

УДК 301.17.15; 301.07.13

ЭВОЛЮЦИЯ ПАРЫ "ВИХРЬ В ВИХРЕ" В СЛОЕ УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

П. В. ЛУКЬЯНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 19.02.2009 ◊ Пересмотрено 16.02.2010

В работе приведены результаты исследования совместной эволюции пары вихрей разных масштабов в слое конечной толщины линейно стратифицированной жидкости с учётом силы Кориолиса. Меньший из вихрей находится внутри большего. В зависимости от различных безразмерных параметров, получают типичные ситуации: вращение меньшего вихря вокруг большего с более быстрым вырождением меньшего вихря; зависимость “циклон-антициклон”, которая в случае разного вращения приводит к изменению радиальной структуры большего вихря; совместная эволюция двух вихрей с масштабами одного и того же порядка – приводит к сложной картине трансформации поля завихренности; совместный эффект планетарного вращения и возмущения большего вихря меньшим – трансформации монополя в триполь, в зависимости от соотношения энергии меньшего и большего вихрей, а также положения (горизонта) их в слое. Масштабы большего вихря варьировались в пределах сотен – первых километров по горизонтали и десятков метров – первых сотен по вертикали. Математическое моделирование основывалось на известных моделях турбулентной диффузии, а численная реализация – на методе конечных разностей.

У роботі чисельно досліджується сумісна еволюція пари вихорів різних масштабів в шарі скінченної товщини лінійно стратифікованої рідини в врахуванням сили Коріоліса. Один з вихорів знаходиться усередині іншого. Наводяться характерні приклади пар вихорів. В залежності від різних безрозмірних параметрів, отримуються типові ситуації: обертання меншого вихора навколо більшого з більш швидким виродженням меншого вихора; залежність “циклон-антициклон”, яка у випадку різного обертання призводить до зміни радіальної структури більшого вихора; сумісна еволюція двох вихорів з масштабами одного і того ж порядку – призводить до складної картини трансформації поля завихреності; сумісний ефект планетарного обертання та збурення більшого вихора меншим – трансформації монополя у триполь в залежності від співвідношення енергій меншого та більшого вихорів, а також положення (горизонту) їх у шарі. Масштаби більшого вихора варіювались від сотень метрів до кількох кілометрів по горизонталі та від десятків метрів до перших сотень – по вертикалі. Математичне моделювання ґрунтувалось з використанням відомих моделей турбулентної дифузії, а чисельна реалізація – на методі скінчених різниць.

Taking into account Coriolis force, a joint evolution of two vortexes one of which is inside other in finite depth linear stratified fluid layer has been numerically investigated in the paper. Typical examples are given. Depending on different non-dimensional parameters, typical situations are obtained: smaller vortex rotation around larger one when smaller vortex decays faster than larger one; the “circling – anti-circling” dependence that is in the case of different rotation results into larger vortex radial structure’s changing; joint evolution of vortexes with the same order of scales leads to complex picture of vorticity field’s transformation; joint effect of planetary rotation and disturbing of larger vortex by smaller one leads to monopole’s transformation to tripole depending on relationship between energies of smaller and larger vortexes and their position (horizon) in layer. Horizontal scale of larger vortex varied from few hundreds to several kilometers and vertical scales set in the range from few dozens to few hundreds of meters. Mathematical simulation is based on known models of turbulent diffusion and numerical realization done by finite differences.

ВВЕДЕНИЕ

В природе, как правило, локализованные области завихренности, эволюционирующие (вырождающиеся под действием турбулентной диффузии) сами по себе встречаются очень редко. Обычно вихрь находится в движении вместе с внешним течением или в относительном движении внутри вихря с гораздо большими размерами. Возникает, прежде всего, вопрос существования локализованной области завихренности в поле внешнего течения. Для этого обратимся к существующим результатам исследований в этой области.

Сюда можно отнести работу Бёртона и Никандера [1]. В ней доказывается теорема существования решения в виде локализованного (по сути – компактного) вихря во внешнем сдвиговом потоке. Течение может быть трёхмерным, но есть ограничения – квазигеострофичность. Область неограни-

ченная в горизонтальных направлениях. Внешнее течение направлено в одну сторону с линейным горизонтальным и вертикальным сдвигом. Такое течение сохраняет бесконечное семейство интегралов Казимира и называется изовихревым течением, а поля потенциальной завихренности (ПЗ) перестраиваются, благодаря стратификации, друг в друга. Теорема гарантирует существование течения с максимальной энергией в любой семье изовихревых течений, которые удовлетворяют следующим условиям: ПЗ должна иметь компактную основу, она должна быть везде одного знака и этот знак должен совпадать со знаком завихренности внешнего горизонтального сдвига в вертикальном диапазоне, где основание ПЗ (компактная область дополнительной потенциальной завихренности) ограничено. Это течение представляет стационарный и ограниченный вихрь, а свойство максимальной энергии подразумевает устойчи-

вость вихря. ПЗ затухает монотонно с расстоянием от центра вихря в каждой горизонтальной плоскости, но вдалеке от этого профиль завихренности – произвольный.

Карневале и др. [2] рассмотрели вопросы устойчивости колонообразного вихря во вращающемся внешнем течении. При числах Россби порядка единицы антициклонический вихрь (с гауссовским распределением завихренности) оказывался неустойчивым и полностью разрушался. Роль большего вихря играло внешнее вращение, а сам колонообразный вихрь – аналог меньшего вихря в данной работе. В модели [2] не учитывались вязкие эффекты, а инерционная устойчивость анализировалась на основе критерия Кластерциля–Ван Хейста [3] устойчивости на f -плоскости.

В работе [4] экспериментально и теоретически исследованы эволюционные характеристики монополюсных вихрей в невращающемся круговом течении. Исследования продемонстрировали окончательное разрушение вихря в ходе процесса, называемого "vortex stripping" (разрушение вихря), то есть когда длинные полоски пассивных трассеров сбрасывались с края вихря. В противоположность однородным сдвиговым течениям, эти полоски были прикреплены к ядру вихря несимметричным образом. Более того, наблюдалась квазистационарная эволюция вихря до окончательного его разрушения в неопределенную форму.

Следует особо отметить работу [5], посвященную динамике монополя в поле деформации: качественные результаты, полученные в этой работе, во многом напоминают результаты, представленные ниже. В этой работе исследована эволюция компенсированного монополя в стратифицированной жидкости с течением со сдвигом. Устойчивое деформационное течение создавалось с помощью вращающихся горизонтальных дисков, в то время как монополю генерировался маленькой, вращающейся вокруг оси сферой. Наблюдалась деформация вихря в похожую на триполь структуру. После чего имел место процесс компенсации вихрей – сателлитов: вокруг указанных вихрей образовывались области противоположной завихренности. Во время этой стадии оставшееся вихревое ядро эволюционировало в целом устойчиво. Более того, было показано, что разрушение окружающего начальный монополю кольца завихренности противоположного знака вызывает ускоренный горизонтальный рост вихревого ядра. Из-за диффузионного вырождения завихренности вихрь, в конце концов, был разорван на части вдоль горизонтальной деформации.

Изучению изолированных вихрей во вращаю-

щейся жидкости конечной толщины посвящена работа [6]. Полученные в ней результаты (трансформация монополя в триполь и пару диполей) качественно схожи с приведенными ниже. Это относится к примерам, где числа Россби порядка единицы.

