

УДК 532.516

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С ДВУМЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ СТЕНОЗАМИ. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

В. С. МАЛЮГА

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 23.12.2009*

Описан алгоритм численного решения полной системы нестационарных уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости, который базируется на методе конечных объемов. Уравнения решаются в неподвижной декартовой системе координат. Используются разностные схемы, имеющие второй порядок точности по пространству и времени. Для дискретизации конвективных членов используется TVD схема Chakravarthy-Osher. Численный алгоритм разработан для трехмерной неструктурированной сетки. Полученная система нелинейных алгебраических уравнений линейризуется и решается по алгоритму PISO. Для решения соответствующих систем линейных алгебраических уравнений применяются итерационные солверы, использующие методы сопряженных/бисопряженных градиентов с предобуславливанием, которые можно найти в свободно распространяемых библиотеках, доступных в репозитории NetLib [62]. Описанный численный алгоритм использован для прямого численного моделирования течения жидкости в канале с двумя последовательно расположенными стенозами при различной ширине канала в области между стенозами. Установлено, что при достаточно малой ширине межстенной части канала в межстенной области генерируются симметрично расположенные вихри. А при достаточно большой ширине в определенном диапазоне чисел Рейнольдса два ряда вихрей, генерируемых течением в межстенной области, организуются в шахматном порядке.

Описано алгоритм чисельного розв'язання повної системи нестационарних рівнянь Навье–Стокса для нестисливої рідини, що ґрунтується на методі скінчених об'ємів. Рівняння розв'язуються в нерухомій декартовій системі координат. Використовуються різничні схеми, що мають другий порядок точності у просторі і за часом. Для дискретизації конвективних членів використовується схема Chakravarthy-Osher. Чисельний алгоритм розроблено для тривимірної неструктурованої сітки. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь лінеаризується і розв'язується за алгоритмом PISO. Для розв'язання відповідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовуються ітераційні солверы, що базуються на методах спряжених/біспряжених градієнтів з передобумовленням, які можна знайти у відкритих бібліотеках, доступних в репозитарії NetLib [62]. Описаний чисельний алгоритм використано для прямого чисельного моделювання течії рідини в каналі з двома послідовно розташованими стенозами за різної ширини каналу в області між стенозами. Встановлено, що за досить малої ширини міжстенної частини каналу в міжстенній області генеруються симетрично розташовані вихорі. А за досить великої ширини у певному діапазоні чисел Рейнольдса два ряди вихорів, що генеруються течією в міжстенній області, організуються в шаховому порядку.

A numerical solution algorithm for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations is described in the paper. The discretization procedure is based on the finite volume method. The equations are solved in the fixed Cartesian coordinate system. Stabilized and bounded differencing schemes, second-order accurate in both space and time, are used. The TVD differencing scheme of Chakravarthy-Osher is employed for the discretization of the convective terms. The numerical algorithm is designed for three-dimensional arbitrarily unstructured meshes. The system of non-linear algebraic equations obtained from the discretization procedure is linearized and solved with the PISO algorithm. The corresponding systems of linear algebraic equations are solved using the iterative solvers based on the preconditioned conjugate/biconjugate gradient methods. These solvers are available from the repository NetLib [62]. The numerical algorithm described in the paper is employed for the direct numerical simulation of the flow in a duct containing two sequential stenoses. The calculations are performed for various widths of the inter-stenoses segment of the duct. It is established that if the duct is sufficiently narrow between the stenoses, in some range of Reynolds number, the vortices generated in the inter-stenoses domain are situated symmetrically. But if the duct is sufficiently wide between the stenoses, the two rows of the vortices generated in the inter-stenoses domain are checker-wise situated.

## ВВЕДЕНИЕ

Течения вязкой жидкости в канале с последовательно расположенными сужениями поперечного сечения (стенозами) широко встречаются как в природе, так и во многих технических устройствах. Наличие таких препятствий в канале определяет кинематику потока, а также характер и уровень акустических шумов, генерируемых потоком. Поэтому разработка методов расчета таких течений представляет практический интерес. Сло-

жности расчета таких течений связаны с тем, что на различных участках такое течение обладает различной кинематической природой. Так, в определенной области его нужно рассматривать как обтекание препятствия. В частности, перед первым сужением образуется так называемая область подпора или застойная зона. А далее, в области между первым и вторым сужениями такое течение напоминает детально изученное течение над прямоугольным углублением. В частности, при достаточно больших числах Рейнольдса может иметь место отрыв пограничного слоя на первом стенозе

и его снос в область между стенозами. В данной статье мы детально описываем численный метод, использованный нами при расчете таких течений. Этот метод базируется на хорошо известном методе конечных объемов, однако ряд принципиальных моментов должен быть обсужден отдельно. Это, в первую очередь, касается построения конвективной разностной схемы и выбора метода решения получаемой нелинейной системы алгебраических уравнений.

Многие процессы, наблюдаемые в природе и технике, которые изучает механика жидкости, характеризуются высокими числами Рейнольдса, что подразумевает доминирование конвективных эффектов. В то время как базовые понятия конечно-объемной дискретизации хорошо известны [1–3], дискретизация конвективных членов продолжает оставаться предметом интенсивных дискуссий. В рамках второго порядка точности приемлемой схемой дискретизации могла бы быть центрально-разностная схема. Однако, как известно, в многих случаях применение центрально-разностной схемы для дискретизации конвективных членов приводит к неустойчивости и появлению нефизических осцилляций решения. Дело в том, что, согласно теореме Годунова [4] (см. также учебную литературу, например, [2]), все линейные монотонные схемы для уравнения переноса имеют только первый порядок, т. е. линейные схемы второго и более высоких порядков не обладают свойством монотонности. Для достижения устойчивости дискретизационной процедуры были предложены схемы первого порядка [5–7]. Однако такие схемы имеют неудовлетворительный порядок точности, что привело к необходимости разработки устойчивой схемы второго порядка. Такая схема была предложена Lax и Wendroff [8]. Позже появилось большое семейство схем Lax-Wendroff, в которых устойчивость достигается за счет комбинирования пространственной и временной дискретизации, что привело к множеству двухшаговых [9, 10] и неявных схем [11, 12]. Однако в случае стационарных задач комбинированная пространственно-временная дискретизация вводит нереалистичную зависимость решения от величины шага по времени. Для разрешения этой проблемы в работах [13–15] было разработано семейство схем второго порядка с независимым интегрированием по времени. Хотя такой подход исключает зависимость пространственной точности от размера временного шага, разностные схемы семейства Beam-Warming могут вызывать нефизические осцилляции в решении, что приводит к потере ограниченности решения и существенно снижает при-

менимость схемы. Предпринималась также попытка решить проблему ограниченности решения посредством введения члена искусственной диффузии [2]. Однако и такой подход не гарантирует ограниченности решения, а искусственная диффузия снижает точность схемы, особенно в областях высоких градиентов.

Единственная конвективная схема, которая гарантирует ограниченность и монотонность – это встречно-поточная схема [1]. Это происходит благодаря введению чрезмерной численной диффузии, что изменяет природу задачи. Задача, в которой доминировали конвективные эффекты, становится задачей, в которой конвективные и диффузионные эффекты сбалансированы. Такая потеря точности является неприемлемой и, следовательно, было предложено несколько решений данной проблемы. Не претендуя на исчерпывающую общность данного обзора, выделим следующие категории:

- схемы, использующие точное или приближенное одномерное решение уравнения конвекции-диффузии для определения значения неизвестных функций. К ним можно отнести схему LOADS (locally analytic differencing scheme), предложенную в [16], а также схему со степенным законом [1];
- схемы, основанные на разностях против потока. Например, противопоточная взвешенная схема [17], имеющая первый порядок, а также противопоточные схемы более высоких порядков: линейная противопоточная схема [18] и схема QUICK, предложенная Leonard [19]. Следует также упомянуть противопоточные схемы для сложных физических областей с сетками со скошенными ячейками или так называемые skew-upwind differencing schemes [20, 21]. В [22] представлен более детальный обзор, посвященный противопоточным схемам;
- гибридные (или комбинированные) схемы [23]. Суть гибридной схемы состоит в том, что в области, где сеточное число Пекле меньше 2, используются центральные разности, в противном случае – разности против потока. Как указано в [25], такой подход был впервые предложен Allen и Southwell [24];
- смешанные схемы (blended differencing) [26]. Считая, что достаточное условие ограниченности решения является слишком жестким, Perić предложил подход, основанный на "смешении" схем, т. е. противопоточные разности

используются в комбинации со схемами более высокого порядка (центральные или линейные противопоточные разности) таким образом, чтобы была достигнута ограниченность решения.

Все перечисленные выше схемы либо сильно жертвуют точностью, либо не гарантируют монотонности решения. Дальнейший поиск ограниченных и достаточно точных разностных схем привел к разработке концепции ограничения потока. Boris и Book [27] ввели понятие ограничителя потока в своей FCD (Flux Corrected Transport) разностной схеме, которая в дальнейшем была обобщена в [28] на многомерные задачи. В дальнейшем эта идея была использована van Leer в серии работ "Towards the ultimate conservative differencing scheme"[29–33]. В конечном итоге эти методы привели к появлению класса TVD схем (Total Variation Diminishing). TVD схемы развивали Harten [34, 35], Roe [36], Chakravarthy и Osher [37] и другие. Общая процедура построения TVD схемы описана Osher и Chakravarthy в [38], а Sweby [39] представил графическую интерпретацию ограничителей (диаграмма Sweby) и исследовал точность метода. Основная идея TVD метода состоит в том, что вклад схемы более высокого порядка и монотонной схемы первого порядка зависят от локальной формы самого решения, что делает схему нелинейной. Общие принципы построения ограниченных конвективных схем высокого порядка рассмотрены в [40]. Эта работа содержит детальную классификацию и анализ большинства нелинейных скалярных конвективных схем, разработанных на данный момент. Анализ включает обзор и сравнение двух наиболее часто используемых подходов: ограничители потоков и нормализованные переменные (normalized variables).

Согласно классификации [40], TVD схема, используемая в данной статье, соответствует обобщенной кусочно-линейной схеме Chakravarthy-Osher [37]. Такая схема вносит минимальную численную диффузию, что может быть существенно именно в рассматриваемой в данной статье задаче.

