

УДК 532

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ВИХРЕЙ ТЕЙЛОРА–ГЕРТЛЕРА В НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА. 1. ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ, В. И. НИКИШОВ, Л. В. ТКАЧЕНКО

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 17.12.2011*

Представлены результаты численного моделирования развития регулярных вихревых возмущений в пограничном слое над вогнутой поверхностью. Пограничный слой формируется на внутренней поверхности внешнего цилиндра после его остановки в круговом течении Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами. Показано, что при введении в поток регулярных вихревых возмущений, которые представляют собой систему продольных вихрей типа вихрей Гертлера, вначале наблюдается заметное падение энергии возмущений, связанное с их приспособлением к особенностям потока. Падение энергии возмущений тем больше, чем больше энергия начальных возмущений. С течением времени по мере развития вихревых возмущений их энергия растет и становятся важными нелинейные эффекты, причем при большей начальной энергии возмущений влияние нелинейных эффектов проявляется раньше. Влияние последних приводит к отклонению кривых роста энергии от экспоненциального закона.

Представлено результати чисельного моделювання розвитку регулярних збурень завихореності у прилежовому шарі над увігнутою поверхнею. Прилежовий шар формується над зовнішнім циліндром після його зупинки у круговій течії Куэтта між двома циліндрами, що обертаються. Показано, що при введенні в потік регулярних вихрових збурень, які представляють собою систему поздовжніх вихорів типу вихорів Гертлера, спочатку спостерігається помітне падіння енергії вихрових збурень, пов'язане з їх пристосуванням до особливостей потоку. Падіння енергії збурень тим більше, чим більше енергія початкових збурень. З розвитком вихрових збурень їх енергія зростає і стають важливими нелінійні ефекти, причому при більшій початковій енергії збурень вплив нелінійних ефектів проявляється раніше. Вплив останніх призводить до відхилення кривих зростання енергії від експоненціального закону.

The results of numerical simulation of a regular perturbation vorticity development in a boundary layer over a concave surface are presented. The boundary layer is formed over the inner surface of the external cylinder after its stop in a circular Couette flow between two rotating cylinders. It is shown that a noticeable drop of the energy of regular vortical perturbations introducing in flow occurs at initial time. The shape of the perturbations was close to G?rtler's longitudinal vortices. The drop is connected with the adaptation of vortices to the peculiarities of the flow. The greater is the initial perturbations energy, the greater it is the drop of disturbances energy. In time, the vortical disturbances develop and their energy increases, and nonlinear effects become important. The influence of nonlinear effects appears earlier for perturbations with greater energy. This influence causes a deviation of the growth energy curves from the exponential law.

## ВВЕДЕНИЕ

Интерес к изучению вихрей Гертлера, помимо случаев, когда рассматриваются течения вблизи вогнутых поверхностей, обусловлен в первую очередь тем, что динамические характеристики этих вихрей подобны характеристикам пристеночных вихрей в вязком подслое турбулентного пограничного слоя. Известно, что два основных типа когерентных вихревых структур развиваются в турбулентном пограничном слое. Во внешнем течении – крупномасштабные структуры, которые управляют вовлечением нетурбулентной жидкости в пограничный слой. Пристеночные течения управляются вихревой структурой, подобной той, которая формируется на переходной стадии, т. е. системой продольных вихрей. Эти вихри вызывают выброс низкоскоростной жидкости в нормальном направлении и формирование грибообразных

структур, в которых возникает S-образный профиль в трансверсальном направлении. Возникает точка перегиба на основном профиле скорости, формируются подковообразные вихри и далее развивается вспышка турбулентности. Вихри Гертлера, как и пристеночные вихри, обуславливают "выброс" низкоскоростной жидкости от стенки в нормальном направлении (см. рис. 1), в результате чего формируются грибообразные структуры и подковообразные вихри, возникают точки перегиба основного профиля течения. Далее, в результате развития неустойчивости происходит турбулизация потока. Введем в рассмотрение динамический масштаб длины  $\nu/U_\tau$ , где скорость трения  $U_\tau = [\nu(\partial U/\partial y)|_{y=0}]^{1/2}$ ,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости. В работе [1] показано, что для пристеночных вихрей в турбулентном пограничном слое этот масштаб приблизительно равен 100, в то время как для продольных вихрей Гертлера эта величина составляет 195. Более того, в

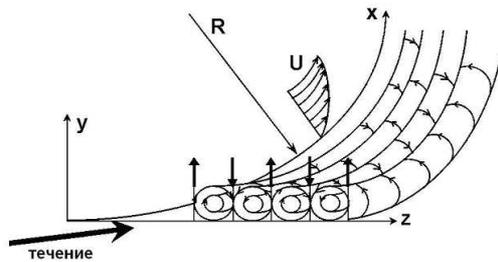


Рис. 1. Картина течения при наличии вихрей Гертлера

экспериментах, результаты которых представлены в работе [2], эта величина была порядка 112.

Расчет диаграммы устойчивости течения в пограничном слое над вогнутой поверхностью был выполнен Гертлером [3]. Автор показал, что основным параметром, определяющим устойчивость течения, является параметр – аналог числа Тейлора [4], в котором величина зазора между цилиндрами заменена на толщину пограничного слоя:

$$G = \frac{U_0 \theta}{\nu} \left( \frac{\theta}{R} \right)^{1/2} = \text{Re}_\theta \left( \frac{\theta}{R} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где  $U_0$  – характерная скорость течения;  $\theta$  – толщина потери импульса;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $R$  – радиус кривизны поверхности.

Изучению развития неустойчивости течения (линейная задача) в пограничном слое, который образуется над обтекаемой вогнутой поверхностью, посвящены работы [5–7]. В них использовался метод нормальных мод. Предполагалось, что радиус кривизны асимптотически бесконечен и течение является параллельным, тем самым пренебрегалось изменением модовой функции вдоль потока, а учитывался только рост амплитуды возмущений (так называемый "локально-параллельный" подход). Это позволило свести систему уравнений, описывающих развитие возмущений в пограничном слое, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [8] изучена неустойчивость течения вблизи вогнутой поверхности конечного радиуса кривизны и обнаружена сильная зависимость нейтральной кривой от радиуса кривизны в диапазоне малых длин волн. Уравнения, в которых произведен учет непараллельности потока путем включения в уравнения, описывающие поведение возмущений, производных от основного течения в продольном и нормальном направлениях, получены в работе [9] (так называемые "локально-непараллельные" уравнения устойчивости). Однако, анализ уравнений был

выполнен на основе метода нормальных мод и результаты мало отличались от результатов, полученных на основе приближения о параллельности потока.

Влияние непараллельности потока на устойчивость течения в пограничном слое рассмотрено в работах [10, 11], в которых показано, что решение изучаемой задачи об устойчивости течения Блазиуса вдоль вогнутой поверхности не может быть сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, как это имеет место в ряде других задач об устойчивости. Было продемонстрировано, что "локально-параллельный" подход может формально применяться только в случаях, когда порядок толщины пограничного слоя больше, чем длина волны продольных вихрей. Если толщина пограничного слоя имеет тот же порядок или меньше, необходимо рассматривать полную неразрешенную систему уравнений относительно возмущений, которая может быть решена методом прогонки ("marching method"). Отметим, что такая ситуация имеет место вблизи передней кромки рассматриваемой вогнутой поверхности. Указанная система уравнений является параболической, и характер возмущений в заданной области вверх по потоку будет определять поле возмущений во всей области вниз по потоку. Это обуславливает сильную зависимость развивающихся в пограничном слое возмущений от начальных условий, при которых возмущения вводятся в поток. Даже если различные возмущения вводятся в поток в область, расположенную выше по потоку от изучаемой, нельзя уверенно идентифицировать их, как наиболее опасные возмущения, которые имеют наибольшую амплитуду в рассматриваемой области [12]. Было показано, что не существует единой нейтральной кривой устойчивости и результаты зависят от формы начальных возмущений и от положения точки их ввода в поток [11]. В работе [13] продемонстрировано, что достаточно далеко вниз по потоку скорость роста вихрей Гертлера (в линейном случае), в зависимости от продольной координаты, находится в хорошем соответствии для обоих подходов и проблема возникает при определении первой нейтральной точки. В работе [14] выполнен линейный анализ устойчивости течения в пограничном слое с продольным градиентом давления по отношению к продольным вихревым возмущениям. Авторы показали, что с помощью применения локального подхода (параллельного и непараллельного) можно получить единственную нейтральную кривую, в то же время, нелокальный подход приводит к появлению множества маргинальных кривых устойчивости.

