

УДК 532.528

ЧИСЛЕННЫЙ И АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Л. Г. ГУЗЕВСКИЙ

*Сибирский университет потребительской кооперации, Новосибирск, Россия**630087, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, д. 26.**guzevsky@mail.ru**Получено 26.10.2012*

В работе проводится обзор исследований автора стационарных осесимметричных задач кавитационного обтекания тел потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Построение приближенного аппроксимационного решения в аналитическом виде осуществляется с использованием результатов серийных численных решений задачи. В качестве примера использования предлагаемого подхода построено аппроксимационное решение задачи Рябушинского для кавитаторов в форме диска и конуса. В широком диапазоне изменения числа кавитации вычисления всех интегральных и локальных характеристик течения по предложенным аппроксимационным зависимостям приводят к результатам, незначительно отличающимся от результатов численных решений задачи на основе точной нелинейной постановки.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: осесимметричные каверны, задача Рябушинского, численный анализ, принцип соответствия, аппроксимационное решение

В роботі проводиться огляд досліджень автора стаціонарних осесиметричних задач кавітаційного обтікання тіл потенціальним потоком ідеальної нестисливої рідини. Побудова наближеного апроксимаційного розв'язку в аналітичному вигляді здійснюється з використанням результатів серійних чисельних розв'язків задачі. В якості прикладу використання запропонованого підходу був побудований апроксимаційний розв'язок задачі Рябушинського для кавітаторів у формі диска і конуса. В широкому діапазоні чисел кавітації обчислення всіх інтегральних і локальних характеристик течії за запропонованими апроксимаційними залежностями приводять до результатів, що несуттєво відрізняються від результатів чисельних розв'язків задачі на основі точної нелінійної постановки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: осесиметричні каверни, задача Рябушинського, чисельний аналіз, принцип відповідності, апроксимаційне рішення

A review of author's researches of a steady axially symmetric potential cavity flows of ideal incompressible fluid is presented. Construction of an approximate solution in closed form is carried by using the results of series numerical solutions of the problem. As an example of the proposed approach approximation analytic solution of the Riabouchinsky problem for a disk and a cone are given. In a wide range of cavitation number the integral and local characteristics of the cavity flow, calculated by the proposed approximation dependencies lead to the results that differ insignificantly from the results of our numerical solution based on the exact nonlinear formulation.

KEY WORDS: axially symmetric cavities, Riabouchinsky problem, numerical analysis, conformity principle, approximate solution

ВВЕДЕНИЕ

Основная трудность получения контролируемых по точности численных решений осесимметричных задач кавитационного обтекания тел при малых значениях числа кавитации, которым соответствуют каверны большого удлинения, связана, в первую очередь, с существенной трудностью выполнения с высокой точностью краевого условия постоянства давления (величины скорости для невесомой жидкости) вдоль искомой границы каверны. Небольшие погрешности при выполнении этого условия могут приводить к существенной погрешности искомого решения. Так, двум значениям числа кавитации $\sigma = 0.01$ и $\sigma = 0.005$ соответствуют длины каверн за диском, отличающиеся более чем в два раза, в то время как отличие в соответствующих постоянных величинах скоростей вдоль границ каверн не превышает 0.25%.

Дополнительные трудности, возникающие при численном решении задач о кавитационных течениях, связаны также с особым характером поведения решения в точках отрыва каверны. Кривизна свободной линии тока в точках фиксированного отрыва потока обращается в бесконечность (за исключением случая гладкого отрыва). Также обращается в бесконечность и ускорение в конечной точке образующей кавитатора.

При численном решении рассматриваемых задач со свободными границами методом вихревого слоя все характерные особенности, присущие осесимметричной задаче, имеют место и при решении плоской задачи. Численное решение этих задач осуществляется в рамках единого алгоритма [1].

При проведении модельных испытаний в гидродинамических установках некоторые условия подбора трудно выполнимы. К числу важных и тру-

дних вопросов при анализе результатов экспериментов в кавитационных трубах относится вопрос о соответствии результатов экспериментов в лабораторных условиях натурным течениям с развитой кавитацией. Ограниченные возможности экспериментальных методов исследований ограничивают также и применимость эмпирических подходов, что приводит к необходимости изучения течений такого типа с помощью теоретических методов.

Значительное влияние на развитие теоретических методов исследования пространственных кавитационных течений оказал предложенный Г.В.Логвиновичем принцип независимости расширения каверны [2]. Многочисленные применения этого приближенного подхода позволили решить ряд важных прикладных задач.

В ряде работ приведены результаты расчетов осесимметричных кавитационных течений, полученные со значительными вычислительными погрешностями. Такого рода численные решения наибольший вред приносят в тех случаях, когда на их основе “открываются” новые закономерности кавитационных течений. В работе [1] приведено доказательство несостоятельности заключения авторов статей [3, 4] о существовании некоторого оптимального конического кавитатора с минимальным сопротивлением в классе кавитаторов в форме конуса. Погрешность численного решения, представленного в этих работах, в несколько раз превышает диапазон изменения функции, в котором отыскивается ее экстремум.

Сопоставление результатов экспериментальных исследований кавитационного режима обтекания тел канонической формы (конуса, диска, сферы), полученных на различных гидродинамических установках, обнаруживает в ряде случаев их значительное отличие, которое объясняется различными условиями проведения экспериментов. Некоторые результаты, полученные в условиях ограниченного потока, без соответствующего обоснования рекомендуются для применения в случае безграничного потока. Это обстоятельство привело к наличию в литературе различных эмпирических формул для длины каверны, расчет по которым дает существенно отличающиеся результаты.

Одна из причин, ограничивающих применение гидродинамических труб с закрытым рабочим участком для исследования кавитационных течений, связана с существенным влиянием стенок трубы на размеры каверны особенно при рассмотрении режимов обтекания при малых числах кавитации. Использование гидродинамических труб со свободной струей позволяет в значительной ме-

ре уменьшить эффекты ограниченности потока и также рассмотреть кавитационные течения при весьма малых числах кавитации [2].

Математическое моделирование условий, при которых проводятся экспериментальные исследования кавитационных течений в лабораторных установках, является весьма актуальной задачей. В этом направлении автором рассмотрены задачи кавитационного обтекания тел в цилиндрических гидродинамических трубах [5], в гидродинамических трубах со свободной струей [6], задача о влиянии державки на параметры каверны [7], влияние продольного поля силы тяжести на параметры кавитационного обтекания осесимметричных тел [8, 9].

