

ЧИСЕЛЬНІ МОДЕЛІ НЕСТАЦІОНАРНИХ РУСЛОВИХ ПРОЦЕСІВ

В. О. ГОРБАНЬ, І. М. ГОРБАНЬ

*Інститут гідромеханіки НАН України, Київ
03680 Київ – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4
ivgorban@gmail.com*

Одержано 07.09.2012

Представлений чисельний алгоритм для розв'язання рівнянь мілкої води, який ґрунтується на центральній схемі "проти потоку" типу Годунова. Він використовує сіткову апроксимацію Курганова-Ноелля-Петрової (KNP-flux), коли потоки консервативних змінних через границі контрольних об'ємів оцінюються за допомогою локальних швидкостей поширення збурень. Застосування кусково-лінійної апроксимації функції дна і спеціальних квадратур для неї робить цю схему добре збалансованою і, в той самий час, такою, що зберігає додатні значення глибини у всій розрахунковій області. Для зменшення чисельної дисипації використовується антидифузійний член у формі Курганова-Ліня. Розроблений алгоритм застосований до моделювання одно- і двовимірних нестационарних гідравлічних течій, в тому числі тих, які утворюються при руйнуванні захисних берегових споруд. Порівняння результатів розрахунків з відомими експериментальними і чисельними даними свідчить, що запропонована схема адекватно відтворює течії у відкритих водоймах, включно з докритичними, закритичними і перехідними потоками. Виконані розрахунки гідродинамічних характеристик течії на заданій ділянці річки Дніпро дозволили одержати оцінки швидкості течії і рівнів підйому води в різних умовах як природного характеру, так і пов'язаних з антропогенними навантаженнями.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *рівняння мілкої води, кусково-лінійна апроксимація, нестационарні гідравлічні течії*

Представлен численный алгоритм для решения уравнений мелкой воды, который основан на центральной схеме "против течения" типа Годунова. Он использует сеточную аппроксимацию Курганова-Ноелля-Петровой (KNP-flux), когда потоки консервативных переменных через границы элементарных объемов оцениваются с помощью локальных скоростей распространения возмущений. Благодаря кусочно-линейной аппроксимации функции дна и специальным квадратурам для неё, эта схема является одновременно и хорошо сбалансированной, и сохраняет положительные значения глубины во всей расчетной области. Для уменьшения численной диссипации используется антидиффузионный член в форме Курганова-Линя. Разработанный алгоритм применен к моделированию одно- и двумерных нестационарных гидравлических течений, в том числе тех, которые формируются при разрушении защитных береговых сооружений. Сравнение результатов расчетов с известными экспериментальными и численными данными свидетельствует о том, что предложенная схема адекватно воспроизводит течения в открытых водоемах, включая докритические, закритические и переходные потоки. Проведенные расчеты гидродинамических характеристик течения на заданом участке реки Днепр позволили получить оценки скорости течения и уровней подъема воды в различных условиях как природного характера, так и связанных с антропогенными нагрузками.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *уравнения мелкой воды, кусочно-линейная аппроксимация, нестационарные гидравлические течения*

The numerical algorithm for solving the system of shallow water equations is developed on the base of a Godunov-type central-upwind scheme. It uses Kurganov-Noelle-Petrova (KNP) numerical flux method, when local propagation speeds are applied for estimation of fluxes of conservative variables across control volume boundaries. This method is simultaneously well-balanced and fluid depth positivity preserving due to using special quadrature for approximation of the bottom function. Anti-diffusion term as proposed by Kurganov-Lin is applied to reduce the scheme numerical dissipation. The algorithm is tested with various examples of non-stationary hydraulic flows, including dam-break problems as in one-dimensional as in two-dimensional cases. Comparisons between numerical and exact solutions or experimental data demonstrated that the developed numerical scheme is capable of accurately reproducing various open channel flows, including subcritical, supercritical and transcritical flows. The scheme was applied for calculating velocities and water levels in the Dniپر River near Kyiv in different conditions connected as with seasonal variations of discharge as with anthropogenic loads.

KEY WORDS: *shallow water equations, piecewise approximation, non-stationary hydraulic flows*

ВСТУП

Вивчення річкових течій є важливим для вирішення багатьох технічних проблем, які виникають у зв'язку з посиленням антропогенних навантажень на навколишнє середовище. Інтенсивне судноплавство в річках та каналах, будівництво в прибережній зоні, неконтрольований забір води і піску, забруднення річок відходами можуть спричинити зсуви ґрунту, руйнування берегів, прорив дамб, розмив мостових опор та інші екологічні і те-

хногенні катастрофи. Для їх уникнення необхідно мати прогностичні оцінки щодо еволюції річкової течії в умовах зовнішнього втручання.

Протягом довгого часу наукову базу для річкових технічних проектів забезпечувала гідравліка. Її концептуальні моделі ґрунтуються на емпіричних співвідношеннях, одержаних або зі спостережень за полем течії, або з лабораторних експериментів [1, 2]. В 90-х роках минулого сторіччя в річкову гідродинаміку почали широко впроваджуватися комп'ютерні технології. Їхньою перевагою є

те, що вони реалізують пряме масштабне моделювання течії, дозволяють виявити вплив окремих факторів і є набагато дешевшими за натурні чи модельні експерименти [3]. Можливості розрахунку залежать від того, наскільки точно фізичні процеси описуються вибраною математичною моделлю. Задача ускладнюється тим, що річкові потоки мають вільну поверхню, нерегулярні береги і дно, що змінюється, тому для побудови математичної моделі використовується багато припущень та емпіричних формул. Чисельне моделювання і фізичний експеримент у сучасній річковій гідродинаміці взаємодоповнюються. Експериментальні дані необхідні для тестування чисельних алгоритмів і апробації результатів розрахунків. Чисельний аналіз широко використовується для прогнозування сценаріїв, які можуть виникнути в річкових системах зі зміною зовнішніх умов.

Річкова течія як екосистема складається із взаємопов'язаних гідродинамічного і морфологічного процесів. Гідродинамічні явища визначаються глибиною і швидкістю водної течії. Вони залежать від форми донної поверхні і конфігурації берегової лінії, а також від наявності в потоці інженерних споруд (дамб, мостів тощо). Морфологічні зміни дна і берегів відбуваються внаслідок підймання частинок ґрунту з дна, їх переносу водною течією та випадання осадів. В реальних річкових потоках, за виключенням екстремальних ситуацій, таких, як руйнування дамби, русло змінюється значно повільніше, ніж течія. Тому в більшості чисельних моделей динаміка течії і еволюція русла розраховуються послідовно [4]. В гідродинамічному блоці знаходяться швидкість та інші характеристики поля течії, які є вхідними параметрами для морфологічного блоку. Далі гідродинамічна модель може коректуватися з урахуванням результатів морфологічного розрахунку.

Течії в річковій гідродинаміці зазвичай описуються рівняннями мілкої води, які впливають з повної системи рівнянь Нав'є-Стокса при інтегруванні по вертикальній координаті за умови, що тиск у потоці розподілений за гідростатичним законом [3]. Рівняння мілкої води належать до гіперболічних законів збереження, тому чисельні схеми, які пропонуються для їхнього розв'язання, повинні коректно описувати розриви у розв'язках.

Сучасні чисельні методи для інтегрування гіперболічних законів збереження спочатку були розвинені в газовій динаміці і прийшли у гідравліку завдяки однакової математичній природі рівнянь Ейлера для стисливої рідини і рівнянь мілкої води. Вони відрізняються тим, що:

1) є консервативними, тобто адаптованими до

течій з розривами,

2) враховують інформацію про напрямки і швидкість поширення збурень.

Незалежно від того, використовується метод Гальоркіна-Петрова [5], кінцево-різницевої схеми [6, 7] чи метод скінчених об'ємів [8], ці алгоритми мають високу роздільну здатність, що дозволяє моделювати раптові зміни гідравлічних параметрів без похибок та генерації штучних коливань.

Важливе місце серед консервативних алгоритмів з високою роздільною здатністю займає метод скінчених об'ємів, який належить до проекційно-еволюційних методів Годунова. В залежності від того, враховується чи ні напрямок поширення збурень, чисельні схеми, побудовані на його основі, розділяються на дві групи:

- схеми проти течії (upwind)
- центральні схеми (central).

В першому випадку рівняння інтегруються по часові на границях контрольних об'ємів. Для цього точними [9] чи наближеними методами [10, 11] розв'язується задача Рімана, яка полягає у знаходженні розривної на границях елементарного об'єму змінної по відомим лівому і правому значеннях. Ріманівські алгоритми (солвери) будуються на основі характеристичної інформації, що істотно зменшує чисельну дифузю методу і дозволяє максимально точно описувати розриви у розв'язках.

Прототипом сучасних центральних схем є добре відома схема Лакса-Фрідрікса [12]. Її перевагою є простота, однак вона не забезпечує знаходження коректних розв'язків поблизу розривів, якою б густою не була розрахункова сітка. Узагальнення цієї схеми, яке має більш високу роздільну здатність і другий порядок точності, було запропоновано в 1990 році в роботі [13]. З тих пір центральні схеми інтенсивно розвивалися [14], тому що вони є значно простішими і універсальнішими, ніж upwind схеми, оскільки не потребують розв'язання задачі Рімана. Але їхнім істотним недоліком залишалася велика чисельна дифузія, яка особливо впливає на результат при малому кроці по часові або коли час інтегрування достатньо довгий. Для зменшення чисельної дифузії в роботі [15] розроблений новий клас центральних схем, який ґрунтується на більш точній оцінці ширини області розриву реконструйованих змінних (Riemann fans) за допомогою локальних швидкостей поширення збурень. Тут пропонується інтегрувати змінні за часом окремо по тій частині контрольного об'єму, де вони неперервні, і по границі, де має місце розрив, після чого одержані розв'язки проектується на початкову сітку. Показано, що при такому підході порядок чисельної дифузії розрахункової схе-

ми зменшується від $O(\Delta x^{2r}/\Delta t)$, як в роботі [13], до $O(\Delta x^{2r-1}/\Delta t)$ (тут Δx , Δt – кроки дискретизації по простору і по часові відповідно; r – порядок чисельної схеми по простору). Використання характеристичної інформації дозволяє наблизити центральні алгоритми до схем "проти потоку". Термін "central-upwind schemes" вперше був введений в роботі [16]. В роботі [17] запропонована їхня модифікація, яка дозволяє зменшити ще системну чисельну дифузію за рахунок введення антидифузійного члена.

Центральні схеми більш високих порядків на прямокутній сітці розвинені в роботах [18, 19]. Центральна схема для рівнянь мілкої води на неструктурованій сітці представлена в роботі [20].

Чисельні алгоритми, що розглядаються в цій роботі, є нелінійними і належать до класу так званих TVD-методів (Total Variation Diminishing) [21, 22], в яких схемна помилка не збільшується з часом. Вони забезпечують розв'язки принаймні другого порядку точності там, де течія монотонна, і усувають коливання, зумовлені похибками апроксимації змінних, поблизу великих градієнтів або розривів.

Центральна схема може бути реалізована в повністю дискретному або у напівдискретному формулюваннях. В першому випадку закони збереження інтегруються в межах контрольного об'єму одночасно по простору і по часові. Напівдискретні алгоритми є граничним випадком повністю дискретних схем при [15]. В них консервативний закон інтегрується спочатку по простору, а потім одержані звичайні диференціальні рівняння інтегруються по часові. Цей підхід є більш простим і гнучким, тому зазвичай використовується при розв'язанні практичних задач, хоча повністю дискретні схеми мають вищу роздільну здатність.

При інтегуванні неоднорідних законів збереження, коли права частина потребує інтегування по простору, як у напівдискретних схемах, або по простору і часові, як у повністю дискретних схемах, виникає проблема вибору відповідної квадратури для правої частини. Головна вимога тут полягає в тому, щоб на дискретному рівні зберігалися стаціонарні розв'язки. Такі чисельні схеми називаються добре збалансованими [23].

Іншою вимогою до чисельних алгоритмів для інтегування рівнянь мілкої води є те, що вони повинні описувати поширення фронтів затоплення на сухих поверхнях (dry/wet fronts). В цьому випадку навіть незначні коливання змінних, пов'язані з похибками чисельної схеми, можуть спровокувати появу від'ємних значень глибини. Звідси випливає вимога стійкості чисельної схеми, яка полягає у здатності зберігати додатні значення гли-

бини у всій розрахунковій області.

