

УДК 532.528

ВЛИЯНИЕ ГРАВИТАЦИИ НА ТЕЧЕНИЕ ЗА ТЕЛОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ВДОЛЬ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю. Н. САВЧЕНКО, Ю. А. СЕМЕНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 18.09.2011

Рассматривается установившееся двумерное движение жидкости за телом, частично погруженным в жидкость, с образованием волн на свободной поверхности вниз по течению. Жидкость идеальная и несжимаемая, течение безвихревое; влияние поверхностного натяжения на свободной поверхности не учитывается. Основное внимание уделено образованию нелинейных волн, образующихся за телом, и положению точки отрыва потока от тела. Формулировка задачи применима к изучению течения за кормовой и перед носовой частью судна при его движении с постоянной скоростью. Усовершенствованный метод годографа используется для вывода выражения комплексного потенциала течения. Задача сводится к системе двух интегро-дифференциальных уравнений, из решения которых определяются функция модуля скорости на свободной поверхности и функция угла касательной к границе твердого тела. Точка отрыва потока от тела определяется из критерия Бриллюэна-Вилла. Представлены численные результаты влияния гравитации на положение точки отрыва и формы волновой свободной поверхности в широком диапазоне чисел Фруда.

Розглядається усталений двовимірний рух за тілом, що частково занурене у рідину з формуванням хвиль на вільній поверхні вниз за течією. Рідина ідеальна і нестислива, течія безвихорова; вплив поверхневого натягу на вільній поверхні не враховується. Основна увага приділяється формуванню нелінійних хвиль, що формуються за тілом, і положенню точки відриву потоку від тіла. Формулювання задачі є застосовним до вивчення течій за кормовою і перед носовою частинами судна при його русі з постійною швидкістю. Вдосконалений метод годографа використовується для виведення виразу комплексного потенціалу течії. Задача зводиться до системи двох інтегро-диференціальних рівнянь, з розв'язку визначаються функції модуля швидкості на вільній поверхні і функція кута дотичної до межі твердого тіла. Точка відриву потоку від тіла визначається за критерієм Бріллюэна-Вілла. Представлено чисельні результати впливу гравітації на положення точки відриву і форми хвильової вільної поверхні в широкому діапазоні чисел Фруда.

We consider steady free-surface two-dimensional flow past a circular cylinder in water of infinite depth. The fluid is assumed to be inviscid and incompressible, and the flow is irrotational; surface tension on the free surface is neglected. Our concern is with the periodic waves generated downstream and the location of flow separation from the cylinder. The formulation of the problem is applicable to the study of bow and stern flows occurring near a ship moving at a constant velocity on the free surface of a fluid. An advanced hodograph method is employed to derive an analytical expression for the complex potential of the flow. The problem is reduced to a system of two integro-differential equations in the velocity modulus on the free surface and in the slope of the bottom surface. The Brillouin-Villat criterion is applied to determine the location of the point of flow separation from the cylinder. Results showing the effect of gravity on the flow detachment and the waves downstream are presented over a wide range of Froude numbers.

ВВЕДЕНИЕ

Двумерное течение жидкости за неподвижным полупогруженным телом представляет нелинейную краевую задачу с неизвестной свободной границей, имеющей практическое приложение для изучения движения жидкости вблизи кормовой и носовой части судна. Разработка соответствующих математических моделей течения получила развитие в конце 60-х с целью анализа и возможного снижения волнового сопротивления корпуса судна путем выбора формы продольного сечения корпуса [1–3].

Для того, чтобы сформулировать математическую постановку задачи, необходимо сделать некоторые предположения относительно топологии течения. Несколько возможных конфигураций течения перед носовой частью судна были предложены

Даганом и Тулиным [4]: а) свободная поверхность приближается к носовой части судна гладко; б) имеет место образование брызговой струйки и ее возврат в основное течение; в) брызговая струйка поднимается вдоль носовой части судна, а ее влиянием на основное течение пренебрегается. Так, как в рамках модели идеальной жидкости течение имеет свойство обратимости, математическое моделирование течения вблизи носовой части также применимо к течению за кормой и наоборот.

Даган и Тулин [4] использовали асимптотические методы для течения типа а) при малых числах Фруда и для течения типа в) для больших чисел Фруда. Диас и Ванден-Броек [5] решили задачу для течения типа б) в нелинейной постановке для всей области течения. Ванден-Броек и Так [6] показали, что течение типа а) не существует для прямолинейной носовой части судна в жидкости бесконечной глубины. В случае конечной глуби-

ны Ванден-Броек [7] показал, что сверхкритические течения типа *a*) возможны. Диас и Кристофидюлайдс [8] представили расчеты для течения в канале с угловой геометрией, при котором образуется брызговая струйка при течении вдоль стенки канала.

