ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2010. Том 12, N 1. С. 68 – 75

УДК 532.59

СТАЦІОНАРНИЙ РУХ ТОЧКОВОГО ВИХОРА В ШАРІ СКІНЧЕНОЇ ТОВЩИНИ СТРАТИФІКОВАНОГО СЕРЕДОВИЩА, ОБМЕЖЕНОГО ТВЕРДИМИ ГРАНИЦЯМИ

О. Г. СТЕЦЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 16.06.2009

Розв'язана лінійна задача про вимушений стаціонарний рух двовимірного точкового вихора в шарі скінченої товщини лінійно стратифікованої рідини. Розв'язок одержано у вигляді квадратур. Показано, що зі зростанням градієнта густини кінематична картина течії в околі і далі за вихором може істотно змінюватись. Гідродинамічна складова сили опору, обумовлена стратифікацією, з її посиленням має тенденцію швидко зростати.

Решена линейная задача о вынужденном стационарном движении двумерного точечного вихря в слое конечной толщины линейно стратифицированной жидкости. Решение получено в виде квадратур. Показано, что с ростом градиента плотности кинематическая картина течения в окрестности и далее за вихрем может существенно изменяться. Гидродинамическая составляющая силы сопротивления, обусловленная стратификацией, с её усилением имеет тенденцию быстро возрастать.

A linear problem of the forced stationary movement of a two-dimensional point vortex in the layer of finite thickness of linear stratified fluid is solved. The solution is obtained in the squaring form. It is shown that a kinematic flow pattern in the neighbourhood of the vortex and outside thereof can substantialy change while a density gradient is increased. A hydrodynamic constituent of the resistance force determined by a stratification tends to increase rapidly.

ВСТУП

Результати вивчення стаціонарних рухів двовимірних горизонтально орієнтованих точкових вихорів є базовими при розв'язанні задач про рух плоских крилових профілів довільної форми. Бібліографія виконаних у цьому напрямку робіт з відповідним аналізом наведена у [1]. Початок дослідження стратифікованих середовищ у задачах даного напряму пов'язаний з фундаментальними роботами Кочина М.Є. [2, 3], де розглянуті задачі про рух вихроджерела біля границі розділення напівнескінченних однорідних середовищ різної густини (в роботі [2] верхній шар мав нульову густину). В подальшому задачі про рух вихорів, вихроджерел та плоских профілів виконувались для схем шарової стратифікації [4]. Найбільш повна постановка задачі про рух вихора для n-шарової схеми стратифікації здійснена в [5].

Дослідження руху двовимірного точкового вихора у необмеженому середовищі з неперервною стратифікацією в лінійній постановці вперше виконано в роботі [6] для випадку рівномірного вимушеного руху в середовищі з лінійним профілем стратифікації. Окремі дослідження виконані також і для вільних рухів двовимірних вихорів. Так, для випадку баротропної рідини, коли густина середовища змінюється по закону $\rho(z) = \rho_0 z^2$, та за умови, що характерний період Брента-Вяйсяля значно більший характерного часу адвекційного переносу, обумовленого вихором, і можна знехтувати генерацією внутрішніх хвиль, розглянуті задачі про поведінку одиничного вільного вихора [7, 8] та про взаємодію n вільних вихорів [9]. Показано, що одиночний вихор має власну рушійну силу у поперечному до напрямку дії сили тяжіння напрямку. На відміну від випадку однорідної рідини лише задача про взаємодію двох вихорів є інтегрованою. В цих задачах рушійна сила вихора є логарифмічно сингулярною при прямуванні поперечного перетину ядра вихора до нуля, тому цей розмір повинен бути скінченим.

Загальна постановка лінійної задачі про стаціонарний рух точкового вихора у довільному стійко стратифікованому середовищі виконана у [10]. В цій роботі виведено рівняння, яке описує збурений рух середовища, викликаний рухом точкового вихора. Воно в явній формі містить характеристики вихора, що дозволяє при розв'язанні таких задач ефективно застосовувати методи інтегральних перетворень. З використанням цього підходу в роботах [11–13] розв'язані задачі про кінематику і динаміку руху точкового вихора (а в [12] вихроджерела) в нескінченому лінійно стратифікованому середовищі, біля стрибка густини та біля горизонтальної твердої стінки. Було показано, що в

