

УДК 532.522: 518.5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РОДИОНОВА ДЛЯ РАСЧЕТА КВАЗИОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. РЕШЕТНЯК, А. Н. СЕМКО

Донецкий Национальный университет

Получено 23.12.2008

Метод Родионова адаптирован для расчета квазиодномерных течений идеальной сжимаемой жидкости. Выполнена разностная аппроксимация уравнений движения и граничных условий на подвижных границах разных типов: стенка, поршень и свободная поверхность. Верификация расчетного алгоритма проведена на ряде тестовых задач с неподвижными и подвижными границами. Рассчитано течение в конкретной гидроимпульсной установке

Метод Родіонова адаптовано для розрахунку квазіодновимірних течій ідеальної стислої рідини. Виконана різнична апроксимація рівнянь руху та граничних умов на рухомих границях різних типів: стінка, поршень та вільна поверхня. Верифікація розрахункового алгоритму проведена на ряді тестових задач з нерухомими та рухомими границями. Розрахована течія у конкретній гідроімпульсній установці

Rodionov's method is adopted for solving quasi one dimensional flows of ideal compressible fluid. Approximation by finite differences of equation of moving and border conditions on moving borders of different types: free surface, piston and wall, is done. Verification of solving algorithm was done on number of testing problems with unmoving and moving borders. Flow in concrete pulse installation is calculated.

ВВЕДЕНИЕ

Численные методы широко применяются для решения различных задач газовой динамики. Многолетняя практика проведения численных расчетов газодинамических течений позволила сформулировать следующие основные требования к разностным схемам: монотонность, однородность, консервативность, экономичность и высокий порядок аппроксимации [1, 2]. Большое распространение для расчета газодинамических течений получил метод Годунова [3], который позволяет эффективно рассчитывать течения на подвижных сетках и удовлетворяет всем перечисленным требованиям, кроме одного – имеет первый порядок аппроксимации, что заметно снижает точность расчетов. Известны работы по модернизации метода Годунова и повышению его точности В.П. Колгана, А.Н. Крайко, А.В. Родионова, Н.И. Тилляевой [4–8].

Для перехода от расчетов методом Годунова к методам повышенной точности наиболее удобной является схема Родионова, которая полностью базируется на основных идеях метода Годунова и требует незначительной доработки алгоритма [6, 7]. Схема Родионова удовлетворяет требованиям монотонности, однородности, консервативности и имеет второй порядок аппроксимации по времени и координате. Повышение порядка аппроксимации по координате достигается за счет замены кусочно-постоянного распределения

параметров кусочно-линейным, а по времени – за счет выполнения двухшагового пересчета типа предиктор-корректор. Сохранение монотонности обеспечивается применением принципа минимума производной при выборе приращений функций [4]. В отличие от схемы Колгана [4], схема Родионова устойчива при числе Куранта $k \leq 1$.

В оригинальной статье метод Родионова применен для расчета течений идеального сжимаемого газа. В настоящей работе метод адаптирован для расчета квазиодномерных течений идеальной сжимаемой жидкости. В рамках метода выполнена разностная аппроксимация уравнений для квазиодномерного движения жидкости и граничных условий на подвижных границах разных типов: стенка, поршень и свободная поверхность. Проведена верификация расчетного алгоритма на ряде тестовых задач с неподвижными и подвижными границами. Рассчитано течение жидкости в гидроимпульсной установке конкретной конструкции.

1. РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

Уравнения квазиодномерного движения идеальной сжимаемой жидкости в изэнтропическом приближении можно записать в виде [9–12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= -\frac{\rho u}{F} \frac{dF}{dx}, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} &= -\frac{\rho u^2}{F} \frac{dF}{dx}, \\ p &= B [(\rho/\rho_0)^n - 1], \end{aligned} \quad (1)$$

где x – координата; t – время; u , p и ρ – скорость, давление и плотность; F – площадь поперечного сечения канала; $B = 304.5$ МПа; $n = 7.15$ и $\rho_0 = 1000$ кг/м³ – постоянные в уравнении состояния воды в форме Тэта. Уравнения (1) – неоднородные. Левые части уравнений соответствуют плоскому одномерному движению, а квазиодномерный характер движения отражается в неоднородных членах, которые имеют смысл источников массы и импульса. В таком виде конечно-разностная аппроксимация уравнений (1) для квазиодномерного движения легко обобщается для одномерных движений с осевой и центральной симметрией.

