

УДК 532.526

РІЗНОРІВНЕВІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ КОЕФІЦІЄНТА ТУРБУЛЕНТНОЇ В'ЯЗКОСТІ

В. Т. МОВЧАН, Є. О. ШКВАР

Національний авіаційний університет, Київ

Отримано 15.09.2009

Представлено нові результати математичного моделювання пристінних градієнтних турбулентних зсувних течій на основі єдиного підходу до побудови моделі турбулентної в'язкості. Розглянуто сімейство напівемпіричних моделей, які володіють різними можливостями щодо врахування складності фізичних аспектів динаміки турбулентного руху, але об'єднані єдиним принципом побудови. Наводяться результати наближено-аналітичних і чисельних розрахунків характеристик різних турбулентних прилеглих шарів. Продемонстровано можливості розробленого єдиного підходу при моделюванні ряду течій, для яких є наявними експериментальні розподіли локальних і інтегральних характеристик.

Представлены новые результаты математического моделирования пристенных градиентных турбулентных сдвиговых течений на основе единого подхода к построению модели турбулентной вязкости. Рассмотрено семейство полуэмпирических моделей турбулентности, обладающих различными возможностями по учету сложности физических аспектов динамики турбулентного движения, но объединенных единым принципом построения. Приведены результаты приближенно-аналитических и численных расчетов характеристик различных турбулентных пограничных слоев. Продемонстрированы возможности разработанного единого подхода при моделировании ряда течений, для которых известны экспериментальные распределения локальных и интегральных характеристик.

The results of mathematical modelling of wall shear flows on the base of unified approach to turbulence models constructing are presented. A family of semi-empirical models of turbulence having different possibilities to account a difficulty of physical aspects of turbulent motion dynamics together with common principle of forming is considered. The results of approximate-analytical and numerical predictions for different turbulent boundary layers are illustrated. Possibilities of developed unified approach are demonstrated for modeling of several kinds of flows with known experimental distributions of local and integral characteristics.

ВСТУП

Проблема турбулентності і на сьогодні залишається не менш гострою, ніж вона була понад сто років тому, коли її вперше відмітив О.Рейнольдс. Серед сучасних підходів до дослідження турбулентності, незважаючи на інтенсивний розвиток методів прямого чисельного моделювання та моделювання динаміки великих вихорів – концепція О. Рейнольдса все ще залишається пріоритетом [1, 2]. Незамкненість рівнянь руху в формі Рейнольдса спонукала до подальших значних експериментальних та теоретичних досліджень, які дозволили виявити ряд фундаментальних властивостей та закономірностей турбулентності, визначальних параметрів та їх взаємозв'язків. Результати експериментальних досліджень представляли собою не стільки раціональну систему знань, скільки набір емпіричних фактів, які без достатнього теоретичного базису не могли бути узагальнені, що спонукало до напрацювання напівемпіричних моделей. Перші важливі результати отримані за допомогою напівемпіричних гіпотетичних моделей алгебраїчного рівня, в яких турбулентне напруження тertia пов'язане з локальними характеристиками осередненої течії. Напівемпіричні теорії своїми витоками зобов'язані фундаментальним працям

Буссінеска (1877), Тейлора (1915, 1932), Прандтля (1911, 1925) та Кармана (1930). Вони дозволили на основі систематизації експериментальних результатів використати їх для передбачення результатів аналогічних експериментів. Оскільки математичне моделювання напівемпіричного спрямування спирається на знання структури течії, то з'ясування її стало однією з центральних проблем механіки турбулентності. Спочатку Прандтль запропонував двозонну (турбулентне ядро – ламінарний прошарок), а згодом Карман – трізонну (турбулентне ядро, буферний і ламінарний прошарки) схеми. Багаторазові експериментальні дослідження дозволили уточнити структурну схему пристінної турбулентної течії і на сьогодні вона представляється складеною з двох областей: 1) внутрішньої (пристінної) з трьома підобластями – в'язкою, перехідною і логарифмічною, та 2) слідної (зовнішньої) з підобластю дефекту швидкості і надшару переміжності. Остаточо наведена схема установилася після класичних експериментів Клаузера стосовно вихрової структури пристінної течії. Згідно цих досліджень у пристінній області турбулентність – дрібномасштабна (з короткою пам'яттю), а в зовнішній області – великомасштабна (з довгою пам'яттю). Затухання збурень у зовнішній області відбувається на віддалі, яка значно перевищує від-

даль у внутрішній області та дорівнює декільком товщинам примежового шару, отже течія у зовнішній області у значній мірі залежить від її передісторії. Вихореутворення рухаються разом з течією і приймають участь у поперечному до неї переміщенні. Виникнення додаткового турбулентного опору як результат переміщення вихровими структурами мас рідини у поперечному до течії напрямку відмітив ще Лоренц. Дрібномасштабні вихори біля поверхні мають розміри порядку в'язкої підобласті, а великомасштабні вихори зовнішньої області – порядку товщини примежового шару. Великомасштабна турбулентність суттєво залежить від геометрії меж та характеру зовнішніх впливів, тому вона різна для різних типів течій. Дрібномасштабна ж практично не залежить від вказаних факторів, але під дією дифузії та в'язкої дисипації кінетичної енергії у тепло швидко згасає. Збурення переносяться великими вихорами, завдяки яким виникає “ефект пам'яті”. У процесах переносу кількості руху, рейнольдсових напружень, кінетичної енергії пульсацій приймають участь вихори різних масштабів, проте основний внесок належить великим вихорам. Під дією конвекції, генерації, дифузії, дисипації вихори утворюються, розвиваються, розпадаються і зникають. Проте великі вихори не тільки розпадаються на більш дрібні, але вони і зростають у більш великі вихори і створюють так звані когерентні структури – великомасштабні утворення з випадковими фазами та амплітудою, але з подібними повторюваними коливаннями. Когерентні структури виявилися визначальними у розвитку турбулентного руху. Багаточисельні експериментальні дослідження вихрової структури [3–10] дозволяють представити її наступним чином: ланцюжок поздовжних вихорів, що обертаються попарно у протилежних напрямках та коливаються, щільно покриваючи усю гладку пластину. Над ними розміщена зона низькошвидкісних острівців коливання, що утворюються між двома поздовжніми вихорами і рухаються вниз за течією. Внаслідок руйнування острівців коливання або згортання їх вздовж країв утворюються вихори, які розміщені під невеликим кутом до обтічної стінки, так що віддалі від поверхні зростає по мірі просування вниз за течією. Ці вихори називаються жгутами. Взаємодія жгутів з течією над ними відбувається у такій послідовності: утворення, підйом, раптові різкі коливання та руйнування. Період від підйому до руйнування дуже малий, а тому його називають спалахами або викидами. Вважається, що явище спалаху є головним у генерації турбулентності та що воно у значній мірі визначає процес переносу між областями і ві-

діграє важливу роль у формуванні структури усєї пристінної течії. Трохи вище поздовжних вихорів, що покривають стінку, розміщується зона, яка постійно руйнується спалахами і в якій відбуваються дрібномасштабні рухи великої енергії. Однак відсутнє розуміння, чому реалізується саме така схема розвитку течії біля стінки. Ще одним елементом вихрової структури пристінної області є поперечні вихори великої енергії. Утворюються вони, напевне, в перехідній підобласті і заповнюють логарифмічну підобласть. Стосовно природи виникнення цих вихорів відомо дуже мало. Вважається, що спалахи утворюють майже 70% рейнольдсових напружень. У зовнішній області основними елементами вихрової структури є великомасштабні поперечні вихори, які розміщені на віддалі 0.8 товщини примежового шару від стінки. Другим основним елементом зовнішньої області є “типові” поперечні вихори великої енергії, які розміщені в надшарі переміжності. Стосовно природи виникнення цих вихорів відомо дуже мало. Механізм утворення їх частіше за все пов'язують з нестійкістю течії, яка є результатом наявності точки перегину профілю швидкості. Наявність явища переміжності приводить до того, що межа примежового шару є нерегулярною у просторі та часі. Для неї характерні ламінарні “впадини” та турбулентні “вздуття” (горби). Правдоподібною здається гіпотеза про те, що вздуття біля межі примежового шару є наслідком спарювання вихорів, пов'язаних з двома-чотирма спалахами. Відомі результати дослідження організованих структур у примежових шарах вказують на відсутність повного розуміння процесів переносу. Можна вважати достовірним факт утворення більшої частини енергії турбулентності в околі стінки, але сам механізм залишається незрозумілим. Неповнота знань стосовно вихрової структури турбулентної течії не дає можливості отримати завершене визначення явища турбулентності. Карман і Тейлор визначали турбулентність як неупорядкований рух у часі. Хінце зазначив, що цей рух неупорядкований як у часі, так і у просторі, а також існує можливість вивчення турбулентності статистичними методами. Найбільш, мабуть, загальне визначення на сьогодні належить Бредшоу: “Турбулентність – це трьохвимірний нестаціонарний рух, в якому внаслідок розтягування вихорів відбувається неперервний розподіл пульсацій швидкості в інтервалі довжин хвиль від мінімальних, що визначаються в'язкими силами, до максимальних, що визначаються межами течій. Вона є звичайним станом рухомої рідини, за виключенням течій, які характеризуються малими числами Рейнольдса”. З урахува-

