

УДК 532.465

ТРАНСФОРМАЦИЯ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ НАД СТУПЕНЬКОЙ НА ДНЕ

Е. ТЕРЛЕЦКАЯ, В. МАДЕРИЧ, И. БРОВЧЕНКО

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев

Получено 9.03 2009

Численно исследуется динамика и энергетика трансформации уединенных внутренних волн большой амплитуды, распространяющихся в жидкости с двухслойной стратификацией над ступенькой на дне. Расчеты проводятся в рамках уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска с использованием негидростатической модели. Результаты моделирования обобщают теоретический анализ взаимодействия уединенных волн малой амплитуды со ступенькой (Grimshaw et al., 2008), на случай сильно-нелинейных волн, когда эффекты диссипации и перемешивания становятся существенными.

Чисельно досліджується динаміка та енергетика трансформації внутрішніх відокремлених хвиль великої амплітуди, що розповсюджуються в рідині з двошаровою стратифікацією над сходинкою на дні. Розрахунки проводяться в рамках рівнянь Нав'є-Стокса у наближенні Буссінеска з використанням негідростатичної моделі. Результати моделювання узагальнюють теоретичний аналіз взаємодії відокремлених хвиль малої амплітуди зі сходинкою на дні (Grimshaw et al., 2008) на випадок сильно-нелінійних хвиль, коли ефекти дисіпації і перемішування стають істотними.

The dynamics and energy transformation of internal solitary waves of large amplitude, propagating in a fluid with two-layer stratification at a bottom step are investigated numerically. Calculations are performed in frame of the Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation using non-hydrostatic model. Simulation results generalize the theoretical analysis of the interaction of solitary waves of small amplitude with bottom steps (Grimshaw et al., 2008) in case strongly-nonlinear waves, when the effects of dissipation and mixing are significant.

ВВЕДЕНИЕ

Приливные потоки в океане часто генерируют уединенные внутренние волны большой амплитуды над изломом шельфа или над изолированной возвышенностью ([1–4]). Эти уединенные волны распространяются к мелководным областям шельфа, где они разрушаются на склоне дна ([5, 6]). Внутренние волны, разрушающиеся на неоднородностях рельефа дна, играют важную роль в глобальной диссипации приливной энергии и перемешивании [7]. В мелководных областях прохождение этих волн сопровождается интенсивными течениями. Скорость этих течений может превышать 1 м/с в районах с экстремально большими внутренними волнами, такими как Южно-Китайское море [2], что приводит к турбулизации придонного пограничного слоя и эрозии дна (напр. [8]). Внутренние волны большой амплитуды потенциально опасны для подводного судоходства, буровых платформ на шельфе [9], газо- и нефтепроводов и других подводных инженерных сооружений.

Наблюдения показывают, что трансформация нелинейных волн в шельфовой зоне определяется характером изменения глубины, фоновой плотностной стратификацией и течениями. Теоретически такие процессы хорошо изучены для внутренних волн малой амплитуды на плавно меняющемся

ся фоне, когда могут быть применены уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ) ([10, 11]) и его модификация (расширенное уравнение Кортевега-де Вриза или уравнение Гарднера) ([12–16]). Однако для волн большой амплитуды, которые часто встречаются на шельфе, слабонелинейная теория не применима.

Решения уравнений Эйлера для двухслойной невязкой жидкости ([17–19]) описывают уединенные волны большой амплитуды. В то же время, наличие разрыва скорости между слоями приводит к неустойчивости Кельвина-Гельмгольца этих волн [20]. Формирование вихрей Кельвина-Гельмгольца в волнах большой амплитуды было отмечено как в лабораторных экспериментах [18–22], так и в натурных исследованиях [2, 5]. Неустойчивость приводит к генерации турбулентности, перемешиванию в слое раздела и затуханию уединенных волн [23]. Прямое численное моделирование волн большой амплитуды в рамках уравнений Эйлера, Навье-Стокса и Рейнольдса проведено в нескольких исследованиях (например, [4, 6, 24]) при гладкой топографии дна.

Ряд работ посвящен трансформации волн над быстро изменяющейся топографией дна, которая встречается в некоторых районах Мирового океана, например, на шельфе между островами Тайвань и Донгша, где уклон дна достигает 0.25, тогда как длина уединенных внутренних волн в этом ра-

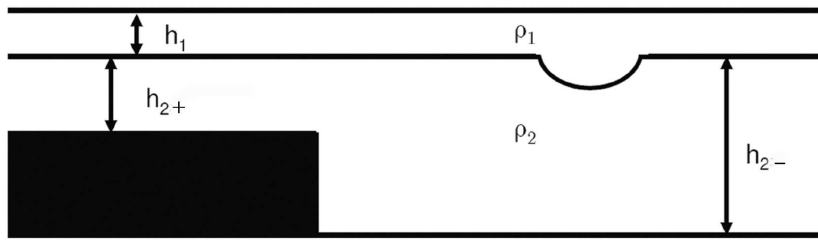


Рис. 1. Геометрия задачи

йоне соизмерима с горизонтальными масштабами неоднородностей дна [3]. Взаимодействие внутренних волн с препятствиями различной формы в лабораторных условиях моделировалось в [26, 27]. Теоретически трансформация уединенных волн в двухслойной жидкости над ступенькой исследовалась в рамках уравнений КдВ и Гарднера в [28] и с использованием уравнения Буссинеска в [29]. Численное моделирование в рамках уравнений Навье-Стокса [30] подтвердило предсказания теории [28] о характере трансформации внутренних уединенных волн-возвышений над ступенькой в двухслойной жидкости. Неожиданно хорошим оказалось совпадение результатов моделирования в рамках уравнения Гарднера и уравнений Навье-Стокса даже для сильно-нелинейных волн.

Задача данной статьи – исследование трансформации сильно-нелинейных внутренних волн-понижений при двухслойной стратификации над ступенькой. В первом разделе приведены модели уединенных волн умеренной и большой амплитуды. Негидростатическая численная модель для стратифицированной жидкости [25, 26] кратко описана во втором разделе. В третьем разделе эта модель применяется к вертикально двумерному вычислительному лотку лабораторных масштабов со ступенчатым изменением глубины, заполненном стратифицированной по солености водой, в котором два однородных слоя разделены узким слоем скачка солености. Энергетика этих процессов изучается в четвертом разделе. Результаты наших расчетов по трансформации уединенных волн большой амплитуды над ступенькой обобщаются в заключении.