Запишем разностную аппроксимацию уравнений (1) по схеме Родионова для подвижной сетки в виде:

$$\begin{aligned} \rho_{i+1/2}^{m+1} &= \frac{(\rho \Delta x)_{i+1/2}^m - \Delta t [R(U - W)]_i^{i+1}}{\Delta x_{i+1/2}^{m+1}} - \\ &- \left(\frac{\rho u}{F}\right)_{i+1/2}^{m+1/2} \frac{F|_i^{i+1}}{\Delta x_{i+1/2}^{m+1/2}} \frac{\Delta t \Delta x_{i+1/2}^{m+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}^{m+1}}; \\ (\rho u)_{i+1/2}^{m+1} &= \left\{ (\rho u \Delta x)_{i+1/2}^m - \right. \\ &- \Delta t [(RU(U - W) + P)]_i^{i+1} \left. \right\} / \Delta x_{i+1/2}^{m+1} - \\ &- \left(\frac{\rho u^2}{F}\right)_{i+1/2}^{m+1/2} \frac{F|_i^{i+1}}{\Delta x_{i+1/2}^{m+1/2}} \frac{\Delta t \Delta x_{i+1/2}^{m+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}^{m+1}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь Δt – шаг по времени; Δx – шаг сетки по координате на m -том шаге по времени; $W_i = (x_i^{m+1} - x_i^m)$ – скорость движения i -го узла сетки; $F|_i^{i+1} = F_{i+1}^{m+1/2} - F_i^{m+1/2}$. Большими буквами R , U , P обозначены параметры, которые рассчитываются на границах ячеек при решении обобщенной задачи Римана или на границах расчетной области из граничных условий. Параметры с целыми индексами i определяются в точках с координатами x_i , а параметры с полуцелыми индексами $i + 1/2$ – в точках с координатами $x_{i+1/2}$. Нумерация узлов сетки от 0 до N слева направо.

Процедуру расчета параметров по схеме Родионова можно разбить на следующие этапы.

1. Определение приращений параметров течения внутри ячейки на основании принципа минимальной производной Колгана

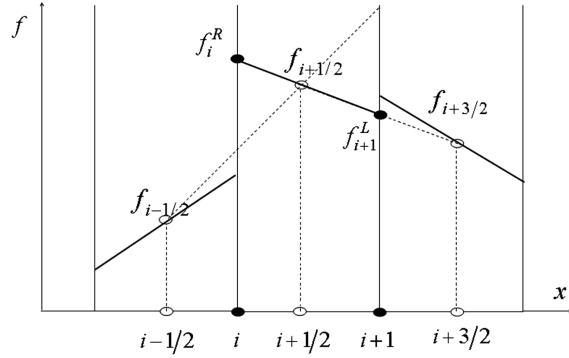


Рис. 1. Определение параметров внутри ячейки

$$\Delta f_{i+1/2} = \begin{cases} \Delta f_{i+1}, |\Delta f_{j+1}| \leq |\Delta f_i|; \\ \Delta f_i, |\Delta f_{j+1}| > |\Delta f_i|; \end{cases}$$

$$\Delta f_i = f_{i+1/2}^m - f_{i-1/2}^m, \quad \Delta f_{i+1} = f_{i+3/2}^m - f_{i+1/2}^m.$$

Здесь $f = \{\rho, u\}$ – один из параметров течения. Распределение параметров по координате в методе Родионова предполагается кусочно-линейным и определяется на основании принципа минимальной производной Колгана, как это схематично показано на рис. 1.

2. Определение параметров по обе стороны границы ячейки по формулам

$$f_i^L = f_{i-1/2}^m + \Delta f_{i-1/2}^m / 2, \quad f_i^R = f_{i+1/2}^m - \Delta f_{i+1/2}^m / 2.$$

Здесь верхними индексами R и L отмечены параметры справа и слева от границы с номером i .