Различные аспекты данной проблемы: влияние начальных возмущений, шероховатостей границы и продольного градиента давления, восприимчивость вихрей к внешним возмущениям, вторичная неустойчивость вихрей, формирование грибообразных структур, интенсификация процессов перемешивания и др. – изучались в работах [15–22]. Обзор работ, посвященных изучению характеристик вихрей Гертлера, приведен в работе [12].

В случае, когда криволинейная пластина движется вдоль искривленной траектории, центробежные эффекты также могут приводить к возникновению неустойчивости течения по отношению к продольным вихрям – вихрям Гертлера. Это подтверждается анализом критерия Рэлея для кругового течения невязкой жидкости [12], который состоит в том, что течение будет неустойчиво, если  $\Gamma d\Gamma/dr < 0$ , где  $\Gamma = \nu r$  – циркуляция;  $\nu$  – тангенциальная компонента скорости;  $r$  – радиальная координата. Можно это условие сформулировать и другими словами: если направление центробежной силы  $F$  и ее градиента (в данном случае  $dF/dr$ ) противоположны, то течение неустойчиво [23]. На рис. 2 продемонстрированы случаи устойчивого ( $b$  и  $d$ ) и неустойчивого ( $a$  и  $c$ ) течения вблизи искривленной поверхности. Диаграмма устойчивости течения в пограничном слое для случая ( $a$ ), т. е. для случая, когда пластина движется вдоль окружности и вихри возникают на ее выпуклой поверхности, построена в работе [23] на основе локально-параллельного подхода. Показано, что критическое число Гертлера заметно превышает аналогичную величину для обтекания вогнутой пластины.

В нестационарном течении Куэтта между коаксиальными вращающимися цилиндрами, когда происходит резкая остановка внешнего цилиндра, пограничный слой, возникающий на вогнутой стенке, становится неустойчивым по отношению к трехмерным возмущениям и в нем формируются продольные вихри Гертлера. Причиной их возникновения является дисбаланс между центробежными силами и градиентом давления в радиальном направлении. Эти вихри были экспериментально зарегистрированы и описаны в работах [26, 27]. Аналогичные вихри возникают также и в пограничном слое, который возникает на внешней поверхности резко стартующего цилиндра [27, 28].

Устойчивость течения между двумя коаксиальными цилиндрами при резкой остановке внешнего цилиндра изучена в работе [29], где приведено аналитическое решение, описывающее невозмущенное течение жидкости. Анализ основывался на методе нормальных мод. Устойчивость те-

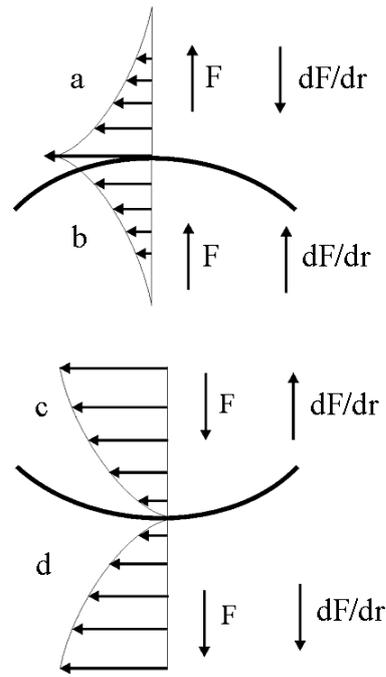


Рис. 2. Схемы течений

чения рассматривалась на основе энергетического подхода, был сформулирован критерий маргинальной устойчивости течения. В работах [30, 31] рассмотрена устойчивость течения Куэтта (линейный анализ) между двумя вращающимися цилиндрами при резкой остановке внешнего цилиндра. Предполагалось, что возмущения имеют форму продольных вихрей. Используя разную нормировку основной продольной компоненты скорости и ее возмущения, получены уравнения для возмущений, которые на основе метода нормальных мод сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Был использован ряд упрощающих предположений, в частности, предполагалось, что скорость роста кинетической энергии возмущений превышает скорость изменения энергии основного течения. Точка нейтральной устойчивости соответствует равенству этих скоростей. Вычислена кривая устойчивости.

Анализ нейтральной кривой устойчивости течения, возникающего при импульсном старте цилиндра, выполнен в работе [32]. На основе метода нормальных мод получена кривая нейтральной устойчивости. ВКБ техника была использована, чтобы получить решение, описывающее поведение возмущений малой длины волны. Проведен анализ применимости квазистационарного подхода к решению задачи.

Наибольший интерес в рассматриваемой про-

блеме состоит, однако, не в изучении кривых устойчивости, в частности, нейтральной кривой, а в исследованиях восприимчивости пограничным слоем возмущений завихренности [25], в данном случае в виде продольных вихрей [24], их селекции, нелинейного развития и т. д. с целью разработки методов управления пограничным слоем. Продольные вихри могут существенным образом менять структуру течения в пограничном слое. Основная причина – формирование под их влиянием системы чередующихся в трансверсальном направлении течений, направленных от поверхности или к ней в нормальном направлении. На нелинейном этапе развития вихрей в пограничном слое формируются так называемые грибообразные структуры, которые характеризуются сильными сдвигами потока вблизи их границ. В области, где имеет место поток, направленный от стенки, происходит выброс низкоскоростной жидкости от стенки и в этой области профиль основного течения резко изменяется, возникает точка перегиба и течение становится неустойчивым, с последующей его турбулизацией. Причиной возникновения грибообразных структур является сильно нелинейный характер течения, особенно в поперечной плоскости.

В данной работе основное внимание уделено проблеме восприимчивости пограничным слоем, развивающимся в нестационарном течении Куэтта между двумя коаксиальными цилиндрами после резкой остановки внешнего цилиндра, к вносимым в пристенную область течения искусственным вихревым возмущением. Интенсивность вносимых возмущений является малой, поэтому их развитие на начальной стадии может быть описано линейными уравнениями движения. По мере роста интенсивности происходит нелинейное взаимодействие возмущений с основным потоком и возникают вихревые структуры, характерные для нелинейной стадии. В работе на основе численного моделирования анализируется влияние расположения места генерации и времени ввода возмущений в поток на характер развития продольных вихрей, в частности на рост энергии, протяженность линейной стадии развития.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим установившееся осесимметричное течение Куэтта вязкой несжимаемой жидкости между коаксиальными вращающимися в одну сторону цилиндрами. Угловые скорости внутреннего и

внешнего цилиндров равны  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно. Радиус внутреннего цилиндра –  $r_1$ , внешнего –  $r_2$ . Расположение осей координат представлено на рис. 3. Здесь вертикальная ось  $z$  направлена вверх, радиальная ось  $r$  направлена вдоль радиуса с началом отсчета на оси, ось  $\varphi$  направлена вдоль окружности. Цилиндры предполагаются неограниченной длины. В момент  $t = 0$

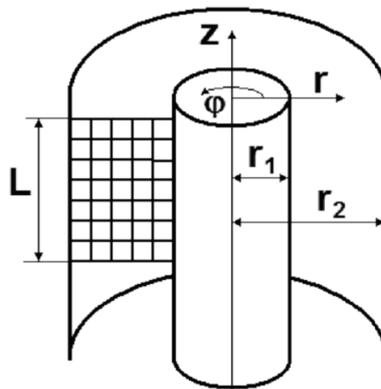


Рис. 3. Расположение системы координат

происходит резкая остановка внешнего цилиндра и на его внутренней поверхности начинает формироваться пограничный слой. Возникающее пристеночное течение вследствие дисбаланса центробежных сил и сил давления становится неустойчивым по отношению к трехмерным продольным вихрям – вихрям Тейлора–Гертлера.