Течения вблизи носовой/кормовой части судна можно разделить на две группы, в зависимости от скорости в точке контакта свободной поверхности с телом. К первой группе относятся течения, при которых имеет место гладкий отрыв потока от тела, а ко второй – течения, для которых в точке контакта скорость обращается в нуль. В работах [9, 12, 13] исследованы течения в жидкости бесконечной глубины с образованием волн очень малой амплитуды либо полностью безволновые, что достигается путем выбора геометрии кормовой/носовой части судна. Безволновые сверхкритические течения в жидкости конечной глубины исследованы в работах [14–17]. Хотя в приведенных работах в основном рассматриваются течения за кормовой частью судна, полученные решения также применимы к анализу течения в носовой части, так как течения в рамках модели идеальной жидкости обратимы.

К настоящему времени имеется ограниченное количество работ, в которых течение вблизи носовой и кормовой части судна рассматривается в рамках постановки одной задачи. В то же время взаимовлияние носовой и кормовой частей имеет место для случаев, когда длина судна сравнима с длиной волны, образующейся вниз по течению.

В настоящей работе рассматривается полная постановка задачи, включающая как течение в носовой, так и в кормовой части судна. Кроме того, метод решения позволяет рассматривать произвольную форму продольного сечения. В качестве примеров расчеты выполнены для плоской пластинки и кругового цилиндра. Топология течения соответствует случаю *c*), предложенному в работе Дагана и Тулина [4]: брызговая струя поднимается вдоль носовой части и ее возвратом в основное течение пренебрегается. В этом случае только одна точка торможения потока имеет место на смоченной части тела. Расход в брызговой струйке определяется как часть решения задачи. Далее будет показано, что расход в брызговой струйке уменьшается с уменьшением числа Фруда.

Метод решения задачи состоит в построении комплексного потенциала течения. Следуя работам Н.Е. Жуковского [18] и С.А. Чаплыгина [19], необходимо найти выражения комплексной скорости и производной комплексного потенциала в области параметрического переменного, в каче-

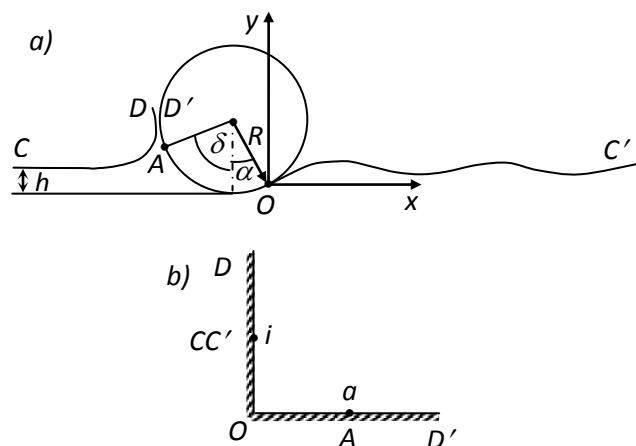


Рис. 1. Физическая модель течения для полупогруженного тела, движущегося вдоль свободной поверхности

стве которого выбран первый квадрант. Производная комплексного потенциала находится методом особых точек Чаплыгина [20]. Выражение комплексной скорости ищется с помощью интегральной формулы, полученной в работе [21], учитывающей изменение угла наклона вдоль контура тела и изменение модуля скорости вдоль свободной границы. Интегральное выражение комплексной скорости включает функцию модуля скорости на свободной границе и функцию угла наклона касательной к смоченной части тела. Эти функции зависят от координаты мнимой и действительной оси первого квадранта, соответственно. При заданной форме тела кинематическое граничное условие позволяет получить интегро-дифференциальное уравнение для определения функции угла наклона касательной к смоченной части тела. Из динамического граничного условия выводится интегральное уравнение для нахождения модуля вектора скорости вдоль свободной границы, как функции координаты мнимой оси области параметра. Эти уравнения должны быть решены численно для нахождения параметров течения жидкости и формы свободной границы.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ

На рис. 1, *a* показана конфигурация течения за круговым цилиндром, включающая брызговую струйку и гладкий отрыв потока от цилиндра. Жидкость полагается невязкая и несжимаемая, течение безвихревое. На бесконечности вверх по

потоку скорость жидкости U постоянна, а свободная граница параллельна оси x . Начало координат находится в точке отрыва потока от тела. Ускорение свободного падения направлено вертикально вниз. Тело погружено в жидкость на глубину h и генерирует волны вниз по потоку.

Форма тела задается углом наклона касательной к телу, β , как функцией дуговой координаты s вдоль смоченной части тела, отсчитываемой от точки отрыва потока O . В точке торможения потока A линия тока раздваивается и проходит вдоль нижней и верхней части тела. Верхняя линия тока и свободная поверхность формируют брызговую струйку, отсекаемую на достаточно большом расстоянии от точки торможения, чтобы отсеченная часть струйки не оказывала влияние на параметры основного течения. Критерий Бриллюэна-Вилла используется для определения положения точки отрыва потока O . В этом случае кривизна свободной границы в точке отрыва равна кривизне тела.

Уравнение Бернулли можно записать для произвольной точки течения и бесконечно удаленной точки на свободной поверхности:

$$\rho \frac{V^2}{2} + \rho g Y + p = \rho \frac{U^2}{2} + p_a, \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; p_a – атмосферное давление на свободной поверхности; U – скорость потока на бесконечности.

