УДК 532.526.5;

ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ ВНЕЗАПНО РАСШИРЯЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Е. В. БРУЯЦКИЙ, А. Г. КОСТИН

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 25.05.2009

Представлены результаты численного исследования структуры течения в плоском канале в зоне его внезапного расширения. Расчеты выполнены на основе решения полной системы нестационарных уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-даление методом разностей на установление. В результате исследованы поля скоростей и давления, изучена вихревая структура циркуляционного течения в области за уступом и определена протяженность этой зоны в зависимости от числа Рейнольдса и параметра расширения. Полученные результаты сравниваются с известными экспериментальными и расчетными данными.

Представлені результати чисельного дослідження структури течії у плоскому каналі на ділянці його раптового розширення. Розрахунки виконані на основі рішення повної системи нестаціонарних рівнянь Навьє-Стокса у змінних швидкість-тиск. Рішення одержано методом кінцевих відмінностей на основі використання універсального дискретного аналогу рівнянь ламінарних течій. В результаті вивчені поля швидкостей тиску, вихорова структура циркуляційної течії в області за уступом і визначений простір цієї зони в залежності від числа Рейнольса та параметру розширення. Одержані результати порівнюються з відомими експериментальними та розрахунковими даними.

Numerical results are presented of flow structure investigation in a flat channel in a feald of its sudden expansion. The calculations are based on a solution of full nonstationary Navier-Stokes equations in velocity-pressure variables using the finite difference method for identification. As a result, fields of pressure and velocities are investigated, a vortical structure of the circulation flow is studied behind a step, and an extension of this zone is determined depending on the Reynolds number and an expansion parameter. The obtained results are compared with known experimental and calculating data.

ВВЕДЕНИЕ

Фрагменты течения жидкости во внезапно расширяющихся каналах встречаются в различных технических устройствах и сооружениях. Резкое изменение геометрии стенки канала или поверхности обтекаемого тела способно вызвать отрыв потока и существенно изменить его кинематическую структуру. Течение в плоском канале с внезапным расширением относится к наиболее простому классу отрывных течений, когда точка отрыва потока является фиксированной. Теоретический расчет таких течений представляет большие трудности из-за образования сложных отрывных и возвратно-циркуляционных течений в области за уступом.

Первые расчеты стационарных двумерных ламинарных отрывных течений несжимаемой жидкости в каналах были получены Блазиусом еще в 1910 году аналитически в виде рядов [1]. В дальнейшем эта задача использовалась многими исследователями для изучения механизмов отрывных течений и для тестирования разностных схем решения уравнений Навье-Стокса. В силу большой практической значимости такие течения изучались теоретически и экспериментально как для ламинарных [2–4], так и для турбулентных [5–7] режимов движения несжимаемой и сжимаемой жидкости.

Во многих работах этого направления рассматриваются течения в каналах с двусторонним внезапным расширением [8–14]. Экспериментальные данные для этого случая в плоском канале получены в работах [8, 9], в которых отмечается образование циркуляционной зоны за уступом. В работе [10] сообщаются экспериментальные данные для круглой трубы с внезапным расширением. Ряд исследователей для рассчетов течений с внезапным расширением использовали уравнения движения в приближении пограничного слоя [14, 15]. В работе [15] рассматривается вопрос о пределах применимости такого приближения к анализируемому классу задач. В настоящее время очевидно, что при постановке задач расчета отрывных течений с вихревыми образованиями необходимо использовать не приближенные уравнения пограничного слоя, а полные уравнения Навье-Стокса.

Хорошо известно, что численное решение задач о движении вязкой несжимаемой жидкости на основе уравнений Навье-Стокса осложнено не только их нелинейностью, но и отсутствием явного уравнения для определения давления. Для преодоления этой трудности существуют два подхода. Один из них состоит в исключении давления из системы определяющих исходных уравнений с помощью перехода к переменным функция тока–вихрь (ψ, Ω). Преимущества и недостатки этого подхода хорошо известны [16]. Главный недостаток связан с трудностью постановки граничных условий для вихря скорости и отсутствием возможности обобщения этого подхода на трехмерные задачи и турбулентные режимы течения. Поэтому предпочтительней выглядит подход, использующий естественные физические переменные скорость–давление. Однако в этом случае для несжимаемой жидкости необходимо иметь дополнительное уравнение для определения давления. Тейлор Т. Д. и Ндефа Э. [17] решали подобную задачу о движении полуограниченного потока вязкой несжимаемой жидкости у твердой стенки с уступом. При этом они использовали уравнения Навье-Стокса в переменных скорость-давление, а решали их методом расщепления Н. Н. Яненко [18].

Следует отметить, что многие предыдущие экспериментальные и теоретические исследования проведены для турбулентного движения жидкости, а режим ламинарного течения в каналах с внезапным расширением обычно рассматривался при малых значениях чисел Рейнольдса. Современный прогресс в области компьютерной гидромеханики позволяет повысить качество моделирования физических процессов вихреобразования и получить устойчивые численные решения при умеренных чиселах Рейнольдса.

В работе [19] нами предложен эффективный метод численного интегрирования полной системы нестационарных уравнений Навье-Стокса в физических переменных скорость–давление для несжимаемой жидкости.

Цель данной работы состоит в применении указанного метода для решения внутренней задачи гидродинамики о течении жидкости в плоском канале с внезапным односторонним расширением. При этом наряду с изучением структуры течения вблизи уступа, в зависимости от числа Рейнольдса и высоты уступа, преследовалась цель аппробации эффективности данного метода для расчета сложных течений, характеризующихся наличием возвратно-вихревых областей течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается двумерное ламинарное течение в плоском канале с внезапным расширением в виде уступа. Физическая картина анализируемого течения и конфигурация расчетной области $A_1B_1CDEFA_1$ представлены на рис. 1.

Начало введенной декартовой системы координат находится в левом нижнем углу в точке 0. Ширина канала в левом входном сечении A_1B_1 имеет размер h_1, а в правом выходном сечении CD размер h. Высота уступа FE равна соответственно $b = h - h_1$. Левая A_1B_1 и правая CD границы расчетной области считаются достаточно удаленными от сечения с внезапным расширением C_1FE, чтобы на них можно было принять условия, соответствующие невозмущенному течению. Кроме того, предполагается, что в канале в области $A_1B_1C_1F$ перед уступом выполняются условия полностью развитого течения. Тогда в сечении A_1B_1 для горизонтальной скорости реализуется параболический профиль, форма которого зависит от параметра $B = b/h$. В выходном сечении CD расчетной области вдали от уступа профиль горизонтальной скорости по предположению установившийся и описывается параболой Пуазейля в виде

$$U(Y)|_{AB_1} = 6(1 - Y)Y. \tag{1}$$

Тогда, используя условие сохранения расходов в сечениях A_1B_1 и CD, для профиля горизонтальной скорости в сечении A_1B_1 находим

$$U(Y)|_{A_1B_1} = 6\big[Y(1 + B) - Y^2 - B\big]/(1 - B)^3, \tag{2}$$

где $B = b/h$ – безразмерная высота уступа. Легко видеть, что при $B = 0$ выражение (2) совпадает с профилем Пуазейля (1).

Характерной особенностью течений в каналах является то, что движение жидкости происходит под действием продольного перепада давления. Однако заданной величиной в рассматриваемой задаче следует принять не перепад давления, а расход жидкости $Q = u_0 \cdot h$ через поперечное сечение канала CD. При такой постановке задачи число Рейнольдса Re$=u_0 \cdot h/\nu$ задается, а давление определяется в процессе решения задачи.

Для описания движения жидкости используются нестационарные уравнения Навье-Стокса без каких-либо упрощающих предположений. При введении безразмерных величин за масштаб длины принимается ширина канала h, за масштаб скорости принята среднерасходная скорость в канале $u_0 = Q/h$, за масштаб времени – величина $t_0 = h/u_0$, а за масштаб давления – скоростной напор $p_0 = \rho \cdot u_0^2$. В безразмерных величинах V_i, P, X_i система нестационарных уравнений Навье-Стокса с постоянными плотностью ρ_0 и кинематической вязкостью ν в консервативной тензорной форме в

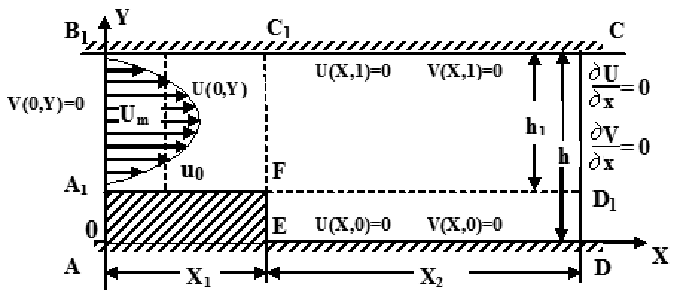

Рис. 1. Физическая схема течения во внезапно расширяющимся плоском канале

прямоугольной декартовой системе координат записывается в виде

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial X_k}\left[-V_i V_k + \frac{1}{\mathrm{R}e}\left(\frac{\partial V_i}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k}{\partial X_i}\right)\right], \qquad (3)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial X_k} = 0.$$

Здесь по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование. Такая компактная запись исходных уравнений позволяет рассматривать и трехмерные течения. Для рассматриваемой двумерной задачи $i, k = 1, 2$; $X_1 = X$; $X_2 = Y$; $V_1 = U$; $V_2 = V$. При этом $U = u/u_0$, $V = v/u_0$, $X = x/h$, $Y = y/h$, $\tau = tu_0/h$, $P = p/\rho_0 u_0^2$. Здесь U и V – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости соответственно.