Кроме рассмотренной выше проблемы построения неосциллирующих и достаточно точных конвективных схем, имеют место еще две проблемы, с которыми сталкиваются исследователи при дискретизации уравнений Навье-Стокса. Это нелинейность уравнения сохранения импульса и согласование полей скорости и давления. Нелинейный член уравнения имеет вид  $\nabla \cdot \mathbf{UU}$  и, следовательно, дискретная форма этого выражения будет квадратичной относительно скорости. Т. е.

получаемая в результате система алгебраических уравнений будет нелинейной. Есть два возможных пути решения проблемы: использовать солверы для нелинейных систем уравнений или линеаризовать конвективный член. Принимая во внимание сложность и затратность нелинейных солверов, во многих случаях предпочтение отдается именно процедуре линеаризации. В этом случае конвективный член трактуется как перенос скорости потоком. При этом значения потока берутся с временным лагом, т. е. уже известные, рассчитанные на предыдущем шаге по времени. Затем для уточнения значений скорости используется итерационная процедура, т. е. значения скорости, полученные после решения соответствующей линейной системы, используются для расчета нового, более точного поля потока. И так число итераций повторяют необходимое число раз.

Одна из основных проблем при численном решении системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости состоит в слабом согласовании полей скорости и давления. Так, при использовании итерационных процедур решения, линейные алгебраические уравнения, получаемые из уравнения сохранения импульса, используются для вычисления дискретного набора значений скорости. Тогда естественно было бы использовать уравнение неразрывности для вычисления давления. Однако в рамках модели несжимаемой жидкости давление или плотность не входят в уравнение неразрывности. Таким образом, если используется итерационная процедура решения, необходимо найти способ как ввести давление в уравнение неразрывности. Такие методы можно разделить на два класса. Один из них - это метод искусственной сжимаемости, в рамках которого течению приписывается слабая (но конечная) сжимаемость [41] и затем решается задача на установление. Другой класс методов - это методы, основанные на вычислении давления (pressure-based methods, PBM). PBM метод был введен Harlow и Welch [42] для расчета неустановившегося течения. Позже метод был распространен и на случай установившегося течения [1, 43]. Основная идея данного класса методов состоит в том, чтобы сформулировать уравнение Пуассона для коррекции давления и затем вычислять новые значения полей давления и скорости до тех пор, пока не будет получено поле скорости, удовлетворяющее условию несжимаемости. В этот класс методов входят MAC (marker and cell) метод [42], алгоритм SIMPLE (semi-implicit method for pressure linked equations) [43], включая его усовершенствования - SIMPLER [1] и SIMPLEC [44], а также алгоритм PISO (pressure

implicit with splitting of operators), предложенный Issa в [45], который отличается двухшаговым корректором. Как было показано в [45, 46], алгоритм PISO представляет собой устойчивый, хорошо сходящийся алгоритм, который во многих задачах требует меньше расчетного времени, чем все упомянутые выше разновидности алгоритма SIMPLE. Особенно его преимущества видны при расчетах нестационарных течений. В силу вышесказанного именно алгоритм PISO использовался в данной статье.

Следует также отметить, что РВМ метод был имплементирован на двух различных типах организации сетки: разнесенные сетки (с различными контрольными объемами для скорости и давления) [47] и совмещенные сетки (с теми же контрольными объемами для всех искомых полей) [48]. Разнесенные сетки часто использовались на более ранних стадиях развития расчетной гидромеханики. Их имплементация не представляет сложности, если сетки структурированы. Однако с тех пор, как начали активно развиваться алгоритмы для неструктурированных сеток, совмещенные сетки стали использоваться все чаще и чаще. В настоящее время все современные численные пакеты используют совмещенные сетки. В данной статье, поскольку мы строим численный алгоритм для неструктурированной сетки, все поля (и скорость, и давление) приписываются в центроидах контрольных объемов.

Цель данной работы состоит в применении построенного численного алгоритма к решению задачи о движении несжимаемой жидкости в плоском канале с последовательно расположенными двусторонними внезапными сужениями его поперечного сечения (стенозами), а также анализе кинематических особенностей такого потока. В данной статье мы рассматриваем ламинарные режимы течения и показываем, как качественно изменяется кинематика течения при уменьшении глубины полостей, образованных последовательными сужениями.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается задача о течении жидкости в плоском канале при наличии следующих друг за другом двух стенозов. Также предполагается, что в межстенозном пространстве может иметь место некоторое сужение канала. Расчетная область и принятые обозначения представлены на рис. 1. Предполагается, что стенки канала, а также стенки стенозов неподвижны и

абсолютно жесткие, а поток жидкости попадает в расчетную область через левую границу  $x = 0; 0 \leq y \leq D_1$  и покидает расчетную область на правой границе  $x = L_1; 0 \leq y \leq D_1$ .

Вверх по потоку от первого стеноза ( $0 \leq x \leq L_2$ ), а также вниз по потоку от второго стеноза ( $L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \leq x \leq L_1$ ) канал имеет ширину  $D_1$ , в то время как в межстенозном пространстве ( $L_2 + L_3 \leq x \leq L_2 + L_3 + L_4$ ) ширина канала равна  $D_4 \leq D_1$ . Т.е. в межстенозном пространстве может иметь место некоторое сужение канала.

Задача решается в рамках модели вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости с плотностью  $\rho$  и, следовательно, основным параметром задачи служит число Рейнольдса. Поскольку в задаче присутствует не один, а несколько заданных размеров, любой из них может быть в принципе принят за масштаб длины и, следовательно, число Рейнольдса может быть определено различным образом. Остановимся более детально на выборе масштаба длины. Объектом нашего исследования являются особенности движения среды во всей расчетной области, однако наибольший интерес представляет течение в межстенозной области и, прежде всего, на границах межстенозных полостей ( $L_2 + L_3 \leq x \leq L_2 + L_3 + L_4, D_1/2 - D_4/2 \leq y \leq D_1/2 - D_2/2$  и  $L_2 + L_3 \leq x \leq L_2 + L_3 + L_4, D_1/2 + D_2/2 \leq y \leq D_1/2 + D_4/2$ ) и струи ( $L_2 + L_3 \leq x \leq L_2 + L_3 + L_4, D_1/2 - D_2/2 \leq y \leq D_1/2 + D_2/2$ ), где (как было показано в [49]) образуются два сдвиговых слоя, которые формируются как пристенные сдвиговые слои на поверхностях верхней и нижней частей первого стеноза, а затем отрываются и сносятся течением в область между стенозами, где могут уже рассматриваться как свободные сдвиговые слои. В связи с этим, наиболее естественным было бы определить число Рейнольдса по длине межстенозных полостей, вдоль которых происходит развитие сдвиговых слоев:  $Re = V_2 L_4 / \nu$ , где  $\nu$  – кинематическая вязкость среды. При этом масштабом длины является расстояние между стенозами  $L_4$ , масштабом скорости – скорость  $V_2$ , т.е. скорость потока в отверстии первого стеноза, осредненная по вертикальному сечению, масштабом времени – величина  $L_4 / V_2$ , а масштабом давления – удвоенный скоростной напор в отверстии стеноза  $\rho V_2^2$ .

В рамках принятой модели процесс описывается нестационарной системой уравнений Навье-Стокса. В безразмерных физических переменных их можно представить в тензорной форме следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} - \nabla p, \quad (1)$$

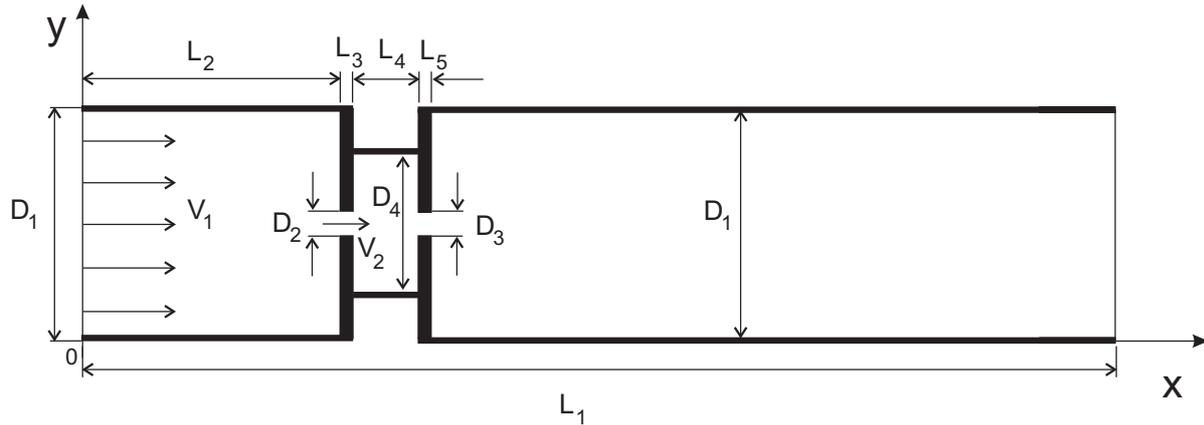


Рис. 1. Геометрия расчетной области

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

где  $p$  – скалярное поле давления;  $\mathbf{U}$  – векторное поле скорости;  $\mathbf{U}\mathbf{U}$  – тензор второго ранга, определенный как внешнее произведение векторов. Покомпонентное представление этих уравнений можно найти в учебной литературе (см., например, [53]).

На границе расчетной области задавались следующие граничные условия для скорости: равномерный поток на входе в расчетную область при  $x = 0$ , условие прилипания на твердых поверхностях канала и стенозов, а также «мягкие» граничные условия типа линейной экстраполяции, соответствующие равенству нулю нормального градиента скорости, на выходе из расчетной области при  $x = L_1$ . Для давления условие равенства нулю нормального градиента формулировалось по всей границе расчетной области [2] за исключением выхода из расчетной области. На выходе задавалось постоянное давление.

Хорошо известно, что двумерная постановка задачи позволяет сформулировать ее в переменных завихренность – функция тока (см., например, [54]). Такой подход позволяет исключить давление из уравнений движения и таким образом избежать сложностей, связанных с определением поля давления и согласованием полей. Однако распространение подхода с использованием завихренности и функции тока на трехмерные задачи осложнено тем, что для трехмерного течения нельзя ввести скалярную функцию тока. Использование же векторного потенциала приводит к необходимости решать на каждом временном слое три параболических и три эллиптических уравнения, что существенно усложняет задачу [25]. По этой причине в данной работе, так же как в работе [49], за-

дача решалась именно в физических переменных скорость – давление.