Способ графического представления результатов численных решений имеет ряд существенных недостатков. Наиболее эффективным является способ представления результатов расчетов в форме аналитических зависимостей. Такой подход применительно к осесимметричным задачам кавитационного обтекания конусов реализован в работах [10, 11].

В процессе разработки численного метода расчета задач со свободными границами поиск переменных аппроксимации, при использовании которых искомые функции близки к линейным функциям, позволил обнаружить интересное и неизвестное ранее свойство геометрии образующих плоских и осесимметричных каверн, названного принципом соответствия. Согласно этому принципу, для широкого класса кавитаторов каждому осесимметричному кавитационному течению Рябушинского можно поставить в соответствие некоторое плоское течение таким образом, что отличие их образующих будут незначительным.

На основе этого принципа удалось получить приближенное решение задачи о форме образующей осесимметричной каверны за конусом с помощью точного профиля каверны за клином, которое с весьма высокой степенью точности аппроксимирует результаты численных расчетов на основе точной постановки задачи [11]. В дальнейшем принцип соответствия был обобщен на кавитаторы с криволинейной образующей [12]. В частности, рассмотрены задачи о нахождении в явном аналитическом виде формы образующих каверн Рябушинского за усеченными телами вращения сферической и эллиптической формы. Принцип соответствия применим также и в случае ограниченного потока [13].

В работе [15] получено высокоточное приближенное решение в аналитическом виде задачи Рябушинского для диска в широком диапазоне изме-

нения числа кавитации. В аналитическом виде представлены зависимости коэффициентов сопротивления и присоединенной массы диска, размеров каверны и ее объема от числа кавитации. Также получено распределение скорости вдоль образующей диска и форма образующей каверны.

Метод численного решения плоских и осесимметричных кавитационных течений изложен в работах [1, 10, 14]. Опишем кратко принцип соответствия плоских и осесимметричных кавитационных течений.

1. ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ

На рис. 1 приведена схема рассматриваемого кавитационного течения Рябушинского для кавитатора с криволинейной образующей. Для плоского потока изображена симметричная часть течения в верхней полуплоскости, а для течения с осевой симметрией – его меридиональное сечение. Течение предполагается симметричным относительно вертикали, проходящей через мидель каверны.

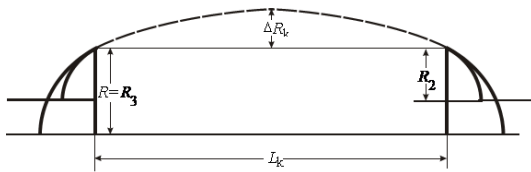


Рис. 1. Схема принципа соответствия плоских и осесимметричных кавитационных течений

Пусть в результате численного решения определена форма образующей осесимметричной каверны. Поставим в соответствие данному осесимметричному кавитационному течению в меридиональном сечении плоское течение Рябушинского за соответствующим кавитатором таким образом, чтобы в плоском и осесимметричном случаях совпали длины каверн L_k и величины максимальных возвышений образующих каверн $\Delta R_k = R_k - R$ над уровнем точек отрыва каверн (рис. 1). Решение соответствующей плоской задачи необходимо построить при той же величине параметра $\delta = L_k / (2\Delta R_k)$, которая получена в результате расчета осесимметричной задачи. В такой постановке как величина числа кавитации плоской задачи $\sigma = \sigma_2$ и поперечный размер $2R_2$ кавитатора должны определяться в результате решения плоской задачи.

Таким образом, образующие плоской и осесимметричной каверн совпадают только в двух точках: точке отрыва свободной границы и в миделе

каверны. За счет выбора числа кавитации σ_2 плоской задачи такое построение всегда удается осуществить единственным образом для кавитаторов различных форм.

Наиболее просто такого рода построение осуществляется для кавитаторов с прямолинейной образующей, так как в этом случае точное решение задачи кавитационного обтекания клина по схеме Рябушинского выстраивается в аналитическом виде с использованием классического аппарата краевых задач для аналитических функций. Такого рода решение приведено, например, в работе [1]. Форма границы каверны за клином, угол при вершине которого равен $2\alpha\pi$, в декартовой системе координат с началом в точке отрыва представляется в следующем параметрическом виде [1]:

$$\begin{cases} x(s) = \Delta R_k \frac{I_x(s)}{I_y(\pi)}, \\ y(s) = \Delta R_k \frac{I_y(s)}{I_y(\pi)}, \end{cases} \quad 0 \leq s \leq \pi, \quad (1)$$

где

$$I_x(s) = \int_0^s T(c, s) \cos \alpha(\pi - s) ds,$$

$$I_y(s) = \int_0^s T(c, s) \sin \alpha(\pi - s) ds, \quad 0 \leq s \leq \pi,$$

$$T(c, s) = \frac{\sin(s/2)}{(1 + 2c \cdot \cos s + c^2)^{3/2}}, \quad c = (1 + \sigma_2)^{-\frac{1}{2\alpha}}.$$

Согласно принципу соответствия, уравнение образующей осесимметричной каверны за конусом, угол при вершине которого также равен $2\alpha\pi$, задается уравнением (1) каверны за клином при числе кавитации плоской задачи σ_2 , значение которого определяется из условия идентичности параметра δ в плоской и осесимметричной задачах:

$$\delta - \frac{I_x(\pi)}{I_y(\pi)} = 0. \quad (2)$$

В случае вертикальной пластины ($\alpha = 1/2$) в результате вычисления интеграла в (1) получим следующее выражение функции $y(s)$:

$$y(s) = \Delta R_k \frac{1 - c^2}{2c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2c \cdot \cos s + c^2}} - \frac{1}{1 + c} \right), \quad 0 \leq s \leq \pi. \quad (3)$$

Для каждого значения параметра δ параметр σ_2 можно находить численно как корень уравнения

(2) или воспользоваться аппроксимационным решением высокой точности, представленным в работе [12] в следующем виде:

$$\sigma_2 = \frac{1}{\delta^2 \alpha^2} \left(2(\delta - \delta_{\min})\alpha^2 + 2.246\alpha^2 + 2.359\alpha + 0.035 - \frac{3.202\alpha^2 - 4.885\alpha + 0.304}{\delta - \delta_{\min}} \right), \quad (4)$$