Розвинений в цій роботі чисельний алгоритм для моделювання річкових течій ґрунтується на центральній схемі другого порядку Курганова-Ноелля-Петрової [16] з використанням антидифузійного члена, введеного в [17]. Одержані шляхом просторової дискретизації диференціальні рівняння інтегруються явно по часові методом Рунге-Кутта 3-го порядку, який належить до "сильно стійких" інтеграційних схем (Strong Stability Preserving) [24]. Виконані в роботі тестування цього алгоритму в одно- і двовимірному випадках на класичних гідравлічних прикладах і даних лабораторних вимірювань, які відомі з літературних джерел, показали, що центральна схема добре описує гідравлічні процеси, в тому числі з різкою зміною параметрів, зокрема, такі, що виникають при руйнуванні дамб та інших захисних гідротехнічних споруд. Чисельну модель адаптовано до розрахунку реальних річкових потоків, зокрема, на її основі одержані гідродинамічні характеристики течії в річці Дніпро поблизу Дарницького мосту (м. Київ) при інтенсивному заборі донних відкладень.

1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Рівняння мілкої води виводяться з рівнянь динаміки рідини (нерозривності та моментів) за умови, що тиск у потоці розподілений по гідростатичному закону. Докладне описання цієї процедури можна знайти, наприклад, в монографії [3]. Якщо не приймати до уваги турбулентну дифузію, силу Коріоліса і вплив вітру, система двовимірних рівнянь мілкої води має наступний вигляд:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = S(U), \quad (1)$$

де t – час; x , y – поздовжня і поперечна горизонтальні координати; F , G – вектори потоків консервативних змінних в x - та y -напрямах відповідно; вектор S задає джерела втрат консервативних змінних.

Вектори U , F , G виражаються через глибину водної течії h та осереднені по ній компоненти швидкості u і v :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix},$$

де g – постійна гравітація.

Вектор-функція втрат S має вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} S^{(1)} \\ S^{(2)} \\ S^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix},$$

де $S_0 = (S_{0x}, S_{0y})$ – геометричний нахил дна,

$$S_{0x} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad S_{0y} = -\frac{\partial z}{\partial y}; \quad (2)$$

$S_f = (S_{fx}, S_{fy})$ – нахил тертя,

$$S_{fx} = -\frac{c_f u \sqrt{u^2 + v^2}}{gh}, \quad S_{fy} = -\frac{c_f v \sqrt{u^2 + v^2}}{gh}. \quad (3)$$

У виразі (3) c_f представляє собою гідравлічний коефіцієнт тертя донної поверхні, він пов'язаний з коефіцієнтом шорсткості Маннінга наступним чином:

$$c_f = \frac{gn^2}{h^{1/3}}. \quad (4)$$

Коефіцієнт n залежить від типу донного ґрунту, рослинності, поворотів і заглиблень русла та інших особливостей водойми [3]. Його визначають за даними експериментальних і натурних досліджень.

Рівняння (1) описує еволюцію руслового потоку в плані, навіть якщо в ньому наявні раптові нелінійні збурення, наприклад, різко змінюються витрата води або геометричні параметри русла. Використання двовимірної моделі дозволяє:

- враховувати складну топографію дна і берегів;
- моделювати докритичний і закритичний потік;
- описувати раптові зміни течії, які виникають, наприклад, внаслідок прориву дамби;
- описувати вихід потоку на заплаву;
- моделювати закручені потоки поблизу гідротехнічних споруд (дамб, мостів, плузів і т. ін.).

Використовуючи правило диференціювання складної функції, рівняння (1) можна звести до наступної квазіконсервативної форми:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial U}, \frac{\partial G}{\partial U} \right) \nabla U = S(U). \quad (5)$$

Матриці $\frac{\partial F}{\partial U}$ і $\frac{\partial G}{\partial U}$ є функціями Якобіану для системи (1) в поздовжньому (за потоком) і поперечному напрямках:

$$\frac{\partial F}{\partial U} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial G}{\partial U} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - u^2 & 0 & 2v \end{vmatrix}, \quad (6)$$

де $c = \sqrt{gh}$ – швидкість поширення поверхневих хвиль малої амплітуди.

Кожен з детермінантів (6) має три власних значення:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= u \pm c, & a_3 &= u, \\ b_{1,2} &= v \pm c, & b_3 &= v. \end{aligned} \quad (7)$$

Оскільки всі вони є дійсними, система (1) належить до рівнянь гіперболічного типу. Процеси, які описуються такими рівняннями, можуть мати розриви, а власні значення (7) є характеристичними швидкостями поширення інформації в x - та y - напрямках відповідно [25].

Величина c використовується для визначення числа Фруда, що вводиться для класифікації "мілких" течій:

$$Fr = \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{c}, \quad (8)$$

де $\vec{V} \cdot \vec{n} = un_x + vn_y$. Розрізняють докритичні ($Fr < 1$), критичні ($Fr \approx 1$) та закритичні течії ($Fr > 1$).

2. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕТОДУ КІНЦЕВИХ ОБ'ЄМІВ

Внаслідок нелінійності і гіперболічності рівнянь мілкої води їхні розв'язки можуть стати розривними навіть при монотонних початкових умовах. Тому чисельні алгоритми, які використовуються для розв'язання задач річкової гідродинаміки, повинні мати високу роздільну здатність щодо моделювання розривів. До таких схем належить метод кінцевих об'ємів [8, 25], який ґрунтується на інтегральній формі рівнянь мілкої води. Її можна одержати, проінтегрувавши рівняння (1) по фіксованому об'єму Ω :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla E) d\Omega = \int_{\Omega} S d\Omega, \quad (9)$$

де $E = (F, G)$ – тензор потоків.

Інтегральне рівняння (9) є більш загальним, ніж диференціальне рівняння (1), тому що дозволяє описати розриви у розв'язках, тоді як похідні в точках розриву не визначаються. Застосовуючи теорему Гауса до другого інтегралу в лівій частині, отримуємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_L (E \cdot \vec{n}) dl = \int_{\Omega} S d\Omega, \quad (10)$$

де L – границя об'єму Ω ; $\vec{n} = (n_x, n_y)$ – зовнішня нормаль до неї. Нормальний потік $(E \cdot \vec{n})$ через границю L має вигляд:

$$E \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} h\vec{w} \cdot \vec{n} \\ hv\vec{w} \cdot \vec{n} + \frac{1}{2}gh^2n_x \\ hv\vec{w} \cdot \vec{n} + \frac{1}{2}gh^2n_y \end{pmatrix}, \quad (11)$$

де $\vec{w} = (u, v)$.

Рівняння (10) є основою методу кінцевих об'ємів. З нього випливає, що швидкість, з якою змінюється характеристика течії всередині контрольного об'єму, визначається її загальним потоком через границю цього об'єму з урахуванням втрат.

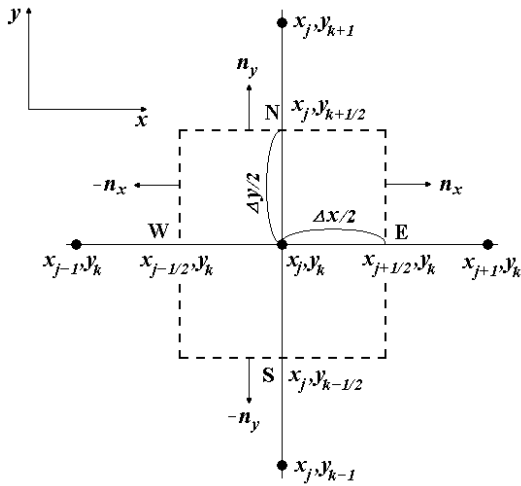


Рис. 1. Типовий елементарний об'єм прямокутної сітки

Для елементарного прямокутного об'єму $\Omega(x, y) = \{\xi, \eta : |\xi - x| < \Delta x/2, |\eta - y| < \Delta y/2\}$, нормалі до поверхні якого співпадають з напрямками координатних осей (рис. 1), рівняння (10) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{U}(x, y, t)}{dt} \Delta x \Delta y = & \\ = - \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} \left\{ F[U(x + \frac{\Delta x}{2}, \eta, t)] - F[U(x - \frac{\Delta x}{2}, \eta, t)] \right\} d\eta - & \\ - \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \left\{ G[U(\xi, y + \frac{\Delta y}{2}, t)] - G[U(\xi, y - \frac{\Delta y}{2}, t)] \right\} d\xi + & \\ + \bar{S}(x, y, t) \Delta x \Delta y, & \end{aligned} \quad (12)$$

де $\bar{U}(x, y, t)$ і $\bar{S}(x, y, t)$ – осереднені значення консервативних змінних і функції джерела втрат по контрольному об'єму $\Omega(x, y)$:

$$\bar{U}(x, y, t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} U(\xi, \eta, t) d\xi d\eta, \quad (13)$$

$$\bar{S}(x, y, t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} S(\xi, \eta, t) d\xi d\eta. \quad (14)$$

Використовуючи правило середньої точки для обчислення інтегралів в (12), у кожному вузлі (x_j, y_k) рівномірної сітки $(x_j = j\Delta x, y_k = k\Delta y, j = 1, \dots, N_x, k = 1, \dots, N_y)$ одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно осереднених змінних:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{U}(x_j, y_k, t) = & \\ = - \frac{F[U(x_{j+1/2}, y_k, t)] - F[U(x_{j-1/2}, y_k, t)]}{\Delta x} - & \\ - \frac{G[U(x_j, y_{k+1/2}, t)] - G[U(x_j, y_{k-1/2}, t)]}{\Delta y} + & \\ + \bar{S}(x_j, y_k, t). & \end{aligned} \quad (15)$$

Функції $F[U(x_{j\pm 1/2}, y_k, t)]$ і $G[U(x_j, y_{k\pm 1/2}, t)]$ в (15) визначають нормальні потоки консервативних змінних через границі дискретного об'єму $\Omega_{j,k}$ за малий проміжок часу. Вони називаються *чисельними потоками*. Процедура їхнього обчислення ґрунтується на кусковополіноміальній апроксимації консервативних змінних в області течії:

$$\tilde{U}(x, y, t) \approx p(x_j, y_k, t), \quad (16)$$

якщо

$$x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}, y_{k-1/2} < y < y_{k+1/2},$$

де поліном $p(x_j, y_k, t)$ є функцією від осередненої змінної $\bar{U}(x_j, y_k, t)$ і її похідних по координатах x, y . Ця процедура називається *реконструкцією* змінних. Ступінь апроксимаційного поліному визначає порядок чисельної схеми по простору. Схеми другого порядку використовують кусково-лінійну реконструкцію, схеми вищих порядків ґрунтуються на кусково-квадратичній апроксимації або істотно неосцилюючих ENO- та WENO-реконструкціях [26, 27].

Щоб усунути хибні коливання реконструйованих змінних, для визначення похідних в (16) використовуються спеціальні нелінійні функції від локальних градієнтів, які називаються *лімітерами*.

Завдяки цьому чисельні алгоритми, що розглядаються, належать до класу TVD-методів (*Total Variation Diminishing*), для яких помилка дискретизації з часом не збільшується. Використання лімітерів робить метод скінчених об'ємів нелінійним, завдяки чому розв'язки мають принаймні другий порядок точності по просторових координатах на ділянках монотонної течії, і усуваються коливання шуканих величин, зумовлені похибкою чисельної схеми, поблизу великих градієнтів або розривів. Докладний огляд нелінійних лімітерів можна знайти, наприклад, в роботах [25, 28].

Реконструйовані змінні $\tilde{U}(x, y, t)$ в граничних точках контрольних об'ємів мають розриви, оскільки обчислюються по осереднених значеннях на суміжних елементах сітки. З часом ці розриви зростають, відповідно збільшуючи чисельну похибку, що може призвести до втрати стійкості алгоритму. Таким чином, інтегрування рівняння (15) по часові потребує визначення векторних потоків F і G від розривних змінних. Першим, хто запропонував шлях вирішення цієї проблеми, був С.К. Годунов [9]. Його схема ґрунтується на точному розв'язанні задачі про поширення збурень, викликаних похибками апроксимації на границях контрольних об'ємів (задачі Рімана). Вона полягає у визначенні змінної в точці розриву по відомим лівому і правому значенням з урахуванням напрямку поширення збурень (проти течії). В практичних схемах одержали розвиток наближені Ріманівські солвери, коли розв'язується лінеаризована задача Рімана (схеми Рое [10], Торо [29, 30], HLLE-схема [31]).

Сучасні центральні схеми типу Годунова складаються з двох кроків [15, 16]. Спочатку виконується інтегрування реконструйованих змінних $\tilde{U}(x, y, t)$ по часові на нерівномірній сітці, яка складається з областей, де ці змінні неперервні, і малих проміжків, в яких вони мають розрив. Для оцінки ширини області розриву використовуються ліво- і правостороння швидкості поширення збурень (7). Одержана апроксимація змінних проектується на початкову рівномірну сітку. В роботі [17] показано, як можна зменшити чисельну дифузійну схему на проекційному кроці за рахунок введення антидифузійного члену. Використання характеристичної інформації в сучасних центральних схемах дозволяє істотно поліпшити їхню точність як на ділянках монотонної течії, так і при моделюванні розривних течій (*rarefaction and shock waves*), що ставить ці алгоритми в один ряд з класичними розрахунковими схемами "проти потоку".