Система уравнений Навье – Стокса, описывающая развитие осесимметричного течения в зазоре между цилиндрами имеет вид

$$D_1 u - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( D_2 u - \frac{u^2}{r} \right), \quad (2)$$

$$D_1 v + \frac{uv}{r} = \nu \left( D_2 v - \frac{v^2}{r} \right), \quad (3)$$

$$D_1 w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu D_2 w, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0, \quad (5)$$

где операторы  $D_1$  и  $D_2$  имеют вид

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad D_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Здесь  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости вдоль координат  $r, \varphi, z$  соответственно;  $t$  – время;  $p$  – давление;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;

$\rho$  – плотность жидкости. Области изменения независимых переменных:  $0 \leq t < \infty$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $-\infty < z < \infty$ .

Будем рассматривать задачу в переменных функция тока  $\psi$  и завихренность  $\zeta$ :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (6)$$

$\varphi$ -ую компоненту вектора завихренности введем следующим образом:

$$\zeta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right). \quad (7)$$

В результате, исключая давление из системы уравнений (2)–(5), получаем систему уравнений [32]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial r} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + u \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + w \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right), \quad (9)$$

$$r^2 \zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (10)$$

$$\Gamma = rv. \quad (11)$$

Уравнения (8)–(11) приведены к безразмерному виду путем введения характерных масштабов длины  $L_{ch} = r_2$  и времени  $T_{ch} = \Omega_2^{-1}$ . Число Рейнольдса в данном случае будет  $\text{Re} = \Omega_2 r_2^2 / \nu$ . Приведенная система уравнений с учетом выражений (6), (7) описывает изучаемое течение в переменных  $\psi, \zeta, \Gamma$ .

Поскольку рассматривается течение между бесконечными цилиндрами, для численных расчетов используется известный подход [33, 34], при котором применяется периодическое продолжение ограниченной области длиной  $L$ , в которой проводились вычисления (см. рис. 3), вдоль оси  $z$ . При этом предполагается, что

$$F(t, r, z) = F(t, r, z + L), \quad (12)$$

$$\frac{\partial F(t, r, z)}{\partial z} = \frac{\partial F(t, r, z + L)}{\partial z}, \quad (13)$$

где в качестве функции  $F$  рассматриваются функции  $\Gamma, \psi, \zeta$ , а  $L$  – область интегрирования.

Из условий непротекания на стенках цилиндров следует, что функция тока на них постоянна. Учитывая, что рассматривается случай, когда отсутствует расход жидкости вдоль оси  $z$ , можно записать

$$\psi = 0 \text{ при } r = r_1/r_2 \text{ и } r = 1, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_1/r_2 \text{ и } r = 1. \quad (15)$$

Граничное условие для циркуляции определяется спецификой конкретной рассматриваемой задачи. В данном случае рассматривается случай, когда жидкость движется в зазоре между цилиндрами в режиме "твёрдого вращения", т. е.  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ . Тогда начальные условия имеют вид

$$v(0, r) = r \text{ при } r_1/r_2 < 1. \quad (16)$$

Граничные условия для завихренности использовались в виде, предложенном Тома или Йенсеном [35].

Для численного решения поставленной задачи применялся явный по времени конечно-разностный метод. Пространственные производные (за исключением конвективных слагаемых) аппроксимировались с помощью центральных разностей со вторым порядком точности по  $\Delta r$  и  $\Delta z$  (шаги интегрирования), а производная по времени – с первым порядком точности по  $\Delta t$ . Конвективные слагаемые аппроксимировались разностями против ветра со вторым порядком точности [35]. Величина шага по времени выбиралась при заданных значениях шагов  $\Delta r, \Delta z$  и числа Рейнольдса так, чтобы удовлетворялось условие Неймана

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\text{Re}} \left( \frac{2}{\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta z^2} + \right. \\ \left. + \text{Re} \frac{|u_{\max}|}{\Delta r} + \text{Re} \frac{|u_{\max}|}{\Delta z} \right) \leq 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Известно, что схема "против потока" первого порядка точности обладает значительной схемной вязкостью. Можно показать [34], сравнивая отброшенные члены в разложении Тейлора конвективных членов с вязкими членами, что при расчетах должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} \gg |u_{\max}| \frac{\Delta r}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2},$$

откуда следует условие на выбор шага  $\Delta r$

$$\text{Re} \frac{|u_{\max}| \Delta r}{2} \ll 1. \quad (18)$$

Учитывая, что максимальные значения возмущений компонент скорости  $u$  и  $w$  могут достигать довольно больших значений, данное условие можно характеризовать как достаточно жесткое. Отметим, что подобные оценки справедливы и для шага  $\Delta z$ . Несмотря на то, что в работе использовалась схема второго порядка точности, которая

имеет значительно лучшие характеристики, выбор пространственных шагов осуществлялся с учетом условий (18).

Следует также упомянуть о точности выполнения выбранной схемы в приграничных слоях сетки. Непосредственный расчет по схеме второго порядка выполнить затруднительно в случае, когда скорость направлена от стенок цилиндров и узлы сетки выходят из зоны интегрирования. В этом случае осуществлялась аппроксимация производных с первым порядком точности, хотя величина конвективного члена, тем не менее, имела второй порядок точности, поскольку на стенках выполнялось условие прилипания.

Для решения эллиптического уравнения (11) применялся метод итераций, причем производные аппроксимировались центральными разностями. Для улучшения сходимости решения вводился релаксационный множитель (метод верхней релаксации).

Известно, что в начальный момент после мгновенного торможения все изменения параметров потока сосредоточены в узком пристеночном слое вблизи поверхности цилиндра и решение носит сингулярный характер. Непосредственное применение уравнений (8)–(11) в данном случае может приводить к ошибке. Учитывая эту особенность развития течения, возмущения вносились в пограничный слой не в момент остановки цилиндра, а с некоторым запаздыванием, когда профиль скорости становился достаточно плавным.

## 2. ОСНОВНОЕ ТЕЧЕНИЕ И ПАРАМЕТРЫ ВОЗМУЩЕНИЙ

После остановки внешнего цилиндра внутренний цилиндр продолжает вращаться с прежней скоростью. На внутренней поверхности внешнего цилиндра формируется пограничный слой, характеристики которого несколько отличаются от обычного пограничного слоя на пластине. Схематически это показано на рис. 4, где приведены кривые профилей скорости, формирующихся в зазоре между цилиндрами для разных моментов времени  $t_1 (t_3 > t_2 > t_1)$ .

Профиль основной скорости в данном случае имеет максимум, положение которого с течением времени по мере развития пограничного слоя смещается в направлении нормали. Здесь же представлен профиль скорости, соответствующий профилю Блазиуса. Видно, что имеется отличие профилей скорости основного течения от профиля Блазиуса (пунктирная кривая 1). Это отличие свя-

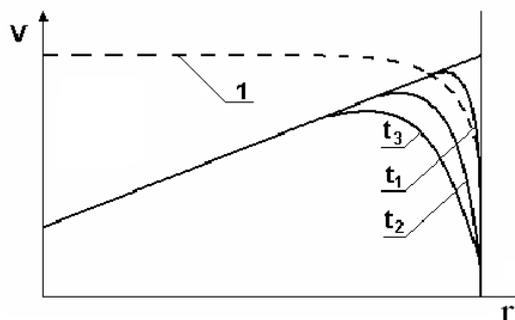


Рис. 4. Профиль скорости основного течения между цилиндрами для разных моментов времени

зано с существованием максимума скорости основного течения, положение которого меняется по мере развития течения. Очевидно, что с увеличением радиуса внешнего цилиндра профиль скорости будет приближаться к профилю Блазиуса.