Можно также указать работу [7], в которой рассмотрена эволюция интрузионного пятна (пассивной примеси) в поле стационарного вихря. Однако используемая в ней математическая модель, да и сама задача достаточно далека от данной работы. Математическая модель в [7] основана на одном нелинейном уравнении, описывающем не турбулентную стадию вырождения турбулентности – эволюцию слоистых структур, в то время как в данной работе моделирование основано на системе уравнений квазигоризонтальных вихревых движений. Более того, используются уравнения Рейнольдса и подсеточная модель турбулентности Смагоринского.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан слой жидкости конечной толщины с линейным распределением плотности вдоль глубины. Стратификация устойчивая, то есть плотность растет с глубиной. Отклонения поля плотности от невозмущенного состояния незначительные, поэтому имеет место приближение Буссинеска. В этом слое, имеющем дно и свободную поверхность, требуется изучить поведение двух вихрей разных масштабов. При этом меньший вихрь находится внутри большего. Оба вихря вращаются в начальный момент только вокруг вертикальной оси – каждый вокруг своей. Большой вихрь с вертикальным l_{v1} и горизонтальным l_{h1} масштабами считается квазигоризонтальным, то есть $l_{v1} \ll l_{h1}$. Горизонтальный и вертикальный масштабы меньшего вихря могут быть одного порядка (когда горизонтальные масштабы вихрей разнятся на порядок). Рассматриваются вихри с горизонтальными масштабами в диапазоне $O(10^2) - O(10^3)$ м и вертикальными масштабами – $O(10) - O(10^2)$ м. Поэтому в общем случае учитывается планетарное вращение. Вихри с указанными масштабами, хоть и редко, но обнаруживаются [8].

Для замыкания уравнений Рейнольдса нужно выбрать модель аппроксимации вертикальной и горизонтальной диффузии и вязкости. Известны разные подходы. Так, для аппроксимации вертикальной турбулентной вязкости и диффузии в настоящее время часто используется модель

Меллора-Ямады [9, 10]. Рассматриваемая в данной работе задача носит модельный характер. Дело в том, что в условиях устойчивой вертикальной стратификации коэффициент вертикальной диффузии можно приближенно считать константой. Во всех случаях, кроме специально оговоренных, в приведенных ниже примерах величина вертикальной турбулентной диффузии задавалась одним из типичных значений – 0.0005 м²/с [11]. Хотя известно, что реальные значения зависят от района мирового океана и других условий и могут быть как меньше, так и больше. Поэтому были проведены дополнительные численные эксперименты, в которых варьировалось значение вертикальной диффузии при неизменных остальных данных.

Коэффициенты горизонтального турбулентного обмена аппроксимируются в соответствии с моделью Смагоринского [12]. Согласно этой модели, коэффициенты горизонтальной турбулентной диффузии определяются следующими соотношениями:

$$A_m = \frac{1}{2} C_m \Delta x \Delta y \times \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$A_h = \frac{A_m C_h}{C_m}$$

где C_m, C_h – постоянные, $C_m = 0.1, C_h = 0.2C_m$; $\Delta x, \Delta y$ – масштабы мелких движений, то есть размеры сетки. Индексы m, h относятся соответственно к диффузии поля скорости и плотности. Размеры сетки выбирались из условия сходимости решения. Константа $C_m = 0.1$ – эмпирическая [13, 14] и выбиралась сравнением данной модели с решением, полученным по спектральному методу.

Рассматриваемый тип движения описывается классом квазигоризонтальных вихревых движений с характерными для него балансами и безразмерными параметрами [15]. В качестве горизонтального и вертикального пространственных масштабов выбираются соответствующие величины для большего вихря. Масштаб скорости V_0 – максимальное абсолютное значение азимутальной скорости. Масштаб времени l_h/V_0 – отношение горизонтального пространственного масштаба к масштабу скорости. Масштабы остальных величин выбираются из указанных в [15] балансов. Задача формулируется и решается в прямоугольной декартовой системе координат, вертикальная ось

которой направлена вверх, а центр находится на дне.

Исходя из вышесказанного, эволюция пары вихрей описывается следующей системой безразмерных уравнений:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + F_v^2 W \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Ro}} V_y + \frac{1}{\text{Re}_h} \nabla_H^2 V_x + \frac{1}{\text{Re}_v \delta^2} \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + F_v^2 W \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\text{Ro}} V_x + \frac{1}{\text{Re}_h} \nabla_H^2 V_y + \frac{1}{\text{Re}_v \delta^2} \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$F_v^2 \delta^2 \left(\delta \frac{\partial W}{\partial t} + V_x \frac{\partial W}{\partial x} + V_y \frac{\partial W}{\partial y} + F_v^2 W \frac{\partial W}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + b + F_v^2 \left(\frac{1}{\text{Re}_h} \nabla_H^2 W + \frac{1}{\text{Re}_v \delta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + F_v^2 \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V_x \frac{\partial b}{\partial x} + V_y \frac{\partial b}{\partial y} + F_v^2 W \frac{\partial b}{\partial z} - W = \frac{1}{\text{Sc}} \left(\frac{1}{\text{Re}_h} \nabla_H^2 b + \frac{1}{\text{Re}_v \delta^2} \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \right), \quad (5)$$

где (V_x, V_y, W) – безразмерные значения компонент вектора скорости; p, b – отклонения полей давления и плавучести от состояния невозмущенной устойчивой вертикальной стратификации; $\text{Re}_h = V_0 l_h / A_m, \text{Re}_v = \text{Re}_h \delta, F_v = V_0 / N l_v, \text{Ro} = V_0 l_h / 2\Omega, \delta = l_v / l_h, N^2 = \partial \bar{b} / \partial z, \text{Sc} = A_m / A_h = K_z / \chi_z$ – соответственно горизонтальное и вертикальное числа Рейнольдса, число Фруда, число Россби, квадрат частоты Брента-Вяйсяля, число Струхала; $l_h = l_{h1}, l_v = l_{v1}, \bar{b}$ – распределение невозмущенной плавучести, соответствующее устойчивой стратификации.

1.1. Граничные условия задачи

На дне. Условия прилипания:

$$V_x = 0; \quad V_y = 0; \quad W = 0.$$

Условие отсутствия градиента плавучести:

$$\frac{\partial b}{\partial z} = 0.$$

На свободной поверхности. Отсутствие касательных напряжений ветра, что в условии пространственной анизотропии и, как следствие,

относительной малости горизонтальных градиентов вертикальной скорости, можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0.$$

Равенство нулю возмущения давления $p = 0$ и плавучести $b = 0$.

Условие непокидания частицами жидкости свободной поверхности, которое в терминах отклонения свободной поверхности η и вертикальной скорости W имеет вид [16]:

$$\frac{d\eta}{dt} = W,$$

можно заменить, в силу малости η , на приближенное условие

$$W = 0.$$

Более подробно о формулировке граничных условий можно найти в [16].