Інтегрування по часові в методі скінчених об'є-

мів зазвичай виконується за явною схемою. Для того, щоб чисельний алгоритм був стійким, повинна задовольнятися умова Куранта-Фрідріхса-Леві [8]:

$$CFL = \frac{\Delta t}{\min\{\Delta x, \Delta y\}} \max\{a_{max}, b_{max}\} < 1, \quad (17)$$

де a_{max}, b_{max} – максимальні локальні швидкості поширення збурень в усій області в x - та y -напрямах відповідно; CFL – число Куранта-Фрідріхса-Леві, яке є мірою поширення збурень за часовий проміжок Δt . Рівняння (17) використовується для визначення кроку по часові при заданій дискретизації по простору.

В [32] показано, що для інтегрування нелінійних законів збереження по часові добре підходять так звані "сильно стійкі" багатокрокові схеми (*Strong Stability Preserving – SSP*). Зокрема, як показує порівняльний аналіз, проведений в [28], оптимальною є схема 3-го порядку точності, яка складається з трьох кроків:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^n + \Delta t L(U^n), \\ U^{(2)} &= \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(U^{(1)}), \\ U^{n+1} &= \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(U^{(2)}), \end{aligned} \quad (18)$$

де $L(U)$ – дискретний оператор (права частина рівняння (15)).

3. ГРАНИЧНІ УМОВИ

При розв'язанні граничних задач руслової гідравліки методами обчислювальної гідродинаміки виникають питання про кількість умов на кожній з границь області течії та щодо вибору процедури їхньої реалізації в чисельній схемі. При моделюванні фізичних проблем, які описуються гіперболічними рівняннями, потрібно враховувати інформацію, яку несе з собою кожна характеристична крива, що входить в розрахункову область. З цього випливає наступне загальне правило: "Кількість умов на границі повинна дорівнювати кількості характеристик, які тут входять в область" [3].

Наочно це добре видно в одновимірному випадку, коли рівняння мілкої води мають дві характеристики:

$$\frac{dx}{dt} = C^+ = u + c \quad \text{і} \quad \frac{dx}{dt} = C^- = u - c,$$

де u, h – осереднені по поперечному перерізу русла швидкість і глибина течії відповідно; $c = \sqrt{gh}$.

В докритичному потоці $C^+ > 0$, $C^- < 0$. Це означає, що на кожній з границь в розрахункову область входить одна характеристична крива (рис. 2, а) і, відповідно, виконується одна гранична умова. Зазвичай на вході в область задається витрата рідини, а на виході – її рівень (глибина). Якщо швидкість потоку перевищує критичну, обидві характеристики будуть додатними, вони входять в область на її початку (рис. 2, б). Тому тут повинні задаватися обидві фізичні величини – витрата рідини та її рівень, тоді як на нижній границі області (за потоком) ніяких умов не вимагається.

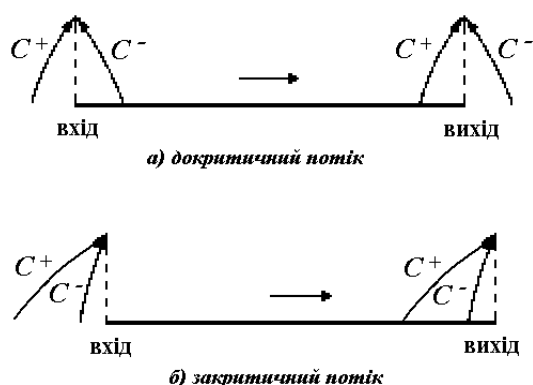


Рис. 2. Характеристичні криві на границях області для одновимірних рівнянь мілкої води

Оскільки в більшості рівнинних річок число Фруда набагато менше за одиницю [33], в двовимірному випадку будемо розглядати лише докритичні течії. Коректна постановка проблеми включає тут дві граничні умови на вході в розрахункову область і одну – на виході (на нижній границі). На практиці у вхідному перерізі задається загальна витрата рідини:

$$Q = \int_0^B |V| h dy, \quad (19)$$

де B – ширина русла на вході в область; h – глибина; \vec{V} – швидкість річкової течії (рис. 3),

$$V = \frac{Qh^r}{\int_0^B h^{r+1} dy}, \quad (20)$$

де r – малий емпіричний параметр ($r < 1$). Маючи загальну витрату і напрямок річкової течії, з (20) одержуємо дві компоненти швидкості у вузлах сітки на вході в розрахункову область.

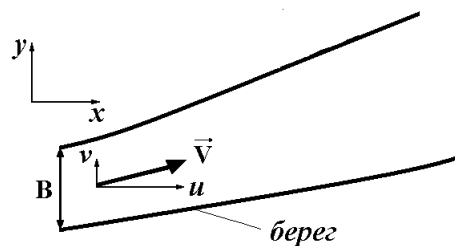


Рис. 3. Схема руслового потоку в площині Oxy .

У вихідному перерізі задається рівень водної поверхні, якщо він відомий з натурних спостережень. В іншому випадку тут накладається умова нульового градієнта рівня води.

Імплементация граничних умов у чисельну процедуру потребує введення додаткових елементів у розрахункову сітку. Вони необхідні для визначення потоків змінних через границі першого і останнього елементів сітки. В передньому додатковому перерізі витрата береться з фізичної постановки задачі, а рівень води визначається екстраполяцією із сусідніх елементів сітки. У вихідному перерізі тип граничних умов для швидкості (або витрати) вибирається з урахуванням конфігурації течії. Для відкритого потоку накладається наскрізна (вільна) умова:

$$V_{n+1} = V_n. \quad (21)$$

Зазначимо, що накладення вільної граничної умови на кінці області виключає її вплив на локальну поведінку течії.

Якщо нижній кінець області перегороджений, накладається умова відбиття потоку від стінки:

$$V_{n+1} = -V_n. \quad (22)$$

Як показано в роботі [25], такий підхід до трактування граничних умов є достатнім для реалізації методу скінчених об'ємів.

При чисельному моделюванні природних річкових течій з нахиленими берегами та островами розрахункова область змінюється з часом, тому що має місце рух границі змоченої поверхні (*wet/dry fronts*). Стійкість розрахункової схеми у цьому випадку забезпечується введенням у початковий момент часу фіктивної малої глибини у "сухих" вузлах сітки, зазвичай 0.01-0.02 м [34]. Ті вузли сітки, в яких у процесі розрахунку глибина стає більшою за порогову, вважаються "мокрими", а ті, де глибина менша – "сухими". В сухих вузлах швидкість течії приймається рівній нулю.

4. НАПІВДИСКРЕТНА ЦЕНТРАЛЬНА СХЕМА ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ РІВНЯНЬ МІЛКОЇ ВОДИ

Представлений тут алгоритм для розв'язання двовимірних рівнянь мілкої води ґрунтується на результатах роботи [35], де доведено, що він є консервативним, добре збалансованим і зберігає додатні значення глибини у всій області течії. Його особливістю є перехід від змінної h (глибини потоку) до змінної w , яка задає рівень вільної поверхні. Якщо форма дна в області описується функцією $B(x, y)$, то $w(x, y) = B(x, y) + h(x, y)$ (рис. 4). Будемо вважати, що єдиним джерелом втрат консервативних змінних в області є нерівне дно, тоді рівняння мілкої води (1) w, hu, hv можуть бути записані наступним чином:

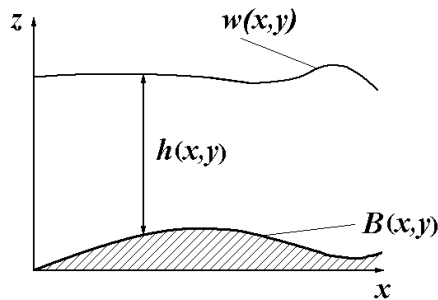


Рис. 4. Схема течії в площині Oxz .

пним чином:

$$\begin{aligned}
 w_t + (hu)_x + (hv)_y &= 0, \\
 (hu)_t + \left(\frac{hu^2}{w-B} + \frac{g}{2}(w-B)^2 \right)_x + \\
 + \left(\frac{hu \cdot hv}{w-B} \right)_y &= -g(w-B)B_x, \\
 (hv)_t + \left(\frac{hu \cdot hv}{w-B} \right)_x + \\
 + \left(\frac{hv^2}{w-B} + \frac{g}{2}(w-B)^2 \right)_y &= -g(w-B)B_y.
 \end{aligned} \tag{23}$$

В напівдискретній центральній схемі система диференціальних рівнянь (15) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{U}_{j,k}(t)}{dt} &= -\frac{H_{j+1/2,k}^x(t) - H_{j-1/2,k}^x(t)}{\Delta x} - \\
 -\frac{H_{j,k+1/2}^y(t) - H_{j,k-1/2}^y(t)}{\Delta y} + \bar{S}_{j,k}(t),
 \end{aligned} \tag{24}$$

де $\bar{U}_{j,k}, \bar{S}_{j,k}$ – осереднені по елементарному об'єму $\Omega_{j,k}$ значення консервативних змінних і функції джерела втрат; $H^x(t), H^y(t)$ – чисельні потоки консервативних змінних крізь границі контрольного об'єму (в напрямках осей Ox, Oy відповідно).

В цій роботі для апроксимації конвективних членів використовується чисельний потік Курганова-Ноелля-Петрової ($KNP-flux$) [16]. Він побудований з використанням кусково-лінійної апроксимації змінних і ґрунтується на оцінках екстремальних хвильових швидкостей на границях контрольних об'ємів. З урахуванням антидифузійного члену $KNP-flux$ записується наступним чином:

$$\begin{aligned}
 H_{j+1/2,k}^x(t) &= \\
 &= \frac{a_{j+1/2,k}^+ F(U_{j,k}^E) - a_{j+1/2,k}^- F(U_{j+1,k}^W)}{a_{j+1/2,k}^+ - a_{j+1/2,k}^-} + \\
 &+ \frac{a_{j+1/2,k}^+ a_{j+1/2,k}^-}{a_{j+1/2,k}^+ - a_{j+1/2,k}^-} (U_{j+1,k}^W - U_{j,k}^E) - \\
 &- a_{j+1/2,k}^+ a_{j+1/2,k}^- \cdot q_{j+1/2,k}^x, \\
 H_{j,k+1/2}^y(t) &= \\
 &= \frac{b_{j,k+1/2}^+ G(U_{j,k}^N) - b_{j,k+1/2}^- F(U_{j,k+1}^S)}{b_{j,k+1/2}^+ - b_{j,k+1/2}^-} + \\
 &+ \frac{b_{j,k+1/2}^+ b_{j,k+1/2}^-}{b_{j,k+1/2}^+ - b_{j,k+1/2}^-} (U_{j,k+1}^S - U_{j,k}^N) - \\
 &- b_{j,k+1/2}^+ b_{j,k+1/2}^- \cdot q_{j,k+1/2}^y,
 \end{aligned} \tag{25}$$

де a^\pm, b^\pm – односторонні локальні швидкості поширення збурень через границі контрольного об'єму; $U_{j,k}^{W,E,S,N}$ – значення реконструйованих змінних у граничних точках: $(x_{j-1/2} + 0, y_k)$ – *West*, $(x_{j+1/2} - 0, y_k)$ – *East*, $(x_j, y_{k-1/2} + 0)$ – *Sought*, $(x_j, y_{k+1/2} - 0)$ – *North*.

$U_{j,k}^{W,E,S,N}$ знаходяться з формули лінійної апроксимації змінних в рамках дискретного об'єму $\Omega_{j,k}$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}(x, y, t) &= \bar{U}_{j,k}(t) + (U_x)_{j,k} (x - x_j) + \\
 &+ (U_y)_{j,k} (y - y_j), \quad (x, y) \in \Omega_{j,k}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

З (26) одержуємо:

$$U_{j,k}^W = \bar{U}_{j,k} - \frac{\Delta x}{2} (U_x)_{j,k},$$

$$\begin{aligned} U_{j,k}^E &= \bar{U}_{j,k} + \frac{\Delta x}{2} (U_x)_{j,k}, \\ U_{j,k}^S &= \bar{U}_{j,k} - \frac{\Delta y}{2} (U_y)_{j,k}, \\ U_{j,k}^N &= \bar{U}_{j,k} + \frac{\Delta y}{2} (U_y)_{j,k}. \end{aligned} \quad (27)$$

Щоб мінімізувати коливання при обчисленні реконструйованих змінних, похідні $(U_x)_{j,k}$, $(U_y)_{j,k}$ в (27) визначаються з використанням однопараметричної *minmod*-функції:

$$\begin{aligned} (U_x)_{j,k} &= \minmod \left(\theta \frac{\bar{U}_{j+1,k} - \bar{U}_{j,k}}{\Delta x}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{U}_{j+1,k} - \bar{U}_{j-1,k}}{2\Delta x}, \theta \frac{\bar{U}_{j,k} - \bar{U}_{j-1,k}}{\Delta x} \right), \\ (U_y)_{j,k} &= \minmod \left(\theta \frac{\bar{U}_{j,k+1} - \bar{U}_{j,k}}{\Delta y}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{U}_{j,k+1} - \bar{U}_{j,k-1}}{2\Delta y}, \theta \frac{\bar{U}_{j,k} - \bar{U}_{j,k-1}}{\Delta y} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

де $\theta \in [1, 2]$. Зауважимо, що коливання змінних будуть меншими при малих значеннях параметру θ з діапазону, що розглядається, але дисипація чисельної схеми при цьому збільшується.