1. МОДЕЛИ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ И СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

Геометрия задачи показана на рис. 1. Внутренняя уединенная волна в жидкости с двухслойной

стратификацией распространяется справа налево в бассейне со ступенчатым изменением глубины. Плотность верхнего и нижнего слоев ρ_1 и ρ_2 соответственно. Толщина верхнего и нижнего слоев h_1 и h_2 соответственно, глубина слоя жидкости $H = h_1 + h_2$, η – смещение поверхности раздела. Толщина нижнего слоя в более глубокой части бассейна обозначена h_{2-} , а в более мелкой – h_{2+} . Нелинейные волны малой амплитуды, распространяющиеся в бассейне постоянной глубины H , описываются уравнением Гарднера [14], в приближении Буссинеска имеющем вид [14]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (c_0 + \alpha \eta + \alpha_1 \eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

где t – время; x – горизонтальная координата;

$$c_0 = \sqrt{\frac{gh_1 h_2 \Delta \rho}{\rho_0 H}} \quad (2)$$

– фазовая скорость длинных линейных внутренних волн в двухслойной жидкости; g – ускорение силы тяжести; ρ_0 – постоянная плотность воды в приближении Буссинеска; $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$; параметры α , β и α_1 характеризуют квадратичную нелинейность, дисперсию и кубическую нелинейность волн соответственно и имеют вид

$$\alpha = \frac{3c_0(h_1 - h_2)}{2h_1 h_2}, \quad \beta = \frac{c_0 h_1 h_2}{6},$$

$$\alpha_1 = \frac{-3c_0}{8h_1^2 h_2^2} (h_1^2 + h_2^2 + 6h_1 h_2). \quad (3)$$

При $\alpha_1 = 0$ уравнение (1) сводится к уравнению КдВ.

Стационарное решение уравнения (1), описывающее уединенную волну (солитон), может быть получено в различных формах. Следуя [28], приведем его в виде:

$$\eta = \frac{D}{1 + B \operatorname{ch}(\gamma(x - Vt))}, \quad (4)$$

где

$$D = \frac{6\beta\gamma^2}{\alpha}; B^2 = 1 + \frac{6\alpha_1\beta\gamma^2}{\alpha^2}, V = \beta\gamma^2, \quad (5)$$

γ – свободный параметр, обратный длине уединенной волны.

Амплитуда солитона

$$a = \frac{D}{1+B} \quad (6)$$

отрицательна (волна-понижение) при $\alpha < 0$ или $h_1 < h_2$. Предельное значение амплитуды

$$a_{lim} = \frac{\alpha}{|\alpha_1|} \quad (7)$$

соответствует формированию “столообразных” солитонов.

Стационарное решение уравнений Эйлера в двухслойной жидкости ([17–19]), описывающее уединенную волну большой амплитуды или солитон Мияты-Чоя-Камассы (МЧК), находится в приближении Буссинеска из решения обыкновенного нелинейного уравнения для η :

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial X}\right)^2 = \left[\frac{3g\Delta\rho}{c^2\rho_0(h_1^2 - h_2^2)}\right] \times \frac{\eta^2(\eta - a_2)(\eta - a_1)}{(\eta - a_*)}, \quad (8)$$

где $X = x - ct$,

$$a_* = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2}, c = c_0 \sqrt{\frac{(h_1 - a)(h_2 - a)}{h_1 h_2 - (c_0^2/g)a}}, \quad (9)$$

тогда как a_1 и a_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\eta^2 + q_1\eta + q_2 = 0,$$

где коэффициенты q_1 и q_2 имеют вид:

$$q_1 = -\frac{c^2}{g} - h_1 + h_2, q_2 = h_1 h_2 \left(\frac{c^2}{c_0^2} - 1\right).$$

Решение уравнения в неявном виде $X = X(\eta)$ получается после интегрирования уравнения (8) и представляет собой комбинацию из эллиптических интегралов первого и третьего рода. Предельное значение амплитуды солитона МЧК в приближении Буссинеска равно

$$\tilde{a}_{lim} = \frac{h_1 - h_2}{2}. \quad (10)$$

Трансформация уединенных волн над ступенькой была детально изучена в рамках уравнения КдВ

и уравнения Гарднера в работе [28]. Предполагалось, что и отраженные и прошедшие волны имеют форму солитонов, но их параметры не удовлетворяют соотношениям для стационарно движущихся волн. Отраженные волны эволюционируют в солитоны и диспергирующие волны. Динамика прошедших на ступеньку волн зависит от знака коэффициента нелинейности α . Если коэффициент нелинейности меняет знак, то солитоноподобное возмущение распадается на диспергирующие волны. Здесь мы рассматриваем только волны-понижения в случае, когда знак нелинейности не изменяется ($h_1 < h_2$). В этом случае прошедшие солитоны трансформируются в головной и вторичные солитоны. Динамика волн-повышений большой амплитуды рассмотрена в [30].

Трансформация уединенной волны-понижения при двухслойной стратификации над ступенькой зависит от ряда безразмерных параметров: параметра блокировки ϵ_{bl} [31], параметра обрушения ϵ_{br} [26] и параметра нелинейности ϵ_{nl} [30]. От параметра блокировки $\epsilon_{bl} = 1 - h_{2+}/h_{2-}$ зависит отражение и прохождение волн в теории [28]. Параметр обрушения $\epsilon_{br} = \frac{|a|}{h_{2+}}$ характеризует эффект конечной амплитуды волны на поток в окрестности ступеньки. Значение $\epsilon_{br} = 0$ для линейных волн, тогда как $\epsilon_{br} = 1$, когда амплитуда волны равна толщине нижнего слоя h_{2+} . Нелинейность в уравнении Гарднера может быть охарактеризована как $\epsilon_{nl} = \alpha a/c + |\alpha_1| a^2/c$, представляющем сумму квадратических и кубических нелинейных членов в уравнении Гарднера. При малых ϵ_{nl} уравнение Гарднера описывает волны умеренной амплитуды, тогда как при ϵ_{nl} порядка единицы волны являются сильно-нелинейными [30] и тогда формально уравнение Гарднера не приложимо к описанию волн.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Система трехмерных уравнений Навье-Стокса для стратифицированной по солености воды в приближении Буссинеска имеет вид:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{g_i \rho}{\rho_0}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U_j \frac{\partial S}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2}, \quad (13)$$

Табл 1. Параметры расчетов

Эксп.	$\frac{h_{2+}}{h_{2-}}$	$\frac{a_-}{h_1}$	$\frac{a_+}{h_1}$	$\frac{a_-}{a_{lim}^-}$	$\frac{a_+}{a_{lim}^+}$	ϵ_{nl}^-	ϵ_{nl}^+	ϵ_{br}	ϵ_{bl}	ΔPE	PE_{dis}
1	0.71	1.68	1.43	0.92	1	4.12	3.41	0.34	0.29	0.91	0.09
2	0.71	2.21	1.75	1.20	1.22	6.23	4.67	0.44	0.29	0.78	0.21
3	0.43	2.21	0.85	1.20	1	6.23	1.69	0.73	0.57	0.18	0.51

где $x_i = (x, y, z)$ – декартовы координаты, ось z направлена вертикально вверх; $U_i = (U, V, W)$ – составляющие поля скорости; P – давление; ρ – плотность воды; S – соленость; $g_i = (0, 0, g)$ – ускорение силы тяжести; ν – кинематическая вязкость; χ – молекулярная диффузия. Система уравнений (11)-(13) дополнялась уравнением состояния [32]. На свободной поверхности касательные напряжения отсутствуют, а на дне используются условия прилипания. Потоки соли через границы бассейна отсутствуют.