Выбирая в качестве характерных параметров радиус цилиндра и скорость набегающего потока, уравнение (1) можно записать в виде:

$$v^2 = 1 - c_p - \frac{2y}{\text{Fr}^2}, \quad (2)$$

где $\text{Fr}^2 = \frac{U^2}{gR}$, Fr – число Фруда, $c_p = \frac{p - p_a}{0.5\rho U^2}$ – коэффициент давления, а $v = V/U$ и $y = Y/R$ – безразмерные скорость и координата соответственно.

Из уравнения (2) определяется величина скорости на свободной границе, на которой $c_p = 0$

Следуя методам Жуковского [18] и Чаплыгина [19, 20], решение задачи ищется путем построения выражения комплексной скорости dw/dz и производной комплексного потенциала $dw/d\zeta$ в области параметрического переменного $\zeta = \xi + i\eta$, в качестве которой выбран первый квадрант. Конформное отображение позволяет выбрать положение трех точек: O , CC' и D , как показано на рис. 1, *b*. Положение точки торможения потока A в области параметра $\zeta = a$ должно быть определено

из дополнительного условия. Интервал $0 < \eta < 1$ мнимой оси области параметра соответствует свободной границе OC' , а интервал $1 < \eta < \infty$ – свободной границе CD . Действительная ось области параметра соответствует смоченной части тела OAD .

Если эти выражения комплексной скорости dw/dz и производной комплексного потенциала $dw/d\zeta$ в области параметрического переменного $\zeta = \xi + i\eta$ известны, то поле скоростей находится как функция параметрической переменной ζ , а зависимость между областью параметра и физической плоскостью течения выражается через отображающую функцию $z(\zeta)$

$$v_x - iv_y = \frac{dw}{dz}(\zeta), \quad z(\zeta) = z_0 + \int_0^\zeta \frac{dw}{d\zeta'} \bigg/ \frac{dw}{dz} d\zeta', \quad (3)$$

где v_x и v_y – компоненты скорости; z_0 – координата точки в физической плоскости, соответствующая $\zeta = 0$.

Методы Жуковского и Чаплыгина позволяют построить выражения комплексной скорости и производной комплексного потенциала для задач стационарного обтекания тел с прямолинейными границами и постоянной скоростью на свободной границе. Рассматриваемые в данной работе задачи несколько сложнее, так как твердая граница криволинейна, а на внешней (свободной) границе модуль скорости (давление) не является постоянной величиной. Метод построения выражения комплексной скорости, учитывающий данные особенности, представлен в работе [21].

1.1. Нахождение выражения комплексной скорости

На данной стадии решения задачи предположим, что величина скорости на свободной границе известна как функция параметрической переменной η , а направление скорости на смоченной части тела известно как функция координаты действительной оси области параметра ξ , то есть функция комплексной скорости удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{\zeta=i\eta} = v(\eta), \quad 0 < \eta < \infty, \quad \xi = 0, \quad (4)$$

$$\arg \left(\left. \frac{dw}{dz} \right|_{\zeta=\xi} \right) = \begin{cases} -\pi - \beta(\xi), & 0 < \xi < a, \eta = 0, \\ -\beta(\xi), & a < \xi < \infty, \eta = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Аргумент комплексной скорости имеет скачок в точке A , $\zeta = a$, соответствующей раздвоению линии тока. Задача состоит в нахождении функции dw/dz , определенной в первом квадранте и удовлетворяющей граничным условиям (4) и (5). Интегральная формула [21]

$$\frac{dw}{dz} = v(\infty) \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\gamma}{d\xi} \ln \left(\frac{\zeta + \xi'}{\zeta - \xi'} \right) d\xi' \right] - \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \ln \left(\frac{\zeta - i\eta'}{\zeta + i\eta'} \right) d\eta' + i\gamma(\infty), \quad (6)$$

позволяет найти комплексную функцию, удовлетворяющую граничным условиям (4) и (5). Здесь $\gamma(\xi)$ есть функция аргумента комплексной скорости вдоль действительной оси первого квадранта. Подставляя поочередно $\zeta = \xi$ и $\zeta = i\eta$, можно убедиться, что граничные условия (4) и (5) выполняются.

Принимая во внимание, что $\arg(\zeta - i\eta) = \arg(i\eta - \zeta) - \pi$, и подставляя выражение (5) в (6), получим выражение комплексной скорости в виде

$$\frac{dw}{dz} = v_0 \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta}{d\xi} \ln \left(\frac{\xi' - \zeta}{\xi' + \zeta} \right) d\xi' \right] - \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \ln \left(\frac{i\eta' - \zeta}{i\eta' + \zeta} \right) d\eta' - i\beta_0, \quad (7)$$

где $v_0 = v(0)$ и $\beta_0 = \beta(0)$ величина и направление скорости в точке O соответственно.