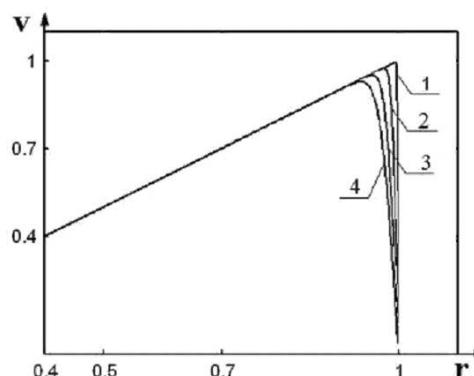


Рис. 5. Рассчитанные профили скорости основного течения между цилиндрами для разных моментов времени  $T = t\Omega_2$ . Кривая 1 соответствует  $T = 0.01$ , кривая 2 –  $T_m = 0.5$ , кривая 3 –  $T_m = 2.0$ , кривая 4 –  $T_m = 4.0$

На рис. 5 представлены рассчитанные профили скорости для различных моментов времени. Отметим, что результаты численного расчета совпадают с результатами, полученными при использовании аналитических зависимостей, описывающих изменение профиля скорости, которые приведены в [29].

При формировании пограничного слоя на пластине появляется важный масштаб длины, характеризующий развитие пограничного слоя. Это толщина пограничного слоя.

В качестве характерного масштаба в работе рассматривалась толщина потери импульса, которая

Табл 1. Характерные значения толщины потери импульса

$T$	$\theta$
0.01	6.8417581E-04
0.05	1.6438288E-03
0.5	5.2949656E-03
2	1.0654877E-02

рассчитывалась по формуле

$$\theta(t) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{v(r,t)}{v_0(r)} \left(1 - \frac{v(r,t)}{v_0(r)}\right) r dr. \quad (19)$$

Очевидно, что толщина потери импульса в рассматриваемом случае отличается от аналогичной величины для случая течения Блазиуса. На рис. 6 представлена кривая, характеризующая изменение безразмерной толщины потери импульса для рассматриваемого нестационарного течения Куэтта от времени. Здесь же приведена зависимость толщины потери импульса для течения Блазиуса. Отличие кривой, которая характеризует изменение толщины потери импульса со временем, полученной для пограничного слоя, развивающегося на внутренней поверхности цилиндра, от аналогичной кривой для профиля Блазиуса обусловлено, как отмечено выше, характером течения между цилиндрами и возникновением максимума скорости на некотором расстоянии от цилиндрической поверхности.

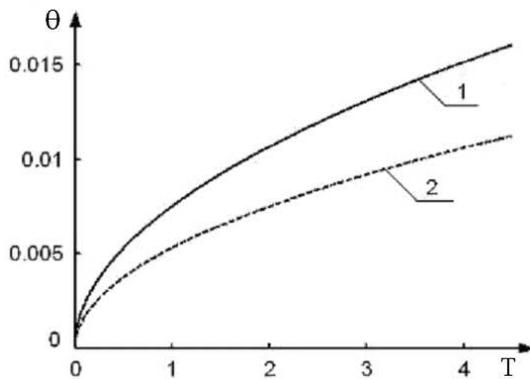


Рис. 6. Изменение толщины потери импульса от времени. Кривая 1 относится к нестационарному течению Куэтта, кривая 2 – к течению Блазиуса

В таблице 1 приведены численные значения толщины потери импульса, вычисленные по формуле (19), для некоторых характерных значений  $T$ .

Одним из важных параметров, характеризующих развитие неустойчивости в пограничном слое,

развивающимся на искривленной поверхности, является число Гертлера, которое вычислялось в работе по формуле

$$G = \frac{v_{max}\theta}{v} \sqrt{\frac{\theta}{r_2}} \quad (20)$$

где  $v_{max}$  – максимальное значение азимутального значения скорости для данного момента времени. Определяемое таким образом число Гертлера несколько лучше соответствует характеру замедляющегося течения в рассматриваемом течении [34]. Из рис. 6 видно, что толщина потери импульса заметно отличается от аналогичной величины для течения Блазиуса. Это вызывает соответствующие изменения числа Гертлера, которые необходимо учитывать при проведении сравнения с результатами других исследований.

В работе рассматривалось развитие осесимметричных возмущений в пограничном слое в зависимости от их интенсивности, места ввода, степени развития пограничного слоя. В начале расчетов ( $t = 0$ ) задавалось значение циркуляции  $\Gamma(0, r, z)$  в соответствии с (16), затем в заданный момент времени  $T_m$  (после некоторого промежутка времени после остановки цилиндра) в поток вносились возмущения. В качестве таких возмущений использовались осесимметричные возмущения завихренности, которые располагались вдоль цилиндрической поверхности, отстоящей от поверхности цилиндра на заданном расстоянии. Интенсивность этих возмущений изменялась периодически вдоль вертикальной координаты с заданным периодом и описывалась выражением

$$\zeta(T_m, r_d, z) = \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \cdot 10^{-k}, \quad (21)$$

где  $r_d$  – радиус цилиндрической поверхности, на которой располагались вводимые возмущения;  $\lambda$  – длина волны возмущений;  $k$  – параметр, характеризующий интенсивность возмущений. На рис. 7, а представлено распределение завихренности (21) вдоль области интегрирования (вдоль оси  $z$ ).

Здесь величины шагов были равны  $\Delta r = 0.001$ ,  $\Delta z = 0.005$ , расчетная сетка имела размеры  $600 \times 200$ , шаг по времени составлял  $\Delta t = 0.001$ . Возмущение вводилось в поток в момент времени  $T_m = 0.01$ , при  $r_d = 0.989$ , параметр  $k = -1$ . Радиус внутреннего цилиндра составлял  $r_1 = 4.5$  см. На рис. 7, б представлена вычисленная картина линий тока, отвечающая данному распределению завихренности. Фрагмент картины линий тока в увеличенном виде представлен на рис. 7, с.

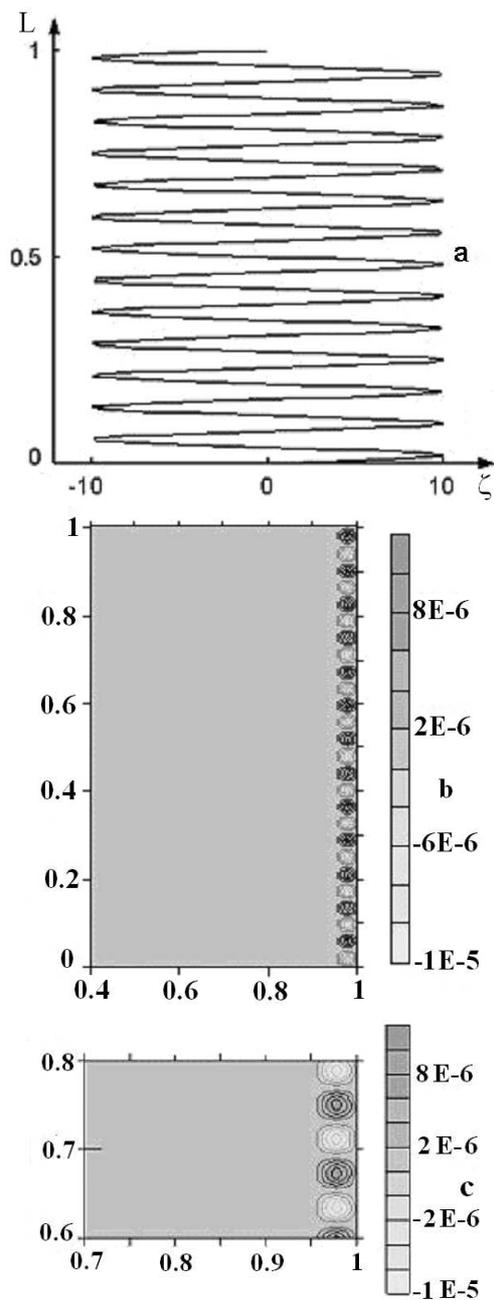


Рис. 7. Распределение завихренности (21) вдоль области интегрирования (a) и соответствующее распределение линий тока (b). Фрагмент картины линий тока в увеличенном виде (c)

Другой тип возмущений, который изучался в работе, представлял собой точечные возмущения завихренности, которые располагались на аналогичной цилиндрической поверхности с заданным шагом вдоль координаты  $z$

$$\zeta(T_m, r_d, z) = \tilde{A}(-1)^n \delta[z - z_1(n + 1)] \cdot 10^{-k}, \quad (22)$$

где параметр  $n$  изменяется от 0 до 25,  $\delta$  – дельта функция.