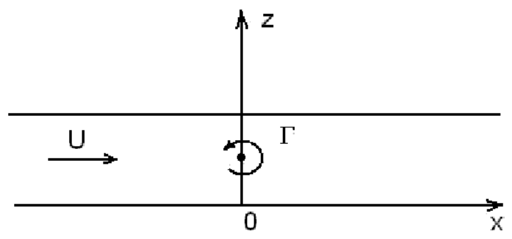

Рис. 1. Схема течії

лінійних задачах має місце аналог інтегралу Бернуллі для однорідного середовища з заміною значення густини на її локальне значення, відповідне горизонту руху вихора. Це дозволило одержати вирази для визначення складових гідродинамічної сили, що діє на вихор, у вигляді, аналогічному випадку однорідного середовища. Результати виконаних у роботах [10–13] досліджень показали, що слабка стратифікація мало змінює кінематику обтікання вихора і слабо впливає на величину підйомної сили, що діє на вихор. Однак, істотним є те, що наявність стратифікації обумовлює появу продольної сили опору, яка має тенденцію швидко зростати з посиленням градієнта густини.

В даній роботі розглянута задача про вимушений рівномірний рух горизонтально орієнтованого точкового вихора, який знаходиться в лінійно стратифікованому ідеальному середовищі між двома твердими горизонтальними границями. Скінченість товщини шару дозволяє розглянути схеми з більшими градієнтами густини і, таким чином, оцінити вплив цього фактора на характер збурень (як кінематичних, так і динамічних), внесених вихором у навколишнє середовище.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається рівномірний горизонтальний рух плоского точкового вихора інтенсивності Γ у шарі стратифікованої рідини скінченої товщини H на відстані h від нижньої границі. Схема течії зображена на рис. 1. Система координат вибрана так, що вона рухається разом з вихором, причому додатній напрямок горизонтальної вісі x направлено в сторону, протилежну напрямку вектора швидкості руху, а вісь z, початок якої знаходиться на твердій границі нижче вихора, направлена вгору. Вводиться збурена функція течії $\psi(x,z)$ така, що

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial z}\,; \qquad w = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Тоді лінеаризоване рівняння, яке описує стаціонарний рух такого середовища в наближенні Бусинеска (спрощений варіант, коли в системі рівнянь Ейлера змінність незбуреної густини середовища $\rho_0(z)$ враховується лише у рівнянні для збуреної густини $\rho(x,z)$), має вигляд [10]

$$\Delta\psi + \frac{N^2}{U^2}\psi = -\Gamma\delta(x)\delta(z-h)\,. \qquad (1)$$

Тут $N(z)$ – частота Брента-Вяйсяля, Δ – оператор Лапласа,

$$N(z) = \left(-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,;$$

а $\delta(x),\ \delta(z-h)$ – дельта-функції Дірака.

У безрозмірній формі, де в якості масштабу довжини береться H, а в якості масштабу для ψ і Γ – UH, рівняння (1) набирає вигляду

$$\Delta\psi + \alpha^2\psi = -\Gamma\delta(x)\delta(z-h)\,, \qquad (2)$$

де $\alpha = NH/U$.

Граничні умови задачі випливають з умов непроникності границь

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \qquad \text{при} \qquad z=0 \quad i \quad z=1 \qquad (3)$$

і умови випромінювання

$$\psi \to 0 \qquad \text{при} \quad x \to -\infty\,. \qquad (4)$$

2. РУХ ВИХОРА В ШАРІ ЛІНІЙНО СТРАТИФІКОВАНОЇ РІДИНИ

Для випадку лінійної стратифікації, коли незбурений профіль густини середовища задається виразом

$$\rho_0(z) = \rho_{00}(1-\beta z), \quad \beta > 0\,,$$

$N(z) = \sqrt{\beta g} = \text{const}$ і, отже, $\alpha = \text{const}$. Саме така схема стратифікації і є предметом подальшого дослідження.

Розв'язок задачі (2)–(4) знаходиться у вигляді інтегрального перетворення Фур'є

$$\psi(x,z) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\bar\psi(k,z)dk\,. \qquad (5)$$

Застосування перетворення (5) до рівняння (2) і граничної умови (3) приводить до звичайного диференціального рівняння відносно функції-образу $\bar\psi(k,z)$:

$$\bar\psi'' + (\alpha^2 - k^2)\bar\psi = \delta(z-h) \qquad (6)$$

з граничними умовами

$$\bar{\psi} = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0 \quad i \quad z = 1. \qquad (7)$$

Використання методу варіації сталих дозволяє одержати розв'язок для $\bar{\psi}(k, z)$ у вигляді

$$\bar{\psi}(k, z) = C_1 e^{Mz} + C_2 e^{-Mz} + \\ + \frac{1}{2M} H(z-h) \left[e^{M(z-h)} - e^{-M(z-h)} \right], \qquad (8)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, $M = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$, а $H(z-h)$ – одинична функція Хевісайда. Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаються з граничних умов (3). В результаті для $\bar{\psi}(k, z)$ має місце розв'язок:

