

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ГІДРОМЕХАНІКИ

# Прикладна гідромеханіка

Свідоцтво про реєстрацію серія КВ No 3283 від 4 червня 1998 року

НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ  
ЗАСНОВАНИЙ у 1999 році  
ВИХОДИТЬ ЩОКВАРТАЛЬНО

ТОМ 13 (85) ◊ НОМЕР 2

РІК 2011

ЗМІСТ • СОДЕРЖАНИЕ

• НАУКОВІ СТАТТІ ◊ НАУЧНЫЕ СТАТЬИ

<i>Е. А. Гаев, О. М. Бердник</i> Моделирование стабилизированного потока вязкой жидкости в некруглых каналах с легкопроницаемой шероховатостью . . . . .	3
<i>А. Ф. Зибольд</i> Гидродинамические структуры, порождаемые вращающимся магнитным полем в цилиндре конечной длины . . . . .	17
<i>Т. С. Краснопольська, В. Н. Ільченко, В. В. Мелешко, О. Г. Стеценко</i> Процессы поперечного переноса в меандрирующем течении . . . . .	28
<i>П. В. Лукьянов</i> Модели компактных компенсированных вихрей и их применение в задачах механики жидкости и газа . . . . .	37
<i>З. І. Манова, І. Г. Нестерук, Б. Д. Шепетюк</i> Оцінки впливу вентиляції на форму тонких осесиметричних каверн . . . . .	44
<i>В. І. Никишов, І. Т. Селезов, В. В. Хомицкий</i> Взаимодействие уединенных поверхностных и внутренних волн с береговыми склонами . . . . .	51
<i>В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский</i> Колебания скорости потока неоднородного виброожиженного слоя зерновой смеси на наклонном решете . . . . .	64
<i>В. Л. Поляков</i> Теоретический анализ установившегося биофильтрации при нелимитированной скорости роста биомассы . . . . .	69

• ІНФОРМАЦІЯ ◊ ІНФОРМАЦІЯ

К 85-летию Маршала П. Тулина . . . . .	82
Пам'ятка автора . . . . .	83

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE  
INSTITUTE OF HYDROMECHANICS

# Applied hydromechanics

Registration certificate, series KB No 3283 from June 4, 1998

SCIENTIFIC JOURNAL  
WAS FOUNDED 1999  
PUBLISHED QUARTERLY  
VOLUME 13 (85) ♦ NUMBER 2  
YEAR 2011

## CONTENTS

### • SCIENTIFIC ARTICLES

<i>Ye. A. Gayev, O. M. Berdrik</i> Modelling of stabilized flow of viscous fluid in non-circular channels with easily permeable roughness . . . . .	3
<i>A. F. Zibold</i> Hydrodynamical structures generated by the rotating magnetic field in the cylinder of finite length . . . . .	17
<i>T. Krasnopolskaja, V. Ilchenko, V. Melesko, O. Stetsenko</i> Processes of cross transport in meandering flow . . . . .	28
<i>P. V. Lukianov</i> Compact compensated vortex models and their using in fluid and gas mechanics . . . .	37
<i>Z. I. Manova, I. G. Nesteruk, B.D. Shepetyuk</i> Estimations of intensive ventilation influence on the slender axisymmetric cavity shape . . . . .	44
<i>V. I. Nikishov, I. T. Selezov, V. V. Khomitsky</i> Interaction of surface and internal solitary waves with slopes . . . . .	51
<i>V. P. Olshanskii, S. V. Olshanskii</i> Flow velocity fluctuations of non-uniform vibroliquefied layer of a grain mixture on inclined sieve . . . . .	64
<i>V. L. Polyakov</i> Theoretical analysis of stationary biofiltration at non-limited velocity of biomass growth	69

### • INFORMATION

On 85-th Anniversary of Marshal P. Tulin . . . . .	82
Author's guide . . . . .	83

УДК 532.542:519.632:004.942

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В НЕКРУГЛЫХ КАНАЛАХ С ЛЕГКОПРОНИЦАЕМОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

Е. А. ГАЕВ\*, О. М. БЕРДНИК\*\*

\* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

\*\* Национальный авиационный университет, Киев

Получено 01.11.10

Классическая внутренняя задача гидромеханики о напорном течении вязкой жидкости в трубе произвольного сечения обобщена на случай присутствия у ее стенок легкопроницаемой шероховатости (ЛПШ). Математически это означает, что в линейном случае вместо уравнения Пуассона решается уравнение Гельмгольца с разрывным коэффициентом. Численное решение осуществлено в среде MATLAB; предложены  $m$ -функции, выражающие разрывный коэффициент  $A(y, z)$  в сложной области через булевы переменные. Рассмотрены эллиптическое, прямоугольное и треугольное сечения. Получены как распределения скорости по сечению, так и коэффициент сопротивления соответствующей трубы с ЛПШ. Достоверность численных решений проверяется на тестовых случаях, для которых или имеются результаты других авторов, или возможно аналитическое решение.

Класична внутрішня задача гідромеханіки про напірний потік в'язкої рідини в трубі довільного перетину узагальнена на випадок присутності поблизу її стінок легкопроничної шорсткості (ЛПШ). Математично це означає, що у лінійному випадку замість рівняння Пуассона розв'язується рівняння Гельмгольца з розривним коефіцієнтом. Чисельний розв'язок здійснено в середовищі MATLAB; запропоновані  $m$ -функції, що виражають розривний коефіцієнт  $A(y, z)$  у складній області через булеві змінні. Розглянуті еліптичний, прямокутний і трикутний перетини. Отримані як розподіли швидкості по перетину, так і коефіцієнт опору відповідної труби з ЛПШ. Достовірність чисельних розв'язків перевіряється на тестових випадках, для яких або існують результати інших авторів, або є можливим аналітичний розв'язок.

Classical problem of pressure-driven internal viscous flow through a pipe with non-circular cross-section is generalised for presence of an easily penetrable roughness (EPR) near its walls. It means mathematically that in linear case Helmholtz equation with a discontinuous coefficient  $A(y, z)$  is solved instead of Poisson equation. Numerical solution is performed in MATLAB environment;  $m$ -functions are offered that express discontinuous coefficient through Boolean variables in complex domains. Elliptical, square and triangular cross-sections have been considered. Velocity distributions over cross-sections were obtained as well as resistance coefficients for pipes with EPR considered. Validation of solutions was tested for particular cases for which either results of other authors or analytical solutions are available.

### ВВЕДЕНИЕ

В теплотехнике и машиностроительной гидравлике нередко встречаются задачи нахождения параметров потока в каналах некруглого нормального сечения – квадратного или прямоугольного, эллиптического, треугольного, трапецеидального и т.п. Эти задачи были сформулированы в классических монографиях и учебниках [1–5], изучаются в современных учебных пособиях машиностроительного профиля [6, 7] и продолжают исследоваться для разнообразных приложений [8–12].

По методологическим соображениям теоретическое исследование часто начинают с анализа ламинарного движения вязкой несжимаемой жидкости. В то же время миниатюризация ряда устройств в определенных областях современной техники приводит к тому, что такие "ламинарные" решения приобретают и самостоятельное практическое значение. В последние годы интерес исследователей обращен также на движение жидкости в каналах

с пористыми вставками или даже целиком заполненных пористым материалом [12, 13]. Наши исследования моделей легкопроницаемой шероховатости [14–16] привели и нас к задачам ЛПШ в каналах произвольного сечения.