Параметры, определяющие место и время ввода возмущений те же, что и для непрерывного распределения завихренности. Амплитуда возмущений ( $\tilde{A}$ ) выбиралась из условия, что суммарная амплитуда завихренностей (21), вычисленная за половину периода, равнялась амплитуде точечного возмущения завихренности (22). На рис. 8, a представлен вид распределения завихренности (22) в виде крестиков.

Здесь же для сравнения представлен вид непрерывно распределенной завихренности (21). Вычисленная картина линий тока, соответствующая распределению завихренности (22), изображена на рис. 8, b, и фрагмент этой картины (в увеличенном виде) – на рис. 8, c.

Анализ картин линий тока, соответствующих непрерывно (21) и дискретно (22) распределенным возмущениям завихренности, которые внесены в пограничный слой, показал, что они близки друг к другу. Расчеты показали, что небольшие отличия наблюдаются только на краях зоны интегрирования, что связано с влиянием условий периодичности. Основные расчеты в работе проводились с использованием непрерывного распределения завихренности, дискретное распределение завихренности применялось в отдельных случаях. Анализ показал, что основные результаты расчетов практически совпадают для обоих распределений. Вычисления развития возмущений проводилось для одного режима течения и основное внимание уделялось, как упоминалось выше, изучению влияния энергии вносимых возмущений, места ввода, степени развития пограничного слоя.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ РАЗВИТИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Как было сказано выше, в работе изучалось влияние энергии, места введения возмущений, степени развития пограничного слоя на развитие возмущений и вызываемых ими изменений характеристик основного течения.

**Энергия возмущений.** Одной из основных характеристик развивающихся возмущений является их энергия, которая рассчитывалась по формуле

$$E(t) = \pi \rho \int_0^L \int_{r_1}^{r_2} (u^2 + (v')^2 + w^2) r dr dz, \quad (23)$$

где  $v'$  – азимутальная компонента возмущений

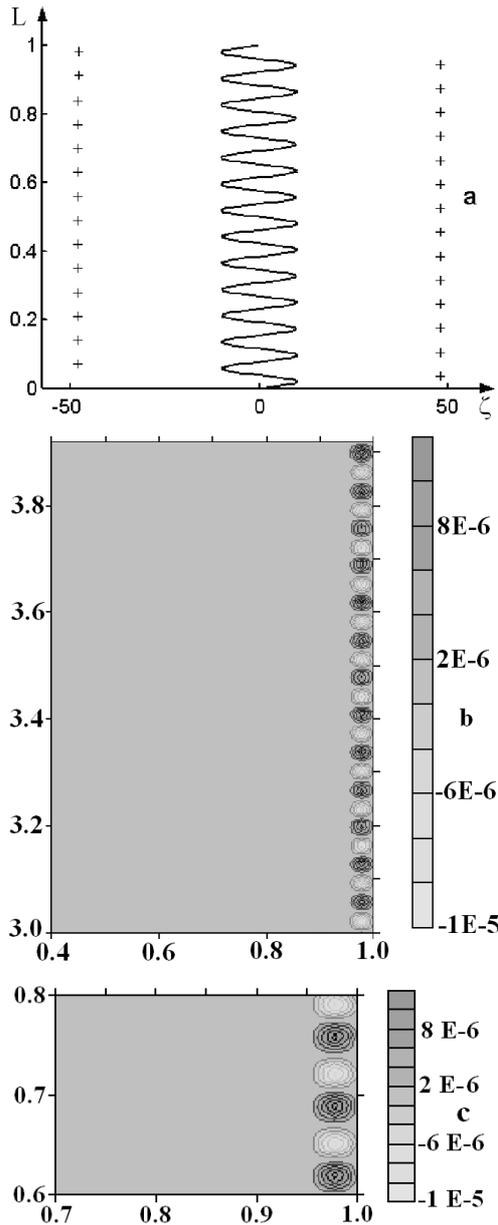


Рис. 8. Распределение завихренности (22) вдоль области интегрирования (a) и соответствующая ему картина линий тока (b). Фрагмент картины линий тока в увеличенном виде (c)

скорости.

Обычно полагается, что вначале развитие вносимых возмущений носит линейный характер. По мере роста интенсивности возмущений их развитие приобретает нелинейный характер, амплитуда становится достаточно большой и происходит перестройка вихревой системы. Интенсивные возмущения начинают влиять на основное течение. Исходя из этого, параметр в выражениях (21) и

(22) выбирался таким образом, чтобы начальная энергия возмущений была сравнительно небольшой и на начальном их этапе роста имел место линейный характер развития возмущений. В работе исследовалось влияние начальной интенсивности возмущений на их рост. На линейном этапе рост интенсивности возмущений растет по экспоненциальному закону, причем вихри развиваются практически независимо друг от друга. По мере возрастания роли нелинейных эффектов наблюдается отклонение от экспоненциального роста, вихри начинают взаимодействовать друг с другом и вихревая система начинает перестраиваться. Важным вопросом, на который не обращается, как правило, достаточного внимания, является поведение возмущений на начальной стадии сразу после их ввода в поток. Очевидно, что вводимые возмущения должны сначала приспособиться к условиям развивающегося пограничного слоя. Более того, процесс приспособления зависит от места ввода возмущений в поток и степени развития пограничного слоя. Эти вопросы будут рассмотрены позже. В данном случае основное внимание будет уделено изучению характера роста энергии возмущений в зависимости от их начальной энергии. Будут рассмотрены различные соотношения между толщиной пограничного слоя,  $\delta$ , и расстоянием места ввода от стенки,  $1 - r_d$ . Для изучения зависимости роста энергии возмущений от их начальной энергии при разном времени их ввода в пограничный слой (по сути, при разных толщинах пограничного слоя) расчеты были выполнены для следующих значений:  $T_m = 0.01$ ;  $T_m = 0.05$ ;  $T_m = 0.5$ ;  $T_m = 2, 0$ . Радиус поверхности, на которую вводились возмущения, составлял  $r_d = 0.994$ , т. е. расстояние от внутренней стенки было равно 0.006. Расчетная сетка при вычислениях составляла  $200 \times 600$ , пространственные шаги равнялись  $\Delta r = 0.001$ ,  $\Delta z = 0.005$ , временной шаг  $\Delta t = 0.001$ .

На рис. 9 представлены кривые, характеризующие изменение энергии возмущений во времени в зависимости от их начальной энергии для случая, когда время ввода возмущений в поток равнялось  $T_m = 0.01$ . Отметим, что в каждом случае значения энергии нормировались на свое начальное значение.

Из рисунка видно, что, действительно, с течением времени наблюдается экспоненциальный рост энергии, что соответствует развитию вихрей в пограничном слое согласно линейной теории. Отклонение от этого "линейного" закона наблюдается в разные моменты времени  $T_e$  в зависимости от интенсивности вносимых возмущений: чем боль-

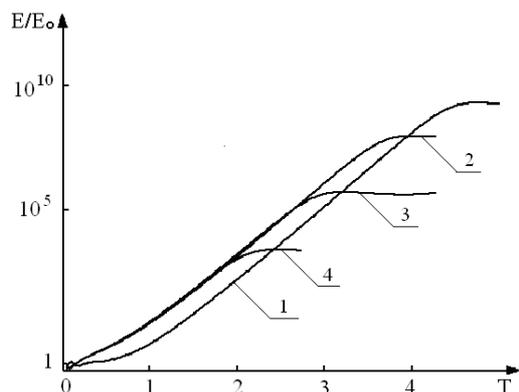


Рис. 9. Зависимость роста энергии возмущений от их начальной энергии. Кривая 1 соответствует значению  $k = 2$ , кривая 2 –  $k = 1$ , кривая 3 –  $k = 0$ , кривая 4 –  $k = -1$ . Возмущения вводились при  $T_m = 0.01$

