

УДК 532.593

## ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАЗНЕСЕННЫХ ДОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

И. Т. СЕЛЕЗОВ\*, В. Н. КУЗНЕЦОВ\*\*, Д. О. ЧЕРНИКОВ\*

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев  
03680 Киев – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4

Днепропетровский Национальный Университет железнодорожного транспорта им. В. Лазаряна  
49010, Днепропетровск, ул. Академика Лазаряна, 2  
selezov@yandex.ru

Получено 04.02.2013

Исследуется распространение поверхностных гравитационных волн при их возбуждении несколькими разнесенными донными источниками. Задача рассматривается в потенциальной постановке для каждого источника и общее решение получается суперпозицией этих решений. Применяется интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате и преобразование Лапласа по времени с последующим численным обращением. Представлены и анализируются численные результаты. Показано, что при определенных условиях возможно как усиление генерации волн, так и их ослабление, что существенно для генерации волн цунами подводными землетрясениями.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** волны на воде, генерация волн, разнесенные источники

Досліджується розповсюдження поверхневих гравітаційних хвиль при їхньому збуренні декількома рознесеними донними джерелами. Задача розглядається в потенціальній постановці для кожного джерела і загальний розв'язок одержується суперпозицією цих розв'язків. Застосовується інтегральне перетворення Ханкеля по радіальній координаті та перетворення Лапласа за часом з наступним чисельним оберненням. Наведені та аналізуються чисельні результати. Показано, що за певних умов можливе як посилення генерації хвиль, так і їхнє послаблення, що суттєво для генерації хвиль цунами підводними землетрусами.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** хвилі на воді, генерація хвиль, рознесені джерела

Propagation of surface gravity waves under their excitation by some spaced sources is investigated. The problem is considered in potential statement for each source and a total solutions are obtained by superposition of these solutions. The integral Hankel transform in a radial coordinate and the Laplace transform in time with consequent numerical inverse are used. Numerical results are presented and analysed. It is shown that at certain conditions it is possible both enhance of wave generation and their mitigation that is essential for wave tsunami generation by underwater earthquakes.

**KEY WORDS:** water waves, bottom sources, excitation

### ВВЕДЕНИЕ

Задача о движении жидкости конечной глубины со свободной поверхностью представляет большой интерес в различных областях, и прежде всего в океанологии, в связи с землетрясениями и вулканической деятельностью. Проблема описания волновых движений в океанологии в настоящее время интенсивно исследуется в основном с целью предсказания возникновения цунами, последствий и поиска путей смягчения их воздействий на береговую зону. Не вдаваясь в подробную библиографию по вопросам генерации океанических волн, которая насчитывает значительное количество наименований, отметим монографию [10], содержащую систематические данные наблюдений за цунами и другими явлениями распространения волн в мировом океане, а также работы [3, 4, 7, 11, 13], близкие по тематике к данной работе авторов. Известный метод решения этой за-

дачи, основанный на построении функции Грина, позволяет получить решение только для простейших форм отклонения и мгновенной подвижки дна. В работе [1] рассматривается задача об определении формы свободной поверхности слоя жидкости в рамках классической постановки теории малых волн Коши-Пуассона для идеальной жидкости. Предложенный в этой работе метод сводит решение задачи к решению некоторого интегрального или интегро-дифференциального уравнения для некоторой функции на свободной поверхности. В более общем случае решение может быть получено с помощью теории интегральных преобразований [5, 12].

В данном сообщении рассматривается задача генерации волн на поверхности жидкости конечной глубины несколькими одновременными донными возмущениями, которые включаются в начальный момент времени  $t = 0$ . Задача решается в линейной постановке и поэтому применяется принцип суперпозиции решений. Предполагается, что

в начальный момент времени  $t = 0$  задается скорость локального подъема донной поверхности с амплитудой  $\eta(r, t)$ , нарастающая во времени до максимальной величины, а затем экспоненциально спадающая. Функция возбуждения дна  $\psi(r)$  определена в бесконечной области  $r > 0$  в виде  $\psi(r) = \xi(\xi^2 + r^2)^{-3/2}$ ,  $\xi > 0$ . Эта функция асимптотически убывает с увеличением радиальной координаты  $r$  и поэтому при решении задачи логично применить интегральное преобразование Ханкеля по  $r$ . Преобразование Ханкеля обратное самому себе и поэтому для него не требуется специальных таблиц обратных преобразований.