В начальный момент каждый из вихрей задается азимутальной компонентой скорости V_ϑ в компактном виде:

$$V_\vartheta^i = 2V_0^i \alpha^2 \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{(r - \xi_i)^2}{L_0^2} \right) \right] \times \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^{-4} (z - (z_0 + a_1))^2 (z - (z_0 - a_2))^2, \quad (6)$$

где V_0^i , L_0 , z_0 – соответственно начальные значения скорости, горизонтального масштаба вихря и положения центра вихря (горизонт); a_1 , a_2 – толщины верхней и нижней частей вихря; ξ^i – положение центра i -го вихря; α – константа, характеризующая внутреннюю структуру вихря. Соответственно, масштабы и интенсивность вихрей – разные.

Прежде всего отметим, что можно условно разбить работу на две части: когда влияние планетарного вращения пренебрежимо ($Ro \gg 1$) и когда оно оказывает воздействие ($Ro \leq \sim O(1)$).

Выделим совокупности безразмерных параметров, от которых зависит задача. Поскольку рассматриваются два вихря разных масштабов и взаимного расположения, основными безразмерными параметрами будут:

1) $\delta_1 = V_{02}/V_{01}$ – отношение максимума абсолютного значения скорости в меньшем вихре к соответствующей величине в большем вихре;

2) $\delta_2^h = l_{h2}/l_{h1}$ – отношение горизонтальных масштабов вихрей;

3) $\delta_2^v = l_{v2}/l_{v1}$ – отношение вертикальных масштабов вихрей (равно 1 для всех примеров в данной работе);

4) δ_3^h – отношение координаты центра меньшего вихря к радиусу большего вихря;

5) δ_3^v – отношение координаты центра меньшего вихря к толщине большего вихря;

6) $\Delta_\omega = \Omega_{02}/\Omega_{01}$ – отношение максимальных величин завихренности в паре вихрей в начальный момент времени;

зависимость эффектов от:

7) числа Фруда F_v ;

8) горизонтального числа Рейнольдса Re_h ;

9) вертикального числа Рейнольдса Re_v

10) числа Россби Ro ;

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Вкратце изложим численную процедуру решения уравнений (1)–(5). Она основана на полунеевной схеме. Возьмем в качестве примера уравнение для V_x . Вместо функции V_x в этом уравнении используем формальное обозначение – ϕ . Уравнения для двух других компонент скорости и для плавучести – аналогичные, за исключением добавки, связанной с плавучестью в уравнении для вертикальной компоненты скорости. Однако численная схема та же. Пусть шаг по времени будет равен Δt . Если решение на предыдущем шаге по времени равно (U_0, V_0, W_0) , то имеем:

$$\phi = \Delta t \left(U_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \phi}{\partial y} + W_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\Delta t}{Re} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{K_z}{K_L} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = -\Delta t \frac{\partial p}{\partial x} + \phi_0. \quad (7)$$

Вторые производные аппроксимируются по методу центральных разностей. Производные первого порядка вычисляются вверх по потоку. В результате получаем:

$$\begin{aligned} & \phi_{i,j,k} \left[1 + \Delta t \left(\frac{|U_0|}{\Delta x} + \frac{|V_0|}{\Delta y} + \frac{|W_0|}{\Delta z} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2\Delta t}{Re} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{K_z}{K_L} \frac{1}{\Delta z^2} \right) \right] = \\ & = -\Delta t \frac{\partial p}{\partial x} + \phi_0 + \frac{\Delta t}{Re} \left(\frac{\phi_{i+1,j,k} + \phi_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{\phi_{i,j,k+1} + \phi_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) - \\ & - \Delta t \left(\frac{U_0}{\Delta x} \left[H(U_0) \phi_{i-1,j,k} + H(-U_0) \phi_{i+1,j,k} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{V_0}{\Delta y} \left[H(V_0)\phi_{i,j-1,k} + H(-V_0)\phi_{i,j+1,k} \right] + \frac{W_0}{\Delta z} \left[H(W_0)\phi_{i,j,k-1} + H(-W_0)\phi_{i,j,k+1} \right], \quad (8)$$

где $H(x)$ – функция Хэвисайда.

Уравнение (8) решалось с помощью расщепления по пространственным переменным с использованием формул прогонки. Полученное таким образом решение может не удовлетворять уравнению неразрывности. Поэтому был применен стандартный метод коррекции давления. Он состоит в том, что функция давления представляется в виде

$$p = p_0 + p',$$

где p_0 – значение на каком-то шаге по времени; p' – коррекция давления. Для этого компоненты скорости представляют в виде сумм значений на предыдущем шаге (U_0, V_0, W_0) и добавки (U', V', W') – коррекции:

$$U = U_0 + U', \quad V = V_0 + V', \quad W = W_0 + W',$$

таким образом, чтобы выполнялись равенства:

$$U' = -\frac{\Delta t \partial p'}{\partial x}, \quad V' = -\frac{\Delta t \partial p'}{\partial y}, \quad W' = -\frac{\Delta t \partial p'}{\partial z}.$$

Удовлетворяя уравнение неразрывности, для коррекции давления получаем:

$$\nabla^2 p' = -\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right). \quad (9)$$

Используя конечно-разностный метод, последнее уравнение преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} p'_{i,j,k} \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{K_z}{K_L} \frac{2}{\Delta z^2} \right) = & \frac{p'_{i+1,j,k} + p'_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{p'_{i,j+1,k} + p'_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \\ & + \frac{p'_{i,j,k+1} + p'_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{\partial W_0}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Результаты, полученные по методу конечных разностей, сравнивались со своими аналогами, полученными с помощью спектрального метода. Точность и сходимість контролировались вариацией величин шагов пространственно-временной сетки. Коррекция давления проводилась с точностью 0.001 – в безразмерных величинах.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В данной работе оба вихря, и меньший и больший, задаются в начальный момент в компактном виде. При этом поля их завихренности имеют ядра одного знака, а периферию – противоположного. Со временем периферийные области завихренности большего вихря трансформируются, а меньшего – исчезают, так что условие "одного знака" [1] для всей области меньшего вихря выполняется.

Сначала рассмотрим случай, когда отношение горизонтальных масштабов вихрей такое, что один вихрь на порядок меньше другого. В качестве первого примера задавалась пара компактных вихрей с горизонтальными масштабами 500 и 50 м. Толщина обоих вихрей равна 20 м. Глубина слоя жидкости 40 м и вертикальное положение центров вихрей (горизонт) – 20 м. Горизонтальное положение центра меньшего вихря – 250 м, то есть посередине радиуса большего вихря. Частота Брента-Вяйсяля всегда выбиралась равной 0.01 c^{-1} . Безразмерные параметры, соответствующие этим данным, указаны на рис. 1.

Из картины изолиний завихренности, представленных на рис. 1, видно, что имеет место некоторое движение (вращение) меньшего вихря относительно большего. Действительно, к моменту безразмерного времени $t = 1$ угол расположения центра меньшего вихря увеличивается, но он уже почти исчез. Напомним, что коэффициенты горизонтального турбулентного обмена – функции координат и времени (так как поле скорости меняется во времени).