3. Предварительный расчет параметров $\tilde{f}_{i+1/2}^{m+1}$ через шаг по времени по формулам (4), в которых производится замена

$$f_{i+1/2}^{m+1} = \tilde{f}_{i+1/2}^{m+1}, \quad f_i = f_i^R, \quad f_{i+1} = f_{i+1}^L.$$

4. Уточнение параметров по обе стороны от границы ячейки по формулам

$$\tilde{f}_i^L = \left(\tilde{f}_{i+1/2}^{m+1} + f_{i-1/2}^m + \Delta f_{i-1/2}^m \right) / 2,$$

$$\tilde{f}_i^R = \left(\tilde{f}_{i+1/2}^{m+1} + f_{i-1/2}^m - \Delta f_{i+1/2}^m \right) / 2.$$

5. Определение “больших” величин R , U , P на боковых гранях ячейки из решения задачи о распаде произвольного разрыва с начальными значениями параметров на разрыве \tilde{f}_i^L и \tilde{f}_i^R . Для изэнтропического течения из условий на характеристиках имеем

$$U_i = \frac{\tilde{u}_i^R + \tilde{u}_i^L}{2} + \frac{\tilde{a}_i^L - \tilde{a}_i^R}{n-1},$$

$$A_i = \frac{\tilde{a}_i^R + \tilde{a}_i^L}{2} + \frac{n-1}{4} (\tilde{u}_i^L - \tilde{u}_i^R),$$

где $a = \sqrt{n(p+B)/\rho}$ – скорость звука в воде. Давление и плотность рассчитываются по формулам

$$P = B \left[\left(\frac{A}{a_0} \right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1 \right], \quad R = \rho_0 \left(\frac{A}{a_0} \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

где $a_0 = \sqrt{nB/\rho_0}$ – характерная скорость звука в воде.

6. Окончательный расчет параметров $f_{i+1/2}^{m+1}$ по формулам (2).

Шаг по времени разностной схемы ограничен модифицированным условием устойчивости Куранта [2]

$$\Delta t \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta x_{i+1/2}}{\left((u+a)_{i+1/2} + W_i \right)}, \\ \frac{\Delta x_{i+1/2}}{\left((a-u)_{i+1/2} - W_{i-1} \right)}. \end{array} \right.$$

2. АППРОКСИМАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

При расчете гидроимпульсных установок наиболее часто встречаются границы следующих типов: стенка, движущаяся с заданной скоростью (в частном случае неподвижная), поршень и свободная поверхность, движущиеся по неизвестным заранее законам, которые определяются в ходе решения задачи. В настоящей работе проведена аппроксимация граничных условий на указанных границах со вторым порядком точности. Рассмотрим аппроксимацию этих граничных условий.

2.1. Поршень

Пусть левая граница расчетной области является поршнем, который движется под действием приложенных к нему сил с переменной скоростью, и его движение описывается уравнением

$$\frac{du_p}{dt} = -p \frac{F_p}{m_p}, \quad (3)$$

где u_p , m_p и F_p – скорость, масса и площадь поперечного сечения поршня; p – давление жидкости на поршень.

Аппроксимацию граничных условий на поршне проведем в следующем порядке.

Определение параметров на правой стороне левой границы ячейки, прилегающей к поршню, на текущий момент времени по формуле

$$f_0^R = f_{1/2}^m - \Delta f_{1/2}/2.$$

Разложение в ряд Тейлора для этого выражения дает следующую оценку погрешности аппроксимации:

$$f_0^R = f_{1/2}^m - (f'_x)_{1/2}^m \Delta x/2 + (f''_x)_{1/2}^m \Delta x^2/8 + \dots = f_{1/2}^m - \Delta f_{1/2}/2 + O(\Delta x^2).$$

Расчет скорости звука на границе ячейки в текущий момент времени из условия на характеристике второго семейства по формуле

$$A_0^m = \frac{n-1}{2} (U_0^m - u_0^m) + a_0^m.$$

Поскольку точность вычисления параметров определяется погрешностью расчета величин a_0^m и u_0^m , а также погрешностью, связанной с приближенным решением квазиодномерной задачи Римана [1], то для оценки погрешности имеем $A_0^m = \frac{n-1}{2} (U_0^m - u_0^m) + a_0^m + O(\Delta x^2)$. Давление на границе P_0^m рассчитывается по найденной скорости звука A_0^m .

