуса без учета влияния излома угла меридиана в сечении отрыв струй:

штриховые – зависимость (25)
 при значении углов полураствора $\gamma = 2.5^\circ, 5^\circ, 7^\circ$;
 + – нелинейный численный расчет [3] при $\gamma = 2.5^\circ$;
 Δ – нелинейный численный расчет [3] при $\gamma = 5^\circ$;
 \times – нелинейный численный расчет [3] при $\gamma = 10^\circ$

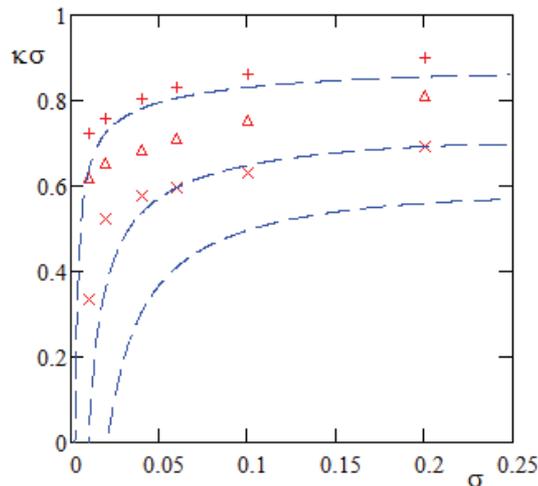


Рис. 12. Зависимость добавки к c_d/σ от σ и γ в случае конуса без учета влияния излома угла меридиана в сечении отрыв струй:

штриховые – зависимость (25)
 при значении углов полураствора $\gamma = 2.5^\circ, 5^\circ, 7^\circ$;
 + – нелинейный численный расчет [3] при $\gamma = 2.5^\circ$;
 Δ – нелинейный численный расчет [3] при $\gamma = 5^\circ$;
 \times – нелинейный численный расчет [3] при $\gamma = 10^\circ$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\varepsilon^2 \frac{d\tilde{r}_n^2}{dx} \Big|_{x=1} - \varepsilon \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu}} \right) \ln \frac{2.5}{e\varepsilon} \approx \\
 & \approx -2\varepsilon^2 \left(\frac{d\tilde{r}_n^2}{dx} \Big|_{x=1} - \sqrt{\frac{c_{do}/(2\varepsilon^2)}{\mu}} \right) \ln \frac{2.5}{e\varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Рис. 11 и рис. 12 иллюстрируют относительную величину обусловленную воздействием каверны добавки $k\sigma = \Delta c_d/\sigma$, вычисленной согласно зависимости (25) в виде (7). При этом на рис. 11 представлены данные, полученные без учета воздействия излома угла в сечении отрыва, а на рис. 12 – с учетом первого члена зависимости (25) в виде правой части формулы (26). Делался также проверочный расчет на основе более точных зависимостей для L_c, L_k, k, c_d , подтвердивший возможность применения в этом случае грубых приближений.

Анализ показывает, что соответствие аналитических и численных данных наблюдается лишь в очень узком диапазоне углов – в пределах $\sim (0 \dots 7)^\circ$. При этом демонстрируется отчетливое качественное соответствие кривых, полученных разными методами, включая учет воздействия резкого поворота угла касательной каверны в районе сечения отрыва струй. Таким образом, пригодность обсуждаемого решения ограничена малыми углами и, соответственно, малой ве-

личной излома угла поворота меридиана в сечении отрыва струй. Точность этого метода учета влияния каверны на c_d может быть улучшена при рассмотрении более точной модели каверны. Как показывает сравнение с данными асимптотических оценок, несмотря на предельность ситуации, достаточно точное решение может быть найдено при нелинейном численном расчете.

3.2. Универсальная аппроксимационная зависимость c_d для конусов в диапазоне $\gamma = (0 \dots 90)^\circ$

Для нахождения c_d конусов существует аппроксимация, полученная на основе нелинейного численного расчета, но только для диапазона углов полураствора $(15 \dots 90)^\circ$ [1], в которой с учетом структуры соотношения (7) используется выражение

$$\Delta c_d = (0.524 + 0.336\beta)\sigma \tag{27}$$

в совокупности с зависимостью (13) для c_{do} в этом диапазоне.

