

УДК 533.6.013.42

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ДЛИННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

В. В. ЯКОВЛЕВ, Т. Б. ГОНЧАРЕНКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 17.08.2008

Исследована динамическая система, соответствующая обобщенному уравнению КдВ, описывающему распространение длинных нелинейных изгибно-гравитационных волн в море, покрытом сплошным льдом. Анализ полученных соотношений позволил определить области существования устойчивых солитонных решений и решений в виде кноидальных волн в зависимости от физических параметров задачи.

Досліджено динамічну систему, що відповідає узагальненому рівнянню КдВ, яке моделює розповсюдження довгих нелінійних згинно-гравітаційних хвиль у морі, вкритому суцільним льдом. Аналіз отриманих співвідношень дозволив визначити області існування стійких розв'язків у вигляді відокремленої хвилі та у вигляді кноїдальних хвиль в залежності від фізичних параметрів задачі.

Dynamic system, corresponding to generalized KdV equation for simulating the propagation of long nonlinear flexible-gravitational waves on the sea, covered with ice, has been investigated. The analyses of relationships obtained allowed to determine the regions, depending on the physical parameters of the problem, where the stable decisions of soliton- and cnoidal-type exist.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] получено обобщенное уравнение Кортевега-де-Вриза, для которого можно построить точные решения, имеющие структуру солитона с отрицательной амплитудой и кноидальной волны. Возможность существования решений солитонного типа для этого уравнения рассматривалась в [2]. Для определения интервалов изменения физических параметров задачи, где могли бы существовать такие решения, с помощью метода линеаризации исследовалась соответствующая динамическая система (ДС).

Обратимся к вопросу устойчивости интересующей нас системы нелинейных дифференциальных уравнений и рассмотрим ее якобиан (матрицу устойчивости) с целью выяснить, может ли полученное в [1] солитонное решение быть устойчивым в области существования.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для нелинейной системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x), \quad i = \overline{1, n}$$

матрица устойчивости

$$J = \{F_{ij}\} = \left\{ \frac{df_i}{dx_j} \right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}$$

определяет два множества [3]: P_a – это множество точек фазового пространства (ФП), где J имеет кратные собственные значения, т. е.

$$S_a = \prod_{j>i=1}^n (\lambda_j - \lambda_i) = 0; \quad (1)$$

P_b – это множество точек ФП, в которых по меньшей мере одно собственное значение матрицы имеет равную нулю действительную часть:

$$S_b = \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda_i + \lambda_i^*)}{2} = 0. \quad (2)$$

По этим множествам определяются области, в которых система является структурно (динамически) устойчивой или нет. Области устойчивости ДС характеризуются условиями $S_a \neq 0$, $S_b \neq 0$. Динамически устойчивой система будет там, где $Re(\lambda_i) < 0$, $i = \overline{1, n}$. В точках, где $S_a = 0$, $S_b \neq 0$, никаких изменений устойчивости не должно происходить. Такие условия характерны для структурно неустойчивой, но невырожденной системы. Изменения устойчивости возникают там, где $S_a \neq 0$, $S_b = 0$. ДС в таких точках является неустойчивой и вырожденной, т. е. мы приходим к бифуркационному множеству.

Зависимость $f_i(x)$ для обобщенного уравнения КдВ достаточно проста, так что нет необходимости рассматривать пространство R^{n^2} [3]. Можно ограничиться четырехмерным ФП и в нем построить множество, аналогичное сепаратрисе, т. е.

множество, разграничивающее области различной устойчивости исследуемой ДС.