Предварительный расчет параметров $\tilde{f}_{1/2}^{m+1}$ через шаг по времени по формулам (4), в которых производится замена

$$f_{1/2}^{m+1} = \tilde{f}_{1/2}^{m+1}, \quad f_0 = f_0^R.$$

Уточнение параметров на правой стороне левой границы ячейки через половину шага по времени по формуле

$$\tilde{f}_0^R = \left(\tilde{f}_{1/2}^{m+1} + f_{1/2}^m - \Delta f_{1/2} \right) / 2 + O(\Delta x^2, \Delta t^2).$$

Погрешность определения параметров при этом можно найти методом разложения в ряд Тейлора, аналогично тому, как это было сделано в п. 1. Расчет скорости поршня через шаг по времени методом Эйлера со вторым порядком точности

$$U_0^{m+1} = U_0^m - \Delta t P_0^m \frac{F_p}{m_p} + O(\Delta x^2, \Delta t^2).$$

Пересчет “больших” величин на границе расчетной области через половину шага по времени:

$$U_0^{m+1/2} = \frac{U_0^m + U_0^{m+1}}{2} + O(\Delta x^2, \Delta t^2),$$

$$A_0^{m+1/2} = \frac{n-1}{2} (U_0^{m+1/2} - u_0^{m+1/2}) + a_0^{m+1/2} + O(\Delta x^2, \Delta t^2).$$

Приведенный алгоритм позволяет рассчитывать параметры на поршне со вторым порядком точности.

2.2. Стенка

Рассмотрим левую границу расчетной области, которая представляет собой стенку, движущуюся с заданной скоростью u_0 . В этом случае скорость жидкости на границе определяется из граничного условия, а скорость звука находится по условию на характеристике второго семейства. Давление и плотность находятся по скорости звука. Аппроксимацию со вторым порядком точности проводим по алгоритму, аналогичному описанному выше для поршня. Определив параметры на правой стороне левой границы ячейки, прилегающей к стенке, через половину шага по времени, можно рассчитать “большие” величины по условию на характеристике второго семейства

$$A_0^{m+1/2} = \frac{n-1}{2} (U_0^{m+1/2} - u_{1/2}^{m+1/2}) + a_{1/2}^{m+1/2} + O(\Delta x^2, \Delta t^2).$$

Аналогично получим выражение для скорости звука на правой границе с номером N :

$$A_N^{m+1/2} = a_{N-1/2}^{m+1/2} - \frac{n-1}{2} (U_N^{m+1/2} - u_{N-1/2}^{m+1/2}).$$

2.3. Свободная поверхность

Пусть правая граница расчетной области является свободной поверхностью, которая движется с переменной скоростью, зависящей от давления жидкости вблизи свободной поверхности. Как известно, давление на свободной поверхности постоянное и равно атмосферному. Отсюда следует, что скорость звука на свободной поверхности постоянная и равна $a_0 = \sqrt{nB/\rho_0}$. Неизвестная скорость жидкости на свободной поверхности находится по условию на характеристике первого семейства по формуле

$$U_{N-1/2}^{m+1/2} = u_{N-1/2}^{m+1/2} + \frac{2}{n-1} (a_{N-1/2}^{m+1/2} - a_0).$$

Аналогично, для свободной поверхности на левой границе расчетной области получим

$$U_{N-1/2}^{m+1/2} = u_{N-1/2}^{m+1/2} - \frac{2}{n-1} (a_{N-1/2}^{m+1/2} - a_0).$$

Параметры с левой стороны границы приграничной ячейки через половину шага по времени определяются по такой же методике, как и для поршня.

3. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА

Для верификации метода проведен расчет ряда тестовых задач: тест Сода [13] и тестовые задачи с поршнем и свободной поверхностью для подвижных границ. Рассмотрим результаты тестирования более детально по порядку.