Значения геометрических параметров канала выбирались такие же, как в экспериментальной работе [50], а именно:  $D_1 = 18$  мм,  $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $L_1 = 150$  мм,  $L_2 = 20$  мм,  $L_3 = L_5 = 1$  мм,  $L_4 = 5.8$  мм. Кинематическая вязкость принималась равной вязкости воздуха при температуре  $20^\circ\text{C}$ :  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. Определенные выше размеры области при расчетах не изменялись, а ширина канала в межстенной области  $D_4$  варьировалась в пределах 6 – 18 мм.

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для численного решения сформулированной задачи используется метод конечных объемов. Хотя основные положения конечно-объемной дискретизации хорошо известны и изложены в учебной литературе (см. [1 – 3]), проблемы, связанные с дискретизацией конвективных членов, согласованием полей скорости и давления, а также с применением неструктурированных и неортогональных сеток, по-прежнему являются предметом интенсивных дискуссий. В данной работе, основываясь на идеях, изложенных в [53], мы строим конечно-объемную схему второго порядка, которая базируется на вычислении потока среды сквозь грани конечного объема и применима к неструктурированным сеткам, которые могут быть в принципе и неортогональными. В данной работе в силу прямоугольной геометрии рассматриваемой области мы используем ортогональную сетку с прямоугольной формой ячейки, которую, однако, все равно рассматриваем как неструктурированную сетку.

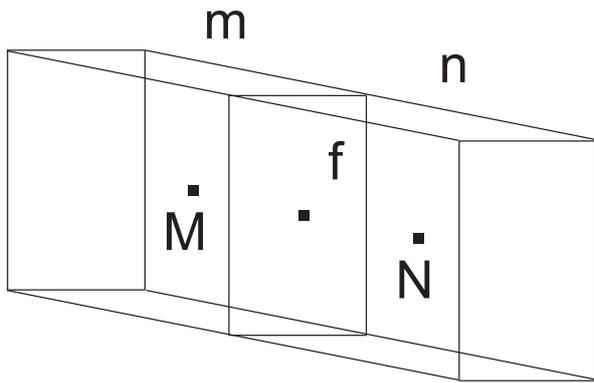


Рис. 2. Контрольные объемы  $m$  и  $n$ , имеющие общую грань  $f$

Численная схема строится для общего случая трехмерного течения. А двумерные задачи рассматриваются как частный случай, когда в направлении  $z$  имеется только один контрольный объем и компонента скорости  $U_z = 0$ . Таким образом, расчетная область разбивается на контрольные объемы, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда. Два типичных соседних контрольных объема с номерами  $m$  и  $n$  показаны на рис. 2. Грань, разделяющую эти два объема, обозначено через  $f$ . Точки  $M$  и  $N$  являются центроидами контрольных объемов  $m$  и  $n$  соответственно, т. е.

$$\int_{V_m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) dV = \int_{V_n} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N) dV = 0. \quad (3)$$

Интегрирование в (3) происходит по соответствующему контрольному объему.

Для того, чтобы численная схема имела второй порядок точности, неизвестная функция должна иметь линейную вариацию в контрольном объеме:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_M + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) \cdot (\nabla \mathbf{U})_M, \quad (4)$$

где индекс  $M$  означает значение функции в точке  $M$ , т. е.  $\mathbf{U}_M = \mathbf{U}(\mathbf{x}_M)$ . Тогда в силу (3) имеем

$$\int_{V_m} \mathbf{U} dV = \mathbf{U}_M V_m. \quad (5)$$

Основная идея используемого метода конечных объемов состоит в том, что уравнения движения (1), (2) интегрируются по контрольному объему  $m$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_m} \mathbf{U} dV + \int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{U} dV = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \int_{V_m} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} dV - \int_{V_m} \nabla p dV, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{U} dV = 0. \quad (7)$$

А для вычисления интегралов в (6), (7) используется обобщенная форма теоремы Остроградского-Гаусса, а именно, три следующих тождества:

$$\int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_{S_m} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}, \quad (8)$$

$$\int_{V_m} \nabla \mathbf{A} dV = \int_{S_m} d\mathbf{S} \mathbf{A}, \quad (9)$$

$$\int_{V_m} \nabla a dV = \int_{S_m} d\mathbf{S} a, \quad (10)$$

где  $S_m$  – поверхность контрольного объема  $m$ .

Вычисляя интеграл по контрольному объему от дивергенции скорости, из (8) получим дискретную форму второго порядка теоремы Гаусса. Учитывая (3), имеем

$$(\nabla \cdot \mathbf{U})_M V_m = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f. \quad (11)$$

Здесь  $\mathbf{S}_f$  обозначает вектор внешней нормали к грани  $f$ , модуль которого равен площади грани  $S_f$ . (На практике, при составлении компьютерной программы, для определенности принимают, что вектор нормали к грани  $f$  направлен от контрольного объема с меньшим номером в сторону контрольного объема с большим номером. Если таким образом определенный вектор является внешним к ячейке  $m$ , то при суммировании в (11) берется знак плюс, в противном случае – минус.) Суммирование в правой части проводится по всем граням контрольного объема  $m$ . Вычисляя интеграл по контрольному объему от градиента давления, из (10) получаем следующее дискретное соотношение второго порядка:

$$(\nabla p)_M V_m = \sum_f \mathbf{S}_f p_f. \quad (12)$$

Дискретизация уравнений движения (1), (2) основывается на дискретном аналоге второго порядка теоремы Гаусса (11) и (12).

Дискретизация конвективных членов приводит к соотношениям

$$\int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{U} dV = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f \mathbf{U}_f = \sum_f F \mathbf{U}_f, \quad (13)$$

где  $F$  представляет собой поток среды (flux) сквозь грань  $f$ , т.е.  $F = \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f$ . Вычисление этого потока  $F$  будет детально обсуждаться ниже. В формулу (13) входит значение скорости на грани

$f$ , которое определяется из значений скорости в центроидах соседних ячеек  $M$  и  $N$  посредством конвективных разностных схем.

В рамках используемого метода в качестве схемы дискретизации для конвективного члена можно было бы предложить центрально-разностную схему второго порядка:

$$\mathbf{U}_f = C\mathbf{U}_M + (1 - C)\mathbf{U}_N, \quad (14)$$

где постоянный коэффициент определен как отношение расстояний  $C = |fN|/|MN|$ . В [53] показано, что даже для неоднородной сетки эта схема имеет второй порядок точности.

Однако при определенных условиях, например, если течение при больших числах Рейнольдса набегает на выступающий угол, центральные разности могут приводить к неустойчивой схеме дискретизации и таким образом вызывать нефизические осцилляции, что существенно снижает качество численного решения или даже делает его неприемлемым вообще. Единственная конвективная разностная схема, которая является безусловно устойчивой и гарантирует ограниченность решения, – встречно-поточная разностная схема [1]:

$$\mathbf{U}_f = \begin{cases} \mathbf{U}_M, & \text{for } F \geq 0, \\ \mathbf{U}_N, & \text{for } F < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Однако эта схема имеет лишь первый порядок точности, а устойчивость схемы и ограниченность решения достигается за счет внесения значительной доли численной диффузии. И хотя измельчение сетки улучшает точность решения, требуемое число контрольных объемов делает эту схему неприемлемой для практики.

Было предложено несколько методов решения этой проблемы. В настоящее время активно развиваются схемы с ограничителями потока, которые привели к выделению класса схем TVD (Total Variation Diminishing) [40]. Основная идея состоит в том, что схема дискретизации зависит от локальной формы решения. Она предоставляет достаточную точность (более чем первого порядка) и в то же время гарантирует ограниченность решения (подавляет нефизические осцилляции, которые генерируют классические схемы второго порядка, такие как центрально разностная схема).

Любая TVD схема может быть представлена в виде суммы

$$\mathbf{U}_f = (\mathbf{U}_f)_{UD} + \Psi [(\mathbf{U}_f)_{CD} - (\mathbf{U}_f)_{UD}], \quad (16)$$

где  $(\mathbf{U}_f)_{UD}$  – значение скорости на грани контрольного объема, рассчитанное по противополо-

жной схеме первого порядка (15);  $(\mathbf{U}_f)_{CD}$  – значение скорости на грани контрольного объема, рассчитанное по центрально-разностной схеме второго порядка (14);  $\Psi$  – нелинейный ограничитель потока, который является функцией значений скорости в окрестности грани контрольного объема. Следуя [30, 37, 39], предполагается, что ограничитель потока оказывается функцией отношения градиентов на границах между данной ячейкой и ее соседями вверх и вниз по потоку. В данной работе мы используем TVD схему, имплементированную в [55] (limitedLinear), для которой ограничитель потока определен как

$$\Psi(r) = \max \left( 0, \min \left( \frac{2}{k}r, 1 \right) \right), \quad (17)$$

где  $r = (\mathbf{U}_C - \mathbf{U}_U)/(\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_C)$ . Здесь  $U, C, D$  – три последовательно расположенные точки ( $U$  – вверх по потоку от  $C$ ,  $D$  – вниз по потоку от  $C$ ). Согласно классификации [40] такой ограничитель соответствует обобщенной кусочно-линейной схеме Chakravarthy-Osher [37]. Коэффициент  $k$  задается в диапазоне  $0 < k \leq 1$ . Его нулевое значение  $k \rightarrow 0$  соответствует более высокой точности, а значение  $k = 1$  – более высокой устойчивости счета. Обычно принимается значение  $k = 1$ .

Диффузионный член дискретизируется аналогичным образом:

$$\int_{V_m} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} dV = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{U})_f. \quad (18)$$

Учитывая линейную вариацию  $\mathbf{U}$  и ортогональность сетки, правую часть (18) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{U})_f = \mathbf{S}_f \frac{\mathbf{U}_N - \mathbf{U}_M}{|MN|}. \quad (19)$$

Для дискретизации производной по времени используется неявная трехточечная несимметричная схема с разностями назад (backward differencing), которая имеет второй порядок точности:

$$\begin{aligned} \int_{V_m} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV &= \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_M V_m = \\ &= \frac{\frac{3}{2}\mathbf{U}_M^k - 2\mathbf{U}_M^{k-1} + \frac{1}{2}\mathbf{U}_M^{k-2}}{\Delta t} V_m, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\mathbf{U}_M^k = \mathbf{U}_M(k \Delta t)$  – значения скорости на  $k$ -том временном слое, а значения на предыдущих временных слоях  $\mathbf{U}_M^{k-1}$  и  $\mathbf{U}_M^{k-2}$  известны. Такая схема

применима в том случае, если сетка остается неподвижной и, следовательно, положение центраида  $M$  не изменяется.