Система уравнений модели дискретизировалась с использованием метода конечных разностей на сдвинутой сетке. Решение задачи расщеплялось на две подзадачи: (а) – решение двумерной системы уравнений для возвышений уровня и осредненных по глубине скоростей и (б) – решение трехмерной задачи для скорости и давления. Поле скорости и давления в трехмерной подзадаче расщеплялось на гидростатическую и негидростатическую составляющие. Алгоритм решения включал четыре стадии. На первой стадии явным методом с малым (внешним) шагом решалась двумерная система уравнений для возвышений уровня и осредненных по глубине скоростей. На второй стадии находилось решение для гидростатических составляющих скорости с относительно большим (внутренним) шагом по времени. На третьей стадии находились негидростатические поправки для поля скорости и давления. Наконец, на четвертой находилось решение для солености. Использовалась явная схема по горизонтали и неявная схема по вертикали. Детально этот алгоритм описан в [25].

Вычислительный бассейн лабораторных масштабов имеет геометрию, показанную на рис. 1. Общая длина бассейна – 27 м с протяженностью более глубокой части 13 м. Задача решалась в квазидвумерной постановке, когда уравнения дискретизировались в нескольких узлах поперек бассейна при условии скольжения на боковых стен-

ках бассейна. Невозмущенная стратификация в бассейне моделировалась в виде поверхностного и придонного однородных слоев с соленостью $S_{up} = 2$ и $S_{bot} = 15$ при постоянной температуре 20°C, разделенных тонким переходным слоем. Профиль солености аппроксимировался формулой

$$S(z) = \frac{S_{up} + S_{bot}}{2} - \frac{S_{bot} - S_{up}}{2} \text{th} \left(\frac{z - h_1}{dh} \right), \quad (14)$$

где $dh = 0.2$ см. В расчетах визуализировалась изохалина, равная 8.5. Численные эксперименты проводились при значениях кинематической вязкости $\nu = 1.14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2\text{с}^{-1}$ и молекулярной диффузии соли $\chi = 10^{-9} \text{ м}^2\text{с}^{-1}$.

Задание начальных условий в виде сильно-нелинейной уединенной волны является непросто задачей для уравнений Навье-Стокса при непрерывной стратификации поскольку требуется задать поля скоростей и солености (плотности). Начиная с работы [33], в лабораторных экспериментах уединенные волны часто генерируют с помощью механизма коллапса, когда в бассейне выделяется часть объема, заполненная водой отличной плотности (напр. [18, 26, 27, 34]). Для того, чтобы сформировать уединенную волну-понижение начальная толщина верхнего слоя в выделенном объеме должна быть больше чем в остальном бассейне, в противоположном случае генерируются волны повышения. В наших численных экспериментах этот же метод использовался для генерации уединенных волн. После того, как головная волна трансформировалась в уединенную волну, осциллирующий мелкомасштабный хвост отрезался.

Все численные эксперименты проводились при толщине верхнего слоя $h_1 = 4$ см и при толщине нижнего слоя в более глубокой части бассейна $h_{2-} = 28$ см. Толщина нижнего слоя в более мелкой части бассейна составляла $h_{2+} = 12$ см и $h_{2+} = 20$ см. Разрешение сетки по длине, вы-

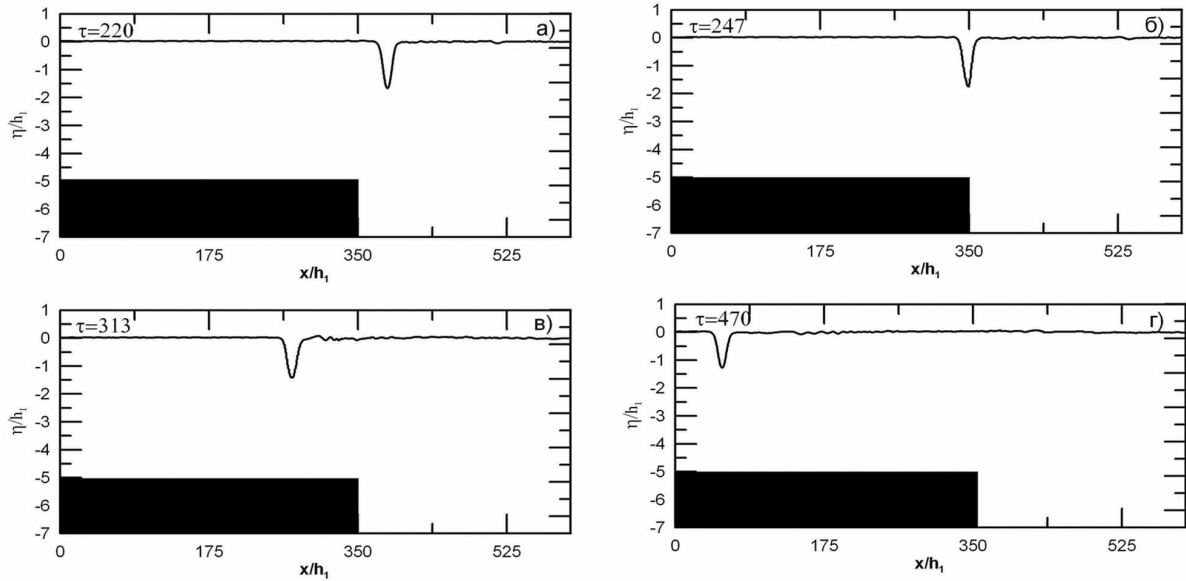


Рис. 2. Трансформация волны на ступеньке в эксп. 1. Черный прямоугольник показывает положение ступеньки

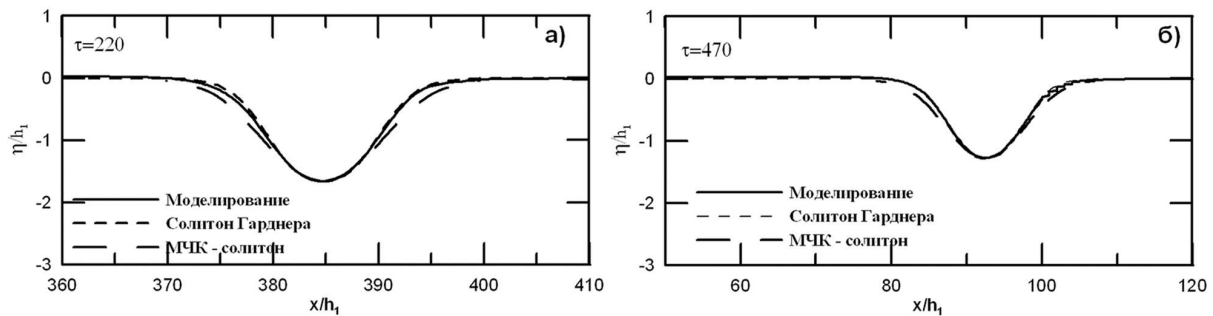


Рис. 3. Профиль поверхности раздела в волне, приближающейся к ступеньке справа, в эксп. 1 и профили солитонов Гарднера и МЧК (а); профиль поверхности раздела в волне, трансформированной на ступеньке, и профили солитонов Гарднера и МЧК (б)

те и ширине составляло $2400 \times 120 \times 4$. Амплитуда уединенной волны, набегающей на ступеньку a_- , составляла 6.7 и 8.8 см. Параметры численных экспериментов, амплитуды волн и параметры нелинейности до (-) и после (+) ступеньки приведены в табл. 1. В таблице приведены также разность энергии прошедшей и отраженной волн ΔPE и потери энергии за счет перемешивания, перехода в недоступную фоновую потенциальную энергию и диссипации PE_{dis} , детально рассмотренные в разделе 4.