3.1. Тест Сода

Цилиндрическая труба длиной $2L$ постоянного сечения, разделенная по середине диафрагмой, заполнена неподвижной жидкостью. Давление слева от диафрагмы равно p_1 , а справа – p_2 (для определенности $p_1 > p_2$). В начальный момент диафрагма разрывается, и жидкость приходит в движение. Влево от контактной поверхности по жидкости будет распространяться центрированная волна разрежения, а вправо – ударная волна.

В безразмерных переменных начальные условия для теста Сода имеют вид:

$$\begin{aligned} u &= 0, & 0 \leq x \leq 2; \\ p &= 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ p &= 0, & 1 < x \leq 2. \end{aligned}$$

При переходе к безразмерным величинам за масштабы выбраны: половина длины трубы L и давление p_1 .

Расчеты проводились на сетке из 100 ячеек при числе Куранта $k = 0.9$ до момента времени, когда какая-то из волн достигала границ расчетной области.

На рис. 2 представлено распределение давления по координате на момент времени $t = 0.6$ для случаев: a – вся расчетная область, b – область ударной волны, c – область волны разрежения. За масштаб времени взято характерное время L/a_0 . Кривые 1, 2 и 3 – аналитическое решение, расчет методом Годунова и методом Родионова. Из графиков

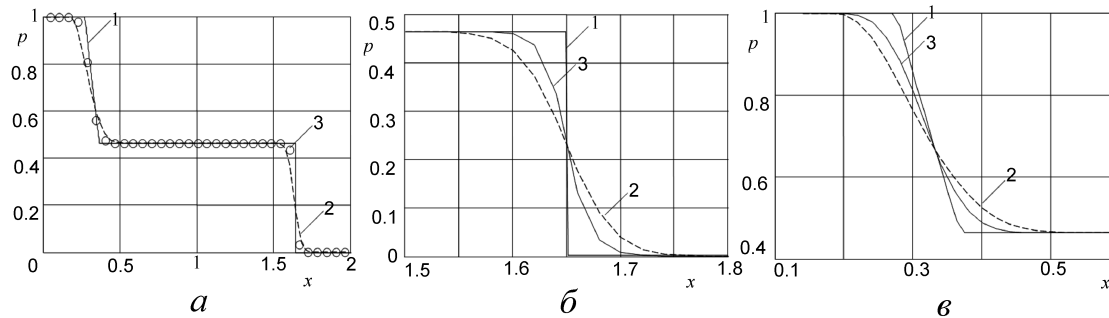


Рис. 2. Распределение давлений по координате:
1 – аналитическое решение; 2 – метод Годунова; 3 – метод Родионова

видно, что в зонах большого изменения параметров решение методом Годунова дает более “размазанную” картину течения, чем решение методом Родионова.

Было рассчитано среднеквадратическое отклонение от точного решения для методов Годунова и Родионова по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_r(x_i) - P(x_i))^2},$$

где N – количество узлов сетки; $P_r(x_i)$ – давление в точке с координатой x_i , рассчитанное численно; $P(x_i)$ – давление в точке с координатой x_i , рассчитанное аналитически. Расчет проводился в областях ударной волны и волны разрежения (рис. 2, б, в). Для сетки разрешением 100 ячеек отклонение для метода Годунова оказалось больше, чем отклонение для метода Родионова, в 2 раза как для волны разрежения, так и для ударной волны.

Процессорное время, затрачиваемое на расчет элементарной ячейки методом Родионова, в сравнении с методом Годунова в 1.5 раза больше. Поэтому при расчетах на одинаковых сетках время расчета методом Родионова больше почти в два раза. Однако точность расчета методом Родионова намного выше, чем Годунова. Чтобы добиться такой же точности расчетов методом Годунова, надо увеличить количество ячеек в 8–10 раз, что приведет к существенному увеличению времени счета. При сравнении времени счета по одинаковой точности расчетов метод Родионова быстрее в 10–30 раз. Метод Родионова позволяет получить удовлетворительные результаты на сильно неравномерных сетках, когда в силу определенных причин шаг сетки в одном месте расчетной области отличается от шага в другой в несколько раз. В этом существенное преимущество метода Родионова.