Итак, уравнение (1) в дискретной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\mathbf{U}_M^k - 2\mathbf{U}_M^{k-1} + \frac{1}{2}\mathbf{U}_M^{k-2} \\ \Delta t V_m + \sum_f F\mathbf{U}_f^k - \\ - \frac{1}{\text{Re}} \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla\mathbf{U}^k)_f = -(\nabla p^k)_M V_m = \\ = - \sum_f \mathbf{S}_f p_f^k, \end{aligned} \quad (21)$$

а уравнение (2) – в виде:

$$\sum_f \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f^k = 0. \quad (22)$$

Рассмотрим дискретную имплементацию граничных условий. Условие Дирихле: задано значение скорости на границе. В этом случае конвективный член также дискретизируется по формуле (13). Значения скорости  $\mathbf{U}_f$  и потока  $F$  на грани  $f$ , лежащей на границе области, заданы. Диффузионный член задается формулой (18), а значение нормального градиента скорости на границе рассчитывается из известных значений скорости в центреиде ячейки и на грани, лежащей на границе области:

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla\mathbf{U})_f = S_f \frac{\mathbf{U}_f - \mathbf{U}_M}{|Mf|}. \quad (23)$$

Условие Неймана: задан нормальный градиент скорости на границе. В этом случае значение скорости на границе  $\mathbf{U}_f$ , которое необходимо для вычисления правой части (13), рассчитывается из значения скорости в центреиде контрольного объема и заданного значения нормального градиента на грани:

$$\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_M + \frac{|Mf|}{S_f} \mathbf{S}_f \cdot (\nabla\mathbf{U})_f. \quad (24)$$

Что же касается диффузионного члена, то нормальный градиент скорости на границе  $\mathbf{S}_f \cdot (\nabla\mathbf{U})_f$  в правой части (18) задается непосредственно граничным условием.

В принципе, интерполируя в (21), (22) значения искомого поля на гранях ячеек через их значения в центреидах соседних ячеек, используя описанные выше схемы интерполяции, можно получить систему алгебраических уравнений, которая

и должна быть решена численно. Однако в данном случае следует уделить особое внимание двум проблемам: нелинейности задачи и согласованию полей скорости и давления. Причем, первая проблема следует непосредственно из уравнений движения и не зависит от выбранного метода решения. Действительно, в силу нелинейности конвективного члена  $(\nabla \cdot \mathbf{U}\mathbf{U})$  уравнения (1) получаемая система алгебраических уравнений также будет нелинейной (поток  $F$  является функцией скорости  $U$ ). Поскольку нелинейные солверы требуют колоссальные компьютерные ресурсы, обычно прибегают к линеаризации конвективного члена. Процедура линеаризации состоит в том, что для расчета потока  $F$  используются известные значения скорости на предыдущем временном слое, а затем полученные значения уточняются путем итераций.

Проблема определения поля давления, а также согласования полей скорости и давления следует из необходимости использовать в практических задачах итерационные, а не прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В то время как дискретное уравнение сохранения импульса (21) используется для нахождения компонент скорости, уравнение для нахождения давления отсутствует, так как в рамках модели несжимаемой жидкости давление не входит в уравнение неразрывности (22). Следовательно, при использовании итерационных солверов СЛАУ необходимо найти способ ввести давление в уравнение неразрывности. В данной статье используется процедура PISO, предложенная Issa [45], которая является процедурой типа предиктор-корректор с двумя корректорами.

Уравнение для давления выводится следующим образом. Полностью дискретный аналог уравнения движения (21) можно разрешить относительно  $\mathbf{U}_M^k$ :

$$\mathbf{U}_M^k = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^k - A(\nabla p^k)_M. \quad (25)$$

Здесь член  $\mathbf{H}^k$  содержит скорости в центреидах соседних ячеек  $\mathbf{U}_N^k$ , а член  $\mathbf{H}^o$  содержит известные значения поля скорости на предыдущих временных слоях  $\mathbf{U}_M^{k-1}$  и  $\mathbf{U}_M^{k-2}$ .

Скорости на гранях ячейки получаются путем интерполяции на грань:

$$\mathbf{U}_f^k = \mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^k - A_f(\nabla p^k)_f. \quad (26)$$

Умножая скалярно на вектор нормали  $\mathbf{S}_f$ , получаем выражение для потока через грань  $f$ :

$$F = \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f^k = \mathbf{S}_f \cdot [\mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^k - A_f(\nabla p^k)_f]. \quad (27)$$

Окончательно, дискретный аналог системы несжимаемых уравнений Навье-Стокса (21), (22) имеет вид:

$$\mathbf{U}_M^k = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^k - \frac{A}{V_m} \sum_f \mathbf{S}_f p_f^k, \quad (28)$$

$$\sum_f A_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla p^k)_f = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot [\mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^k]. \quad (29)$$

Алгоритм PISO для нестационарных течений состоит из следующих шагов:

1. Предиктор. Для получения первого приближения нового поля скорости  $\mathbf{U}^k$  решается дискретное уравнение сохранения импульса (28). Поле давления  $p^k$  на данном этапе неизвестно, поэтому используются известные значения на предыдущем временном слое  $p^{k-1}$ . Также выражение  $\mathbf{H}(\mathbf{U})$  линеаризуется. Для этого вместо  $F$  подставляются его известные значения на предыдущем временном слое. Таким образом, уравнение принимает вид:

$$\mathbf{U}_M^* = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^* - \frac{A}{V_m} \sum_f \mathbf{S}_f p_f^{k-1}, \quad (30)$$

где верхний индекс \* обозначает первое приближение.

2. Корректор 1. Используя полученные значения  $\mathbf{U}^*$ , вычисляется оператор  $\mathbf{H}^*$  и решается уравнение для давления (29), которое теперь принимает вид:

$$\sum_f A_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla p^*)_f = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot [\mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^*]. \quad (31)$$

Таким образом получаем первое приближение поля давления  $p^*$ , которое используется для коррекции поля скорости. Следует отметить, что всякий раз как новое приближение для давления получено, следует также пересчитать поле потока  $F$ , который входит в коэффициенты оператора  $\mathbf{H}$ . Для этого можно использовать уравнение (27), где в правую часть вместо  $\mathbf{H}^k$ ,  $p^k$  подставлены их последние полученные приближения. Коррекция поля скорости производится по явной схеме:

$$\mathbf{U}_M^{**} = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^* - \frac{A}{V_m} \sum_f \mathbf{S}_f p_f^*. \quad (32)$$

3. Корректор 2. Использование явной процедуры коррекции подразумевает, что поле скорости корректируется за счет учета новых зна-

чений  $F$  и  $p$ . Но при этом значения скорости  $\mathbf{U}_N^*$  в центроидах соседних ячеек, которые входят в  $\mathbf{H}^*$ , берутся неоткорректированные, т. е. те, которые были получены в первом приближении. Поэтому необходимо вернуться к шагу 2 и повторить петлю PISO, т. е. провести вычисление оператора  $\mathbf{H}$ , решить уравнение для давления, вычислить поток  $F$  и провести явную коррекцию поля скорости. И таким образом получаем значения полей  $\mathbf{U}^{***}$ ,  $p^{**}$  после второго корректора.

Часто используется именно описанная схема, состоящая из предиктора и двух корректоров. Однако петлю PISO можно повторять и большее число раз или повторять до тех пор, пока точность не достигнет заданного значения.

Рассмотрим теперь решение получаемых систем линейных алгебраических уравнений (30) и (31). Такая СЛАУ может быть записана в виде:

$$A_M x_M^k + \sum_N A_N x_N^k = b_M, \quad (33)$$

где  $x_M^k$  – неизвестные, а суммирование производится по всем контрольным объемам  $n$  соседним с контрольным объемом  $m$ , т. е. имеющими общую грань с  $m$ . Система (33) может быть решена различными методами, которые можно разбить на две главные категории: прямые и итерационные методы. Прямые методы приемлемы для небольших СЛАУ с заполненными матрицами. Число операций, необходимых для получения решения, возрастает как квадрат числа неизвестных, поэтому при работе с большими разреженными матрицами прямые методы становятся непомерно затратными. Итерационные методы в этом случае являются более экономными. В рамках итерационных методов решения мы стартуем с некоторого начального приближения и затем посредством итерационной процедуры улучшаем решение до тех пор, пока не достигаем некоторой наперед заданной точности. Также, в отличие от прямых методов, используемые итерационные методы сохраняют разреженность матрицы, что является важным их свойством, позволяющим существенно снизить требования к памяти компьютера.

Следует отдельно оговорить вклад конвективного члена. Известно, что диагональное доминирование в матрице обеспечивает только встречно-поточная схема UD. Любые другие схемы создают отрицательные коэффициенты, что может негативно сказываться на сходимости итерационного метода. Для того, чтобы улучшить качество матрицы для разностных схем высоких порядков,

Khosla и Rubin [57] предложили метод отложенной коррекции (deferred correction implementation) для конвективного члена. Согласно этому методу любая разностная схема рассматривается как некий апгрейд схемы UD. Та часть конвективного члена, которая соответствует UD, рассматривается неявно, т. е. встраивается в матрицу, а оставшаяся часть переносится в источниковый член, т. е. в правую часть системы. Таким образом, обеспечивается диагональное доминирование в матрице системы.

Классические градиентные методы, такие как метод наискорейшего спуска и метод минимальных невязок, очень быстро минимизируют функционалы на первых итерациях, а потом начинают “буксовать”, т. е. дальнейшее итерирование показывает очень медленную сходимость, делающую применение градиентных методов неэффективным. Это особенно проявляется, когда собственные значения матрицы  $A$  сильно различны. Этот недостаток эффективности градиентных методов устранен в методе сопряженных градиентов, первый вариант которого был предложен Nестенс и Steifel [58] в 1952 году. Алгоритмы метода сопряженных градиентов относятся к числу наиболее эффективных методов решения СЛАУ большой размерности, возникающих при численном решении задач механики сплошных сред. Они решают систему уравнений за конечное число итераций, не превосходящее числа неизвестных. При хорошем начальном приближении число итераций резко сокращается. Также к резкому сокращению числа итераций ведет предобусловливание. Для симметричных матриц в данной работе применяется солвер ICCG (Incomplete Cholesky preconditioned Conjugate Gradient), т. е. метод сопряженных градиентов с предобусловливанием типа неполной факторизации Холецкого. Метод детально описан Jacobs [59]. Для асимметричных матриц используется солвер Bi-CGSTAB, представленный van der Vorst [60]. Используемые солверы реализованы в свободно распространяемых библиотеках, доступных через электронный сервис Netlib [62], а их подробное описание может быть найдено в [56, 61].