1.2. Выражение производной комплексного потенциала

Для стационарных течений со свободной границей функция тока $\psi(x, y)$ имеет постоянное значение вдоль границы тела и свободной поверхности. Поэтому граница области комплексного потенциала в w -плоскости имеет форму многоугольника. Для конформного отображения первого квадранта на область многоугольника можно воспользоваться методом особых точек Чаплыгина [19, 20], при этом достаточно проанализировать поведение функции в особых точках, в которых нарушается конформность отображения. Функция комплексного потенциала $w = w(\zeta)$ имеет особенности в точках $O(\zeta = 0)$, $A(\zeta = a)$, $C(\zeta = i)$. Анализируя поведение функции $w = w(\zeta)$ в этих точках, можно определить порядок сингулярности в них. Дифференцируя функцию $w = w(\zeta)$ и применяя теорему

Лиувилля, можно получить выражение для производной комплексного потенциала в виде

$$\frac{dw}{d\zeta} = K \frac{\zeta(\zeta^2 - a^2)}{(\zeta^2 + 1)^2}, \quad (8)$$

где K – масштабный множитель.

Делением выражения (8) на (7) получается выражение для производной отображающей функции:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{K \zeta(\zeta^2 - a^2)}{v_0 (\zeta^2 + 1)^2} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta}{d\xi} \ln \left(\frac{\xi' - \zeta}{\xi' + \zeta} \right) d\xi' \right] + \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \ln \left(\frac{i\eta' - \zeta}{i\eta' + \zeta} \right) d\eta' + i\beta_0, \quad (9)$$

Интегрированием выражения (9) вдоль мнимой оси области параметра можно рассчитать форму свободных границ OC' и CD в физической области z . Для определения параметров a и K , а также функций $v(\eta)$ и $\beta(\xi)$ имеются следующие физические условия.

Направление скорости набегающего потока образует нулевой угол с осью Ox в точке $C(\zeta = i)$. Определяя аргумент комплексной скорости из выражения (7), получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \ln \left| \frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right| d\eta + 2 \arctan \left(\frac{1}{a} \right) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta}{d\xi} \arctan \left(\frac{1}{\xi} \right) d\xi + \beta_0 - \pi = 0. \quad (10)$$

На данной стадии решения предположим, что положение точки отрыва потока O и положение точки торможения A известны, то есть известна длина смоченной части тела между точками O и A , $S_w = R(\alpha + \delta)$. Тогда масштабный множитель K определяется из уравнения

$$K \int_0^a \frac{ds'}{d\xi} = S_w, \quad (11)$$

где

$$\frac{ds'}{d\xi} = \frac{1}{K} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=\xi} = \frac{1}{v_0} \frac{\xi(\xi^2 - a^2)}{(\xi^2 + 1)^2} \times \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta}{d\xi'} \ln \left| \frac{\xi + \xi'}{\xi - \xi'} \right| d\xi' \right] + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \arctan \frac{\eta'}{\xi} d\eta'. \quad (12)$$

Глубина погружений тела определяется интегрированием выражения (9) вдоль линии, соединяющей точки O и C в плоскости параметра. Например, эта линия может состоять из интервалов ($0 < \xi < \xi^*$), $\eta = 0$, ($1 < \eta < \xi^*$), $\xi = 0$ и дуги окружности радиуса ξ^* , соединяющего точки на действительной и мнимой оси плоскости параметра:

$$\text{Im} \left[\int_0^{\xi^*} \frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\xi} d\xi + \int_{(\xi^*,0)}^{(0,\eta^*)} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta + \int_{\eta^*}^1 \frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\zeta=i\eta} d\eta \right] = h - R(1 - \cos \alpha) \quad (13)$$

Второй интеграл в выражении (13) вычисляется с помощью теоремы о вычетах:

$$\int_{(\xi^*,0)}^{(0,\eta^*)} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \frac{\psi_0}{v^*} \exp(i\beta^*),$$

где $\psi_0 = \frac{1}{2}\pi K$ соответствует расходу жидкости в брызговой струйке, v^* и β^* – величина и направление скорости в точке $z^* = z(\zeta)|_{\zeta=\xi^*}$.

Уравнения (10), (11) и (13) позволяют найти неизвестные параметры a , K и угол δ , определяющий положение точки торможения потока на теле.

1.3. Система интегральных уравнений

Интегрируя выражение (12) вдоль действительной оси области параметра, можно определить дуговую координату вдоль смоченной части тела как функцию параметра ξ :

$$s(\xi) = \int_0^\xi \left| \frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\xi'} d\xi' \quad (14)$$

Так как функция $\beta = \beta(s)$ известна, то функцию $\beta(\xi)$ можно найти из решения интегродифференциального уравнения

$$\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{d\xi},$$

в котором производная $ds/d\xi$ находится из выражения (12) при $\zeta = \xi$. Вышеприведенное уравнение принимает вид

$$\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{K\chi[s(\xi)]\xi(\xi+a)^2}{v_0(\xi^2+1)^2} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta}{d\xi'} \times \ln \left| \frac{\xi+\xi'}{\xi-\xi'} \right| d\xi' + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \arctan \frac{\eta'}{\xi} d\eta' \right], \quad (15)$$

где $\chi(s)$ – кривизна тела.