где

$$\delta_{\min} = \frac{\cos \alpha \pi}{\sin \alpha \pi - 2\alpha} -$$

точное минимальное значение параметра δ для предельного течения при $\sigma = \infty$ ($c = 0$) с бесконечной длиной щеки клина. Это решение является также предельным и для осесимметричного случая. В данном предельном случае при $\alpha = 1/2$ ($\delta_{\min} = \pi/2$) получим простое представление формы свободной поверхности:

$$x(s) = \frac{L_k}{2\pi}(s - \sin s) \equiv \delta \cdot \Delta R_k \frac{s - \sin s}{\pi}, \quad (5)$$

$$y(s) = \Delta R_k \cdot \sin^2 \frac{s}{2} \equiv \Delta R_k \cdot u, 0 \leq s \leq \pi. \quad (6)$$

Результаты численных расчетов кавитационного обтекания конусов, выполненных в широком диапазоне изменения числа кавитации и угла при вершине, указывают на достаточно высокую точность аппроксимации формы образующей осесимметричной каверны профилем (1) плоской каверны за клином. В качестве примера в таблице 1 приведены данные численного и аппроксимационного решений, полученного согласно принципу соответствия, в задаче кавитационного обтекания конуса.

Таблица 1. Погрешность аналитического представления (1) формы образующей каверны за 60° конусом ($\alpha = 1/6$) при $\sigma = 0.1$

x/R	$(y/R)_{\text{числ}}$	y/R по (1)
0.045	0.023	0.023
0.287	0.123	0.122
1.141	0.428	0.425
3.322	0.733	0.730
7.249	1.033	1.033
9.933	1.085	1.085

Как показывают результаты численного эксперимента, форму образующей каверны Рябушинского за диском с достаточно высокой точностью можно представить в параметрическом виде (5), (6) в диапазоне относительно больших значений числа кавитации: $0.3 \leq \sigma \leq \infty$.

Приближенное решение задачи о форме образующей каверны Рябушинского за конусом выстраивается в явном виде (1), где число кавитации σ_2 плоской задачи определяется по аппроксимационной формуле (4) или в результате численного решения уравнения (2).

Принцип соответствия также применим и в случае препятствий с криволинейной образующей (рис. 1) [12]. Форму образующей осесимметричной каверны за телом с криволинейной образующей можно с достаточно высокой точностью аппроксимировать некоторым уравнением плоской каверны за аналогичным криволинейным препятствием. Однако ввиду отсутствия точных решений для плоских задач кавитационного обтекания криволинейных препятствий эффективность такого подхода существенно снижается. В то же время, результаты численных экспериментов показывают, что образующую осесимметричной каверны за криволинейным кавитатором также можно приблизить профилем (1) каверны за клином с полууглом $\alpha\pi$ при вершине, равным углу наклона касательной к препятствию в точке отрыва. Таким образом, основными параметрами, определяющими форму осесимметричной каверны, являются параметр δ и угол схода $\alpha\pi$ свободной линии тока в точке отрыва.

Следовательно, для полного решения задачи аналитического представления формы образующей осесимметричной каверны достаточно построить аппроксимационные формулы, определяющие зависимости размеров каверны от числа кавитации. Данная задача решается на основе обработки методом наименьших квадратов результатов численного решения задачи кавитационного обтекания осесимметричных тел на основе точной нелинейной постановки [1, 10, 14].

2. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Систематизация результатов численных решений задачи кавитационного обтекания конусов позволила построить аппроксимационные формулы высокой точности для интегральных характеристик течения: длины, максимального диаметра каверны и коэффициента сопротивления конуса в зависимости от числа кавитации σ и угла конусности $2\alpha\pi$ в представляющем наибольший интерес для приложений диапазоне малых значений числа кавитации.

Первые аппроксимационные формулы построены для важного класса кавитаторов в форме кону-

сов [10, 11]. Для коэффициента сопротивления конуса, определенного по площади основания конуса в плоскости схода каверны, приближенная формула имеет вид

$$C_x = 0,5 + 1,81(\alpha - 0,25) - 2(\alpha - 0,25)^2 + (0,524 + 0,672\alpha)\sigma \equiv C_{x_0} + m(\alpha)\sigma \quad (7)$$

в диапазонах $\sigma \leq 0.25$ и $1/12 \leq \alpha \leq 1/2$.

Отсюда для диска при $\alpha = 1/2$ получим следующую формулу:

$$C_x = 0.8275 + 0.86\sigma.$$

Общепринятая структура формулы для максимального радиуса каверны за кавитатором произвольной формы записывается в виде [2]:

$$\frac{R_k}{R} = \sqrt{\frac{C_x}{k(\sigma)\sigma}}. \quad (8)$$

Входящая в формулу (8) функция $k(\sigma)$, практически не зависящая от формы кавитатора, аппроксимирована в работе [10] на основе результатов численных расчетов задачи кавитационного обтекания серии конусов с углом при вершине $30^\circ \div 180^\circ$ в диапазоне $0.01 \leq \sigma \leq 0.25$:

$$k(\sigma) = \frac{1 + 50\sigma}{1 + 1,56, 2\sigma}. \quad (9)$$

Более точная аппроксимационная формула

$$k(\sigma) = 0.0000772\nu^4 - 0.0015103\nu^3 + 0.009355\nu^2 - 0.009\nu + 0.89111, \quad (10)$$

где

$$\nu = \ln \frac{1}{\sigma},$$

получена в работе [15].

Длина каверны за конусом с углом при вершине 2α определяется по приближенной формуле [11]:

$$\frac{L_k}{2R} = \left[\frac{1,1}{\sigma} - g(\alpha) \right] \sqrt{C_x \ln \frac{1}{\sigma}},$$

$$g(\alpha) = \frac{4(1 - 2\sigma)}{1 + 144\alpha^2}. \quad (11)$$

Параметр δ очевидным образом выражается через число кавитации σ с помощью предыдущих формул посредством соотношения

$$\delta = \frac{L_k}{2R} \left(\frac{R_k}{R} - 1 \right)^{-1}. \quad (12)$$

Отметим, что введенный параметр $\delta = L_k/(2\Delta R_k)$ связан только с параметрами каверны

в отличие от удлинения каверны $\lambda = L_k/(2R_k)$, которое зависит от размеров кавитатора.