Для завершения постановки задачи необходимо задать начальные и краевые условия на всех границах расчетной области. Пусть жидкость движется слева направо. Граничное условие для горизонтальной скорости в начальном сечении A_1B_1 задается выражением (2), а вертикальная скорость V в сечении A_1B_1 принимается равной нулю. На всех неподвижных твердых стенках выполняются очевидные граничные условия прилипания $U|_\Gamma = 0$ и непротекания $V|_\Gamma = 0$, где Γ – твердая граница. На выходе из расчетной области в сечении CD для горизонтальной и вертикальной скоростей принимаются стандартные условия вытекания Неймана. В начальный момент времени горизонтальная скорость в расчетной области имеет соответсвующий параболический профиль, а поперечная скорость и давление равны нулю.

Таким образом, решение системы уравнений (3) будем искать в области $0 \le X \le L$, $0 \le Y \le 1$ со следующими начальными и граничными условиями.

Начальные условия:

$$U(X,Y,O) = \frac{6[Y(1+B) - Y^2 - B]}{(1-B)^3}, (0 \le X \le X_1),$$

$$U(X,Y,O) = 6(1-Y)Y, \quad (X_1 < X \le X_2),$$

$$V(X,Y,O) = 0, \quad P(X,Y,O) = 0, \quad (0 < X \le (X_1 + X_2)).$$

Граничные условия:

$$U|_{A_1B_1} = \frac{6[Y(1+B) - Y^2 - B}{(1-B)^3};$$

$$U|_{B_1C} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial x}|_{CD} = 0;$$

$$U|_{DE} = 0; \quad U|_{EF} = 0; \quad U|_{FA_1} = 0;$$

$$V|_{A_1B_1} = 0; \quad V|_{B_1C} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial x}|_{CD} = 0;$$

$$V|_{DE} = 0; \quad V|_{EF} = 0; \quad V|_{FA_1} = 0.$$

Основными параметрами задачи являются число Рейнольдса и геометрическая высота уступа $B = b/h$. Следует подчеркнуть, что давление P в рассматриваемой системе уравнений не является основной переменной ни в одном из этих уравнений. При нашем подходе необходимое уравнение для давления выводится из уравнения неразрывности в виде уравнения типа Пуассона. При этом необходимые для его решения значения давления в граничных узлах определяются с помощью уравнений движения в комбинации с граничными условиями для компонентов скорости [20]. В процессе решения задачи требуется определить поля скорости и давления в расчетной области и исследовать влияние числа Рейнольдса и геометрического размера уступа B на структуру течения в канале и протяженность циркуляционной области, которая образуется вниз по потоку за уступом. Стационарное течение в канале характеризуется тем, что искомые переменные U, V, P не зависят от времени.

2. РАЗНОСТНАЯ СЕТКА

Общий принцип используемого метода решения уравнений Навье-Стокса рассмотрен в нашей работе [19]. Решение системы исходных нестационарных уравнений (3) выполняется методом конечных разностей на установление. Из-за сложностей согласования полей скорости и давления для дискретизации уравнений движения в X, Y направлениях и уравнения неразрывности использовалась сетка с разнесенной структурой расположения сеточных узлов для зависимых переменных. Это означает, что компоненты скоростей и двления определяются в различных узлах. Такой подход аналогичен методам MAC [21], SIMPLE [22] и дает определенные преимущества при расчете поля давления [20]. Конечно-рзностные аппроксимации рассматриваемых уравнений строятся на пятиточечном шаблоне в соответствии с известной схемой "крест" [23].

Локальная геометрия расположения узлов сетки показана на рис. 1 нашей работы [19]. Сеточные функции давления P расположены в узлах основной сетки $S_0(j, i, n)$. Сеточные функции компонентов скоростей U и V определены в узлах вспомогательных полуцелых сеток $S_1(j + 1/2, i, n)$ и $S_2(j, i + 1/2, n)$ соответственно:

$$S_1(X_{j+1/2}, Y_i\tau^n), \quad X_{j+1/2} = (j + 1/2) \cdot \Delta x,$$

$$Y_i = i \cdot \Delta y, \quad \tau^n = n \cdot \Delta\tau;$$

$$S_2(X_j, Y_{i+1/2}, \tau^n), \quad X_j = j \cdot \Delta x,$$

$$Y_{i+1/2} = (i + 1/2) \cdot \Delta y, \quad \tau^n = n \cdot \Delta\tau.$$

Шаги сеток hx_j и hy_i могут быть как равномерными, так и переменными в обоих направлениях:

$$\Delta x = 0,5(hx_j + hx_{j+1}), \quad \Delta y = 0,5(hy_j + hy_{j+1}).$$

В соответствии с выбранным сеточным шаблоном вводятся следующие компактные обозначения:

$$P(X_i, Y_i, \tau^n) = P^n_{j,i},$$

$$U((j + 1/2) \cdot \Delta x, i \cdot \Delta y, n \cdot \Delta\tau) = U^n_{j+1/2,i},$$

$$V(j \cdot \Delta x, (i + 1/2) \cdot \Delta y, n \cdot \Delta\tau) = V^n_{j,i+1/2,}.$$

Вся расчетная область разбивается на прямоугольные ячейки. Схема их расположения и соответствующие узлы сеток приведены в нашей работе [19].

3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Для конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений движения и неразрывности используются неявная схема и обычные аппроксимации первого порядка точности для производных по времени и второго порядка точности для производных по пространству. При этом диффузионные слагаемые аппроксимируются по схеме с центральными разностями, а для конвективных слагаемых используются схемы с односторонними разностями "против потока". Особенностью дискретизации является то, что конечно-разностная аппроксимация центрируется в соответствии с выбранным шаблоном. При этом сеточные индексы для зависмых переменных оказываются сдвинутыми.

Подстановка конечно-разностных формул в исходную систему уравнений движения позволяет записать их дискретные аналоги для X и Y направлений. Эти уравнения, после соответствующей групировки слагаемых, дополненные уравнением неразрывности, имеют следующий конечно-разностный вид:

$$d^U_{j+1/2,i} U^{n+1}_{j+1/2,i} + c^U_1 U^{n+1}_{j+3/2,i} + c^U_0 U^{n+1}_{j-1/2,i} +$$
$$+ b^U_1 U^{n+1}_{j+1/2,i+1} + b^U_0 U^{n+1}_{j+1/2,i-1} = \qquad (4)$$
$$= -\Delta y (P^{n+1}_{j+1,i} - P^{n+1}_{j,i}) + f^U,$$

$$d^V_{j,i+1/2} V^{n+1}_{j,i+1/2} + c^V_1 V^{n+1}_{j,i+3/2} + c^V_0 V^{n+1}_{j,i-1/2} +$$
$$+ b^V_1 V^{n+1}_{j+1,i+1/2} + b^V_0 V^{n+1}_{j-1,i+1/2} = \qquad (5)$$
$$= -\Delta x (P^{n+1}_{j,i+1} - P^{n+1}_{j,i}) + f^V,$$

$$\frac{U^{n+1}_{j+1/2,i} - U^{n+1}_{j-1/2,i}}{\Delta x} + \frac{V^{n+1}_{j,i+1/2} - V^{n+1}_{j,i-1/2}}{\Delta y} = 0, \qquad (6)$$

где коэффициенты дискретизации $d_{j+1/2,i}$, $d_{j,i+1/2}$, c_1, c_0, b_1, b_0 и свободные члены f с верхними индексами U, V – известные величины по данным с предыдущего шага, которые находятся по определенным алгебраическим формулам.

Хотя полученная система уравнений (4)–(6) является основной, однако она пока незамкнута, так как содержит неизвестное давление.