Представленный алгоритм был протестирован на хорошо известных задачах: задаче о течении в прямоугольной полости, вызванном движением одной из стенок (lid-driven cavity) [51], при различных числах Рейнольдса, а также задаче об отрывном течении за круговым цилиндром (вихревая дорожка Кармана) [52]. Тест показал хорошее совпадение полученных результатов с результатами других авторов.

### 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Согласно постановке задачи, в начальный момент времени жидкость покоилась, а давление было постоянным во всей расчетной области. Затем на входе в расчетную область задавался равномерный поток. Возникающая разность давлений на входе и на выходе приводила к формированию течения в расчетной области. Рассмотрим сначала этот переходный процесс в случае, когда ширина межстенной части канала мала, а именно: зададим  $D_4 = 6$  мм. В [49] было показано, что на верхней и нижней поверхностях первого стеноза формируются пограничные слои, которые затем отрываются на передней кромке первого стеноза и сносятся потоком в межстенную область. Таким образом, на границе струи и межстенных полостей образуются два сдвиговых слоя, имеющие завихренность противоположного знака. Было показано, что при относительно малых значениях числа Рейнольдса ( $Re = 2088$ ) течение является стационарным, а сдвиговые слои в межстенной области устойчивы. Поэтому в данной статье перейдем сразу к следующему значению числа Рейнольдса, рассмотренному в [49].

Во всех приведенных ниже примерах скорость на входе в расчетную область задавалась  $V_1 = 0.9$  м/с, что соответствует значению числа Рейнольдса  $Re = 3132$ . На рис. 3 представлено поле завихренности для пяти моментов времени. Цветовая шкала справа от рисунка показывает соответствие цвета и значения завихренности<sup>1</sup>. Здесь красный цвет соответствует положительной завихренности, а синий - отрицательной. Как видно, в момент времени  $t = 10^{-3}$  с (рис. 3, а) на жестких поверхностях, включая поверхности стенозов, формируются ламинарные пограничные слои. Причем завихренность имеет противоположные знаки на верхней и нижней жестких поверхностях. Затем сформировавшиеся пограничные слои отрываются от передних кромок как первого, так и второго стенозов, образуя две вихревые пары. Первая вихревая пара выносится потоком из отверстия первого стеноза в межстенное пространство, а вторая пара - в канал за стенозами. В момент времени  $t = 2 \cdot 10^{-3}$  с (рис. 3, б) первая пара попадает в межстенные полости, где крупные вихри начинают формироваться у внутренней стенки второго сте-

<sup>1</sup>К сожалению, цветные рисунки представлены только в электронной версии статьи, размещенной в интернете на сайте Института гидромеханики НАН Украины. В печатном же варианте поле завихренности представлено в градации серого, что не позволяет передать информацию о направлении завихренности. Автор приносит свои извинения и рекомендует обратиться к электронному варианту статьи.

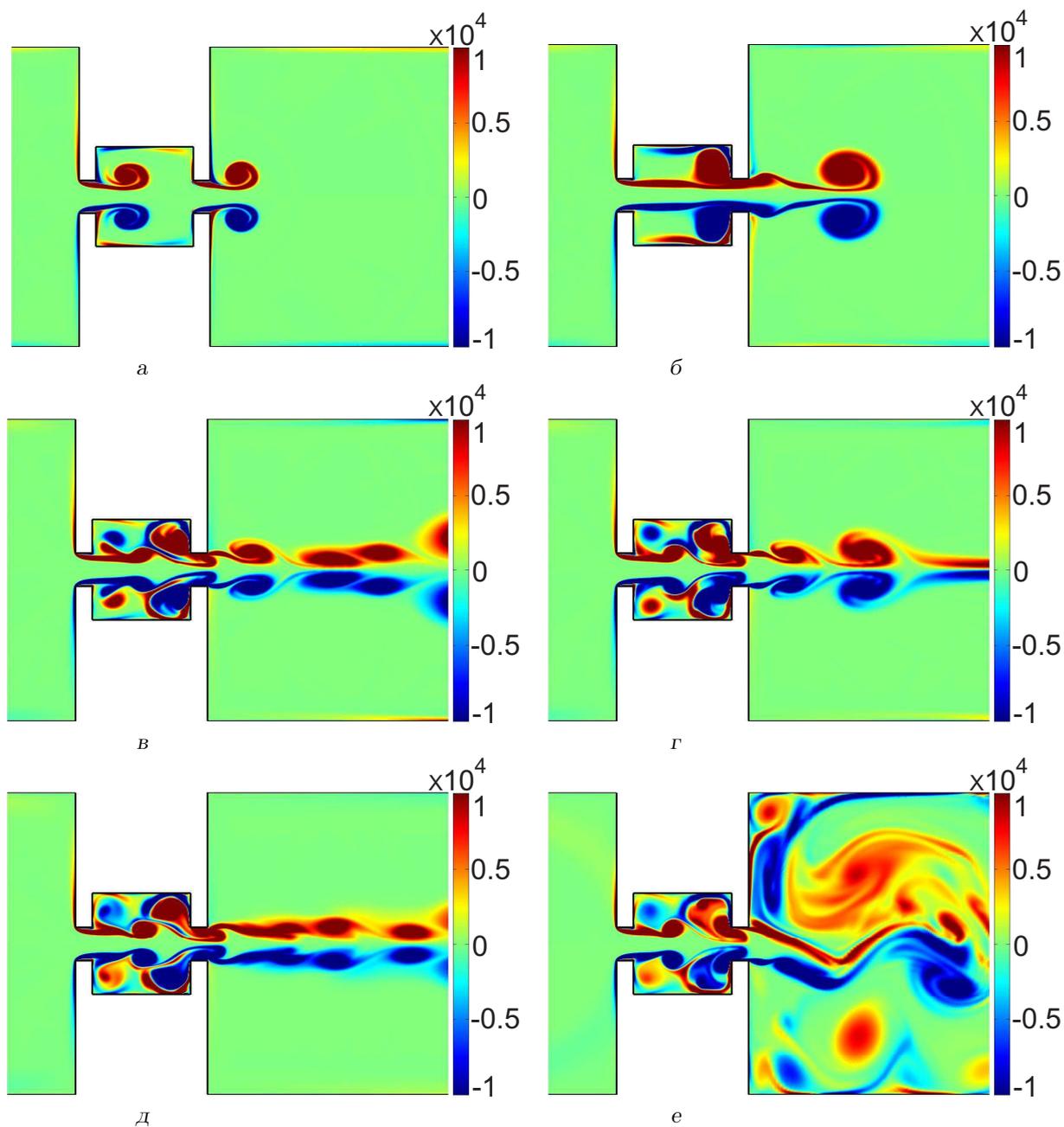


Рис. 3. Поле завихренности. Глубина каждой межстенозной полости равна высоте отверстий в стенозах, т. е.  $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 6$  мм:  
 а – момент времени  $t = 10^{-3}$  с, б –  $t = 2 \cdot 10^{-3}$  с, в –  $t = 4 \cdot 10^{-3}$  с, г –  $t = 5 \cdot 10^{-3}$  с, д –  $t = 9 \cdot 10^{-3}$  с, е –  
 развитое течение при достаточно больших временах. Переходный процесс формирования течения завершен не только в межстенозной области, но и в канале за стенозами