Дифференцируя уравнение (2) по дуговой координате s , получим следующее уравнение

$$v \frac{dv}{ds} + \frac{1}{\text{Fr}^2} \sin \beta^f = 0 \quad (16)$$

где $\beta^f = dy/ds$ – направление скорости на свободной границе. Определяя из выражения (7) при $\zeta = i\eta$ аргумент комплексной скорости, получим

$$\beta^f(\eta) = \beta_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta}{d\xi'} \arctan \frac{\eta}{\xi'} d\xi' + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \ln \left| \frac{\eta' - \eta}{\eta' + \eta} \right| d\eta' + 2 \arctan \frac{\eta}{a}. \quad (17)$$

Используя соотношения

$$\frac{dv}{ds} = v \frac{d \ln v}{d\eta} / \frac{ds}{d\eta}$$

и

$$\frac{ds}{d\eta} = \left| \frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\zeta=i\eta} = \frac{1}{v} \left| \frac{dw}{d\zeta} \Big|_{\zeta=i\eta} = \frac{K}{v(\eta)} \frac{\eta(\eta^2+a^2)}{(1-\eta^2)^2},$$

можно привести уравнение (16) к следующему интегральному уравнению относительно функции $d \ln v / d\eta$, определенной на интервале $0 < \eta < \infty$:

$$\text{Fr}^2 v^3 \frac{d \ln v}{d\eta} + K \frac{\eta(\eta^2+a^2)}{(1-\eta^2)^2} \times \sin \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \ln \left| \frac{\eta' - \eta}{\eta' + \eta} \right| d\eta' + P(\eta) \right] = 0, \quad (18)$$

где функция

$$P(\eta) = \beta_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta}{d\xi} \arctan \frac{\eta}{\xi} d\xi + 2 \arctan \frac{\eta}{a},$$

$$v(\eta) = v_\infty \exp \left(\int_1^\eta \frac{d \ln v}{d\eta'} d\eta' \right).$$

Величина скорости на свободной поверхности $v(\eta)$ находится из уравнения (18) на всей мнимой оси первого квадранта, а функция $\beta(\xi)$ – из уравнения (15) на всей действительной оси.

1.4. Условие гладкого отрыва потока от тела

Для тел с острой кромкой точка отрыва потока O фиксирована, а длина между точками O и

А известна. Для тел закругленной формы точка отрыва потока неизвестна и должна быть определена как составная часть задачи из дополнительного условия. В рамках модели идеальной жидкости это условие хорошо известно как критерий Бриллюэна-Вилла. Также хорошо известно [22], что в реальных течениях отрыв ламинарного пограничного слоя имеет место перед отрывом потока и образования свободной границы. Отрыв ламинарного пограничного слоя указывает на то, что давление в точке отрыва ламинарного пограничного слоя ниже, чем давление на свободной поверхности, и возрастает с приближением к точке отрыва потока. Более детальная модель отрыва потока, включающая учет влияния поверхностного натяжения, приведена в работе [23].

Для различных теорий отрыва потока критерий Бриллюэна-Вилла остается как условие, определяющее положение минимального давления на теле, которое также применимо в течениях вязкой жидкости в рамках модели вязкого-невязкого взаимодействия. В настоящей работе точка минимального давления и точка отрыва потока совпадают. Условие Бриллюэна-Вилла имеет вид

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d \ln v}{ds} = 0, \quad (19)$$

где $s \rightarrow 0$ при движении к точке отрыва вдоль тела. Учитывая соотношение

$$\frac{d \ln v}{ds} = \frac{d \ln v}{d\xi} / \frac{ds}{d\xi}$$

и определяя производную модуля скорости $v(\xi) = |dw/dz|_{\varsigma=\xi}$ вдоль тела из выражения (7), уравнение (19) можно привести к виду

$$\int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta} \eta d\eta + \int_0^\infty \frac{d\beta}{d\xi} \xi d\xi + \pi a = 0. \quad (20)$$

Это уравнение относительно неизвестной смоченной длины тела, S_w , между точками O и A , которая оказывает влияние на функцию $\beta(\xi) = \beta[s(\xi)]$, $0 < s < S_w$.

1.5. Коэффициенты гидродинамических сил

Коэффициент сопротивления и подъемной силы определяются интегрированием давления вдоль смоченной части тела, $0 < \xi < \xi^*$. Для $\xi^* < \xi < \infty$ коэффициент давления $c_p \approx 0$, так как брызговая струйка достаточно тонкая. Таким образом,

$$D + iL = -iR \int_{z_0}^{z^*} (p - p_a) dz. \quad (21)$$

Коэффициенты сопротивления и подъемной силы

$$C_D = \frac{2D}{\rho U^2 R}, \quad C_L = \frac{2L}{\rho U^2 R} \quad (22)$$

можно найти из следующего выражения:

$$C_D + iC_L = -i \int_0^{\xi^*} \left(1 - v^2(\xi) - \frac{2y(\xi)}{Fr^2} \right) \frac{dz}{d\xi} \Big|_{\varsigma=\xi} d\xi, \quad (23)$$