а) в області $z > h$

$$\bar{\psi}(k, z) = \frac{1}{2M} \left[e^{M(z-h)} - e^{-M(z-h)} - \frac{A_1}{e^M - e^{-M}} \right],$$

де

$$A_1(k, z) = e^{M(z+1-h)} - e^{M(z-1+h)} - \\ - e^{-M(z-1+h)} + e^{-M(z+1-h)};$$

б) в області $0 \le z \le h$

$$\bar{\psi}(k, z) = \frac{A_2}{2M\left(e^M - e^{-M}\right)},$$

де

$$A_2(k, z) = e^{M(z-1+h)} + e^{-M(z-1+h)} - \\ - e^{M(z+1-h)} - e^{-M(z+1-h)}.$$

Розв'язок для $\bar{\psi}(k, z)$ можна представити у єдиній для всієї області середовища формі

$$\bar{\psi} = \frac{1}{2M} \left[e^{-M(z+h)} - e^{-M|z-h|} + \frac{A}{e^M - e^{-M}} \right], \qquad (9)$$

де

$$A(k, z) = e^{M(z-1+h)} + e^{-M(z+1+h)} - \\ - e^{M(z-1-h)} - e^{-M(z+1-h)}.$$

Тоді розв'язок для $\psi(x, z)$, враховуючи парність $\bar{\psi}(k, z)$ по k, представляється у вигляді

$$\psi(x, z) = \frac{\Gamma}{4\pi} Re \int_0^\infty \frac{\cos(kx)}{M} \times \\ \times \left[e^{-M|z-h|} - e^{-M(z+h)} - \frac{A}{e^M - e^{-M}} \right] dk. \qquad (10)$$

Підінтегральна функція одержаного розв'язку має полюси в точках, де

$$e^M - e^{-M} = 0 \qquad \text{та} \quad M = 0.$$

Другий з цих полюсів $k_2 = \alpha$ одночасно є і точкою розгалуження. Полюси першого рівняння можуть бути дійсними лише в області $0 < Rek \le \alpha$. Справді, в цьому випадку це рівняння набирає вигляду

$$e^{iM_*} - e^{-iM_*} = 0,$$

де $M_* = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$, і має розв'язки

$$k_n = \sqrt{\alpha^2 - (\pi n)^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Як видно, дійсними полюси k_n можуть бути лише за умови $\alpha > \pi$. Враховуючи, що для реальної стратифікації в морях і океанах $N = 10^{-2} \div 10^{-5}\text{с}^{-1}$, для шарів рідкого середовища з приблизно лінійною стратифікацією, товщина яких складає десятки – сотні метрів, в діапазоні реальних швидкостей руху підводних об'єктів 1–30 м/с така умова не виконується. Її виконання може мати місце для особливих середовищ з сильною стратифікацією, коли частота Брента-В'яйсяля N є величиною порядка одиниці. В таких задачах необхідно використовувати повну форму наближення Бусинеска у системі рівнянь Ейлера.

Надалі розглядаються такі режими рухів, при яких підінтегральна функція у виразі (10) не має дійсних полюсів k_n. В цьому випадку розв'язок задачі знаходиться прямим інтегруванням з врахуванням наявності на дійсній вісі полюса і одночасно точки розгалуження $k = \alpha$. Неважко переконатись (розкладаючи підінтегральну функцію в ряд в околі точки розгалуження), що цей окіл не дає вкладу у відповідний інтеграл, оскільки значення підінтегральної функції в ньому прямує до нуля. Отже, для знаходження розв'язку задачі буде використовуватись безпосереднє інтегрування виділеної дійсної частини розв'язку (10).

Перші дві складові підінтегральної функції в (10) описують рух вихора біля твердої стінки у напівнескінченому лінійно стратифікованому середовищі (у вибраній системі координат – це нижня тверда границя). З відповідного розв'язку, отриманого в роботі [13], після заміни там лінійного масштабу – віддалі центра вихора від стінки на товщину шару даної задачі – має місце таке його представлення, яке вже задовольняє умові випромінювання:

$$\psi_{\text{тс}}(x, z) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 + (z-h)^2}{x^2 + (z+h)^2} \right] + \psi_\alpha + \Delta_\psi \right\},$$

де

$$\psi_\alpha = 4H(x) \int_0^\alpha \frac{1}{M_*} \sin(M_* x) \sin(kh) \sin(kz) dk,$$

$$\Delta_\psi = 2\int_0^{k_*} \frac{e^{-k|x|}}{M}\sin(kh)\sin(kz)dk -$$
$$-2\int_\alpha^{k_*} \frac{e^{-M|x|}}{M}\sin(kh)\sin(kz)dk.$$

Тут $H(x)$ – одинична функція Хевісайда, а k_* – достатньо велике значення, при якому з заданою точністю виконується умова $M \approx k$.