Длинноволновая нелинейно-дисперсионная модель [1], описывающая распространение изгибно-гравитационных волн в упругой пластине, плавающей на поверхности жидкости, сводится к обобщенному уравнению Кортевега-де-Вриза:

$$\frac{\partial \xi_z}{\partial t} + \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \xi_z\right) \frac{\partial \xi_z}{\partial x} + \frac{\beta + 3\gamma - 3h_1 \varepsilon_x E}{6} \frac{\partial^3 \xi_z}{\partial x^3} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial^5 \xi_z}{\partial x^5} = 0,$$

где ρ_1 , h_1 , D , E – соответственно плотность, толщина, цилиндрическая жесткость и модуль упругости пластины; ε_x – деформация срединной поверхности за счет геометрически нелинейного прогиба; A , λ – амплитуда и длина волны,

$$\alpha = \frac{A}{d_0}; \quad \beta = \frac{d_0}{\lambda};$$

$$\gamma = \frac{\rho_1 h_1 \beta}{\rho_2 d_0}; \quad \delta = \frac{\beta D}{\rho_2 g d_0^2 \lambda^2}.$$

Обозначим

$$\kappa = \frac{\beta + 3\gamma - 3h_1 \varepsilon_x E}{6}$$

– параметр, характеризующий взаимосвязь дисперсии жидкости, инерции ледяной пластины и ее дисперсии за счет геометрически нелинейного прогиба. После замены $\zeta = x - Ut$ и интегрирования уравнение принимает вид:

$$\frac{2(1-U)}{\delta} u + \frac{3\alpha}{2\delta} u^2 + \frac{2\kappa}{\delta} u_{\zeta\zeta} + u_{\zeta\zeta\zeta} = 0. \quad (3)$$

Такому уравнению соответствует следующая ДС:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2, \\ \dot{u}_2 = u_3, \\ \dot{u}_3 = u_4, \\ \dot{u}_4 = Au_1 + Bu_1^2 + Cu_3, \end{cases}, \quad (4)$$

где

$$A = \frac{2(U-1)}{\delta}, \quad B = -\frac{3\alpha}{2\delta}, \quad C = -\frac{2\kappa}{\delta}.$$

Построим матрицу Якоби для данной системы и найдем ее определитель:

$$\det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A + 2Bu_1 & 0 & C & 0 \end{vmatrix} = -(A + 2Bu_1).$$

В критических точках ДС определитель якобиана равен нулю. Очевидно, что существуют такие точки ФП, где этот определитель обращается в 0, независимо от значений физических параметров задачи A и B при $B \neq 0$. Это множество точек вида

$$\left\{ \left(-\frac{A}{2B}, u_2, u_3, u_4 \right) \right\}.$$

Равенство нулю определителя матрицы Якоби связано также с наличием у нее нулевых собственных значений. Из характеристического уравнения имеем:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 4(A + 2Bu_1)}}{2}. \quad (5)$$

Из этой формулы следует, что характер корней, а следовательно, и вид сепаратрис определяются подкоренным выражением и знаком дроби. В соответствии с результатами работы [2] основное соотношение для нахождения интервалов изменения параметров, в которых существуют решения исходного уравнения, включает параметры U , κ , δ . Очевидно, что сепаратрисами являются параболическая поверхность

$$u_1 = \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{\kappa^2}{\delta} + 2(U-1) \right) \quad (6)$$

и плоскость

$$u_1 = \frac{2(U-1)}{3\alpha}. \quad (7)$$

Строим эти поверхности в пространстве $(x, y, z) = (\kappa, U, u_1)$, например, для значений $\alpha = \delta = 0.1$ (рис. 1). На рис. 2 представлено сечение сепаратрис плоскостью, перпендикулярной плоскости (7). Это позволяет нагляднее представить динамику собственных значений якобиана и соответственно области изменения устойчивости системы.

Внутри параболы имеем область комплексных корней, причем знак действительной части меняется при переходе через $\kappa = 0$, что в данной проекции соответствует оси параболы.

На параболе собственные значения получаем из равенства

$$\lambda^2 = -\frac{\kappa}{\delta},$$

т. е. для $\kappa > 0$ имеем две пары кратных мнимых корней, для $\kappa < 0$ – две пары кратных действительных корней.

