

УДК 532.59

ХАРАКТЕРНЫЕ СВОЙСТВА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

О. В. АВРАМЕНКО*, Ю. В. ГУРТОВЫЙ*, И. Т. СЕЛЕЗОВ**

* Кировоградский государственный педагогический университет

** Институт гидромеханики НАН Украины

Получено 10.10.2008

Рассматривается задача о распространении волновых пакетов на границе раздела двух жидких слоев с разной плотностью. Жидкость предполагается идеальной несжимаемой, на поверхности раздела учитывается поверхностное натяжение. Проводится анализ влияния геометрических и физических параметров на асимметрию гребней и подошв волновых пакетов. Показано, что учет второго приближения приводит к возникновению асимметрии гребней и подошв. В частности, в случае модуляционной неустойчивости имеет место затупление или заострение огибающих.

Розглянуто задачу про поширення хвильових пакетів на межі розділу двох рідких шарів з різною густиною. Рідина вважається ідеальною нестисливою, на поверхні розділу враховується поверхневий натяг. Проводиться аналіз впливу геометричних та фізичних параметрів на асиметрію гребенів і підшв хвильових пакетів. Показано, що врахування другого наближення призводить до появи асиметрії гребенів і підшв. Зокрема, у випадку модуляційної нестійкості має місце затуплення або загострення огиаючих.

The problem of wave packets propagation at the interface between the two liquid layers of different densities, is considered. The liquid is assumed to be ideal and incompressible and the surface tension is taken into account at the interface. The analysis of the influence of geometric and physical parameters on the crest and bottom scewness of wave packets. It is shown that taking into account the second approximation leads to appearance of the scewness of crests and bottoms. In particular, in the case of modulation instability, the blunting or sharpening of envelope takes place.

ВВЕДЕНИЕ

Изучению внутренних волн конечной амплитуды большое внимание уделялось в работах Бени [10], Бенджамина [9], Оно [7], Девиса и Акриво-са [13], Кубота, Ко и Добс [16] и др. Большинство работ связано с анализом волновых движений в системах, где внутренние волны являются слабо-нелинейными и длинными по отношению к полной толщине жидких слоев. Такое моделирование приводит к уравнениям типа Кортевега-де Вриза, описывающим эволюцию волновых движений и основанным на балансе между нелинейностью и дисперсией. Эти уравнения достаточно хорошо изучены, найдены методы построения точных решений для произвольно определенных начальных условий (Сегур [20]). Дополнительно к классическим теориям мелкой воды был проведен анализ нелинейных внутренних волн в бесконечной жидкости (Бенджамин [9]; Оно [7]). Здесь длина волны отнесена к верхнему слою термоклина, а не к полной глубине жидкости. В этой гидродинамической системе "слой-полупространство" проблема дисперсии учтена таким образом, что эволюционное уравнение содержит дисперсионный член, который является преобразованием Гильберта.

Кубота [16] вывел эволюционное уравнение, которое интерполирует ситуацию между мелкой и глубокой водой. Это уравнение справедливо при толщине верхнего слоя значительно меньшей, чем

вся глубина. Оно имеет дисперсионный член в виде трансцендентного интегрального оператора, который приводится или к третьей производной уравнений Кортевега-де Вриза, или к преобразованию Гильберта для мелкой и глубокой воды соответственно.

Выделим некоторые более поздние работы, касающиеся проблемы нелинейных явлений в жидкости: Г.Сегур и Дж.Хаммак [21], Г.Йен и Б.Лейк [24], М.Абловиц и Г.Сегур [6], Дж.Уизем [4], П.Бхатнагар [11], И.Т.Селезов и С.В.Корсунский [22]. Статья Найфэ [19] содержит обстоятельный анализ волновых движений на поверхности контакта двух полубесконечных жидкостей с учетом поверхностного натяжения. Аналогичная задача о распространении волновых пакетов на поверхности контакта жидкого полупространства и жидкого слоя над ним изучалась в [8], где обсуждалась проблема устойчивости волновых пакетов в системе "слой-полупространство" методом много-масштабных разложений до третьего порядка.