Складова розв'язку (10) ψ_1, яка відповідає дробовій функції у підінтегральному виразі, знаходиться безпосереднім інтегруванням вздовж дійсної вісі k:

$$\psi_1(x,z) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\int_0^\infty \frac{A\cos(kx)}{M\left(e^M - e^{-M}\right)}dk.$$

Для виконання умови випромінювання при $x \to \infty$ для цієї складової необхідно скоротити інтервал інтегрування на інтервал $0 \le k \le \alpha$. Це відповідає відомій процедурі присвоєння для вказаного інтервалу хвильових чисел у виразі ψ_1 замість x значення $-x$ і віднімання одержаного виразу від розв'язку у всій області. В результаті отримаємо

$$\psi_1(x,z) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\int_\alpha^\infty \frac{A\cos(kx)}{M\left(e^M - e^{-M}\right)}dk.$$

Отже, для збуреної функції течії одержується такий розв'язок

$$\psi(x,z) = \psi_{\text{тс}}(x,z) + \psi_1(x,z)\,. \qquad (11)$$

Складові збуреної швидкості середовища представляються у вигляді

$$u(x,z) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left(u_o + \Delta_u + u_\alpha + u_1\right), \qquad (12)$$

$$w(x,z) = \frac{\Gamma}{2\pi}\left(w_o + \Delta_w + w_\alpha + w_1\right], \qquad (13)$$

де

$$u_0 = \frac{z-h}{x^2+(z-h)^2} - \frac{z+h}{x^2+(z+h)^2},$$
$$\Delta_u = 2\int_0^{k_*} e^{-k|x|}\sin(kh)\cos(kz)dk -$$
$$-\int_\alpha^{k_*} \frac{k}{M}e^{-M|x|}\sin(kh)\cos(kz)dk,$$
$$u_\alpha = 4H(x)\int_0^\alpha \frac{k}{M_*}\sin(M_*x)\cos(kz)\sin(kh)dk,$$

$$u_1 = \int_\alpha^\infty \frac{B}{\left(e^M - e^{-M}\right)}\cos(kx)dk,$$
$$w_0 = \frac{x}{x^2+(z-h)^2} - \frac{x}{x^2+(z+h)^2},$$
$$\Delta_w = 2\int_\alpha^{k_*} e^{-M|x|}\sin(kh)\sin(kz)dk -$$
$$-2\int_0^{k_*} e^{-k|x|}\sin(kh)\sin(kz)dk,$$
$$w_\alpha = 4H(x)\int_0^\alpha \cos(M_*x)\sin(kz)\sin(kh)dk,$$
$$w_1 = -\int_\alpha^\infty \frac{Ak}{M\left(e^M - e^{-M}\right)}\sin(kx)dk,$$

$$B(k,z) = e^{M(z-1+h)} - e^{-M(z+1+h)} -$$
$$-e^{M(z-1-h)} + e^{-M(z+1-h)}.$$

3. ГІДРОДИНАМІЧНА СИЛА, ЩО ДІЄ НА РУХОМИЙ ВИХОР

Для визначення гідродинамічної сили реакції (горизонтальна R_x та вертикальна R_z складові) середовища на стаціонарний рух вихора до рідкого об'єму рідини, який знаходиться всередині кола c нескінчено малого радіуса, що оточує центр вихора, застосовується теорема про зміну кількості руху [14]. Тоді, як показано в роботах [11, 12], мають місце такі безрозмірні вирази для складових сили (в якості масштабів для сили взято $\rho_{00}U^2H$, а для швидкості – U):

$$R_x = -\oint_c \left[\frac{1}{2}(u^2+w^2)\cos\theta + uw\sin\theta\right]ds -$$
$$-\oint_c (u\cos\theta + w\sin\theta)ds, \quad (14)$$

$$R_z = \oint_c \left[\frac{1}{2}(u^2-w^2)\sin\theta - uw\cos\theta\right]ds +$$
$$+\oint_c (u\sin\theta - w\cos\theta)ds. \quad (15)$$

На колі нескінчено малого радіуса, центр якого співпадає з центром вихора ($x \to 0, z \to h$), з наведених виразів для $u(x,z)$ і $w(x,z)$ одержується наступне представлення

$$u(x,z) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{z-h}{x^2+(z-h)^2} + \Delta_{u0} + u_{10}\right], \quad (16)$$

$$w(x,z) = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{x}{x^2+(z-h)^2} + w_{\alpha 0}\right]. \quad (17)$$