Одним из основных параметров задачи является положение меньшего вихря в срединной плоскости основного вихря. Поэтому логичной оказывается проверка зависимости поведения системы от положения меньшего вихря. С этой целью был проведен следующий численный эксперимент: меньший вихрь был помещен ближе к оси вращения – на расстояние 0.2 от радиуса вихря. В данном примере – на 100 м. В результате к моменту безразмерного времени 0.5 меньший вихрь повернулся относительно большего на угол $\approx 45^\circ$. Но главное – максимальное значение завихренности малого вихря больше, чем в предыдущем случае. Следовательно, не только относительная скорость поворота, но и скорость диссипации малого вихря меньше. Это можно объяснить тем, что с приближением к оси вращения вихря влияние турбулентной диффузии ослабевает.

Возникает логичный вопрос: как изменится картина движения, если больший вихрь будет враща-

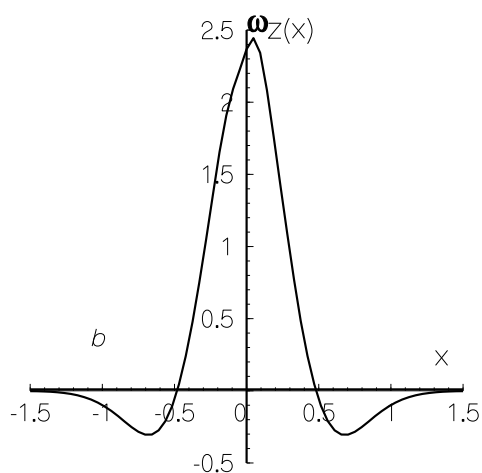
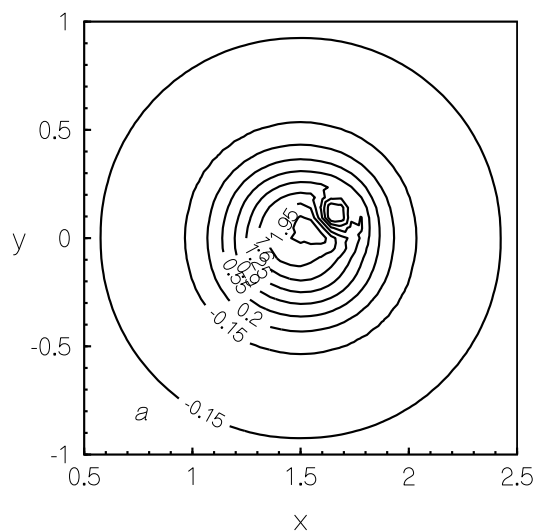


Рис. 1. Вертикальная компонента завихренности ω_z на горизонте $z_0 = 20$ м при $t = 0.5$, $Re_h = 14000$, $Re_v = 4000$, $F_v = 1.75$, $\delta = 0.04$, $Ro = 7$.
 а – изолинии ω_z ; б – распределение ω_z вдоль оси абсцисс

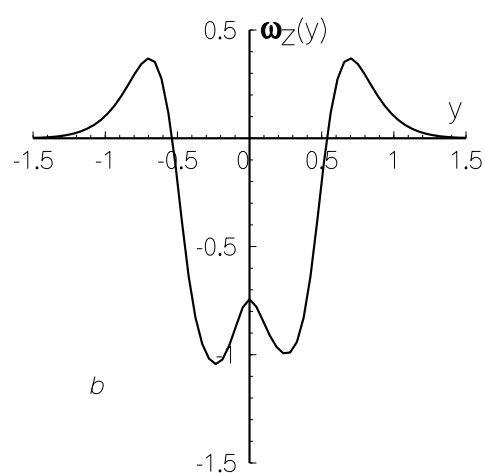
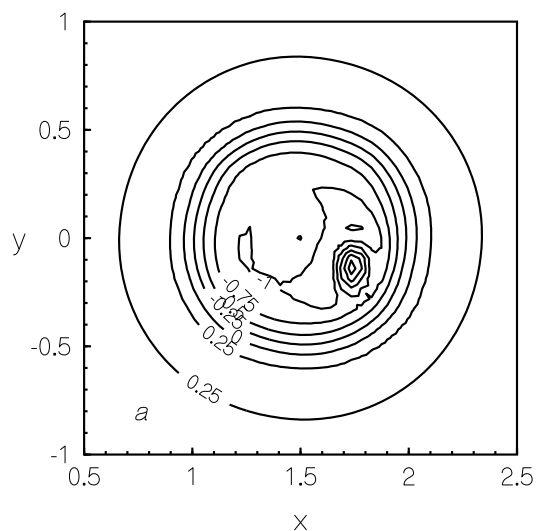


Рис. 2. Изолинии вертикальной компоненты завихренности ω_z на горизонте $z_0 = 20$ м (а) и её распределение вдоль оси ординат (б) там же

ться наоборот. Результаты вычислений во втором типичном примере, приведенные на рис. 2, показали, что при антициклоническом вращении основного вихря меньший вихрь движется относительно большего в противоположную сторону.

Приведенные рисунки указывают на следующую картину движения пары вихрей. В зависимости от направления и интенсивности каждого из вихрей могут получаться разные сценарии. Так, на рис. 1 можно увидеть пример, когда меньший и больший вихри вращаются в одну и ту же сторону. Распределение завихренности как функция радиальной координаты вдали от меньшего вихря такое же, как если бы мы рассматривали движение

одного (большого) вихря. Иное дело, когда вихри вращаются в разные стороны (см. рис. 2). В этом случае максимум завихренности смещается и находится не на оси вращения, а внутри вихря: на это указывает сгущение изолиний на рис. 2 сверху и явно – снизу.

Увеличивая масштаб и интенсивность меньшего вихря, можно получить сложную, асимметричную картину. Так, в третьем примере горизонтальные масштабы большего и меньшего вихрей в начальный момент составляли 200 и 100 м соответственно при тех же вертикальных масштабах. Такая система вихрей движется сложным образом. На это указывает рис. 3. Особенностью рассмотренных выше примеров является слабость вли-

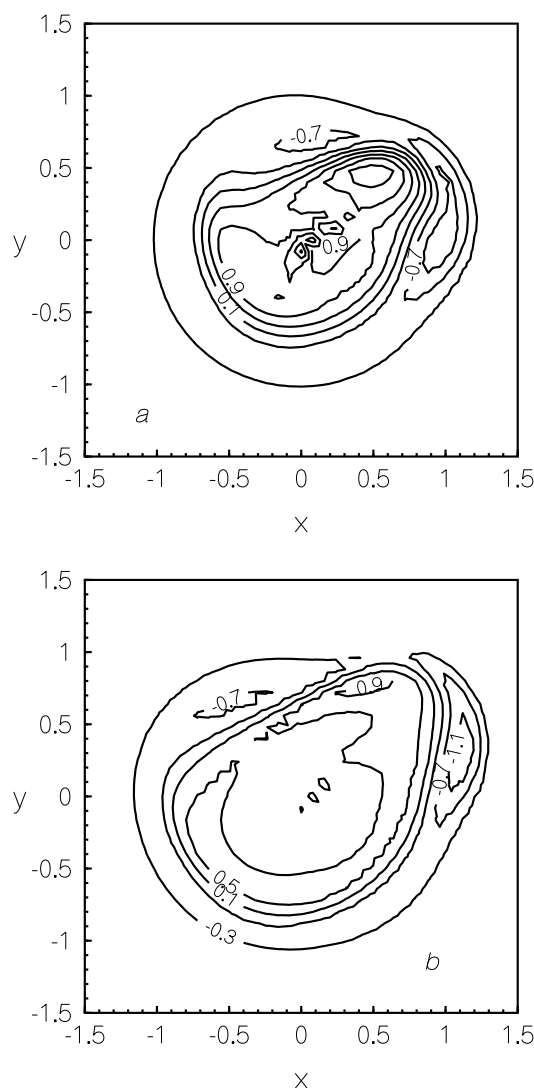


Рис. 3. Изолинии ω_z на горизонте $z_0 = 20$ м при $F_v = 1$, $Re_v = 8000$, $\delta = 0.1$, $Ro = 9.7$, $\delta_2^h = 0.5$ в моменты времени $t = 0.25$ (a) и $t = 1$ (b).