нням якісних досліджень організованих структур Лапін та Стрілець [7] запропонували доповнити визначення Бредшоу так: “Це багатомасштабний рух, який в певних частинах спектру носить когерентний характер”. Слід зазначити, що усі наведені визначення носять скоріше описовий, ніж канонічний характер. Хоча на сьогодні відсутнє повне описання розтягування вихрових трубок, але воно дає можливість зрозуміти, за рахунок чого підтримується турбулентність. Великомасштабні структури (вихори) поглинають енергію основної течії, деформуються, діляться і шляхом нелінійних взаємодій здійснюють передачу енергії від основного руху до дрібномасштабних структур у пристінній області, де відбувається в’язка дисипація. Отже турбулентний рух може існувати за рахунок енергії основного потоку, завдячуючи великомасштабним структурам. Механізм розтягу вихрових трубок пов’язаний з каскадним процесом передачі енергії від основного руху до великомасштабних вихорів, а від них – до дрібномасштабних. Каскадний процес ще в 1922 році запропонував Річардсон. Великомасштабні структури дуже анізотропні та суттєво залежать від меж та характерів зовнішніх впливів, а тому є різними для різних потоків. Характеристики дрібномасштабних структур слабкіше залежать від індивідуальних особливостей течій. Важливо підкреслити, що турбулентні вихори неперервно та постійно стикаються один з другим, при цьому більші вихори вміщують у собі вихори менших розмірів. Особливо слід зазначити, що турбулентність на сьогодні трактується і як вихровий, так і хвильовий процес. Приведене досить спрощене уявлення при вихрову структуру зсувної пристінної течії представляє собою досить складну та до кінця не вивчену картину взаємодії структурних елементів. Отже, враховуючи сказане, можемо констатувати, що наші знання про зародження та протікання турбулентності значно обмежені. Тому при вирішенні наукових та практичних проблем знайшли широке застосування напівемпіричні феноменологічні моделі. Часто із урахуванням різномасштабності пристінної та слідної областей будують окремі залежності для кожної з них. Це приводить до необхідності введення дискретних схем, які не в змозі урахувати взаємодію суттєво різних процесів переносу кожної з областей. З метою усунення вказаного недоліку була запропонована модель коефіцієнта турбулентної в’язкості, яка враховує особливості розвитку турбулентності в кожній з областей, взаємодію суттєво різних процесів у них [25-29, 31, 32, 36]. В даній роботі наводиться удосконалена модель коефіцієнта турбулентної в’язкості, яка за-

стосована в розрахунках турбулентних зсувних течій як на алгебраїчному, так і диференціальному рівнях. Отримано наближено-аналітичні розв’язки, які дають можливість задати початкові умови в разі відсутності їх у експериментах.

1. БАЗОВА МОДЕЛЬ КОЕФІЦІЄНТА ТУРБУЛЕНТНОЇ В’ЯЗКОСТІ

Ще в 1973 році одним з авторів [25] було запропоновано єдину математичну модель коефіцієнта турбулентної в’язкості для усїєї зсувної пристінної течії:

$$\nu_t = \nu_{twk} \text{th} \frac{\nu_{twl}}{\nu_{twk}}, \quad (1)$$

де ν_t – коефіцієнт турбулентної в’язкості усього примежового шару; ν_{twk} – коефіцієнт турбулентної в’язкості слідної області; ν_{twl} – коефіцієнт турбулентної в’язкості пристінної області. З формули (1) витікає, що біля стінки $\nu_t \approx \nu_{twl}$, а вдалині $\nu_t \approx \nu_{twk}$ та існує підобласть перекриття, де одночасно працюють і ν_{twl} , і ν_{twk} . У 1985 році Джонсон і Кінг [38] запропонували свій варіант єдиної формули:

$$\nu_t = \nu_{twk} \left[1 - \exp \left(- \frac{\nu_{twl}}{\nu_{twk}} \right) \right]. \quad (2)$$

У роботі І. Бєлова, С. Ісаєва [9] модель (1) помилково приписана Джонсону і Кінгу.

2. АЛГЕБРАЇЧНІ МОДЕЛІ КОЕФІЦІЄНТА ТУРБУЛЕНТНОЇ В’ЯЗКОСТІ

Пристінна область. Для пристінної області пропонується така удосконалена модель:

$$\nu_{twl} = k_0 Y^+ \nu D_m, \quad (3)$$

$$D_m = \text{th} \frac{\text{sh}^2(k_1 Y^+) \text{th} [\text{sh}^2(k_2 Y^+)]}{k_0 Y^+}, \quad (4)$$

де k_0, k_1, k_2 – модельні коефіцієнти; $Y^+ = y^+ \sqrt{\tau^+}$; $y^+ = y^+ v_* / \nu$; $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$; $\tau^+ = \tau_* / \tau_w$; τ_w – напруження тертя на стінці, τ_* – напруження тертя в околі стінки:

$$\tau_* = \tau_w + y \frac{dp}{dx} \quad \text{при} \quad \frac{dp}{dx} \geq 0 \quad \text{і}$$

$$\tau_* = \tau_w \left(1 - \frac{y}{\tau_w} \frac{dp}{dx} \right)^{-1} \quad \text{при} \quad \frac{dp}{dx} \leq 0;$$

$$\tau^+ = 1 + y^+ p^+ \quad \text{при} \quad \frac{dp}{dx} \geq 0 \quad \text{і}$$

$$\tau^+ = (1 - y^+ p^+)^{-1} \quad \text{при} \quad \frac{dp}{dx} \leq 0;$$

p – тиск; x, y – поздовжня і нормальна координати; $p^+ = \frac{\nu}{\rho v_*^3} \frac{dp}{dx}$; ν – коефіцієнт кінематичної в’язкості; γ – коефіцієнт переміжності:

$\gamma = \sqrt{1 - \bar{y}}$ при $\bar{y} \leq 0.8$ і
 $\gamma = (20.153\bar{y}^2 = 13.35\bar{y})^{-1}$ при $\bar{y} \geq 0.8$;
 $\bar{y} = y/\delta$; δ - товщина прилежого шару.

Множник D_m дає можливість врахувати наявність в'язкої та перехідної підобластей та взаємодію молекулярного та турбулентного переносів в околі стінки.

Значну роль у впорядкуванні та осмисленні накопичених фактів відіграв запропонований Прандтлем закон стінки. Для течій на пластині чи в круглій трубі цей закон записують: $u^+ = u^+(y^+)$. За характерні масштаби довжини було вибрано $L = \nu/v_*$, а за характерний масштаб швидкості $U = v_*$. При значних градієнтах тиску τ відчутно змінюється із зміною координати y біля стінки. Для врахування цього факту при визначенні масштабу швидкості замість τ_w використаємо τ_* , а за локальну величину довжини $L = \nu/v_{**}$, де $v_{**} = \sqrt{\tau_*/\rho}$. Добуток $yL^{-1} = yv_{**}/\nu$ розглядається як локальне число Рейнольдса, яке для несприятливого градієнта дорівнює $Y^+ = yv_*\sqrt{1+p^+y^+}/\nu$, а для сприятливого градієнта $Y^+ = yv_*/(\nu\sqrt{1-p^+y^+})$. Локальне число Рейнольдса для $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, при несприятливому градієнті тиску Y^+ зростає при зростанні $\frac{dp}{dx}$, а при несприятливому – зменшується. Отже згідно структури формул (3), (4) та з урахуванням асимптотичних властивостей гіперболічного тангенсу отримуємо, що при зростанні несприятливого градієнта тиску товщина пристінної області та кожної з її підобластей зменшується, а при сприятливому – навпаки зростає.