Вне параболы имеем действительные значения λ , причем под плоскостью, независимо от знака

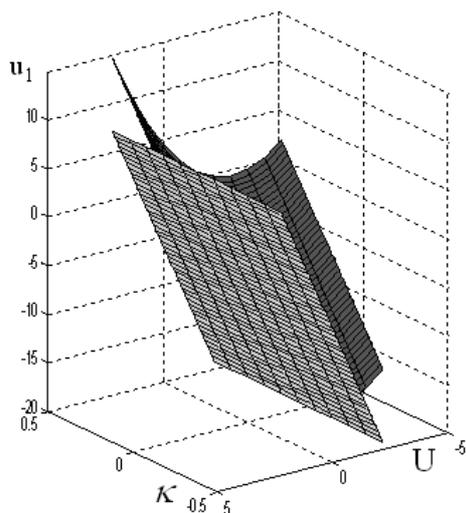


Рис. 1. Сепаратрисы в пространстве (U, κ, u_1)

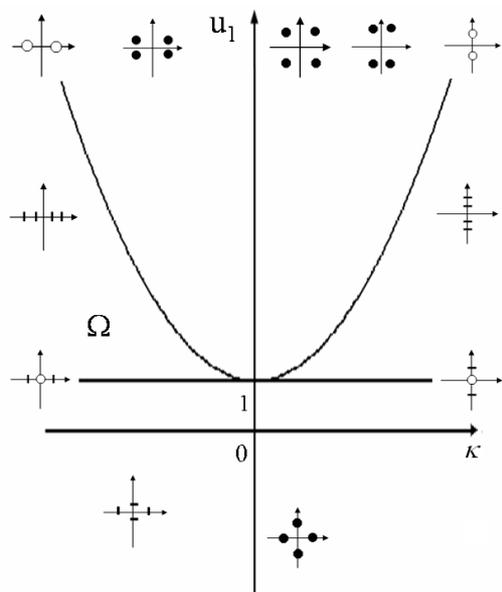


Рис. 2. Сечение поверхностей, определяемых выражениями (6), (7)

κ , получаем пару мнимых и пару действительных корней, а над ней – две пары действительных для $\kappa < 0$ и две пары мнимых для $\kappa > 0$.

Согласно теории, (например, [3]), сепаратриса S_a состоит из двух поверхностей – параболической поверхности, определяемой выражением (6), и плоскости, определяемой выражением (7). Сепаратриса S_b включает в себя часть сепаратрисы S_a при $\kappa > 0$, все пространство между параболической поверхностью (6) и плоскостью (7) и

пространство под плоскостью (7), исключая часть плоскости при $\kappa < 0$. Геометрически пересечение множеств (пространств), представляющих сепаратрисы – это параболическая поверхность и плоскость при $\kappa \leq 0$, включая линию касания.

Рассмотрим динамику собственных значений (СЗ) якобиана в пространстве (κ, u_1) (см. рис. 2), начиная от полуплоскости, описываемой выражением (7), при $\kappa > 0$ и двигаясь против часовой стрелки,

1. Из нуля пара СЗ расходится по мнимой оси, в результате чего все четыре корня являются мнимыми.
2. На параболе модули СЗ становятся равными.
3. Внутри параболы СЗ расходятся в разные стороны от мнимой оси, в результате чего имеем попарно сопряженные комплексные корни.
4. При $\kappa = 0$, т.е. на оси, модули СЗ становятся равными.
5. При дальнейшем движении к параболе при $\kappa < 0$ мнимая часть СЗ уменьшается, и на самой параболе СЗ становятся действительными. Эти действительные корни являются кратными, противоположными по знаку.
6. В области Ω СЗ остаются действительными: из кратного корня по действительной оси расходятся два значения, в результате чего имеем две пары противоположных по знаку корней равного модуля.
7. На плоскости (7) при $\kappa < 0$ меньшие по модулю СЗ собираются в нуле, т.е. имеем кратный нулевой корень.
8. При переходе через плоскость, описываемую выражением (7), при $\kappa < 0$ из кратного нулевого корня эти СЗ расходятся по мнимой оси.
9. При $\kappa = 0$ модули мнимых СЗ уравниваются.
10. На плоскости (7) при $\kappa > 0$ пара действительных СЗ собирается в нуле и далее расходится по мнимой оси.