яния планетарного вращения из-за относительной малости горизонтальных масштабов вихрей.

Рассмотрим теперь примеры эволюции пар вихрей, когда сила Кориолиса вносит свой вклад в развитие событий. В качестве четвертого примера задавались масштабы большего вихря приблизительно равными тем, что наблюдаются в природе [8]: $l_h^1 = 2000$ м, $l_v = 70$ м, $H = 140$ м, $z_0 = 35$ м; $V_h^2 = V_h^1 = 0.1$ м/с. Как и ранее, начнем с относительно малого возмущения – второго вихря, задав $l_h^2 = 100$ м и разместим его на расстоянии $\xi = 1000$ м. Результаты взаимной эволюции пары вихрей показаны на рис. 4. Форми-

руется слабый триполь. Следовательно, меньший вихрь играет роль малого возмущения и эволюция большого вихря та же, что и без малого вихря: трансформация под действием планетарного вращения в триполь. Следует отметить, что если начальное максимальное значение завихренности меньшего вихря задать таким же, как и большого, триполь не образуется. Получается лишь ситуации примеров 1 и 2.

Увеличим теперь горизонтальный масштаб меньшего вихря. В пятом примере была рассмотрена пара вихрей с $l_h^1 = 2000$ м, $l_h^2 = 300$ м. Меньший вихрь располагался в начальный момент внутри большего ($\xi = 1000$ м), а величины скорости – одинаковыми. Вертикальные масштабы вихрей в начальный момент были равны 70 м, а толщина слоя жидкости – 140 м. Горизонт вихря – 105 м. То есть вихрь находился у поверхности. Образование триполя (см. рис. 5) при отношении энергий меньшего вихря к энергии большего как 1:50 – характерный результат для данной задачи. То, что триполь образовался в случае, когда вихри находятся ближе к поверхности, – объясняется одним порядком толщин вихрей и слоя жидкости. Для выяснения зависимости процесса от расстояния до дна был проведен численный эксперимент, когда при прочих предыдущих параметрах задавалась толщина вихрей 60 м в слое жидкости 300 м. Вихри размещались у поверхности (на горизонте 270 м). Полученные результаты указывают на более слабый процесс формирования триполя.

При дальнейшем увеличении относительного масштаба меньшего вихря последний не вырождается полностью. В качестве шестого примера были рассмотрены два вихря с размерами 2 км и 400 м. Величины максимальной завихренности у них, при прочих данных из предыдущего примера, совпадали. Получается довольно сложная картина. Ее особенностью является наличие на промежуточном этапе по времени трех областей завихренности разного знака у большего вихря (см. рис. 6) вне пространства нахождения меньшего вихря. При больших значениях времени формируется триполь.

Если масштаб меньшего вихря (1000 м) уже одного порядка, что и большего (2000 м) вихря (седьмой пример), то на фоне процесса образования триполя наблюдается сохранение значительной части области меньшего вихря (рис. 7). Со стороны, противоположной к меньшему вихрю, получается поле, характерное для триполя. С противоположной стороны картина напоминает диполь. Безразмерные параметры те же, что и в примерах 5 и 6, за исключением отношения масштаба мень-

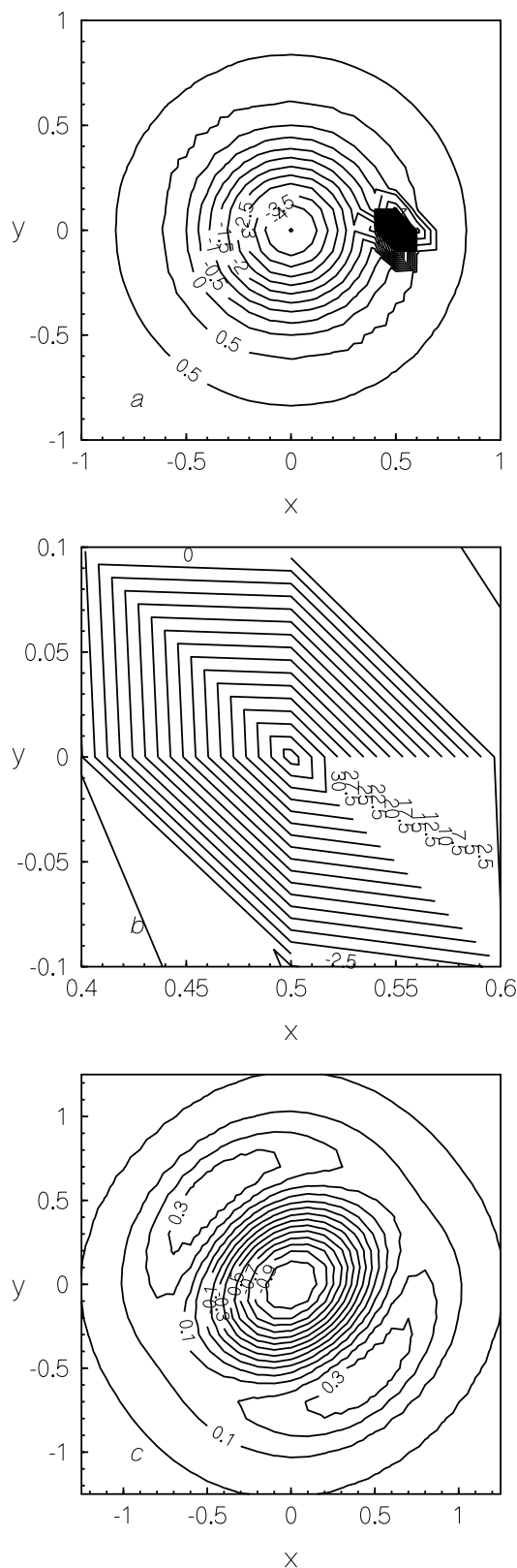


Рис. 4. Изолинии ω_z на горизонте $z_0 = 35$ м при $Ro = 0.488$, $F_v = 0.143$, $Re_v = 14000$, $\delta^2 = 0.035$, $\delta_2^h = 0.05$ в моменты $t = 0$ (a, b) $t = 2$ (c)