Численное обращение преобразования Лапласа может проводиться различными методами. В [6] исследуется алгоритм обращения с применением рядов Фурье по синусам. В работе [9] рассмотрены методы, основанные на обращении с помощью полиномов Лежандра и Чебышева, рядов Фурье, функций Лаггера.

Здесь для вычисления оригинала применяется метод [11], согласно которому требуются только значения преобразования  $F(s)$  при равностоящих значениях  $s = (2n + 1)\sigma$ , где  $\sigma$  – произвольное число больше нуля, а  $n = 0, 1, \dots$ . Переменная  $t$  заменяется на  $\theta$  и функцию  $\varphi(\theta)$ , которая под интегралом разлагается в ряд Фурье по функциям  $\sin(2n + 1)\theta$ . Параметр  $\sigma$  при малых  $t$  выбирается большим, при больших  $t$  – малым.

В данной статье приведена постановка задачи для нескольких расположенных на расстоянии повторяющихся локализованных подъемов донной поверхности, которые нарастают по времени до некоторого максимума, а потом спадают по экспоненциальному закону. В предыдущем исследовании рассматривался случай одного источника [12], который повторно включался через некоторое время. Здесь предполагается, что источники включаются одновременно, но расстояние между ними влияет на результирующее отклонение свободной поверхности. Показано и увеличение амплитуды, и ее уменьшение при распространении волны от эпицентра.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваем в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  область  $D$ , заполненную вязкой несжимаемой жидкостью плотности  $\rho$ . Предполагаем, что жидкость ограничена сверху свободной поверхностью  $z = 0$  и донной поверхностью  $z = -H_0$ , в начальный момент времени  $t = 0$  жид-

кость покоится и находится под действием гравитационных сил, направленных в отрицательном направлении оси  $Oz$ . Предполагаем также, что начальное возмущение генерируется подъемом горизонтального дна одновременно не менее чем в двух местах. Представляет интерес исследовать, как эволюционирует свободная поверхность жидкости при действии такого типа возмущений.

Движение предполагается безвихревым, что позволяет ввести потенциал скорости  $\varphi$ , определяемой по формуле  $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ , где  $\vec{v}$  – вектор скорости;  $\vec{\nabla}$  – оператор градиента. Это вместе с условием несжимаемости приводит к уравнению Лапласа для потенциала  $\varphi$ . Для решения начально-краевой задачи необходимо также, чтобы при любом  $t$  величина  $\vec{v}$  исчезала на бесконечности. Из уравнения Бернулли следуют кинематическое условие на свободной поверхности (поверхность должна быть материальной) и динамическое условие – давление на свободной поверхности сохраняется постоянным.

Математическая постановка начально-краевой задачи сводится к определению потенциала скоростей  $\varphi(r, \theta, z, t)$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0, \quad -H_0 \leq z \leq 0, \quad r > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

граничным условиям на свободной поверхности

$$\left( \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}, \quad (2)$$

на донной поверхности

$$\frac{\partial \varphi(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=-H_0} = \frac{\partial \eta^d}{\partial t}, \quad (3)$$

и начальным условиям

$$\varphi(r, \theta, z, t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi(r, \theta, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \eta^d \Big|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

где  $\eta$  – отклонение свободной поверхности;  $\eta^d$  – отклонение дна;  $g$  – ускорение свободного падения.

Будем предполагать, что возмущение дна осесимметрично, причем при  $t = 0$  включается возмущение, заданное в виде  $\eta^d(r, t) = \eta_0 \psi(r) f(t)$ . Если при  $t = 0$  включается одновременно два возмущения, то функции  $\eta_1^d$  и  $\eta_2^d$  задаются в виде

$$\eta_1^d = \eta_{01} \psi_1(r) f_1(t),$$

$$\eta_2^d = \eta_{02} \psi_2(r) f_2(t). \quad (5)$$

В дальнейшем вводим безразмерные величины по формулам (далее звездочки опущены)

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r}{r_0}, & r_0^* &= 1, \\ z^* &= \frac{z}{H_0}, & t^* &= t \frac{c_{sh}}{r_0}, \\ \eta^* &= \frac{\eta}{\eta_0}, & \varphi^* &= \frac{\varphi}{r_0 c_{sh}}, & \beta &= \frac{r_0}{H_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $H_0$  – глубина жидкости;  $r_0$  – радиус возмущения отклонения дна (характерная величина);  $c_{sh}$  – скорость волн на мелкой воде (предельное значение длинноволнового приближения),  $c_{sh} = \sqrt{gH_0}$ .