Напорные потоки жидкости через трубы того или иного сечения (круглого и эллиптического, квадратного и прямоугольного, треугольного и трапецеидального) исследовались рядом авторов, начиная с 1930-х годов и до сегодняшнего дня, [7, 9–11, 17–19 и др.]. Наиболее просто ставится задача о *стабилизированном потоке* через такую трубу [4, 18], поскольку достаточно далеко от начала трубы можно положить  $\partial/\partial x \equiv 0$  и тем существенно упростить уравнения Навье-Стокса без каких-либо дополнительных физических гипотез. Такие задачи в предположении гладкости стенок сводились к уравнению Пуассона для соответствующей области и допускали или точное решение, или приближенное аналитическое [1, 4, 9, 10 и др.]; для сечений произвольной формы используют и численные методы решения [10, 11].

Для ламинарных течений установлено, что максимальное значение скорости потока  $U_{max}$  (оно для всех сечений имеет место на оси трубы) и осредненная по сечению скорость  $U_{cp}$  связаны соотношением пропорциональности

$$U_{max} = \alpha_1 U_{cp}. \quad (1)$$

А гидравлическое сопротивление трубы выражается обратнo-пропорциональной зависимостью

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\mathbf{Re}}, \quad (2)$$

где коэффициенты  $\alpha_1 = 2$  и  $\alpha_2 = 64$  для эллипса [4];  $\alpha_1 = 3/2$  и  $\alpha_2 = 24$  в плоской задаче;  $\alpha_1 = 2$  и  $\alpha_2 \approx 57$  для квадратного сечения;  $\alpha_1 \approx 2$  и  $\alpha_2 \approx 35$  для прямоугольника  $2 \times 1$ ;  $\alpha_1 = 2.22$  (2) и  $\alpha_2 = 160$  для равностороннего треугольного сечения [1, 4, 9]. Вообще говоря, эти коэффициенты зависят от деформации  $\gamma$  сечения по отношению к базовой форме; определение  $\gamma$ , линейного размера и  $\mathbf{Re}$  дано ниже. Зависимость гидравлического сопротивления  $\lambda = \lambda(\mathbf{Re}, a, b, \dots)$  от параметров задачи часто оказывается конечной целью расчета, открывающей возможности практического использования.

Постепенную трансформацию потока от некоторого входного распределения скоростей до окончательного (стабилизированного) относят к *начальной участку*; длина последнего также исследовалась в 1960–1980-е годы как экспериментально, так и расчетным путем [17, 20–22]. Аналогичный вопрос о длине начального участка рассматривали Гаев и Шихалиев для плоского канала с легкопроницаемой шероховатостью [16]. В наше время исследования течений через трубы сложного сечения продолжают как ради уточнения известных зависимостей [23], для определенных технических приложений (например, интенсификация теплообмена искусственной шероховатостью на стенках [7]), так и в более детальной физико-математической постановке с мощными вычислительными инструментами [24–26].

Известно также, что в реальных внутренних потоках сквозь сечение с угловыми точками возникают явления, которые отсутствуют в случае круглого или эллиптического сечения. Так, Никурадзе и Прандтль указывали еще в 1926 г. [19] на наличие слабого движения жидкости в трансверсальном (к основному, аксиальному) направлении. И хотя магнитуда такого вращения жидкости составляет ориентировочно 1% от основного (аксиального, продольного) потока, его влияние является существенным в задачах теплообмена и движения несомых частиц [19, 27–29].

Таким образом, обобщение и дополнение задач, ставших уже классическими, новым элементом – легкопроницаемой шероховатостью (ЛПШ), – актуальны и должны базироваться на указанном предыдущем опыте исследований. Недавняя работа [13] наиболее близка к той задаче, которая рассматривается в настоящей статье. В [13] пористая вставка бесконечной длины заполняет все пространство трубы; в данном же случае пористый материал будет находиться лишь возле стенок. Заторможенное течение в пористой среде взаимодействует со свободным потоком вне ее, так что результирующее течение оказывается более сложным как по физическим явлениям, так и по его математическому описанию.

Средства теоретического исследования, которые использовались в предыдущие годы, были нескольких уровней сложности. В частности, для эллиптического и для сечения в форме равностороннего треугольника двумерное линейное уравнение Пуассона, описывающее поток, решалось аналитически [4]. Для более сложных сечений применялись инженерные методы, которые базировались на грубых интегральных уравнениях движения жидкости или на гидродинамической аналогии [6, 30]. "Строгие" решения для прямоугольного сечения получали методом рядов Фурье [2–4, 9].

При наличии в трубе пористой среды [13, 31] или ЛПШ [32, 33] получаем уравнение Гельмгольца [34] вместо уравнения Пуассона. Ноопан [13], исследуя это уравнение с граничными условиями скольжения и "температурного прыжка" (отвечают якобы микроканалам шириной порядка 0.1 мм), также использует ряды Фурье со слагаемыми  $\sin(\pi n y) \cos \frac{\pi z}{b} \left(m - \frac{1}{2}\right)$  для поиска аналитического решения. Мы, однако, используем готовый численный инструмент, который предлагается средой MATLAB [35, 36]. Поскольку он еще не является широко известным, необходимые сведения приводим достаточно подробно.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном канале какого-либо произвольного сечения  $\Omega$ . Возможные сечения, которые здесь рассматриваются, показаны на рис. 1 с их типичными геометрическими характеристиками (как, например, стороны прямоугольного сечения  $2a$  и  $2b$  на рис. 1, в, г). Положим, что у стенок трубы имеется некоторый пористый слой высотой  $h$  (на рис. 1 заполнен точка-