3. ДИНАМИКА ПРОЦЕССОВ ТРАНСФОРМАЦИИ

В трех экспериментах, приведенных в табл. 1, изучается трансформация уединенных волн большой амплитуды. Первый и второй эксперименты геометрически подобны, но амплитуда набегающей волны в первом из них меньше, чем предельная амплитуда солитона Гарднера a_{lim}^- , тогда как во втором эта амплитуда больше, чем a_{lim}^- . В то же время, эксперименты 2 и 3 отличаются глубиной более мелкой части h_{2+} , но амплитуды набе-

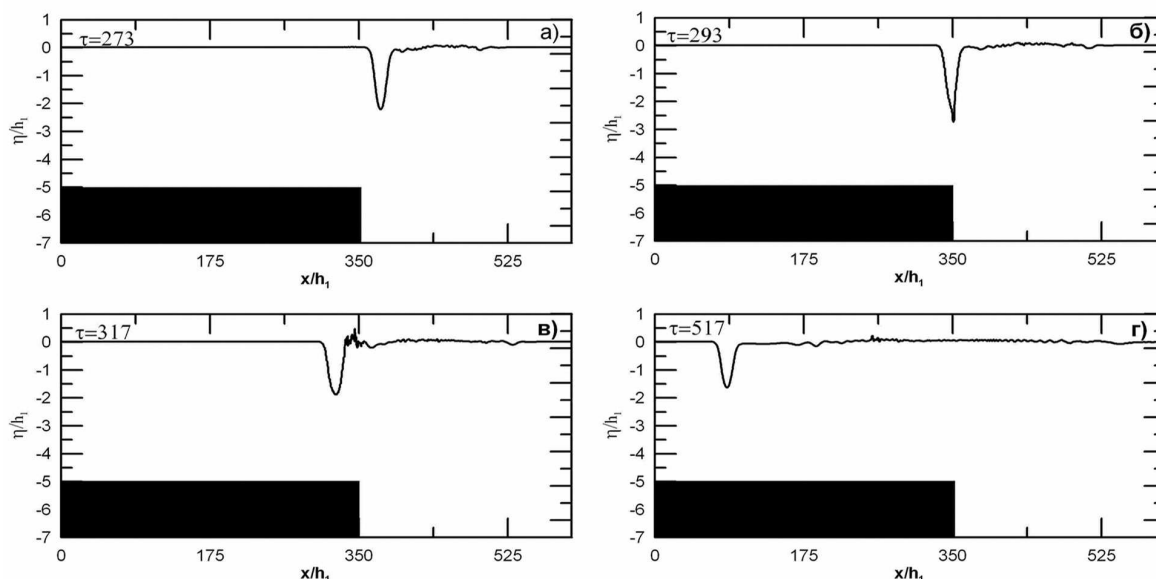


Рис. 4. Трансформация волны на ступеньке в эксп. 2. Черный прямоугольник показывает положение ступеньки

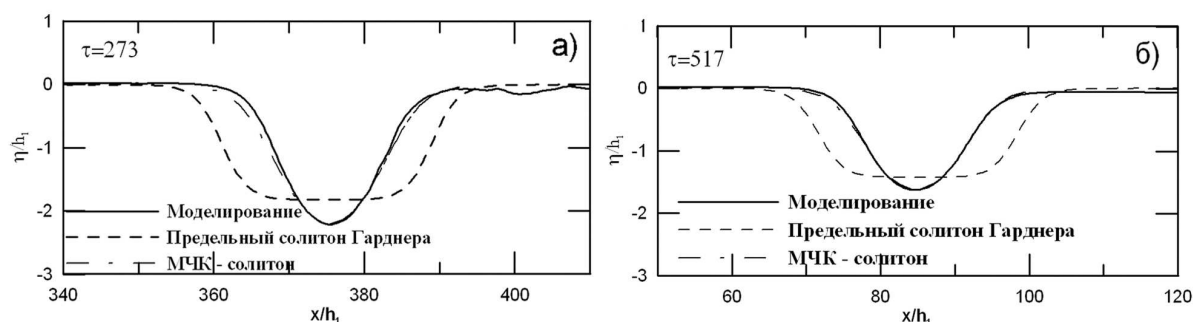


Рис. 5. Профиль поверхности раздела в волне, приближающейся к ступеньке справа, в эксп. 2 и профили предельного солитона Гарднера и солитона МЧК (а); профиль поверхности раздела в волне, трансформированной на ступеньке, и профили предельного солитона Гарднера и солитона (б)

гающих уединенных волн одинаковы.

На рис. 2 показана трансформация уединенных волн в эксп. 1 для разных значений безразмерного времени $\tau = t/\sqrt{\rho_0 h_1/(\Delta \rho g)}$. Параметры блокировки и обрушения были относительно малы ($\epsilon_{bl} = 0.29$ и $\epsilon_{br} = 0.34$). Амплитуда набегающей волны меньше максимальной амплитуды солитона Гарднера ($a_-/a_{lim}^- = 0.95$), но значение параметра нелинейности $\epsilon_{nl}^- = 4.12$ характеризует волну как сильно нелинейную, так что формально уравнение Гарднера не может использоваться. Однако на рис. 3 профиль поверхности раздела и до и после ступеньки хорошо описывается решением для

солитона Гарднера (4) и несколько хуже решением для сильно-нелинейного солитона МЧК (10). Этот результат согласуется с расчетами для уединенных волн-повышений [30]. Амплитуда отраженного солитона мала (≈ 0.25 см), и он описывается решением уравнения КдВ.