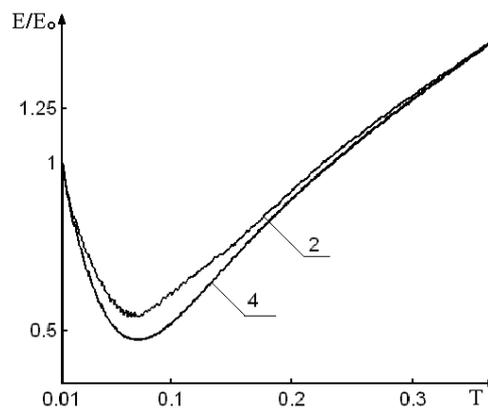


Рис. 10. Рост энергии возмущений от их начальной энергии на начальном этапе развития. Кривая 2 соответствует значению  $k = 1$ , кривая 4 –  $k = -1$ . Возмущения вводились при  $T_m = 0.01$

ше амплитуда начальных возмущений, тем раньше происходит отклонение от "линейного" закона (см. табл. 2). Указанные отклонения обусловлены существенным возрастанием нелинейных эффектов, которые вызывают замедление роста возмущений и перестройку основного течения в пограничном слое. Видно, что линейная теория может применяться для описания развития вихрей Гертлера только до определенного предела, который зависит от их начальной энергии. Важно отметить, что вначале после ввода энергия возмущений уменьшается, что связано с этапом приспособления возмущений к местным условиям течения. Из рис. 6 (см. также табл. 1) видно, что в данном случае в момент времени ввода возмущений толщина потери импульса составляет величину  $6.8 \cdot 10^{-4}$ , а толщина пограничного слоя соответственно равна  $\delta = 0.005$ . Отсюда следует, что центр возмущений в момент ввода в поток находился выше верхней границы пограничного слоя.

На рис. 10 представлены результаты расчета зависимости энергии возмущений от времени на начальной стадии развития. Видно, что вначале энергия вихрей заметно уменьшается. Это связано с тем, что центры вихрей находятся вне пограничного слоя, т.е. в области, где практически отсутствует сдвиг скорости, и взаимодействие вихрей с потоком является очень слабым. В этом случае наблюдается затухание вихрей под действием диссипативных сил и сил "плавучести". По мере развития пограничного слоя его толщина растет и вихри (хоть и с меньшей энергией вследствие затухания) попадают в зону сдвигового течения и постепенно их энергия возрастает.

Как видно из рис. 10, на начальной стадии име-

ет место значительное уменьшение энергии вихрей, более чем в два раза. Протяженность начальной стадии развития вихрей, на которой их энергия уменьшается, потом постепенно возрастает и достигает значений начальной энергии, является довольно значительной. Это свидетельствует о важности учета стадии приспособления вихревых возмущений к условиям течения при использовании этих возмущений с целью управления характеристиками пограничного слоя. В табл. 2 представлена оценка моментов времени  $T_b$  для разной начальной интенсивности возмущений, когда энергии возмущений после частичного затухания достигает своего начального значения. Заметим, что наблюдаемое на рисунке более сильное затухание интенсивных вихрей ( $k = -1$ ) по сравнению с менее интенсивными вихрями ( $k = 1$ ) зависит также, кроме отмеченных выше факторов, от начальной энергии возмущений.

В случае ввода в поток очень слабых возмущений ( $k = 2$ ), их взаимодействие с основным течением также является слабым, и вначале величина их энергии претерпевает слабые изменения, поскольку роль диссипативных процессов также относительно мала. С течением времени энергия вихрей возрастет, степень взаимодействия с основным потоком увеличивается и наблюдается интенсивный рост их энергии. Важно отметить, что продолжительной начальной стадии для слабых вихревых возмущений заметно больше, чем для более интенсивных вихрей (см. табл. 2). При более позднем вводе возмущений в поток характер изменений их энергии принципиально не меняется. На рис. 11 представлены результаты расчетов изменения энергии возмущений, нормированной на на-

Табл. 2. Параметры, характеризующие развитие возмущений

$T_m$		$T_b$	$T_e$	$\beta$
0.01	$k = 2$	-	4.6	5.96
	$k = 1$	0.22	3.2	5.8
	$k = 0$	-	2.9	5.9
	$k = -1$	0.23	2.4	5.8
0.05	$k = 2$	-	4.6	5.9
	$k = 1$	0.15	3.8	6
	$k = 0$	-	3.05	5.6
0.5	$k = 2$	-	4.8	6
	$k = 1$	0.554	3.7	6
	$k = 0$	-	3.2	6.1
	$k = -1$	0.554	2.4	5.9
2.0	$k = 2$	-	6.2	6
	$k = 1$	2.06	5.4	5.7
	$k = 0$	-	4.6	5.7
	$k = -1$	2.06	3.9	5.7

начальное значение, в зависимости от времени в случае, когда время ввода составляло  $T_m = 0.05$ . Расстояние от места ввода до поверхности цилиндра составляло, как и раньше,  $\Delta = 1 - r_d = 0.006$ . Толщина потери импульса в этом случае равнялась  $\theta = 1.64 \cdot 10^{-3}$  и соответственно толщина пограничного слоя  $\delta = 0.012$ . Отсюда следует, что центры вносимых вихревых возмущений находятся внутри пограничного слоя.

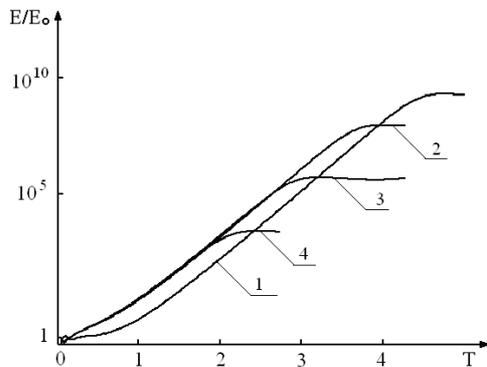


Рис. 11. Зависимость роста энергии возмущений от их начальной энергии. Кривая 1 соответствует значению  $k = 2$ , кривая 2 –  $k = 1$ , кривая 3 –  $k = 0$ , кривая 4 –  $k = -1$ . Возмущения вводились при  $T_m = 0.05$

Анализ показывает, что и в данном случае отклонения от "линейного" закона существенным образом зависят от начальной энергии возмущений: чем больше начальная энергия возмущений, тем раньше эти отклонения наблюдаются. Это

связано, как отмечено ранее, с более ранним проявлением нелинейных эффектов в развитии возмущений. Как и при более раннем вводе возмущений, можно выделить начальную стадию, на которой возмущения приспосабливаются к условиям потока. На рис. 12 представлены результаты расчета энергии возмущений на начальной стадии.

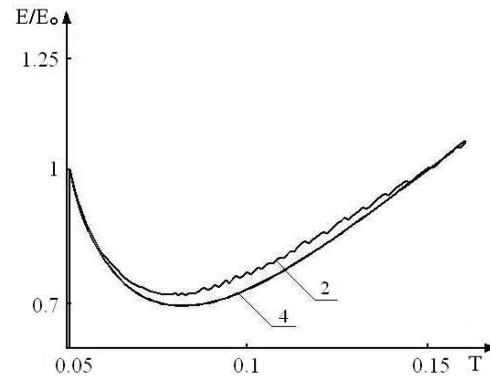


Рис. 12. Рост энергии возмущений от их начальной энергии на начальном этапе развития. Кривая 2 соответствует значению  $k = 1$ , кривая 4 –  $k = -1$ . Возмущения вводились при  $T_m = 0.05$

Как видно из рис. 12, на начальной стадии, как и при более раннем вводе наблюдается заметное падение энергии возмущений, что связано процессом приспособления возмущений к условиям потока. Однако, из сравнения рис. 10 и 12 следует, что при  $T_m = 0.05$  падение энергии значительно меньше. Это связано с тем, что большая часть области вихревых возмущений находится в зоне сдвигового течения и за счет взаимодействия с основным потоком происходит более быстрое нарастание энергии и уменьшение протяженности начальной стадии ( $T_b - T_m$ ), в частности, как видно из табл. 2 энергия возмущений достигает своего начального уровня раньше, чем в предыдущем случае. Отметим, что на начальной стадии наблюдается большее падение энергии возмущений, начальная энергия которых выше, но уже при  $T = T_b$  их значения становятся близкими.