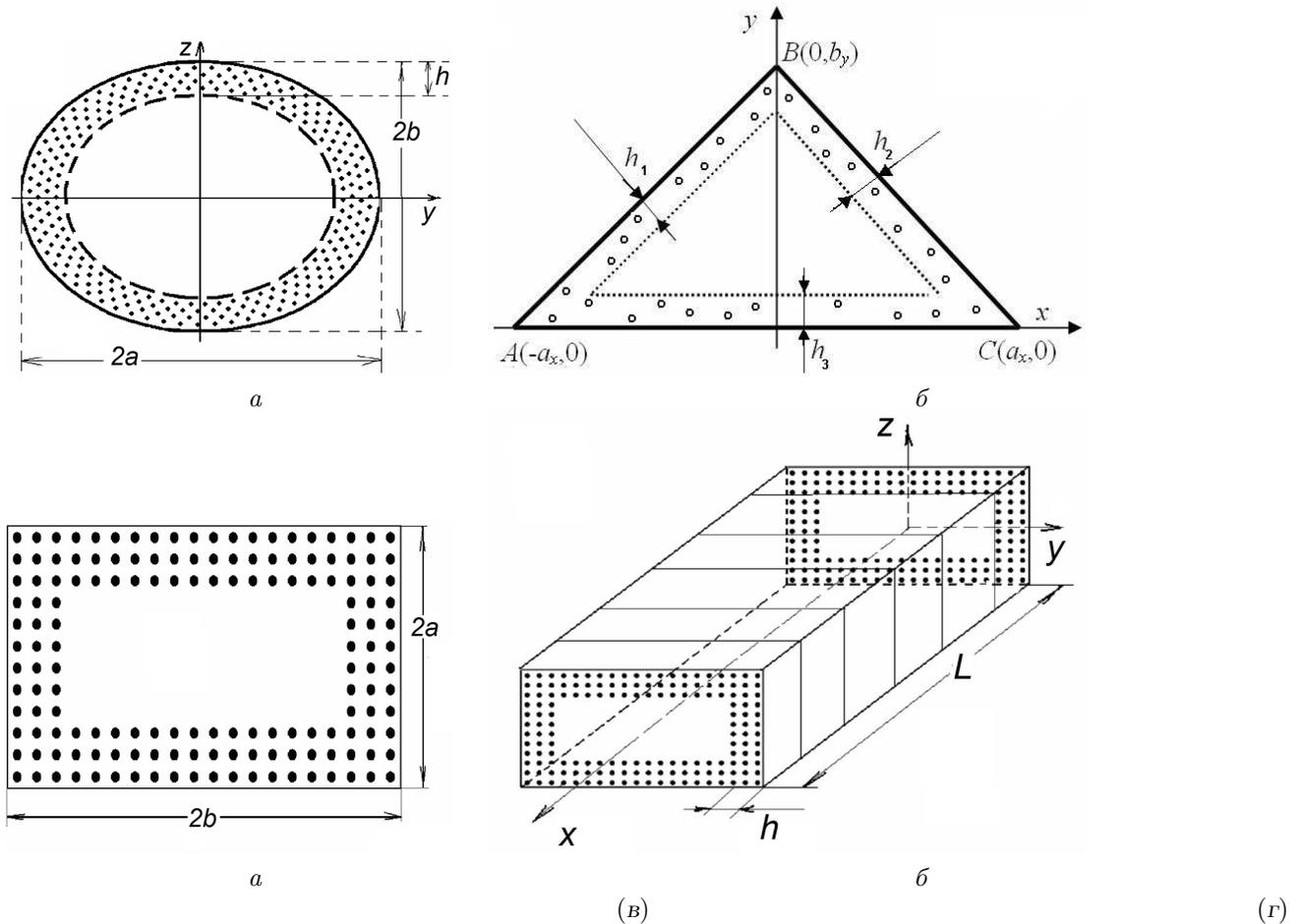


Рис. 1. Схемы труб различного сечения с указанием параметров сечений:  
 а – эллиптическое, б – треугольное, в – прямоугольное;  
 г – расположение сечений с ЛПШ вдоль трубы (прямоугольный случай)

ми). Его можно представить себе физически состоящим из малых сфер, равномерно "вмороженных" в пространстве.

Декартовы координаты  $\{x, y, z\}$  считаем такими, что ось  $Ox$  направлена вдоль трубы, а координаты  $\{y, z\}$  задают точки в нормальном сечении. Размещение начала координат в каждом расчетном случае будет оговорено отдельно. Так же как в [2, 4, 19] и др., полагаем, что поток жидкости стабилизирован вдоль координаты  $x$ , так что  $\partial U / \partial x \equiv 0$ . Поэтому общие уравнения Навье Стокса упрощаются до одного двумерного эллиптического уравнения [4]:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = -p' + f_*(y, z; U), \quad (3)$$

которое действует в области сечения  $\Omega$ , и где сила  $f_*(y, z; U)$  должна моделировать влияние пористой среды, заполняющей канал полностью [13]

или частично [14, 16, 31] (где  $p'$  – продольный градиент давления).

Известны, по меньшей мере, две модели пористой среды – Бринкмана-Форцхаймера [13, 31] и Гаева [14–16]. Первая основана на моделях теории фильтрации и, на наш взгляд, адекватна более плотным пористым пластам и более медленным движениям жидкости, чем рассмотрено здесь. Принимаем вторую модель, которая исходит из установленных аэродинамических закономерностей обтекания единичных тел [4, 30] и где разрывная сила справа моделирует "осредненное" воздействие легкопроницаемой шероховатости (ЛПШ):

$$f_*(y, z, U) = \begin{cases} 0, & (y, z) \notin \text{ЛПШ}, \\ -nk\rho U, & (y, z) \in \text{ЛПШ} \end{cases} \quad (4)$$

(возможно и квадратичное представление этой силы, которое будет рассмотрено в отдельной публи-

кации). Граничным условием данной двумерной задачи является прилипание жидкости к стенкам трубы:

$$U = 0 \quad \text{при} \quad (y, z) \in \partial\Omega. \quad (5)$$

Кроме того, в качестве условий сопряжения [14] следует требовать непрерывности  $U(y, z)$  и  $\partial U/\partial y, \partial U/\partial z$  при переходе через границу ЛПШ.

В случае плоского канала (параметры прямоугольного сечения таковы, что  $\gamma = b/a \rightarrow \infty$ ) такая задача рассмотрена в [14]; в случае отсутствия ЛПШ, когда  $f_*(y, z, U) \equiv 0$ , получают квадратичный профиль скорости с максимумом на оси  $Ox$ :

$$W = -\frac{p'a^2}{2\mu}. \quad (6)$$

Круглая труба с ЛПШ уже рассмотрена ранее [32]; при этом указано, что наибольшее возможное значение скорости имеет место на оси трубы

$$W \stackrel{Df}{=} U(0) = -\frac{1}{4\mu} p' R^2 \quad (7)$$

и достигается, естественно, в отсутствие ЛПШ. Кроме того, были рассчитаны потоки через эллиптическое и прямоугольное сечения с ЛПШ [33]. Здесь задача обобщается на сечение произвольной формы  $\Omega$  с ЛПШ у стенок.

Проведем обезразмеривание задачи. Если за масштабы длины и скорости выбрать отвлеченные пока величины  $L$  и  $W$ , то задача (2), (5) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{z}^2} = -\bar{p}' + \begin{cases} 0, & (\bar{y}, \bar{z}) \notin \text{ЛПШ}, \\ \bar{A} \cdot \bar{U}, & (\bar{y}, \bar{z}) \in \text{ЛПШ}. \end{cases} \quad (8)$$

При этом безразмерное давление  $\bar{p}' = p' L^2 / (\mu W)$  оказывается константой, если масштаб  $W$  выбирать пропорциональным градиенту физического давления  $p'$ , как в (3) или (7). Параметры

$$\bar{A} = -L^2 kn/\nu \quad \text{и} \quad \bar{h} = h/L \quad (9)$$

имеют смысл соответственно безразмерных плотности и высоты ЛПШ. Имеем уравнение Пуассона, если  $A = 0$  или  $h = 0$ , и уравнение Гельмгольца с разрывным коэффициентом  $\bar{A}(\bar{y}, \bar{z})$  перед  $U$  в общем случае. Граничным условием принимается условие прилипания к стенкам (4).

В дальнейшем знак безразмерности (черту) будем опускать. Алгоритм численного решения остается единым для всех форм сечения. Лишь значение коэффициентов и определение области, где находится ЛПШ, будут зависеть от формы сечения.

При этом наиболее сложным вопросом является определение разрывной функции для треугольного сечения. Рассмотрим возможные случаи.