На основе соотношения (27) и данных нелинейного численного расчета [1] и асимптотических решений определена универсальная аппроксимационная зависимость для расчета c_d конусов в диапазоне $\gamma = (0 \dots 90)^\circ$. Она с учетом формулы (14), полученной для c_{do} , может быть представлена в следующем виде:

$$c_d = c_{do} + \Delta c_d, \tag{28a}$$

$$c_{do} = \frac{\pi\beta(\gamma)^2}{2} \times \ln \left[\frac{1.74[1-0.45\sqrt{\beta(\gamma)}+2\beta(\gamma)]}{\pi\beta(\gamma)} \right] - 0.87\beta(\gamma)^{1.7}, \quad (28b)$$

$$\Delta c_d = [0.46 + 0.39\beta(\gamma) + \frac{0.89 \cdot 0.017}{\beta(\gamma)^{1.36} + 0.028}] \sigma. \quad (28c)$$

Сравнение результатов, полученных по формулам (28), с данными нелинейных численных расчетов [1, 2] и экспериментальными данными [17] представлено на рис. 13–16. Линейность зависимости c_d от σ для диапазона углов полураствора

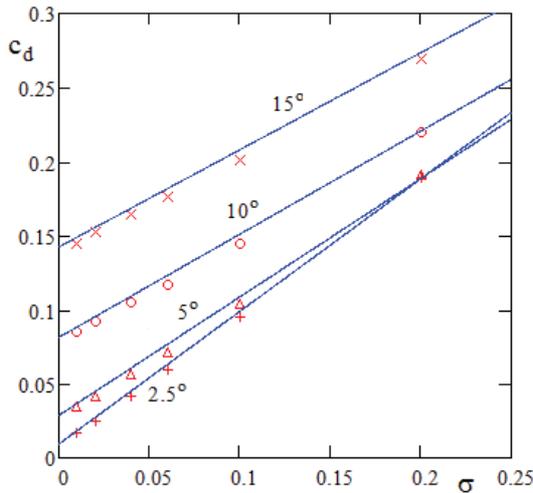


Рис. 13. Сравнение результатов расчета по зависимости (28) с данными нелинейного расчета [3] в диапазоне углов $\gamma = (2.5 \dots 15)^\circ$:
сплошная – зависимость (28),
+, Δ, o, x – нелинейный численный расчет [3]

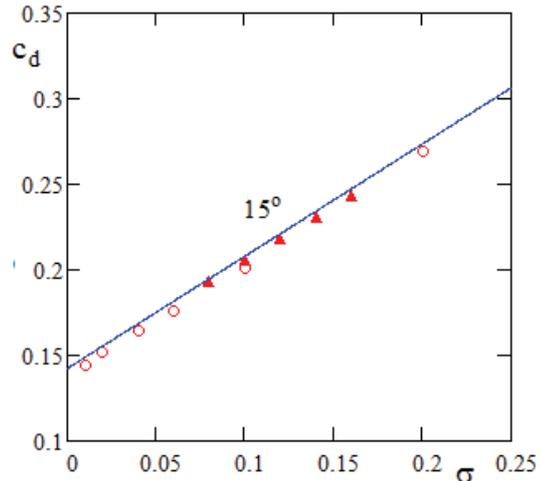


Рис. 15. Сравнение результатов расчета по зависимости (28) с экспериментальными [17] и численными данными [3] при угле полураствора конуса $\gamma = 15^\circ$:
сплошная – зависимость (28), ▲ – эксперимент [17], o – нелинейный численный расчет [3]

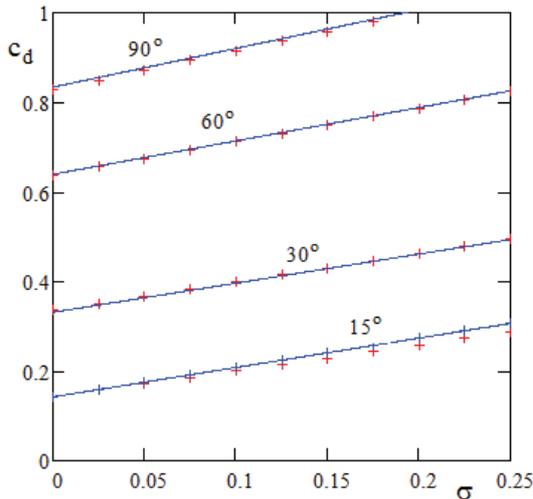


Рис. 14. Сравнение результатов расчета по зависимости (28) с данными нелинейного расчета [1] в диапазоне углов $\gamma = (15 \dots 90)^\circ$:
сплошная – зависимость (28),
+, Δ, o, x – нелинейный численный расчет [1]

