

УДК 532.593

# ЭВОЛЮЦИЯ И ТРАНСФОРМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В БЕРЕГОВОЙ ЗОНЕ

В. И. НИКИШОВ, И. Т. СЕЛЕЗОВ, В. В. ХОМИЦКИЙ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 08.06.2010*

Представлены результаты моделирования поверхностных гравитационных волн, приходящих с глубокой воды в прибрежную зону, характеризуемую произвольной донной топографией. Исследование проводится на основе лучевой теории и сводится к решению задачи Коши. Допускается представление донной топографии как в аналитическом виде, так и в дискретном. Проведено тестирование алгоритма на некоторых известных точных решениях и представлены расчеты для конкретного побережья Черного моря. Моделируется осаждение частицы в волновом потоке на основе задачи Коши и дано сопоставление с полученными экспериментальными результатами. Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований переформирования откоса в результате седиментации.

Наведено результати моделювання поверхневих гравітаційних хвиль, які приходять з глибокої води в прибережну зону, що характеризується довільною донною топографією. Дослідження проводиться на основі променевої теорії і зводиться до розв'язання задачі Коші. Допускається наведення донної топографії як в аналітичному вигляді, так і в дискретному. Проведено тестування алгоритму на деяких відомих точних розв'язках і наведено розрахунки для конкретного узбережжя Чорного моря. Моделюється осаджування частинки у хвильовому потоці на основі задачі Коші і дано співставлення з одержаними експериментальними результатами. Наведено результати теоретичних та експериментальних досліджень переформування укосу внаслідок седиментації.

The results of modeling surface gravity waves incoming from a deep water into a coastal zone characterizing by an arbitrary topography are presented. Investigation is carried out on the basis of a ray theory and is reduced to solving the Cauchy problem. Representation of a bottom topography is possible both analytical or discrete form. Test of algorithm is conducted by using some known exact solutions and calculations for concrete Black Sea coast are presented. Particle sedimentation in a wave flow on the basis of the Cauchy problem is modelled and comparison with obtained experimental data are given. The results of theoretical and experimental investigations of slope reforming as results of sedimentation are presented.

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование взаимодействия поверхностных гравитационных волн с донными неоднородностями и их подавление при прохождении над неоднородностями было и остается актуальной проблемой. Это обусловлено как поиском различного рода конструкций для гашения волн с целью защиты акваторий и береговой зоны от воздействия волн, так и необходимостью иметь информацию о поведении волнового поля, особенно в прибрежной зоне, которое характеризуется многообразием явлений типа трансформации волн, рефракции и дифракции волн, интерференции волн, локальных резонансов, захвата волн и др. [4–6, 20, 21].

В данной работе представлена модель рефракции волн, приходящих из глубокой воды в прибрежную зону. Рассматривается как аналитическое задание рельефа дна, так и дискретное задание донной топографии.

Исследуется также динамика седиментации в прибрежной зоне на основе упрощенной модели, когда горизонтальные компоненты скоростей волны и твердой частицы принимаются равными, а компоненты вертикальной скорости отличаются

величиной "скорости осаждения". Соответствующие уравнения решаются методом Рунге-Кутты. Представлены траектории твердых частиц, движущихся в стоксовых волнах, и показано хорошее соответствие с экспериментальными данными, полученными в волновом бассейне методом "светового ножа".

Здесь исследуется кинематика взвешенной частицы в волновом потоке и ее осаждение. При исследовании динамики наносов с точки зрения формирования донной поверхности рассматривается движение частиц в стационарном течении [13].

## 1. РЕФРАКЦИЯ ВОЛН НАД ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДОННОЙ ТОПОГРАФИЕЙ

Рассмотрим задачу рефракции гармонических волн, приходящих с глубокой воды в мелководную прибрежную зону, которая характеризуется переменной глубиной, на основе лучевого метода [4, 5]. Будем исследовать волны малой амплитуды в предположении, что диссипация энергии не учитывается, установившиеся течения не рассматриваются и донная поверхность характеризуется малыми величинами кривизны, так что эффекты

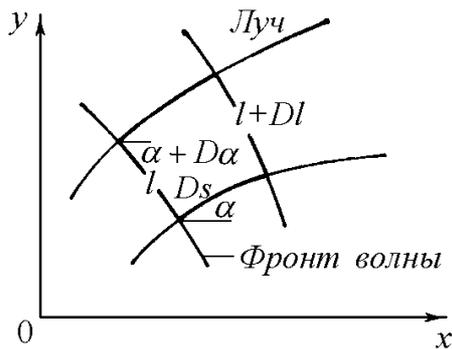


Рис. 1. Картина лучей и фронтов

отражения и дифракции пренебрежимы и приближенно применима формула для фазовой скорости, соответствующая случаю постоянной глубины. Такой подход позволяет построить приближенную картину рефрагированного поля всюду в рассматриваемой области до опрокидывания волн.