Полученные аппроксимационные формулы для коэффициента сопротивления конуса (7), размеров каверны за ним (8),(11), а также аппроксимационная формула (4) для “эквивалентного” числа кавитации σ_2 плоской задачи позволяют представить приближенное решение задачи о форме каверны Рябушинского за конусом в явном аналитическом виде (1).

В работе [15] для кавитатора в форме диска приближенное решение задачи Рябушинского представлено в аналитическом виде в широком диапазоне изменения числа кавитации.

Коэффициент сопротивления диска вычисляется по формуле:

$$C_x = 0.8272(1 + \sigma) (1 + 0.035\sigma - 0.0035\sigma^2). \quad (13)$$

Максимальная погрешность результатов, получаемых по этой формуле, по отношению к “точным” результатам численных расчетов не превышает 0.08% в диапазоне $0 \leq \sigma \leq 3$.

В диапазоне $0.001 \leq \sigma \leq 0.1$ удлинение каверны определяется по формуле

$$\lambda(\sigma) = 1.075\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} + 0.0654\nu + 1.465\sigma - 0.4612,$$

а в диапазоне $0.1 < \sigma \leq 3$ – по формуле

$$\lambda(\sigma) = \sqrt{\frac{k(\sigma)}{\sigma}} (-0.0117\nu^3 + 0.04077\nu^2 + 0.3579\nu + 0.7637). \quad (14)$$

Длина каверны L_k находится с учетом формул (8),(13), (14):

$$\frac{L_k}{2R} = \lambda \frac{R_k}{R}. \quad (15)$$

Приведенные в таблице 1 данные характеризуют точность аппроксимации результатов численного решения задачи Рябушинского для кавитатора в форме диска. В рассмотренном диапазоне изменения числа кавитации длина каверны изменяется приблизительно в 10000 раз.

Представляет интерес вопрос сопоставления результатов вычислений по предложенным аппроксимационным формулам с данными расчетов по приближенным формулам других авторов.

В диапазоне относительно больших значений числа кавитации $0.15 \leq \sigma \leq 1$ в работе [16] предложены следующие формулы:

$$\frac{R_k}{R} = 0.96034 + 0.08936\sigma^{-1} \ln \sigma + 0.42422\sigma^{-1}, \quad (16)$$

$$\frac{L_k}{R} = 0.20970 + 0.60585\sigma^{-1} \ln \sigma + 1.78362\sigma^{-1}. \quad (17)$$

Таблица 2. Погрешности аппроксимационных формул (8), (10), (13)–(15) для течения Рябушинского за диском по отношению к результатам численных расчетов

σ	$C_x, \%$ по (13)	$k, \%$ по (10)	$\frac{R_k}{R}, \%$ по (8)	$\frac{L_k}{2R}, \%$ по (15)
0.001	-0.02	0.0003	-0.01	-0.001
0.005	0.04	-0.04	0.04	-0.004
0.01	0.02	-0.02	0.02	0.009
0.05	-0.01	0.06	-0.002	0.004
0.1	-0.05	0.02	-0.04	-0.001
0.2	-0.08	-0.08	-0.1	0.001
0.3	-0.09	-0.12	-0.1	0.06
0.4	-0.08	-0.13	-0.08	0.06
0.5	-0.07	-0.12	-0.05	0.03
1	0.003	0.01	0.03	-0.08
1.5	0.02	0.09	0.02	0.006
2	0.01	0.07	-0.01	0.1
2.5	0.002	-0.02	-0.001	0.04
3	0.03	-0.16	0.03	-0.26

Наибольшее распространение получили асимптотические ($\sigma \rightarrow 0$) формулы П. Гарабедяна [17]:

$$\frac{R_k}{R} = \sqrt{\frac{C_x}{\sigma}}, \quad (18)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{\sigma} \ln \frac{1}{\sigma}}. \quad (19)$$

Для удлинения каверны в работе [18] предложена более точная асимптотическая формула:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{1}{\sigma} + \ln \ln \frac{1}{\sigma} - 1 \right)}. \quad (20)$$

Впервые формулы для размеров осесимметричной каверны предложил Н. Рейхардт [17]:

$$\frac{R_k}{R} = \sqrt{\frac{C_x}{(1 - 0.132\sqrt{\sigma})\sigma}}, \quad (21)$$

$$\lambda = \frac{\sigma + 0.008}{\sigma(0.066 + 1.7\sigma)}. \quad (22)$$

Для кавитатора в форме диска для малых значений числа кавитации Г. В. Логвинович [2] представил приближенные формулы в следующем виде:

$$\frac{R_k}{R} = \sqrt{\frac{0.84(1 + \sigma)}{\sigma}}, \quad (23)$$

$$\lambda = \frac{1.92 - 3\sigma}{\sqrt{0.84\sigma(1 + \sigma)}}. \quad (24)$$

На основе обработки экспериментальных данных в диапазоне $\sigma = 0.01 \div 0.05$ авторы работы [19] предложили для размеров каверны соотношения:

$$\frac{R_k}{R} = \sqrt{3.659 + \frac{0.761}{\sigma}}, \quad (25)$$

$$\lambda = \frac{3.595 + 4\sigma}{2\sqrt{(0.761 + 3.659\sigma)\sigma}}. \quad (26)$$

В таблицах 3, 4 представлены результаты вычисления размеров каверны за диском по различным приближенным формулам. Дополнительно, во втором столбце таблиц приведены результаты численного решения [20] на основе точной нелинейной постановки задачи Рябушинского.

Как следует из данных таблиц 3, 4, асимптотические формулы Гарабедяна (18), (19) дают заниженные значения величин R_k/R и λ для всего рассмотренного диапазона изменения числа кавитации σ . Следовательно, вычисления размеров каверны по широко используемым в литературе формулам Гарабедяна могут привести к значительным ошибкам даже при малых величинах числа кавитации σ .

Вычисления по предложенным формулам дают наиболее точные результаты, практически совпадающие с данными наших численных расчетов (табл. 2), на основе которых они были построены, а также с результатами численного расчета Кожуро [20] (табл. 3, 4) в широком диапазоне изменения числа кавитации.