## 2. РЕШЕНИЕ ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ СЕЧЕНИЙ КАНАЛА

### 2.1. Эллиптический канал

Эллиптическое сечение (рис. 1, а) наиболее близко к круговому, уже рассмотренному в [33]. Оно характеризуется двумя параметрами  $a$  и  $b$ , полюсами. Полагаем, что вдоль стенки трубы положена бесконечной длины пористая среда (ЛПШ) высотой  $h$ .

В гидравлике стремятся выбирать масштаб длины  $L$  как некий «эквивалентный гидравлический радиус», универсальный для любых сечений, например, в виде отношения площади  $S$  к периметру  $P$  [2, 4, 30]:

$$L = R_\vartheta = 2\frac{S}{P}. \quad (10)$$

В каждом из исследованных ниже сечений такая возможность была проверена и отвергнута. В данном случае соотношение (10) привело бы к громоздким математическим выражениям, поскольку периметр  $P$  вычисляется через эллиптический интеграл. Поэтому Л.Г. Лойцянский [4] выбирает масштаб длины в виде

$$L \stackrel{Df}{=} ab\sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}}. \quad (11)$$

Однако ничто не мешает сделать еще более простой выбор, на котором мы и останавливаемся:

$$L \stackrel{Df}{=} b \quad (b - \text{“полувысота” эллипса}), \quad W = -\frac{L^2 p'}{4\mu}. \quad (12)$$

Инструмент PDE Toolbox (Partial Differential Equations Tool) математического пакета MATLAB, где реализован численный метод конечных элементов, предполагает приведение дифференциальных уравнений в частных производных математической физики к стандартному виду

$$-\text{div}(c \cdot \text{grad } U) + a \cdot U = f \quad (13)$$

с пометкой его типа (эллиптического в данном случае). С учетом выбранных масштабов (12),  $c = 1$  и в записи (5) получаем коэффициент  $f = 4$ . Что же касается коэффициента  $a$  из уравнения (5), то здесь возникла определённая сложность, поскольку он должен задаваться по-разному внутри ЛПШ и вне ее,  $a = a(y, z)$ . Решение этой проблемы в программной среде MATLAB облегчается

возможностью совмещать операции между арифметическими и булевыми переменными ("нестандартная" особенность, отсутствующая во многих иных языках программирования). На этом основании, для реализации коэффициента  $a(y, z)$ , разрывного при переходе через границу ЛППШ, создана специальная  $m$ -функция:

**Листинг  $m$ -функции  $ellipse.m$**   
для эллиптического сечения:

```
function EPR= ellipse(x ,y, a, b, h, A)
%Комментарий: ф-я задает EPR, плотность ЛППШ
%в эллиптическом сечении:
% EPR=A в слое высотой h у стенок, и
% EPR=0 в середине эллиптической трубы,
%  $x^2/(a-h)^2 + y^2/(b-h)^2 = 1$ .
% a и b – безразмерные полуоси эллипса;
% A – плотность ЛППШ согласно (2) или (4).
EPR=A*((x/(a-h)).^2+(y/(b-h)).^2 > 1);
```

В ней использовано, что для точки  $M(y, z)$  булева величина  $y^2/(a-h)^2 + z^2/(b-h)^2 > 1$  принимает значение *true*, если  $M$  лежит внутри слоя ЛППШ, и значение *false*, если  $M$  лежит ближе к центру эллипса, вне ЛППШ. В этой функции параметры  $a$  и  $b$ , полуоси, произвольны. Однако, с учетом выбора масштабов (12), следует брать  $b = 1$  и  $a = \gamma = a/b = var$  (вытянутость эллипса).

Для поиска численного решения поставленной задачи действовали в MATLAB следующим образом.

1. В среде `pdetool` задали геометрию области эллипса через вершины  $(-\gamma; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(\gamma; 0)$  и  $(0; -1)$ .

2. В меню "PDE Specification..." указываем тип дифференциального уравнения (Elliptic) и его коэффициенты  $c=1$ ,  $f=4$ ,  $a=ellipse(x,y,gamma,1,h,A)$  с конкретными численными значениями для  $gamma$ ,  $h$  и  $A$ .

3. Граничными условиями ("Specify Boundary conditions...") выбрали условия Дирихле (Dirichlet) со значениями параметров  $h=1$ ,  $r=0$ .

4. Триангулировали область решения (Mesh > Initialize Mesh) и несколько раз "измельчали" сетку (Refine Mesh) для достижения достаточной точности расчета. (Три-четыре "измельчения" равномерной адаптирующейся сетки, соответственно 4 609 или 18 177 треугольных разбиений эллиптической области  $\Omega$  – приемлемый компромисс между временем счета и его точностью).

5. С помощью меню Solve > Solve PDE запустили вычисления.

6. Визуализировали результат, рис. 2, строя трёхмерное распределение скорости  $U(y, z)$  или изотахи в исследуемом сечении  $\Omega$  ("Plot > Plot

Solution").

7. Экспортировали в среду MATLAB все нужные для дальнейшего параметры ("Boundary > Export Decomposed Geometry..." "PDE > Export PDE Coefficients..." "Mesh > Export Mesh...") и результат расчета ("Solve > Export Solution..."). С их учетом далее определяются наибольшая скорость  $U_0$ , средне-расходная скорость  $U_{cp}$  и вычисляется коэффициент сопротивления  $\lambda$ , чему посвящен отдельный раздел в данной статье.

Такое "ручное выполнение" легко может быть автоматизировано (запрограммировано) средствами MATLAB, что и было сделано для каждого из сечений. Учет упомянутых в (4) «условий сопряжения» обеспечен тем, что MATLAB ищет непрерывные решения даже для разрывного коэффициента  $a(y, z)$ . Распределения скоростей потока вязкой жидкости через эллиптическое сечение вытянутостью  $\gamma = a/b = 2$  с высотой ЛППШ  $h = 0.4$  представлены на рис. 2 и 3. На первом из них дано трехмерное поле скорости вдоль трубы и проекции линий равных скоростей (изотахи). Естественно, что изолинии имеют вид эллипсов, сгущающихся в месте больших градиентов скорости. Обращает на себя внимание изгиб профилей и уменьшение скорости в слое ЛППШ. Более отчетливо изгиб виден на рис. 3, где представлены распределения скорости в двух взаимно-перпендикулярных сечениях эллипса. Кроме того, на рис. 3 исследуется влияние плотности ЛППШ,  $A = var$ . Одинаковым номером указаны соответствующие распределения скорости в указанных сечениях. Можно видеть, что чем ЛППШ плотнее, тем жидкость тормозится сильнее, и в пределе  $A \rightarrow \infty$  все течение сосредотачивается в центре канала, который представляет собой эллипс, уменьшенный на ширину  $h$ . Более подробный анализ дан на стр. 10.

Расчет можно проверить сопоставлением с известным решением для эллиптической трубы в случае отсутствия ЛППШ,  $h = 0$  или  $A = 0$ . Если решение [4] переписать в принятых здесь масштабах, то будем иметь

$$U = 2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \left( 1 - \frac{y^2}{\gamma^2} - z^2 \right).$$

Оно отвечает нашему с высокой точностью. Случай  $h \neq 0$  и  $A \neq 0$  можно сопоставить с аналитическим решением [32] для круглой трубы,  $\gamma = 0$ . Также имеем хорошее соответствие.