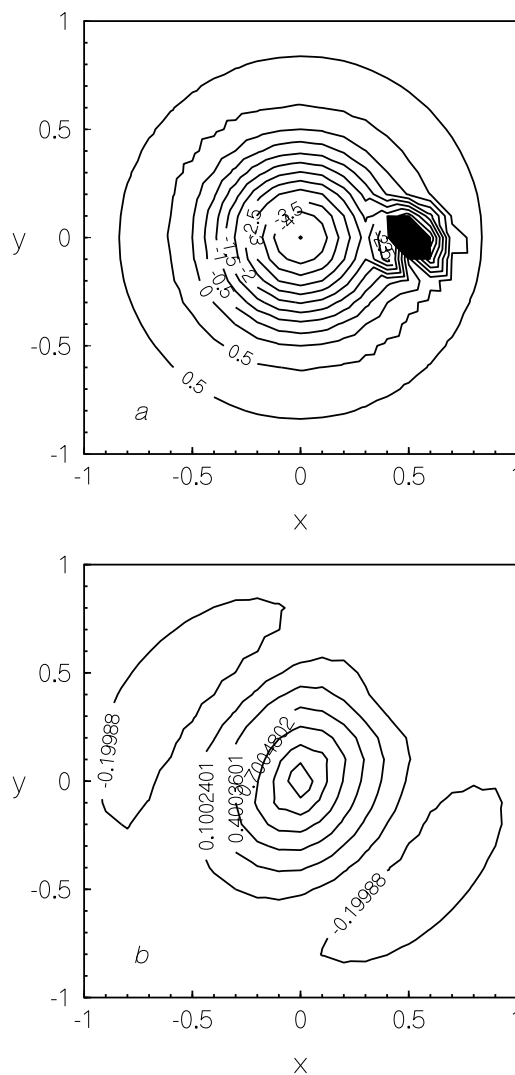


Рис. 5. Изолинии ω_z при $z_0 = 105$ м, $\delta_2^h = 0.15$ в моменты времени $t = 0$ (a) и $t = 2$ (b)

шего вихря к большему, который равен 0.5.

В восьмом примере увеличим горизонтальные размеры большего и меньшего вихря до 5 км и 1 км соответственно при толщине вихрей 200 м. Максимальные амплитуды скоростей равны 0.1 м/с. Центр меньшего вихря расположен на расстоянии 4 км от оси вращения большего. Начальный горизонт центра вихря – 100 м. Рис. 8 показывает, что при увеличении влияния планетарного вращения образование триполя становится более выражено (сравните с рис. 6), хотя ядро меньшего вихря все ещё остаётся на фоне триполя.

Во всех рассмотренных выше случаях начальные тощины вихрей были одного порядка с глубиной слоя жидкости. Поэтому, чтобы свести, по

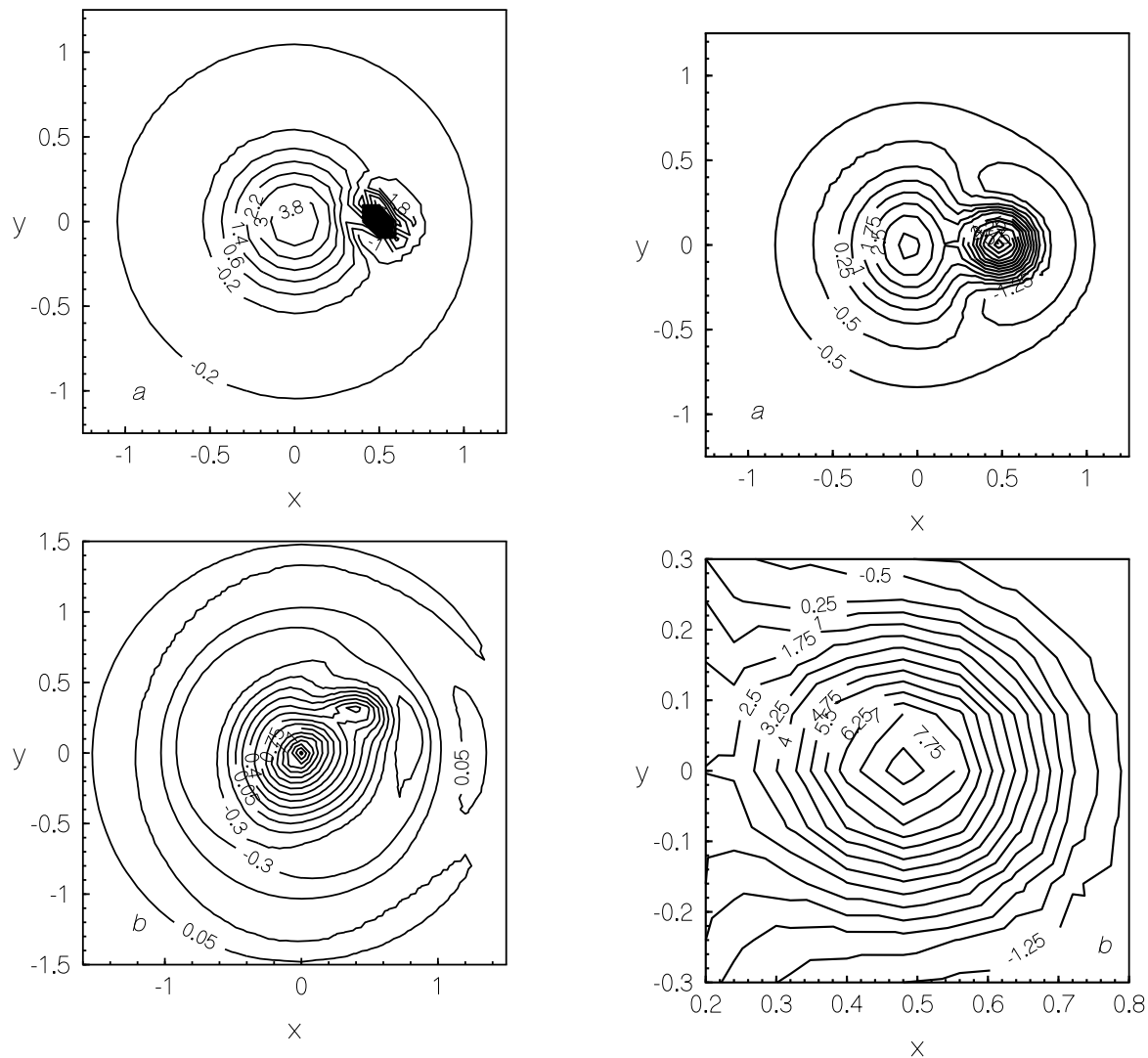


Рис. 6. Изолинии ω_z при $z_0 = 105$ м, $\delta_2^h = 0.2$ в моменты времени $t = 0$ (a) и $t = 2$ (b)

возможности, к минимуму влияние дна, был рассмотрен девятый пример, где вихри располагались у самой поверхности – вдали от дна: $l_h^1 = 2000$ м, $l_h^2 = 300$ м, $l_v^1 = l_v^2 = 60$ м, $H = 300$ м, $z_0 = 270$ м, $\xi = 1000$ м. Хотя теперь дно находится вдали от вихрей, наличие в поле скорости асимметрии все равно, из-за планетарного вращения, приводит к формированию триполя. Но, в отличие от пятого примера, где вихри находятся у самого дна, что генерирует вторичные течения, при тех же значениях числа Россби и горизонтальных масштабов вихрей в данном случае процесс формирования триполя существенно слабее.