В работе [15] представлено более простое по отношению к (1) параметрическое представление формы образующей каверны Рябушинского за диском:

$$\begin{cases} \frac{2x(s)}{\Delta R_k} = \frac{L_k}{2} \left(s - \frac{\sin s\pi}{\pi} \right), \\ \frac{y(s)}{\Delta R_k} = s^2(3 - 2s - (1 - s)^2) \times \\ \times (a_0 + a_1 + a_2 s^2), \quad 0 \leq \sigma \leq 1. \end{cases} \quad (27)$$

Коэффициенты аппроксимации как функции параметра $\nu = \ln \frac{1}{\sigma}$, получены по методу наименьших квадратов на основе результатов численного решения задачи в точной нелинейной постановке:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.01162\nu^3 - 0.2087\nu^2 + 0.0841\nu + 0.3949, \\ a_1 &= -0.0116\nu^3 + 0.4085\nu^2 - 0.8481\nu - 0.9243, \\ a_2 &= -0.0055\nu^3 + 0.2098\nu^2 + 0.7206\nu - 0.0865. \end{aligned} \quad (28)$$

Максимальная погрешность результатов, получаемых по данной формуле, по отношению к

результатам численных решений не превышает 0.06% в диапазоне $0.01 \leq \sigma \leq 0.5$. К числу достоинств данной формулы следует отнести простоту ее структуры, учет особого характера поведения решения в точке отрыва ($s = 0$) – обращение в бесконечность кривизны образующей каверны.

Аппроксимационная формула для объема Q каверны Рябушинского за диском представлена в работе [15] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \frac{Q}{\pi R^2 L_k} = \\ &= \frac{C_x}{3\sigma(0.3306 - 0.0424\nu - 0.0035\nu^2)}. \end{aligned} \quad (29)$$

С использованием точной зависимости П.Гарабедеяна [17]

$$\frac{M}{Q} = \sigma - \frac{C_x}{3\bar{Q}},$$

связывающей коэффициент сопротивления C_x , число кавитации σ , объем каверны Q и присоединенную массу M для кавитатора в форме конуса (диска), построенная аппроксимационная формула (29) для объема каверны позволила получить формулу для коэффициента присоединенной массы диска $\lambda_1 = M/Q$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sigma \cdot (0.0035\nu^2 - 0.0424\nu + 0.6694), \\ \nu &= \ln \frac{1}{\sigma}. \end{aligned} \quad (30)$$

3. ВЛИЯНИЕ ДЕРЖАВКИ НА ПАРАМЕТРЫ

В инженерной практике возникает задача оценки влияния державки, с помощью которой иногда устанавливаются модели в рабочей части гидродинамической трубы, на режим кавитационного обтекания [7, 21]. Данную задачу может моделировать режим кавитационного обтекания с замыканием каверны на теле, форма границы которого на среднем участке близка к цилиндрической.

Аналитическая зависимость величины площади поперечного сечения возвратной струи S_δ при моделировании режима кавитационного течения по схеме Эфроса от числа кавитации σ , площади поперечного сечения державки S_h и площади поперечного сечения препятствия S_R в плоскости схода каверны имеет следующий вид:

$$\frac{S_\delta}{S_R} = \frac{C_x - \sigma S_h / S_R}{2(1 + \sigma + \sqrt{1 + \sigma})}. \quad (31)$$

Данная формула обобщает известную формулу Г. Биркгофа [22] для толщины обратной струи при отсутствии державки ($S_h = 0$). В другом предельном случае для максимальной величины S_h , когда выполняется соотношение

$$\frac{S_h}{S_R} = \frac{C_x}{\sigma},$$

приходим к течению Жуковского – Рошко, при котором возвратная струя отсутствует ($S_\delta = 0$) и максимальные площади поперечных сечений державки S_h и каверны S_k совпадают: $S_k = S_h$.

Как показывают результаты численного анализа точного решения задачи кавитационного обтекания клина по схеме Эфроса коэффициент сопротивления C_x клина при фиксированном значении числа кавитации практически не зависит от величины S_h для фиксированного значения числа кавитации. Следовательно, зависимость $C_x = C_x(\sigma)$ можно получить на основе данных решения задачи при отсутствии державки ($S_h = 0$). В то же время, при фиксированном числе кавитации величина коэффициента сопротивления также практически не зависит от выбора схемы обтекания. Продемонстрируем данное обстоятельство на примере решения задачи кавитационного обтекания вертикальной пластины по схеме Эфроса.

Аппроксимационную формулу для коэффициента сопротивления C_x пластины, обтекаемой по схеме Рябушинского, можно представить в следующем виде [15]:

$$C_x(\sigma) = \frac{2\pi}{4 + \pi} (1 + \sigma(1 + 0.0178\sigma - 0.0017\sigma^2)). \quad (32)$$

Максимальная погрешность результатов, получаемых по данной формуле, не превышает 0,02% в диапазоне $0 \leq \sigma \leq 3$.

В таблице 5 проводится сравнение результатов данных для относительной толщины обратной струи при различных значениях радиуса державки h , полученных на основе точного решения задачи о кавитационном обтекании вертикальной пластины по схеме Эфроса, и по формуле (31), которую в плоском случае запишем в виде

$$\frac{\delta}{R} = \frac{C_x - \sigma h / R}{2(1 + \sigma + \sqrt{1 + \sigma})},$$

где коэффициент сопротивления C_x пластины задается аппроксимационной формулой (32).

Практическое совпадение результатов приближенного решения, определяемого по формуле (31), с результатами точного решения может служить обоснованием применимости формулы (32) и в

Таблиця 3. Данні для максимального радіуса каверни R_k/R за диском

	Кожуро	Киселев	Гузевский	Гарабедян	Рейхардт	Логвинович	Савченко и др.
σ	числ.	(16)	(8),(10), (13)	(18)	(21)	(23)	(23)
0,001	-	-	29,47	28,78	-	-	-
0,005	-	-	13,28	12,90	-	-	-
0,01	-	-	9,45	9,14	9,20	9,21	8,93
0,0244	6,12	-	6,13	5,90	5,96	5,94	5,90
0,0315	5,42	-	5,43	5,21	5,27	5,24	5,27
0,0370	5,02	-	5,03	4,82	4,88	4,85	4,92
0,0450	4,58	-	4,58	4,39	4,45	4,42	4,53
0,0505	4,34	-	4,34	4,15	4,21	4,18	4,33
0,0676	3,79	-	3,79	3,62	3,68	3,64	-
0,0819	3,47	-	3,48	3,31	3,37	3,33	-
0,1048	3,11	-	3,11	2,96	3,02	2,98	-
0,1477	2,68	2,68	2,68	2,54	2,61	2,56	-
0,2636	2,12	2,12	2,12	2,00	2,07	2,01	-
0,4673	1,72	1,72	1,72	-	-	-	-
0,9951	1,38	1,39	1,39	-	-	-	-