Розглянемо спочатку течію при несприятливому градієнті тиску. У цьому випадку $\tau_* = \tau_w + y\frac{dp}{dx}$. Виконаємо аналіз для граничних випадків:

А) $\tau_w \gg y\frac{dp}{dx}$; Б) $\tau_w \ll y\frac{dp}{dx}$.

Випадок А: $\tau_w \gg y\frac{dp}{dx}$. Це випадок, коли градієнт тиску дуже малий або нульовий. Модель (1) у цьому випадку приймає вигляд

$$\nu_{twl} = k_0 y^+ \nu D_m, \quad D_m = \text{th} \frac{\text{sh}^2(k_1 y^+) \text{th} [\text{sh}^2(k_2 y^+)]}{k_0 y^+}. \quad (5)$$

Формула (5) дає змогу отримати наступні залежності для профілів швидкості [29]:

$$u^+ = \frac{u}{v_*} = \frac{1}{k_1} \text{th}(k_1 y^+) \quad (6)$$

– для перехідної та в'язкої підобластей,

$$u^+ = \frac{1}{k_0} \ln(y^+) + C \quad (7)$$

– для логарифмічної області.

Випадок Б: $\tau_* \approx y\frac{dp}{dx}$. Ця умова дозволяє отримати наступні залежності для профілів швидкості в кожній з підобластей відповідно:

$$u^+ = \frac{1}{2}(y_p^+)^2, \quad (8)$$

$$u^+ = \frac{2}{3k_1} \left[\sqrt{y_p^+} \text{th} \left(k_1 (y_p^+)^{3/2} \right) - \frac{1}{4} k_1 (y_p^+)^2 \right], \quad (9)$$

$$u = \frac{2}{k_0} \sqrt{y_p^+}, \quad (10)$$

де $y_p^+ = \frac{yu_p}{\nu}$, $u_p^+ = \frac{u}{u_p}$, $u_p = \sqrt{\frac{\nu}{\rho} \frac{dp}{dx}}$. Якщо в (9) перейти до границі при $y \rightarrow 0$, то отримаємо (8), а це означає, що (9) описує одночасно перехідну і в'язку підобласті. Формули (8)-(10) свідчать, що з ростом u_p відбувається перебудова пристінної області – вона зменшується, але не зникає зовсім. Розглянемо загальний випадок, коли слід врахувати обидва члени: τ_* та $y\frac{dp}{dx}$. У цьому випадку профіль швидкості для логарифмічної підобласті приймає вигляд [29]:

$$u^+ = \frac{1}{k_0} \left[\ln \frac{\sqrt{1+p^+y^+} + 1}{\sqrt{1+p^+y^+} - 1} + 2\sqrt{1+p^+y^+} \right] + C \quad (11)$$

при $p^+ \geq -1$. Для перехідної та в'язкої підобластей отримуємо

$$u^+ = \int_0^y \frac{(1+p^+y^+) dy}{\mu \text{ch}^2(k_1 y^+ \sqrt{1+p^+y^+})}. \quad (12)$$

У випадку незначного градієнта тиску, коли для перехідної та в'язкої підобластей можна наближено покласти

$$\nu_t + \nu \approx \nu \text{sh}^2(k_1 y^+), \quad (13)$$

тоді з (12) отримаємо

$$u^+ = \frac{1+p^+y^+}{k_1} \text{th}(k_1 y^+) - \frac{p^+}{k_1^2} \ln [\text{ch}(k_1 y^+)]. \quad (14)$$

При від'ємному градієнті тиску для профілю швидкості у логарифмічній підобласті маємо

$$u^+ = \frac{1}{k_0} \ln \frac{\sqrt{1-p^+y^+} - 1}{\sqrt{1-p^+y^+} + 1} + C, \quad (15)$$

а для в'язкої і перехідної -

$$u^+ = \int_0^y \frac{dy}{(1 - p^+ y^+) \operatorname{ch}^2 \left(k_1 y^+ / \sqrt{1 - p^+ y^+} \right)} \quad (16)$$

і для в'язкої підобласті

$$u^+ = \frac{\ln(1 + (-p^+) y^+)}{k_0 (-p^+)}. \quad (17)$$

У випадку, коли $(-p^+ y^+ \gg 1)$, отримуємо для в'язкої перехідної та логарифмічної підобластей:

$$u^+ = \frac{\ln y^+}{(-p^+)},$$

$$u^+ = \int_0^y \frac{dy^+}{(-p^+ y^+) \operatorname{ch}^2 \left(k_1 \sqrt{\frac{y^+}{(-p^+)}} \right)} + C,$$

$$u^+ = C - \frac{2}{k_0 \sqrt{(-p^+) y^+}}, \text{ отже } u^+ = u^+(y^+, p^+).$$

При значному зростанні сприятливого градієнта тиску $(-p^+ \gg 0)$ отримані формули адекватно відтворюють відомий ефект реламінаризації.

Слідна область. У слідній області найбільш вживаними моделями для коефіцієнта турбулентної в'язкості є модель Прандтля-Ескюдєра

$$\nu_{twk} = \rho(0.09\delta)^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (18)$$

та Клаузєра

$$\nu_{twk} = \chi \gamma u_H \delta^*, \quad (19)$$

де u_H – швидкість течії за межами примежового шару. Більшість користувачів алгебраїчних моделей у зовнішній області використовують формулу (18), а у пристінній області – модель Прандтля-Ван Дріста

$$\nu_{twk} = \rho k_0^2 y^2 [1 - \exp(-y^+)]^2 \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (20)$$

Для течії на пластині та в трубі Карман обґрунтував закон дефекту швидкості, який має вигляд: $u^- = \frac{u - u_H}{v_*} = f\left(\bar{y}, \rho, \frac{v_*}{u_H}\right)$. Найбільш сильні впливи на розвиток пристінної зсувної течії виявляють градієнти тиску. При цьому несприятливий градієнт може привести до відриву, а сприятливий – до реламінаризації. Якщо розподіли напружень тертя у примежовому шарі є відомими, то, застосувавши гіпотезу Бусінеска, отримаємо формулу

для профілю швидкості:

$$u(y) - u_0(y_0) = \int_{y_0}^y \frac{\tau}{\mu + \mu_t} dy, \quad (21)$$

де y_0 – ордината нижньої межі області (підобласті). З кінця 30-х років минулого століття у часи популярності інтегральних методів широке розповсюдження набуло поліноміальне наближення напружень тертя. Бурі [43] запропонував використовувати поліноми для опису напружень тертя для турбулентних примежових шарів подібно до того, як це зробив Польгаузен для профілів швидкості в ламінарних течіях. Найбільш повно та вдало для зсувних пристінних течій реалізував поліноміальне представлення напружень тертя Федяєвський [43]. У подальшому виявилося, що при значних несприятливих градієнтах тиску наявні експериментальні дані погано відтворюються розрахунками. Спроба покращити поліноміальні наближення не увінчалася успіхом [6]. Поліноміальний підхід був розвинений Гіневським [45] на випадок турбулентних вільних струменів та слідів, а Мовчаном – на випадок пристінних струменів [46]. Причина невідповідності поліноміального розподілу експериментам при значних несприятливих градієнтах тиску – в його однопараметричності, а тому були запропоновані двопараметричні наближення для профілів напруження тертя

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_w} = (1 - \bar{y}) (A_0 + A_1 \bar{y} + A_2 \bar{y}^n) \quad (22)$$

– при невід'ємному градієнті тиску та

$$\bar{\tau} = (1 - \bar{y}) \left(\frac{B_0}{B_1 + B_2 \bar{y}} + B_3 \bar{y}^n \right) \quad (23)$$