3.2. Тест с подвижными границами

Рассмотрим тестовую задачу с двумя подвижными границами, поршнем и свободной поверхностью, законы движения которых не известны заранее и определяются в ходе решения задачи. Пусть в цилиндрической трубе с площадью поперечного сечения F_p находится неподвижный столб воды длиной L , который удерживается тонкими диафрагмами. В начальный момент времени слева по воде ударяет поршень массы m_p , движущийся с начальной скоростью u_0 . Правую границу водяного заряда будем считать свободной поверхностью. При ударе поршня по воде начнет распространяться ударная волна в направлении свободной поверхности. Давление на поршне повысится, он начнет тормозиться и испускать волны разрежения, которые будут уменьшать давление на фронте ударной волны. Достигнув свободной поверхности, ударная волна отразится волной разрежения, приведя в движение всю жидкость.

Одномерное движение жидкости описывалось однородными уравнениями (1) с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, x) &= 0, & p(0, x) &= 0, \\ \rho(0, x) &= \rho_0; & 0 \leq x \leq L; \\ u(t, x_p) &= u_p, & p(t, x_F) &= 0. \end{aligned}$$

Движение поршня описывалось обыкновенными дифференциальными уравнения с начальными условиями

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} &= -\frac{p(t, x_p)}{m_p} F_p, & \frac{dx_p}{dt} &= u_p, \\ u_p(0) &= u_0, & x_p(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Расчеты проводились на регулярной подвижной сетке, которая была ограничена слева движущимся поршнем, а справа – свободной поверхностью.

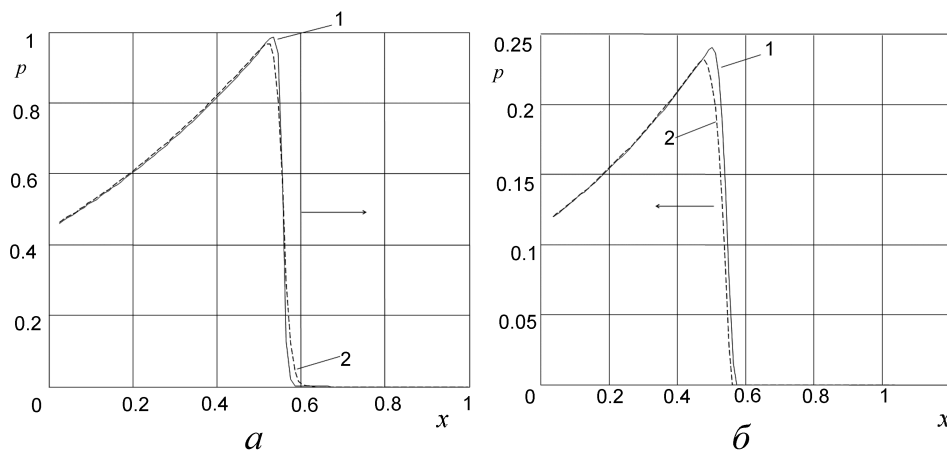


Рис. 3. Распределение давления:
1 – метод Родионова; 2 – метод Годунова

На рис. 3 приведены распределения давления для двух моментов времени $t_1 = 0.5$ (рис. 3,а) и $t_2 = 1$ (рис. 3,б), полученные методами Родионова (кривые 1) и Годунова (кривые 2) на сетке из 100 ячеек. Значения величин на графиках безразмерные: давление отнесено к давлению гидроудара $\rho_0 u_0 a_0$, а координата – к начальной длине столба жидкости L . Первый рисунок соответствует ударной волне, распространяющейся в сторону свободной поверхности, а второй – волне разрежения, отраженной от свободной поверхности. Как видно, метод Родионова точнее передает распределение параметров в зонах ударной волны и волны разрежения, где происходит резкое изменение параметров. Из-за слабой сжимаемости жидкости сектор волны разрежения, в пределах которого происходит непрерывное изменение параметров, узкий и укладывается всего в несколько ячеек. В областях плавного изменения параметров решения разными методами хорошо совпадают.