Уравнения лучевого метода основаны на принципе Ферма, согласно которому луч распространения волн, задаваемый параметрически в виде  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  (рис. 1), проходит путь за минимальное время и удовлетворяет уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = c \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = c \sin \alpha, \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{Dc}{Dr}. \quad (1)$$

Здесь  $t$  – время прохождения луча;  $\alpha$  – угол между лучом и осью  $x$ ;  $\frac{D}{Dr}$  – дифференцирование по направлению фронта волны  $r$ ;  $c$  – скорость распространения волн,  $c = \sqrt{\frac{g}{k} \text{th}kH}$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $H(x, y)$  – глубина жидкости.

Дифференцирование вдоль линии фронта и луча определяется операторами

$$\frac{D}{Dr} = -\sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{D}{Ds} = -\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}.$$

Третье уравнение системы (1) после подстановки оператора преобразуется к виду

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sin \alpha \frac{\partial c}{\partial x} - \cos \alpha \frac{\partial c}{\partial y}. \quad (2)$$

Коэффициент рефракции находится по формуле

$$K_p = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \quad (3)$$

где  $\beta$  – коэффициент разделения лучей,  $\beta = l/l_\infty$ ,  $l_\infty$  – расстояние между лучами на глубокой воде.

Для коэффициента разделения лучей  $\beta$  может быть выведено следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{D^2\beta}{Ds^2} + P_1(s) \frac{D\beta}{Ds} + Q_1(s) \beta = 0. \quad (4)$$

В этом уравнении  $P_1(s)$  и  $Q_1(s)$  выражаются через переменные  $x$  и  $y$ :

$$P_1(s) = -\frac{1}{c} \left( \cos \alpha \frac{\partial c}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial c}{\partial y} \right),$$

$$Q_1(s) = \frac{1}{c} \left( \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \sin 2\alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right).$$

С помощью соотношения  $Ds = \alpha dt$  приводим (4) к уравнению с независимой переменной – временем  $t$ :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + P(t) \frac{d\beta}{dt} + Q(t) \beta = 0. \quad (5)$$

Здесь величины  $P(t)$  и  $Q(t)$ , имея в виду зависимости  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$ , определяем по формулам

$$P(t) = -2 \left( \cos \alpha \frac{\partial c}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial c}{\partial y} \right),$$

$$Q(t) = c \left( \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \sin 2\alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right).$$

Введением вспомогательных переменных  $\beta = z_1$ ,  $\frac{d\beta}{dt} = z_2$  уравнение (5) приводится к системе уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = -P(t) z_2 - Q(t) z_1. \quad (6)$$

Так как скорость распространения волн – функция глубины жидкости  $c = c(t)$ , а глубина, в свою очередь, – функция координат  $H = H(x, y)$ , то производные скорости можно представить в виде

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial H^2} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial c}{\partial H} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial H^2} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial c}{\partial H} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 c}{\partial H^2} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial H} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}.$$

С учетом выражения для фазовой скорости  $c = \sqrt{\frac{g}{k} \text{th} k H}$  получаем

$$\frac{dc}{dH} = \frac{c}{H} \frac{R}{1+R},$$

$$\frac{d^2 c}{dH^2} = -\frac{c}{H^2} \frac{R}{(1+R)^3} (1 + \text{ch} 2kH),$$

где  $R = \frac{2kH}{\text{sh} 2kH}$ .

В дальнейшем введем обозначения

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = z_1, \quad x_5 = z_2,$$

$$k_1 = \frac{\partial c}{\partial x}, \quad k_2 = \frac{\partial c}{\partial y}, \quad k_3 = \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y},$$

$$k_4 = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad k_5 = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}.$$

Тогда из зависимостей (1), (2) следует система дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= c \cos x_3, & \frac{dx_2}{dt} &= c \sin x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= k_1 \sin x_3 - k_2 \cos x_3, & \frac{dx_4}{dt} &= x_5, \\ \frac{dx_5}{dt} &= -P(t) x_5 - Q(t) x_4, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

которая интегрируется при заданных начальных условиях

$$x(0) = (x)_0, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (8)$$

Решение начальной задачи (7), (8) определяет направление луча и коэффициент разделения лучей.