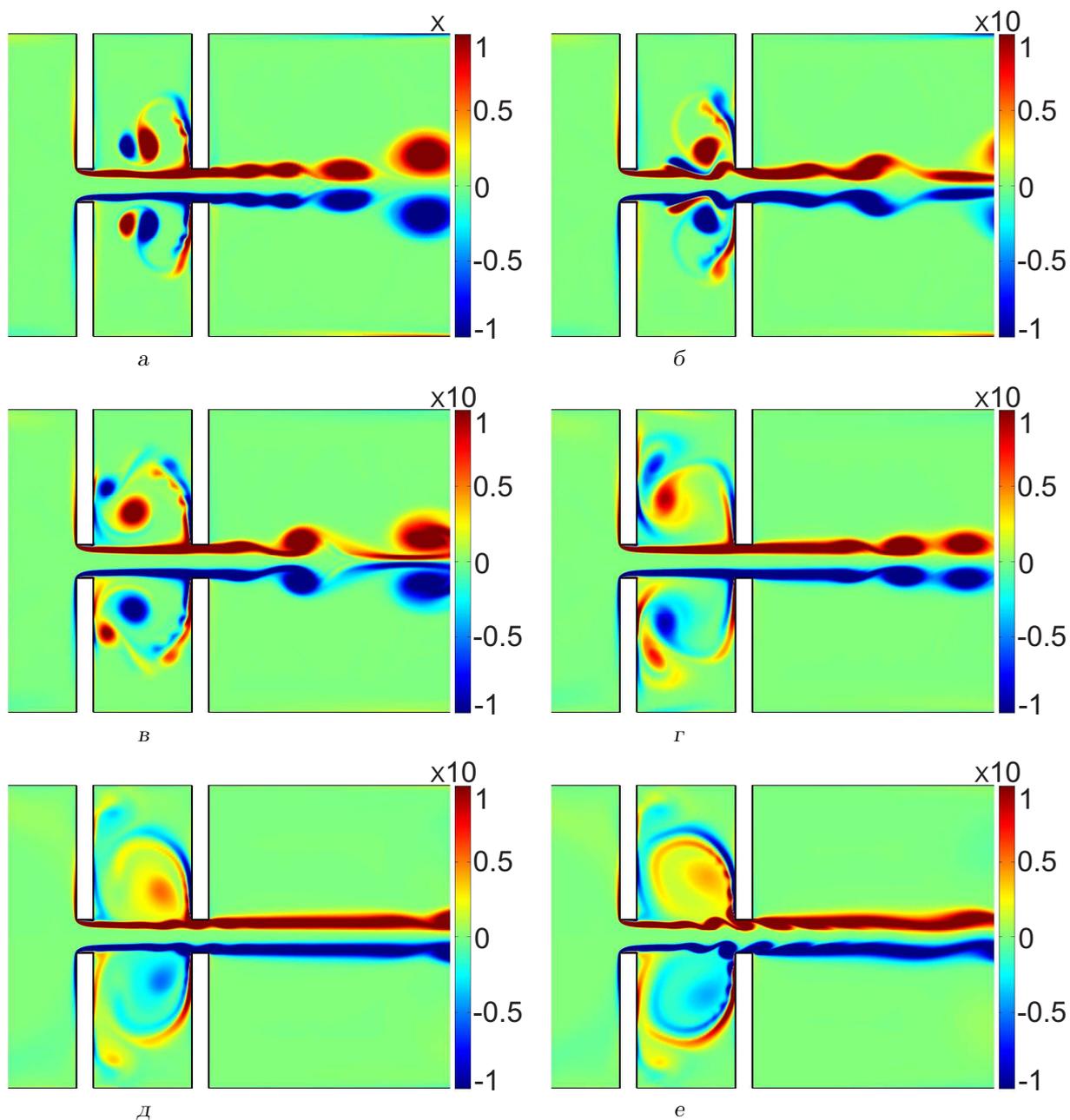


Рис. 4. Поле завихренности. Глубина каждой межстеннозной полости равна четырем высотам отверстий в стенозах, т. е.  $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 18$  мм:  
 $a$  – момент времени  $t = 3,5 \cdot 10^{-3}$  с,  $b$  –  $t = 4,2 \cdot 10^{-3}$  с,  $c$  –  $t = 7,5 \cdot 10^{-3}$  с,  $z$  –  $t = 1,3 \cdot 10^{-2}$  с,  $d$  –  $t = 2,3 \cdot 10^{-2}$  с,  
 $e$  –  $t = 3 \cdot 10^{-2}$  с. Переходный процесс формирования течения завершен в межстеннозной области

ноза. В это же время за вторым стенозом начинает формироваться вторая вихревая пара. На следующем рисунке (рис. 3, *в*) представлена картина завихренности для момента времени  $t = 4 \cdot 10^{-3}$  с. Видно, что в левой части межстенозных полостей, т. е. у поверхности первого стеноза, формируется еще одна пара крупных вихрей, причем завихренность их будет иметь противоположный знак по отношению к завихренности крупных вихрей, расположенных у поверхности второго стеноза. Так, если в верхней полости крупный вихрь, расположенный вблизи второго стеноза, имеет положительную завихренность, то вихрь, расположенный вблизи первого стеноза, будет иметь отрицательную. На следующем рисунке (рис. 3, *г*) видно, что в момент  $t = 5 \cdot 10^{-3}$  с процесс формирования второго крупного вихря в каждой из межстенозных полостей уже завершен. Также на границе струи и межстенозных полостей формируются верхний и нижний сдвиговые слои, имеющие завихренность противоположных знаков. Причем эти сдвиговые слои имеют волнистую форму и возмущаются примерно посередине между первым и вторым стенозом, т. е. между первыми и вторыми крупными вихрями, расположенными в межстенозных полостях. В этой области в верхнем и нижнем сдвиговых слоях формируется симметричная вихревая пара, которая затем сносится потоком в отверстие второго стеноза. Это отчетливо видно на рис. 3, *д*, на котором изображена картина завихренности в момент времени  $t = 9 \cdot 10^{-3}$  с. Можно говорить, что к этому моменту времени переходные процессы формирования течения в межстенозной области завершены, а само течение является периодическим во времени. На рис. 3, *е* представлено поле завихренности для достаточно большого времени, когда течение сформировалось во всей расчетной области, включая канал за вторым стенозом. В области за стенозами поле скорости течения не будет симметричным относительно оси канала  $y = D_1/2$ , так как струя, истекающая из отверстия в плоский канал, совершает автоколебания, медленные по сравнению с автоколебаниями в межстенозной области. Несмотря на это, в межстенозной области по-прежнему доминирует симметричная часть поля скорости.

Теперь рассмотрим такой же переходной процесс для случая широкой межстенозной части канала, а именно:  $D_4 = 18$  мм, т. е. для случая, когда ширина каждой межстенозной полости в четыре раза больше ширины отверстия в стенозе. Естественно, на входе задано то же значение скорости  $V_1 = 0.9$  м/с, что соответствует значению числа Рейнольдса  $Re = 3132$ . В начальные мо-

менты времени течение подобно тому, что имело место в случае узкой межстенозной части канала, описанному выше. На жестких поверхностях, включая поверхности стенозов, формируются ламинарные пограничные слои. Причем завихренность имеет противоположные знаки на верхней и нижней жестких поверхностях. Затем сформированные пограничные слои отрываются от передних кромок как первого, так и второго стенозов, образуя две вихревые пары. Первая вихревая пара выносится потоком из отверстия первого стеноза в межстенозное пространство, а вторая пара – в канал за стенозами. Поле завихренности в этом случае подобно тому, что представлено на рис. 3, *а* для области с узкой межстенозной частью канала. В дальнейшем вихревая пара, сформированная в межстенозной области, так же, как и в предыдущем примере, попадает в межстенозные полости. С этого момента течение в области с широкой межстенозной частью канала существенно отличается от течения в области с узкой межстенозной частью канала, рассмотренного выше. Так вихри, попавшие в межстенозные полости, движутся вдоль поверхности второго стеноза, в результате чего в каждой из полостей образуется своя вихревая пара. На рис. 4, *а* видно, как эти вихревые пары, описав некоторые траектории в полостях, в момент времени  $t = 3,5 \cdot 10^{-3}$  с опять возвращаются к струе примерно посередине между первым и вторым стенозом. Таким образом, две вихревые пары сверху и снизу ударяются в струю и возмущают ее. На рис. 4, *б* видно, что возмущения в верхнем и нижнем сдвиговых слоях, вызванные ударом по струе двух вихревых пар, будут симметричны относительно оси канала  $y = D_1/2$ . Затем процесс повторяется. Однако на этот раз видно (рис. 4, *в*), что вихревые пары ударяют не в струю, а в поверхность первого стеноза. Это существенно уменьшает их кинетическую энергию и таким образом на этот раз возмущения струи будут существенно слабее, чем при первом ударе. На третий раз (рис. 4, *г*) вихревая пара также ударяет в поверхность первого стеноза, причем вихри, расположенные дальше от оси канала  $y = D_1/2$ , уходят вглубь межстенозных полостей, формируя вторичный вихрь в углу полости вблизи первого стеноза. Таким образом, кинетическая энергия вихревой пары расходуется на формирование течения во всей области межстенозных полостей. Удар по струе будет настолько слабым, что он практически не вносит никаких возмущений. На рис. 4, *д* видно, что течение в межстенозном участке струи можно считать стационарным, а сдвиговые слои невозмущенными. К моменту  $t = 2,1 \cdot 10^{-2}$  с течение уже

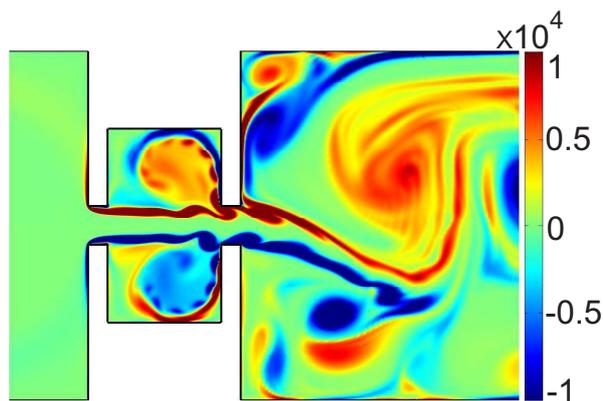


Рис. 5. Поле завихренности. Глубина каждой межстенной полости равна двум высотам отверстий в стенках, т. е.  $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 10$  мм

сформировано практически по всей области межстенных полостей. На рис. 4, д видно как вихри, движущиеся в межстенных полостях, в четвертый раз приближаются к струе. На этот раз видно, что в сдвиговых слоях на границе струи и полостей начинают формироваться возмущения, причем на этот раз верхний и нижний сдвиговые слои уже не будут симметричными относительно оси канала. Далее, с течением времени эти возмущения усиливаются, и в момент времени  $t = 3 \cdot 10^{-2}$  с (рис. 4, е) уже видно, как по мере приближения ко второму стенозу в сдвиговых слоях сворачиваются два ряда вихрей, которые располагаются в шахматном порядке по отношению друг к другу.

Рассмотрим промежуточный случай  $D_4 = 10$  мм. Опустим подробное описание переходного процесса формирования течения. На рис. 5 представлено поле завихренности уже сформировавшегося течения. Видно, что вихри, периодически сворачивающиеся в верхнем и нижнем сдвиговых слоях, также будут располагаться в шахматном порядке относительно друг друга.

Перейдем к сравнительному анализу течений, рассмотренных в [49] и в данной статье. На рис. 6, а, б представлена картина линий тока и поля завихренности, соответственно, для случая узких межстенных полостей ( $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 6$  мм). Как хорошо видно, в данном случае течение существенно отличается от того, которое было описано и проанализировано в [49], т. е. от течения, в области с широкими межстенными полостями ( $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 18$  мм). Прежде всего следует отметить, что в [49] в каждой межстенной полости присутствовал только один крупный вихрь, а более мелкие вихри располагались вблизи углов полости, наиболее удаленных от

струи. В случае же узких межстенных полостей ( $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 6$  мм), рассмотренных в данной статье, в каждой полости отчетливо видны два горизонтально расположенных относительно друг друга крупных вихря. Поскольку большие слоистые вихри, образующиеся в межстенных нишах, являются по сути каналом обратной связи, то можно ожидать, что изменение размера, формы и количества больших вихрей в межстенных полостях может существенным образом изменить возмущение самой струи.