## 2.2. Прямоугольный канал

Различные аспекты течения через прямоугольный канал изучались в работах [9, 12, 17–24, 28,

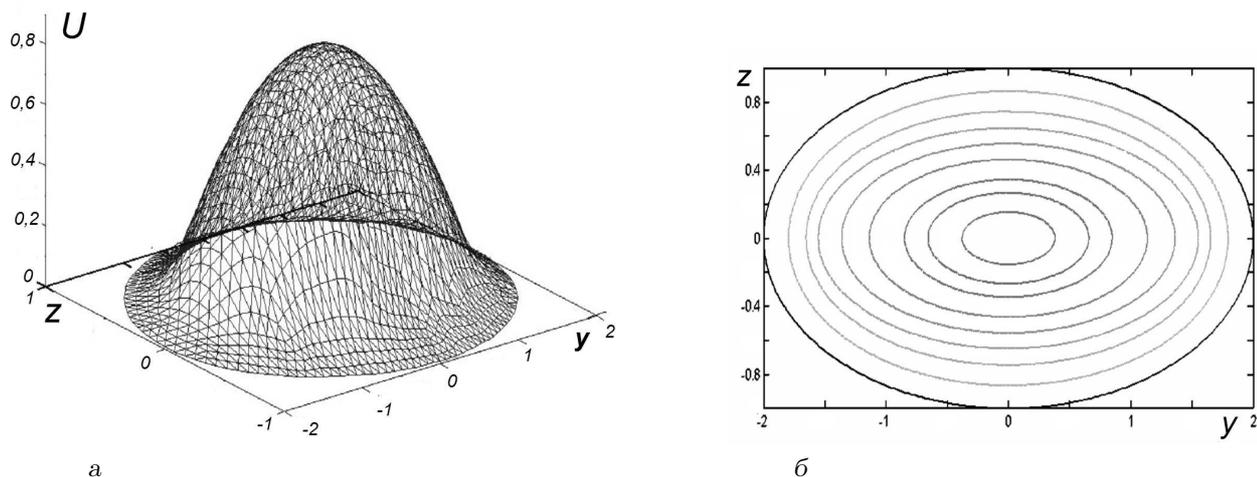


Рис. 2. Профили скорости через эллиптическое сечение  $a = 2, b = 1$  с ЛППШ у стенок высотой  $h = 0.40$  и плотностью  $A = 100$ : а – трехмерное представление; б – изохоры

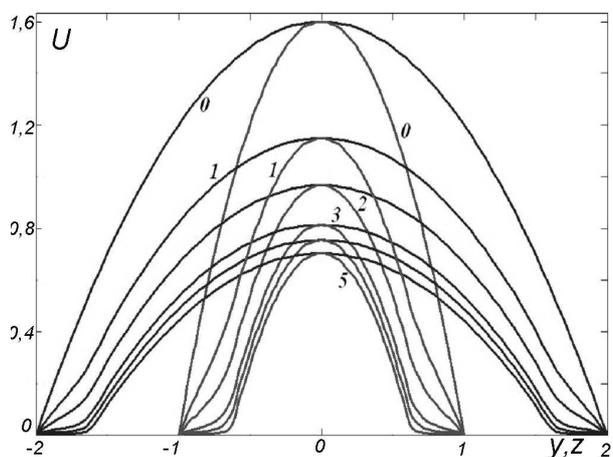


Рис. 3. Изменение распределений скорости через эллиптическое сечение  $a = 2, b = 1$  с ЛППШ у стенок высотой  $h = 0.40$  и различной плотностью  $A$ : 0 –  $A = 0$ , 1 –  $A = 10$ ; 2 –  $A = 50$ ; 3 –  $A = 100$ ; 4 –  $A = 200$ ; 5 –  $A = 400$

37, 39]. Аналогичное нашему течению в прямоугольном канале с силой  $f = AU$ , действующей во всей области  $\Omega$ , рассматривалось в [13]. В случае прямоугольного сечения масштаб длины можно было бы выбрать как „эквивалентный радиус” (10), [23]:

$$L = R_э = 2 \frac{S}{P} = \frac{ab}{a+b}, \quad (14)$$

что часто и делают в гидравлике ( $S$  и  $P$  – соответственно площадь сечения и его периметр;  $2a, 2b$  – стороны прямоугольника, рис. 1,в). Тогда сопоставлять решение следовало бы с течением через круглую трубу радиуса  $R = L$ . Однако мы "во-

зьем за эталон" вязкое течение между двумя бесконечно-широкими пластинами ("плоская труба") и выберем масштаб длины как полувысоту канала  $L = a$  и масштаб скорости по (3). В результате получим для (5) коэффициенты  $c = 1$  и  $f = 2$ . Что же касается разрывной функции  $a(y, z)$ , то  $m$ -функция для прямоугольника требует несколько более сложного логического выражения:

**Листинг**  $m$ -функции *rectangle.m*

для прямоугольного сечения:

```
function EPR = rectangle(x, y, Gamma, ...
                        h1, h2, h3, h4, A)
```

%Комментарий: ф-я задает EPR, плотность ЛППШ

%по сечению прямоугольника

% -Gamma < x < Gamma, -1 < y < 1.

% Gamma=b/a – вытянутость прямоугольника,

% h1, h2, h3, h4 – высота ЛППШ у каждой его стороны,

% и A – плотность ЛППШ согласно (8).

```
EPR = A - A * (x > -Gamma + h1) .* (x < Gamma - h2) .* ...
```

```
(y < 1 - h3) .* (y > -1 + h4) .
```

Здесь  $(x > -Gamma + h1), (x < Gamma - h2), (y < 1 - h3)$  и  $(y > -1 + h4)$  – булевы выражения, которые приобретают значение 1 (*true*), если выполняются условия в скобках, и значение 0 (*false*) при их невыполнении. Очевидно, что построенная из булевых выражений величина EPR будет приобретать численное значение 0, если точка  $(x, y)$  принадлежит внутреннему прямоугольнику, свободному от элементов ЛППШ, и значение A, если она лежит в области ЛППШ во внешнем прямоугольнике. (Использована также стандартная MATLAB-операция "поэле-

ментного умножения" .\*, [35, 36]). Следовательно, выходная величина EPR ведет себя искомым образом. Предложенная функция учитывает возможное различие высоты ЛПШ  $h_1, h_2, h_3, h_4$  возле каждой из стенок. Реализация численного решения следовала тому же алгоритму 1–7. Количество триангуляционных ячеек прямоугольной области  $\Omega$  растет примерно как четвертая степень количества операций Refine Mesh (пункт 4); для компромисса между временем счета и его точностью достаточно 3–4 операций измельчения (соответственно 5 625 и 22 257 треугольных ячеек).

На этом заканчивается первый этап вычислений для конкретного прямоугольного сечения (характеризуется вытянутостью  $\gamma = b/a$ ) и конкретных параметров ЛПШ  $A$  и  $h$ . Его результатом являются распределения скорости потока по прямоугольному сечению. В качестве примера на рис. 4, а представлено трехмерное распределение скоростей потока через прямоугольное сечение  $4 \times 2$  с ЛПШ у стенок  $h = 0.4$  плотностью  $A = 50$ . Этот же расчет дополнен исследованием влияния плотности ЛПШ  $A$ , рис. 4, б.

Достоверность расчетов доказана сопоставлением с аналитическим решением для квадратного сечения [4, 9].