Введем безразмерные переменные по формулам

$$x_1^* = \frac{x_1}{\lambda_\infty}, \quad x_2^* = \frac{x_2}{\lambda_\infty}, \quad H^* = \frac{H}{\lambda_\infty},$$

$$t^* = \frac{t}{T}, \quad c^* = \frac{c}{c_\infty}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_\infty},$$

где  $\lambda_\infty$  и  $c_\infty$  – длина волны и фазовая скорость на глубокой воде,  $\lambda_\infty = \frac{g}{2\pi} T^2$ ,  $c_\infty = \frac{\lambda_\infty}{T} = \frac{g}{2\pi} T$ . В дальнейшем звездочки не пишутся.

Высота волны в случае волн малой амплитуды определяется из условия сохранения энергии между лучами [20]:

$$\frac{\alpha}{\alpha_\infty} = K_\tau K_p. \quad (9)$$

Здесь  $\alpha/\alpha_\infty$  – относительная высота волны; коэффициент рефракции  $K_p$  определяется по формуле (3); коэффициент трансформации имеет вид

$$K_T = \left[ \frac{(\text{th} k H)_\infty \left( 1 + \frac{2kH}{\text{sh} 2kH} \right)_\infty}{\text{th} k H \left( 1 + \frac{2kH}{\text{sh} 2kH} \right)} \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Коэффициент  $K_T$  нормирован таким образом, чтобы относительная высота волны в начальный момент времени, т. е. на глубокой воде, была равна единице.

Таким образом, из решения системы (7) и формул (9), (10) можно определить изменение высоты вдоль одного луча.

## 2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ РЕЛЬЕФА ДНА

*Случай линейного изменения глубины.* Исследуем рефракцию волн в случае плоского наклонного дна, когда глубина жидкости изменяется по закону

$$H(x) = \text{ch} i x_1 + H_0, \quad (11)$$

где  $\chi = -1/m$  ( $m$  – коэффициент откоса). Начало координатной системы  $x_1 0 x_2$  выбирается на глубокой воде, причем ось  $0 x_1$  перпендикулярна к линии уреза, которая в невозмущенном состоянии является прямой.

Система уравнений (7) с учетом (11) упрощается и принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= c \cos x_3, & \frac{dx_2}{dt} &= c \sin x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= k_1 \sin x_3, & \frac{dx_4}{dt} &= x_5, \\ \frac{dx_5}{dt} &= -P(t) x_5 - Q(t) x_4. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Здесь  $P(t) = -2k_1 x_3$ ;  $Q(t) = c k_4 \sin^2 x_3$ ;  
 $k_1 = \frac{c}{H} \frac{R}{1+R} \text{ch} i$ ;  $k_4 = -\frac{c}{H^2}$ .

Начальные условия в момент времени  $t = 0$ , соответствующие кривизне фронта волны, имеют вид

$$x_1(0) = x_2(0) = x_5(0) = 0,$$

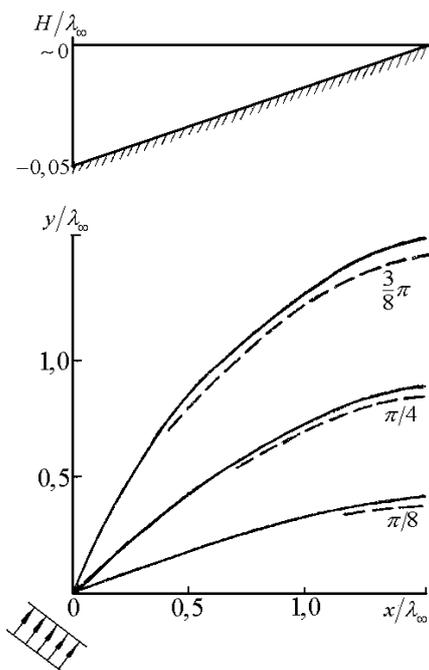


Рис. 2. Линии лучей над плоским наклонным дном (сплошные линии соответствуют точному решению)

$$x_3(0) = \frac{\pi}{2a_1}, \quad x_1(0) = 1, \quad (13)$$

где  $a_1$  – некоторая задаваемая константа.