Отметим также некоторые из исследований двухслойных систем, опубликованные в последнее время. В статье Бьюика и Мартина [12] представлено физико-математическое моделирование внутренних волн на границе раздела двух вязких несжимаемых слоев. Результаты моделирования волновых движений сравнивались с полученными в лабораторных условиях, и установлено достаточно хорошее соответствие теоретических и экспери-

ментальных результатов. Заслуживают внимания также теоретические исследования Чоя и Камасы [14], где решаются модельные уравнения, выведенные из уравнений Эйлера. Они описывают эволюцию внутренних гравитационных волн в невязкой и несжимаемой двухслойной жидкости, причем никакие ограничения на амплитуду не накладываются. Эти же исследователи указали области пригодности асимптотических приближений для сильнонелинейных волновых пакетов внутренних волн в системе “слой–слой” [2, 15].

Таким образом, анализ нелинейного распространения волн в стратифицированных системах представляет собой важную проблему. Отметим, что несмотря на интенсивность исследований, задача о распространении внутренних волн решена далеко не полностью. Во многих работах выведены эволюционные уравнения в предположении, что характерная длина волны является большой по сравнению с толщиной жидкостей. Но длины волн могут быть не только большими, но и малыми или сравнимыми с параметрами жидкости. Поэтому решенные в рамках разных моделей задачи о распространении внутренних волн не охватывают всех явлений и эффектов, которые наблюдаются в действительности.

В настоящей работе рассматривается распространение нелинейных волновых пакетов с длинами волн, которые меньше или сравнимы с толщиной слоев, а также качественно и количественно анализируется их устойчивость и зависимость формы от физических и геометрических параметров системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается распространение волновых пакетов в системе “слой–слой”. Верхняя и нижняя жидкости предполагаются идеальными и несжимаемыми и учитываются силы поверхностного натяжения. Волновые движения рассматриваются потенциальными и характеризуются малой, но конечной амплитудой (рис. 1). Математическая модель задачи о распространении волновых пакетов вдоль поверхности контакта двух жидких слоев $\Omega_1 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$ и $\Omega_2 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ с плотностями ρ_1 и ρ_2 , определяется системой, которая включает уравнения Лапласа для потенциалов скоростей φ_1 и φ_2 каждого из слоев, кинематические и динамические условия и граничные условия на верхней и нижней твердых крышках.

Вводятся безразмерные величины с помощью характерной длины L , которая равна толщине

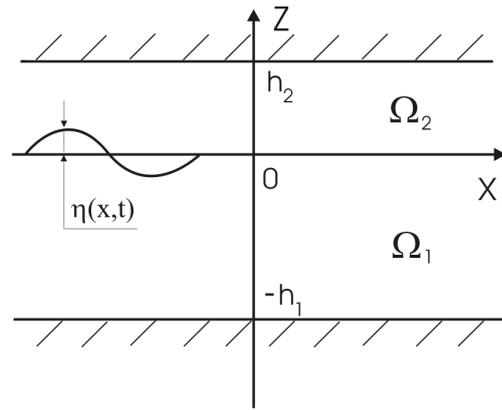


Рис. 1. Геометрия задачи

верхнего слоя, максимального отклонения поверхности раздела a , характерного времени $(L/g)^{1/2}$, плотности нижней жидкости ρ_1 , где g – ускорение свободного падения. Безразмерный коэффициент поверхностного натяжения при этом имеет вид $T^* = T/(L^2 \rho g)$ (звездочка опущена). Математическая постановка задачи имеет вид

$$\nabla^2 \varphi_j = 0 \quad \text{в } \Omega_j,$$

$$\eta_{,t} - \varphi_{j,z} = -\alpha \varphi_{j,x} \eta_{,x} \quad \text{на } z = \alpha \eta(x, t),$$

$$\varphi_{1,t} - \rho \varphi_{2,t} + (1 - \rho) \eta + \frac{1}{2} \alpha \left[(\nabla \varphi_1)^2 - \rho (\nabla \varphi_2)^2 \right] -$$

$$-T (1 + \alpha^2 \eta_{,x}^2)^{-3/2} \eta_{,xx} = 0 \quad \text{на } z = \alpha \eta(x, t),$$

$$\varphi_{1,z} = 0 \quad \text{при } z = -h_1,$$

$$\varphi_{2,z} = 0 \quad \text{при } z = h_2,$$

где $j = 1, 2$, $\rho = \rho_2/\rho_1$ – отношение плотностей верхнего и нижнего слоев; $\alpha = a/L$ – коэффициент нелинейности; $\eta(x, t)$ – отклонение поверхности контакта.