Багатоваріантна *minmod*-функція задається наступним чином [8]:

$$\begin{aligned} \minmod(z_1, z_2, \dots) &= \\ &= \begin{cases} \min_j \{z_j\}, & \text{якщо } z_j > 0 \forall j, \\ \max_j \{z_j\}, & \text{якщо } z_j < 0 \forall j, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

Використання функції (29) дозволяє вибрати реконструкцію з мінімальними розривами консервативних змінних на границях контрольних об'ємів, а також запобігти їхнім коливанням поблизу локальних екстремумів.

Антидифузійні оператори $q_{j+1/2,k}^x$, $q_{j,k+1/2}^y$ в формулах (25) використовуються з метою зменшення дисипації чисельної схеми. Їхній докладний вигляд можна знайти в роботі [17]. Зауважимо, що при їхній побудові, як і в (25), використовуються односторонні хвильові швидкості a^\pm , b^\pm на границях контрольних об'ємів. Вони є екстремальними власними значеннями Якобіанів $\partial F/\partial U$ і $\partial G/\partial U$ в заданій точці:

$$\begin{aligned} a_{j+1/2,k}^+ &= \\ &= \max \left\{ u_{j,k}^E + \sqrt{gh_{j,k}^E}, u_{j+1,k}^W + \sqrt{gh_{j+1,k}^W}, 0 \right\}, \\ a_{j+1/2,k}^- &= \\ &= \min \left\{ u_{j,k}^E - \sqrt{gh_{j,k}^E}, u_{j+1,k}^W - \sqrt{gh_{j+1,k}^W}, 0 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{j,k+1/2}^+ &= \\ &= \max \left\{ v_{j,k}^N + \sqrt{gh_{j,k}^N}, v_{j,k+1}^S + \sqrt{gh_{j,k+1}^S}, 0 \right\}, \\ b_{j,k+1/2}^- &= \\ &= \max \left\{ v_{j,k}^N - \sqrt{gh_{j,k}^N}, v_{j,k+1}^S - \sqrt{gh_{j,k+1}^S}, 0 \right\}. \end{aligned}$$

Інтегрування рівняння (24) потребує дискретизації джерела втрат – функції $S(U, B)$. Від способу дискретизації залежить, чи буде чисельна схема збалансованою і чи забезпечить вона додатні значення глибини у всій розрахунковій області. В роботі [35] показано, що це досягається білінійною апроксимацією функції дна в рамках елементарних об'ємів, з якої випливають наступні квадратні формули для джерела втрат:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{j,k}^{(2)}(t) &\approx -g \left(\bar{w}_{j,k} - \tilde{B}_{j,k} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\tilde{B}_{j+1/2,k} - \tilde{B}_{j-1/2,k}}{2}, \\ \bar{S}_{j,k}^{(3)}(t) &\approx -g \left(\bar{w}_{j,k} - \tilde{B}_{j,k} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\tilde{B}_{j,k+1/2} - \tilde{B}_{j,k-1/2}}{2}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{де } \bar{w}_{j,k} = \frac{w_{j,k}^E + w_{j,k}^W}{2} = \frac{w_{j,k}^N + w_{j,k}^S}{2},$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{j,k} &= \frac{1}{4} \left(B_{j-1/2,k-1/2} + B_{j+1/2,k-1/2} + \right. \\ &\quad \left. + B_{j-1/2,k+1/2} + B_{j+1/2,k+1/2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{j+1/2,k} &= \frac{1}{2} \left(B_{j+1/2,k-1/2} + B_{j+1/2,k+1/2} \right), \\ \tilde{B}_{j,k+1/2} &= \frac{1}{2} \left(B_{j-1/2,k+1/2} + B_{j+1/2,k+1/2} \right). \end{aligned}$$

Формули (30) і використання SSP-схеми (18) для інтегрування рівняння (24) по часові при $CFL \leq \frac{1}{4}$ (де *CFL* – число Куранта-Фрідріхса-Леві) забезпечують консервативність, збалансованість та стійкість описаного чисельного алгоритму для моделювання двовимірних м'яких течій [16, 18].

5. ТЕСТОВІ РОЗРАХУНКИ

5.1. Одновимірні тести

Одновимірні рівняння м'якої води впливають з рівнянь (1) або (23), якщо припустити, що швидкість течії і рівень води по поперечному перерізу

каналу не змінюються. Їхня найвідоміша форма – рівняння Сен-Венана – одержана у 1871 році для каналів з прямокутним перерізом [36]:

$$h_t + (hu)_x = 0, \tag{31}$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x = -gh \frac{dz}{dx},$$

де h – глибина води; u – швидкість потоку вздовж каналу (осі Ox); $z(x)$ – функція дна. Незалежними змінними тут є глибина води h (або рівень вільної поверхні $w = h + B$) та витрата $q = hu$.

Незважаючи на спрощення, рівняння Сен-Венана зберігають основні властивості консервативних законів, зокрема, їхні розв'язки можуть бути розривними функціями. В певних (ідеалізованих) випадках можуть бути знайдені точні розв'язки цих рівнянь, які традиційно застосовуються для тестування чисельних алгоритмів.

5.1.1. Малі збурення рівня води в озері

Цей тест запропонований в роботі [37] для оцінки здатності чисельних схем розраховувати еволюцію малих збурень вільної поверхні над нерівним дном. Розглядається область довжиною 2 м. На її горизонтальному дні розташований косинусоподібний пагорб висотою 0.5 м, форма якого описується функцією:

$$z(x) = 0.25 [1 + \cos(10\pi(x - 0.5))],$$

якщо $x \in [1.2, 1.4]$.

В початковий момент часу вода не рухається: $u(x, 0) = 0$. Її глибина скрізь постійна – 1 м, за винятком малого проміжку $x \in [1.1, 1.2]$, де виникає мале збурення поверхні (хвиля з амплітудою $\varepsilon \ll 1$). Таким чином, рівень води в розрахунковій області задає кусково-постійна функція:

$$w(x, 0) = \begin{cases} 1 + \varepsilon, & \text{якщо } x \in [1.1, 1.2], \\ 1, & \text{якщо } x \in [0, 1.1) \cup (1.2, 2]. \end{cases}$$

Виконані розрахунки подальшої еволюції вільної поверхні свідчать про те, що початкове збурення розпадається на дві хвилі, які розходяться у протилежних напрямках. На рис. 5 показано порівняння розрахованої форми вільної поверхні з точним розв'язком цієї задачі [37] при $\varepsilon = 10^{-3}$, $t = 0.2$ с. Зазначимо, що наведені чисельні дані одержані при $CFL = 0.5$, $N = 200$ (де N – кількість точок дискретизації) та двох значеннях параметру *minmod*-функції: $\theta = 1$ і $\theta = 2$. Можна бачити, що результати розрахунків при $\theta = 2$ наближаються до точного розв'язку, в той час як при

$\theta = 1$ спостерігається істотна чисельна дифузія в областях немонотонного розвитку хвилі. В обох випадках одержані результати не мають штучних коливань.

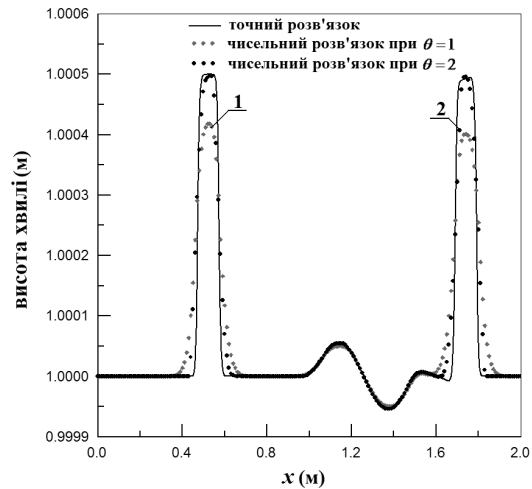


Рис. 5. Форма вільної поверхні при $\varepsilon = 10^{-3}$ м, $t = 0.2$ с. Порівняння чисельних даних при $\theta = 1$ (крива 1) і $\theta = 2$ (крива 2) з точним розв'язком

5.1.2. Стаціонарний потік над пагорбом

На цьому класичному прикладі чисельні схеми оцінюються з точки зору збереження ними стаціонарних розв'язків [38]. Розглядається область довжиною 25 м, на горизонтальному дні якої розташований пагорб висотою 0.2 м. Форма пагорбу задається функцією:

$$z(x) = 0.2 - 0.05(x - 10)^2 \quad x \in [8., 12.].$$

В початковий момент поверхня води незбурена, а течія відсутня. При $t > 0$ вода в каналі починає рухатися. Тип течії (докритична, перехідна чи закритична) в області, що розглядається, визначається граничними умовами. Розрахунки виконані при наступних параметрах чисельної схеми: $\Delta x = 0.25$ м, $CFL = 0.5$, $\theta = 1$.

а) Докритичний потік

Задача має наступні початкові і граничні умови:

$$w(x, 0) = 2 \text{ м}, \quad u(x, 0) = 0,$$

$$q|_{x=0} = 4.42 \text{ м}^2/\text{с}, \quad w|_{x=25} = 2 \text{ м}.$$

На рис. 6 показаний розрахований рівень вільної поверхні в області при $t = 200$ с. З нього випливає, що над вигнутим дном поверхня води в гідравлічному потоці прогинається. Порівняння цих результатів з точним розв'язком свідчить про зда-

тність чисельного алгоритму розраховувати і зберігати стаціонарні стани течії.

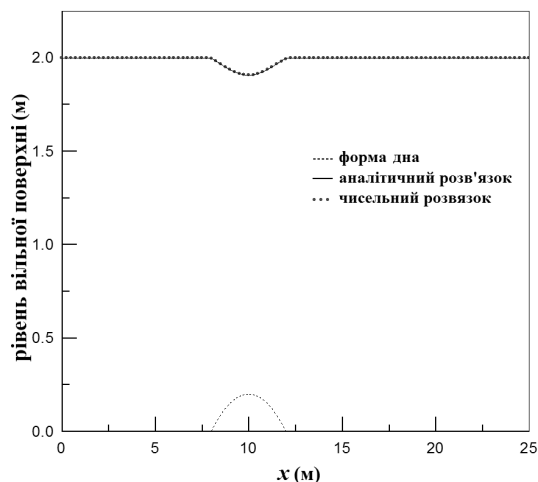


Рис. 6. Розрахунковий рівень вільної поверхні у докритичному потоці над пагорбом

б) *Перехідний потік з гідравлічним стрибком*

Така течія може мати наступні початкові і граничні умови:

$$\begin{aligned} w(x, 0) = 0.33 \text{ м}, \quad u(x, 0) = 0, \\ q|_{x=0} = 0.18 \text{ м}^2/\text{с}, \quad w|_{x=25} = 0.33 \text{ м}. \end{aligned}$$

Розрахунки показують, що після початку процесу тут генерується потік, спрямований від задньої границі області до передньої (справа наліво). При цьому над нерівністю дна виникає гідравлічний стрибок, коли рівень води спочатку падає, а потім різко збільшується до значення, яке істотно перевищує початковий рівень (рис. 7). Відсутність розбіжностей між точним розв'язком і результатами чисельного моделювання на рис. 7 демонструє здатність чисельного алгоритму розраховувати течії з різкими змінами параметрів.