Система уравнений (12) интегрируется при начальных условиях (13) численно методом Рунге - Кутты с последующим определением высоты волны. Расчеты выполнены при различных значениях коэффициента откоса  $m$ , равных 5, 30, 50, 70, и начальных углах  $\alpha_0$ , равных  $\pi/8, \pi/4, 3/8\pi, \pi/2$ . Этим значениям  $\alpha_0$  в начальных условиях (13) соответствует величина  $\alpha_1$ , равная 4, 2, 1,  $3/4$ . Параметр  $H_0$  выбирается в соответствии с критерием глубокой воды  $kH \geq 3$  [5], откуда имеем  $H_0 = 3/(2\pi)$ .

Результаты расчетов приведены в виде графиков. На рис. 2 показаны линии лучей для мелкой воды, когда  $H/\lambda = 1/20$  и  $c = \sqrt{gH}$ . Штриховыми линиями построены лучи, соответствующие точному решению [16]. Как видно из рис. 2, с увеличением начального угла поворота луча в сторону берега значительно замедляется. На рис. 3 показано изменение высоты волны с глубиной.

*Случай параболического изменения глубины.* Рассмотрим рефракцию волн в случае изменения глубины жидкости по параболическому закону

$$H \left( x_1 = \frac{\kappa}{H_0} x_1^2 + H_0 \right), \quad (14)$$

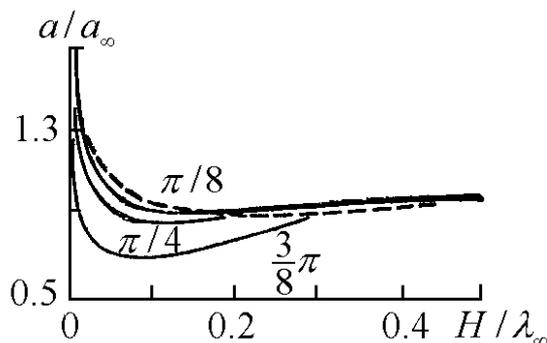


Рис. 3. Изменение высоты волны  $a/a_\infty$  с глубиной  $H/\lambda_\infty$  при начальных углах подхода луча  $\alpha = \pi/8, \pi/4, 3/8\pi, m = 5$

где  $\kappa = -1/m^2$ .

Рис. 4 позволяет сравнить данные расчета, соответствующие (14), с точным решением [18] для случая длинных волн  $c = \sqrt{gH}$ , когда глубина  $H$  изменяется по параболическому закону. Из рисунка видно хорошее приближение к точному решению.

*Случай гиперболического изменения глубины.* Рассмотрим рефракцию волн, когда глубина жидкости изменяется по гиперболическому закону

$$H(x_1) = \frac{H_0(\kappa H_0 - x_1)}{\kappa H_0 + x_1}, \quad (15)$$

где  $\kappa = m$ .

Рис. 5 позволяет сравнить данные расчета, соответствующие (15), с точным решением, когда  $c = \sqrt{gH}$ , а глубина изменяется по гиперболическому закону. В этом случае также имеем хорошее приближение к точному решению [17].

### 3. ТАБЛИЧНОЕ ЗАДАНИЕ ГЛУБИНЫ

Аналитическое задание рельефа дна возможно лишь в некоторых частных случаях донной поверхности. В реальных условиях описать дно конкретной функцией достаточно сложно, поэтому перспективным представляется использование данного алгоритма для произвольного рельефа дна при табличном задании глубины [6].

Для нахождения глубины  $H$  и ее производных исследуемая зона рефракции представляется в виде прямоугольной области, которая разбивается на квадраты. В узлах полученной таким образом сетки с постоянным шагом задаются значения глубины и вычисляются производные  $\partial H/\partial x, \partial H/\partial y, \partial^2 H/\partial x \partial y, \partial^2 H/\partial x^2, \partial^2 H/\partial y^2$ .