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ

Необходимое уравнение для вычисления давления можно получить из уравнения неразрывности. С этой целью будем следовать известной процедуре SIMPLE [22] и преобразуем уравнения (4) и (5) к следующему виду:

$$d^U_{j+1/2,i} U^{n+1}_{j+1/2,i} = $$
$$= -\Delta y \big(P^{n+1}_{j+1,i} - P^{n+1}_{j,i} \big) + G^U_{j+1/2,i}; \qquad (7)$$

$$d^V_{j,i+1/2} V^{n+1}_{j,i+1/2} = $$
$$= -\Delta x \big(P^{n+1}_{j,i+1} - P^{n+1}_{j,i} \big) + G^V_{j,i+1/2}, \qquad (8)$$

где введенные выражения $G^U_{j+1/2,i}$ и $G^V_{j,i+1/2}$ известны, так как они зависят от скоростей с предыдущего шага n. Далее для получения необходимого уравнения для давления на $(n+1)$ шаге используем уравнение неразрывности (6). Учитывая его структуру, предварительно в выражениях (7) и (8) для скоростей понизим индексы j и i на единицу соответственно. Тогда получим необходимые выражения для соответствующих компонентов скоростей в виде:

$$U^{n+1}_{j-1/2,i} = \frac{-\Delta y \big(P^{n+1}_{j,i} - P^{n+1}_{j-1,i} \big) + G^U_{j-1/2,i}}{d^U_{j-1/2,i}}, \qquad (9)$$

$$V^{n+1}_{j,i-1/2} = \frac{-\Delta x \big(P^{n+1}_{j,i} - P^{n+1}_{j,i-1} \big) + G^V_{j,i-1/2}}{d^V_{j,i-1/2}}. \qquad (10)$$

Подставляя теперь значения соответствующих компонентов скорости в уравнение неразрывности (6), получим выражение, в котором неизвестными величинами являются лишь сеточные функции давления в узле с номером (j,i) и окружающих его соседних узлах. Выполнив простые преобразования, после группировки соответствующих слагаемых получим следующий конечно-разностный аналог для вычисления сеточных функций давления:

$$d^P_{j,i} P^{n+1}_{j,i} + c^P_1 P^{n+1}_{j+1,i} + c^P_0 P^{n+1}_{j-1,i} +$$
$$+ b^P_1 P^{n+1}_{j,i+1} + b^P_0 P^{n+1}_{j,i-1} = f^P, \qquad (11)$$

где свободный член f^P известен, а коэффициенты дискретизации $d^P_{j,i}, c^P_1, c^P_0, b^P_1, b^P_0$ определены соотношениями:

$$c^P_1 = -\frac{hy1}{hx1} \frac{1}{d^U_{j+1/2,i}}; \quad c^P_0 = -\frac{hy1}{hx1} \frac{1}{d^U_{j-1/2,i}};$$

$$b^P_1 = -\frac{hx1}{hy1} \frac{1}{d^V_{j,i+1/2}}; \quad b^P_0 = -\frac{hx1}{hy1} \frac{1}{d^V_{j,i-1/2}}; \qquad (12)$$

$$d^P_{j,i} = -c^P_1 - c^P_0 - b^P_1 - b^P_0 ,$$

$$hx1 = (hx_j + hx_{j+1}), \quad hy1 = (hy_j + hy_{j+1}).$$

Полученное разностное уравнение для давления (11) является замаскированным уравнением Пуассона и представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Используя уравнения (7) и (8), выпишем выражения для компонентов скорости на $(n+1)$ шаге, явно связывающие их с давлением, в следующем окончательном виде:

$$U^{n+1}_{j+1/2,i} = \frac{\Delta y \big(P^{n+1}_{j,i} - P^{n+1}_{j+1,i} \big) + G^U_{j+1/2,i}}{d^U_{j+1/2,i}}; \qquad (13)$$

$$V^{n+1}_{j,i+1/2} = \frac{\Delta x \big(P^{n+1}_{j,i} - P^{n+1}_{j,i+1} \big) + G^V_{j,i+1/2}}{d^V_{j,i+1/2}}. \qquad (14)$$

Система уравнений (11), (13), (14) связывает давление со скоростями на $(n+1)$ шаге по времени и является фундаментальным результатом, представляющим универсальный дискретный аналог системы общих уравнений движения несжимаемой жидкости. Совершенно очевидно, что решение рассматриваемых систем алгебраических уравнений значительно проще, чем исходных интегральных или дифференциальных уравнений. Отметим, что уравнение Пуасона для давления фактически заменяет уравнение неразрывности и система уравнений оказывается замкнутой.

Хотя общее число уравнений, подлежащих решению, значительно возросло, но на современном этапе развития вычислительной техники это уже не принципиально, так как для решения таких систем алгебраических уравнений разработаны эффективные итерационные методы.

5. ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ

Важной особенностью полученного стационарного разностного уравнения для давления (11) является то, что благодаря использованию разнесенных сеток, граничные условия для его решения могут быть определены из уравнений движения (13) и (14) в комбинации с граничными условиями для компонентов скоростей [20]. В настоящем методе компоненты скорости и давления расщеплены так, что на любом этапе расчета решаются уравнения относительно одной зависимой переменной, что упрощает применение стандартных методов решения систем линейных алгебраических уравнений полученного вида.

В нашем случае эффективным способом решения рассматриваемого двумерного разностного уравнения второго порядка для давления является его редукция к двум одномерным системам уравнений второго порядка с трехдиагональными матрицами, которые решаются методом "прогонки" [23]. В зарубежной литературе его часто называют алгоритмом Томаса [24].

В данном методе расчеты проводятся для двух основных физических переменных – скорости, давления. Итерационный вычислительный процесс состоит из шагов по времени. Уравнение для давления решается на каждом временном шаге. В начале каждого временного шага предполагаются известными поля скорости и давления. Вычислительная процедура расчета каждого шага по времени разбивается на три этапа и выполняется в следующей последовательности. На первом этапе при заданных на предыдущем временном шаге значениях $U^n_{j+1/2,i}$ и $V^n_{j,i+1/2}$ по соответствующим алгебраическим формулам рассчитываются коэффициенты дискретизации $G^U_{j+1/2,i}(U^n,V^n)$, $G^V_{j+1/2,i}(U^n,V^n)$, $d^U_{j+1/2,i}(U^n,V^n)$, $d^V_{j,i+1/2}(U^n,V^n)$, $d^P_{j,i}$, c^P_1, c^P_0, b^P_1, b^P_0 включая свободный член $f^p(j,i)$. На втором этапе, зная коэффициенты уравнения Пуассона, путем его решения находится поле давления $P^{n+1}_{j,i}$. Далее, на третьем этапе, зная коэффициенты дискретизации и поле давления $P^{n+1}_{j,i}$, по уравнениям (13), (14) рассчитываются поля скорости $U^{n+1}_{j+1/2,i} V^{n+1}_{j,i+1/2}$ на $(n+1)$ шаге. На этом первый временной цикл заканчивается и далее начинается следующий. Задача решается на установление. Критерием окончания решения служит заданный временной интервал или условие, когда максимальная разность между значениями искомых переменных на предыдущем и следующем временном шаге не превышает заданную величину ошибки ε.

Используемая конечно-разностная схема аппроксимирует рассматриваемые уравнения с первым порядком точности по времени и со вторым порядком точности по пространственным переменным $O(\Delta\tau, h^2)$, и можно показать, что она устойчива [25]. На каждом шаге по времени контролируется сходимость расчетов как основных уравнений, так и граничных условий. Алгоритм решения на установление позволяет получить как стационарное решение, так и исследовать эволюцию течений во времени.

Важным моментом расчетов является переход в граничных условиях для U и V к конечным разностям и контроль за выполнением уравнения неразрывности. Описанный алгоритм решения системы двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса реализован в виде компьютерной программы UDAMEL (Universal Discrete Analogue Momentum Equation Liquid), которая позволяет решать эволюционную задачу гидродинамики ламинарных течений.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Данная работа преследовала две основные цели. Первая состояла в апробации численной схемы интегрирования двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление на примере расчета ламинарного течения в плоском канале с внезапным расширением. Вторая – в изучении детальной структуры течения и поля давления в плоском канале, на нижней стенке которого имеется уступ с вертикальным размером $B = b/h$. Некоторые результаты расчетов полей скорости, давления и протяженности циркуляционной области за уступом в зависимости от числа Рейнольдса и значения параметра B представлены ниже на соответствующих рисунках. Основные численные расчеты были проведены при значении параметра $B = 0.4$ на равномерных сетках с шагами $\Delta X = \Delta Y = 0.02$. Шаг по времени и длина расчетной области варьировались в зависимости от числа Рейнольдса. Расчеты выполнены для шести чисел Рейнольдса (Re=100, 400, 600, 800, 1000, 2000). Время счета на ПК с частотой процессора 3.00 ГГц занимало от 0.5 до 5 часов в зависимости от длины расчетной области и числа Рейнольдса.

На рис. 2 приведены результаты расчетов в виде векторного поля скоростей в расчетной области плоского канала с высотой уступа $B = 0.4$ при различных значениях числа Рейнольдса для $\tau = 100$. Приведенные рисунки наглядно демонстрируют изменение общей картины течения в зависимости от числа Re при заданном параметре расширения потока B.