Таблиця 4. Данні для удлиннения $\lambda = L_k/(2R_k)$ каверны за диском

	Кожуро	Киселев	Гузевский	Гарабедян	Серебряков	Рейхардт	Логвинович	Савченко и др.
σ	числ.		(8), (13-15)	(17)	(18)	(20)	(22)	(24)
0,001	-	-	89,34	83,11	88,55	-	-	-
0,005	-	-	34,89	32,55	34,54	34,90	-	-
0,01	-	-	22,92	21,46	22,65	21,69	20,52	20,35
0,0244	13,06	-	13,08	12,34	12,84	12,35	12,74	12,82
0,0315	11,07	-	11,07	10,48	10,84	10,49	11,05	11,20
0,0370	9,96	-	9,96	9,44	9,71	9,44	10,08	10,28
0,0450	8,74	-	8,73	8,30	8,48	8,27	8,98	9,25
0,0505	8,07	-	8,07	7,69	7,81	7,63	8,38	8,69
0,0676	6,60	-	6,60	6,31	6,30	6,18	6,97	-
0,0819	5,76	-	5,76	5,53	5,43	5,35	6,14	-
0,1048	4,82	-	4,83	4,64	4,44	4,41	5,15	-
0,1477	3,73	3,76	3,74	-	-	-	3,91	-
0,2636	2,36	2,37	2,37	-	-	-	-	-
0,4673	1,45	1,45	1,45	-	-	-	-	-
0,9951	0,72	0,72	0,72	-	-	-	-	-

случае кавитационных течений с осевой симметрией.

Таблица 5. Сопоставление вычислений толщины обратной струи по формулам (31), (32) для $\sigma = 0.3$ с результатами точного решения задачи

h/R	$(\delta/R)_{\text{точн.}}$	$(\delta/R)_{\text{анпр.}}$
0	0.2336	0.2336
0.5	0.2039	0.2039
1	0.1732	0.1732
2	0.1117	0.1117
3	0.0503	0.0502
3.5	0.0196	0.0195

4. КАВИТАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННЫХ ПОТОКАХ

Вопрос о построении приближенной формулы для площади миделя каверн Рябушинского в ограниченном потоке изучен в работе [23] с использованием законов сохранения, следуя подходу, примененному в работе [24]. Соотношение

$$\left(\frac{H}{R}\right)^{1+\varepsilon} = \frac{C_x}{(\sqrt{1+\sigma}-1)^2} \quad (33)$$

соответствует предельному течению с минимальным числом кавитации σ_{\min} для плоского ($\varepsilon = 0$) канала с параллельными стенками или осесимметричного ($\varepsilon = 1$) течений в цилиндрической трубе. С использованием аппроксимационной формулы (7) для коэффициента сопротивления конусов, которая предполагается применимой и для ограниченного потока, получена приближенная зависимость для минимального числа кавитации σ_{\min} при кавитационном обтекании конусов в цилиндрической трубе [23]:

$$\sigma_{\min} = \left[\frac{\overline{H}^2 + \sqrt{m^2 + C_{x0}(\overline{H}^2 - m)}}{\overline{H}^2 - m} \right]^2 - 1, \quad \overline{H} = \frac{H}{R}.$$

В таблице 6 приведены данные для минимальных величин числа кавитации σ_{\min} для кавитаторов в форме диска и вертикальной пластины, полученных согласно формуле (33) при использовании аппроксимационных формул (13) и (32).

Сравнение точных и приближенных значений минимального числа кавитации для вертикальной пластины в канале с параллельными стенками (3-я и 4-ая колонки табл. 6) указывает на обоснован-

ность применения приближенного подхода, основанного на предположении о равенстве коэффициентов сопротивления в безграничном и ограниченном потоках при одном и том же числе кавитации.

Аппроксимационная формула для максимального радиуса каверны за осесимметричным телом в цилиндрической трубе постоянного радиуса имеет вид [23]:

$$\left(\frac{R_k}{R}\right)^2 = \frac{2C_x}{k(\sigma, \overline{H}) \cdot \left[\sigma + A + \sqrt{(\sigma - A)^2 - 4A}\right]}, \quad (34)$$

где $\overline{H} = \frac{H}{R}$, $A = \frac{C_x}{\overline{H}^2}$,

$$k(\sigma, \overline{H}) = k(\sigma) + [1 - k(\sigma)] \frac{C_x}{(\sqrt{1+\sigma}-1)^2 \overline{H}^2}.$$

Таблица 6. Значения минимальных чисел кавитации для диска ($\varepsilon = 1$) и вертикальной пластины ($\varepsilon = 0$)

H/R	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0$	$(\varepsilon = 0)_{\text{точн.}}$
200	0.0092	0.1471	0.1471
150	0.0122	0.1728	0.1728
100	0.0184	0.2178	0.2178
75	0.0247	0.2578	0.2578
60	0.0310	0.2947	0.2947
50	0.0374	0.3296	0.3295
40	0.0471	0.3790	0.3789
30	0.0636	0.4567	0.4565
25	0.0770	0.5162	0.5158
20	0.0977	0.6029	0.6023
15	0.1336	0.7442	0.7433
10	0.2110	1.0284	1.0260
5	0.4996	2.0089	1.9952

Функция $k(\sigma)$ определяется по формуле (10), коэффициент сопротивления C_x в случае конусов вычисляется по формуле (7), а для диска – по (13). Выражение для функции $k(\sigma, \overline{H})$ получено, следуя [24], путем интерполяции искомой функции по данным двух предельных случаев: в безграничном потоке и в случае течения с минимальным числом кавитации.

В таблице 7 представлены результаты вычислений радиуса миделя каверны Рябушинского за конусами и диском по приближенной формуле (34) и результаты численного решения задачи на основе точной постановки. Сравнение этих результатов иллюстрирует достаточно высокую точность приближенной формулы (34).

Таблица 7. Величина радиуса миделя каверны Рябушинского для диска в цилиндрической трубе постоянного радиуса \bar{H} . Сопоставление результатов расчета с вычислением по формуле (34).