Взаимодействие со ступенькой сильно-нелинейной уединенной волны ($\epsilon_{nl}^- = 6.23$), в которой амплитуда по модулю набегающей волны больше, чем амплитуда солитона Гарднера ($a_-/a_{lim}^- = 1.22$), но меньше, чем предельная амплитуда солитона МЧК ($a_-/\tilde{a}_{lim}^- = 0.73$), представлено на рис. 4–6. Параметр обрушения

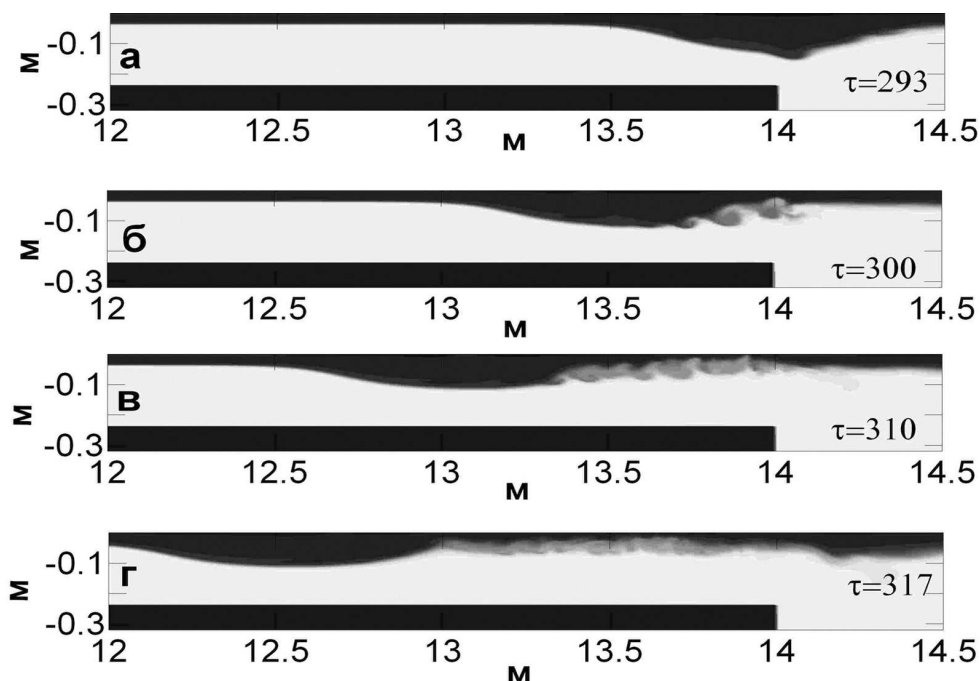


Рис. 6. Распределение солености при трансформации волны в эксп. 2

$\epsilon_{br} = 0.44$ был больше, чем в эксп. 1. Как видно из рис. 5, *a*, набегающая уединенная волна не описывается решением (4), а хорошо описывается солитонным решением МЧК. Хотя амплитуда набегающей волны в эксп. 2 больше амплитуды в эксп. 1 только в 1.35 раза, трансформация уединенной волны качественно отличается от эксп. 1, несмотря на то, что геометрия задачи в этих экспериментах одинакова ($\epsilon_{bl} = 0.29$).

Как видно на рис. 4 и 6, волна сильно возмущена ступенькой, и процесс трансформации волны в более мелкой части бассейна сопровождается возникновением неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, которая начинается на гребне волны (рис. 6). Число Ричардсона

$$Ri = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} / \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2$$

падает до значений 0.25–0.5 в задней части волны. Неустойчивость приводит к формированию вихрей Кельвина-Гельмгольца, перемешиванию, увеличению диссипации, расширению слоя раздела за солитоном и уменьшению его амплитуды. Дальнейшая эволюция волны происходит под действием вязкости, которая также приводит к уменьшению амплитуды (ср. рис. 4, *в* и *г*). Однако амплитуда прошедшей волны, как следует из рис. 5, *б*, оставалась больше предельной амплитуды солитона Гарднера. Такая же неустойчивость на-

блюдается в лабораторных экспериментах [18, 22] по генерированию сильно-нелинейных солитонов и в натуральных наблюдениях на океанском шельфе [2]. Амплитуда отраженного солитона также мала (≈ 0.7 см), и он описывается решением уравнения КдВ.

В эксп. 3 моделировалось взаимодействие сильно-нелинейной уединенной волны с такими же параметрами, как в эксп. 2, но с более высокой ступенькой. Параметры блокировки и обрушения были достаточно велики ($\epsilon_{bl} = 0.57$ и $\epsilon_{br} = 0.73$), поэтому процессы трансформации волны в окрестности ступеньки сопровождались интенсивным перемешиванием и отражением волн (рис. 7). Генерация отраженных волн большой амплитуды привела к существенному уменьшению амплитуды прошедшей волны, так что уединенная волна после прохождения ступеньки может быть описана как предельная уединенная волна Гарднера (рис. 8, *a*), для которой $\epsilon_{nl+} = 1.69$. Дальнейшая эволюция этой волны в отличие от эксп. 2 происходит без возникновения неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Волна затухает под действием вязкости и распространяется как уединенная волна Гарднера, за которой формируется удлиненный хвост, который может при дальнейшей эволюции трансформироваться во вторичный солитон (рис. 7, *г* и 8, *б*).

Процесс взаимодействия волны со ступенькой

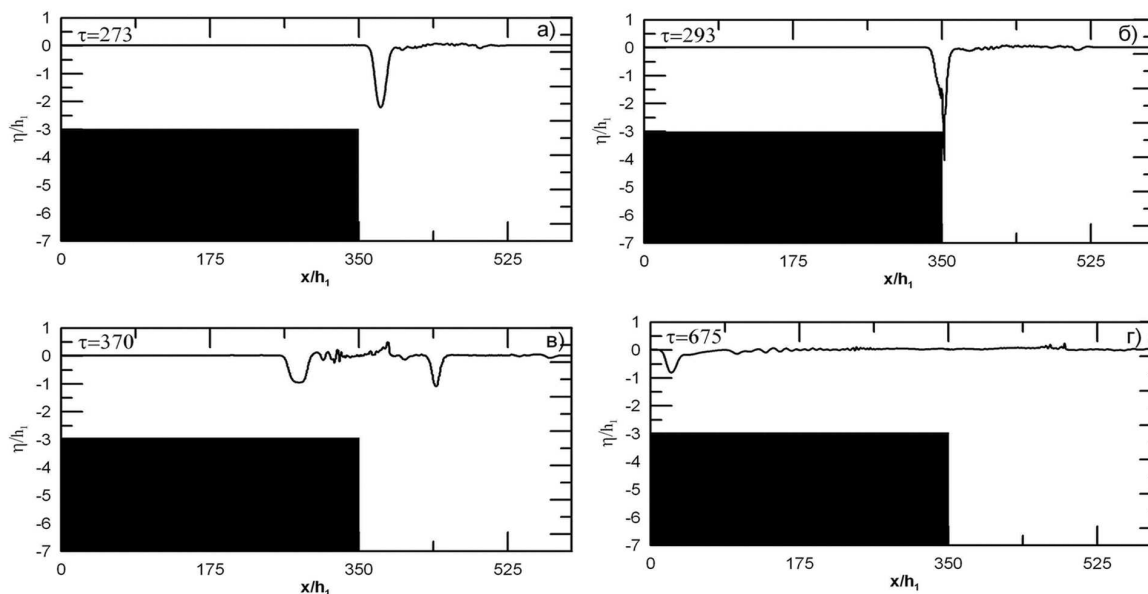


Рис. 7. Трансформация волны на ступеньке в эксп. 3. Черный прямоугольник показывает положение ступеньки