2. АНАЛИЗ МОДУЛЯЦИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Для определения приближенного решения задачи для малых, но конечных амплитуд, применялся метод многомасштабных разложений:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3),$$

$$\varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3),$$

где $x_n = \alpha^n x$, $t_n = \alpha^n t$ – масштабные переменные.

На основе решений, полученных данным методом [2], выведено нелинейное уравнение Шредингера для огибающей волнового пакета в системе “слой-слой” во втором приближении

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - 0.5i\omega'' A_{,xx} = -ik\omega^{-1}\alpha^2(\text{cth}kh_1 + \rho\text{cth}kh_2)^{-1}IA^2\bar{A}, \quad (1)$$

где

$$I = 0.5\{\Lambda\omega^2[3\text{cth}^2kh_2 - 1 - \rho(3\text{cth}^2kh_2 - 1)] - 1.5Tk^4 + 2k\omega^2[(2\text{cth}kh_1 - \text{cth}^3kh_1) + \rho(2\text{cth}kh_2 - \text{cth}^3kh_2)] - \frac{\omega^4}{(1-\rho)}(1 - \text{cth}^2kh_1 - \rho(1 - \text{cth}^2kh_2))^2\}, \quad (2)$$

где k – волновое число; ω – частота центра волнового пакета. Далее переходим к системе координат, которая движется с групповой скоростью $\omega' = \frac{d\omega}{dk}$, и нормируем уравнение (1) с помощью формул

$$X = x - \omega't, \quad \frac{\omega''t}{2} = T, \quad \sqrt{\frac{\alpha^2 I_0}{\omega\omega''}} A = r.$$

В результате нелинейное уравнение Шредингера можно представить в каноническом виде:

$$r_{,T} - ir_{,XX} = 2isr^2\bar{r},$$

где $s = \text{sign}(I_0\omega'')$. Это дает возможность использовать результаты решенной обратной задачи рассеяния задачи для канонического вида уравнения [1]. При этом условие неустойчивости имеет вид

$$I_0\omega'' > 0, \quad (3)$$

где $I_0 = -k(\text{cth}kh_1 + \rho\text{cth}kh_2)^{-1}I$. Модуляционная неустойчивость (неустойчивость Бенджамина–Фейра) [5] имеет место во многих физических системах (нелинейная оптика, волны в плазме). При данной неустойчивости уравнение Шредингера имеет решение в виде солитонов огибающей или групповых солитонов [1]. В системе (k, ρ) найдены кривые, которые устанавливают пределы областей модуляционной устойчивости и неустойчивости, и определяются соотношениями $I_0\omega'' = 0$, $I_0\omega'' \rightarrow \infty$ [3]. При формировании волн нелинейность и дисперсия противодействуют друг другу и огибающая пакета волн модулируется в солитоны, после чего происходит баланс нелинейности и дисперсии. Огибающая такого солитона описывается гиперболическим секансом:

$$A(x, t) = 2i\delta\sqrt{\frac{\omega\omega''}{\alpha^2 I_0}} \times$$

$$\times \frac{\exp[-2i\vartheta(x - \omega't) - 4i(\vartheta^2 - \delta^2)t - i\varphi_0]}{\text{ch } 2\delta[x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0]}, \quad (4)$$

где φ_0 и x_0 – начальные фазы, δ определяет амплитуду и ширину солитона, а ϑ – скорость. Параметры солитона определяются начальными условиями $A(x, 0)$. Солитоны огибающей (4) представляют собой конечную форму эволюции волн при условии, что в начале был ограниченный в пространстве волновой пакет. При этом, они устойчивы относительно взаимодействий с другими волновыми пакетами. Скорость распространения такого солитона не зависит от амплитуды.