где $v(\xi) = |dw/dz|_{\varsigma=\xi}$ – модуль скорости вдоль смоченной части тела и $y(\xi)$ – координата тела, которая может быть получена интегрированием выражения (9) вдоль действительной оси области параметра.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В дискретной форме решение ищется в фиксированных точках ξ_i , $i = 1, \dots, N$, распределенных вдоль действительной оси области параметра и в точках η_j , $j = 1, \dots, M$, распределенных вдоль мнимой оси. Число точек ξ_i выбиралось в диапазоне $N = 200 \div 400$, а число точек η_j – в диапазоне $M = 300 \div 500$ для проверки сходимости численного решения и оценки точности решения задачи. Для всех представленных расчетов различие результатов имело место в третьей значащей цифре при выборе числа точек в указанных диапазонах. Точки ξ_i распределялись таким образом, чтобы обеспечить более высокую плотность точек $s_i = s(\xi_i)$ вблизи точки отрыва потока O . Распределение точек η_j задавалось таким образом, чтобы обеспечить более высокую плотность точек $s_j = s(\eta_j)$ вблизи обтекаемого тела.

Интегралы, входящие в систему уравнений, вычислялись с использованием линейной интерполяции функций $\beta(\xi)$ и $\ln v(\eta)$ на интервалах (ξ_{i-1}, ξ_i) и (η_{j-1}, η_j) , соответственно. Решение системы интегральных уравнений осуществлялось методом последовательных приближений.

Профили свободной поверхности при числе Фруда $Fr = 1$ и различных глубинах погружения показаны на рис. 2. Видно, что крутизна волны возрастает с увеличением глубины погружения, а длина волны несколько уменьшается. Случай $c)$ на рис. 2 соответствует максимальной крутизне

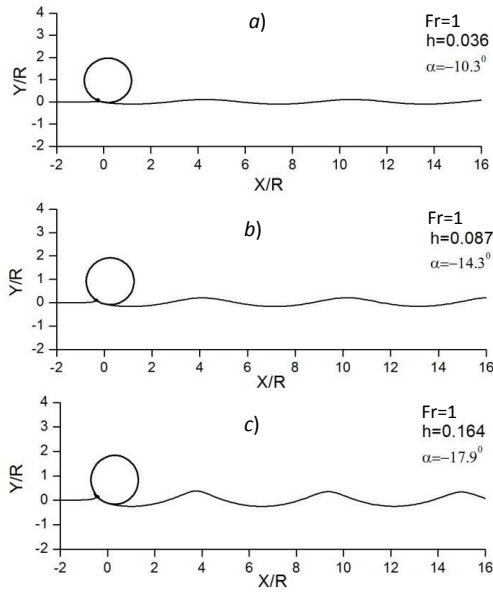


Рис. 2. Профиль свободной поверхности при числе Фруда $Fr = 1$ и глубине погружения $h/R = 0.036$ (a), $h/R = 0.087$ (b), $h/R = 0.164$ (c)

волны, при которой на гребне волны формируется угол 120° . При большей глубине погружения решение задачи не существует, так как происходит опрокидывание гребня волны и его последующее разрушение. В этом случае итерационный процесс решения системы интегральных уравнений расходуется.

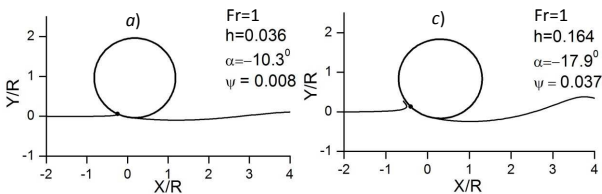


Рис. 3. Профиль свободной поверхности вблизи цилиндра для случаев (a) и (c), показанных на рис. 2

На рис. 3 показан профиль свободной поверхности вблизи цилиндра для случаев (a) и (c), приведенных на рис. 2. Положение точки торможения потока показано маркером. Можно видеть, что ордината точки торможения потока близка к уровню свободной поверхности, а расход в брызговой струйке весьма мал. Такая тонкая струя в реальном течении разрушается в результате взаимодействия с воздухом и действия поверхностного натяжения и возвращается в набегающий поток в виде брызг. Аналогичные результаты получены Енгом [24] с использованием численного метода ре-

шения уравнений движения. Как видно из рис. 3, положение точки отрыва потока имеет место на наветренной стороне цилиндра, что соответствует отрицательному углу α . С увеличением глубины погружения величина угла отрыва потока α также увеличивается.

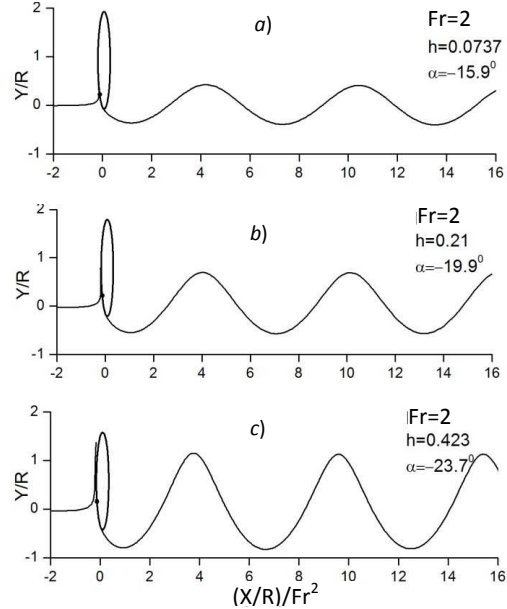


Рис. 4. Профиль свободной поверхности при числе Фруда $Fr = 2$ и глубине погружения $h/R = 0.074$ (a), $h/R = 0.21$ (b), $h/R = 0.42$ (c)