Из приведенных рисунков видно, что для ука-

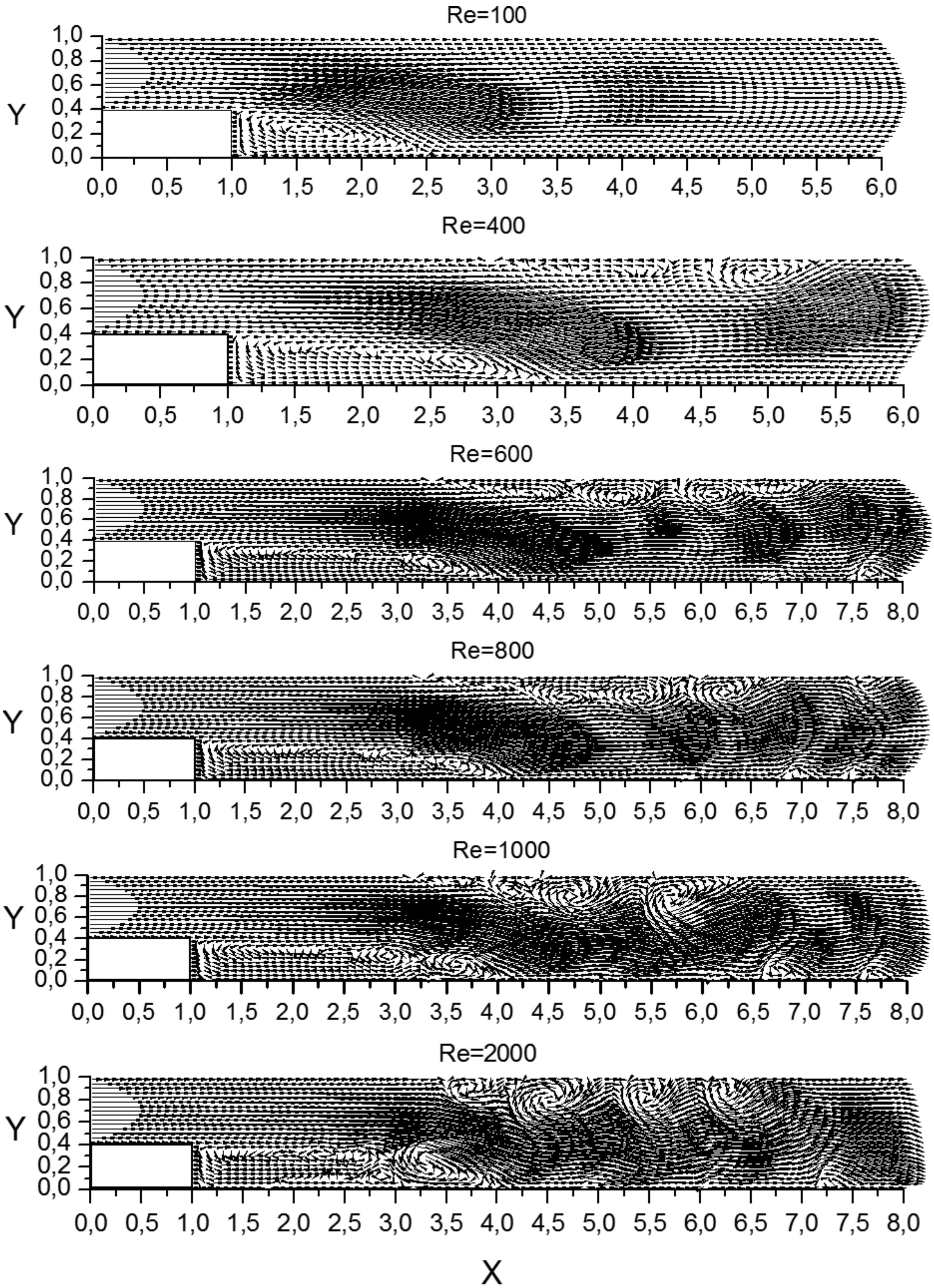

Рис. 2. Расчетное векторное поле скоростей в плоском внезапно расширяющемся канале ($B = 0.4$) при шести различных числах Рейнольдса для $\tau = 100$

занных шести чисел Рейнольдса, вычисленных по выходной ширине канала h, в зоне за уступом характерно образование возвратных течений, а протяженность этой зоны и структура циркуляционного течения в ней зависят от числа Рейнольдса и высоты уступа B. Нетрудно видеть, что при Re=100 и $B = 0.4$ наблюдается хорошо выраженная зона с установившимся возвратно-циркуляционным течением в виде одного вихря, вытянутого вдоль по потоку за уступом. С ростом числа Рейнольдса кинематическая структура потока качественно меняется как в зоне за уступом, так и ниже циркуляционной области. Уже при Re ≥ 400 циркуляционная зона за уступом дробится на две области. При этом основной вихрь занимает лишь правую часть циркуляционной зоны, а на верхней стенке канала ниже нее образуется вторичная вихревая область с направлением вращения против часовой стрелки, то есть противоположным основному направлению движения жидкости в канале. Физически ее появление объясняется явлением отрыва потока за уступом. Полученная расчетом тонкая структура течения в этой вторичной области свидетельствует о высоком качестве используемой численной схемы. Нетрудно видеть, что с ростом числа Рейнольдса, то есть при Re ≥ 800, горизонтальный размер вторичной вихревой области растет, а ее структура усложняется и приводит к образованию нескольких локальных вихревых областей, которые отчетливо видны на рис 2. Следовательно, в зависимости от числа Рейнольдса при заданной высоте уступа B может существовать как стационарный режим течения, так и нестационарный с отрывом

Таким образом, когда канал имеет внезапное расширение, то вследствии отрыва при числах Re ≥ 400 на верхней стенке канала образуется вторичная вихревая зона. Наложение вертикальных скоростей на основной поток приводит к перераспределению скоростей по ширине канала в зоне уступа. Эти вертикальные составляющие скорости увеличивают перенос количества движения между отдельными слоями потока, что вызывает деформацию вертикального профиля продольной скорости.

С целью полноты представления картины скоростного поля в плоском канале с внезапным расширением на рис. 3 приведены расчетные профили горизонтальной скорости $U(Y)$ в различных сечениях по оси X при шести числах Рейнольдса (Re =100,400, 600, 800, 1000, 2000). Вместе с рис. 2 они наиболее полно иллюстрируют структуру течения и искривление линии максимальных скоростей в канале при больших числах Рейнольдса, которое обусловлено возникновением системы вихрей не только в зоне за уступом, но и на верхней стенке канала.

Анализ расчетов показывает, что с ростом числа Рейнольдса в угловой точке уступа происходит отрыв потока, который является причиной образования вихревых циркуляционных зон в области за уступом и сноса вихревых сгустков вниз по потоку. Это явление сопровождается наличием дополнительных потерь энергии основного потока и усилением обмена количества движения между слоями жидкости, что и обуславливает изменение кинематической структуры потока. Переформирование скоростной структуры по высоте приводит к возникновению на определенных участках канала положительных градиентов давления, что служит причиной образования вторичных вихревых зон. Когда это происходит у верхней стенке канала ниже уступа, то имеет место отжим основного потока, и на этом участке он ускоряется, что и наблюдается в приведенных на рис. 2 результатах расчетов.

Указанные особенности потоков в каналах с внезапным расширением имеют важное значение при проектировании различных устройств и аппаратов, например, с точки зрения процессов теплообмена и шумообразования.

Наряду с векторным полем скоростей на рис. 4 приводятся данные расчетов в виде изолиний равных скоростей для $B = 0.4$ при шести различных значениях чисел Рейнольдса.

Здесь особенно четко прослеживается образование мультивихревой структуры течения и количественные значения скоростей в области за уступом в зависимости от параметра Re при $B = 0.4$.

Изолинии равных скоростей и их векторное представление позволяют отметить несколько характерных моментов в формировании кинематической структуры течения в зависимости от числа Рейнольдса. При малых числах Рейнольдса (Re ≤ 100) вязкие эффекты являются преобладающими и скоростная структура течения во всей расчетной области оказывается простейшей и определена фактически параболой Пуазейля, за исключением циркуляционной зоны за уступом. Рост числа Рейнольдса приводит к увеличению роли конвективного переноса.

При Re ≥ 400 происходит отрыв потока с кромки уступа. В результате этого позади уступа циркуляционное вихревое течение интенсифицируется, а на верхней стенке канала появляется вторичная вихревая область, которая хорошо видна на рис. 2 и 4.