Поскольку ограниченные решения исходного уравнения существуют только в узком диапазоне изменения физических параметров, это не дает возможности проследить связь динамики СЗ якобиана соответствующей ДС с процессами, которые описывает такая модель. Во всяком случае, можно четко определить, что область устойчивости нелинейной ДС – это область Ω на рис. 2, т. е.

$$\frac{2(U-1)}{3\alpha} < u_1 < \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{\kappa^2}{\delta} + 2(U-1) \right), \quad (8)$$

$$\kappa < 0.$$

В этой области собственные значения якобиана нелинейной ДС не являются ни мнимыми, ни кратными, т. е. $S_a \neq 0$, $S_b \neq 0$. Граница области устойчивости решения определяется зависимостью между параметрами δ (дисперсии за счет цилиндрической жесткости пластины), κ (геометрически нелинейного прогиба пластины, дисперсии жидкости, инерции пластины) и $U-1$ (отклонения фазовой скорости изгибно-гравитационной волны от фазовой скорости гравитационной волны).

2. СРАВНЕНИЕ С ПРЕДЫДУЩИМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

Стационарные состояния ДС – это точки ФП $(0., 0., 0., 0.)$ и

$$\left(\frac{4(U-1)}{3\alpha}, 0., 0., 0. \right).$$

Подставляя эти значения в уравнение (5), приходим к формулам для собственных значений динамических систем, полученных в результате линеаризации исходной ДС (4) в окрестности ее стационарных состояний. В работе [2] в результате анализа этих формул была получена схема рис. 3, на которой приведены границы областей, где СЗ этих ДС сохраняют свой характер, в пространстве (U, κ) . На этой схеме значение $u_1 = 0$ соответствует нижней, а

$$u_1 = \frac{4(U-1)}{3\alpha}$$

– верхней параболам на схеме рис. 3. Эту схему можно получить, если спроектировать сечения параболической поверхности (6) (рис. 1) плоскостями

$$u_1 = 0$$

и

$$u_1 = \frac{4(U-1)}{3\alpha}$$

на плоскость (U, κ) . Таким образом, эта схема представляет сепаратрисы в пространстве параметров (U, κ) исследуемой системы (4) и является частным случаем данного исследования (рис. 1, 2).

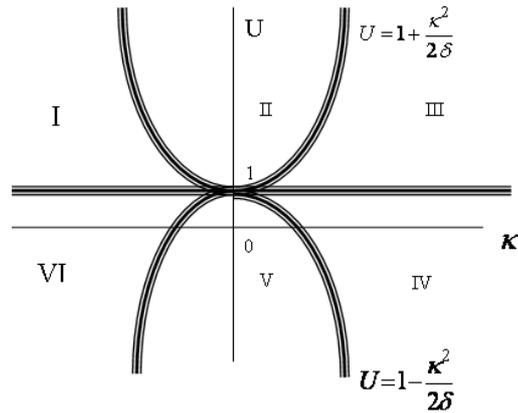


Рис. 3. Сепаратрисы для линеаризованных ДС

Анализ исходной задачи с помощью линеаризации [2] позволил:

- найти два взаимосвязанных стационарных состояния нелинейной ДС, к которой приводится исходная задача, и явную зависимость между собственными значениями, определяющими характер этих состояний;

- определить области перестройки фазового потока с точностью до $10^{-1} \frac{\kappa^2}{\delta}$;

- выделить ключевое соотношение параметров $U \left(\frac{\kappa^2}{\delta} \right)$;

- найти зависимость бифуркационного параметра задачи от собственных значений, характеризующих каждое стационарное состояние.

Следовательно, можем сделать вывод о том, что полученные в [2] результаты согласуются с исследованием исходной динамической системы по ее матрице устойчивости и являются частным случаем такого исследования. Однако, как будет показано далее, предположения о возможной структуре решений по аналогии с [4] для нелинейной задачи не всегда оказываются верными.

3. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Уравнение (3) после ряда преобразований приобретает вид [1]:

$$3P \left(\frac{d\tau}{d\xi} \right)^2 = -(\pm\tau^3 + 3C\tau^2 \pm 6A\tau + 6B) = f(\tau), \quad (9)$$

где

$$C = \frac{2\kappa}{39} \sqrt{\frac{35}{\alpha\delta}}; \quad B = \frac{4\kappa}{117\alpha} \sqrt{\frac{35}{\alpha\delta}} (U - c_0);$$

$$A = \frac{5}{18} \frac{(U - c_0)}{\alpha}; \quad c_0 = 1 - \frac{72\kappa^2}{169\delta},$$

и вопрос о наличии у исходного дифференциального уравнения решений типа солитона или кноидальной волны сводится к анализу корней кубического уравнения вида

$$f(\tau) = -(\pm\tau^3 + a\tau^2 \pm b\tau + c) = 0. \quad (10)$$

Для ответа на вопрос о количестве и характере корней этих уравнений нет необходимости рассматривать отдельно каждый вариант, так как можно показать, что корни в одном и другом случаях отличаются только знаками, соответственно интервалы знакопостоянства для кубических полиномов (10) симметричны относительно нуля.

Введем обозначения

$$D = \frac{U - c_0}{\alpha}; \quad F = \kappa \sqrt{\frac{35}{\alpha\delta}}. \quad (11)$$

Тогда

$$a = 3C = \frac{2}{13}F; \quad b = 6A = \frac{5}{3}D;$$

$$c = 6B = \frac{8}{39}DF,$$

и выражение, знак которого определяет существование корней у кубического уравнения, можно привести к виду

$$Q = \frac{D}{3^6 13^4} (2^6 3^2 F^4 + 3 \cdot 13^2 \cdot 47 D F^2 + 5^3 13^4 D^2). \quad (12)$$

Из соотношений (11), (12) следует, что знак Q определяется знаком D , так как выражение в скобках всегда положительно.

Таким образом, для уравнения (10) $D > 0$ соответствует наличию одного корня, $D = 0$ – трем действительным корням, по меньшей мере два из которых равны, $D < 0$ – трем различным действительным корням.

Поскольку существование солитона как решения уравнения (9) определяется наличием двух равных корней у кубического уравнения (10), то из формул (11) следует, что солитон может существовать только при $U = c_0$. Это решение было построено в работе [1].

Определяющим для существования солитонного решения у исходного уравнения, как известно [1, 2, 5], является знак параметра при третьей производной искомой функции, в нашем случае это κ .

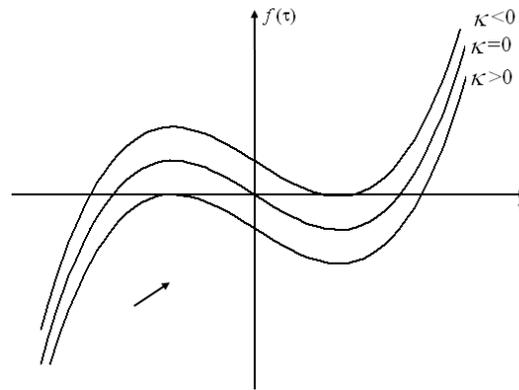


Рис. 4. Динамика параболы $f(\tau)$ при переходе κ через 0

Если схематично представить динамику параболы $f(\tau)$ (10) при переходе κ через ноль, то получится следующая картина (см. рис. 4). Для второй параболы движение будет зеркально симметричным относительно $\tau = 0$. Ограниченное решение ищем в тех интервалах, где $f(\tau) > 0$, и сам интервал конечен [5].

Решение, представимое через кноидальные функции, уравнение (9) допускает в случае наличия у кубического уравнения (10) трех различных действительных корней. Как следует из соотношений (11), это возможно только при $U < c_0$.

Нанесем график

$$U = c_0 = 1 - \frac{72\kappa^2}{169\delta}$$

на рис. 1 (рис. 5). Мы видим, что полученная в результате исследований линеаризованных ДС по аналогии с [4] область возможного существования солитонного решения (VI на рис. 3, [2]) включает линию, на которой построено точное решение нелинейной задачи в виде солитона [1], и разность между границей, определенной по линеаризованной ДС, и границей, определяющей область существования солитона и кноидальной волны, по абсолютной величине составляет порядка $0.074 \frac{\kappa^2}{\delta}$.

Таким образом, внутри параболы $U = c_0$ (рис. 5) существует решение, имеющее структуру кноидальной волны, на самой параболе – солитонное решение, выше (вне) параболы ограниченное решение уравнения (9) не существует.