Постановка задачи (1)–(4) в безразмерной форме в соответствии с (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0, \\ -1 \leq z \leq 0, & \quad r > 0, \quad t > 0, \\ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} &= 0, \quad \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}, \\ \beta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-1} &= \frac{\partial \eta^d}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Начальные условия (4) в безразмерной форме в соответствии с (5) остаются без изменения.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Для решения задачи применяем интегральное преобразование Лапласа по времени  $t$  [6]:

$$\varphi^L(r, z, s) = \int_0^\infty \varphi(r, z, t) e^{-st} dt, \quad (9)$$

где  $s$  – параметр преобразования Лапласа.

После применения (9) к (7)–(8) с учетом начальных условий (4) получаем постановку задачи в пространстве изображений Лапласа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^L}{\partial r} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial z^2} &= 0, \\ -1 \leq z \leq 0, & \quad r > 0, \\ \left( s^2 \varphi^L + \beta^2 \frac{\partial \varphi^L}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} &= 0, \\ \beta^2 \frac{\partial \varphi^L}{\partial z} \Big|_{z=-1} &= s \eta_0 \psi^d(r) f^d L(s). \end{aligned} \quad (10)$$

Применяем интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате  $r$ :

$$\varphi^{LH}(k, z, s) = \int_0^\infty \varphi^L(k, z, s) r J_0(kr) dt, \quad (12)$$

где  $k$  – параметр преобразования Ханкеля.

После применения преобразование (12) к задаче (10), (11) получаем в пространстве изображений Лапласа и Ханкеля следующую задачу:

$$\frac{d^2 \varphi^{LH}}{dz^2} - \left( \frac{k}{\beta} \right)^2 \varphi^{LH} = 0, \quad -1 \leq z \leq 0, \quad (13)$$

$$\left( s^2 \varphi^{LH} + \beta^2 \frac{d \varphi^{LH}}{dz} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (14)$$

$$\beta^2 \frac{d \varphi^{LH}}{dz} \Big|_{z=-1} = s \eta_0 \psi^{dH}(k) f^d L(s). \quad (15)$$

Из решения задачи (13)–(15) получаем выражение для потенциала скоростей

$$\begin{aligned} \varphi^{LH}(k, z, s) &= \\ &= -\frac{1}{2} \frac{s}{\beta k} \eta_0 \psi^{dH}(k) f^d L(s) \times \\ &\times \frac{(s^2 + \beta k) e^{-\frac{k}{\beta} z} - (s^2 - \beta k) e^{\frac{k}{\beta} z}}{s^2 \operatorname{ch} \frac{k}{\beta} - \beta k \operatorname{sh} \frac{k}{\beta}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Предполагаем, что возмущение генерируется подъемом горизонтального дна  $f^d(t) = t e^{-\alpha t}$ , при  $t \geq 0$ , и одновременным включением другого возмущения, отстоящего от исходного. Для двух возмущений, расположенных на расстоянии  $l$ , имеем:

$$\psi_1^d(r) = \xi (\xi^2 + r^2)^{-3/2},$$

$$\psi_2^d(r) = \xi (\xi^2 + r^2)^{-3/2} H(r-l), \quad \varepsilon > 0, \quad (17)$$

где  $H(t)$  – функция Хевисайда.

Переход в пространство оригиналов для отклонения свободной поверхности  $\eta_m$  с учетом (17) после обращения преобразования Ханкеля в пространстве изображений Лапласа имеет вид

$$\eta_n^L = s^2 \eta_0 f_n^d L \int_0^\infty \frac{e^{-\xi \lambda} \lambda J_0(\lambda k r)}{s^2 \operatorname{ch}(\lambda k) + \lambda k \operatorname{sh}(\lambda k)} d\lambda. \quad (18)$$

Переход в пространство оригиналов  $\eta_m$  по формуле (18) осуществляется численным методом рядов Фурье [2] при следующих параметрах:  $\alpha = 2.5$ ,  $\xi = 0.5$  и  $\alpha = 2.5$ ,  $\xi = 1.0$ . Как видно из (18),