– при від'ємному. У наведених формулах n – довільне дійсне число, для знаходження якого використане означення параметру Δ [29]. Формули (20) - (22) дозволили отримати для дефекту швидкості наступні залежності:

$$u^- = \frac{1}{\chi \Delta_1} \left[\bar{y} - 1 + \frac{2\Phi + 1}{4} (\bar{y}^2 - 1) + \frac{\Phi + 1}{5} (\bar{y}^3 - 1) - (2 + \Phi) \left(\frac{\bar{y}^{n+1}}{n+1} - \frac{\bar{y}^{n+2}}{2(n+2)} \right) \right] \quad (24)$$

при $\Phi \geq -1$,

$$u^- = \frac{1}{\chi \Delta_1} \left[\frac{0.5 + \Phi}{(\Phi + 1)^2} \ln \frac{1 + (\Phi + 1)\bar{y}}{-\Phi} + \frac{\bar{y} - 1}{2(\Phi + 1)} + \frac{1}{\Phi} \left(\frac{\bar{y}^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{\bar{y}^{n+2} - 1}{2(n+2)} \right) \right] \quad (25)$$

при $\Phi < -1$,

$$u^- = \frac{1}{\chi \Delta_1} \left[\bar{y} - 1 + \frac{\bar{y}^2 - 1}{4} + \frac{\bar{y}^3 - 1}{6} - 2 \left(\frac{\bar{y}^{n+1}}{n+1} - \frac{\bar{y}^{n+2}}{2(n+2)} \right) \right] \quad (26)$$

при $\Phi = 0$, де $\Phi = \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dp}{dx}$, $\Delta_1 = \Delta/\delta$. З метою узгодження математичної моделі з експериментами при значних змінах градієнтів тиску виконано тестування розрахунків за формулами (5), (15), (22), (25) та числових розрахунків. Висновки першої Стенфордської конференції 1968 р. про неефективність розрахунків за алгебраїчними моделями при значних несприятливих градієнтах тиску з можливим відривом підштовхнуло до уточнень, що дозволили отримати результати, які адекватно описують фізичний експеримент. Виконані дослідження [9, 37] показали, що коефіцієнти в алгебраїчних моделях не є постійними (універсальними), а залежать від параметрів градієнта тиску і малих значень числа Рейнольдса. У роботі одного з авторів [29] наведена уточнена математична модель і результати розрахунків з значною кількістю експериментальних результатів. Аналіз порівнянь показав цілком задовільну збіжність розрахунків та даних експериментів.

3. КОМБІНАЦІЯ МОДЕЛІ ТУРБУЛЕНТНОЇ В'ЯЗКОСТІ З ПІДХОДОМ БОЛДУІНА-ЛОМАКСА

У випадку виникнення ускладнень у визначенні лінійних масштабів, таких як Δ , δ , δ^* , що входять у формули для коефіцієнта турбулентної в'язкості, зручно використовувати підхід Болдуїна-Ломакса. Це позбавляє необхідності визначати лінійні масштаби у процесі вирішення задачі розрахунку шляхом ітерацій, які зменшують швидкість збіжності та ефективність методу, одночасно ускладнюючи його. Виконані розрахунки по стандартній моделі Болдуїна-Ломакса та її використання в межах підходу (1) лише у слідній області при порівнянні з канонічними експериментами Стенфордської конференції 1968 р. демонструють переваги запропонованої комбінації. У останньому випадку формула Болдуїна-Ломакса застосовується локально для слідної області з наступною модифікацією визначальних функцій:

$$\nu_{twk} = \chi C_{cp} F_{wk} \gamma, \quad (27)$$

$$F_{wk} = \min \left[y(F_{max}) F_{max}, C_{wk} y(F_{max}) \frac{U_{max}^2}{F_{max}} \right],$$

$$F(y) = y \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \text{th} \frac{\text{sh}^2(k_1 y^+) \text{th} [\text{sh}^2(k_2 y^+)]}{k_0 y^+ \sqrt{\tau^+}},$$

$$F_{max} = \max[F(y)], \quad \gamma = \left[1 + 5,5 \left(\frac{C_{Kleb} y}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1},$$

де $C_{cp} = 1.6$, $C_{wk} = 0.25$, $C_{Kleb} = 0.4$ – коефіцієнти моделі; y_{max} – значення координати y в точці, де функція $F(y)$ набуває максимуму, u_{max} – максимальне значення швидкості в розрахунковому перерізі $x = \text{const}$.

Слід зазначити, що при тестуванні моделі у випадку, коли початкові профілі відсутні, їх можна задати за допомогою отриманих наближень (5), (7), (10)–(12), (23)–(25). Відомо, що при зростанні несприятливого градієнта тиску відбувається деформація закону дефекту швидкості. Перрі та Шефілд (1973 р.) з'ясували, що якщо замінити динамічну швидкість v_* на динамічну швидкість ма-

ксимального напруження тертя $v_{*max} = \sqrt{\frac{\tau_{max}}{\rho}}$,

це забезпечить кращу кореляцію закону дефекту швидкості. Джонсон та Кінг (38) використали динамічну максимальну швидкість в якості масштабу швидкості в обох областях. Лапін, Стрілець, Гарбарук [40] у слідній області замість зовнішньої швидкості у формулі Клаузера використали v_{*max} , для якої вони запропонували емпіричну залежність і дійшли висновку про те, що коефіцієнти моделі у цьому випадку не залежать ні від параметрів градієнта тиску, ні від малих чисел Рейнольдса. Отже з урахуванням цієї модифікації формула турбулентної в'язкості для слідної області приймає вигляд

$$\nu_{twk} = \chi \gamma v_{*max} \delta^*, \quad \chi = 0.436. \quad (28)$$

Якщо в формулі (28) δ^* замінити на δ^{**} , то коефіцієнт набуває значення $\chi = 0.5798$, а при заміні δ^* на δ цей коефіцієнт дорівнюватиме $\chi = 0.08$.

4. УЗАГАЛЬНЕННЯ МОДЕЛІ ТУРБУЛЕНТНОЇ В'ЯЗКОСТІ НА ПРОСТОРОВИЙ ВИПАДОК

При дослідженні просторових зсувних течій узагальнюють напівемпіричні моделі турбулентної в'язкості, розроблені для плоских течій. Введемо у розгляд зв'язану з обтічною поверхнею декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) , побудовану так, що вісь Ox_2 перпендикулярна до поверхні і ідентична y , а осі Ox_1 та Ox_3 лежать у дотичній до поверхні площині. Складові швидкості у дотичній до обтічної поверхні площини позначатимемо відповідно

u_1 та u_3 . Тоді формула Прандтля для тривимірних потоків узагальнена наступним чином [37]:

$$\nu_t = l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2}, \quad (29)$$

де коефіцієнт турбулентної в'язкості ν_t розглядається як скалярна величина. При виконанні узагальнень слід врахувати особливість просторової течії, яка заключається у неізотропності турбулентної течії, у результаті чого напрямки векторів дотичних напружень і швидкості деформацій не співпадають. Позначимо через $v_{*i} = \sqrt{\tau_{wi}/\rho}$ проекції динамічної швидкості вздовж напрямків $i = 1, 3$, де τ_{wi} – проекція напружень тертя на поверхні у напрямку i . Тоді сумарна динамічна швидкість на стінці $v_{*\Sigma} = \sqrt{v_{*1}^2 + v_{*3}^2}$. Дотичні напруження тертя в околі поверхні $\tau_{*i} = \rho v_{*i}^2 \tau_i^+$, де $\tau_i^+ = 1 + \Phi_i \bar{x}_2$ при $\Phi_i \geq 0$ і $\tau_i^+ = 1/(1 - \Phi_i \bar{x}_2)$ при $\Phi_i \leq 0$; $\bar{x}_2 = x_2/\delta$; $\Phi_i = \frac{\delta}{\tau_{wi}} \frac{\partial p}{\partial x_i}$, $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ – проекція градієнта тиску на напрямок Ox_i . Для її визначення використаємо формулу

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\rho \left(u_{H1} \frac{\partial u_{H\Sigma}}{\partial x_1} + u_{H3} \frac{\partial u_{H\Sigma}}{\partial x_3} \right).$$