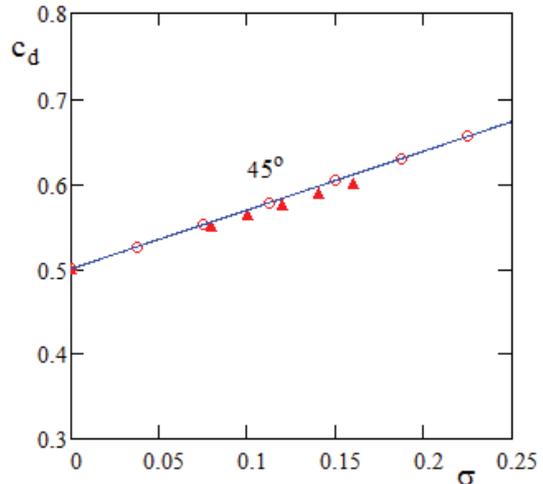


Рис. 16. Сравнение результатов расчета по зависимости (28) с экспериментальными [17] и численными данными [1] при угле полураствора конуса $\gamma = 45^\circ$:
сплошная – зависимость (28), ▲ – эксперимент [17], o – нелинейный численный расчет [1]

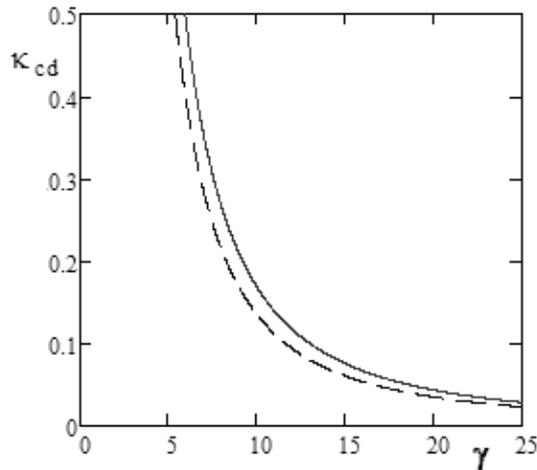


Рис. 17. Величины $\kappa_{cd} = c_{df}/c_d$ для $\gamma = 45^\circ$ при одной и той же величине кавитационного сопротивления конуса:
 сплошная – $Re_{ls} \sim 0.5 \cdot 10^7$,
 штриховая – $Re_{ls} \sim 2.5 \cdot 10^7$

$\gamma = (25 \dots 90)^\circ$ подтверждается также экспериментами [18].

Следует отметить, что с учетом асимптотических соотношений величина Δc_d формируется преимущественно за счет геометрии поверхности в районе сечения отрыва. Для большей части реализуемых обводов кавитатора она близка к поверхности конуса. Это делает возможным применение аппроксимационной зависимости для Δc_d в диапазоне малых углов для кавитаторов различных форм при одинаковом ε_o . При этом радиус кавитатора в сечении отрыва должен быть равен радиусу конуса, для которого $\varepsilon_o = \varepsilon$. Это ограничение справедливо и для комбинированных кавитаторов типа параболоид – конус.

Приближенные значения для c_d конусов с небольшими углами полураствора и других нетонких кавитаторов могут также быть определены известным методом практического расчета с использованием распределений давления на их поверхности, задаваемых нелинейными решениями при плоском обтекании [19].

3.3. Оценка влияния вязкости

При достаточно малых углах раскрытия конуса существенным может оказаться влияние вязкости. Так как вязкая часть сопротивления не участвует в формировании основных размеров каверны, то с точки зрения эффективности применения суперкавитации она является вредной.

Величина продольной скорости u_s/U_∞ на щеке

конуса сохраняет близкое к постоянному значение скорости на его поверхности и может быть оценена зависимостью (28а). Наиболее характерным в этом случае можно считать число Рейнольдса Re_{ls} по длине образующей конуса l_s . Оно позволяет оценить коэффициент вязкого сопротивления по известной зависимости [20]:

$$\frac{u_s}{U_\infty} \approx \sqrt{1 - c_d}, \quad (29a)$$

$$c_f = \frac{0.455}{(\lg Re_{ls})^{2.58}} - \frac{1700}{Re_{ls}}. \quad (29b)$$

В качестве примеров рассмотрено обтекание конуса при двух типичных числах Рейнольдса – $Re_{ls} \sim 0.5 \cdot 10^7$ и $2.5 \cdot 10^7$. Рассчитаны величины коэффициента вязкого сопротивления конуса c_{df} по его основанию при различных углах γ , соответствующих постоянным значениям кавитационного сопротивления конуса в каждом из этих случаев. Результаты оценки коэффициента $\kappa_{cd} = c_{df}/c_d$ представлены на рис. 17. Как следует из графика, применение конусов при углах полураствора, меньших $\sim 12^\circ$, приводит к более чем 10 %-ной потере площади максимального сечения каверны. Эти потери могут быть существенно уменьшены при использовании комбинированного кавитатора с тем же углом полураствора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе известных асимптотических и нелинейных численных решений получена универсальная зависимость для определения коэффициента сопротивления c_d конуса в диапазоне углов полураствора $(0 \dots 90)^\circ$. Выведены соотношения для определения коэффициентов сопротивления при нулевом числе кавитации c_{do} для кавитаторов с различной геометрией, включая комбинированную поверхность с передним участком в виде параболоида и задним в виде конуса. Применение такой конфигурации кавитатора позволяет существенно снизить величину его поверхности без существенного изменения кавитационного сопротивления.