\bar{H}	σ	$\left(\frac{R_k}{R}\right)_{\text{числ.}}$	$\left(\frac{R_k}{R}\right)_{\text{анпр.}}$
40	0.05	5.124	5.120
40	0.10	3.233	3.239
40	0.225	2.258	2.260
40	0.30	2.019	2.019
30	0.08	3.822	3.797
30	0.10	3.306	3.307
30	0.15	2.685	2.702
15	0.15	2.977	2.981
15	0.20	2.460	2.465
15	0.25	2.210	2.213
15	0.40	1.826	1.830
15	0.50	1.690	1.693
15	0.60	1.594	1.596
15	0.70	1.522	1.524
10	0.225	2.603	2.590
10	0.25	2.358	2.358
10	0.3	2.111	2.113
10	0.4	1.852	1.856
10	0.5	1.702	1.705
10	0.6	1.602	1.604
10	0.7	1.528	1.529
6	0.405	2.127	2.123
6	0.444	1.938	1.933
6	0.5	1.798	1.795
6	0.6	1.650	1.650
6	0.7	1.556	1.558
5	0.6	1.717	1.716
5	0.7	1.594	1.592

Значительное влияние стенок цилиндрической трубы на длину каверны за диском иллюстрируют данные, представленные на рис. 2.

Известный в литературе факт существенно меньшего влияния ограниченности потока на параметры кавитационного обтекания тел при использовании гидродинамических труб со свободной струей жидкости иллюстрируют данные численного решения задачи кавитационного обтекания диска струей жидкости радиуса H (рис. 3).

Приближенное решение задачи о кавитационном обтекании кругового конуса с малым углом при вершине тонкой струей жидкости радиуса H получено Г.В. Логвиновичем [2]. Уравнение конту-

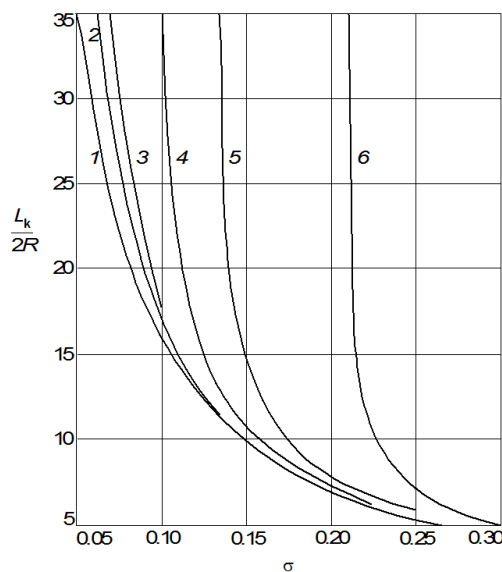


Рис. 2. Влияние стенок на длину каверны Рябушинского за диском для ряда значений параметра \bar{H} :
 1 – $\bar{H} = \infty$; 2 – $\bar{H} = 40$; 3 – $\bar{H} = 30$;
 4 – $\bar{H} = 20$; 5 – $\bar{H} = 15$; 6 – $\bar{H} = 10$

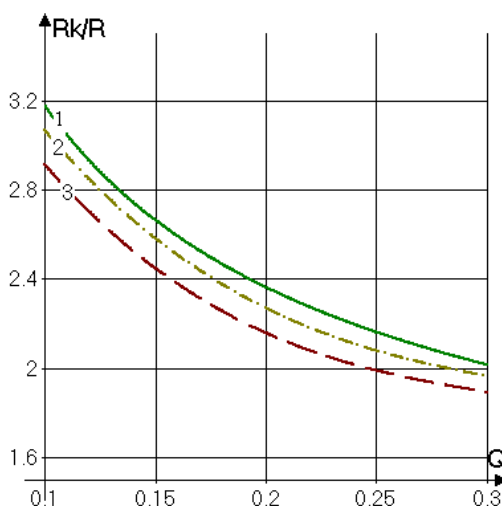


Рис. 3. Радиус миделя каверны за диском как функция числа кавитации для различных толщин струи:
 1 – безграничный поток; 2 – $\bar{H} = 5$; 3 – $\bar{H} = 2.5$

ра каверны записывается в виде:

$$\frac{y(x)}{2H} = \frac{\sin \alpha \pi}{2\sqrt{\sigma}} \sin\left(\sqrt{\sigma} \frac{x}{H}\right) + \frac{R}{2H} \cos\left(\sqrt{\sigma} \frac{x}{H}\right).$$

Отсюда получим следующие выражения для

длины и радиус миделя каверны:

$$\frac{L_k}{2R} = \frac{\bar{H}}{\sqrt{\sigma}} \arcsin \frac{\bar{H} \sin \alpha \pi}{\sqrt{\sigma + \bar{H}^2 \sin^2 \alpha \pi}}, \quad (35)$$

$$\frac{R_k}{R} = \sqrt{1 + \frac{\bar{H}^2}{\sigma} \sin^2 \alpha \pi}. \quad (36)$$

В случае конуса с углом при вершине 90° ($\alpha = 1/4$) рассчитанная длина каверны практически совпала (рис. 4) с вычисленной по формуле (35) в диапазоне малых толщин струи $\bar{H} \leq 0.3$. Незначительное отличие результатов расчетов радиуса миделя каверны от вычислений по формуле (36) имеет место в более широком диапазоне $\bar{H} \leq 0.5$ (рис. 5).

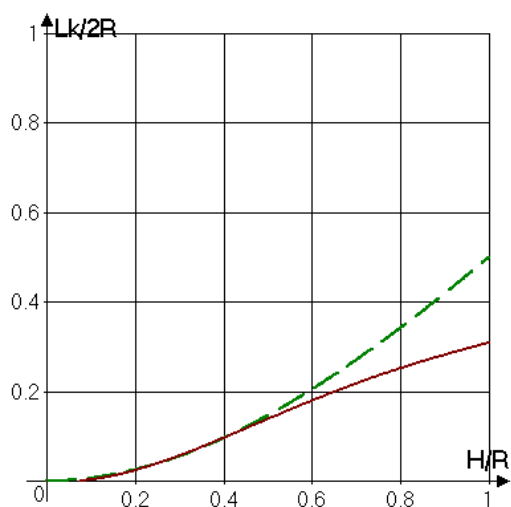


Рис. 4. Сопоставление решения Г.В. Логвиновича [2] (штриховая кривая) с расчетной зависимостью длины каверны за конусом с углом при вершине 90° от радиуса струи

ВЫВОДЫ

Представленные результаты численного и аналитического исследований осесимметричных кавитационных течений показывают высокую эффективность предложенного способа построения приближенных решений в аналитическом виде задач кавитационного обтекания. Построенное приближенное аналитическое решение задачи о форме образующей каверны за диском может быть использовано в качестве невозмущенного решения при расчете пространственных кавитационных течений методом малых возмущений [25, 26].