Профиль свободной поверхности для течения при числе Фруда $Fr = 2$ для различных глубин погружения цилиндра показан на рис. 4, на котором ось Ox имеет масштаб Fr^{-2} . Из сравнения результатов, приведенных на рис. 2 и 4, можно видеть, что при увеличении числа Фруда длина волны увеличивается в соответствии с линейной теорией прогрессивных волн, согласно которой длина волны $\lambda/R = 2\pi Fr^2$. Из рис. 4 также видно, что нелинейные эффекты при большей крутизне волны приводят к некоторому уменьшению длины волны. Профиль волны аналогичен профилю волны, образующейся в течении за гидропрофилем, полностью погруженным в жидкость, исследованным в работе [25]. Таким образом, можно сделать вывод, что тело, генерирующее волны на свободной поверхности, не оказывает влияние на профиль волны вниз по течению.

Профиль свободной поверхности вблизи цилиндра представлен на рис. 5 для случаев (a) и (c), показанных на рис. 4. Можно видеть, что ордината точки торможения потока находится вблизи уровня свободной поверхности вверх по потоку.

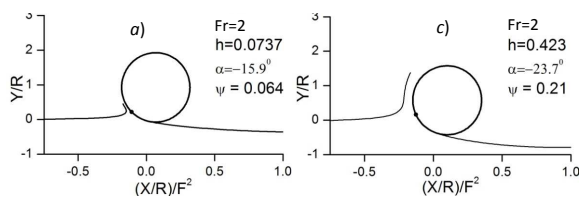


Рис. 5. Профиль свободной поверхности вблизи цилиндра для случаев (а) и (с), показанных на рис. 4

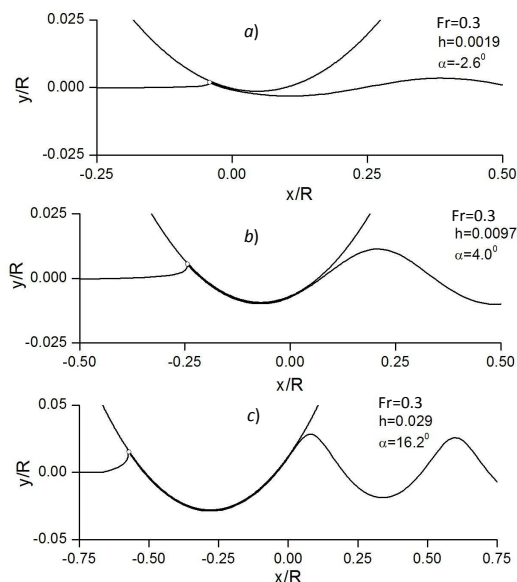


Рис. 6. Профиль свободной поверхности вблизи цилиндра при числе Фруда $Fr = 0.3$ и глубине погружения $h/R = 0.0019$ (а), $h/R = 0.0097$ (б), $h/R = 0.029$ (с)

Профиль свободной поверхности при числе Фруда $Fr = 0.3$ и различных глубинах погружения цилиндра показан на рис. 6. Можно видеть, что с увеличением глубины погружения точка отрыва потока перемещается с наветренной стороны на подветренную. Это можно объяснить тем, что с увеличением глубины погружения увеличивается смоченная часть цилиндра, которая становится больше длины волны для данного числа Фруда. В точке отрыва потока кривизна свободной поверхности равна кривизне цилиндра. Для максимальной глубины погружения, показанной на рис. 6, с, видно, что кривизна свободной границы резко уменьшается от положительного значения в точке отрыва, меняет знак на противоположенный и стремится к максимальной по величине кривизне на гребне волны. Экстраполируя поведение свободной поверхности в точке отрыва с увеличением глубины погружения, можно предположить, что существует такой режим течения, при котором

точка отрыва потока соответствует гребню волны, для которой скорость на гребне обращается в нуль. В этом случае в точке отрыва потока свободная поверхность образует угол с поверхностью тела.

ВЫВОДЫ

В работе представлено полное решение задачи движения полупогруженного цилиндра вдоль свободной поверхности в нелинейной постановке путем нахождения аналитических выражений для комплексной скорости и производной комплексного потенциала, определенных в области параметрического переменного. Полученное решение включает как течение вблизи носовой части тела, так и в кормовой части с гладким отрывом потока от тела. С использованием кинематического и динамического граничных условий получена система интегральных уравнений относительной функций, входящих в выражение комплексной скорости.

Численное решение системы интегральных уравнений основывается на методе последовательных приближений. Показано, что за телом образуется прогрессивная волна, амплитуда которой возрастает с увеличением глубины погружения, а длина становится несколько меньше длины волны, определенной по линейной теории. Полученное решение позволяет рассчитать предельные случаи, при которых свободная поверхность на гребне волны формирует угол 120° . Ширина брызговой струи увеличивается с увеличением числа Фруда и глубины погружения цилиндра в жидкость.