Анализ векторного поля и расположение линий

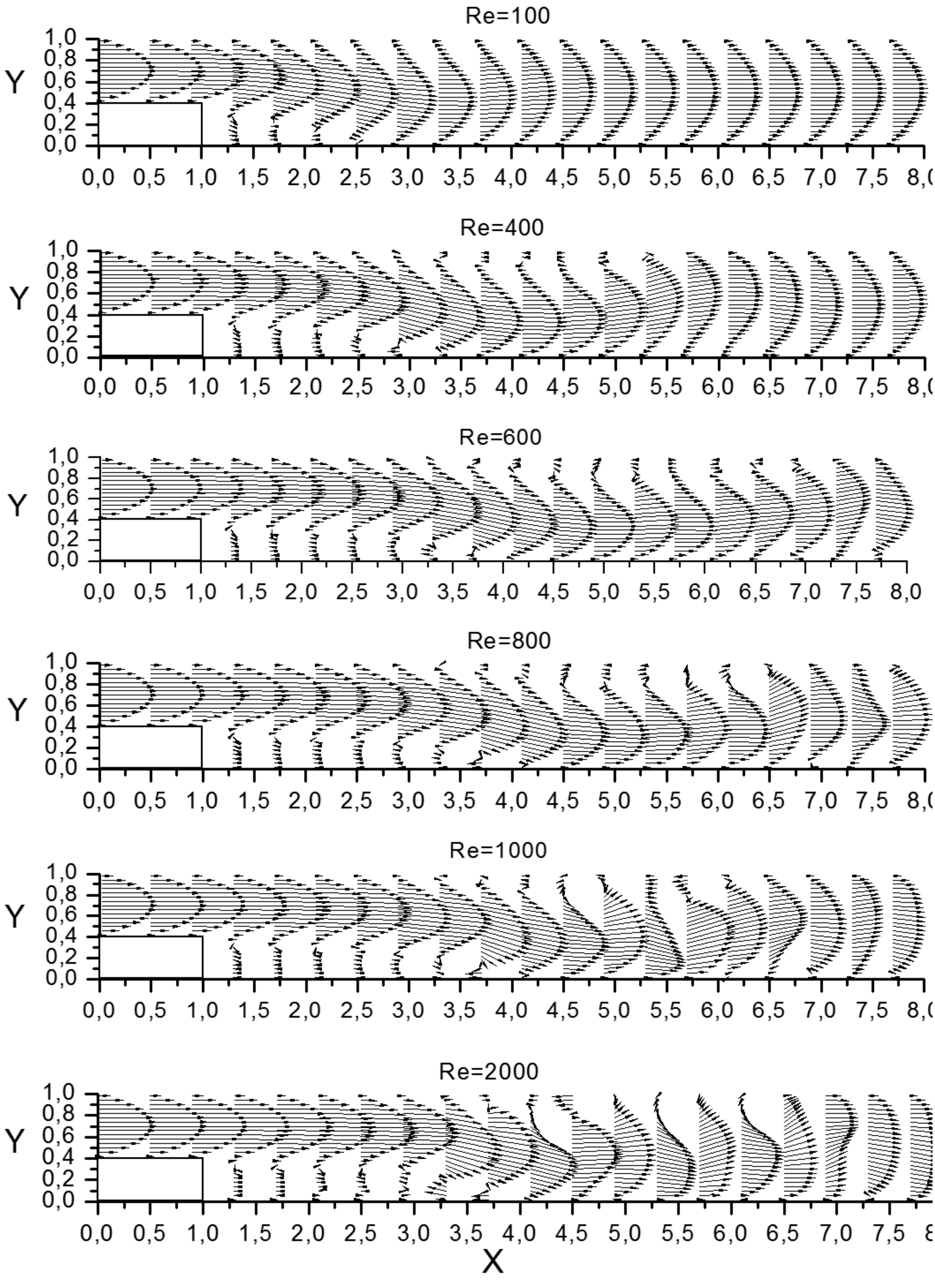

Рис. 3. Расчетные профили горизонтальных скоростей в различных сечениях оси X
в плоском внезапно расширяющемся канале ($B = 0.4$)
при шести различных числах Рейнольдса (Re=100, 400, 600, 800, 1000, 2000) для $\tau = 100$

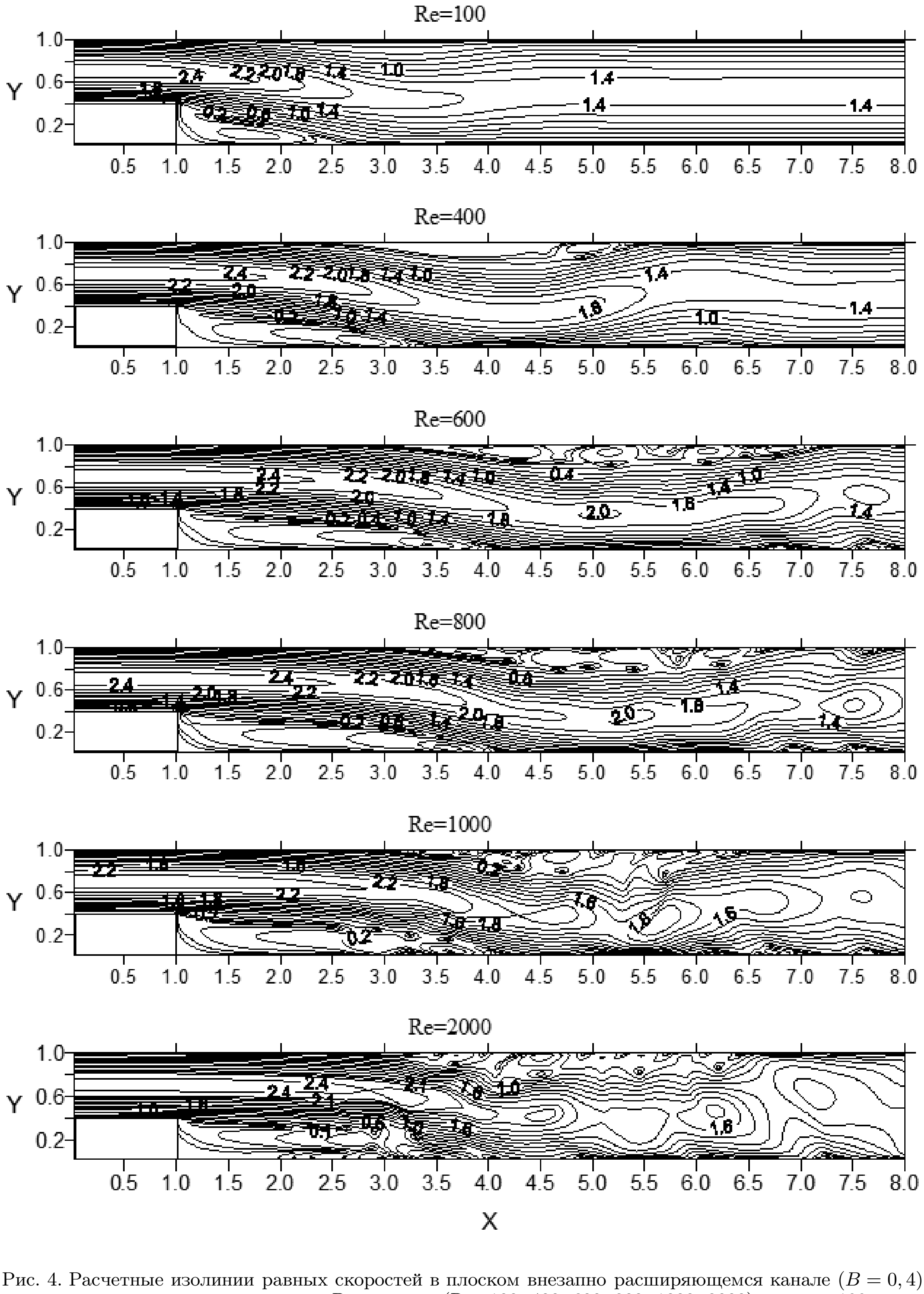

Рис. 4. Расчетные изолинии равных скоростей в плоском внезапно расширяющемся канале ($B = 0,4$) при шести различных числах Рейнольдса (Re=100, 400, 600, 800, 1000, 2000) для $\tau = 100$

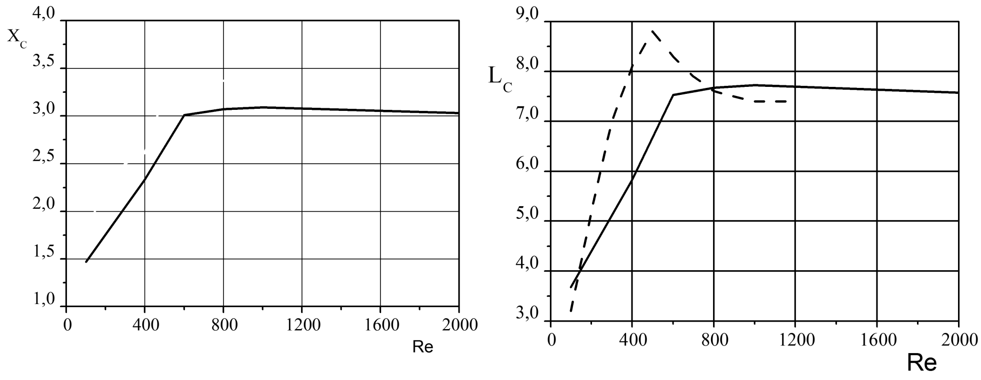

Рис. 5. Зависимость длины циркуляционной зоны за уступом $X_C = x/h$ и $L_C = X_C/B$ от числа Рейнольдса в плоском канале с внезапным расширением:
сплошная – наш расчет, $B = 0.4$; штриховая – расчет [4], $B = 0.48$

равных скоростей, подобных линиям тока, наглядно показывает особенности и структуру циркуляционного движения жидкости. Из-за прилипания жидкости на нижней стенке канала движение в циркуляционной зоне несимметрично. С ростом числа Рейнольдса центр основного вихря смещается вправо по направлению основного потока в канале. Очевидно, что зона рециркуляции в рассмотренных случаях подпитывается жидкостью из основного потока благодаря образованию возвратного течения в зоне за уступом, как показано на рис. 3.

Нетрудно заметить, что обратное течение в области отрыва достигает значительной высоты над нижней стенкой канала, а с ростом числа Рейнольдса ее горизонтальный размер увеличивается, при этом вихревая область остается в правой части области отрыва, а основную левую часть области занимает обратное слоистое течение. Таким образом, вблизи нижней стенки канала имеют место как положительные, так и отрицательные значения продольной скорости.

С удалением от уступа вниз по течению вертикальный размер основной циркуляционной зоны уменьшается и при некотором значении X_c ее граница замыкается на нижнюю стенку канала. За этим сечением профиль горизонтальной скорости $U(Y)$ в канале начинает постепенно деформироваться в параболу Пуазейля, которая реализуется на достаточно большом удалении от уступа.