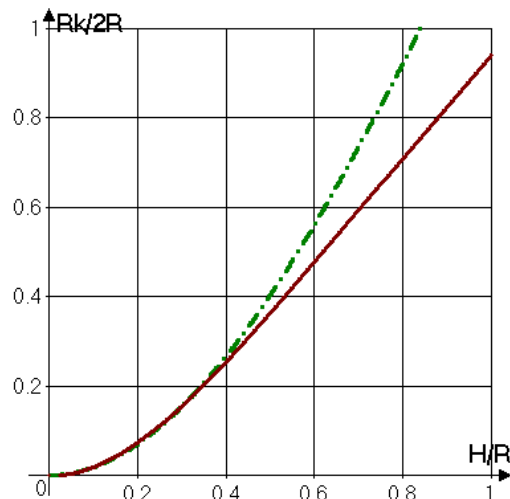


Рис. 5. Сопоставление решения Г.В. Логвиновича [2] (штриховая кривая) с расчетной зависимостью радиуса миделя каверны за конусом с углом при вершине 90° от радиуса струи

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00147-а).

1. Гузевский Л. Г. Метод граничных интегральных уравнений решения плоской и осесимметричной задач Рябушинского // Выч. технологии. Т. 11.– Спец. выпуск.– 2006.– С. 68-80.
2. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами.– К.: Наук. думка, 1969.– 208 с.
3. Субханкулов Г. И., Хомяков А. Н. Применение метода граничных элементов к расчету осесимметричных каверн // Гидродинамика больших скоростей.– Чебоксары.– 1990.– С. 124-132.
4. Хомяков А. Н. Зависимость сопротивления осесимметричного конического кавитатора от угла конусности и от числа кавитации // Изв. АН СС-СР МЖГ.– 1995.– №5.– С. 170-173.
5. Гузевский Л. Г. Влияние стенок на плоские и осесимметричные кавитационные течения // Пристенные течения со свободными поверхностями.– Новосибирск.– 1980.– С. 5-17.
6. Гузевский Л. Г. Осесимметричное кавитационное обтекание тел вращения струей жидкости // Гидродинамика и акустика пристенных и свободных течений.– Новосибирск.– 1981.– С. 37-46.
7. Гузевский Л. Г., Зуйкова В. И. Влияние державки на кавитационное обтекание конусов // Термогидродинамика турбулентных течений.– Новосибирск.– 1986.– С. 44-50.
8. Гузевский Л. Г. Плоские и осесимметричные кавитационные течения Рябушинского в поле силы тяжести // Гидродинамические течения и волновые процессы.– Новосибирск.– 1983.– С. 72-81.

9. Гузевский Л. Г., Зуйкова В. И. Кавитационные течения в продольном поле силы тяжести // Пристенные течения со свободными поверхностями.– Новосибирск.– 1980.– С. 18-30.
10. Гузевский Л. Г. Численный анализ кавитационных течений.– Новосибирск: 1979, (Препр. / СО АН СССР. Ин-т теплофизики; № 40-79).– 36 с.
11. Гузевский Л. Г. Аппроксимационные зависимости для осесимметричных каверн за конусами // Гидродинамические течения и волновые процессы. Сборник научных трудов Ин-та теплофизики СО АН СССР.– Новосибирск.– 1983.– С. 82-91.
12. Гузевский Л. Г., Заварзин Д. С. Соответствие между плоскими и осесимметричными кавитационными течениями // Докл. Сибирского отделения Академии наук высшей школы.– 2000.– №1.– С. 10-17.
13. Гузевский Л. Г. Соответствие плоских и осесимметричных кавитационных течений Рябушинского в трубах // Гидродинамика больших скоростей.– Чебоксары.– 1985.– С. 45-48.
14. Guzevsky L. G. Calculation of axially symmetric cavity flows // Russian Journal of engineering thermophysics.– 1992.– V.2.– № 3.– P. 193-212.
15. Гузевский Л. Г. Построение аппроксимационного решения задачи кавитационного обтекания диска // Прикл. механика и техн. физика.– 2011.– Т.52.– №4.– С. 571-576.
16. Зигангареева Л. М., Киселев О. М. Кавитационное обтекание диска дозвуковым потоком газожидкостной смеси // Механика жидкости и газа.– 1996.– №2.– С. 202-206.
17. Gilbarg D. Jets and Cavities // Handbuch der Physik.– Berlin.– 1960. –Vol. 9.– P. 311-445.
18. Serebryakov V. Asymptotic approach for problems of axisymmetric supercavitation based on the slender body approximation // Proc. of the 3th Inter. symp. on cavitation.– Grenoble (France).– Apr., 1998.– P. 61-70.
19. Савченко Ю. Н., Власенко Ю. Д., Семенов В. Н. Экспериментальные исследования высокоскоростных кавитационных течений // Гидромеханика.– 1998.– Вып.72.– С. 103-111.
20. Кожуро Л. А. Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского // Ученые записки ЦАГИ.– 1980.– Т. XI.– №5.– С. 63-67.
21. Мальцев Л. И. О развитой естественной кавитации // Исследования по развитой кавитации. Сборник научных статей Ин-та теплофизики СО АН СССР.– Новосибирск.– 1983.– С. 82-91.
22. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны.– М.: Мир, 1964.– 466 с.
23. Guzevsky L. G. Wall effects in Riabouchinsky cavitation flows // Russian Journal of engineering thermophysics.– 1996.– Vol.6.– № 4.– P. 359-381.
24. Эпштейн Л. А. Приближенный учет влияния стенок на мидель каверны, моделируемый по схеме Эфроса или Рябушинского // Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа.– 1975.– № 6.– С. 161-163.
25. Логвинович Г. В., Буйвол В. Н., Путилин С. И., Шевчук Ю. Р. Течения со свободными поверхностями.– Киев: Наукова думка, 1985.– 296 с.
26. Воронин В. В., Журавлев Ю. Ф. К вопросу о деформациях тонких осесимметричных каверн // Труды ЦАГИ.– 1985.– Вып. 2272.– С. 27-32.