Представленный метод решения позволяет изучить более сложную геометрию тела, типичную для корпуса судна.

1. Tuck E.O. A Systematic Asymptotic Expansion Procedure for Slender Ships // J. Ship Research.– 1964.– V. 8, No. 1.– P. 15 – 23.
2. Tuck E.O. Some Methods for Flows Past Blunt Slender Bodies // J. Fluid Mech.– 1964b.– V. 18.– P. 619 – 635.
3. Ogilvie T.F. Nonlinear Higher-Froude-Number Free Surface Problems // Technical report.– 1967.– Michigan University, Ann Arbor.– P. 1 – 49.
4. Dagan G., Tulin M.P. Two-Dimensional Free Surface Gravity Flow Past Blunt Bodies // J. Fluid Mech.– 1972.– V. 51.– P. 529 – 543.
5. Dias F. and Vanden-Broeck J.M. Nonlinear Bow Flows with Splashes // J. Fluid Mech.– 1993.– V. 255.– P. 91 – 102.
6. Vanden-Broeck J.M. and Tuck E.O. Computation of Near-Bow or Stern Flows, Using Series Expansion in the Froude Number // 2nd International Conference

- on Numerical Ship Hydrodynamics.– 1977.– Berkeley, CA.– P. 10 – 23.
7. *Vanden-Broeck J.M.* Bow Flows in Water of Finite Depth // *Phys. Fluids A.*– 1989.– 1.– P. 1328 – 1330.
 8. *Dias F. and Christodoulides P.* Ideal Jets Falling Under Gravity // *Phys. Fluids A.*– 1991.– V. 3.– P. 1711 – 1717.
 9. *Farrow D.E. and Tuck E.O.* Further Studies of Stern Wavemaking // *J. Austral. Math. Soc. Ser. B., Appl. Math.*– 1995.– V. 36.– P. 424 – 435.
 10. *Madurasinghe M.A.* Splashless Ship Bows with Stagnant Attachment // *J. Ship Res.*– 1988.– V. 32.– P. 194 – 203.
 11. *Tuck E.O.* Ship-Hydrodynamic Free-Surface Problems without Waves // *J. Ship Res.*– 1991.– V. 35.– P. 227 – 235.
 12. *Zhu S.P. and Zhang Y.* A Flat Ship Theory on Bow and Stern Flows // *ANZIAM.*– 2003.– V. 45.– P. 1 – 15.
 13. *Binder B. J.* Steady Free-Surface Flow at the Stern of a Ship // *Phys. of Fluids.*– 2010.– V. 22.– P. 012104-1 – 012104-5.
 14. *Asavanant J. and Vanden-Broeck J.M.* Free-Surface Supercritical Splashless Flows Past a Two-Dimensional Symmetrical Rectilinear Body // *Eur. J. Mech. B/Fluids.*– 1998.– V. 17.– P. 811 – 821.
 15. *Maleewong M. and Grimshaw R.H.J.* Nonlinear Free Surface Flows Past a Semi-Infinite Flat Plate // *Phys. Fluids.*– 2008.– V. 20.– P. 062102 – 8.
 16. *McCue S.W. and Forbes L.K.* Bow and Stern Flows with Constant Vorticity // *J. Fluid Mech.*– 1999.– V. 399.– P. 277 – 296.
 17. *McCue S.W. and Forbes L.K.* Free-Surface Flows Emerging From Beneath a Semi-Infinite Plate with Constant Vorticity // *J. Fluid Mech.*– 2002.– V. 461.– P. 387 – 399.
 18. *Жуковский Н.Е.* Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока // *Матем. Сборник.*– 1890.– С. т.XV.
 19. *Чаплыгин С.А.* О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела. К теории аэроплана // *М.– Моск. ун-т.*– 1910.– С. 1 – 49.
 20. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости.– М: Наука, 1979.– 536 с.
 21. *Семенов Ю.А.* Комплексный потенциал нестационарного течения со свободной границей // *Вестник Херсонского университета.*– Херсон.– 2003, Том 2.– С. 384 – 387.
 22. *Arakeri V.* Viscous effects on the position of cavitation separation from smooth bodies // *J. Fluid Mech.*– 1975.– V. 68.– P. Pt. 4.779 – 799
 23. *Yoon B.S., Semenov Y.A.* Cavity detachment on a hydrofoil with the inclusion of surface tension effects // *Euro. J. of Mech. - B/Fluids.*– 2011.– V. 30.– P. No.1. 17 – 25
 24. *Yeung R.W.* Nonlinear Bow and Stern Waves - Inviscid and Viscous Solutions // *Mathematical approaches in hydrodynamics,SIAM.*– 1991.– Philadelphia, PA.– P. 349 – 369.
 25. *Faltinsen O.M., Semenov Y.A.* The effect of gravity and cavitation on a hydrofoil near the free surface // *J. Fluid Mech.*– 2008.– V. 597.– P. 371 – 394.