Действительно, в [49] было продемонстрировано, что как только энергии в канале обратной связи оказывается достаточно, чтобы влиять на форму струи (см. картину линий тока) и на сдвиговый слой (см. картину поля завихренности), в сдвиговых слоях начинает генерироваться характерная последовательность вихрей. При этом ряды вихрей в верхнем и нижнем сдвиговых слоях располагаются относительно друг друга в шахматном порядке. Набегая на отверстие второго стеноза, эти ряды вихрей вызывают несимметричные (относительно оси струи) колебания вертикального профиля скорости в выходном сечении  $S_2$ . В случае же узких межстенных полостей ( $D_2 = D_3 = 2$  мм,  $D_4 = 6$  мм), рассмотренных в данной статье, видно, что возмущения струи не приводят к потере симметричности поля течения относительно оси. Последовательность вихрей, генерируемая в сдвиговых слоях и набегающая вместе с потоком на отверстие второго стеноза, остается расположенной симметрично относительно оси потока и вызывает симметричные колебания вертикального профиля скорости в выходном сечении  $S_2$ , в то время как профиль скорости во входном сечении  $S_1$  остается неподвижным (рис. 6, в, г).

Естественно возникает вопрос: являются ли колебания профиля скорости в сечении  $S_2$  периодическими? Для ответа на него мы исследовали зависимость изменения профиля скорости от времени, и оказалось, что при рассматриваемом значении числа Рейнольдса эти колебания имеют периодический характер и симметричны относительно оси струи. Таким образом, в рассматриваемой гидродинамической системе действительно могут возникать автоколебательные явления. С целью иллюстрации этих явлений на рис. 7, приведены данные, которые показывают как в течение одного периода  $T$  процесса автоколебаний в системе изменяются картины поля завихренности и осциллирующие части профилей скорости  $V_x$  в выходном сечении  $S_2$ . Заметим, что при разложении величины  $V_x$  в ряд Фурье по времени стационарная (не зависящая от времени) часть профиля скоро-

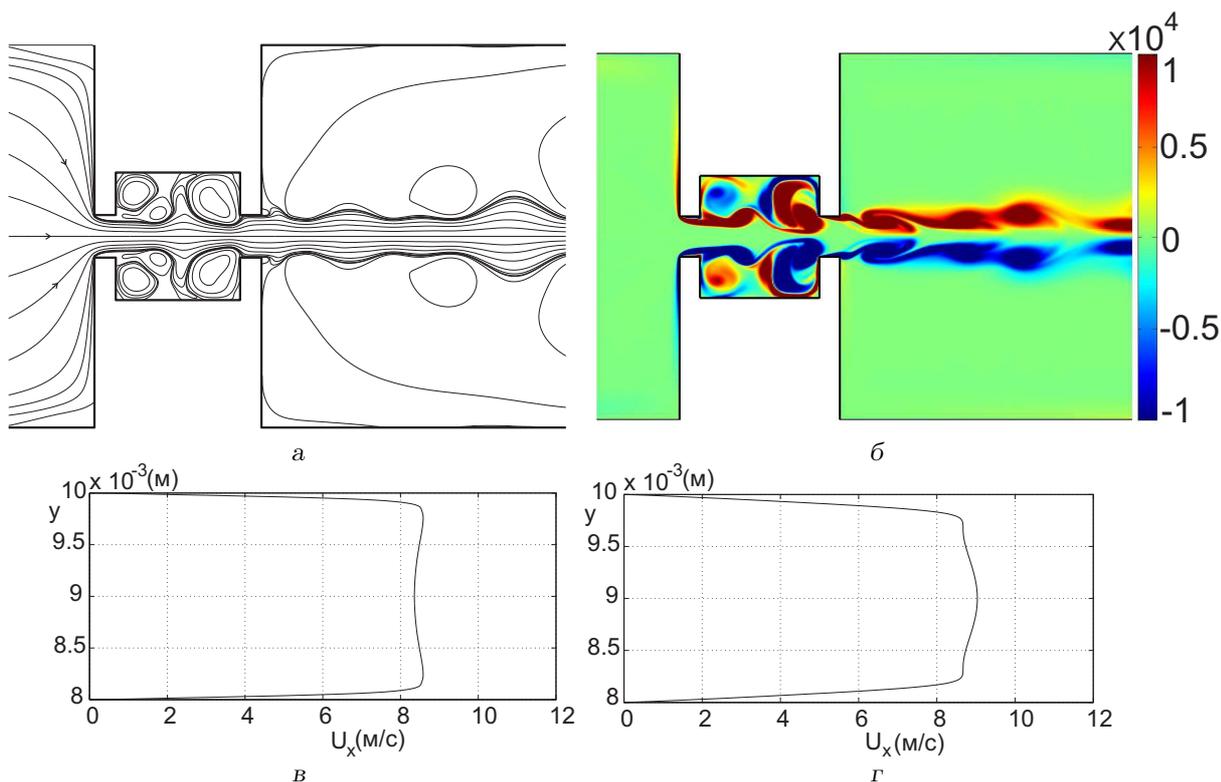


Рис. 6. Вид течения в момент времени  $t = 9.295 \cdot 10^{-3}$  с:  
 а – линии тока, б – поле завихренности, в, г – профили скорости в сечениях  $S_1$  и  $S_2$ , соответственно

сти описывается нулевым членом ряда, а осциллирующая часть, которая и представлена на рисунке, – суммой остальных членов ряда. Следует также отметить, что в данной задаче период симметричных автоколебаний будет почти вдвое больше, чем период колебаний в соответствующей задаче, рассмотренной в [49]. Так, при  $V_1 = 0.9$  м/с период антисимметричных колебаний был равен  $T = 2.77 \cdot 10^{-4}$ . В случае же симметричного течения, рассматриваемого в данной статье, период  $T = 5.2 \cdot 10^{-4}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Представлен алгоритм численного решения системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, разработанный на основе техники конечно-объемной дискретизации. Используемые разностные схемы имеют второй порядок точности по пространству и времени. Для дискретизации конвективных членов используется TVD схема Chakravarthy-Osher. Уравнения решаются в неподвижной декартовой системе координат. При этом сетка, которая разбивает расчетную область на контрольные объемы, рассматривается

как трехмерная неструктурированная. Это сделано с целью дальнейшего развития представленных численных алгоритмов на случай сеток, состоящих из полихедральных контрольных объемов с произвольным числом соседей, что существенно упрощает проблему генерации сетки для сложных геометрий. Для решения полученных СЛАУ использовались солверы, основанные на методе (би-)сопряженных градиентов с предобуславливанием, доступные в открытых библиотеках.

2. Представленный алгоритм протестирован на хорошо известных задачах: задаче о течении в прямоугольной полости, вызванном движением одной из стенок (lid-driven cavity), при различных числах Рейнольдса, а также задаче об отрывном течении за круговым цилиндром (вихревая дорожка Кармана). Тест показал хорошее совпадение полученных результатов с результатами других авторов.

3. С использованием представленного алгоритма проведено прямое численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале при наличии двух последовательно расположенных двусторонних сужений (стенозов). Рассчитаны поля скорости и давления, представлены

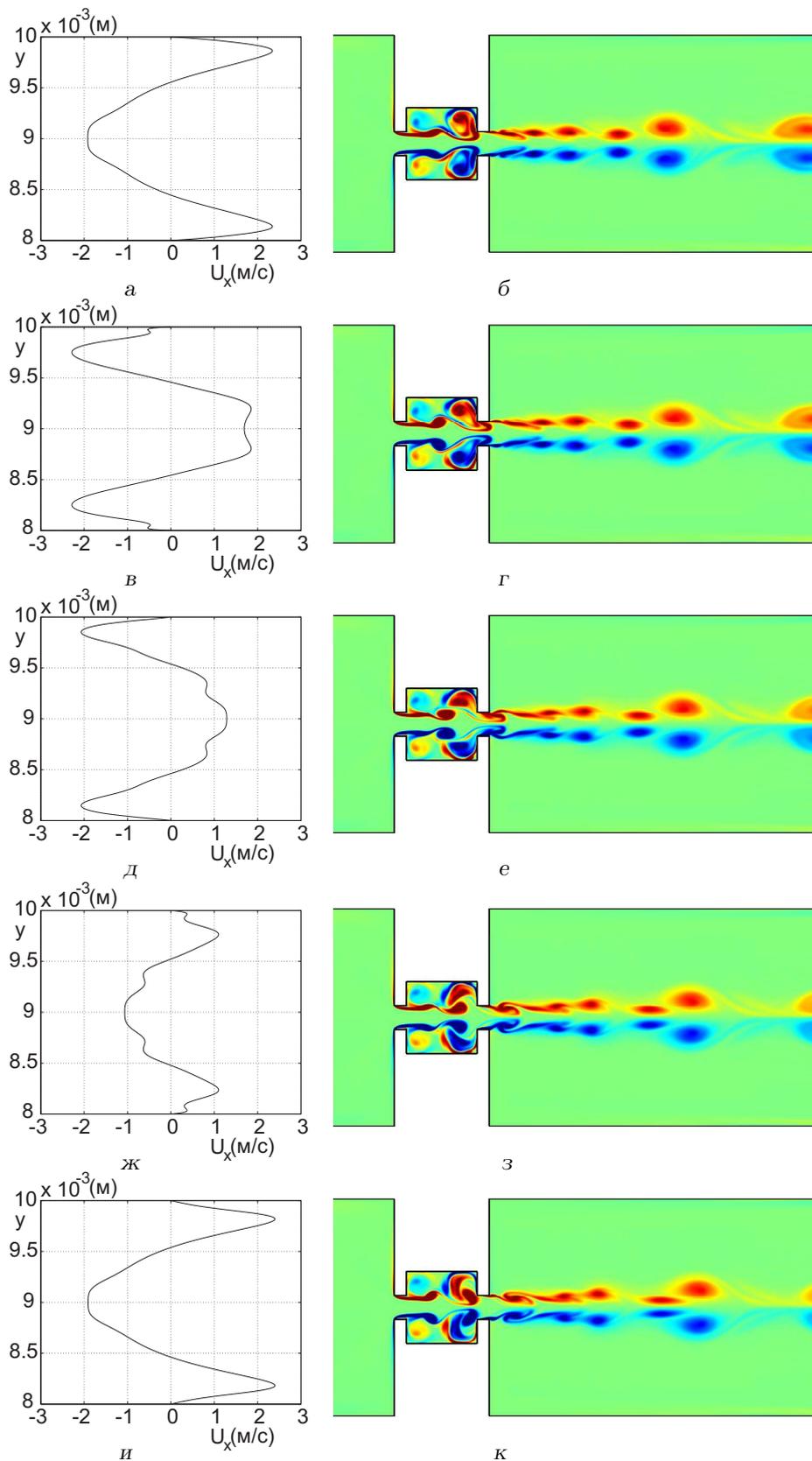


Рис. 7. Осциллирующая часть профиля скорости  $V_x$  в сечении  $S_2$  (а, в, д, ж, и), и поле завихренности (б, г, з, е, к) для моментов времени:

а, б –  $t = 8.775 \cdot 10^{-3}$  с, в, г –  $t = 8.905 \cdot 10^{-3}$  с, д, е –  $t = 9.035 \cdot 10^{-3}$  с, ж, з –  $t = 9.165 \cdot 10^{-3}$  с, и, к –  $t = 9.295 \cdot 10^{-3}$  с

картины поля завихренности и проанализированы особенности движения среды в зависимости от ширины канала в межстенной части.