Полученная зависимость для Δc_d тонких кавитаторов, представляющих наибольшую практическую важность ввиду возможности образования на них существенных поперечных сил, универсально пригодна для оценочных расчетов кавитаторов различных форм. Это дает возможность рассчитывать c_d таких устройств при известной величине их c_{do} в соответствии с выражением (28а).

Полученные результаты (в первую очередь, для тонких кавитаторов, расположенных под углом атаки) могут найти применение при компенсации влияния гравитации при проведении экспериментальных исследований, а также организации управления кавитирующими корпусами, процессами в кавитационных установках по обработке материалов и т. п.

1. *Гузевский Л. Г.* Аппроксимационные зависимости для осесимметричных каверн за конусами // Гидродинамические течения и волновые процессы.– Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.– С. 82–91.
2. *Субханкулов Г. И., Хомяков А. Н.* Применение метода граничных элементов к расчету осесимметричных каверн // Труды ГБС.– Чебоксары, 1990.– С. 124–132.
3. *Краснов В. К., Кузнецов Ю. В.* Применение метода граничных интегральных уравнений для расчета осесимметричных и плоских течений в трубе // Актуальные проблемы гидродинамики.– Чебоксары: Изд-во ЧГУ, 1989.– С. 71–75.
4. *Сагомоян А. Я.* Удар и проникание тел в жидкость.– М.: Изд-во МГУ, 1986.– 172 с.
5. *Тайц О. Г.* Осесимметричные каверны // Бионика.– 1985.– 19.– С. 73–80.
6. *Нестерук И. Г.* Некоторые задачи осесимметричных кавитационных течений // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ.– 1982.– № 1.– С. 28–34.
7. *Серебряков В. В.* Асимптотические решения осесимметричных задач до- и сверхзвуковых отрывных течений воды при нулевых числах кавитации // Докл. АН Украины.– 1992.– № 9.– С. 66–71.
8. *Серебряков В. В.* Практические методы расчета осесимметричных течений с развитой кавитацией // Промышленная гидравлика и пневматика.– 2008.– № 4(22).– С. 51–59.
9. *Knapp R. T., Daili J. W., Hammit F. G.* Cavitation.– New York: McGraw Hill, 1970.– 578 p.
10. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами.– К.: Наук. думка, 1969.– 215 с.
11. *Егоров И. Т., Садовников Ю. Н., Исаев И. К., Басин М. А.* Искусственная кавитация.– Л.: Судостроение, 1971.– 280 с.
12. *Эшштейн Л. А.* Развитые кавитационные течения Пирсол И. Кавитация / дополнение // М.– Мир, 1975.– С. 73–93.
13. *Серебряков В. В.* К теории нестационарного обтекания осесимметричных тел изменяемой формы // Бионика.– 1981.– 15.– С. 39–49.
14. *Серебряков В. В.* Об одном варианте уравнений “Принципа независимости расширения каверны” // Гидромеханика.– 1976.– 34.– С. 45–48.
15. *Serebryakov V. V.* Physical-mathematical bases of the principle of independence of cavity expansion // Proc. SAV2009.– Ann Arbor: Univ. Michigan, 2009.– P. 169(1–14).
16. *Terentiev A., Kirschner I., Uhlman J.* The hydrodynamics of cavitating flows.– Paramus, NJ: Backbone Publishing, 2011.– 598 p.
17. *Kiceniuk T.* An Experimental study of the hydrodynamic forces acting on a family of cavity-producing conical bodies of revolution inclined to the flow.– Hydrodyn. Lab. California Inst. Technol.: Rep. No. E-12.17, 1954.
18. *Путилин С. И.* О сопротивлении конусов при кавитационном обтекании // Гидромеханика.– 1981.– 44.– С. 94–96.
19. *Armstrong A. H.* Drag coefficient of wedges and cones in cavity flow.– Armament Res. Escab.: Rep. No. 21/54, 1954.
20. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя.– М.: Физматгиз, 1969.– 742 с.