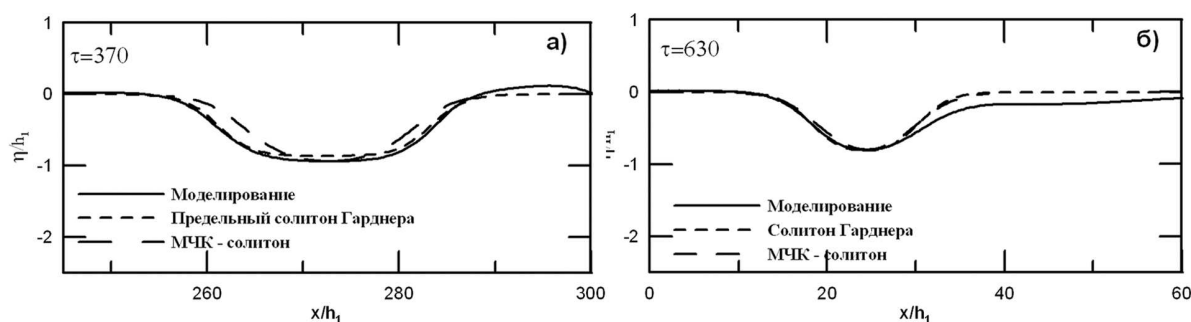


Рис. 8. Профиль поверхности раздела в волне, трансформированной на ступеньке в эксп. 3, профиль предельного солитона Гарднера и профиль солитона МЧК (а); профиль поверхности раздела в волне, в конце более мелкой части и профили солитонов Гарднера и МЧК (б)

на рис. 9 может быть разделен на несколько стадий. На первой стадии фронт набегающей волны деформируется компенсационным потоком, развивающимся в нижнем слое. На второй стадии, сверхкритический, в смысле внутренней гидравлики, поток вовлекает гребень волны, формируя сильный вихрь перед ступенькой и слабый вихрь противоположного знака на гребне волны. На третьей стадии эта вихревая пара вовлекает жидкость из верхнего слоя в нижний. Наконец, на четвертой стадии вихревая пара, отраженная от дна, вызывает интенсивное перемешивание в окрестностях ступеньки. Лабораторный эксперимент и численные

расчеты, в которых моделировалось взаимодействие уединенной внутренней волны с прямоугольным препятствием [26], качественно хорошо согласуется с описанным выше процессом сильного взаимодействия волны понижения со ступенькой.

4. ЭНЕРГЕТИКА ТРАНСФОРМАЦИИ

Рассмотрим преобразования энергии при прохождении внутренних уединенных волн над ступенькой. Плотность механической энергии внутренних волн (энергия на единицу объема) включает плот-

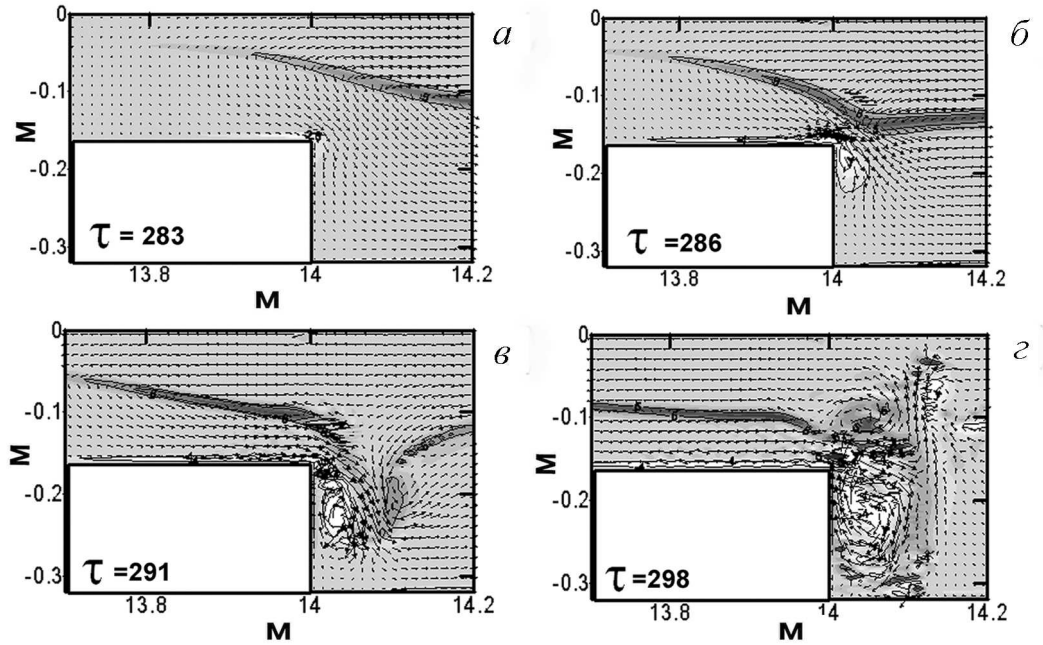


Рис. 9. Распределение скорости и завихренности в окрестности ступеньки в эксп. 3

ность кинетической энергии, которая в двумерном случае имеет вид

$$E_k(x, z, t) = \frac{\rho}{2}(U^2 + W^2), \quad (15)$$

и плотность потенциальной энергии

$$E_p(x, z, t) = \rho g z. \quad (16)$$

Для оценок преобразований энергии и влияния процессов перемешивания на волны важна потенциальная энергия, доступная для перехода в кинетическую энергию [36–40], которую можно оценить следующим образом:

$$E_a(x, z, t) = g \int_z^{z^*} (\bar{\rho}(z') - \rho) dz, \quad (17)$$

где E_a – плотность доступной потенциальной (ДПЭ) энергии; $\bar{\rho}(z)$ – горизонтально однородный отсчетный профиль плотности, который предполагается обратимым с обратным значением $z^*(\rho, x, z, t)$. Этот профиль в замкнутой системе получается адиабатической перестройкой поля плотности [35]. Здесь, следуя [40], мы полагаем, что $\bar{\rho}(z)$ приближенно равна невозмущенному начальному профилю $\rho(z)$, соответствующему профилю солености (14). Сумма $E_k + E_a = E_{pseudo}$ называется плотностью псевдоэнергии [36].