Итак, если условие модуляционной неустойчивости (3) выполняется, то начальный волновой пакет распадается на совокупность солитонов огибающей (4). В этом случае подстановка (4) в выражение для отклонения поверхности контакта жидких сред дает разложение $\eta(x, t)$ по малому параметру в виде

$$\eta(x, t) = \delta\sqrt{\frac{\omega\omega''}{\alpha^2 I_0}} \frac{\cos(\check{k}x - \check{\omega}t - i\varphi_0)}{\text{ch } 2\delta[x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0]} + \frac{\delta^2\omega\omega''}{\alpha I_0 \text{ch}^2 2\delta[x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0]} \times \left[\frac{\omega^2 [1 - \text{cth}^2kh_1 - \rho(1 - \text{cth}^2kh_2)]}{1-\rho} + 0.5\Lambda \cos 2(\check{k}x - \check{\omega}t) \right] + O(\alpha), \quad (5)$$

где $\check{k} = k - 2\vartheta$, $\check{\omega} = \omega - 2\vartheta\omega' + 4(\vartheta^2 - \delta^2)$. В случае же модуляционной устойчивости, если подставить простейшее решение $A = a \exp(i\alpha^2\omega^{-1}I_0a^2t)$ в выражение для отклонения поверхности контакта жидких сред, то разложение $\eta(x, t)$ по малому параметру во втором приближении имеет вид:

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \hat{\omega}t) + \alpha a^2 \left(\frac{\omega^2(1 - \text{cth}^2kh_1 - \rho(1 - \text{cth}^2kh_2))}{1-\rho} + 0.5\Lambda \cos 2(kx - \hat{\omega}t) \right) + O(\alpha^2), \quad (6)$$

где $\hat{\omega} = \omega - \alpha^2\omega^{-1}a^2I_0$.

3. АНАЛИЗ ФОРМЫ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

3.1. Области с различной формой волн

В статье [2] проведен первичный анализ формы волнового пакета. Во втором приближении она определяется формулами (5)–(6). Легко видеть, что для определения формы поверхности контакта

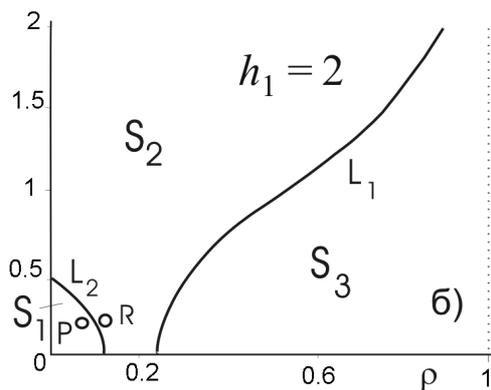
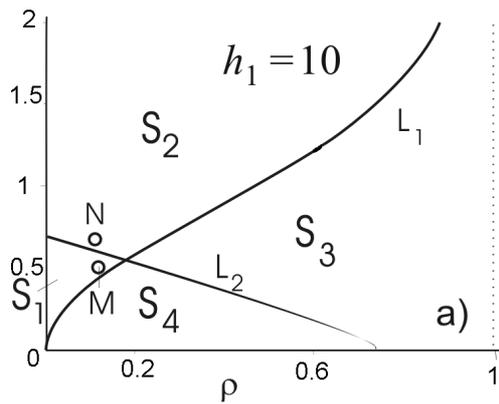


Рис. 2. Области с различной формой волн при толщине нижнего слоя $h_2 = 1$ и толщинах верхнего слоя: а - $h_1 = 10$, б - $h_1 = 2$

$\eta(x, t)$ важен знак величины $\Lambda \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$, который изменяется при переходе через кривую L_1 , вдоль которой $\Lambda(\rho, k, h) = 0$, или при переходе через кривую L_2 , вдоль которой $\Lambda(\rho, k, h) \rightarrow \infty$.

Уравнения этих кривых в неявной форме имеют вид

$$L_1: (1.5\text{cth}^2kh_1 - 0.5 - \rho(1.5\text{cth}^2kh_2 - 0.5))\omega^2 = 0,$$

$$L_2: 2\omega^2(\text{cth}2kh_1 + \rho\text{cth}2kh_2) - k(1 - \rho + 4Tk^2) = 0.$$

Например, при значениях $h_1 = 10$ и $h_2 = 1$ (рис. 2, а) кривые пересекаются и разделяют плоскость ρ, k на четыре области, в S_1 и S_3 имеют место волны с заостренными гребнями и затушенными подошвами, а в S_2 и S_4 – волны с затушенными гребнями и заостренными подошвами.