5.1.3. Руйнування греблі над неплоским дном

У цій тестовій задачі моделюється течія, яка виникає в каналі внаслідок руйнування греблі. Його метою є оцінка чисельного алгоритму щодо розрахунку швидких динамічних змін вільної поверхні. За умовами задачі довжина розрахункової області складає 1500 м. В її центральній частині, при $x = 750$ м, розташована перегородка (гребля). Зліва від неї знаходиться замкнений резервуар, справа – канал з відкритою нижньою границею. До початку процесу рівні води в резервуарі і в каналі дорівнюють 20 м і 15 м відповідно, вода не рухає-

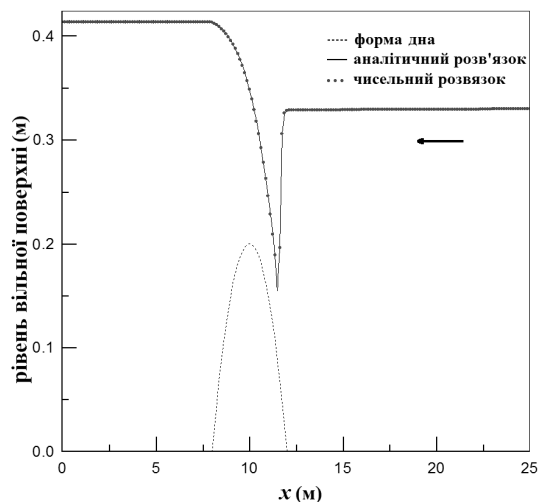


Рис. 7. Розрахунковий рівень вільної поверхні над пагорбом у перехідному потоці з гідравлічним стрибком

тись, тобто: $u(x, 0) = 0$.

На дні області розташований прямокутний виступ, який підіймається на 8 м над горизонтальною поверхнею, так що форма дна задається наступною кусково-неперервною функцією:

$$z(x) = \begin{cases} 8 \text{ м}, & \text{якщо } x \in [560, 940], \\ 0, & \text{якщо } x \in [0, 560) \cup (940, 1500]. \end{cases}$$

Після зруйнування перегородки вода починає перетікати з резервуару в канал. Згідно до конфігурації розрахункової області, на її початку накладається умова відбиття потоку від стінки резервуару:

$$w_0 = w_1, \quad q_0 = -q_1. \quad (32)$$

У вихідному перерізі каналу накладається умова відкритої течії:

$$w_{N+1} = w_N, \quad q_{N+1} = q_N. \quad (33)$$

Розрахунки в цій задачі виконані при наступних параметрах чисельної схеми: $\Delta x = 5$ м, $CFL = 0.5$, $\theta = 1$. На рис. 8 представлені розраховані рівні води і функція витрати в області через 15 с (крива 1) і 60 с (крива 2) після зруйнування перегородки. Вони свідчать про те, що вирівнювання водної поверхні супроводжується різкими стрибками глибини, що зумовлено наявністю великомасштабної нерівності на дні. На початковій стадії процесу на вільній поверхні утворюються стрибок і хвиля розрідження (крива 1). З часом вони досягають границь області, а над нерівністю розташовуються стоячі хвилі (крива 2). Ці результати узгоджуються з даними роботи [26]. Функція

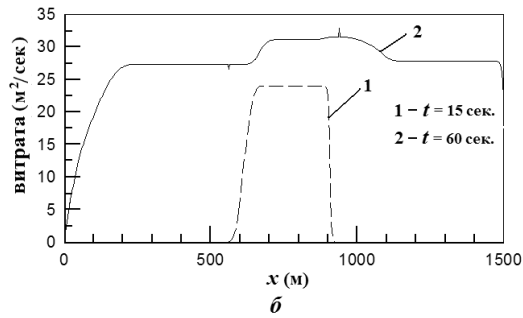
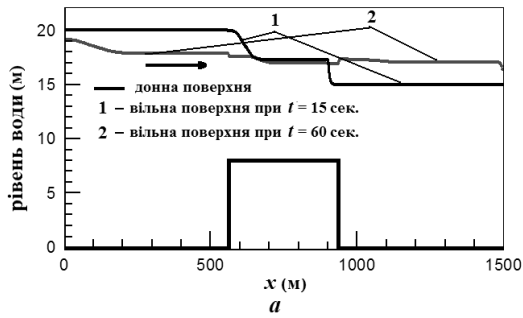


Рис. 8. Розраховані рівні води – (а) і значення витрати – (б) при руйнуванні греблі над нерівним дном

витрати (рис. 8, б) дає можливість оцінити швидкість процесу. Зокрема, видно, що через 60 с після його початку рухається практично вся рідина в області. Те, що розрахована функція витрати є гладкою (її невеликі осциляції спостерігаються лише поблизу критичних точок потоку), свідчить про високу роздільну здатність застосованої чисельної схеми.

5.1.4. Витікання води з резервуару

Цей тест запропонований в роботі [39] для оцінки здатності чисельних схем розраховувати утворення сухих ділянок на дні. Розглядається резервуар з неплоским дном, заповнений рідиною, що не рухається. Довжина області – 25 м, конфігурація дна – така сама, як в тестовій задачі 5.1.2 (плоска поверхня з круглим пагорбом висотою 0.2 м). Рівень води в резервуарі дорівнює 0.5 м. В початковий момент стінка з правого боку прибирається, внаслідок чого вода починає витікати з резервуару. Задача розв’язується з граничною умовою відбиття (32) на лівій стінці резервуару і з вільною умовою (33) у вихідному перерізі при $\Delta x = 5$ м, $CFL = 0.5$. Одержані результати (рис. 9) узгоджуються з даними роботи [39]. Вони свідчать про те, що по мірі витікання води з резервуару течія змінює свій характер. Спочатку вона є докритичною, а коли рівень води наближається до висоти

розташованого на дні пагорбу, на вільній поверхні утворюється гідравлічний стрибок. При $t \sim 500$ с глибина води зліва від пагорбу зрівнюється з його висотою, і надалі відбувається лише витікання залишків води за пагорбом з утворенням тут сухої поверхні. Ці результати підтверджують, що запропонований алгоритм може бути успішно застосований до розрахунку течій з сухими ділянками на дні.

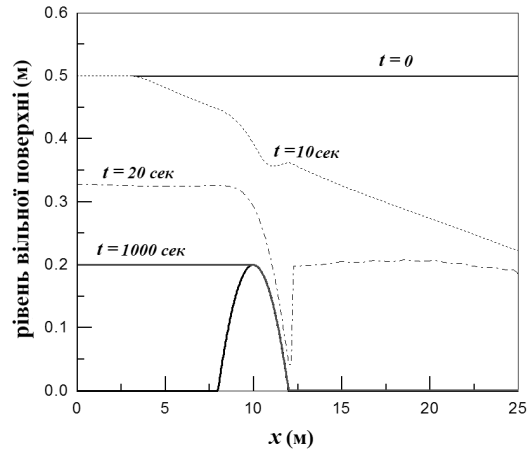


Рис. 9. Еволюція вільної поверхні при витіканні води з резервуару з неплоским дном

5.1.5. Коливання рівня води в озері

Розглядається замкнений резервуар (наприклад, озеро) з нахиленими стінками, заповнений водою [40]. Функція

$$z(x) = 0.5\{1 - 0.5[\cos 2\pi(x - 0.5) + 1]\}$$

задає профіль дна і бічні неперпендикулярні стінки резервуару (рис. 10). В початковий момент часу поверхня води відхиляється від стаціонарного положення і має форму малої синусоподібної хвилі:

$$w(0, x) = \max\{0, 0.4 - z(x) + 0.04[\sin(0.25x - 2) + 0.04 \max\{0, z(x) - 0.4\}]\}.$$

Це відхилення викликає коливання води в резервуарі. В розрахунках визначається форма вільної поверхні в різні моменти часу. Складність задачі полягає в тому, що частина границі області (бічної поверхні резервуару) по чергово то змочується, то висихає. Таким чином, чисельна схема повинна описувати взаємодію між мокрими і сухими елементами сітки. Розрахунки в цій задачі виконувалися при $\Delta x = 0.01$, $CFL = 0.4$, $\theta = 1$. На рис. 10 представлено еволюцію вільної поверхні

протягом 30 с, що приблизно відповідає половині періоду хвилі, коли вода стікає з одного берега і затоплює протилежний. Відсутність хибних осциляцій у розв'язках свідчить про здатність побудованої чисельної схеми коректно описувати набігання хвилі на суху поверхню (*wet/dry fronts*). Одержані результати добре узгоджуються з аналогічними даними роботи [40].

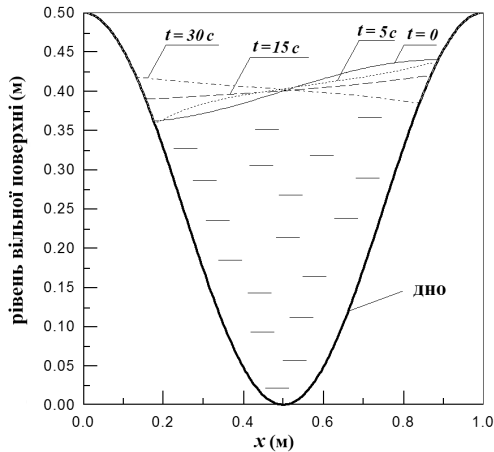


Рис. 10. Коливання вільної поверхні в резервуарі з нахиленими стінками

5.2. Двовимірні тестові розрахунки

Зважаючи на відсутність аналітичних розв'язків рівнянь мілкої води в двовимірному випадку, точність чисельної моделі оцінюється тут розв'язанням класичних тестових прикладів і порівнянням одержаних результатів з розрахунковими даними інших авторів або з даними лабораторних вимірювань, які відомі з літературних джерел.

5.2.1. Малі збурення вільної поверхні над нерівним дном

Ця тестова задача, запропонована в роботі [37], використовується для оцінки чисельних алгоритмів щодо коректного описання малих двовимірних збурень вільної поверхні. Розглядається прямокутна область розмірами $[0., 2] \times [0., 1]$ м з вигнутим угору дном, заповнена рідиною, що не рухається.

Конфігурація дна (рис. 11) в цій задачі задається функцією:

$$z(x, y) = 0.8 \exp[-5(x - 0.9)^2 - 50(y - 0.5)^2].$$

Покладається, що при $t = 0$ на поверхні води виникає збурення висотою 1 см, що складає 1% від

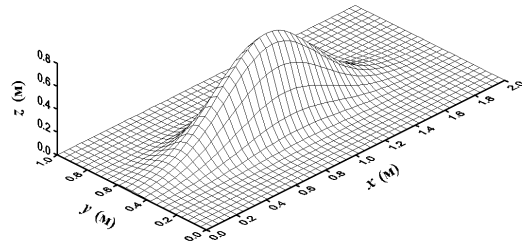


Рис. 11. Форма дна в тестовій задачі 5.2.1

загальної глибини. Таким чином, початкові умови задачі мають наступний вигляд:

$$w(x, y, 0) = \begin{cases} 1.01 \text{ м,} & \text{якщо } x \in [0.05, 0.15], \\ 1 \text{ м,} & \text{якщо } x \in [0, 0.05) \cup (0.15, 2.], \end{cases}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad v(x, y, 0) = 0.$$

В розрахунках досліджується еволюція цієї малої хвилі над нерівним дном за умови, що всі границі області відкриті. На рис. 12 представлені трансформації вільної поверхні протягом 0.6 с, одержані при $\Delta x = \Delta y = 0.01$, $CFL = 0.25$, $\theta = 1$. Можна бачити, що хвиля, яка утворюється внаслідок початкового збурення, рухається вздовж осі Ox в додатному напрямку. При цьому над пагорбом генерується система вторинних хвиль. Ці результати узгоджуються з даними інших авторів, зокрема, представленими в роботі [41]. Зазначимо, що одержані результати демонструють відсутність коливань на вільній поверхні, які були б зумовлені похибкою розрахункової схеми.

5.2.2. Руйнування греблі в каналі з прямокутним перерізом

Проблема руйнування захисних споруд розглядалася багатьма дослідниками експериментальними, теоретичними та чисельними методами. Зважаючи на велику кількість накопичених даних, вона часто використовується в обчислювальній гідравліці для тестування алгоритмів, зокрема, щодо їхньої здатності моделювати швидко поширення нелінійних хвиль.