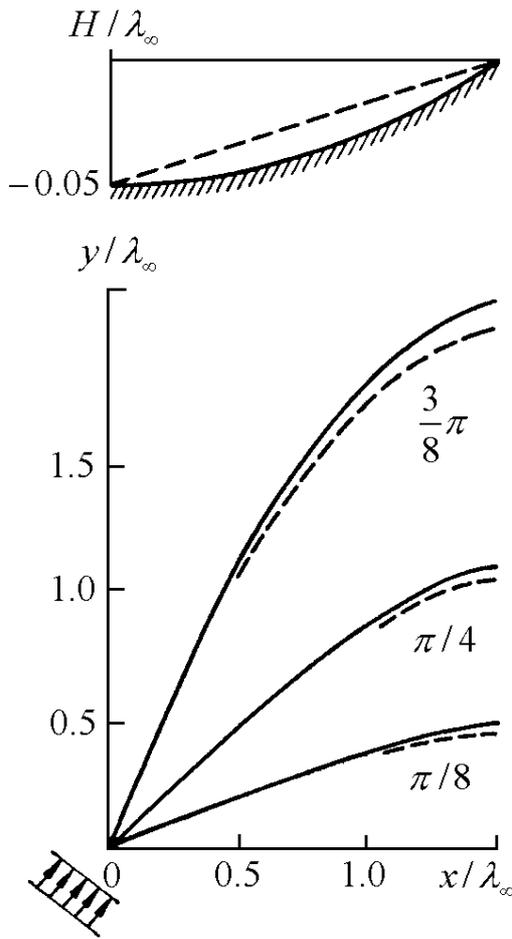


Рис. 4. Линии лучей над параболическим дном (сплошные линии соответствуют точному решению)

Сопоставление теоретических результатов с натурными наблюдениями. В целях апробации предлагаемой численной методики были проведены натурные наблюдения рефракции волн и выполнено сравнение результатов измерений с численными результатами. На опытном участке одной из аккумулятивных форм Черноморского побережья была проведена детальная съемка подводного рельефа, послужившая при теоретических расчетах рефракции основанием для определения глубин в отдельных точках прилегающей к урезу акватории моря. Съемкой, выполненной по поперечникам, разбитым через 50 м по длине берега с удалением в сторону моря до 200-250 м, был охвачен участок берега протяженностью около 1.5 км. На рис. 6 приведены результаты расчетов (сплошная линия) и натурных наблюдений (штриховая линия).

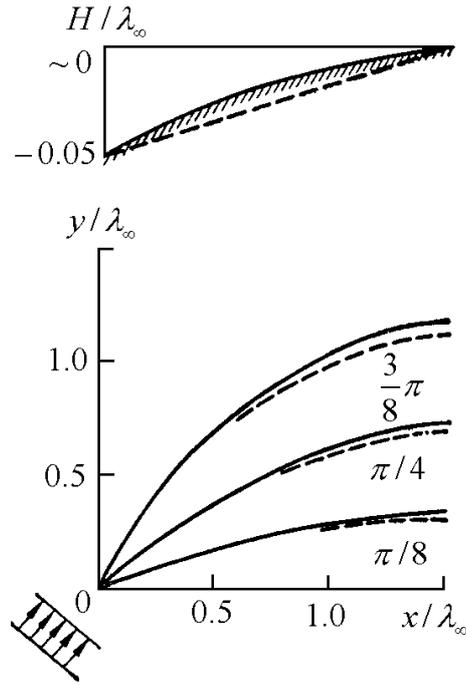


Рис. 5. Линии лучей над гиперболическим дном (сплошные линии соответствуют точному решению)

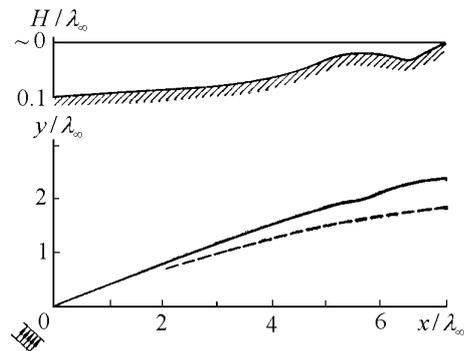


Рис. 6. Сопоставление результатов численного моделирования (сплошная линия) с натурными наблюдениями (штриховая линия)

#### 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕДИМЕНТАЦИИ МАЛЫХ ЧАСТИЦ В ВОЛНАХ

Исследование поведения частиц в волновом поле представлено в работах [7 - 9, 14, 15].