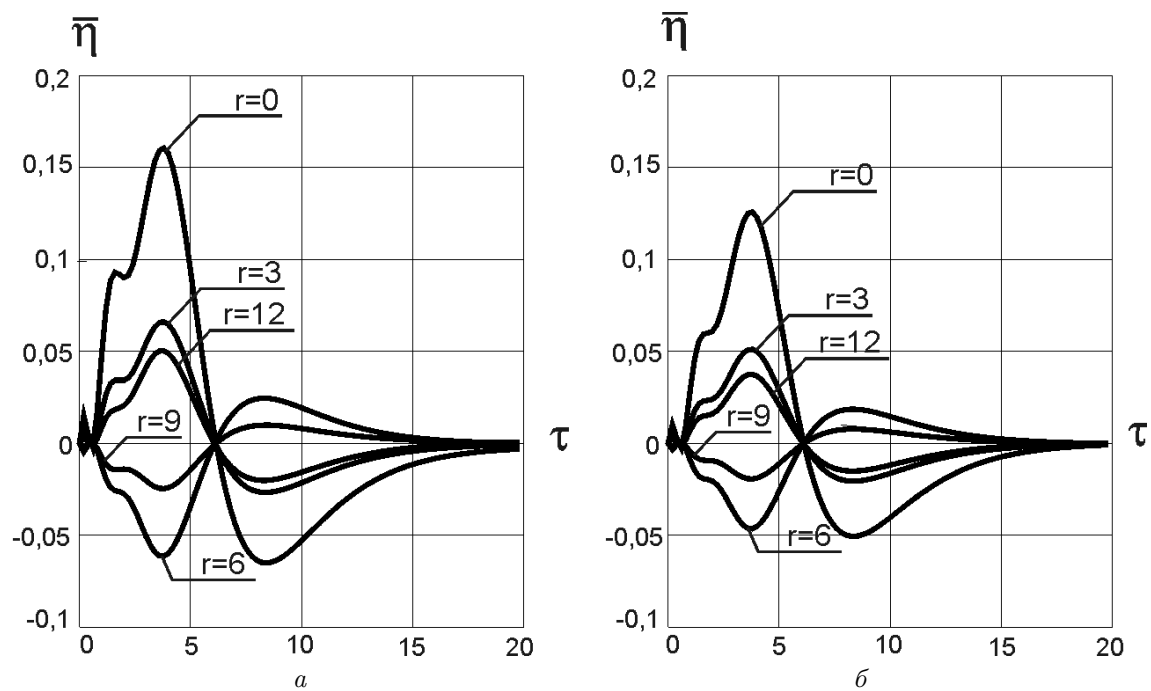


Рис. 1. Зависимость отклонения свободной поверхности  $\eta$  от времени  $t$  на разных расстояниях от эпицентра при одновременном возмущении в  $(r = 0)$ :  
 $a - \alpha = 2.5, \xi = 0.5$ ;  $b - \alpha = 2.5, \xi = 1.0$