Ранее, в третьем примере были рассмотрены два вихря с масштабами одного порядка (200 м

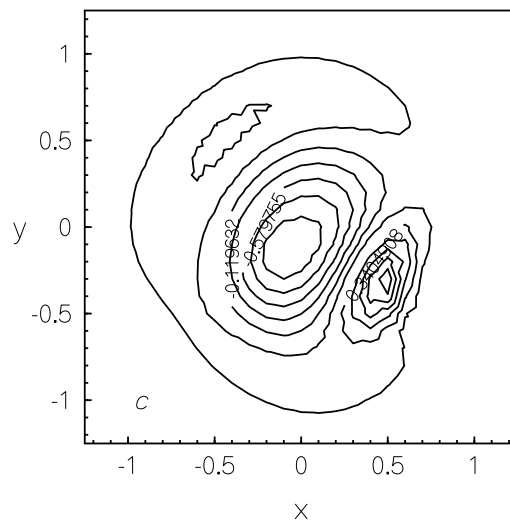


Рис. 7. Изолинии ω_z при $\delta_2^h = 0.5$ в моменты времени $t = 0$ (a, b) и $t = 2$ (c)

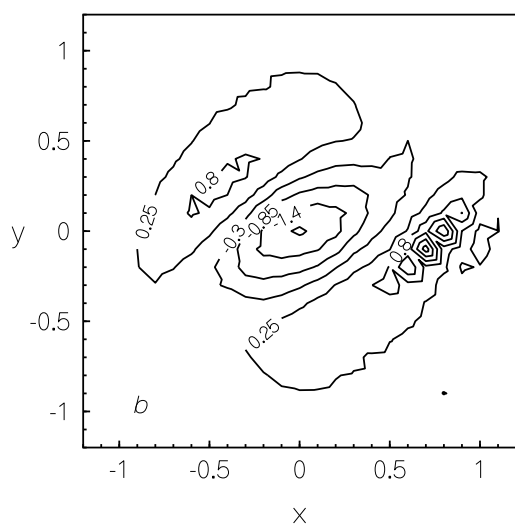
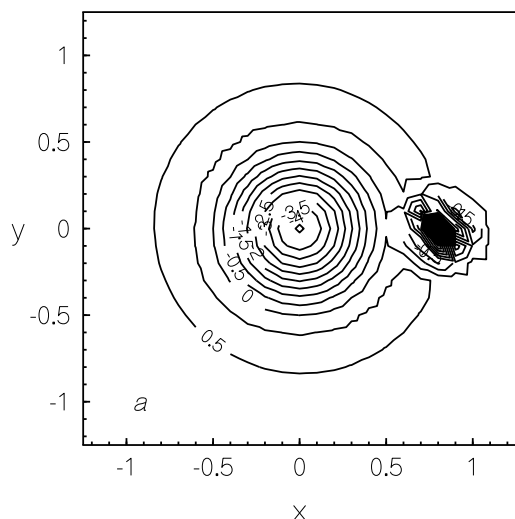


Рис. 8. Изолинии ω_z при $F_v = 0.05$, $Re_v = 40000$, $\delta = 0.04$, $Ro = 0.194$, $\delta_2^h = 0.2$ в моменты времени $t = 0$ (a) и $t = 2$ (b)

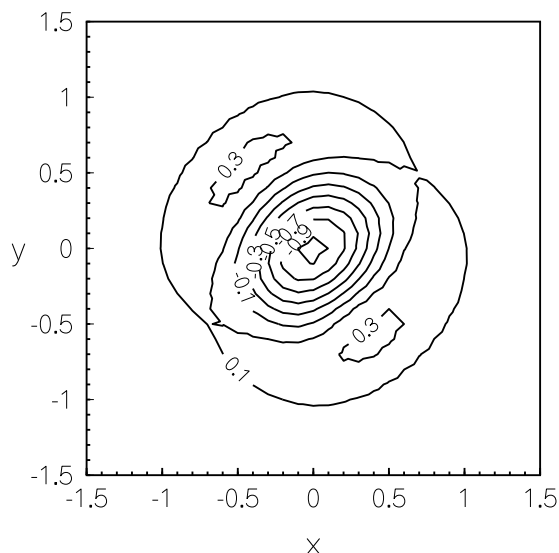


Рис. 9. Изолинии ω_z при $H = 300$, $z_0 = 270$, $F_v = 0.166$, $Re_v = 12000$, $\delta = 0.03$, $Ro = 0.486$, $\delta_2^h = 0.15$ в момент времени $t = 2$

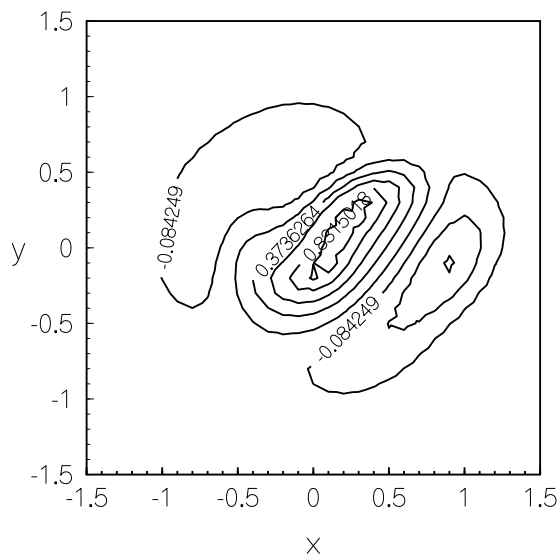


Рис. 10. Изолинии ω_z при $Ro = 0.486$, $\delta_2^h = 0.5$ в момент $t = 2$

и 100 м) и завихренностью ядер одного знака. Как изменится картина движения, когда вихри будут иметь горизонтальные масштабы, при которых планетарное вращение оказывает существенное влияние на их динамику? В качестве десятого примера были рассмотрены два вихря с $l_h^1 = 2000$ м, $l_h^2 = 1000$ м, $l_v^1 = l_v^2 = 60$ м в слое толщиной $H = 75$ м; $z_0 = 30$ м, $\xi = 1000$ м. И пусть завихренность в ядре каждого из вихрей отрицательна. На рис. 10 показано, как со временем формируется триполь.

Как уже было отмечено выше, значение коэффициента вертикальной турбулентной диффузии различное для разных районов океана. По-

этому важным моментом моделирования является ответ на вопрос, как будут зависеть представленные выше результаты от величины коэффициента вертикальной турбулентной диффузии. С этой целью был проведен дополнительный ряд численных экспериментов, где варьировался K_z в пределах $0.001 - 0.00005$ м²/с. Общий вывод, который можно сделать по результатам этих дополнительных вычислений, состоит в том, что качественно картина течения остается прежней при изменении величины вертикальной турбулентной диф-

фузии в пределах одного порядка. Количественно поля течений разнятся – и тем сильнее, чем больше изменяется вертикальная турбулентная диффузия. Так, на рис. 11 представлен модельный случай $K_z = 0.001 \text{ м}^2/\text{с}$. Сравнение с рисунком 7 подтверждает сказанное выше – количественное различие. В условиях сильной устойчивой стратификации значение коэффициента вертикальной турбулентной диффузии гораздо меньше рассмотренных выше. Поэтому рассмотрим ещё один пример, когда, при прочих предыдущих данных, $K_z = 0.00005 \text{ м}^2/\text{с}$. Соответствующие изолинии поля завихренности представлены на рис. 12. Видно, что область течения также представлена тремя зонами, как и ранее (рис. 7 и 11), но количественно это уже другое течение.