Исходные уравнения с соответствующими условиями записываются в виде [22]

$$\frac{dx}{dt} = V, \quad (16)$$

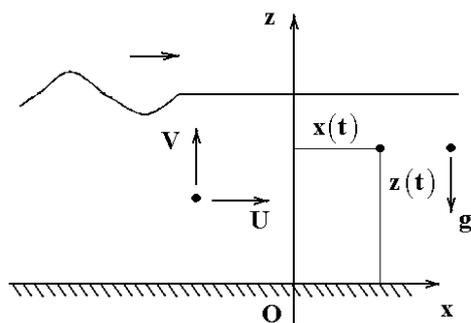


Рис. 7. Взвешенная частица в волновом потоке

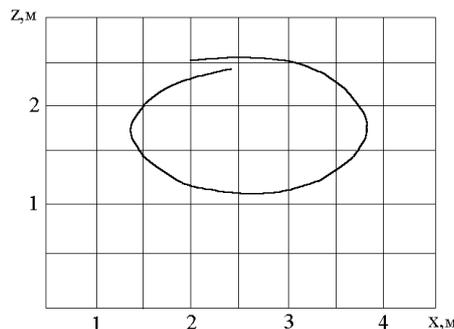


Рис. 8. Результаты вычисления траектории жидкой частицы

$$\frac{dz}{dt} = U - w, \tag{17}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{18}$$

$$z(t_0) = z_0, \tag{19}$$

где  $x(t)$  и  $z(t)$  – горизонтальная и вертикальная координаты твердой частицы;  $w$  – скорость осаждения частицы;  $V$  и  $U$  – горизонтальная и вертикальная волновые скорости (рис. 7). Предполагается, что горизонтальные компоненты воды и наносов совпадают, а вертикальные отличаются [2].

Представленная система уравнений применялась в [3, 10] для моделирования движения наносов в стоячих волнах около стенок и в открытых каналах. Здесь скорости движения жидкости задаются в виде [12]

$$V = \frac{H}{2} \sigma \frac{\cos h k (h + z)}{\sin h k h} \cos(kx - \sigma t), \tag{20}$$

$$U = \frac{H}{2} \sigma \frac{\operatorname{sh} k (h + z)}{\sin h k h} \sin(kx - \sigma t), \tag{21}$$

где  $h, H, \sigma$  и  $k$  – глубина воды и амплитуда волны, угловая частота и волновое число.

Представленная система (16) – (19) с учетом (20), (21) решалась численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Тестирование модели было выполнено, принимая  $w = 0$ . Это означает, что седиментация отсутствует в поле течения. Пример расчетной траектории материальной точки однородной жидкости показан на рис. 8.

Эти результаты сравнивались с экспериментальными данными. Лабораторные испытания были проведены в волновом бассейне с прозрачными боковыми стенками. Частицы алюминиевого порошка были введены и в "световом ноже" стали ви-

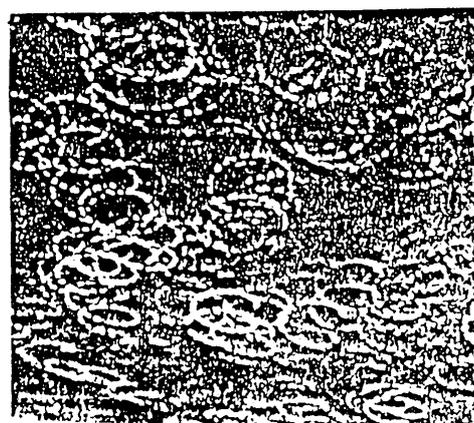


Рис. 9. Траектории частиц алюминиевого порошка доставка на буровую волновой бассейн

димыми. Таким способом можно делать фотографии жидких траекторий частиц. Результаты этих экспериментов представлены на рис. 9. Видно, что траектории качественно подобны результатам числовых расчетов, показанных на рис. 8. Рассчитанные траектории легких и тяжелых частиц представлены на рис. 10 и 11.

### 5. ДИНАМИКА ПЕРЕФОРМИРОВАНИЯ БЕРЕГА

Преобразование берегов от воздействия волн, приводящее к седиментации, рассматривалось в работах [1, 21 – 23]. В данной работе для построения математической модели принимается уравнение, выражающее закон сохранения объема осадков при деформации откоса в результате волнового воздействия:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{22}$$