Тут

$$\Delta_{u0} = \int\limits_{\alpha}^{k_*} \sin(2kh)dk -$$

$$- \int\limits_{\alpha}^{\sqrt{k_*^2-\alpha^2}} \sin(2h\sqrt{k^2-\alpha^2})dk - \frac{1}{2h},$$

$$u_{10} = \int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{2Mh}-e^{-2Mh}}{e^{2M}-1}dk,$$

$$w_{\alpha 0} = \alpha - \frac{1}{2h}\sin(2h\alpha).$$

Підстановка представлень (16), (17) у вирази (14), (15) дає наступні співвідношення для складових гідродинамічної сили:

$$R_x = \frac{\Gamma^2}{2\pi}\left[\alpha - \frac{1}{2h}\sin(2h\alpha)\right], \quad (18)$$

$$R_z = -\Gamma + \frac{\Gamma^2}{2\pi}\left(\Delta_{u0} + u_{10}\right). \quad (19)$$

4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ

За результатами проведених теоретичних досліджень виконані чисельні експерименти з побудови картини обтікання вихора та обчислення гідродинамічної сили, що на нього діє. Картина обтікання представляється побудовою заданих значень сумарної безрозмірної лінії течії $\Psi(x,z) = z + \psi(x,z)$ в діапазоні $-5 \le x \le 20$. При цьому сама функція $\Psi(x,z)$ змінюється від нуля на нижній границі до одиниці на верхній. Розрахунки виконані для чотирьох значень інтенсивності вихора (Г: 1 ; -0.2 ; -1 ; -4), чотирьох горизонтів руху (h : 0.1 ; 0.2 ; 0.4 ; 0.5) і двох значень параметра α : 0.1 ; 1.0. Використаний тут діапазон зміни величини α для швидкості руху вихора порядку метрів – десятків метрів та товщини шару середовища порядку сотень метрів відповідає діапазону зміни $N - 0.01 \div 0.1$ с$^{-1}$. Таке розширення діапазону зміни парметра α можливе в рамках використаної тут схеми наближення Бусинеска, зважаючи на скінченість товщини шару середовища. Воно

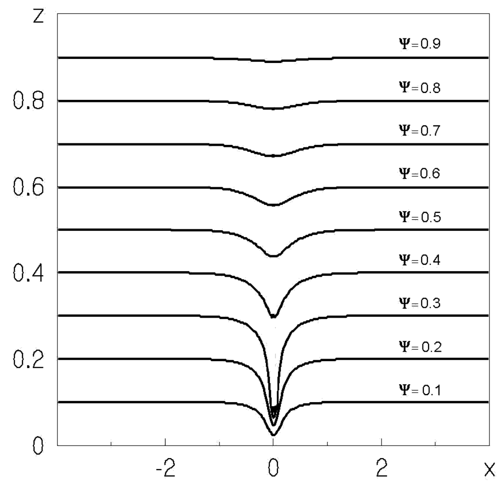

Рис. 2. Картина течії при $\Gamma = 1, h = 0.1, \alpha = 0.1$

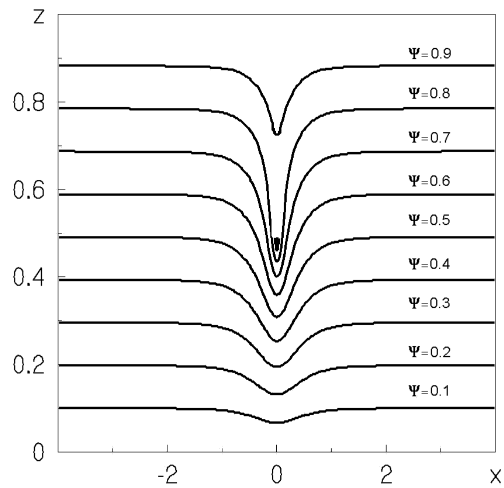

Рис. 3. Картина течії при $\Gamma = 1, h = 0.5, \alpha = 0.1$

дозволяє, зате, виявити ті значення параметра α, з яких починається помітний вплив стратифікації на кінематику обтікання вихора, а потім і на динаміку його взаємодії з потоком. На рис. 2 наведена картина течії для $\Gamma = 1, h = 0.1, \alpha = 0.1$ на ділянці $-4 \le x \le 4$. Як видно, для заданих параметрів картина течії має практично симетричний відносно центра вихора вигляд, що свідчить про вкрай слабкий вплив стратифікації для заданого α. Зміна горизонту руху вихора при незмінності інших параметрів змінює геометрію картини його обтікання, не змінюючи її симетричність. Це видно з рис. 3, де порівняно з рис. 2 величина h має значення $h = 0.5$. Про зміну обтікання вихора з посиленням стратифікації середовища можна судити по