4. Установлено, что при достаточно малых числах Рейнольдса (в рассмотренном примере  $Re = 3132$ ) и при достаточно узкой межстенной части канала (в рассмотренном примере ширина отверстия  $D_2$  и ширина полости  $(D_4 - D_2)/2$  соотносились как 1/1) в сдвиговых слоях в межстенной области будут периодически во времени генерироваться вихревые структуры симметричные относительно оси канала  $y = D_1/2$ . А, следовательно, и в колебаниях профиля скорости в отверстии второго стеноза будет доминировать симметричная часть. Также показано, что с увеличением ширины межстенной части канала (в рассмотренных примерах высота отверстия  $D_2$  и глубина полости  $(D_4 - D_2)/2$  соотносились как 1/2 и 1/4) картина течения принципиально меняется. В сдвиговых слоях в межстенной области образуются два ряда вихрей. Эти вихри располагаются относительно друг друга в шахматном порядке. Как показано в [49], такие вихри, набегая на второй стеноз, вызывают антисимметричные периодические колебания профиля скорости в отверстии второго стеноза.

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.– М.: Энергоатомиздат, 1984.– 152 с.
2. Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows.– Oxford: Butterworth-Heinemann, 2007.– 656 p.
3. Versteeg H. K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method.– New York: Longman, 1995.– 258 p.
4. Годунов С.К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник.– 1959.– 47, N 3.– С. 271–306.
5. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the solution of non-linear hyperbolic differential equation by finite differences // Comm. Pure Appl. Math.– 1952.– 5.– P. 243–255.
6. Lax P.D. Weak solutions of non-linear hyperbolic equations and their numerical computation // Comm. Pure Appl. Math.– 1954.– 7.– P. 159–193.
7. Gentry R. A., Martin R. E., Daly B. J. An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems // J. Comp. Physics.– 1966.– 1.– P. 87–118.
8. Lax P.D., Wendroff B. Systems of conservation laws // Comm. Pure Appl. Math.– 1960.– 13.– P. 217–237.
9. MacCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper 69-354, 1969; доступно также в Caughey D. A. (ed), Hafez M. M. (ed) Frontiers of computational fluid dynamics.– London: World Scientific, 2002.– 524 p.
10. Lerat A., Peyret R. Noncentered schemes and shock propagation problems // Computers and Fluids.– 1974.– 2.– P. 35–52.
11. MacCormack R. W. A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow // AIAA Paper 81-0110, 1981
12. Lerat A. Implicit methods of second order accuracy for the Euler equations // AIAA Journal.– 1985.– 23.– P. 33–40.
13. Beam R. M., Warming R. F. An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form // J. Comp. Physics.– 1976.– 22.– P. 87–110.
14. Beam R. M., Warming R. F. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations // AIAA Journal.– 1978.– 16.– P. 393–402.
15. Jameson A., Schmidt W., Turkel E. Numerical simulation of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes // AIAA Paper 81-1259, 1981
16. Wong H. H., Raithby G. D. Improved finite-difference methods based on a critical evaluation of the approximating errors // Numerical Heat Transfer. Part B: Fundamentals.– 1979.– 2.– P. 139–163.
17. Raithby G. D., Torrance K. E. Upstream-weighted schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow // Computers and Fluids.– 1974.– 2.– P. 191–206.
18. Warming R. F., Beam R. M. Upwind second order difference schemes and applications in aerodynamic flows // AIAA Journal.– 1976.– 14.– P. 1241–1249.
19. Leonard B. P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering.– 1979.– 19.– P. 59–98.
20. Raithby G. D. A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow // Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering.– 1976.– 9.– P. 75–103.
21. Raithby G. D. Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow // Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering.– 1976.– 9.– P. 153–164.
22. Van Leer B. Upwind and High-Resolution Methods for Compressible Flow: From Donor Cell to Residual-Distribution Schemes // Commun. Comput. Phys.– 2006.– 1.– P. 192–206.
23. Spalding D. B. A novel finite-difference formulation for differential expression involving both first and second derivatives // Int. J. Num. Meth. Engineering.– 1972.– 4.– P. 551–559.
24. Allen D. N. de G., Southwell R. V. Relaxation Methods Applied to Determine the Motion, in Two Dimensions, of a Viscous Fluid Past a Fixed Cylinder // Quart. J. Mech. and Appl. Math.– 1955.– 8.– P. 129–145.
25. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен, Т.2.– М: Мир, 1990.– 392 с.
26. Perić, M. A Finite Volume method for the prediction of three-dimensional fluid flow in complex ducts. PhD Thesis.– London: Imperial College, 1985.– 394 p.
27. Boris J. P., Book D. L. Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works // J. Comp. Physics.– 1973.– 11.– P. 38–69.
28. Zalesak S. T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids // J. Comp. Physics.– 1979.– 31.– P. 335–362.
29. Van Leer B. Towards the ultimate conservative differencing scheme // Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, volume 1, ed. by Cabannes, H. and Temem, R.– Springer, 1973.– P. 163–168.

30. Van Leer B. Towards the ultimate conservative differencing scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme // J. Comp. Physics.– 1974.– **14**.– P. 361–370.
31. Van Leer B. Towards the ultimate conservative differencing scheme. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow // J. Comp. Physics.– 1977.– **23**.– P. 263–275.
32. Van Leer B. Towards the ultimate conservative differencing scheme. IV. A new approach to numerical convection // J. Comp. Physics.– 1977.– **23**.– P. 276–299.
33. Van Leer B. Towards the ultimate conservative differencing scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comp. Physics.– 1977.– **23**.– P. 101–136.
34. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Physics.– 1983.– **49**.– P. 357–393.
35. Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes // SIAM J. Numer. Analysis.– 1984.– **21**.– P. 1–23.
36. Roe P. L. Large scale computations in fluid mechanics, Part 2 // Lectures in Applied Mathematics, volume 22.– Springer, 1985.– P. 163–193.
37. Chakravarthy S. R., Osher S. High resolution application of the Osher upwind scheme for the Euler equation // AIAA Paper 83-1943, 1983  
також доступно в  
Chakravarthy S.R., Osher S. High resolution application of the Osher upwind scheme for the Euler equation // Proc. AIAA Comp. Fluid Dynamics conference.– Danvers, MA, 1983.– P. 363–372.
38. Osher S., Chakravarthy S. High resolution schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Analysis.– 1984.– **21**.– P. 955–984.
39. Sweby P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // J. Numer. Anal.– 1984.– **21**.– P. 995–1011.
40. Waterson N.P., Deconinck H. Design principles for bounded higher-order convection schemes – a unified approach // J. Comp. Physics.– 2007.– **224**.– P. 182–207.
41. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comp. Physics.– 1967.– **2**.– P. 12–26.
42. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids.– 1965.– **8**.– P. 2182–2189.
43. Patankar S. V., Spalding D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows // Int. J. Heat Mass Transfer.– 1972.– **15**.– P. 1787–1806.
44. Van Doormal J. P., Raithby G. D. Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows // Numer. Heat Transfer.– 1984.– **7**.– P. 147–163.
45. Issa R. I. Solution of implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // J. Comput. Phys.– 1986.– **62**.– P. 40–65.
46. Jang D. S., Jetli R., Acharya S. Comparison of the PISO, SIMPLER, and SIMPLEC algorithms for the treatment of the pressure-velocity coupling in steady flow problems // Numer. Heat Transfer, Part A: Applications.– 1986.– **10**.– P. 209–228.
47. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part I // J. Comput. Phys.– 1966.– **1**.– P. 119–143.
48. Rhie C. M., Chow W. L. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation // AIAA J.– 1983.– **21**.– P. 1525–1532.
49. Вовк І. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С. Особливості руху середовища в каналах зі стенозами // Прикл. гідромех.– 2009.– **11**, N 4.– С. 17–30.
50. Басовський В. Г., Вовк І. В., Вовк О. І. О можливості генерування тональних звукових коливань потоком повітря в бронхах зі стенозом // Акуст. Вісник.– 2003.– **6**, N 1.– С. 3–21.
51. Бруязкий Е. В., Костин А. Г. Численне дослідження течії рідини в закритій прямокутній порожнині з рухомою верхньою кришкою // Прикл. гідромех.– 2009.– **11**, N 1.– С. 3–15.
52. Приходько А. А., Редчиц Д. А. Численне моделювання нестационарного течія в сліді за циліндром на основі рівнянь Нав'є-Стокса // Прикл. гідромех.– 2005.– **7**, N 1.– С. 56–71.
53. Ferziger J. H., Perić M. Computational methods for fluid dynamics, 3rd rev. ed.– Berlin: Springer, 2002.– 424 p.
54. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.– Мю: Мир, 1980.– 612 с.
55. <http://www.open CFD.co.uk/openfoam/>
56. Barrett R., Berry M., Chan T. F. et al. Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods, 2nd Edition.– Philadelphia: SIAM, 1994.– 107 p.
57. Khosla P. K., Rubin S. G. A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme // Computers & Fluids.– 1974.– **2**.– P. 207–209.
58. Hestens M. R. and Steifel E. L. Method of conjugate gradients for solving linear systems // J. Res.– 1952.– **29**.– P. 409–436.
59. Jacobs D. A. H. Preconditioned Conjugate Gradient methods for solving systems of algebraic equations // Central Electricity Research Laboratories Report, RD/L/N193/80.– Leatherhead, Surrey, 1980.– P. 31.
60. Van Der Vorst H. A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM J. Scientific Computing.– 1992.– **13(2)**.– P. 631–644.
61. Van Der Vorst, H.A. Iterative Krylov methods for large linear systems.– Cambridge: Cambridge univ. press, 2003.– 221 p.
62. <http://netlib.org>