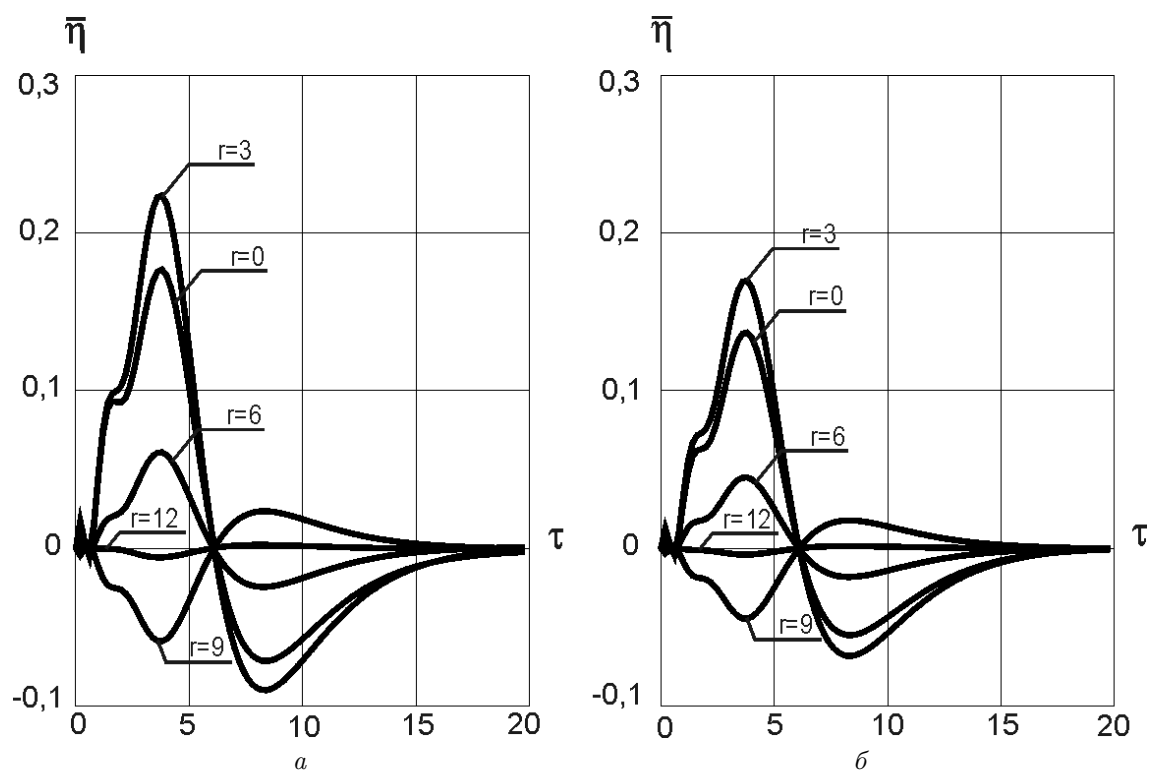


Рис. 2. Зависимость отклонения свободной поверхности  $\eta$  от времени  $t$  на разных расстояниях от эпицентра при действии двух возмущений в  $(r = 0)$  и  $l_1 = 4$ :  
 $a - \alpha = 2.5, \xi = 0.5$ ;  $b - \alpha = 2.5, \xi = 1.0$

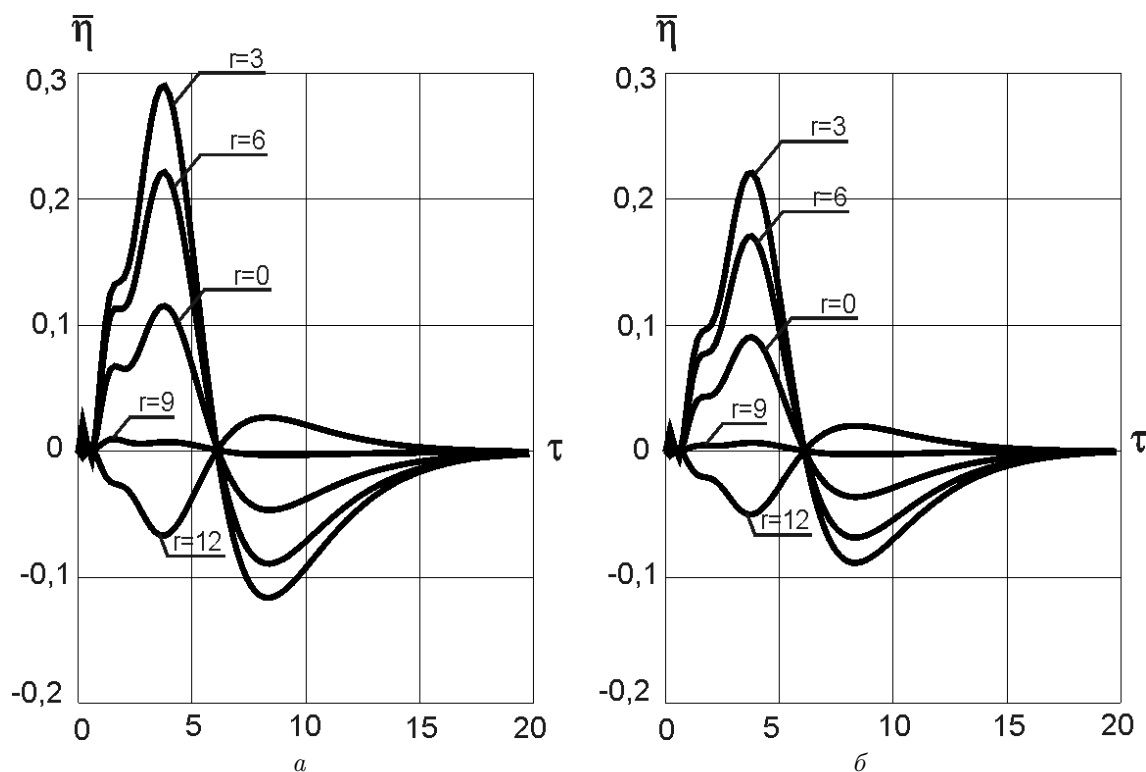


Рис. 3. Зависимость отклонения свободной поверхности  $\eta$  от времени  $t$  на разных расстояниях от эпицентра при действии трех возмущений в ( $r = 0$ ) и  $l_1 = 4$  и  $l_2 = 6$ :  
 $a - \alpha = 2.5, \xi = 0.5$ ;  $b - \alpha = 2.5, \xi = 1.0$