Масштаб швидкості у пристінній області визначається так:

$$\begin{aligned} v_{**\Sigma} &= \sqrt{\tau_{\Sigma*}/\rho} = \sqrt{v_{*1}^2 \tau_1^+ + v_{*3}^2 \tau_3^+} = \\ &= v_{*\Sigma} \sqrt{\left(\frac{v_{*1}}{v_{*\Sigma}}\right)^2 \tau_1^+ + \left(\frac{v_{*3}}{v_{*\Sigma}}\right)^2 \tau_3^+}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \nu_{twl} &= k_0 Y^+ \nu D_m, \\ D_m &= \text{th} \frac{\text{sh}^2(k_1 Y^+) \text{th} [\text{sh}^2(k_2 Y^+)]}{k_0 Y^+}, \quad (30) \end{aligned}$$

де $Y^+ = y v_{*\Sigma}/\nu$. Для врахування анізотропності просторової турбулентної течії використаємо підхід Ротта [6]:

$$\begin{aligned} \nu_{t11} &= \nu_t \frac{u_1^2 + N u_3^2}{u_H^2}, \quad \nu_{t33} = \nu_t \frac{N u_1^2 + u_3^2}{u_H^2}, \\ \nu_{t13} &= \nu_{t31} = \nu_t (1 - N) \frac{u_1 u_3}{u_H^2}, \end{aligned}$$

де N – коефіцієнт анізотропії, який визначається як відношення коефіцієнтів турбулентної в'язкості у напрямках вторинної (n) і основної (s) відповідно. Для турбулентних складових зсувного напруження тертя використовуються залежності:

$$\tau_{t1} = \rho \left(\nu_{t11} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \nu_{t13} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right),$$

$$\tau_{t3} = \rho \left(\nu_{t13} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \nu_{t33} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right).$$

Якщо вважати, що $\tau_i^+ \approx 1$, то прийдемо до раніше отриманої нами спрощеної моделі [44], яка була апробована авторами цієї роботи для широкого кола пристінних течій.

5. УРАХУВАННЯ В МОДЕЛІ ВПЛИВІВ ШОРСТКОСТІ ОБТІЧНОЇ ПОВЕРХНІ ТА ІНЖЕКЦІЇ ПОЛІМЕРНИХ ДОМІШОК

Спроможність моделі турбулентності до урахування факторів, що здійснюють вплив поблизу обтічної поверхні, є її вагомою перевагою при розробці, дослідженні ефективності та оптимізації різноманітних засобів керування пристінними течіями. У межах даної роботи розглянемо вплив лише двох факторів: шорсткості обтічної поверхні та інжекції полімерних домішок, які є принципово різними щодо фізичного механізму дії, але спорідненими з точки зору можливості урахування їхніх впливів на коефіцієнт турбулентної в'язкості. Для урахування шорсткості в рамках даної моделі використано підхід, запропонований Ротта [6], згідно якого турбулізуючий вплив мікрорельєфу поверхні враховується шляхом додавання до нормальної до поверхні координати y відповідної функції зсуву Δy_r .

Одним із авторів даної роботи було здійснено адаптацію підходу Ротта в модель (3)-(4), що дало змогу на відміну від інших моделей отримати наближено-аналітичні вирази для профілів швидкості у пристінній та логарифмічній областях. Порівняння отриманих залежностей з розподілом швидкості для гладкої поверхні дозволило зв'язати представлені у координатах закону стінки функцію зсуву ординати Δy_r^+ зі зсувом логарифмічної ділянки профілю швидкості Δu_r^+ наступним чином:

$$\Delta y^+ = \begin{cases} (k_1)^{-1} \text{arcth}(k_1 \Delta u^+) & \text{при } h^+ \leq h^*, \\ h^+ \exp(-kB(h^+)) & \text{при } h^+ > h^*, \end{cases}$$

де h – середня висота елементів шорсткості, $h^+ = \frac{h v_*}{\nu}$, $h^* = y_* \exp[k(C + 2.89)]$, $C = 5.2$, $y_* = 25.36$, $\Delta u^+ = \frac{1}{k} \ln h^+ - B(h^+) + C$.

Співставлення цих розв'язків з відомими апроксимаціями експериментальних даних пісочної шорсткості дозволило запропонувати зручну апроксимацію параметра $B(h^+)$ логарифмічного закону для шорсткої поверхні у вигляді

$$B = C + \text{sth} \frac{\ln h^+}{ks},$$

$$s = \frac{2.98}{1 - 87 \left(\frac{\ln h^+}{8} \right)^{2.03} \left(1 - \frac{\ln h^+}{8} \right)^{8.39}}.$$

Для шорсткості іншої геометрії, відмінної від пісочної, вигляд залежності $B(h^+)$ безсумнівно знає змін, але перевага підходу полягає у тому, що потрібні модифікації можна ефективно внести, користуючись відповідними досліджуваному типу шорсткості експериментальними даними. Структура ж зв'язку між Δy_r^+ та Δu_r^+ у випадку зміни типу шорсткості залишається незмінною.

Концептуально близькою до цього підходу виявилася можливість врахування впливу інжекції малих концентрацій домішок полімерів, які вводяться в окіл обтічної поверхні з метою модифікації в'язких властивостей потоку і, як наслідок, гальмування турбулентних збурень. Вагоме практичне значення застосування цього впливу полягає в реалізації можливості ефективного гальмування опору тертя за рахунок його турбулентної складової. У даному випадку у доповнення до наведеної вище функції зсуву нормальної координати Δy_r^+ введено ще одну зсувну функцію Δy_{add} , яка додавалася до y^+ наступним чином:

$$y^+ = \begin{cases} 0 & \text{при } s^+ \leq 0, \\ s^+ & \text{при } s^+ > 0, \end{cases}$$

де $s^+ = y^+ + \Delta y_r^+ - \Delta y_{add}^+$.

Як і Δy_r^+ , дана функція Δy_{add} отримана на основі наближено-аналітичних формул для розподілів швидкості у внутрішній області примежового шару, що були здобуті із використанням (3), (4), (21). Суттєвою особливістю є той факт, що функція $\Delta y_{add}^+ > 0$ описує зсув логарифмічної ділянки профілю швидкості у напівлогарифмічних координатах у напрямку, протилежному дії шорсткості. Ця обставина отримала багаточисельне експериментальне підтвердження, але, як і у випадку з шорсткістю, величини зсувів Δu_{add} суттєво залежать від виду використаного полімеру та його концентрації. Тим не менш, як і у випадку моделювання впливу шорсткості, функціональний зв'язок між Δy_{add} та Δu_{add} при зміні типу чи концентрації полімерної домішки змін не знає.

Ще однією вагомою особливістю даної реалізації моделі є притаманна їй можливість врахування неоднорідності розподілу концентрації та фізико-хімічного складу полімеру по товщині зсувної течії, що може бути як наслідком дифузії, так і результатом використання багатофазної інжекції. У випадку інжекції кількох складових вважається, що вплив кожної складової визначається за її точною концентрацією і є адитивним по відношен-

ню до решти.

6. ПОВУДОВА МОДЕЛІ КОЕФІЦІЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

При конвективному теплообміні температурні поля тісно пов'язані з полями швидкостей, тому при дослідженні конвективного теплообміну слід враховувати визначальну роль динамічних характеристик потоку. Як і для динамічного примежового шару, так і для теплового у поперечному перетині течії виділяються аналогічні області і підобласті, в яких структура поля температури та процесу переносу тепла суттєво різняться. Результати досліджень показують, що розподіл температури суттєво залежить від значень числа Прандтля, яке відображає теплофізичні властивості рідин чи газів. При цьому слід врахувати, що повна аналогія між динамічними та тепловими характеристиками має місце тільки при $Pr=1$. Отже при $Pr \approx 1$ досягається подібність розподілів температури та швидкості. У цьому випадку товщини динамічного та теплового шарів рівні, а структурні підобласті обох шарів співпадають. Для рідин чи газів з числом Прандтля, яке суттєво відрізняється від одиниці, динамічний та тепловий примежові шари розвиваються різними темпами, а тому відповідні структурні підобласті не співпадають. Так, тепловий примежовий шар рідких металів, для якого $Pr \ll 1$, значно товщий, ніж динамічний та в межах динамічного примежового шару перенос тепла протікає під дією молекулярних сил, а турбулентний перенос теплоти має місце поза межами динамічного шару. Для в'язких рідин з $Pr \gg 1$ тепловий примежовий шар значно тонший за динамічний, та перенос тепла відбувається переважно під впливом турбулентності. Для коефіцієнта турбулентної теплопровідності λ_t по аналогії з математичною моделлю коефіцієнта турбулентної в'язкості пропонується наступна залежність:

$$\lambda_t = \lambda_{twk} \text{th} \frac{\lambda_{twl}}{\lambda_{twk}}. \quad (31)$$