### 2.3. Треугольный канал

Трубы треугольного сечения также встречаются в гидравлике и теплотехнике [2, 7]. Известно простое и красивое решение задачи Пуассона, соответствующей течению вязкой жидкости через призматическую трубу с равносторонним треугольником в сечении [4]. Здесь рассмотрим более общий случай сечений в виде равнобедренного треугольника; основные обозначения даны на рис. 1, б.

"Правильный" выбор масштаба длины как радиус "эквивалентной" круглой трубы  $R_3$  (10) имело бы следующий громоздкий вид:

$$R_3 = \frac{ab}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a\gamma}{1 + \sqrt{1 + \gamma^2}},$$

где  $\gamma = b/a$  – условная мера вытянутости треугольника (при  $\gamma = \sqrt{3}$  треугольник равносторонний). Более удобным нам представляется линейный масштаб в виде

$$L = \frac{b}{2}.$$

А масштаб  $W$  принимаем как скорость на оси круглой трубы без ЛПШ (7) с радиусом  $R = L = \frac{1}{2}b$ . Безразмерное уравнение Гельмгольца снова имеет вид (5) со значениями коэффициентов

$c = 1$  и  $f = 4$ . Отнесение всех размеров сечения к  $L$  геометрию задачи не меняет, однако размерный треугольник рис. 1, б перейдет в аналогичный с параметрами  $\gamma = 2a/b$  и  $\bar{b} = 2$ ; равностороннему треугольнику отвечает  $\gamma = 2/\sqrt{3} \approx 1.1547$ .

Как и для предыдущих сечений, в PDE Toolbox MATLAB проблема сводится к написанию  $m$ -функции для коэффициента  $a(x, y)$  уравнения (5), задающего разрывную плотность ЛПШ. Однако здесь вид  $m$ -функции не столь очевиден, хотя и требует лишь элементарных выкладок.

Расстояние точки  $(x, y)$  от прямой  $AB$  определяется, как известно, через запись уравнения прямой  $AB$  "в отрезках", рис. 1, б, и приводит к формуле

$$L_{AB}(x, y) = \frac{|-bx + ay - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если точка  $(x, y)$  лежит в исследуемом треугольнике, то условием ее нахождения внутри ЛПШ высотой  $h_1$  при стороне  $AB$  будет

$$L_{AB}(x, y) \leq h_1. \quad (15)$$

Аналогичное условие имеет место для  $h_2$ -близости точки к прямой  $BC$ ,  $L_{BC}(x, y) \leq h_2$ , где

$$L_{BC}(x, y) = \frac{|bx + ay - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

На основании этих формул составляем окончательное условие «Точка  $M(x, y)$  лежит внутри ЛПШ при стенках треугольника  $ABC$ »:

$$(x \leq h_3) | (L_{AB}(x, y) \leq h_1) | (L_{BC}(x, y) \leq h_2);$$

когда это условие *истинно* –  $(x, y)$  лежит внутри ЛПШ, когда *ложно* –  $(x, y)$  вне ЛПШ (знаком  $|$  в MATLAB обозначают дизъюнкцию, операцию „ИЛИ“). Теперь необходимая  $m$ -функция включается в себя две подфункции:

**Листинг  $m$ -функции *Triangle.m* для треугольного сечения:**

```
function EPR=Triangle(x, y, aX, bY, h1, h2, h3, A)
%Функция для канала треугольного сечения с вершинами
% A(-aX,0), B(0,bY), C(aX,0),
%что равна 0 в середине канала (вне ЛПШ высот h1, h2 и h3)
%и равна A внутри ЛПШ высот h1, h2 и h3,
%расположенных у стенок канала AB, BC, CA.
Logic=(y <= h3)|(Lab(x, y, aX, bY) <= h1)| ...
(Lbc(x, y, aX, bY) <= h2);
EPR=A* Logic;
%Для равностороннего сечения брать aX=2/sqrt(2).
function R=Lab(x, y, aX, bY)
```

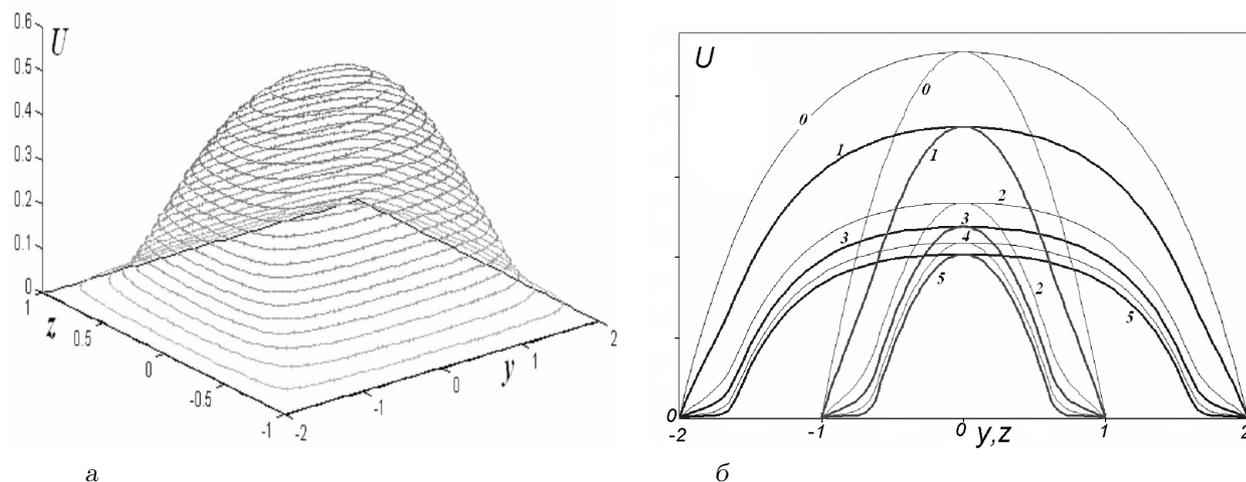


Рис. 4. а – трехмерное распределение скоростей потока через прямоугольное сечение  $4 \times 2$  при ЛПШ у стенок  $h = 0, 40$  и  $A = 50$ ; б – распределения скорости в двух перпендикулярных сечениях при различной плотности ЛПШ  $A$ : 0 –  $A = 0$ ; 1 –  $A = 10$ ; 2 –  $A = 50$ ; 3 –  $A = 100$ ; 4 –  $A = 200$ ; 5 –  $A = 400$

%Подпрограмма

% расстояния точки (x,y) от прямой АВ,

% где  $A(-aX,0)$  и  $B(0,bY)$ .

$R = \text{abs}(-bY*x + aX*y - aX*bY) / \sqrt{aX^2 + bY^2}$ ;

function R=Lbc(x,y,aX,bY)

%Подпрограмма

% расстояния точки (x,y) от прямой ВС,

% где  $B(0,bY)$  и  $C(aX,0)$ .

$R = \text{abs}(bY*x + aX*y - aX*bY) / \sqrt{aX^2 + bY^2}$ ;

%Конец программы Triangle.m.