Характер изменений энергии возмущений остается близким к описанному выше при еще более позднем вводе возмущений в пограничный слой. На рис. 13 представлены результаты расчета энергии возмущений, когда они вводились в поток в момент времени  $T_m = 0.5$ . Все остальные параметры задачи оставались теми же, что рассматривалось ранее. В данном случае, толщина вытеснения равнялась (см. табл. 1)  $\theta = 5.3 \cdot 10^{-3}$  и, соответственно, толщина пограничного слоя состав-

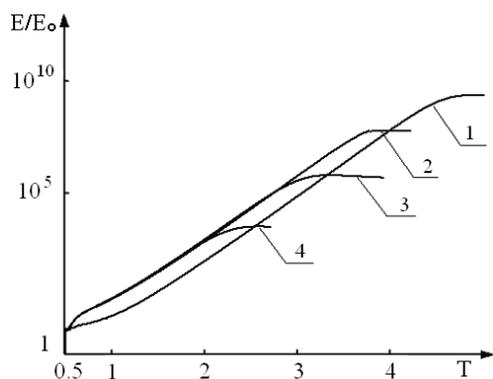


Рис. 13. Зависимость роста энергии возмущений от их начальной энергии. Кривая 1 соответствует значению  $k = 2$ , кривая 2 –  $k = 1$ , кривая 3 –  $k = 0$ , кривая 4 –  $k = -1$ . Возмущения вводились при  $T_m = 0.5$

ляет  $\delta = 0.04$ , что заметно больше, чем расстояние до стенки  $\Delta = 1 - r_d = 0.006$ . Отсюда следует, что основная часть области вихревых возмущений находилась внутри пограничного слоя.

Анализ показывает, что характер изменения энергии в данном случае остается прежним, имеются только количественные изменения. В частности, несколько позже наступают отклонения от "линейного" закона. Кроме того, на начальной стадии наблюдается, как и ранее, заметное падение энергии, хотя оно меньше, чем в случае  $T_m = 0.05$ . Как видно из рис. 14, продолжительность начальной стадии ( $T_b - T_m$ ) существенно уменьшается.

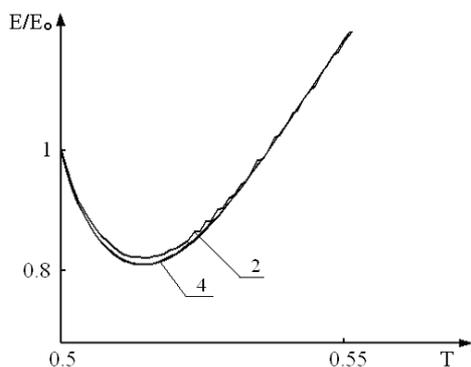


Рис. 14. Рост энергии возмущений от их начальной энергии на начальном этапе развития. Кривая 2 соответствует значению  $k = 1$ , кривая 4 –  $k = -1$ . Возмущения вводились при  $T_m = 0.5$

Были также проведены расчеты развития возмущений, когда возмущения целиком находились внутри пограничного слоя, а последний был достаточно развит. Момент ввода возмущений составлял  $T_m = 2.0$ . Как видно из табл. 1, толщи-

на потери импульса равна  $\theta = 1.1 \cdot 10^{-2}$  и, соответственно, толщина пограничного слоя составляет  $\delta = 0.08$ , что значительно превышает расстояние от места ввода возмущений до стенки  $\Delta = 1 - r_d = 0.006$ . Результаты расчетов приведены на рис. 15. Из рисунка видно, что, действительно, с течением времени наблюдается экспоненциальный рост энергии, что соответствует развитию вихрей в пограничном слое согласно линейной теории. Отклонение от этого "линейного закона" наблюдается в разные моменты времени, в зависимости от интенсивности вносимых возмущений: чем больше амплитуда возмущений, тем быстрее происходит отклонение от "линейного закона". Указанные отклонения обусловлены существенным возрастанием нелинейных эффектов, которые вызывают перестройку течения в пограничном слое. Видно, что линейная теория может применяться для описания развития вихрей Гертлера только до определенного предела, который зависит от их начальной энергии. Важно отметить, что в случае ввода в поток очень слабых возмущений ( $k = 2$ ), их взаимодействие с основным течением также является слабым, и вначале их энергия растет медленно и важную роль в данном случае играют диссипативные процессы. С течением времени энергия вихрей возрастет, степень взаимодействия с основным увеличивается и наблюдается интенсивный рост их энергии. Отметим, что в этом случае для анализа устойчивости течения (но не развития возмущений, что рассматривается в работе) может быть использован метод нормальных мод, т. е. локально-параллельный подход.

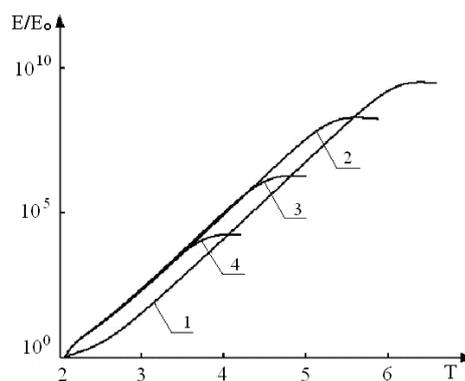


Рис. 15. Зависимость роста энергии возмущений от их начальной энергии. Кривая 1 соответствует значению  $k = 2$ , кривая 2 –  $k = 1$ , кривая 3 –  $k = 0$ , кривая 4 –  $k = -1$ . Возмущения вводились при  $T_m = 2.0$

На рис. 16 приведены результаты расчетов зависимости энергии от времени на начальной стадии.

Видно, что в данном случае падение энергии во-

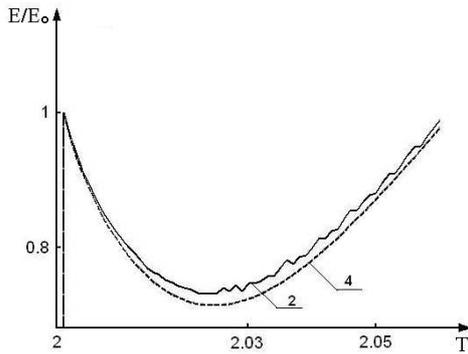


Рис. 16. Рост энергии возмущений от их начальной энергии на начальном этапе развития. Кривая 2 соответствует значению  $k = 1$ , кривая 4 –  $k = -1$ . Возмущения вводились при  $T_m = 2.0$

змущений на начальной стадии слабо зависит от начальной энергии, величина падения энергии на начальной стадии мало отличается от случая, когда  $T_m = 0.5$ , продолжительность начальной стадии ( $T_b - T_m$ ), практически та же, что и в случае ввода возмущений в момент  $T_m = 0.5$ .

Остановимся далее на таком важном вопросе как степень нарастания возмущений. Известно, что существуют три варианта меры степени нарастания возмущений [13], которое изменяется по экспоненциальному закону  $a(x) = a_0 \exp(gx)$ . Общее выражение для определения скорости нарастания имеет вид

$$\beta = \frac{1}{a} \frac{da}{dx}. \quad (24)$$

Первый вариант связан с определением скорости нарастания максимального значения продольной компоненты скорости в пограничном слое, т. е.  $a(x) = \max u$  для заданного значения  $y$ . Это простейшая мера скорости нарастания, которая, однако, не учитывает толщину области возмущенного течения, которое изменяется по мере того, как максимум профиля продольной скорости движется от стенки с ростом величины  $x$ . Другой вариант основывается на интегральной оценке энергии продольной компоненты скорости возмущений, т. е.  $a(x) = \int u^2 dy$ , в котором не учитываются все компоненты скорости. И, наконец, третий вариант, рассматривавшийся в работах [10, 11], основывается на учете всех компонент скорости возмущений:  $a(x) = \int (u^2 + v^2 + w^2) dy$ . В данной работе в качестве критерия скорости нарастания возмущений принят последний вариант, в котором, однако, учтено, что изменение энергии происходит во времени, т. е.

$$\beta = \frac{1}{E_{in}} \frac{dE(T)}{dT}, \quad (25)$$

где  $E_{in}$  – энергия возмущений в начале линейной стадии.