Для алгебраїчної математичної моделі приймаємо:

$$\begin{aligned} \lambda_{twl} &= k_{h0} Y^+ \lambda D_{mh}, \\ D_{mh} &= \text{th} \frac{\text{sh}^2(k_{h1} Y^+) \text{th} [\text{sh}^2(k_{h2} Y^+)]}{k_{h0} Y^+}, \\ \lambda_{twk} &= \chi_h \Delta_h \nu_* \gamma. \end{aligned} \quad (32)$$

Для врахування особливостей стосовно числа Прандтля, які були започатковані Себесі для коефіцієнта у формулі Ван Дрїста, в рамках даної

моделі цей підхід був розвинений на її коефіцієнти Шкваром і частково уточнений Л. Маджидом [15, 34, 45, 46]: $\chi_h = f(\text{Pr})\chi$, $k_{0h} = f_0(\text{Pr})k_{0h}$, $k_{1h} = f_1(\text{Pr})k_{1h}$, $k_{2h} = f_2(\text{Pr})k_{2h}$, де

$$f_0(\text{Pr}) \approx \frac{1}{\sqrt{0.86}},$$

$$f_1(\text{Pr}) = 1 + \sum_{i=1}^6 A_i \lg^i(\text{Pr}),$$

$$A_1 = 1.095, A_2 = 0.348, A_3 = -0.668, A_4 = 0.354, A_5 = 0.239, A_6 = -0.121,$$

$$f_2(\text{Pr}) = \frac{\sqrt{\text{Pr}}}{1.5367} \left(1.3446 + \sum_{i=1}^5 B_i \lg^i(\text{Pr}) \right),$$

$$B_1 = 1.1073, B_2 = 1.3058, B_3 = 0.2346, B_4 = -0.0246,$$

$$f(\text{Pr}) = \text{Pr}^{-6.157} \text{ при } 0.5 \geq \text{Pr} \geq 1,$$

$$f(\text{Pr}) = 0.9162\text{Pr}^{-1.885} \text{ при } 1 > \text{Pr} \geq 3,$$

$$f(\text{Pr}) = 0.3126\text{Pr}^{-1.143} \text{ при } 3 > \text{Pr} \geq 64,$$

Аналогічно до динамічного примежового шару були проведені дослідження профілю температури у пристінній області. Для перехідної і в'язкої підобластей отримано

$$T^+ = \frac{\text{Pr}}{k_{1h}} \text{th}(k_{1h}y^+) \text{ при } \text{Pr} = 1,$$

а для логарифмічної зони

$$T^+ = \frac{1}{k_{0h}} \ln y^+ + C \text{ при } \text{Pr} = 1$$

– відомий логарифмічний закон, де $T^- = \frac{T_w - T}{T^*}$, $T^* = q/(\rho C_p v_*)$, q – тепловий потік. Для розподілу відносної щільності теплового потоку у турбулентному примежовому шарі запропоновано використати аналогічну напруженню тертя апроксимацію виду

$$\bar{q} = \frac{q}{q_w} = (1 - \bar{y}) \left(A_0 + A_1 \bar{y} + A_2 \bar{y}^n \text{th} \frac{k_{0h} y \sqrt{\tau^+}}{\chi_h \Delta_h} \right) \quad (33)$$

при $\frac{dp}{dx} \geq 0$.

$$\text{Тут } A_0 = A_1 = 1; A_2 = -2, \quad \Delta_h = \int_0^{\delta_h} T^- dy,$$

$$T^- = \frac{T_H - T}{T^*}.$$

Профіль температури визначається із закону Фур'є

$$T = \int_{T_w}^T dT = \frac{1}{\rho C_p} \int_0^y \frac{q}{\lambda + \lambda_t} dy,$$

де λ – коефіцієнт молекулярної теплопровідності, C_p – питома теплоємність при сталому тиску.

У зовнішній області матимемо:

$$T^- = \frac{s}{\chi_h \Delta_{1h}} \left[(1 - \bar{y}) - \frac{s}{4}(1 - \bar{y}^2) - \frac{1}{3}(1 - \bar{y}^3) - \frac{s}{8}(1 - \bar{y}^4) + 2 \left(\frac{\bar{y}_n^{m+1}}{m+1} - (1 - 0.5s) \frac{\bar{y}_n^{m+2} - 1}{m+2} - 0.5s \frac{\bar{y}_n^{m+3} - 1}{m+3} \right) \right] \text{ при } \text{Pr} \neq 1,$$

$$\text{де } s = \frac{\delta_h}{\delta}, \quad \Delta_{1h} = \frac{\Delta_h}{\delta_h}.$$

7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ МОДЕЛІ ТУРБУЛЕНТНОЇ В'ЯЗКОСТІ. НАБЛИЖЕНО-АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ

У логарифмічній області моделі Колмогорова, Прандтля, Невзглядова еквівалентні, оскільки усі вони повинні забезпечувати виконання логарифмічного закону. Використавши цей факт і характерні лінійні масштаби, було знайдено наступні наближено-аналітичні залежності:

$$k = \frac{v_*^2}{C_0} \text{th}(k_1 y^+) \sqrt{\text{th}[\text{sh}^2(k_2 y^+)]},$$

$$\epsilon = \frac{(C_0 k)^2}{\nu \text{ch}^2(k_1 y^+)}$$

при нульовому градієнті тиску для в'язкої і перехідної підобластей та

$$k = \frac{v_*^2}{C_0}, \quad \epsilon = \frac{v_*^3}{k_0 y}$$

для логарифмічної підобласті, де

$$C_0 = 0.257 \{ 1 + 0.2478[1 - \text{th}(0.4y^+)] - 0.0592 \text{th}(40\bar{y}) \}.$$

За наявності градієнту тиску вказані залежності для логарифмічної підобласті набувають вигляду:

$$k = \frac{v_*^2}{C_0} \tau^+, \quad \epsilon = \frac{v_*^3}{k_0 y} \tau^{+3/2},$$

а для в'язкої і перехідної підобластей -

$$k = \frac{v_*^2}{C_0} \text{th}(k_1 Y^+) \sqrt{\text{th}[\text{sh}^2(k_2 Y^+)]} \tau^+,$$

$$\epsilon = \frac{(C_0 k)^2}{\nu \text{ch}^2(k_1 Y^+) } \tau^{+3/2}.$$

Для отримання наближених розв'язків у зовнішній області використано формули Невзглядова-Драйдена $\tau = \rho a_k k$ (a_k – емпірична стала), степеневі двопараметричні наближення для τ (22)-(23) та формулу Прандтля-Ротти $\epsilon = C_\epsilon k^{3/2}/L$, якій Вольштейн, а згодом Норріс, Рейнольдс [12] надали вигляду $\epsilon = 0.5478 k^{3/2}/\delta$. При $y^+ p^+ \gg 1$ у автотельному градієнтному підшарі отримуємо залежність $\epsilon = \frac{\sqrt{y}}{k_0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right)^{3/2}$, яку раніше здобув Кадер.

Модель пристінної області. З урахуванням отриманих наближено-аналітичних залежностей та алгебраїчної моделі (3), (4) для пристінної області пропонується наступна модель:

$$\nu_{tvl} = k_{01} k^+ \nu D_m,$$

$$D_m = \text{th} \frac{\text{sh}^2(k_{11} \sqrt{k^+}) \text{th} [\text{sh}^2(k_{21} \sqrt{k^+})]}{k_{01} k^+}, \quad (34)$$

де $k^+ = \frac{\sqrt{k} y}{\nu}$, $k_{01} = 0.2$, $k_{11} = 0.225$, $k_{21} = 0.27$.

Моделі зовнішньої області. Для зовнішньої області можна використати моделі Колмогорова-Прандтля ($k - L$), Джонсона-Лаундера ($k - \epsilon$) і Колмогорова-Сафмена-Уїлкокса ($k - \omega$) або модифіковану Ментером модель. У даній роботі використовується модель Джонсона-Лаундера.