Как видим, она допускает различные высоты  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  у сторон треугольника АВ, ВС и АС соответственно, рис. 1,б. С учетом принятого обезразмеривания следует подставлять  $bY = 2$ , а  $aX$  может быть произвольным; значение  $aX = 2/\sqrt{3}$  отвечает равносоставленному треугольнику. Последовательность расчета вязкого течения через треугольное течение в пакете PDE Toolbox – те же этапы 1 – 7, п. 3.1.

На рис. 5, а представлено трехмерное распределение скорости ламинарного потока через треугольное сечение для одного из расчетных случаев; на рис. 5, б – отвечающие этому расчету изотакхи течения. Их форма напоминает закругленные треугольники; изотакхи сгущаются в центральной части канала вне ЛПШ, где скорости резко возрастают (мы вынуждены были удалить часть линий, чтобы избежать муарового эффекта, дающего ложное впечатление). Следующая пара рис. 6 показывает влияние плотности ЛПШ  $A$  на распределение скорости в двух сечениях; при этом взяты два “продольных разреза” трубы сечения по высо-

те треугольника (рис. 1, б) и параллельно оси  $Ox$  через точку максимума скорости (естественно, координаты этого “центра сечения”  $O(0,2/3)$ ). Как видим, при течении через ЛПШ жидкость тормозится, и увеличение плотности ЛПШ  $A$  ухудшает протекание жидкости через канал (штриховыми линиями показан случай  $A=0$ , т. е. ЛПШ отсутствует). Движение внутри ЛПШ может даже прекратиться полностью при большом  $A$  (кривая 5 рис. 6). В части сечения, свободной от препятствий, течение также ослабевает, но не прекращается.

Полученные численные результаты можно сравнить с решением [4] для равносоставленного треугольника без ЛПШ: имеет место совпадение с высокой точностью.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Можно видеть по результатам расчетов, что ЛПШ (т. е. пористый слой вдоль стенок трубы) существенно влияет на движение жидкости в призматической трубе любого сечения, и это влияние в целом уже охарактеризовано: ЛПШ тормозит поток, через нее протекающий. Тормозящее влияние ЛПШ передается и в свободную от ЛПШ часть сечения трубы. Чем плотнее ЛПШ, заполняющая слой высоты  $h$ , тем слабее в ней течение. Количественно это можно характеризовать влиянием плотности  $A$  на наибольшую скорость в сечении трубы  $U_{max}$ ; такие данные представлены на рис. 7, а. Естественно, что все кривые выходят на асимптоту, поскольку при очень больших  $A$  (тео-

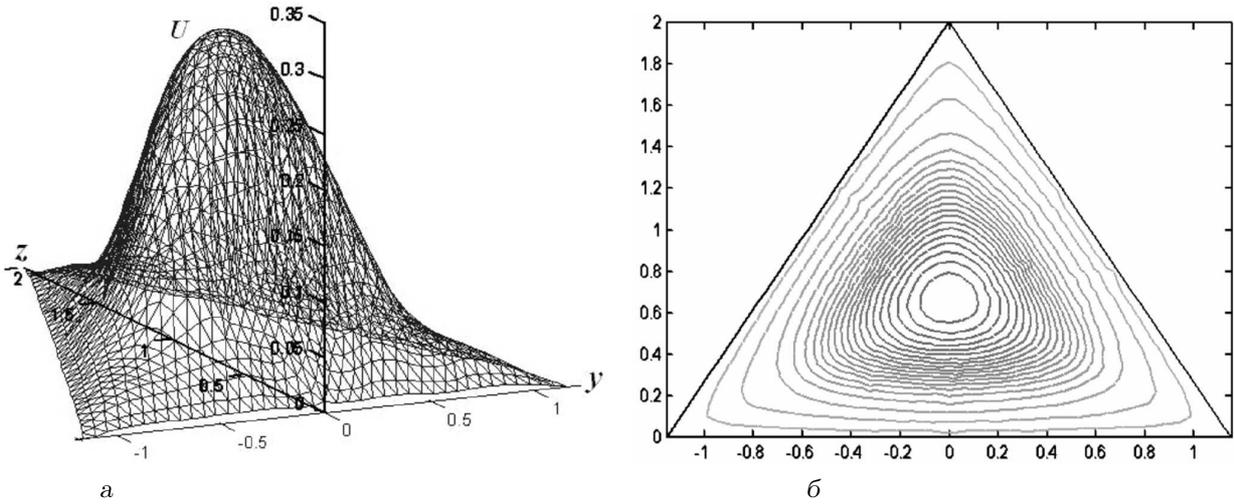


Рис. 5. Трехмерное распределение скоростей потока через сечение в виде равностороннего треугольника с ЛПШ у стенок  $h = 0,3$ ,  $A = 100$  (а); отвечающие ему изотахи (б)

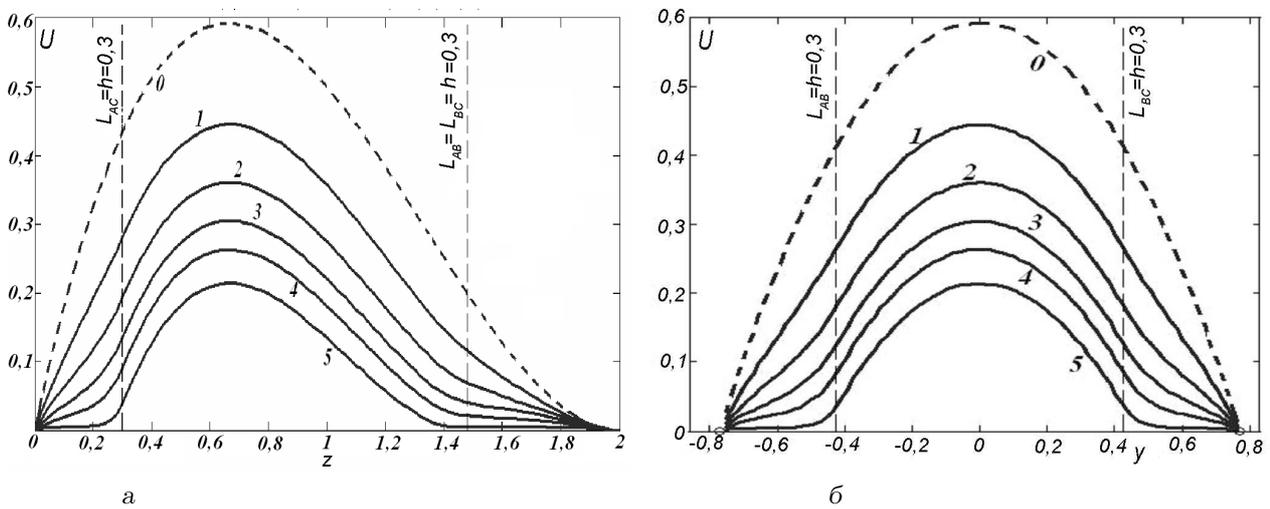


Рис. 6. Изменение распределения скорости в зависимости от плотности ЛПШ  $A$  в двух продольных сечениях треугольного равностороннего канала с ЛПШ у стенок высотой  $h = 0,3$ :

а – сечение по оси симметрии треугольника, (см. рис. 1, б);

б – сечение параллельно основанию треугольника, проходящее через точку максимума скорости (0 – ЛПШ отсутствует,  $A = 0$ ; 1 –  $A = 20$ ; 2 –  $A = 50$ ; 3 –  $A = 100$ ; 4 –  $A = 200$ ; 5 –  $A = 900$ )

ретически, при  $A \rightarrow \infty$ ) все течение сосредотачивается в свободной от ЛПШ области канала.