На рис. 5 представлены расчетные зависимости длины циркуляционной зоны за уступом $X_C = x_C/h$ и $L_c = X_c/B$ в зависимости от числа Рейнольдса с различной их нормировкой при значении высоты уступа $B = 0.4$. В качестве критерия определения координаты X_c принималось то значение X, при котором ближайшее к нижней стенке канала значение $U(Y)$ меняло свой знак.

Анализ полученной расчетной зависимости L_c от числа Рейнольдса показывает, что длина циркуляционной зоны L_c нелинейно зависит от числа Re, а с его увеличением L_c стремится к предельному значению $L_c = 7.7$ для $B = 0.4$. При Re=800 и Re=1000 расчетные значения L_c практически уже совпадают. Это можно объяснить тем, что при числах Рейнольдса Re=1000 конвективные эффекты уже доминируют над вязкими и длина L_c перестает зависеть от числа Re. Геометрические параметры циркуляционной зоны имеют важное значение для различных прикладных задач.

В целом полученные результаты расчетов полей скорости в области внезапного расширения поперечного сечения плоского канала хорошо согласуются с известными представлениями картины течения, наблюдаемой в физических и численных экспериментах [10, 13]. Однако наряду с этим, на верхней стенке канала ниже циркуляционной зоны возникают вторичные вихревые области, индуцируемые явлением отрыва и обратной связью полей давления. Кроме того, ниже по потоку за основной циркуляционной зоной на нижней стенке канала при числах Re=800 и Re=1000 имеются еще две дополнительные небольшие вихревые области. На рис. 2 они сами и их размер хорошо видны. Такие результаты ранее встречались в работе [4], где теоретически и экспериментально исследовано распределение полей скорости, длины циркуляционной зоны за уступом и координаты вторичных вихревых зон в плоском канале с внезапным расширением. Измерения выполнялись с помощью лазерно-доплеровского анемометра в диапазоне чисел Рейнольдса $70 \leq \text{Re} \leq 8000$. При-

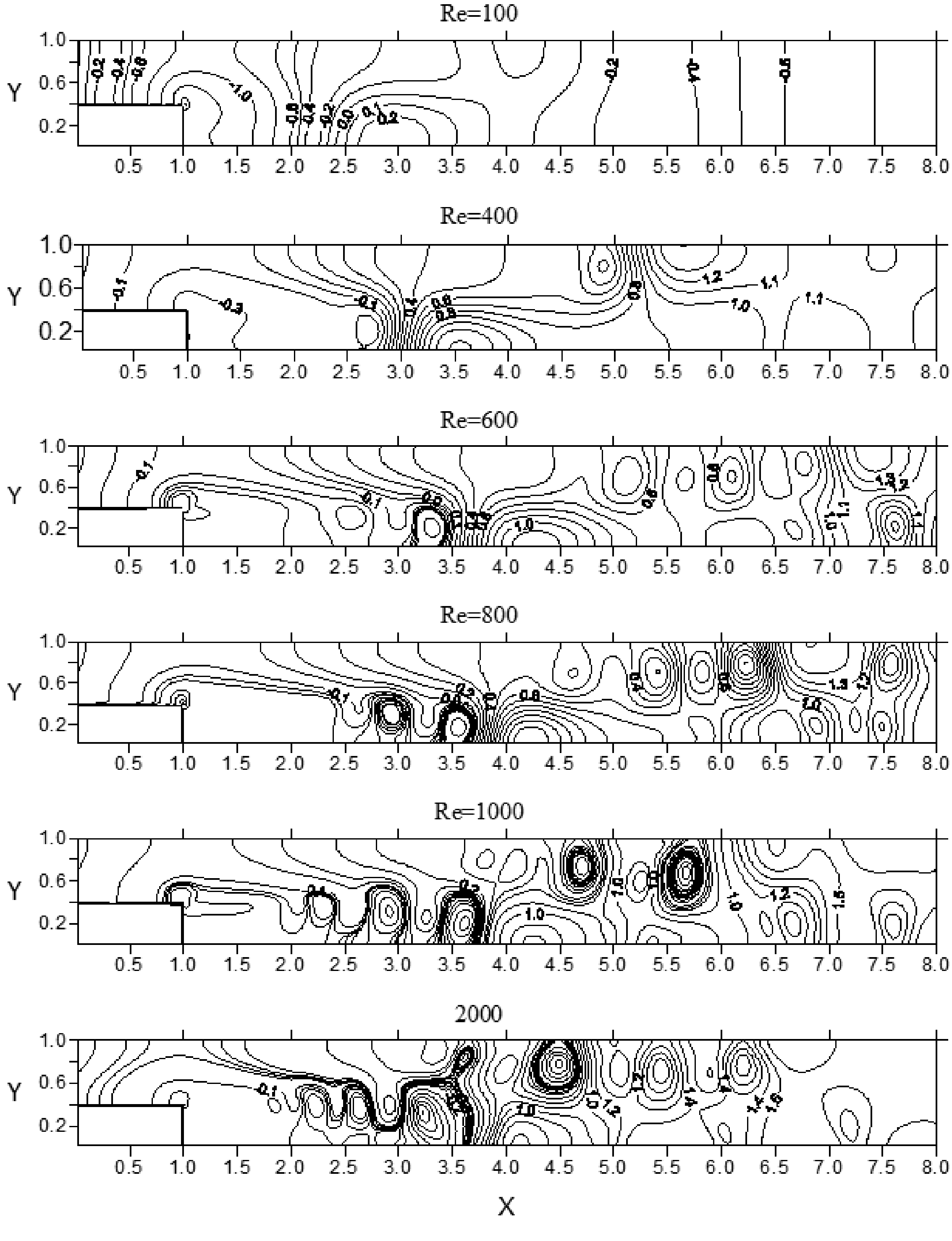

Рис. 6. Расчетное поле давления в виде коэффициентов C_p в плоском внезапно расширяющемся канале ($B = 0.4$) при шести различных числах Рейнольдса (Re=100, 400, 600, 800, 1000, 2000) для $\tau = 100$

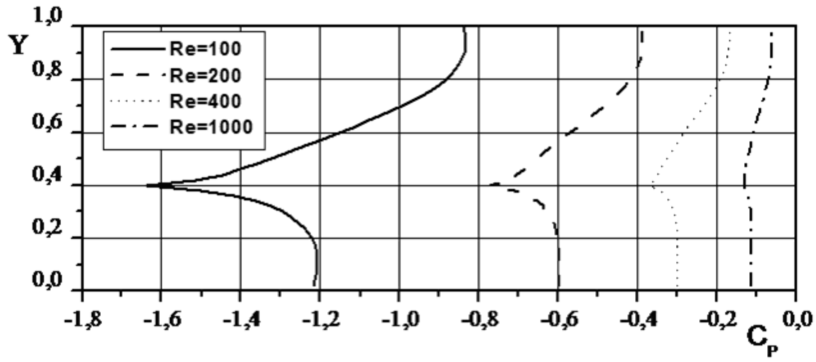

Рис. 7. Распределение коэффициента давления C_p по оси Y в сечении внезапного расширения канала $EFC_1(X = 1.02)$ для четырех значений чисел Рейнольдса при $B = 0.4$

чем область измерения охватывала не только циркуляционную зону, но и значительную область за участком расширения. При этом на верхних и нижних стенках канала зафиксированы вторичные вихревые области. В наших расчетах эти зоны наблюдаются при числах Re ≥ 400. С ростом числа Рейнольдса горизонтальный размер верхней вторичной зоны увеличивается, а вихревая структура усложняется. Это хорошо видно на рис. 2 и 4. Нам удалось сопоставить расчитанную нами и в работе [4] длину основной циркуляционной зоны в зависимости от числа Рейнольдса. Результаты этих расчетов приведены на рис. 5 (справа). Сплошная кривая соответствует нашим расчетам, а штриховая – работе [4]. Качественно эти результаты хорошо согласуются, но в нашем случае высота уступа $B = 0.4$, а в работе [4] $B = 0.48$. Это может объяснить количественное отличие результатов.

Так как используемый в данной работе универсальный дискретный аналог уравнений движения Навье-Стокса реализован в переменных скорость-давление, то, в отличие от предыдущих работ, он дает возможность рассчитывать и поля давления, которые позволяют объяснить полученный результат, связанный с появлением вторичных вихрей у верхней стенки канала.

Результаты расчетов, относящиеся к распределению поля давлений, представлены на рис. 6–8. В качестве первого примера на рис. 6 приведены результаты расчетов поля давления в виде изолиний коэффициента давления C_{p},

$$C_p = \frac{p - p_1}{\rho u_0^2/2},$$

для высоты уступа $B = 0.4$ при шести различных числах Рейнольдса (Re =100, 400, 600, 800, 1000, 2000). Здесь p_1 – характерное давление на геометрической оси входного сечения канала.