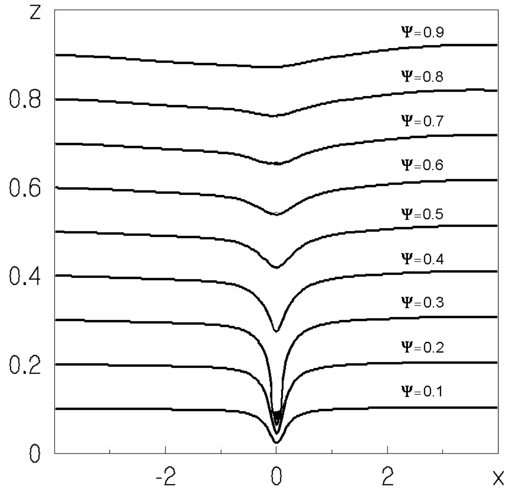

Рис. 4. Картина течії при $\Gamma = 1, h = 0.1, \alpha = 1$

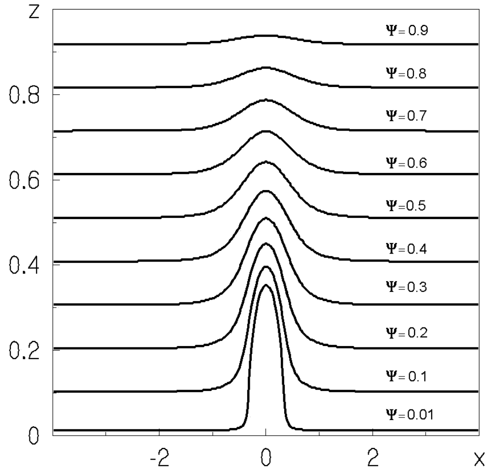

Рис. 6. Картина течії при $\Gamma = -4, h = 0.1, \alpha = 0.1$

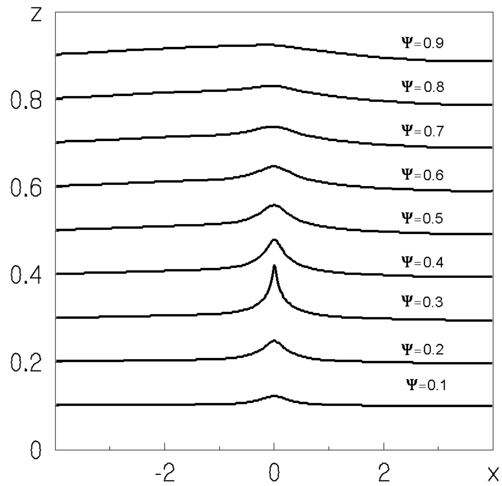

Рис. 5. Картина течії при $\Gamma = -0.2, h = 0.4, \alpha = 1$

рис. 4, де представлена картина обтікання вихора для $\Gamma = 1, h = 0.1$ і $\alpha = 1$. Як видно, в даному випадку вже помітний вплив стратифікації на характер картини обтікання. В ближній області має місце асиметрія розподілу ліній течії, яка особливо проявляється у верхній частині потоку. Очевидно, що зі зростанням α відмічена особливість буде посилюватись. На рис. 5–7 побудовані картини течії для вихорів з $\Gamma < 0$. На першому з них режим течії відповідає умові $|\Gamma|/\pi U - h < 0$, а на рис. 6 і 7 – умові $|\Gamma|/\pi U - h > 0$. Як видно, для розглянутих режимів процес формування атмосфери вихорів аналогічний випадку однорідного середовища, коли формуються власна атмосфера рухомого вихора (рис. 5), або половина атмосфери, відповідної руху вихорової пари в необмеженому середовищі (рис. 6 і 7) [13, 15]. В останньому випадку площа атмосфери вихору значно більша, ніж ізольована атмосфера, а вплив стратифікації такий самий, як і при $\Gamma > 0$, з заміною в ближній за вихором області підйому ліній течії на їх опускання. Оскільки при $\alpha = 1$ на рис. 6 має місце помітна асиметрія течії в околі вихора, представляє інтерес простежити за еволюцією цієї течії в дальній області за вихором. Для цього була побудована відповідна картина течії на ділянці $5 \leq x \leq 20$. З представленої на рис. 8 картини обтікання видно, що хоч збурення, викликані стратифікацією, в області за вихором достатньо великі і можуть складати величину порядку відсотків товщини шару, вони затухають зі збільшенням відстані від нього, що і має бути у відповідності з умовою $\alpha < \pi$, для якої і одержано розв'язок задачі. Розрахунки складових гідродинамічної сили представлені на рис. 9 і 10 у вигляді R_x/Γ^2 для горизонтальної складової (хвильовий гідродинамічний опір) і додатку до вертикальної складової (під'йомної сили), обумовленого наявністю стінок і стратифікації. Одержаний характер зміни складових гідродинамічної сили свідчить, що наявність істотної стратифікації помітно впливає на величину горизонтальної складової сили і слабо впливає на величину під'йомної сили, хоча цей вплив має місце і він більший біля верхньої границі. На величину R_z, як і у однорідній рідині, головним чином впливає наявність горизонтальних границь. Цікаво, що величина R_x в інтервалі зміни $0 < \alpha < 0.4$ практично не зале-