Естественно, уменьшается и средне-расходная скорость течения через канал с ЛПШ. В гидравлике всегда интересуются отношением наибольшей скорости к этой средней,  $U_{max}/U_{cp}$ . Известно, что при ламинарном режиме течения и в каждом выбранном сечении канала это отношение постоянно; некоторые данные были приведены во "Введении". Это не так при турбулентном течении. Тем не менее, часто принимают

$U_{max}/U_{cp} \approx const$ , и приближенное значение этой "постоянной" используют при решении практических задач. Так поступают, например, при выводе уравнений плановой гидравлики [41–44]. И в нашем исследовании, поэтому, указанное отношение подробно анализировалось. Рис. 7, б представляет полученные данные: можно видеть, сколь сильно  $A$  влияет на отношение скоростей. Это следует учитывать при использовании моделей плановой гидравлики для течений с проницаемой шероховатостью у дна.

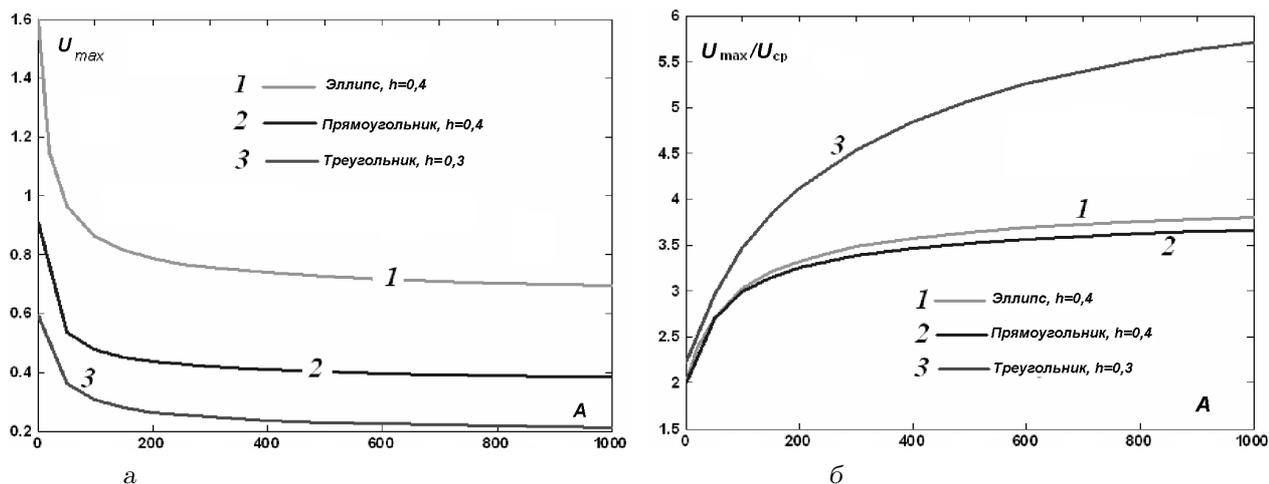


Рис. 7. Влияние  $A$ , плотности ЛПШ на максимальную скорость  $U_{max}$  на оси сечения (а), и на отношение максимальной к средне-расходной скорости  $\frac{U_{max}}{U_{cp}}$  (б):  
 1 – эллиптическое сечение с ЛПШ высотой  $h = 0.40$ ,  
 2 – прямоугольное сечение с  $h = 0.40$ , 3 – треугольное сечение с  $h = 0.30$

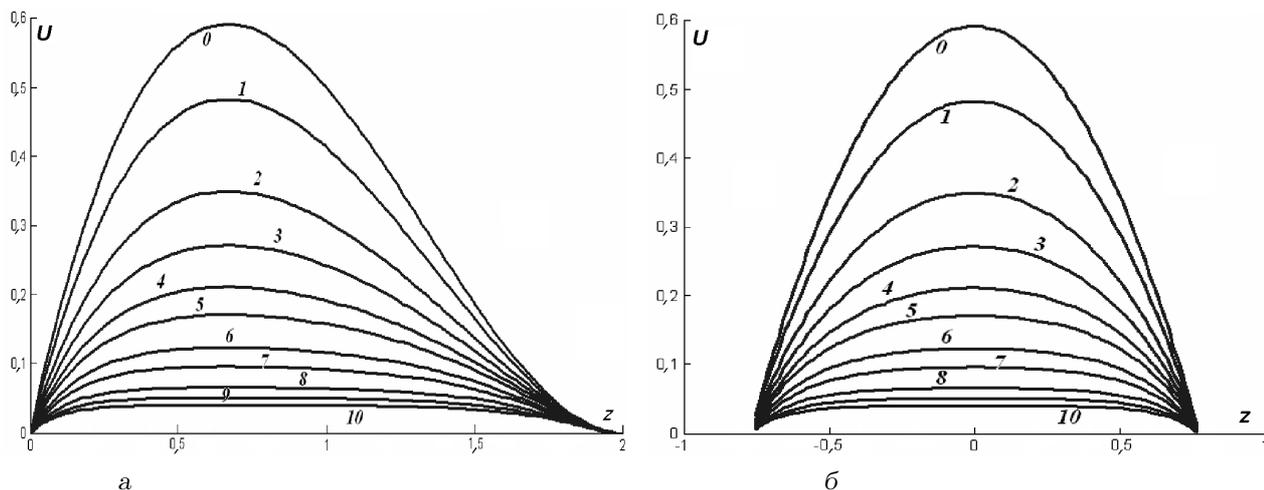


Рис. 8. Распределения скорости во взаимно-перпендикулярных плоскостях трубы равностороннего треугольного сечения, полностью заполненных ЛПШ: 0 –  $A = 0$ ; 1 –  $A = 2$ ; 2 –  $A = 6$ ; 3 –  $A = 10$ ; 4 –  $A = 15$ ; 5 –  $A = 20$ ; 6 –  $A = 30$ ; 7 –  $A = 40$ ; 8 –  $A = 60$ ; 9 –  $A = 80$ ; 10 –  $A = 100$ ;  
 а – сечение треугольного основания плоскостью через  $O(0, 0)$  и  $B(0, 2)$ , (см.рис. 1);  
 б – сечение треугольника горизонтальной плоскостью через максимум  $U$

Практический интерес представляет исследование напорных течений в трубах, полностью заполненных пористым наполнителем. Уже говорилось, что примером такого исследования является работа [13], где для прямоугольного сечения используется, правда, иная модель пористой среды. Полное заполнение сечения – частный случай данной задачи. Так, для равностороннего треугольного сечения пустого от ЛПШ пространства не останется при  $h \geq 2/3$ . Такие расчеты проведены.

На рис. 8 представлены профили скорости в трубе, полностью заполненной легкопроницаемой средой. В плоскости, где есть симметрия, они кажутся параболическими при малых  $A$ . Но при большой плотности пористой среды  $A$  профили выполаживаются в центре канала, как бы теряя тормозящее влияние стенок. Касательно сопротивления заполненного канала, можно показать на основании расчетов, что комплекс  $\lambda \cdot Re$  растет примерно по линейной зависимости от  $A$ .