Картина этих изолиний весьма сложна и характерна для отрывных течений, когда область циркуляционного течения за уступом мала по сравнению с протяженностью основного течения в канале. Анализ рис. 6 показывает, что наличие уступа и циркуляционной зоны при всех рассматриваемых числах Рейнольдса влияет на формирование поля давления. Легко видеть, что при Re=100 это влияние существенно лишь в ближней области за уступом, так как вниз по течению давление по вертикали при небольших X становится постоянным. С ростом числа Рейнольдса это влияние распространяется на значительную область за уступом. При Re $\geq$ 400 существенно изменяется картина поля давления в канале, включая образование его ячеистой структуры.

Для объяснения механизма образования вихревых течений в канале с внезапным расширением обратимся к рассмотрению результатов расчета локальных значений давления в четырех характерных сечениях расчетной области (см. рис. 1).

Сюда относится участок верхней стенки канала B_1C $(Y = 1.0)$, осевая линия канала $(Y = 0.5)$, участок на уровне высоты уступа $(Y = 0.4)$, участок нижней стенки канала $ED(Y = 0)$ и левая вертикальная граница уступа $C_1FE(X = 1.0)$.

Характер изменения давления в сечении $C_1FE(X = 1)$ вдоль вертикальной стенки уступа при различных числах Рейнольса для $B = 0.4$ приведен на рис. 7. Как и следовало ожидать, на вертикальной стенке уступа давление вблизи нижней стенки канала постоянно, а затем по мере приближения значений Y к углу уступа, то есть координате $Y = 0.4$, значение давления падает и стремиться к значению давления вблизи угловой точки уступа. В основном потоке на вертикальном участке C_1F локальное значение

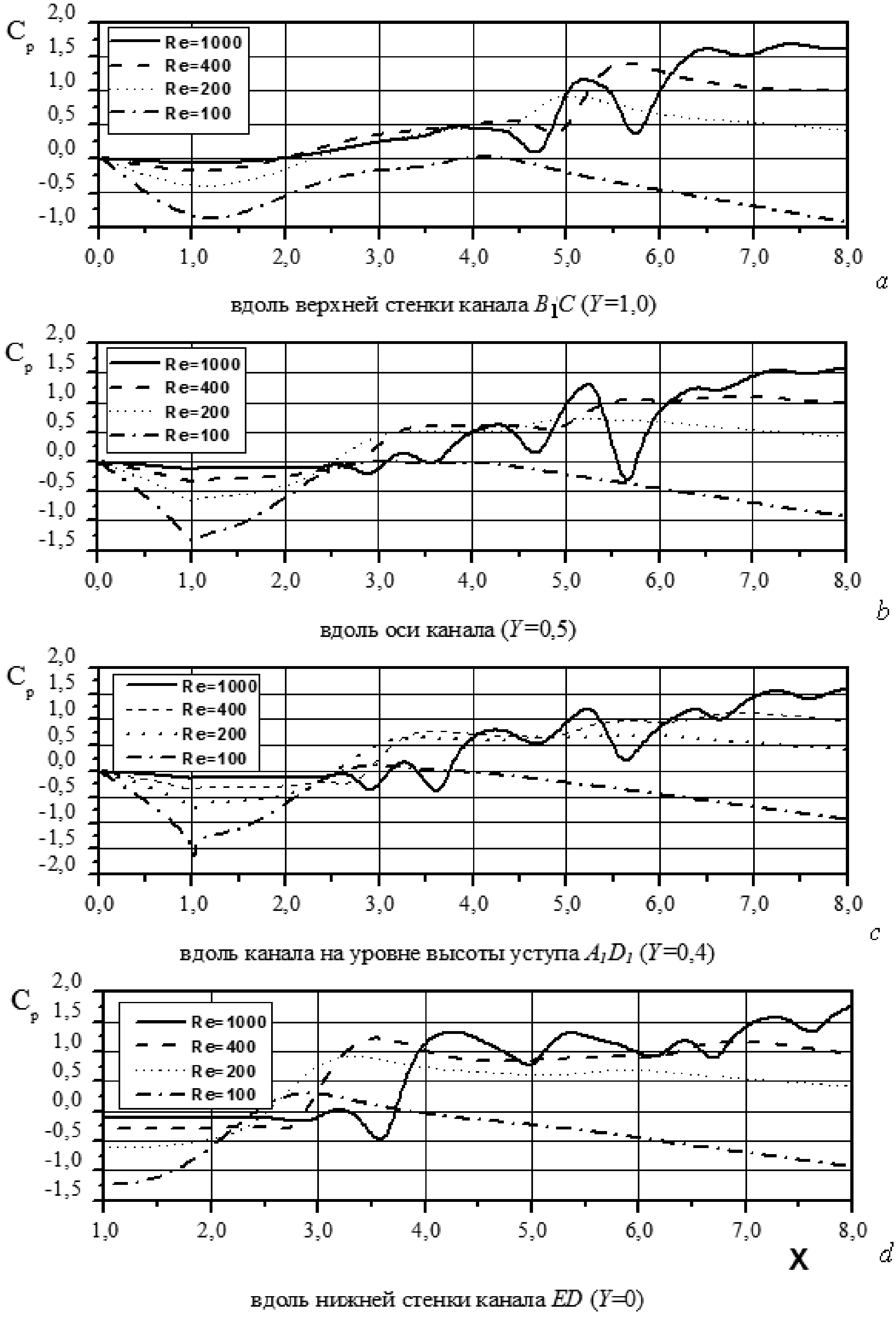

Рис. 8. Распределение коэффициента давления C_p вдоль оси X в плоском внезапно расширяещемся канале на четырех уровнях по вертикали ($Y = 1.0; 0.5; 0.4; 0$) при различных значениях чисел Рейнольдса для $B = 0.4$ и $\tau = 100$

коэффициента давления вблизи верхней стенки канала максимально и сначала постоянно, а по мере приближения к уступу ($Y = 0.4$) оно плавно уменьшается и стремится к локальному давлению в угловой зоне уступа. Описанная картина распределения давления в сечении C_1FE имеет место при различных числах Рейнольдса. Поэтому характер этих кривых, представленных на рис. 7, идентичен, а различие состоит лишь в количественном значении безразмерного коэффициента давления C_p.

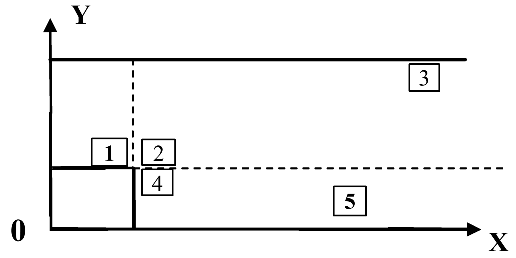

Рис. 9. Схема расположения пяти реперных точек

На комплексном рис. 8 представлено расчетное распределение коэффициента давления C_p вдоль оси X для четырех различных уровней по высоте Y. Расчеты показывают, что при заданном параметре расширения канала B изменение коэффициента давления C_p вдоль оси X зависит от величины числа Рейнольдса.

Обращает на себя внимание, что при Re=1000 изменение коэффициента давления вдоль оси X носит волновой характер на всех четырех уровнях по высоте:

a) – вдоль верхней стенки канала $\mathrm{B}_1\mathrm{C}(Y = 1.0)$;

b) – вдоль оси канала ($Y = 0.5$);

c) – вдоль канала на уровне высоты уступа $\mathrm{A}_1D_1(Y = 0.4)$;

d) – вдоль нижней стенки канала $ED(Y = 0)$.

Данные расчетов коэффициента давления C_p вдоль оси X, представленные на рис. 8, *a, b, c*, показывают, что при $\mathrm{Re} \leq 400$ давление над уступом при $0 < X \leq 1$ линейно убывает с расстоянием X, а при $\mathrm{Re} > 1000$ оно остается почти постоянным. Далее за уступом давление возрастает вследствие расширения потока. Это увеличение давления происходит до тех пор, пока противодействующий отрицательный градиент основного потока в канале не уравновесит возмущенное давление. Этот механизм действует при числах $\mathrm{Re} \leq 400$, а при числах $\mathrm{Re} > 400$ вследствие явления отрыва потока характер поведения давления с расстоянием X изменяется.

Уже при Re=400 наблюдается его повышение и низкочастотная осцилляция, а при Re=1000 оно на всех четырех рассматриваемых уровнях по Y возрастает и носит волновой характер. Это обусловлено наличием сложной вихревой структуры течения, которая хорошо видна на рис. 4 и 6.

Для выяснения процессов стационарности характеристик течения интересно рассмотреть их зависимость от времени. В качестве примера рассмотрим поведение продольной U, поперечной скорости V и избыточного давления C_p в пяти характерных точках потока, первая из которых находится перед кромкой уступа, вторая – сразу за уступом, четвертая находится под ней, несколько смещенная вниз, третья точка находится во вторичной вихревой зоне вблизи верхней стенки канала, а пятая точка находится в области присоединения основной циркуляционной зоны вблизи нижней стенки канала. Расположение указанных реперных точек схематически показано на рис. 9.

В качестве примера расчета поведения основных характеристик течения на комплексном рис. 10 представлены зависимости скоростей U, V и давления C_p от времени в указанных пяти точках при числе Re=1000. Анализ рисунков показывает, что в первой, второй и четвертой точках сдвиговый слой за кромкой уступа остается устойчивый и характеристики течения в нем U, V и C_p выходят на стационарный режим и при $\tau > 30$ практически не изменяются.