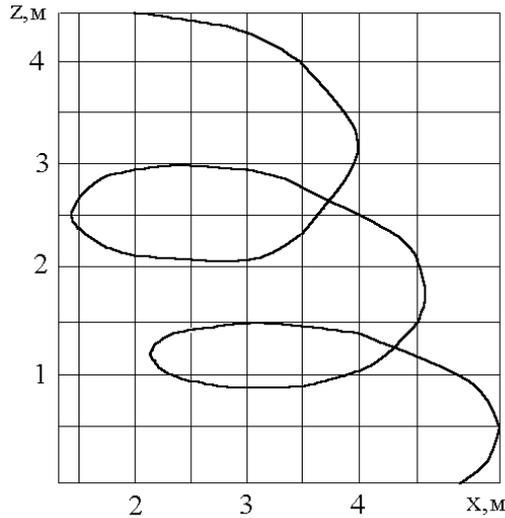


Рис. 10. Типичная расчетная траектория "легкой" частицы

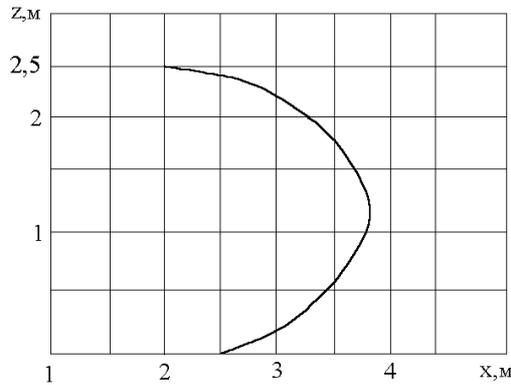


Рис. 11. Типичная расчетная траектория "тяжелой" частицы

где  $H(x, t)$  – глубина дна, отсчитываемая от уровня невозмущенной свободной поверхности жидкости;  $\varepsilon$  – пористость грунтов дна;  $Q(x, t)$  – расход наносов, перемещаемых волнами.

Для замыкания уравнения (22) вводится по аналогии с динамикой русловых потоков степенная зависимость, связывающая расход наносов с касательным напряжением на дне:

$$Q = Awd(\bar{\tau} - \bar{\tau}_c)^n, \quad (23)$$

где  $A$  и  $n$  – постоянные, определяемые из данных экспериментов в бассейнах и волновых лотках;  $w$  и  $d$  – гидравлическая крупность и диаметр наносов;  $\bar{\tau}$  – безразмерное касательное напряжение на дне, которое зависит от параметров глубоководного волнения, трансформированного в прибрежной

зоне;  $\bar{\tau}_c$  – критическое значение касательного напряжения, при котором начинается транспорт наносов.

Соотношение (22) с учетом (23) после линеаризации приводится к параболическому уравнению

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial H}{\partial x} \right) + b = 0, \quad (24)$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, зависящие от параметров трансформированного волнения и искомой функции  $H$ .

Для решения начально-краевой задачи для уравнения (24) задаются начальное и граничные условия следующего вида:

$$H(x, 0) = H_0(x), \quad t = t_0, \quad (25)$$

$$H(x_1, t) = H(x_1) = \text{const}, \quad (26)$$

$$H(x_2, t) = H(x_2) = \text{const}, \quad (27)$$

где  $H_0(x)$  – профиль берега в начальный момент времени;  $x_1$  – координата верхней границы наката волны на откос;  $x_2$  – координата границы “глубокой воды”.

Задача (24)–(27) решалась численно методом конечных разностей [19, 21]. Для проверки основных соотношений математической модели выполнены экспериментальные исследования на физической волновой модели с размываемым дном. В опытах применялась модель волнового канала Института гидромеханики НАН Украины (длина – 27 м, ширина – 0.35, глубина – 0.6 м).

В расчетах и экспериментах наблюдался процесс образования берегового вала у отмелого аккумулятивного берега, имеющий общие черты с аналогичным процессом, происходящим в природных условиях на мелководьях водохранилищ. Установлено, что основным фактором, приводящим к аккумуляции наносов и образованию берегового вала, является разрушение волн на отмелом берегу, происходящее по типу так называемого “скользящего буруна” [11].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена модель рефракции поверхностных гравитационных волн над произвольной топографией донной поверхности при ее задании в аналитическом или дискретном виде. Проведено решение соответствующей задачи Коши, результаты тестируются и сопоставляются известными и натурными данными.

Исследуется седиментация наносов на основе начально-краевых задач и проводится сопоставление физического моделирования.