8. МОДЕЛЮВАННЯ ПРИСТІННИХ СТРУМЕНІВ

Пристінний струмінь є видом турбулентних пристінних зсувних течій, який ефективно використовується з метою перешкодження відриву. Профіль швидкості у пристінному струмені характеризується немонотонністю, що ускладнює як модельне представлення турбулентної в'язкості, так і метод розрахунку. Причина обумовлена необхідністю визначати межі кожної з ділянок струменевого профілю швидкості і в кожній з них використовувати відповідні масштаби швидкості і довжини. Перші спроби авторів по моделюванню даного виду течій ґрунтувалися на алгебраїчному підході до моделювання турбулентності [36], згідно якого було використано традиційне представлення пристінного струменя з поділом його на три характерні зони: пристінну, струменеву та слідну, в кожній з яких позовжня складова розподілу швидкості зберігає

монотонність. У пристінній області використовувалися формули (3), (4) при $\gamma = 1$. У струменевій області $\delta_m \leq y < \delta_{jet}$ і у слідній - $\delta_{jet} \leq y < \delta_{wk}$ застосовувалися залежності [27, 31 - 33] виду:

$$\nu_t = \chi_{jet} \delta_{jet} \gamma (u_m - u_{min}) \quad \text{при} \quad \delta_m \leq y < \delta_{jet},$$

$$\nu_t = \chi_{wk} \delta_{wk} \gamma (u_H - u_{min}) \quad \text{при} \quad \delta_{jet} \leq y < \delta_{wk},$$

де χ_{jet} , χ_{wk} – модельні коефіцієнти; δ_m , δ_{jet} , δ_{wk} – товщини пристінної, струменевої та слідної області:

$$\delta_{jet} = \int_{\delta_m}^{\delta_{jet}} \frac{u_m - u}{u_m - u_{min}} dy; \quad \delta_{wk} = \int_{\delta_{wk}}^{\delta_{wk}} \frac{u_H - u}{u_H - u_{min}} dy.$$

У даній роботі для зовнішньої частини пристінної області, а також для струменевої та слідної області застосовується диференціальна $k - \epsilon$ модель турбулентності. Цей підхід є більш універсальний у порівнянні з алгебраїчним, оскільки диференціальні моделі є у більшій мірі адаптованими до відтворення інерційних властивостей, притаманних динаміці великомасштабної турбулентності. З точки зору методики проведення розрахунків такий підхід також має переваги, оскільки забезпечує єдине представлення турбулентної в'язкості і дає змогу уникнути необхідності визначення точних значень масштабів довжини і швидкості у вигляді характерних товщин і дефектів швидкостей для відповідних областей у кожному розрахунковому перерізі, а також координат переходу від одного модельного представлення до іншого, що притаманно застосуванню алгебраїчних моделей.

9. МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТУ НАЯВНОСТІ ПРИСТРОЇВ РУЙНУВАННЯ ВЕЛИКОМАСШТАБНИХ ВИХРОВИХ СТРУКТУР

Пристрої руйнування великомасштабних вихрових структур (Large Eddy BreakUp devices - LEBU) – це тонкі пластини або дуже тонкі тіла обтічної форми, що встановлюються на деякій відстані від поверхні обтікання, традиційно в зовнішній області примежового шару, з метою розрізання притаманних турбулентному руху великомасштабних вихроутворень. Пристрої LEBU пройшли значний обсяг експериментальних досліджень у різних лабораторіях світу [47], а також у льотних випробуваннях у науково-дослідному центрі NASA ім. Ленглі (США) [48]. Призначення LEBU як модифікатора великомасштабної турбулентності, яка характеризується інерційністю і

"довгою" пам'яттю, не дозволяє сподіватися на успіх моделювання у разі використання алгебраїчної моделі турбулентності. Саме тому тут було використано двопараметричну диференціальну модель турбулентності, яка добре адаптована до опису властивостей великомасштабної турбулентності, відтворюючи відповідними диференціальними рівняннями динаміку переносу кінетичної енергії турбулентності та швидкості її дисипації. За рахунок цих властивостей дана модель повинна описувати релаксаційну реакцію примежового шару на збурюючий вплив LEBU у сліді поза цим пристроєм. Перевірці цього припущення присвячено цей етап дослідження. У ролі експериментальних даних були використані результати вимірювань, отримані Горшковим та Корніловим на тілі обертання зі встановленим LEBU кільцевої форми. З метою урахування всіх особливостей формування течії, притаманних наявним експериментальним даним, розрахунки здійснювалися починаючи з першого перерізу за задньою крайкою LEBU, для якого були заміряні профілі швидкості та кінетичної енергії турбулентності. Розподіл швидкості дисипації у початковому перерізі знаходився перерахунком. Подальший розрахунок здійснювався маршовим методом з єдиною суттєвою модифікацією порівняльно з попередніми конфігураціями - згущенням сітки в області формування сліду за LEBU. Рис. 1–3 ілюструють результати відтворення розрахунковим шляхом (лінії) розподілів швидкості, кінетичної енергії турбулентності та коефіцієнта тертя в примежовому шарі за LEBU на циліндричному тілі обертання діаметром 100 мм, який був досліджений експериментально в [43] (кола). Наведені профілі у напрямку розвитку течії, тобто зліва направо, відповідають наступним відстаням від задньої крайки LEBU вздовж поздовжньої координати Δx , м: 0,00229; 0,0453; 0,0953; 0,1453; 0,1953; 0,3953; 0,7953; 1,1953.

ВИСНОВКИ

Запропоновано новий уніфікований підхід до побудови моделі турбулентної в'язкості, який є більш адекватним відомим властивостям пристінних течій, що формуються під впливом градієнта тиску. Наведено результати по узагальненню розробленого підходу на випадки просторових та струменевих течій, показано, як з єдиних позицій врахувати впливи двох різних з фізичної точки зору факторів – шорсткості та інжекції полімерних домішок. Продемонстровано гнучкість цього підходу щодо комбінування з іншими моделями турбулентності, зокрема, з моделлю Болдуїна-

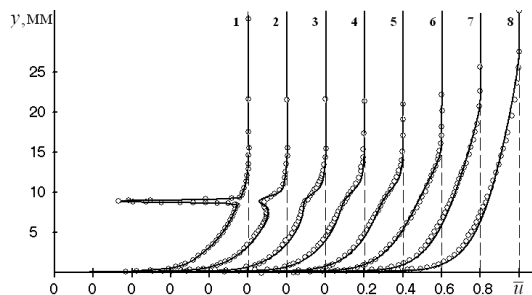


Рис. 1. Формування примежового шару за LEBU. Співставлення розрахунків профілів швидкості за LEBU (лінії) з експериментальними даними [43] (кола): повітря, $u_H = 25$ м/с, $L = 1.2$ м, $h/\delta_o = 0.74$

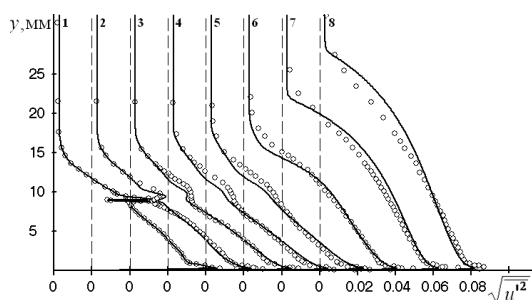


Рис. 2. Співставлення розрахунків профілів поздовжньої складової пульсаційної швидкості за LEBU (лінії) з експериментальними даними [43] (кола)

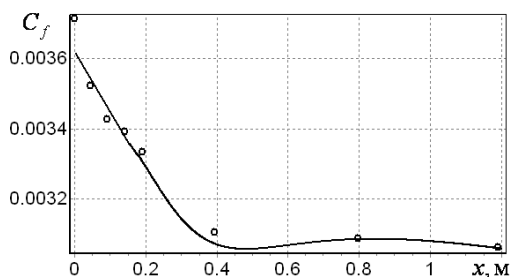


Рис. 3. Співставлення розрахунків коефіцієнта тертя $c_f = 2\tau_w/(\rho u_H^2)$ в області формування течії за LEBU (лінії) з експериментальними даними [43] (кола)

Ломакса, а також при побудові диференціальних моделей турбулентності. Враховано шорсткість обтічної поверхні, інжекцію полімерних домішок, просторовість течії, наявність пристроїв руйнування великомасштабних вихорів. Наведені результати наближено-аналітичних і числових розрахунків параметрів формування різних турбулентних примежових шарів ілюструють якісне відтворення розрахунками відомих експериментальних розподілів локальних і інтегральних характеристик.