для перехода от преобразования Лапласа к оригиналам необходимо вычислять интеграл в (18), варьируя параметр преобразования Лапласа  $s$  с соответствующим подбором корректирующего параметра  $\sigma$ , входящего в алгоритм обращения.

Исследовалось отклонение свободной поверхности  $\eta/\eta_0$  для различных удалений от эпицентра  $r = 0$ . На рис. 1 показаны кривые, соответствующие одному возмущению ( $r = 0$ ) для параметров  $\alpha = 2.5, \xi = 0.5$  (рис. 1, *a*) и  $\alpha = 2.5, \xi = 1.0$  (рис. 1, *б*). На рис. 2 показано отклонение свободной поверхности при двух одновременных возмущениях ( $r = 0, l_1 = 4$ ) для параметров  $\alpha = 2.5, \xi = 0.5$  (рис. 2, *a*) и  $\alpha = 2.5, \xi = 1.0$  (рис. 2, *б*). На рис. 3 показаны отклонения свободной поверхности жидкости при трех одновременных возмущениях ( $r = 0, l_1 = 4, l_2 = 6$ ) для параметров  $\alpha = 2.5, \xi = 0.5$  (рис. 3, *a*) и  $\alpha = 2.5, \xi = 1.0$  (рис. 3, *б*).

## ВЫВОДЫ

Из сравнения отклонения свободной поверхности жидкости при изменении параметра  $\varepsilon$  (увели-

чение  $\xi$  приводит к более резкому спаду импульса) видно, что при увеличении этого параметра амплитуда отклонения уменьшается.

Выявлен эффект взаимного погашения возмущений, т.е. появление так называемых “зон спокойствия” –  $r = 12$  при двух возмущениях и  $r = 9$  при трех одновременных возмущениях донной поверхности.

1. Гоман О.Г. Об одном подходе к решению задачи Коши-Пуассона для слоя жидкости конечной глубины // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2011. – Вип. 15, Т. 1. – С. 91–97.
2. Крылов В.Н. Методы приближенного преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
3. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. – Нижний Новгород: Ин-т прикл. физики РАН, 1996. – 276 с.
4. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. – Киев: Наук. думка, 2012. – 232 с.
5. Черников Д. О. Генерация волн подвижками донной поверхности // Вісник Дніпропетр. Ун-ту. Серія: Механіка. – 2011. – Вип. 15, Т. 1. – С. 89–93.
6. Doetsch G. Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation. – München-Wien: R. Oldenburg, 1967.

- То же: Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, – 1971. – 288 с.
7. Geist E. L., Titov V. V., Synolakis C. E. Tsunami: Wave of change // Scientific Amer. December. 2005.
  8. Kajura K. The leading wave of a tsunami // Bull. Earthquake Res. Inst. – 1963. – **42**. – P. 535–571.
  9. Lanczos C. Applied analysis. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1956.  
То же: Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1981. – 524 с.
  10. Murty T. S. Seismic sea waves tsunami. – Fisheries Research Board of Canada. Bulletin 198. – Catalogue Number: FS94-198, – 1977.
  - То же: Мурти Т. С. Сейсмические морские волны цунами. – Л.: Гидрометеиздат, –1981. – 448с.
  11. Selezov I. T. Modeling of tsunami wave generation and propagation // Int. J. Fluid Mechanics Research. – 2006. – **33**, N 1. – P. 44–54.
  12. Selezov I. T., Kuznetsov V. V., Chernikov D. O. Generation of surface gravity waves by bottom time-repetitive pulses // J. Math. Sci. – 2010. – **171**, N 5. – P. 596–602.
  13. Weyl P. K. Oceanography. An introduction to the marine environment. – NY: John Wiley and Sons, Inc., – 1970.  
То же: Вейль П. Популярная океанография. – Л.: Гидрометеиздат, –1977. – 504 с.