При уменьшении толщины нижнего слоя точка пересечения кривых L_1 и L_2 (ρ', k') опускается ниже. Поэтому при значениях толщины $h_1 = 2$ и $h_2 = 1$ (рис. 2, б) областей с характерной формой

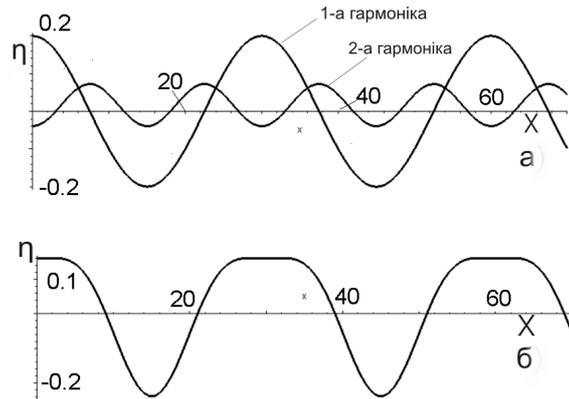


Рис. 3. Отклонение поверхности раздела при значении $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) < 0$: а – первые две гармоники $\eta_1(x, t)$ и $\eta_2(x, t)$, б – $\eta(x, t) = \eta_1 + \alpha\eta_2$

остаются три. Каждая из них имеет те же свойства, что и в случае больших толщин нижнего слоя.

Как известно [17, 18], в окрестности кривой $L_2 = 0$ возникает так называемый резонанс второй гармоники, когда амплитуда второй гармоники растет по сравнению с амплитудой первой гармоники. Отметим, что области резонанса указывают на те параметры двухслойной системы, при которых вторая гармоника приобретает как угодно большие значения. Это обусловлено пренебрежением в математической модели задачи вязкостью и, соответственно, диссипацией энергии, а также отсутствием третьего приближения для огибающей волнового пакета.

3.2. Форма пакета при модуляционной устойчивости

Рассмотрим систему при условии модуляционной устойчивости в тот момент, когда уже состоялся баланс линейности и дисперсии. Такое явление наблюдается при параметрах системы, соответствующих точкам P и R на рис. 2, б. При указанных условиях отклонение поверхности контакта представляет собой сумму двух косинусоид (5), одна из которых сжата в два раза относительно второй, амплитуда первой гармоники значительно больше амплитуды второй гармоники.

На рис. 3 представлены первые две гармоники $\eta_1(x, t)$ и $\eta_2(x, t)$ (рис. 3, а) и отклонение свободной поверхности $\eta(x, t)$ (рис. 3, б) при значениях параметров $h_2 = 1$, $h_1 = 2$, $k = 0.2$, $t = 0$, $\alpha = 0.2$, $a = 1$, $\rho = 0.13$ ($\Lambda = -1.4$), соответствующих точке P на рис. 2, б. В рассматриваемом случае $\Lambda < 0$, минимумы $\eta_1(x, t)$ и $\eta_2(x, t)$ совпадают (рис.

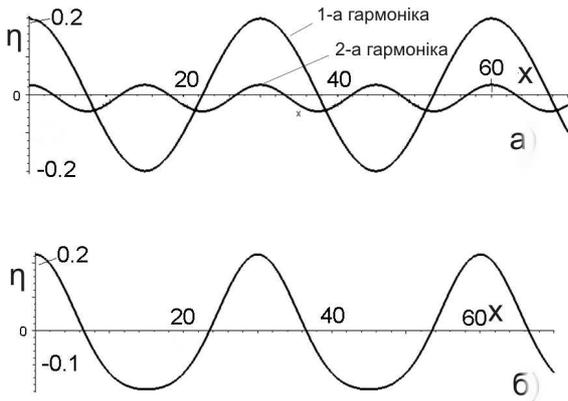


Рис. 4. Отклонение поверхности раздела при значении $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) > 0$:
 а – первые две гармоники $\eta_1(x, t)$ и $\eta_2(x, t)$,
 б – $\eta(x, t) = \eta_1 + \alpha\eta_2$

3, а), а максимум $\eta_1(x, t)$ налагается на следующий минимум $\eta_2(x, t)$. Таким образом, волна имеет \sqcap -подобную форму, как показано на рис. 3, б.