Зокрема, показана можливість відтворення розрахунковим шляхом ефекту наявності у примежовому шарі руйнівників великомасштабних вихрових структур.

1. Быстров Ю. А., Исаев С. И., Кудрявцев Н. А., Леонтьев А. И. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб.– СПб.: Судостроение, 2003.– 392 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1969.– 744 с.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1973.– 847 с.
4. Путята В. Й., Сидляр М. М. Гідромеханіка.– К.: Вид-во Київського Ун-ту, 1963.– 480 с.
5. Хинце И. О. Турбулентность.– М.: Физматгаз, 1963.– 680 с.
6. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости.– Л.: Судостроение, 1967.– 232 с.
7. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Внутренние течения газовых смесей.– М.: Наука, 1989.– 366 с.
8. Бабенко В. В., Канарский М. В., Коробов В. И. Пограничный слой на эластичных пластинах.– К.: Наукова думка, 1993.– 264 с.
9. Белов И. А., Исаев С. А. Моделирование турбулентных течений.– СПб: Балт. гос. техн. ун-т, 2001.– 108 с.
10. Приходько А. А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и теплообмене.– К.: Наукова думка, 2003.– 279 с.
11. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.– Л.: Судостроение, 1973.– 256 с.
12. Турбулентность. / Под ред. П. Брэдшоу.– М.: Машиностроение, 1980.– 343 с.
13. Турбулентность. Принципы и применения. / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена.– М.: Мир, 1980.– 526 с.
14. Андерсен А., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика.– М.: Мир, 1990.– Т. 1 с. 384, – Т. 2 с. 396
15. Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы.– М.: Мир, 1987.– 592 с.
16. Совершенный В. Д. Модель полной вязкости в пристенной области турбулентного пограничного слоя // Инж. физ. журн.– 1974.– Т. 27,– N 5.– С. 22–29.
17. Долгов А. Н., Шулемович В. М. Турбулентная вязкость для несжимаемых градиентных течений в предотрывных областях и на шероховатой поверхности // Журн. прикладной механики и технической физики.– 1977.– N 1.– С. 88–92.
18. Саффмен, Уилкокс Модель турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя // Ракет. техн. и космонавтика.– 1974.– Т. 12,– N 4.– С. 160–167.
19. Капинос В. М. Слитенко А. О., Тарасов А. И. Модифицированная полумпирическая модель турбулентности // Инж. физ. журн.– 1981.– Т. 16,– N 6.– С. 970–975.
20. Хорстмен Модель турбулентности для расчета неравновесных течений при положительном градиенте давления // Ракет. техн. и космонавтика.– 1977.– Т. 15,– N 2.– С. 5–7.
21. Патанкар С., Сполдинг Д. Тепло – и массообмен в пограничных слоях.– М.: Энергия, 1971.– 126 с.
22. Турбулентные течения и теплопередача. / Под ред. Линь Цзя-Цзяо.– М.: Иностран. лит., 1963.– 563 с.
23. Computation of turbulent boundary layer // Proc. AFOSR-IFR-Stanford Conference. Ed. Coles P.E., Hirst E.A.– Vol. 2, 1969.– P. 519.
24. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика.– М.: Наука 1965, ч. 1, 639 с., 1967, ч. 2, 720 с.
25. Мовчан В. Т. Приближенный метод вычисления профилей напряжения трения и скоростей в турбулентном потоке с положительным градиентом давления. Тезисы доклада III Всесоюзной научно-технической конференции по прикладной аэродинамике // Сб. “Гидромеханика”.– 1975.– Вып. 31.– С. 25–28.
26. Мовчан В. Т. К исследованию турбулентных течений // Сб. “стратифицированные и турбулентные течения”.– 1979С. 82–89
27. Мовчан В. Т. К вычислению коэффициента турбулентной вязкости // Сб. “Гидромеханика”.– 1980.– Вып. 41.– С. 78–82.
28. Мовчан В. Т. Об одной полумпирической гипотезе в теории турбулентных пограничных слоев // Сб. “Приклад. мех.”.– 1981.– т. XVII, N 2.– С. 138–141.
29. Мовчан В. Т. Приближенно-аналитическое исследование турбулентного пограничного слоя // Журн. ПМТФ.– 1982.– N 3.– С. 102–111.
30. Мовчан В. Т. Плоская пристенная турбулентная струя и ее исследование // Сб. “Гидромеханика”.– 1982.– Вып. 46.– С. 73–80.
31. Мовчан В. Т. Исследование турбулентного пограничного слоя вблизи стенки при наличии положительного градиента давления // Сб. “Гидромеханика”.– 1984.– Вып. 46.– С. 25–29.
32. Шквар Е. А. К учету влияния шероховатости обтекаемой поверхности // Журн. ПМТФ.– 1986.– N 6.– С. 57–63.
33. Агеев С. А., Мовчан В. Т., Мхитарян А. М., Шквар Е. А. Моделирование двухфазных течений с поверхностью раздела фаз // Журн. ПМТФ.– 1990.– N 6.– С. 101–108.
34. Мовчан В. Т., Шквар Е. А. Алгебраическая модель турбулентной вязкости для расчетов сложных турбулентных течений // Бионика.– 1998.– Вып. 27–28.– С. 38–41.
35. Шквар Е. А. Математическое моделирование переноса примесей турбулентным пограничным слоем // Прикладная гидромеханика.– 2000.– Т. 2.– С. 96–105.
36. Лунис М., Мамчук В. И., Мовчан В. Т., Романюк Л. А., Шквар Е. А. Алгебраические модели турбулентной вязкости и теплопроводности в расчетах пристенных турбулентных течений // Прикладная гидромеханика.– 2001.– N 1.– С. 37–45.
37. Мовчан В. Т., Шквар Е. А. Математическое моделирование пограничных слоев // Прикладная гидромеханика.– 2005.– Т. 7, № 3–4.– С. 73–85.
38. Johncon D. A., King L. S. A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulence boundary layers // AIAA Journal.– 1985.– Vol. 25, N 1.– P. 1684 – 1692.

39. Зайков Л.А., Стрелец М.Х., Шур М.Л. Сравнение возможностей дифференциальных моделей турбулентности с одним и двумя уравнениями при расчете течений с отрывом и присоединением. Течение в каналах с обратным уступом // Теплофизика высоких температур.– 1996.– Т. 34, N 5.– С. 724–736.
40. Гарбарук А.В., Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Простая алгебраическая модель турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя с положительным градиентом давления // Теплофизика высоких температур.– 1999.– Т. 37, N 1.– С. 87–91.
41. Мовчан В. Т. К построению непрерывной алгебраической модели коэффициента турбулентной вязкости // Бионика.– 1986.– Вып. 20.– С. 58–60.
42. Мовчан В. Т. О коэффициенте турбулентной вязкости в двухпараметрической $k - \varepsilon$ модели // Бионика.– 1985.– Вып. 19.– С. 80–82.
43. Горшков В. Г., Корнилов В. И. Влияние устройств разрушения крупных вихрей на характеристики турбулентного пограничного слоя на теле вращения // Препринт № 4-2003.– Новосибирск: ИТПМ.– 2003. – 42 с.
44. Мхитарян А. М., Мовчан В. Т., Шквар Е.А. Математическое и численное моделирование турбулентного пограничного слоя на скользящем крыле // В сб.: Прикладная аэродинамика.– К.– 1993.– С. 3–16.
45. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов.– М.: Машиностроение, 1969.– 400 с.
46. Мовчан В. Т. О распространении полуограниченной осесимметричной струи несжимаемой жидкости в спутном потоке // В сб.: Некоторые вопросы аэродинамики и электродинамики.– Вып. II.– 1966.– С. 70–78.
47. Корнилов В. И. Проблемы снижения турбулентного трения активными и пассивными методами (обзор) // Теплофизика и аэромеханика.– № 2.– 2005.– С. 183–208.
48. Хефнер Дж. Н. Проблема снижения сопротивления. Борьба за снижение стоимости горючего // Аэрокосмическая техника.– № 7.– 1988.– С. 143–146.