В точках 3 и 5, находящихся в вихревых зонах, наблюдается более сложная динамика течения. Расчеты показывают, что в точках 3 и 5 развивается неустойчивость в виде колебания значений соответствующих характеристик потока. Это связано с вихревой структурой течения.

Амплитуда этих колебаний носит нерегулярный характер. В пятой точке характерно появление вторых гармоник для обеих компонент скорости и коэффициента давления. Естественно, здесь приведены лишь некоторые типичные примеры расчета, но они показывают возможность дальнейшего корреляционного и спектрального анализа соответствующих динамических рядов.

ВЫВОДЫ

Универсальный дискретный аналог общих нестационарных уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление успешно применен для решения задачи о течении в плоском канале с внезапным односторонним расширением. Разработанный численный метод решения системы разностных уравнений движения показал эффективность используемой численной схемы для расчета

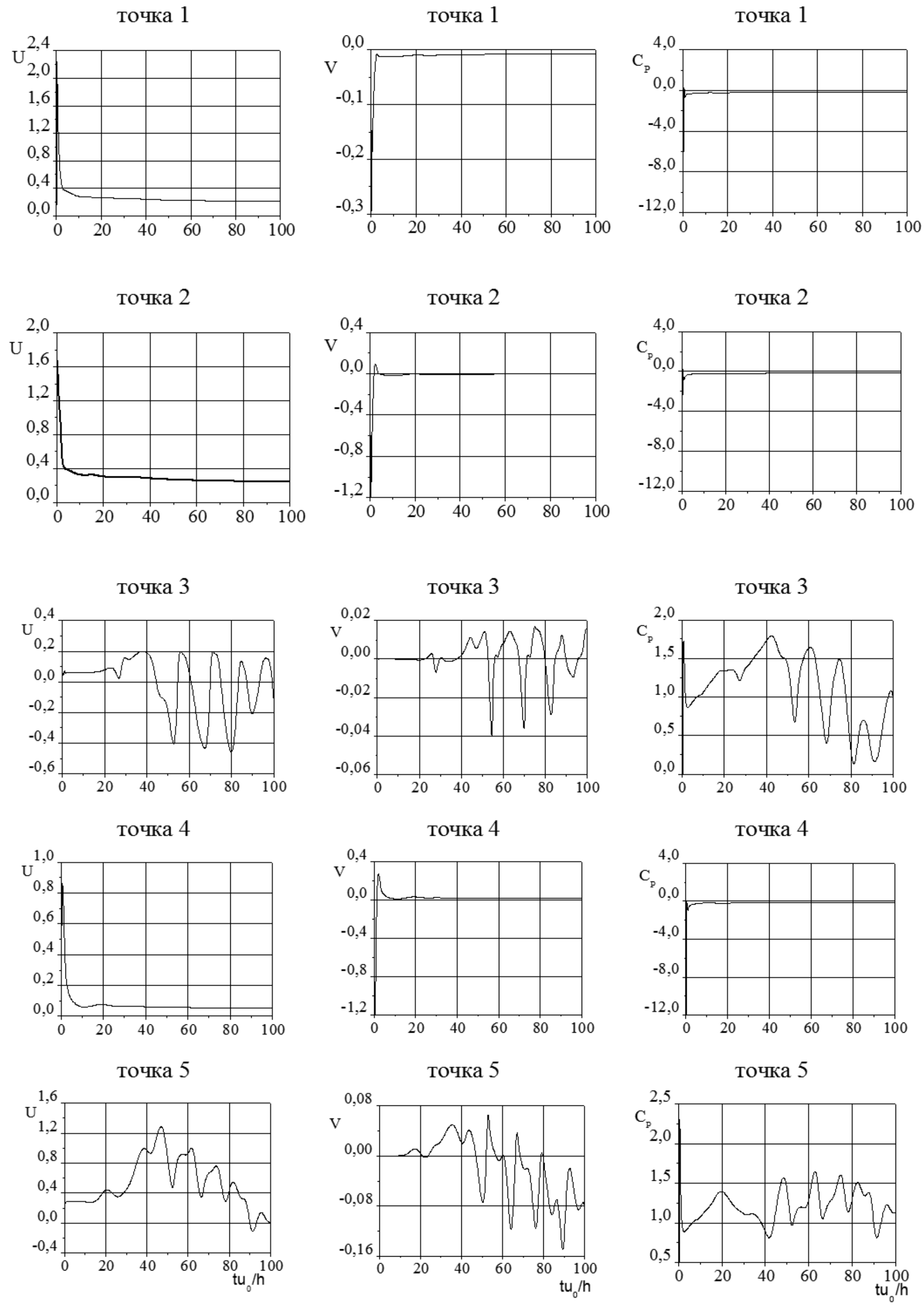

Рис. 10. Зависимость мгновенных значений компонентов скоростей U, V и давления C_p в точках *1–5* (см. рис. 9) во времени при числе Рейнольдса Re=1000

сложных течений с рециркуляциями и высокое качество моделирования тонкой структуры течения в вихревых зонах до чисел Рейнольдса Re$\leq$ 2000. В результате детального исследования полей скорости и давления изучены закономерности формирования вихревой структуры течения в плоском канале с внезапным расширением, включая вторичные вихревые образования и нестационарные отрывные режимы течения.

В заключение следует отметить, что хотя при Re= 2000 численное решение оставалось устойчивым, но относиться к нему следует осторожно и рассматривать его нужно как численный эксперимент, полезный для более глубокого понимания свойств решений полных уравнений Навье-Стокса.

1. *Blasius H.* Laminare Stromung in Kanalen Wecselnder Briete // Zeitschrift fuer Mathematik und Physik.– 1910.– **10**.– S. 225.
2. *Honji H.* The starting flow down a step // J. Fluid Mech.– 1975.– **69**, Pt. 2.– P. 229–240.
3. *Синха С. Н., Гупта А. К., Оберай М. М.* Ламинарное отрывное обтекание уступов и каверн. Ч 1. Течение за уступом // Ракетная техника и космонавтика.– 1981.– **19**, N 12.– С. 33–37.
4. *Armaly B. F., Durst F., Pereira J. C. F., Schonung B.* Experimental and theoretical investigation of backward-facing stap flow // J. Fluid Mech.– 1983.– **127**.– P. 473–496.
5. *Чжен П.* Отрывные течения.– М.: Мир, 1972-1973.– Т.1.– с.300, Т.2.– 280 с.,Т.3.– 354 с.
6. *Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю.* Турбулентные отрывные течения.– М.: Наука, 1979.– 368 с.
7. *Le H., Moin P., Kim J.* Direct numerical simulation of turbulent flow a backward-facing stap // J. Fluid Mech.– 1997.– **330**.– P. 349–374.
8. *Durst F., Melling A., Whitelow J.H.* Low Reynolds Number Flow-over a Plane Symmetric Sudden Expansion // J. Fluid Mech.– 1974.– **64**, N 1.– P. 111–118.
9. *Cherdron W., Durst F., Whitelow J.H.* Assymmetric Flow and Instabilities in Symmetric Ducts with Sudden Expansion // J. Fluid Mech.– 1978.– **84**.– P. 13–31.
10. *Macadno E.O., Hung T.K.* Computational and Experimental Study of a laptive Annular Eddy // J. Fluid Mech.– 1967.– **28**, N 1.– P. 43–64.
11. *Kumar A., Yajnik K.S.* Internal Separated Flow at large Reynolds Number // J. Fluid Mech.– 1980.– **97**, N 1.– P. 27–51.
12. *Плоткин.* Расчеты спектральным методом некоторых отрывных ламинарных течений в каналах // Аэрокосмическая техника.– 1983.– N 7.– С. 75–85.
13. *Acrivos A., Schrader M. L.* Steady Flow in a Sudden Expansion at High Reynolds Number // Phys. Fluids.– 1982.– **25**, N 6.– P. 923–930.
14. *Куон и др.* Расчет течений с внезапным расширением при помощи уравнений пограничного слоя // Теор. основы инж. расч.– 1984.– N 3.– С. 116.
15. *Льюис, Плетчер.* Пределы применимости уравнений пограничного слоя для расчета ламинарных течений с симметричным внезапным расширением // Теор. основы инж. расч.– 1986.– N 2.– С. 284–294.
16. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика.– М.: Мир, 1980.– 616 с.
17. *Тейлор Т. Д., Ндефо Э.* Расчет течения вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления. Численные методы в механике жидкости.– М.: Мир, 1973.– 304 с.
18. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.– Новосибирск: Наука, 1967.– 196 с.
19. *Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И., Розумнюк Н.В.* Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление // Прикладна гідромеханіка.– 2008.– 10(82).– С. N2.13-23
20. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей.– М.: Мир, 1991.– 1.-501, 2.-552 с.
21. *Харлоу Ф.Х.* Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики; Вычислительные методы в гидродинамике.– М.: Мир, 1967.– 316–342 с.
22. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.– М.: Энергоатомиздат, 1984.– 152 с.
23. *Самарский А.А.* Теория разностных схем.– М.: Наука, 1977.– 656 с.
24. *Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен.– М.: Мир, 1990.– Т.1– 384с.; Т.2 – 392с.
25. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред.– М.: Физматлит, 1984.– 519 с.