На рис. 4 представлены первые две гармоники $\eta_1(x, t)$ и $\eta_2(x, t)$ (рис. 3, а) и отклонение свободной поверхности $\eta(x, t)$ (рис. 3, б) при значениях параметров $h_2 = 1$, $h_1 = 2$, $k = 0.2$, $t = 0$, $\alpha = 0.2$, $a = 1$, $\rho = 0.1$ ($\Lambda = 0.9$), соответствующих точке R на рис. 2, б.

В случае, когда $\Lambda > 0$, максимумы $\eta_1(x, t)$ и $\eta_2(x, t)$ совпадают (рис. 4, а), а минимум $\eta_1(x, t)$ налагается на следующий максимум $\eta_2(x, t)$. Следовательно, волна имеет \sqcup -подобную форму, как показано на рис. 4, б.

3.3. Форма пакета при модуляционной неустойчивости

Исследуем, как изменяется форма волнового пакета в случае модуляционной неустойчивости в зависимости от величины второй гармоники. При этом считаем, что процесс образования солитонов огибающей уже завершился.

Такое явление наблюдается при параметрах системы, соответствующих точкам M и N на рис. 2, а.

Из формулы (7) следует, что в случае модуляционной неустойчивости существуют такие параметры двухслойной гидродинамической системы, при которых влияние амплитуды второй гармоники приводит к заострению или затуплению форм солитонов огибающей. На рис. 5 изображены два варианта формы солитонов огибающей с учетом второй гармоники для таких значений параметров двухслойной системы $h_2 = 1$, $h_1 = 10$, $t =$

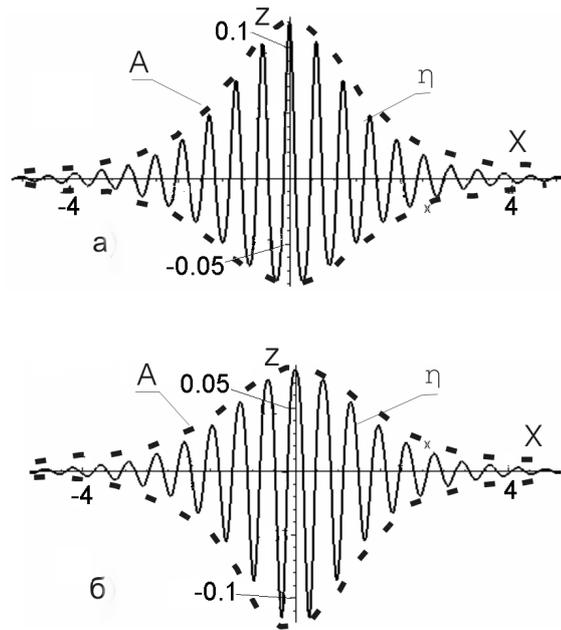


Рис. 5. Форма солитона огибающей при значениях:
 а – $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) > 0$, б – $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) < 0$

0, $\alpha = 0.14$, $\delta = 0.5$, $\vartheta = 6.5$, $h_2 = 1$. Когда $k = 0.5$, $\rho = 0.1$ (точка M на рис. 2, а), $\Lambda = 10 > 0$, тогда верхняя огибающая заостряется, а нижняя наоборот затупляется (рис. 5, а). На рис. 5, б показан аналогичный эффект влияния второй гармоники на форму солитонов огибающей при значениях $k = 0.7$, $\rho = 0.1$, $\Lambda = -10 < 0$ (точка N на рис. 2, а), в этом случае верхняя огибающая затупляется, а нижняя становится заостренной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенного анализа распространения волн в двухслойной жидкости следует, что учет второго приближения для отклонения поверхности раздела двух жидких слоев приводит к возникновению асимметрии гребней и подошв модуляционно устойчивого волнового пакета. В случае модуляционной неустойчивости при образовании солитонов огибающей наблюдается затупление или заострение формы огибающей волнового пакета. Для фиксированной толщины слоев в зависимости от отношения плотностей сред и волнового числа существуют несколько областей, где возможна заостренная или затупленная форма волн. Если нижний слой значительно толще верхнего, то имеются четыре такие области, две из которых вырождаются при уменьшении толщины нижнего слоя.

1. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. – 1971. – 61. – С. 118–134.
2. *Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В.* Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикладная гидромеханика. – 2005. – 7(79), N 1. – P. 80–89.
3. *Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В.* Нелинейная устойчивость распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости // Прикладная гидромеханика. – 2006. – 8(80), N 4. – С. 60–65.
4. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
5. *Фейр Дж.* Некоторые результаты опытов с волновыми импульсами // В сб. Нелинейная теория распространения волн. – М.: Мир, 1970. – С. 77–105.
6. *Ablowitz M.J., Segur H.* Long internal waves in fluids of great depth // Stud. Appl. Maths. – 1980. – 62. – P. 249–262.
7. Algebraic solitary waves in stratified fluids // J. Phys. Soc. Japan. – 1975. – 39. – P. 1082.
8. *Avramenko O. V., Selezov I. T.* Nonlinear wave propagation in a fluid layer based on semi-infinite fluid // Доповіді НАНУ. – 1997. – N10. – P. 61–66.
9. *Benjamin T.B.* Internal waves of finite amplitude and permanent form // J. Fluid Mech. – 1966. – 25, Part 2. – P. 241–270.
10. *Benney C.J.* Long nonlinear waves in fluid flows // J. Math. Phys. – 1966. – 45. – P. 52.
11. *Bhatnagar P.L.* Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems. – Oxford: Clarendon Press, 1979. – 199 p.
12. *Buick J.M., Martin A.J.* Comparison of a lattice Boltzmann simulation of steep internal waves and laboratory measurements using particle image velocimetry // Eur. J. Mech. B/Fluids. – 2003. – 22, No 1. – P. 27–38.
13. *Davis R.E., Acrivos A.* Solitary internal waves in deep water // J. Fluid Mech. – 1967. – 29, Part 3. – P. 593–607.
14. *Choi W., Camassa R.* Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. – 1999. – 396. – P. 1–36.
15. *Camassa R., Choi W., Michallet H., Rusan P.-O., Sveen J.* On the realm of validity of strongly nonlinear asymptotic approximations for internal waves // J. Fluid Mech. – 2006. – 549. – P. 1–23.
16. *Kubota T., Ko D. R. S., Dobbs L.D.* Propagation of weakly nonlinear internal waves in a stratified fluid of finite depth // AIAA J. Hydrodyn. – 1978. – 12. – P. 157–165.
17. *McGoldric L.F.* On the replying of the small waves: a harmonic nonlinear resonant interaction // J. Fluid Mech. – 1972. – 52, Part 4. – P. 725–751.
18. *Nayfeh A.H.* Second-harmonic resonance in the interaction of an air stream with capillary-gravity waves // J. Fluid Mech. – 1973. – 59, Part 4. – P. 803–816.
19. *Nayfeh A.* Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. – 1976. – 43, No 4. – P. 584–588.
20. *Segur H.* The Korteweg-de Vries equation and water waves. Solutions of the equations. Part 1 // J. Fluid Mech. – 1973. – 59, Part 4. – P. 721.
21. *Segur H., Hammack J.L.* Soliton models of long internal // J. Fluid Mech. – 1982. – 118. – P. 285–304.
22. *Selezov I.T., Korsunsky S.V.* Wave propagation along the interface between the liquid metal-electrolyte // Int. Conf. MHD Proc. to Protection of Environment, Kiev-Odessa, Ukraine, 24-29 June 1992, Part 1. – P. 111–117.
23. *Selezov I. T., Avramenko O. V., Gurtovy Yu. V.* Features of wave-packet propagation in two-layer fluid of finite depth // Int. J. Fluid Mechanics Research. – 2007. – 34, N 5, – P. 475–491.
24. *Yuen H.C., Lake B.M.* Nonlinear dynamics of deep-water waves // Advances in Appl. Mech. – New York, London. – 1982. – 22. – P. 33–45.