Будемо розглядати класичну постановку цієї задачі [42], в якій розрахункова область має розміри 200×200 м в плані, в її середньому перерізі, при $x = 100$ м, паралельно осі Oy розташована гребля шириною 10 м. Вважається, що дно в області однорідне і горизонтальне. Глибина води h_0 в резервуарі перед греблею дорівнює 10 м, у відвідному каналі, розташованому після греблі, глибина

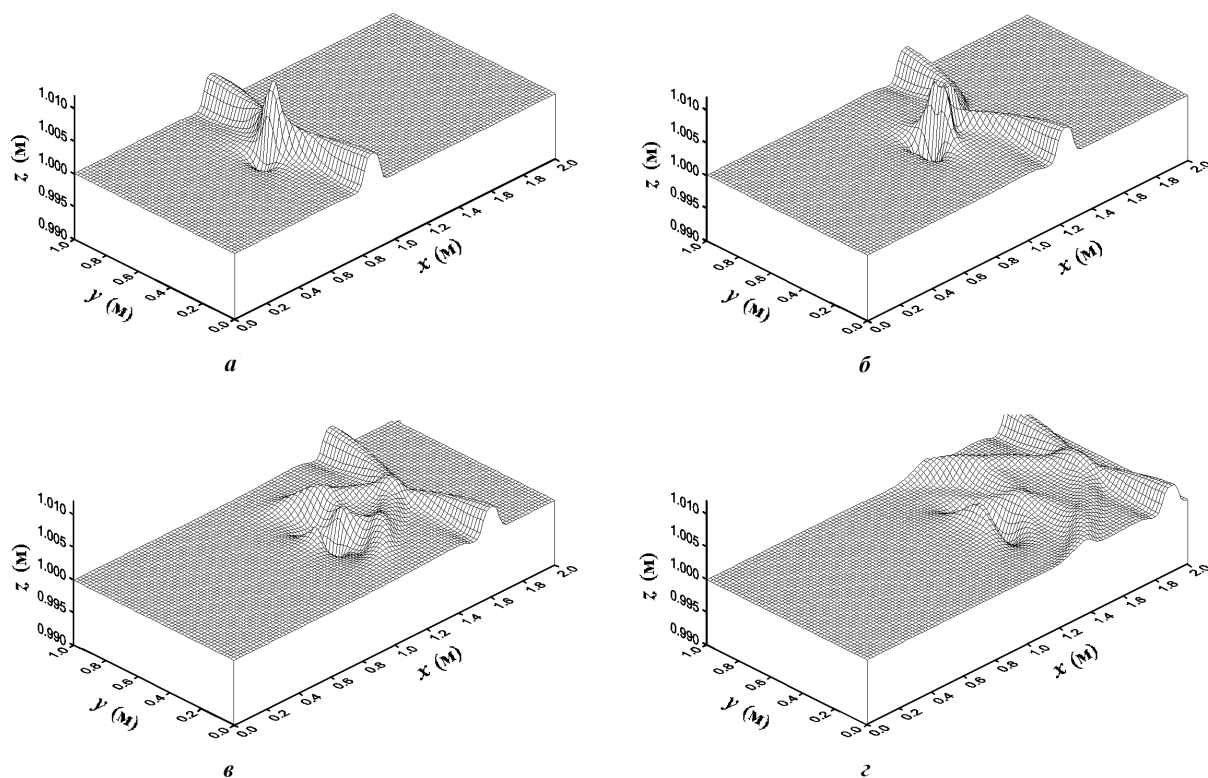


Рис. 12. Еволюція хвилі, генерованої малим початковим збуренням поверхні, при рухові над тривимірним виступом дна:
 $a - t = 0.24$ с, $б - t = 0.36$ с, $в - t = 0.48$ с, $г - t = 0.60$ с

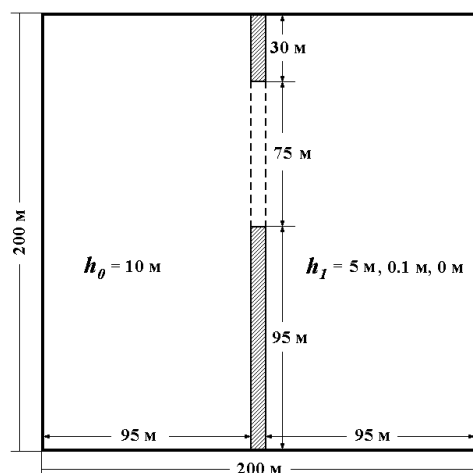


Рис. 13. Схема задачі про руйнування греблі

води h_1 може бути 5 м, 0.1 м або тут розглядається "сухе" дно. В початковий момент ділянка греблі довжиною 75 м руйнується, в ній утворюється асиметричний отвір. Вигляд розрахункової області зверху і всі геометричні параметри задачі

показані на рис. 13. Вважається, що тертя на дні відсутнє. Перед початком процесу рідина не рухається. На верхній і на бічних границях розрахункової області накладається умова відбиття потоку від стінки, у вихідному перерізі каналу задається умова відкритої границі. Розрахунки в цій задачі виконувалися з наступними параметрами чисельної схеми: $\Delta x = \Delta y = 5$ м, $CFL = 0.4$, $\theta = 1$.

На рис. 14 представлені одержані в розрахунках форма вільної поверхні, ізолінії глибини та поле швидкості через 7.2 с після руйнування греблі при $h_1 = 0$ м, 0.1 м і 5 м. Наведені малюнки показують, що за зруйнованою греблею утворюється хвильовий фронт, висота якого пропорційна глибині води у випускному каналі. Ця нелінійна хвиля поширюється не лише вниз за течією, а і у поперечному напрямку. Така хвиля може завдати шкоди береговим спорудам і сільськогосподарським угіддям. Ці результати добре узгоджуються з раніше опублікованими даними інших авторів [43, 44], що свідчить про здатність представлені розрахункової схеми моделювати двовимірні гідравлічні процеси, в тому числі і з різкою зміною параметрів.

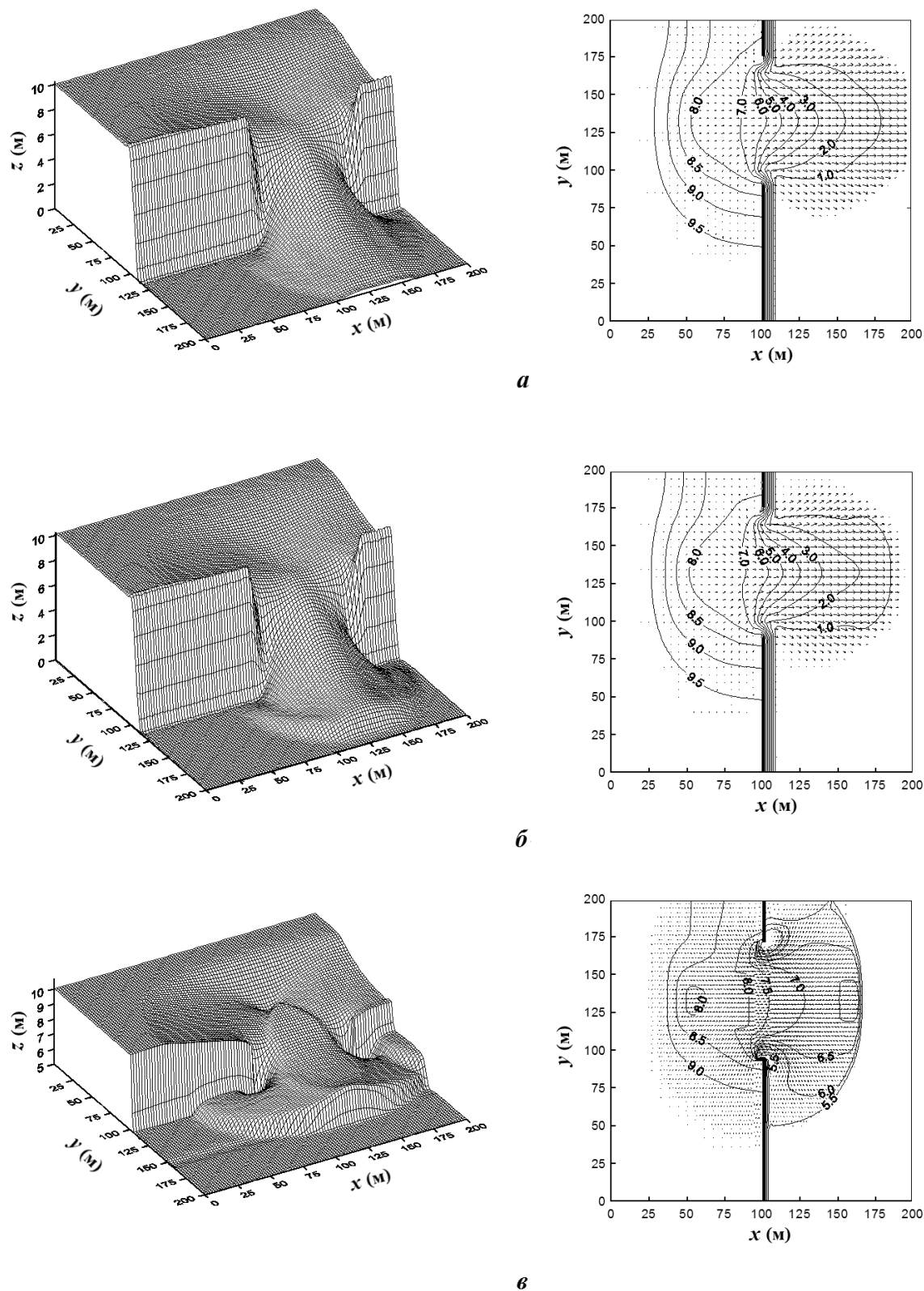


Рис. 14. Розраховані форма вільної поверхні (зліва) та ізолії глибини і поле швидкості (справа) в задачі про руйнування греблі при $t = 7.2$ с:
 $a - h_0 = 10\text{м}, h_1 = 0\text{м}; \quad б - h_0 = 10\text{м}, h_1 = 0.1\text{м}; \quad в - h_0 = 10\text{м}, h_1 = 5\text{м}$

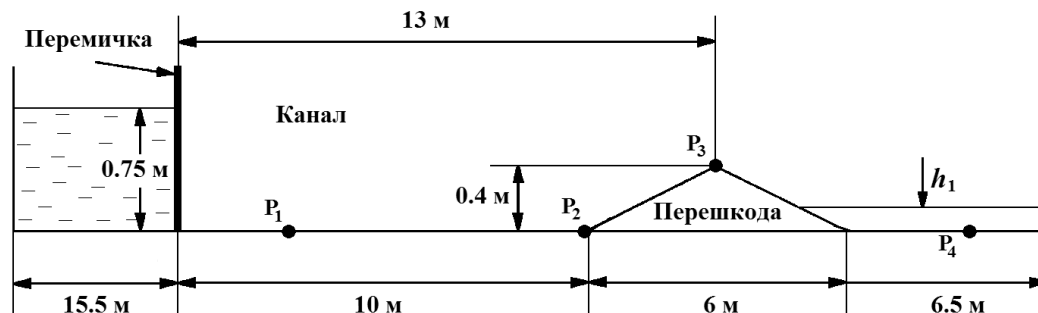


Рис. 15. Схема задачі про руйнування греблі в каналі з трикутною перешкодою на дні

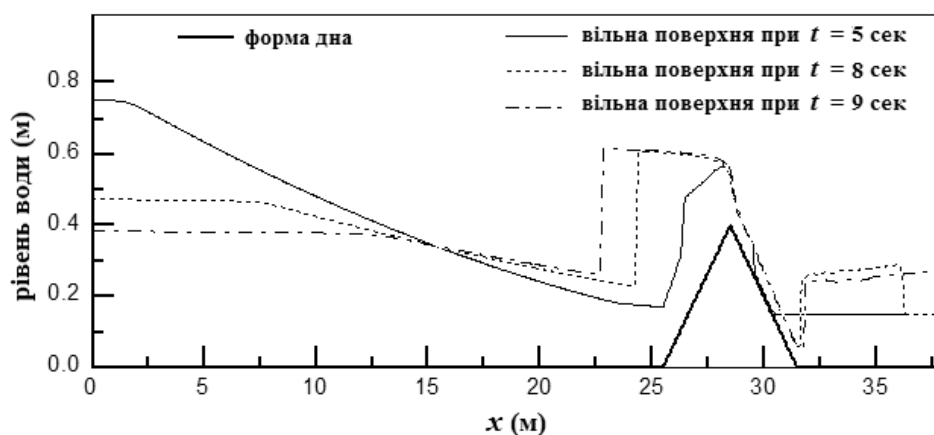


Рис. 16. Форма вільної поверхні в різні моменти часу після руйнування греблі

5.2.3. Руйнування греблі в каналі з трикутною перешкодою на дні

Для демонстрації можливостей побудованої чисельної схеми щодо розрахунку гідравлічних течій в каналах з нерегулярним дном тут розглянуто одну з тестових задач зі спеціального науково-дослідного проекту Європейського Союзу, який був спрямований на створення бази експериментальних даних для тестування чисельних алгоритмів (European Concerted Action on Dam-break Modeling). В рамках цього проекту проведені експериментальні дослідження гідравлічних течій з руйнуванням дамб та гребель різної конфігурації. Їхні результати опубліковані в звіті [45].