1. *Волынский Р. И., Хомицкий В. В.* Теоретические и экспериментальные исследования динамики подводного склона отмелых берегов водохранилищ // Сб. "Рациональное использование природных ресурсов и охрана окружающей среды". - Л.: ЛПИИ.- 1988.- Вып. 11.- С. 46-51.
2. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика.- М: Наука, 1965.- 639 с.
3. *Пышкин Б. А.* Винтовое движение жидкости со взвешенными наносами в прямой трубке квадратного сечения // Изв. Ин-та гидрологии и гидротехники АН УССР.- 1955.- 12.- С. 46-57.
4. *Селезов И. Т.* Распространение и трансформация поверхностных гравитационных волн в жидкости конечной глубины. Итоги науки и техники. Сер. "Механика жидкости и газа".- М.:ВИНИТИ: 1990, 24.- 3-76 с.
5. *Селезов И. Т., Сидорчук В. Н., Яковлев В. В.* Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа.- Киев: Наук. думка, 1983.- 208 с.
6. *Сорокина В. В.* Исследование рефракции поверхностных гравитационных волн при табличном задании рельефа дна.- В кн.: Математические методы исследования гидродинамических течений.- Киев: Наук. думка, 1978.- 114-118 с.
7. *Carcia M., Parker G.* Entrainment of bed sediment into suspension // J. Hydraulic Engineering, ASCE.- 1991.- 117, N 4.- P. 414-435.
8. *Deigaard R., Fredsoe J., Hedegaard I. B.* Suspended sediment in the surf zone // J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE.- 1986.- 112, N 1.- P. 115-128.
9. *Horikawa K.* Coastal sediment processes // Annual Review of Fluid Mechanics.- 1981.- 13.- P. 9-32.
10. *Iwagaki Y., Hiragata H.* Behaviour of a solid particle under standing waves // Coast. Eng. Jap.- 1973.- 16.- P. 41-53.
11. *Kobayashi N.* Sediment transport on a gentleslope due to waves // L. Water ways, port, coast and ocean div. Proc. ASCE.- 1982.- N 3.- P. 254-271.
12. *McCormick M.* Ocean wave energy conversion. - Dover Publications, Inc.- 2007; русский перевод: *Мак-Кормик М.* Преобразование энергии волн.- М.: Энергоиздат, 1985. - 136 с.
13. *Ouriemi M. Aussillous P., Guazzelli E.* Sediment dynamics. Part 1. Bed-load transport by laminar shearing flows // J. Fluid Mech.- 2009.- 636.- P. 295-319.
14. *Prabhata K. Swamee, Chandra Shakhar P. Ojha.* Drag coefficient and fall velocity of nonspherical particles // J. Hydraulic Engineering.- 1991.- 117, N 5.- P. 660-672.
15. *Provenzale A., Osborne A. R., Boffetta G., Serio M.* Particle orbits from the Lagrangian and the Eulerian Korteweg-de Vries equations // Phys. Fluids.- 1990.- 2, N 5.- P. 866-869.
16. *Sager G.* Refraktion von Meersvellen bei ebenem Abfall des Bodens // Gerlands Beitr. Geophys.- 1973.- 82, N 3.- P. 210-222.
17. *Sager G.* Refraktion von  $\sqrt{gh}$  - Wellen bei hyperbolischen Abfall des Bodens // Gerlands Beitr. Geophys.- 1973.- 82, N 4.- P. 309-328.
18. *Sager G.* Refraktion von  $\sqrt{gh}$  - Wellen bei Abfall des Bodens nach dem profil einer Parabel // Gerlands Beitr. Geophys.- 1973.- 82, N 5.- P. 361-378.
19. *Selezov I. T.* Interaction of water waves with engineering constructions and topography in a coastal area // Proc. 5th Int. Conf. on Coastal and Port Eng. in Developing Countries (COPEDEC V).- Cape Town, South Africa, 19-23 April 1999, Vol. 1.- P. 112.
20. *Selezov I. T., Sorokina V. V.* Numerical investigation of refraction of surface gravity waves by the ray method // Hydrotechnical Construction.- 1981.- 15, N 1.- P. 46-50.
21. *Selezov I. T., Volynskiy R. I., Morozov V. I.* Mathematical simulation of fluid and lithodynamics of the shore region // Int. J. Fluid Mechanics Research.- 1996.- 23, N 1. - 2.- P. 101-108.
22. *Shibayama T., Horikawa H.* Bed-load Measuzement and prediction of two-dimensional beach transformation due to waves // Coastal Engineering in Japan.- 1980.- N 23.- P. 179-189.
23. *Volynski R., Azmon E., Selezov I., Suzdaltsev A.* Computer simulation of small particles transport in waves // Proc. 26th Israel Conference on Mechanical Engineering.- Technion City, Haifa, 21-22 May 1996.- P. 234-236.