Проинтегрированное по глубине значение псевдоэнергии в данном сечении PE находится интегрированием по времени потока псевдоэнергии F

в интервале времени прохождения волны $t_2 - t_1$:

$$PE = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt. \quad (18)$$

Проинтегрированный по глубине поток псевдоэнергии [40] состоит из трех компонентов: PWF – потока энергии за счет работы возмущений сил давления, потока кинетической энергии KEF и потока доступной потенциальной энергии $APEF$:

$$F = PWF + KEF + APEF. \quad (19)$$

Поток энергии за счет работы возмущений сил давления имеет вид:

$$PWF = \int_0^{-H} Up dz, \quad (20)$$

где $p = P - \bar{P}$ разность между давлением и гидростатическим давлением, соответствующим распределению плотности $\bar{\rho}(z')$. Поток кинетической энергии KEF будет

$$KEF = \int_0^{-H} UE_k dz, \quad (21)$$

а поток доступной потенциальной энергии $APEF$:

$$APEF = \int_0^{-H} UE_a dz. \quad (22)$$

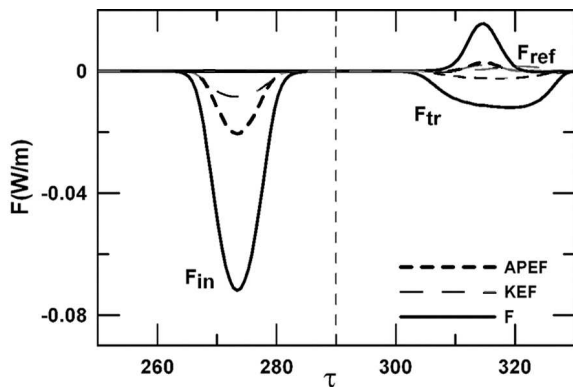


Рис. 10. Поток псевдоэнергии F и его составляющие KEF и $APEF$ в эксп. 3. Штриховая прямая показывает время пересечения ступеньки гребнем волны

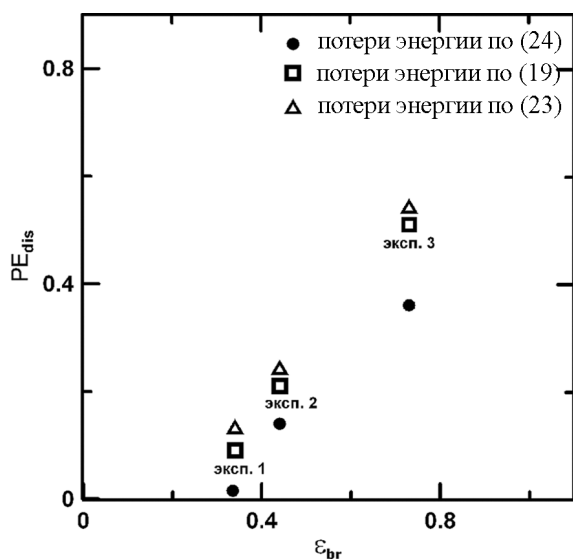


Рис. 11. Потери энергии при переходе уединенной волны через ступеньку в зависимости от параметра обрушения ϵ_{br} , рассчитанные по (19), по упрощенной формуле (23) и по соотношению (24)

На рис. 10 приведены составляющие потока энергии для набегающей, отраженной и прошедшей волн в эксп. 3. Как следует из рисунка, доминирующим является квадратичный член – поток энергии за счет работы возмущений сил давления. Поток ДПЭ примерно вдвое больше потока кинетической энергии, что согласуется с оценками [40]. В то же время расчеты показали, что проинтегрированное по глубине значение кинетической энергии в данном сечении примерно равно соответствующему значению доступной потенциальной энергии, что подтверждается измерениями в океане [37, 38] и расчетами [40].

В работах [41, 42] при вычислении F предполагалось, что $E_k \simeq E_a$, и потому проинтегрированный по глубине поток псевдоэнергии находился из соотношения

$$F = PWF + 2KEF. \quad (23)$$

Оценка энергии уединенных волн TE в слабо-нелинейной теории [23] имеет вид

$$TE = c_0 g \Delta \rho \int_{t_2}^{t_2} \eta^2(t) dt. \quad (24)$$

Рассмотрим, следуя [27], бюджет преобразований энергии над ступенькой. Обозначим псевдоэнергию набегающей, прошедшей и отраженной волны как PE_{in} , PE_{tr} , PE_{ref} соответственно. Разность энергии прошедшей и отраженной волн, нормализованная на PE_{in} , имеет вид

$$\Delta PE = \frac{PE_{tr} - PE_{ref}}{PE_{in}}. \quad (25)$$

Эта разность, как следует из табл. 1, падает с увеличением параметра ϵ_{bl} , причем падает быстрее, чем это предсказывается слабо-нелинейной теорией [28]. Потери энергии за счет перемешивания, перехода в недоступную фоновую потенциальную энергию и диссипации могут быть оценены, исходя из бюджета энергии волн до и после ступеньки:

$$PE_{dis} = \frac{PE_{in} - PE_{tr} - PE_{ref}}{PE_{in}}. \quad (26)$$

Результаты расчетов, приведенные на рис. 11, показывают почти линейную зависимость потери псевдоэнергии за счет диссипации и перемешивания от параметра обрушения ϵ_{br} . Для сильно-нелинейной волны и относительно высокой ступеньки эти потери достигают 51%. Заметим, что, хотя в эксп. 1 форма волны до и после ступеньки хорошо описывается солитонем Гарднера, сам процесс трансформации волны сопровождается перемешиванием и диссипацией энергии, и около 9% псевдоэнергии теряются в окрестности ступеньки.

ВЫВОДЫ

В работе численно в рамках уравнений Навье-Стокса исследована динамика и энергетика трансформации уединенных внутренних волн понижения большой амплитуды, распространяющихся в жидкости с двухслойной стратификацией над ступенькой в дне. Результаты моделирования дополняют теоретический анализ взаимодействия уединенных волн малой амплитуды со

ступенькой [28] на случай сильно-нелинейных волн, когда эффекты диссипации и перемешивания становятся существенными. Показано, что распространение уединенных волн описывается солитонами Гарднера и Мияты-Чоя-Камассы, если их амплитуда меньше по модулю предельной амплитуды этих солитонов. Однако, сам процесс трансформации волны сопровождается перемешиванием и диссипацией энергии и от 9 до 51 % псевдоэнергии теряется в окрестности ступеньки.

Авторы благодарны проф. Т.Г. Талиповой, прочитавшей статью, за ценные замечания, способствовавшие улучшению ее содержания. Работа выполнена в рамках проекта Ф28.6/010 “ДФФД - РФФИ - 2009”.