В цій роботі моделюється потік, який виникає внаслідок руйнування перемички (греблі), що відгороджує резервуар, заповнений водою, від каналу з трикутною перешкодою на дні. Конфігурація розрахункової області і всі геометричні параметри задачі показані на рис. 15. Тестова область має довжину 38 м, ширину – 0.75 м. Довжина резервуару – 15.5 м. Трикутна перешкода висотою

0.4 м і основою 6 м розташована на відстані 13 м від греблі. Як і в фізичних експериментах, в початковий момент часу глибина води в резервуарі складає 0.75 м, дно в каналі до перешкоди вважається сухим, глибина води в каналі після перешкоди складає 0.15 м. Коефіцієнт Маннінга для дна в каналі дорівнює $0.0125 \text{ с/м}^{1/3}$.

В розрахунках у вихідному перерізі каналу накладалася умова відкритої границі (32), на всіх інших границях виконувалася умова відбиття потоку від стінки (31). Розрахунки проводилися на однорідній сітці при $\Delta x = \Delta y = 0.05 \text{ м}$, $CFL = 0.25$, $\theta = 1$.

На рис. 16 представлена розрахована форма вільної поверхні в Oxz -площині в різні моменти часу після руйнування греблі. Ці результати свідчать, що в каналі утворюється інтенсивний спадаючий потік. Досягаючи виступу, він частково відбивається, генеруючи хвилю, яка рухається проти течії. При $t \approx 25 \text{ с}$ ця хвиля повертається до передньої стінки резервуару, відбивається від неї і потім рухається за течією. Висота вторинної хвилі

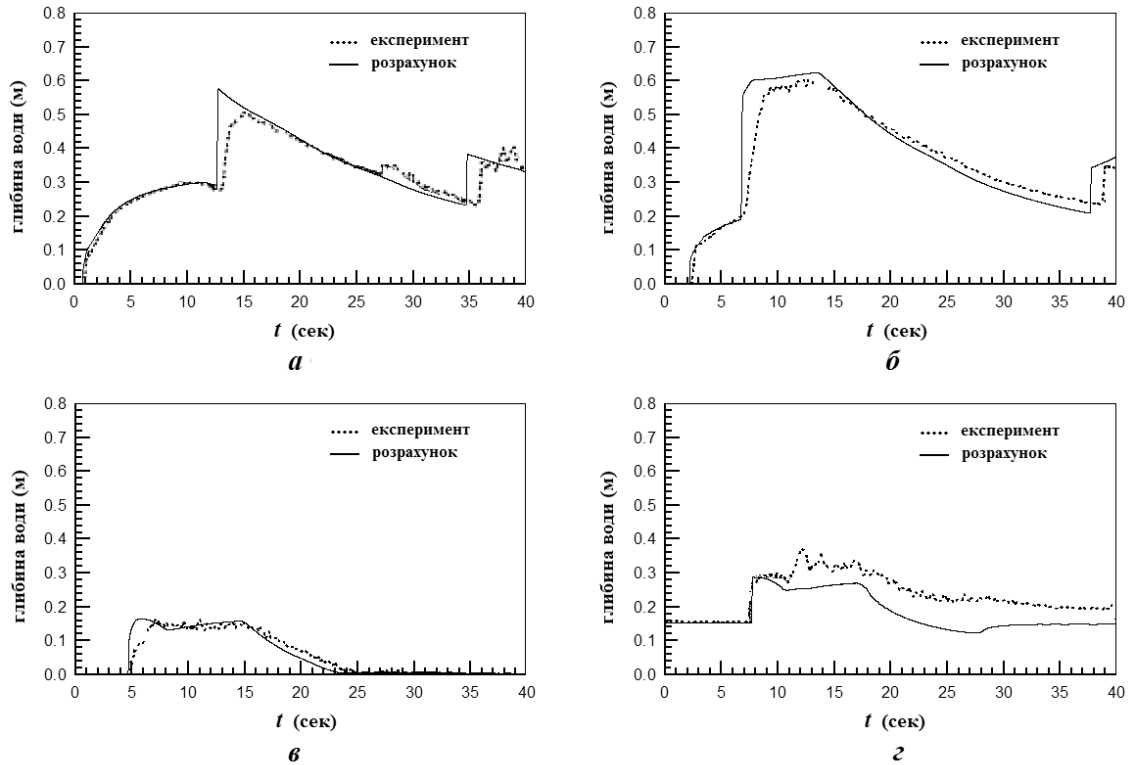


Рис. 17. Порівняння розрахованих залежностей глибини потоку від часу в точках гідрографу з експериментальними даними:
 a – в точці P_1 , $б$ – в точці P_2 , $в$ – в точці P_3 , $г$ – в точці P_4

істотно менша. Вона не може обігнути перешкоду і при $t \approx 40$ с повністю згасає. В тій частині основного потоку, який оминає виступ, утворюється гідравлічний стрибок, що вказує на закритичний характер течії в цій області. Тут також спостерігається хвиля, яка рухається вниз за течією. Одержані профілі вільної поверхні узгоджуються з результатами чисельного моделювання, які наведені в [46].

Виконане також порівняння одержаних результатів з даними фізичного експерименту, проведеного в рамках CADAM-проекту [45]. Для цього, як і в експериментальних дослідженнях, будувалися залежності глибини води від часу у фіксованих точках P_1 , P_2 , P_3 , P_4 розрахункової області (точках гідрографу). Їхнє розташування показано на рис. 15.

На рис. 17, a представлені гідрографічні дані, що відповідають точці P_1 , яка розташована перед виступом на відстані 4 м від резервуару. Видно, що при $t \approx 12$ с рівень води тут різко піднімається, що зумовлено проходженням відбитої від донної перешкоди хвилі. Інший помітний стрибок рівня поверхні при $t \approx 35$ с пов'язаний з відбиттям

від виступу вторинної хвилі. Аналогічні результати мають місце в точці P_2 , яка розташована біля підшви трикутного виступу (рис. 17, $б$). З рис. 17, $в$ випливає, що вершина перешкоди залишається змоченою протягом короткого проміжку часу від 5 до 23 с. Тут також спостерігаються коливання рівня води, зумовлені хвилювими процесами. Результати чисельного моделювання на рис. 17 a , $б$, $в$ добре узгоджуються з експериментальними даними, чого не можна сказати про залежність глибини від часу для точки P_4 , яка розташована за перешкодою. Тут вірно передбачається лише початкове зростання рівня води. Розбіжність між експериментальними і розрахунковими даними може бути пов'язана із впливом вихідної границі.

З одержаних результатів випливає, що потік, який розглядається, є дуже складним, у ньому проявляється взаємодія хвиль між собою, з дном і зі стінками каналу. Проведений аналіз показує, що чисельний алгоритм адекватно описує такі процеси, це свідчить про його здатність моделювати динаміку реальних річкових течій.

5.3. Моделювання течії на ділянці річки Дніпро

Представлений чисельний алгоритм був використаний для розрахунку гідродинамічних параметрів течії на ділянці річки Дніпро в межах міста Києва. Розрахункова область простягається приблизно на 3 км перед і за Дарницьким мостом (рис. 18). Зазначимо, що використані тут гідрологічні дані узяті з робіт [47 – 49].



Рис. 18. Положення області дослідження на карті

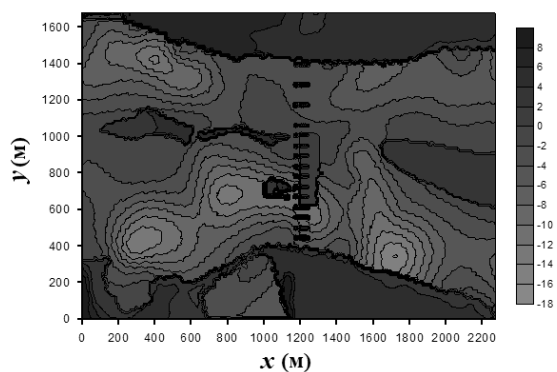


Рис. 19. Розподіл глибин в розрахунковій області

Форма дна (рис. 19) одержана натурними вимірами та із застосуванням геоінформаційної системи [47]. Як впливає з рис. 18, 19, особливості дослідження течії на цій ділянці зумовлені:

- складною формою дна, яка включає, зокрема, ями, утворені внаслідок видобутку піску;
- наявністю островів і мілин;

- складною формою берегової лінії;
- наявністю мостового переходу.

Течія моделювалася в умовах весняного паводку. Значення витрати і рівні води (які є вхідними даними математичної моделі) визначалися за даними багаторічних натурних спостережень. З хронологічного ходу максимального стоку Дніпра біля міста Києва [48] випливає, що за період з 1918 року по 2002 рік весняні витрати води тут коливалися в межах $2500 \text{v} 10000 \text{ м}^3/\text{с}$. Тому для більш повного прогнозування гідрологічної ситуації на заданій ділянці розрахунки проводилися при трьох значеннях витрати у вхідному перерізі:

$$Q = 10000, 5000, 2500 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Висота стовпа води оцінювалася на основі емпіричних залежностей рівня від витрати, одержаних у різні роки [48]. З них випливає, що при $Q = 10000 \text{ м}^3/\text{с}$ рівень води в середньому складав $w = 91.5 \text{ м} + 4 \text{ м}$, де 91.5 м – умовний рівень Київського моря. При $Q = 5000 \text{ м}^3/\text{с}$ і $Q = 2500 \text{ м}^3/\text{с}$ відповідно маємо: $w = 91.5 \text{ м} + 2.5 \text{ м}$ і $w = 91.5 \text{ м} + 0 \text{ м}$. Покладалося також, що початковий рівень води на ділянці, що розглядається, має ухил 5 см на 1 км . Оскільки течія аналізується на обмеженій ділянці русла, у вихідному перерізі накладалися вільні граничні умови як для складових витрати, так і для рівня води.

Значення коефіцієнтів шорсткості Маннінга у руслі Дніпра вираховані на основі даних натурних експериментів. З вимірів відміток води і зв'язків витрат та рівнів високої води під час піку повені 1970 року визначені наступні діапазони значень коефіцієнта шорсткості [49]:

- для руслових ділянок $n = 0.0125 \text{v} 0.025 \text{ с}/\text{м}^{1/3}$,
- для заплавлених ділянок $n = 0.045 \text{v} 0.055 \text{ с}/\text{м}^{1/3}$,
- для прибережних ділянок (глибина менше 1 м) $n = 0.08 \text{v} 0.09 \text{ с}/\text{м}^{1/3}$.

В цій роботі покладалося $n = 0.015 \text{ с}/\text{м}^{1/3}$ в русловому потоці, $n = 0.05 \text{ с}/\text{м}^{1/3}$ – на заплавах, $n = 0.08 \text{ с}/\text{м}^{1/3}$ – в прибережній зоні.

Розрахунки виконані на однорідній прямокутній сітці $\Delta x = \Delta y = 5 \text{ м}$ при $CFL = 0.25$. Задача розв'язувалася в нестационарній постановці, тобто розраховувався процес встановлення течії, починаючи із заданого стану при $t = 0$. Для визначення швидкості потоку в розрахункових точках вхідного перерізу по заданим загальній витраті і глибині води використовувалася формула (20) при $r = 2/3$.