Данные расчетов приведены в табл. 2. Видно, что, в целом, значения коэффициентов нарастания энергии возмущений близки друг другу, но имеется весьма слабая зависимость этого коэффициента от начальной энергии возмущений, которая проявляется в том, что более энергичные возмущения затухают несколько медленнее по сравнению с менее энергичными.

В результате анализа проведенных расчетов можно сделать следующие выводы.

1. При введении в поток регулярных вихревых возмущений, которые представляют собой систему продольных вихрей типа вихрей Гертлера, вначале наблюдается заметное падение энергии вихревых возмущений, связанное с их приспособлением к особенностям потока. Продолжительность начальной стадии зависит от соотношения между расстоянием от места ввода возмущений до стенки и толщиной пограничного слоя. В случае, когда толщина пограничного слоя мала и центры вихревых возмущений находятся вне его, и основная часть вихревых возмущений находится вне сдвиговой (в устойчивой) зоны, что приводит к существенному уменьшению энергии возмущений, и, соответственно, продолжительность начальной стадии увеличивается. Падение энергии возмущений тем больше, чем больше энергия начальных возмущений.

2. После начальной стадии развития вихревые возмущения начинают развиваться в соответствии с линейной теорией, т. е. по экспоненциальному закону. С течением времени по мере развития вихревых возмущений их энергия растет и становятся важными нелинейные эффекты. Влияние последних приводит к отклонению кривых роста энергии от экспоненциального закона. Времена, при которых наблюдаются указанные отклонения, зависят от начальной энергии возмущений: чем выше начальная энергия, тем раньше наблюдаются отклонения. Это связано с тем, что при большой начальной энергии возмущений влияние нелинейных эффектов проявляется раньше.

3. Сравнение результатов расчетов развития непрерывно распределенных вихревых возмущений в виде индуцируемых распределений завихренности и соответствующих точечных распределений завихренности показал, что результаты хорошо согласуются.

1. Swearingen J. D. and Blackwelder R. F. The growth and the breakdown of streamwise vortices in the presences of a wall // J.Fluid.Mech.– 1987.– **182**.– P. 225–290.
2. Mitsudharmadi H., Winoto S. H. and Shah D. A. Development of boundary-layer flow in the presence of forced wavelength Görtler vortices // Phys. Fluids.– 2004.– **16**.– P. 3983.
3. Gertler H. Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden // Nachr. Wiss. Ges. Göttingen, Math.Phys. Klasse, Neue Folge.– 1940.– **2**,N1.– P. 1–26.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– М: Наука, 1969.– 742 с.
5. Smith A.M.O. On the growth of Taylor-Goertler vortices along highly concave wall // Quart.of Applied Math.– 1955.– **13**, N 3.– P. 233–262.
6. Hammerlin G. Über das Eingenwertproblem der dreidimensiphalen Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden // J. Rat. Mech. Anal.– 1955.– **4**.– P. 279–321.
7. Schultz-Grunov F., Behbahani Dj. Boundary layer stability at longitudinally curved walls // ZAMP.– 1973.– **24**, N 4.– P. 499–506.
8. Herbert T. On the stability of the boundary layer along concave wall // Archives of Mechanics.– 1976.– **28**, N 5-6.– P. 1039–1055.
9. Floryan J. M., Saric W.S. Stability of Gertler vortices in boundary layers // AIAA J.– 1982.– **20**, N 3.– P. 316–324.
10. Hall P. Taylor-Gertler vortices in fully developed or boundary-layer flows: Linear theory // J. Fluid Mech.– 1982.– **124**.– P. 475–494.
11. Hall P. The linear development of Gertler vortices in growing boundary layers // J. Fluid Mech.– 1983.– **130**.– P. 41–58.
12. Saric W.S. Gertler vortices // Annual Rev. Fluid Mech.– 1994.– **26**.– P. 379–409.
13. Day H. P., Herbert T., Saric W.S. Comparing local and marching analysis of Gertler instability // AIAA J.– 1990.– **28**, N 6.– P. 1010–1015.
14. Goulpie P., Klingmann G.B., Bottaro A. Gertler vortices in boundary layers with streamwise gradient: Linear theory // Phys. Fluids.– 1996.– **8**, N 2.– P. 451–459.
15. Benmalik A., Saric W.S. Effects of curvature variations on the nonlinear evolution of Gertler vortices // Phys Fluids.– 1994.– **6**, N 10.– P. 3353–3367.
16. Боголепов В.В., Липатов И.И. Асимптотический анализ развития вихрей Гертлера а пограничном слое жидкости около вогнутой поверхности.– Препринт. Центр.: Аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, 1990.– 54 с.
17. Тимошин С.Н. Асимптотический анализ пространственно- неустойчивого спектра вихрей Гертлера // Изв. АН ССР, МЖГ.– 1990.– N1.– С. 32–41.
18. Itoh N. A non-parallel theory for Gertler instability of Folkner-Scan boundary layers // Fluid Dyn. Res.– 2001.– **28**, N 5.– P. 383–396.
19. Sabry A.S., Liu J.T.C. Longitudinal vorticity elements in boundary layers: nonlinear development from initial Gertler vortices as a prototype problem // J. Fluid Mech.– 1991.– **231**.– P. 615–663.
20. Lee K., Liu J.T.C. On the growth of mushroomlike structures in nonlinear spatially developing Gertler vortex flow // Phys. Fluids.– 1992.– **4**, N 1.– P. 95–103.
21. Girgis I.G., Liu J.T.C. Mixing enhancement via the release of strongly nonlinear longitudinal Gertler vortices and their secondary instability into the mixing region // J. Fluid Mech.– 2002.– **468**.– P. 29–75.
22. Liu J.T.C. Reynolds analogy transfer intensification through an extended vortices with applications to boundary layer heat // Phil. Trans. R. Soc. A.– 2008.– **366**.– P. 2699–2716.
23. Никишова О.Д. Устойчивость течения вблизи криволинейной движущейся поверхности к трехмерным возмущениям // Прикладная гидромеханика.– 2000.– **2(74)**, N 2.– С. 64–75.
24. Luchini P., Bottaro A. A Gertler vortices: a backward-in-time approach to the receptivity problem // J. Fluid Mech.– 1998.– **363**.– P. 1–23.
25. Saric W.S., Reed H.L., Kerschen E.J. Boundary-layer receptivity to freestream disturbances // Annual Rev. Fluid Mech.– 2002.– **34**.– P. 293–319.
26. Tillman W. Development of turbulence during the build-up of a boundary layer at a concave wall // Phys. Fluids. Supplement.– 1967.– **10**, N 9, pt.2.– P. S108–S111.
27. Euteneuer C.F. Einige Ergebnisse experimenteller Untersuchungen an instationären Gertler-Taylor Wirbeln // ZAMM.– 1970.– **50**, N 1–4.– P. T177–T180.
28. Kirchner R.P., Chen C.F. Stability of time-development rotational Couette flow. Part 1. Experimental investigation // J. Fluid Mech.– 1970.– **40**.– P. 39–47.
29. Neitzel G.P. Marginal stability of impulsively initiated Couette flow and spin-down // Phys. Fluids.– 1982.– **25**.– P. 226–232.
30. Kim M.C., Choi C.K. The onset of Taylor-Gertler vortices in impulsively decelerating swirl flow // Korean J. Chem. Eng.– 2004.– **21(4)**.– P. 767–772.
31. Kim M.C., Song K.H., Choi C.K. Energy stability analysis for impulsively decelerating swirl flows // Phys. Fluids.– 2008.– **20**,064101.– P. 1–5.
32. MacKerrell S.O., Bienerhasset P.J., Bassom A.P. Gertler vortices in th Reyleigh layer on an impulsively started cylinder // Phys. Fluids.– 2002.– **14**.– P. 2948–2956.
33. Liu D.C.S., Chen C.F. Numerical experiments on time-dependent rotational Couette flow // J. Fluid Mech.– 1973.– **59**.– P. 77–95.
34. Козлов Л.Ф., Цыганюк А.И., Бабенко В.В., Никишова О.Д., Воропаев Г.А. Формирование турбулентности в сдвиговых течениях.– К: Наукова думка, 1985.– 284 с.
35. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.– М: Мир, 1980.– 616 с.