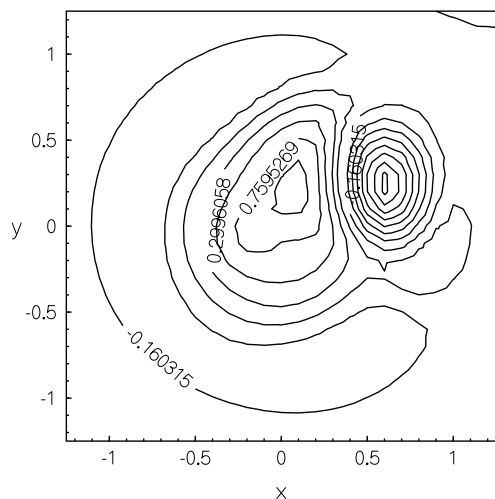


Рис. 11. Изолинии ω_z для случая $K_z = 0.001 \text{ м}^2/\text{с}$ в момент времени $t = 2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе численных экспериментов выяснилось, что меньший вихрь внутри вихря больших размеров, если последний имеет масштабы, на которые влияние планетарного вращения пренебрежимо мало, вращается вместе с большим вихрем, диффундируя в последнем. При этом подтверждается очевидное: чем энергетически сильнее меньший вихрь, тем дольше его время жизни.

В зависимости от соотношения вращения пары вихрей (в одну сторону или в противоположную) распределение завихренности в основном вихре может оставаться прежним или изменяться: если завихренности малого и большого вихря разного знака, то большой вихрь видоизменяется в

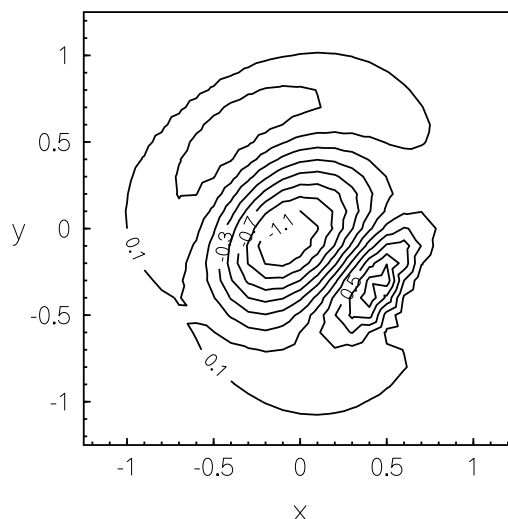


Рис. 12. Изолинии ω_z для случая $K_z = 0.00005 \text{ м}^2/\text{с}$ в момент времени $t = 2$

том смысле, что максимум завихренности перемещается от оси вихря во внутреннюю область.

При соотношении масштабов вихрей 1:2 (вихри одного масштаба) получаются две картины движения. Если ядра вихрей имеют одинаковый знак завихренности, то со временем образуется один вихрь завихренностью того же знака. А пара вихрей, ядра которых имеют завихренность противоположного знака, со временем образуют структуру, со стороны большего вихря имеющую поле, соответствующее триполю, а со стороны меньшего вихря – диполу.

Если больший вихрь имеет масштаб, при котором планетарным вращением уже нельзя пренебречь, то малый вихрь играет роль возмущения, которое приводит к трансформации большого вихря, монополя, в триполь. При этом форма триполя зависит от соотношения большего и меньшего вихря.

Для пары вихрей, вращающихся в одну сторону, горизонтальные размеры которых имеют один порядок (1:2), а масштабы, при которых планетарное вращение существенно, происходит образование триполя, а не слияние двух вихрей в один.

Выявлена количественная зависимость процесса эволюции пары вихрей от величины коэффициента вертикальной турбулентной диффузии K_z .

В данной работе изучен ряд примеров модельной задачи эволюции пары вихрей разных масштабов. Представляет также интерес анализ таких случаев, когда вихри имеют разные начальные толщины и разные горизонты расположения и т. п.

Выражаю огромную признательность докт. физ.-матем. наук А. Г. Степенко за ряд критических замечаний, приведших к существенной доработке статьи.

1. *Burton G. R., Nycander J.* Stationary vortices in three-dimensional quasi-geostrophic flow // *J. Fluid Mech.*– 1999.– V. 389.– P. 255–274.
2. *Carnevale G.F., Briscolini M., Kloosterziel R.C., Vallis G.K.* Three-dimensionally perturbed vortex tubes in a rotating flow // *J. Fluid Mech.*– 1997.– V. 341.– P. 127–163.
3. *Kloosterziel R.C., Heijst, G.J.F.* An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid // *J. Fluid Mech.*– 1991.– V. 223.– P. 1–24.
4. *Trilling R.R., Linssen A.H., van Heijst G.J.F.* Monopolar vortices in an irrotational annular shear flow // *J. Fluid Mech.*– 1998.– V. 360.– P. 273–294.
5. *Trilling R.R., Beckers M., Van Heijst G.J.F.* Dynamics of monopolar vortices in a strain flow // *J. Fluid Mech.*– 1997.– V. 345.– P. 165–201.
6. *Orlandi P., Carnevale G.F.* Evolution of isolated vortices in a rotating fluid of finite depth // *J. Fluid Mech.*– 1999.– V. 381.– P. 239–269.
7. *Галактионов А.В., Мадерич В.С.* Динамика слоистых структур на конечной стадии затухания турбулентности в устойчиво стратифицированной среде // *Известия АН Физика атмосферы и океана* .– 1999.– Т. 35, № 6.– С. 829–837.
8. *Alfredo Abraама, Estore Salusti* Observation of Small Scale shelf-Trapped Dipolar Vortices near the Eastern Sicilian Coast // *J.Phys. Oceanogr.*– 1990.– V. 20, № 7.– P. 1105–1112.
9. *Mellor G.L., Yamada T.* A Hierarchy of Turbulence Closure Models for Planetary Boundary Layers // *Journal of Atmospheric Sciences.*– 1974.–V. 31.– С. 1791–1806
10. *Mellor G.L., Yamada T.* Development of Turbulence Closure Models for Geophysical Fluid Problems. // *Reviews in Geophysics and Space Physics.*– 1982.– V. 20.– P. 851–857.
11. *Озмидов Р.В.* Динамика примесей в океане.– Л.: Гидрометеиздат, 1986.– 280 с.
12. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with primitive equation // *Mon. Wether.*– 1963.– V. 91.– P. 99–105.
13. *Косебучский В., Мадерич В., Нестеров А., Хелинг Р.* Моделирование распространения тепла во внутренних водах и прибрежных областей морей // *Прикл. гідром.*– 2004.– Т. 6 (78), N 4.– С. 34–44.
14. *Kantha L.H., Clayson C.A.* Numerical models of Oceans and Oceanic Processes.– San-Diego – London: Academic Press, 2000.– 940 p.
15. *Lukianov P.V., Maderich V.S.* Restratification processes in the final stage of turbulence decay in a stably stratified medium // *Доповіди НАН України.*– 1995.– 5.– С. 46–49.
16. *Лукьянов П.В.* Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое устойчиво стратифицированной жидкости // *Прикл. гідром.*– 2006.– Т. 8 (80), N3.– С. 63–77.
17. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Т.1.– М.: Мир, 1986.– 397 с.