На рис. 20 представлені одержані розподіли поздовжньої швидкості потоку на заданій ділянці русла при різних значеннях витрати. Ці результати показують, що на гідродинаміку течії впливають рельєф дна, геометрія берегової зони і наявність мостових опор. Швидкість потоку в лівобережно-

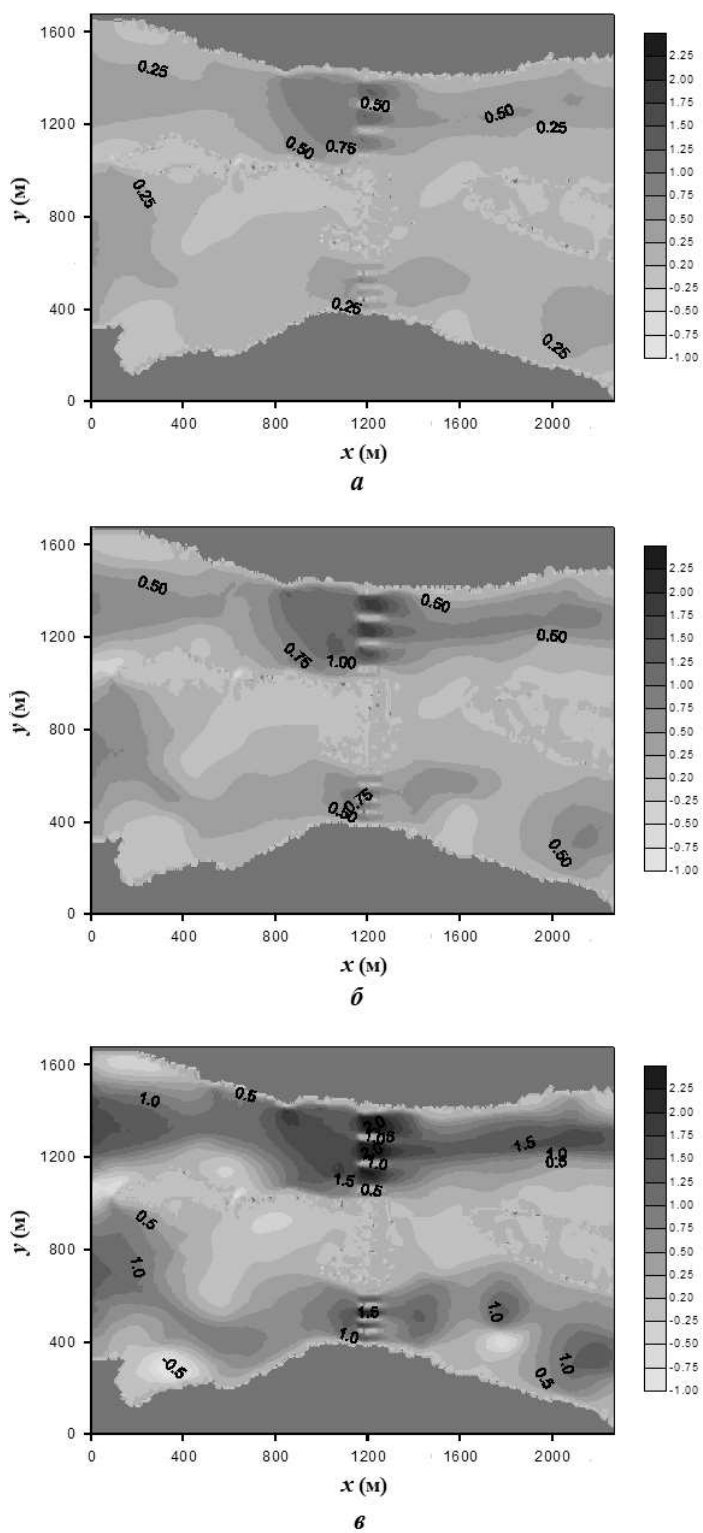


Рис. 20. Розподіл поздовжньої швидкості на заданій ділянці русла Дніпра при різних значеннях витрати:
 $a - Q = 2500 \text{ м}^3/\text{с}$, $б - Q = 5000 \text{ м}^3/\text{с}$, $в - Q = 10000 \text{ м}^3/\text{с}$

му річищі вища за швидкість з правого боку, де на дні розташовані глибокі ями, утворені внаслідок видобування піску. З наближенням до мостового переходу і за ним течія істотно прискорюється. Швидкість течії між опорами в лівобережній протоці при $Q = 10000 \text{ м}^3/\text{с}$ може досягати 2.25 м/с , а в правобережній – 0.75 м/с (рис. 20, в). Таке збільшення швидкості може викликати інтенсивний розмив дна поблизу мостових опор. Зроблені в розрахунках оцінки швидкості течії і рівнів підйому води дозволяють спрогнозувати розвиток гідродинамічної ситуації на заданій ділянці річки в різних умовах як природного характеру, так і пов'язаних з антропогенними навантаженнями.

ВИСНОВКИ

В цій роботі побудований чисельний метод для розв'язання рівнянь мілкої води, який ґрунтується на застосуванні центральної схеми другого порядку Курганова-Ноєля-Петрової [16]. Завдяки використанню характеристичної інформації при оцінці потоків консервативних змінних через границі елементарних об'ємів сітки та спеціальної функції-лімітера для розрахунку похідних від консервативних змінних, він належить до нелінійних TVD-схем з високою роздільною здатністю. Застосування кусково-лінійної апроксимації для функції дна робить цю схему одночасно і добре збалансованою, і такою, що зберігає додатні значення для глибини потоку у всій розрахунковій області. Зменшення чисельної дисипації досягається введенням антидифузійного члену в формі Курганова-Ліня [17].

Розроблений чисельний алгоритм використаний для моделювання одно- і двовимірних нестационарних гідравлічних течій, в тому числі тих, які утворюються при руйнуванні захисних берегових споруд. Порівняння результатів розрахунків з точними розв'язками, а також з відомими експериментальними і чисельними даними свідчить, що запропонована схема адекватно відтворює течії у відкритих каналах, включаючи докритичні, закритичні та перехідні потоки. Проведений аналіз результатів розрахунків показав, що побудований чисельний алгоритм:

- добре описує малі збурення вільної поверхні,
- дозволяє прогнозувати розповсюдження фронтів змочення на дні (wet/dry fronts),
- здатний зберігати стаціонарні гідравлічні розв'язки,
- адекватно описує генерацію хвиль при руйнуванні захисних споруд,
- дозволяє описувати гідравлічні течії в каналах і річках зі складною топографією дна, у тому числі

там, де є ділянки незмоченої донної поверхні.

Одержані в роботі гідродинамічні характеристики течії на заданій ділянці річки Дніпро в районі міста Києва показують, що побудована чисельна модель здатна описувати річкові течії реальних масштабів та прогнозувати їх розвиток.

1. Сухомел Г. И. Исследование гидравлики открытых русел и сооружений.– Киев: Наукова думка, 1965.– 112 с.
2. Гришанин К.В. Динамика русловых потоков.– Ленинград: Госметеоиздат, 1979.– 276 с.
3. Wu W. Computational river dynamics.– London: Taylor & Francis, 2008.– 487 p.
4. Zhang H., Nakagawa H., Muto Y., Touchi D., Muramoto Y. 2D numerical model for river flow and bed evolution based on unstructured mesh // J. of Applied Mechanics.– 9.– 2006.– P. 783-794.
5. Akanbi A., Katopodes N. Model of flood propagation on initially dry bed // J. Hydraulic Eng., ASCE.– 114.– N. 7.– 1988.– P. 689-706.
6. Fennema R.J., Chaudhry M.H. Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows // J. Hydraulic Res.– 27.– 1989.– P. 321-332.
7. Fennema R.J., Chaudhry M.H. Explicit methods for 2-D transient free-surface flows // J. Hydraulic Eng., ASCE.– 116.– N. 8.– 1990.– P. 1013-1034.
8. LeVeque R.J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems.– Cambridge: Cambridge University Press, 2002.– 295 p.
9. Годунов С.К. Разностный метод для численного решения уравнений гидродинамики с разрывами // Математический сборник.– Изд-во МГУ.– 1959.– С. 271-300.
10. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // J. Comput. Phys.– 43.– 1981.– P. 357-372.
11. LeVeque R.J., Relanti M. A class of approximate Riemann solvers and their relation to relaxation schemes // J. Comput. Phys.– 172.– 2001.– P. 572-591.
12. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Commun. Pur. Appl. Math.– 7.– 1954.– P. 159-193.
13. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys.– 87.– 1990.– P. 408-463.
14. Jiang G.S., Levy D., Lin C.T., Osher S., Tadmor E. High-resolution nonoscillatory central schemes with nonstaggered grids for hyperbolic conservation laws // SIAM J. Numer. Anal.– 35.– 1998.– P. 2147-2168.
15. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // J. Comput. Phys.– 160.– 2000.– P. 241-282.
16. Kurganov A., Noelle S., Petrova S. Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations // SIAM J. Sci. Comput.– 23.– N. 3.– 2001.– P. 707-740.
17. Kurganov A., Lin C.-T. On the reduction of numerical dissipation in central-upwind schemes // Commun. Comput. Phys.– 2.– N. 1.– 2007.– P. 141-163.

18. Kurganov A., Petrova G. A third-order semi-discrete genuinely multidimensional central scheme for hyperbolic conservation laws and related problems // J. Numer. Math.– 88.– 2001.– P. 683-729.
19. Kurganov A., Levy D. Third-order semi-discrete central scheme for conservation laws and convection-diffusion equation // SIAM J. Sci. Comput.– 22.– 2002.– P. 1461-1488.
20. Bryson S., Levy D. Balanced central schemes for the shallow water equations on unstructured grids // SIAM J. Sci. Comput.– 27.– 2.– 2005.– P. 532-552.
21. Yee H. C. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications // J. Comput. Phys.– 68.– 1987.– P. 151-179.
22. Louaked M., Hanich L. TVD scheme for the shallow water equations // J. Hydraulic Res.– 27.– 1989.– P. 321-332.
23. Greenberg J. M., Leroux A.Y. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations // SIAM J. Numer. Analysis.– 33.– 1996.– P. 1-16.
24. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes // Math. of Comput.– 67.– 1998.– P. 73-85.
25. Garcia-Navarro P., Brufau P., Burquete J., Murillo J. The shallow water equation: an example of hyperbolic system // Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza.– 31.– 2008.– P. 89-119.
26. Vukovich S., Sopta L. ENO and WENO schemes with the exact conservation property for one-dimensional shallow water equations // J. Comput. Physics.– 179.– 2002.– P. 593-621.
27. Levy D., Puppo G., Russo G. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws // Mathematical Modelling and Numerical Analysis.– 33.– 1999.– P. 547-571.
28. Christon M.A., Ketcheson D., Robinson A.C. An assessment of semi-discrete central schemes for hyperbolic conservation laws.– Sandia National Laboratory Report: SAND2003-3238, 2003.– 110 p.
29. Toro E.F. A weighted average flux method for hyperbolic conservation laws // Proceed. Royal Society. London. Ser A.– 432.– 1989.– P. 401- 418.
30. Fraccarollo L., Toro E.F. Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type // J. Comput. Physics.– 33.– 1995.– P. 843-864.
31. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Physics.– 49.– 1983.– P. 357-393.
32. Gottlieb S., Shu C.W., Tadmor E. Strong stability-preserving high order time discretization methods // SIAM Rev.– 43.– 2001.– P. 89-112.
33. Вольцингер Н. Е., Пясковский Р.В. Теория мелкой воды.– Ленинград: Гидрометеоздат, 1977.– 200 с.
34. Wu W. Depth-average two-dimensional numerical modeling of unsteady flow and nonuniform sediment transport in open channels // J. Hydraulic Eng.– 130.– N 10.– 2004.– P. 1013-1024.
35. Kurganov A., Levy D. Central-upwind schemes for the Saint-Venant system // ESAIM: M2AN.– 36.– 2002.– P. 397-425.
36. de Saint-Venant B. Theorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des riviere at al'introduction des marees dans leur lit. // C. R. Acad. Sci., Paris.– 73.– 1871.– P. 147-154.
37. LeVeque R. J. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm // J. Comput. Phys.– 146.– 1998.– P. 346-356.
38. Goeesse L. A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms // Int J. Computers and Mathematics.– 39.– 2000.– P. 135-159.
39. Gallouet T., Herard J.M., Sequin N. Some approximate Godunov schemes to compute shallow water equations with topography // J. Computers and Fluids.– 32.– 2003.– P. 479-513..
40. Audusse E., Bouchut F., Bristeau M.-O., Klein R., Perthame B. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic projection for shallow water flows // SIAM. J. Sci. Comput.– 75.– 2003.– P. 139-147.
41. Hing Y., Shu C.-W. High order finite difference WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations // J. Comput. Phys.– 208.– 2005.– P. 206-227.
42. Fennema R.J., Chaudhry M.H. Explicit methods for 2-D transient free-surface flows // J. Hydraulic Eng.– 116.– N 8.– 1990.– P. 1013-1034.
43. Caleffi V., Valliavi A., Zanni A. Finite volume method for simulation extreme flood events in natural channels // J. Hydraulic Res.– 41.– N 2.– 2003.– P. 167-177.
44. Wang J.S., Ni H.G., He Y.S. Finite-difference TVD scheme for computation of dam-break problems // J. Hydraulic Eng.– 126.– N 4.– 2000.– P. 253-262.
45. Morris M. Concerted action on dam-break modeling.– HR Wallingford: Rep. No SR 571, 2000.– 175 p.
46. Zhou J.G., Causon D.M., Mingham C.G., Ingram D.M. Numerical prediction of dam-break flows in general geometries with complex bed topography // J. Hydraulic Eng.– 130.– N 4.– 2004.– P. 332-340.
47. Островерх Б.М., Потапенко Л.С. Вирішення проблем розрахунку та проектування річкових та прибережних споруд з використанням методів ГІС та даних космічних зйомок // В кн.:Сучасні проблеми створення і ефективного використання єдиного геоінформаційного простору України при підготовці і прийнятті управлінських рішень.– Київ.– 2007.– С. 1-6.
48. Исследование изменения режима р. Днепр и перспективных методов добычи и транспортировки песка в Каневском водохранилище.– Киев: Отчет ИГМ АН УССР, 1988.– 250 с.
49. Проведення гідрологічних розрахунків та вивчення впливу механізованого видобутку піску на руслові процеси р. Дніпро на ділянці, прилеглій до Дарницького залізничного мосту, з метою його безпечної експлуатації.– Київ: Звіт ІГМ НАН України, 2010.– 104 с.