2. В принятой постановке задачи [1] из полученного в силу введенного обезразмеривания соотношения $9C^2 = 1$ можем записать справедливое для изгибно-гравитационного солитона равенство

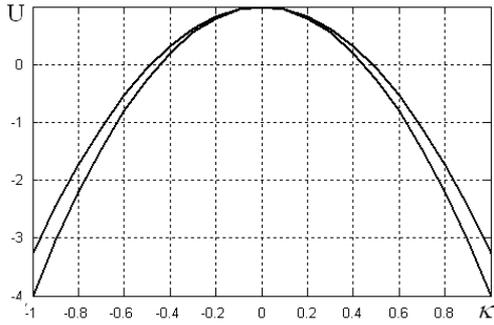


Рис. 5. Сравнение парабол $U = c_0$ (верхняя) и

$$U = 1 - \frac{\kappa^2}{2\delta}$$

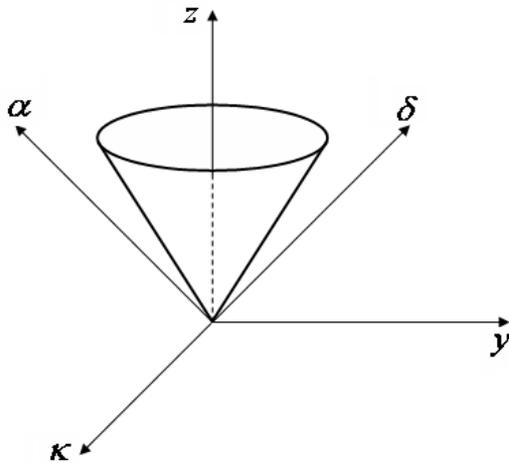


Рис. 6. Зависимость параметров α, β, κ для изгибно-гравитационного солитона

$$\frac{140}{169}\kappa^2 = \alpha\delta.$$

Если построить такую поверхность, получим эллиптический (почти круговой) конус, у которого для сечения, перпендикулярного оси конуса, расстояние от сечения до начала координат равно малой оси эллипса, образованного в этом сечении (рис. 6). В пространстве параметров (α, δ, κ) осью этого конуса является прямая $\alpha = \delta$. Таким образом, это поверхность, которая определяет взаимосвязь основных физических параметров задачи (две дисперсии и нелинейность) в случае существования у рассматриваемого уравнения солитонного решения.

3. Проведем на плоскости (U, κ) (рис. 1) линию

$$U = c_0 = 1 - \frac{72}{169} \frac{\kappa^2}{\delta},$$

на которой существует солитонное решение уравнения (9) [1, 2], и построим цилиндрическую поверхность с такой направляющей, перпендикулярную этой плоскости. Она пересечет плоскость (7) и параболическую поверхность (6). Участок построенной цилиндрической поверхности в промежутке между поверхностями (6) и (7) как раз и даст область устойчивости солитонного решения в пространстве параметров и величин, определяющих устойчивость ДС. Аналогично решение в виде кноидальной волны в области его существования $U < c_0$ также должно быть устойчивым в пространстве между поверхностями (6) и (7).

4. Очевидно, решение в виде кноидальной волны легче всего построить для $\kappa = 0$. Уравнение (9) при этом имеет вид

$$3P\left(\frac{d\tau}{d\xi}\right)^2 = \pm\tau^3 \pm 6A\tau,$$

так что

$$f(\tau) = \pm\tau\left(\tau - \sqrt{-\frac{5}{3}D}\right)\left(\tau + \sqrt{-\frac{5}{3}D}\right).$$

Решение рассматриваемого уравнения, используя кноидальные функции, можем представить в следующем виде:

$$u(x - Ut) = \frac{5}{3\alpha}(U - c_0)cn^4\left((x - Ut)\sqrt[4]{\frac{c_0 - U}{84\delta}}, s\right).$$

Мы получили, что в случае уравнивания дисперсионных сил, учитываемых в данной модели, – дисперсии жидкости, инерции ледяной пластины и дисперсии за счет геометрически нелинейного прогиба пластины, т. е. при $\kappa = 0$, – исходное уравнение имеет решение, которое можно записать в виде кноидальной волны. Рассмотрев аналогично [5] предел последнего выражения при стремлении U к c_0 для $\kappa > 0$ и $U < c_0$, приходим к существованию в малой окрестности параболы решения, представимого через гармоническую функцию (синус), которое на самой параболе обращается в константу.