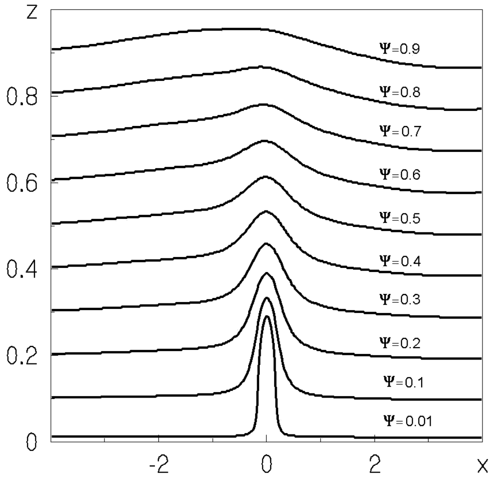

Рис. 7. Картина течії при $\Gamma = -1, h = 0.2, \alpha = 1$

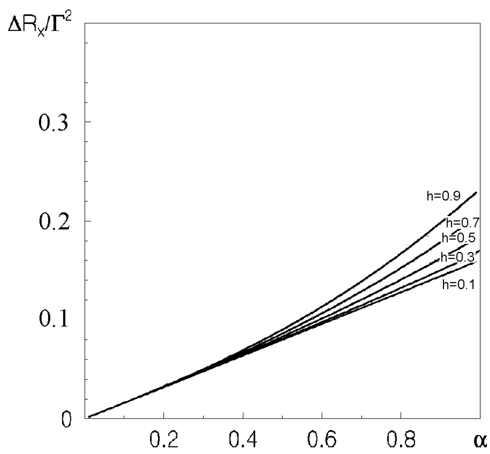

Рис. 9. Залежність R_x/Γ^2 від α

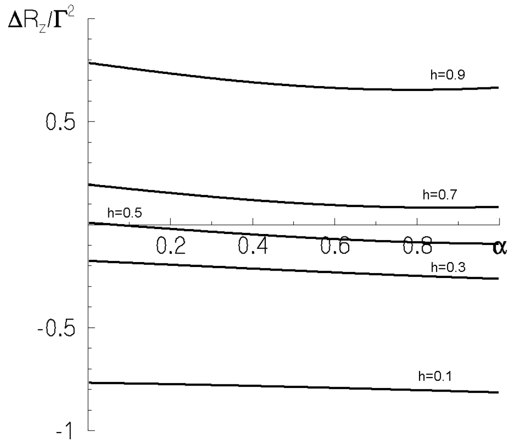

Рис. 10. Залежність ΔR_z від α

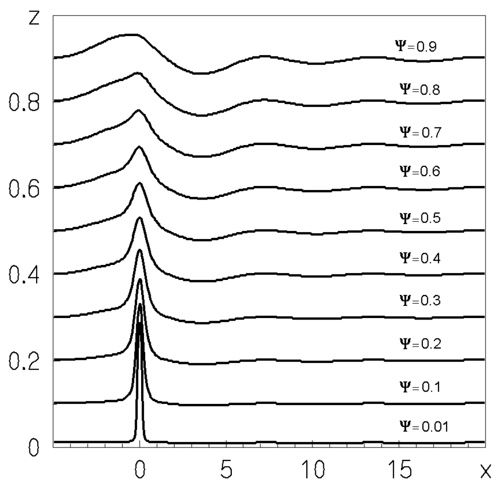

Рис. 8. Картина течії при $\Gamma = -1, h = 0.2, \alpha = 1$

жить від h. Помітна зміна характеру цієї залежності від h спостерігається при $\alpha > 0.5$, де, можливо, вже починає відчуватись неточність спрощеної схеми Бусинеска. Максимальних значень по модулю величина ΔR_z набирає при наближенні до будь якої із горизонтальних границь, при цьому для різних границь вона має різні знаки. З представлених графіків видно, що для випадку однорідного середовища ($\alpha = 0$) $R_x = 0$, а на горизонті $h = 0.5$ при цьому і $\Delta R_z = 0$, що повністю відповідає відомим класичним результатам.