- Zhao Z., Klemas V.V., Zheng Q., Yan X-H. Satellite observation of internal solitary waves converting polarity // *Geophys. Res. Letters.*– 1988.– **30** (19).– P. .
- Orr M.H., Mignerey P.C. Nonlinear internal waves in the South China Sea: observation of the conversion of depression internal waves to elevation internal waves // *J. Geophys. Res.*– 2003.– **108** (C3).– P. 3064–2010.
- Ramp S. R., Tang T. Y., Duda T. F., Lynch J. F., Liu A. K., Chiu Ch.-S., Bahr F. L., Kim H.-R., Yang Y.-J. Internal solitons in the Northeastern South China Sea Part I: Sources and deep water propagation // *IEEE J. of Oceanic Engineering.*– 2004.– **29** (C3).– P. 3064–2010.
- Vlasenko V., Stashchuk N., and Hutter K. ABaroclinic tides: theoretical modeling and observational evidence.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.– 372 p.
- Moum, J.N., Farmer, D.M., Smyth, W.D., Armi, L., Vagle, S. Structure and generation of turbulence at interfaces strained by internal solitary waves propagating shoreward over the continental shelf // *J. Phys. Oceanogr.*– 2003.– **33**.– P. 2093–2112.
- Bourgault D., Blokhina M.D., Mirshak R., Kelley D.E. Evolution of a shoaling internal solitary wavetrain // *Geophysical Research Letters.*– 2007.– **34**.– P. L03601.
- Munk W, Wunsch C. Abyssal recipes II: energetics of tidal and wind mixing // *Deep Sea Res. I.*– 1998.– **45**.– P. 1977–2010.
- Bogucki D., Redekopp L. A mechanism for sediment resuspension by internal solitary waves // *Geophysical Research Letters.*– 1999.– **26**.– P. 1317–1320.
- Osborne A. R., Burch T. L. , Scarlet R. I. The influence of internal waves on deep water drilling // *J. Pet. Technol.*– 1978.– **30**.– P. 1497–1505.
- Djordjevic, V., Redekopp, L. A reduced model for internal waves interacting with topography at intermediate depth // *J. Phys. Ocean.*– 1978.– **8**.– P. 1016–1024.
- Helfrich, K.R., and Melville, W.K. On long nonlinear internal waves over slope-shelf topography // *J. Fluid Mech.*– 1986.– **167**.– P. 285–308.
- Holloway, P., Pelinovsky, E., Talipova, T., Barnes, B. A. Nonlinear model of internal tide transformation on the Australian North West Shelf // *J. Phys. Oceanogr.*– 1997.– **27**.– P. 871–896.
- Holloway, P., Pelinovsky, E., Talipova, T. A generalized Korteweg–de Vries model of internal tide transformation in the coastal zone // *J. Geophys. Res.*– 1999.– **104**(C8).– P. 18333–18350.
- Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E., Slunyaev A. The generation of large-amplitude solitons from an initial disturbance in the extended Korteweg–de Vries equation // *Chaos.*– 2002.– **12**.– P. 1070–1076.
- Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Kurkin A. Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves // *J. Physical Oceanography.*– 2002.– **34**.– P. 2774–2779.
- Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Modeling internal solitary waves in the coastal ocean // *Survey in Geophysics.*– 2007.– **28**.– P. 273–298.
- Miyata M. An internal solitary wave of large amplitude // *La Mer.*– 1985.– **23**.– P. 43–48.
- Grue J., Jensen A., Rusan P.-O., Sveen J. K. Properties of large amplitude internal waves // *J. Fluid Mech.*– 1999.– **380**.– P. 257–278.
- Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.*– 1999.– **396**.– P. 1–36.
- Jo T.-C., Choi W. Dynamics of strongly nonlinear solitary waves in shallow water // *Stud. Appl. Math.*– 2002.– **109**.– P. 205–227.
- Carr M., Fructus D., Grue J., Jensen A., Davies P. A. Convectively-induced shear instability in large internal solitary waves // *Phys. Fluids.*– 2008.– **20**.– P. 126601–13.
- Fructus D., Carr M., Grue J., Jensen A., Davies P. A. Shear-induced breaking of large internal solitary waves // *J. Fluid Mech.*– 2009.– **620**.– P. 1–29.
- Bogucki D., Garrett C. A simple model for the shear-induced decay of an internal solitary wave // *J. Phys. Oceanogr.*– 1993.– **23**.– P. 1767–1776.
- Lamb, K.G. Numerical experiments of internal wave generation by strong tidal flow across a finite amplitude bank edge // *Journal of Geophysical Research.*– 1994.– **99** (C1).– P. 843–864.
- Kanarska Y., Maderich V. A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // *Ocean Dynamics.*– 2003.– **53**.– P. 176–185.
- Бровченко И.А., Городецкая Н.С., Мадерич В.С., Никишов В.И., Терлецкая Е.В. Взаимодействие внутренних уединенных волн большой амплитуды с препятствием // *Прикладная гидромеханика.*– 2007.– **9**(81).– С. 3–7.
- Chen C.-Y., Hsu J. R.-Ch., Cheng M.-H Chen, H.-H., Kuo Ch.-F. An experimental study of stratified mixing caused by internal solitary waves in a two-layered fluid system over variable seabed topography // *Ocean Engineering.*– 2007.– **34**.– P. 1995–2008.
- Grimshaw, R., Pelinovsky, E., Talipova T. Fission of a weakly nonlinear interfacial solitary wave at a step // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics.*– 2008.– **102**.– P. 179–194.
- De Zarate, A. R. Nashbin, A. A reduced model for internal waves interacting with topography at intermediate depth // *Commun. Math. Sci.*– 2008.– **6**.– P. 385–396.
- Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Pelinovsky E., Choi B.H., Brovchenko I., Terletska K., Kim D.C. The transformation of an interfacial solitary wave of elevation at a bottom step // *Nonlinear Proc. Geoph.*– 2009.– **16**.– P. 33–42.

31. *Wessels F, Hutter K* Interaction of internal waves with topographic sill in a two-layer fluid // *J. Phys. Oceanogr.*– 1996.– **26**.– P. 5–20.
32. *Mellor G.L.* An equation of state for numerical models of ocean and estuaries // *J Atmos. Ocean. Tech.*– 1991.– **8**.– P. 609–611.
33. *Kao T.W., Pan F.S., Renouard D.* Internal solitons on the pycnocline: generation, propagation, shoaling and breaking over a slope // *J. Fluid Mech.*– 1985.– **159**.– P. 19–53.
34. *Chen C.-Y., Hsu J. R.-C., Cheng-Wu Chen C.-W., Chen, H.-H., Kuo C.-F., Cheng M.-H.* Generation of internal solitary wave by gravity collapse // *J. Marine Science and Technology.*– 2007.– **15**.– P. 1–7.
35. *Winters K. B., Lombard P. N., Riley J. J., D'Asaro E. A.* Available potential energy and mixing in density stratified fluids // *J. Fluid Mech.*– 1995.– **289**.– P. 115–128.
36. *Shepherd, T. G.* A unified theory of available potential-energy // *Atmos.-Ocean.*– 2006.– **31**.– P. 1–26.
37. *Scotti A., Beardsley R., and Butman B.* On the interpretation of energy and energy fluxes of nonlinear internal waves: an example from Massachusetts bay // *J. Fluid Mech.*– 2006.– **561**.– P. 103–112.
38. *Moum J. N., Klymak J. M., Nash J. D., Perlin A., Smyth W. D.* Energy transport by nonlinear waves // *J. Phys. Oceanogr.*– 2007.– **37**.– P. 1968–1988.
39. *Lamb K.G.* Energy and pseudoenergy flux in the internal wave field generated by tidal flow over topography // *Cont. Shelf Res.*– 2007.– **27**.– P. 1208–1232.
40. *Lamb K.G., Nguyen V.T.* On calculating energy flux in internal solitary waves with an application to reflectance // *J Phys Oceanogr.*– 2009.– **29**.– P. 1–7.
41. *Helfrich K. R.* Internal solitary wave breaking and run-up on a uniform slope // *J. Fluid Mech.*– 2009.– **243**.– P. 133–154.
42. *Bourgault D., Kelley D.* On the reflectance of uniform slopes for normally incident interfacial solitary waves // *J Phys Oceanogr.*– 2007.– **37**.– P. 1156–1162.