Уравнение (9) имеет решение типа кноидальной волны в двух интервалах, симметричных относительно нуля. Мы уже упоминали о том, что корни уравнений (10) отличаются только знаками. Обозначив, например, их значения $\tau_1 = a$, $\tau_2 = b$, $\tau_3 = c$, можно показать, что решения в виде кноидальных волн в интервалах, где кубические параболы имеют положительные значения, совпадают. В нашем конкретном случае эти симметричные интервалы имеют общую точку, $\tau = 0$.

При выводе уравнения (3) и для получения его решений применялись математически строгие преобразования, правомерность которых основана на предположении о непрерывности и дифференцируемости используемых функций, что обеспечивает сходимость соответствующих функциональных рядов и соответствует физике рассматриваемого явления. Возможно, существуют замены и ряды, которые действительно могут привести к построению предполагаемых в [4] солитоноподобных решений в указанных областях.

5. При выводе уравнения (3) дважды производилось интегрирование. Уравнение вида

$$Au_{xx} + B(uu_x)_x + Cu_{xxxx} + u_{xxxxx} = 0$$

последовательным интегрированием при определенных условиях приводится к уравнениям

$$Au_x + Buu_x + Cu_{xxx} + u_{xxxx} = 0,$$

$$Au + \frac{1}{2}Bu^2 + Cu_{xx} + u_{xxx} = 0.$$

Если рассмотреть соответствующие динамические системы, найти их стационарные точки и линеаризовать эти ДС в окрестности соответствующих точек, мы получим, что для первых двух уравнений стационарных состояний имеется бесконечно много, поскольку значение первой координаты соответствующей точки ФП может быть совершенно произвольным. Далее, набор собственных чисел ДС для этих уравнений включает $\lambda = 0$, причем кратность этого корня совпадает с количеством возможных интегрирований соответствующего уравнения. Последнее же уравнение (которое также возможно проинтегрировать, но для этого его уже необходимо домножить на u_x) имеет только два стационарных состояния, и спектр его ДС совпадает со спектрами ДС первых двух уравнений, за исключением наличия нулевых корней в этих спектрах. Отметим, что здесь речь идет о собственных значениях линеаризованных систем уравнений, а не матриц Якоби для нелинейных систем дифференциальных уравнений. Однако уже можно сказать, что множества S_a у этих уравнений не совпадают, и это необходимо учитывать при анализе исходной задачи с помощью матрицы устойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована динамическая система, соответствующая обобщенному КдВ, которое описывает распространение длинных нелинейных изгибно-гравитационных волн в море, покрытом сплошным льдом. Построены области устойчивости данной системы в пространстве параметров, определяющих физические характеристики рассматриваемого явления. В случае уравнивания дисперсионных сил, учитывающих дисперсию жидкости и инерции ледяной пластины, с одной стороны, и дисперсию геометрически нелинейного прогиба, с другой, построено решение обобщенного уравнения КдВ в виде кноидальных волн.

Кроме того, установлено, что зависимость между двумя параметрами, характеризующими дисперсию, и параметром, характеризующим нелинейность, описывается конической поверхностью.

1. Ткаченко В. А., Яковлев В. В. Нелинейно-дисперсионная модель трансформации поверхностных волн в прибрежной зоне моря, покрытой льдом // Прикладна гідромеханіка.– 1999.– **1(73)**, N3.– С. 55-64.
2. Гончаренко Т. Б., Яковлев В. В. Дослідження сталих нелінійних згинно-гравітаційних хвиль в морі, вкритому суцільною кригою // Прикладна гідромеханіка.– 2005.– **7(79)**, N2.– С. 3-7.
3. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф.– М.: Мир, 1984, **2**.– 267 с.
4. Ильичев А.Т., Марченко А. В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // МЖГ.– 1989.– N1.– С. 88-95.
5. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах.– М.: Мир, 1983.– 136 с.