ЗАКЛЮЧЕННЯ

Виконані дослідження дозволили дослідити вплив посилення стратифікації на кінематику і динаміку обтікання двовимірного точкового вихора потоком такого середовища. Скінченість товщини стратифікованого шару дозволила навіть у рамках спрощеної схеми наближення Бусинеска розширити діапазон зміни частот Брента-Вяйсяля N задачі. В проведених розрахунках цей діапазон становив $0.1 \div 1$. Розрахунки картин течій в околі і за вихором показали, що посилення стратифікації може істотно впливати на кінематику течії та на горизонтальну складову гідродинамічної сили (силу опору). В околі вихора має місце істотна асиметрія ліній течії; зі зростанням віддалі за вихором відповідні збурення затухають, однак, картина течії в цілому помітно змінюється. Сила опору з посиленням стратифікації швидко зростає.

При наявності двох горизонтальних границь положення горизонту істотно впливає на величину підйомної сили, що діє на вихор, в той час як стратифікація слабо впливає на цю величину. Характер формування атмосфери вихора визначається знаком і величиною його інтенсивності та віддаллю від ближньої із границь. Для вихорів з $\Gamma > 0$ завжди має місце наявність ізольованої атмосфери. У випадку вихорів з $\Gamma < 0$ можливі ситуації як наявності навколо вихора ізольованої атмосфери, так і наявності половини однієї спільної атмосфери, яка існує при русі вихрової пари, утвореної розглянутим вихором та симетричним до нього відносно нижньої границі з інтенсивністю протилежного знаку. Реалізація цих ситуацій з високою точністю визначається знаком величини $|\Gamma|\pi U - h$. Якщо $|\Gamma|\pi U - h < 0$, то, як і при $\Gamma > 0$, вихор має свою ізольовану атмосферу. Якщо ж режим руху такий, що виконується умова $|\Gamma|\pi U - h > 0$, то реалізується ситуація з утворенням значно більшої за площею половини атмосфери відповідної вихрової пари з наявністю двох критичних точок.

Виявлені особливості впливу стратифікації на кінематику та динаміку обтікання вихорів обумовлюють необхідність розв'язання задачі у загальній постановці наближення Бусинеска у системі рівнянь Ейлера.

1. *Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович А.В.* Линейная теория поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники, МЖ, М.: ВИНИТИ.– 1987.– 21.– С. 92-179.
2. *Кочин Н.Е.* О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженного в жидкость тела.– Собр. соч. М.: Л.: Из-во АН СССР: 1949, т. 2.– 105-182 с.
3. *Кочин Н.Е.* О влиянии рельефа земли на волны на поверхности раздела двух жидкостей разной плотности (статья вторая).– Собр. соч. М.: Из-во АН СССР: 1949, т. 1.– 467-477 с.
4. *Басин М.А., Шадрин И.П.* Гидродинамика крыльев вблизи границы раздела сред.– Л.: Судостроение, 1980.– 304 с.
5. *Горлов С.И.* Решение линейных задач о равномерном движении вихреисточника в многослойной жидкости // Изв.АН СССР, МЖГ.– 1995.– №31.– С. 127-132.
6. *Janowitz G.S.* Line singularities in inbounded stratified fluid // J.Fluid Mech.– 1974.– 66, 3.– P. 455-464.
7. *Arendt S.C.* Vorticity in stratified fluid I: general formulation // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.– 1993.– 68.– P. 59-83.
8. *Arendt S.C.* Vorticity in stratified fluid II: finite crjssection filaments and rings // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.– 1993.– 70.– P. 161-193.
9. *Arendt S.C.* Two-dimensional vortex dynamics in a stratified barotropic fluid // J. Fluid Mech.– 1996.– 314.– P. 139-161.
10. *Стеценко О.Г.* Лінійна задача про стаціонарний рух вихора у стратифікованому середовищі // ПГМ.– 2004.– 6(78), №1.– С. 62-68.
11. *Стеценко О.Г.* Гідродинамічна сила, що діє на плоский точковий вихор при його стаціонарному русі у стратифікованому середовищі // ДНАН України.– 2005.– №12.– С. 56-62.
12. *Стеценко О.Г.* Динаміка стаціонарного руху вихроджерела у стратифікованому середовищі // ПГМ.– 2006.– 8(80), №4.– С. 66-77.
13. *Стеценко О.Г.* Стаціонарний рух вихора біля твердої стінки у стратифікованому середовищі // ПГМ.– 2008.– 10(82), №4.– С. 58-64.
14. *Повх И.Л.* Техническая гидромеханика.– Л.: Машиностроение, 1969.– 524 с.
15. *Беляев С.Т., Краснов Ю.К.* О собственной массе сингулярной вихревой пары // ДАН СССР.– 1989.– №3.– С. 566-570.