Тестовые расчеты показали, что метод Родионова легко адаптируется для расчета одномерных движений идеальной сжимаемой жидкости. Метод позволяет проводить расчеты на подвижных регулярных и нерегулярных сетках с границами разных типов (поршень, стенка, свободная поверхность), которые движутся по заданным законам или законы движения которых определяются непосредственно при расчете течения. Метод Родионова дает гораздо лучшее разрешение в областях с большими градиентами параметров течения, чем метод Годунова. Для достижения одинаковой точности расчетов метод Родионова требует в несколько раз меньше времени, чем метод Годунова,

для которого надо использовать гораздо более мелкие сетки.

4. РАСЧЕТ ГИДРОИМПУЛЬСНЫХ УСТАНОВОК

4.1. Гидроимпульсная пресс-пушка

Известен технологический процесс гидроимпульсной штамповки, в котором силовое воздействие на заготовку оказывает ударная волна и гидропоток. Рассмотрим пресс-пушку [14], в которой используется кинетическая энергия поршня. Поршень, предварительно ускоренный сжатым газом, ударяет по воде и генерирует в ней ударную волну. Ударная волна, достигнув заготовки, оказывает на нее силовое воздействие и передает ей часть своей энергии. Одновременно происходит частичное отражение ударной волны от поверхности заготовки. Процесс нагружения заготовки носит ярко выраженный волновой характер, сопровождается взаимодействием волн сжатия и разрежения и может быть рассчитан только с учетом сжимаемости жидкости.

Одномерное движение идеальной сжимаемой жидкости в пресс-пушке описывается однородными уравнениями (1) с начальными и граничными условиями

$$u(0, x) = 0, p(0, x) = 0, x \in [-L, 0],$$

$$u(t, x_p) = u_p, u(t, 0) = 0.$$

Здесь L – длина водяного заряда. Заготовка для простоты считается жесткой и неподвижной, начало координат совмещено с заготовкой.

Движение поршня описывается уравнениями (6) с соответствующими начальными условиями.

Задача решалась численно методами Годунова и Родионова. В этой задаче расчетная область ограничена с одной стороны движущимся поршнем, а с другой – неподвижной стенкой. Расчеты проводились на равномерной подвижной сетке, которая с одной стороны опиралась на поршень, а с другой – на заготовку.

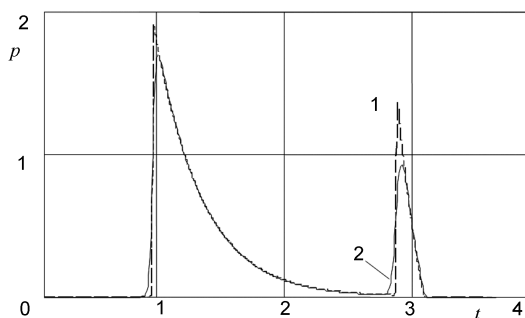


Рис. 4. Зависимость давления от времени: 1 – расчет методом Родионова; 2 – методом Годунова

На рис. 4 приведена зависимость давления от времени на заготовке для установки с данными [14]: длина столба воды $L = 650$ мм, радиус поршня $R_p = 56$ мм, масса поршня $m_p = 2.3$ кг, скорость поршня $u_0 = 32$ м/с. Кривые 1 и 2 – расчеты методами Родионова и Годунова. Давление отнесено к давлению гидроудара $\rho_0 u_0 a_0$, а время – к характерному времени $\tau = L/a_0$. Расчетная сетка состояла из 100 ячеек.

Как видно, из графиков метод Родионова дает более крутые фронты волн и большие значения давления. К моменту времени $t_1 = 0.98$ ударная волна достигает заготовки и скачком повышает на ней давление почти в два раза по сравнению с давлением гидроудара. На этой стадии максимальные значения давления для методов Годунова и Родионова различаются на 7 %.

Второй пик давления соответствует моменту времени, когда ударная волна отразилась от заготовки, достигла поршня, отразилась от него и вернулась назад на заготовку. В этом случае максимальные значения давления для методов Годунова и Родионова различаются на 22 %.

4.2. Гидропушка

Предложенный метод опробован при расчете параметров гидропушки конкретной конструкции [15]. Гидропушка – это установка, которая применяется для получения импульсных струй жидкости сверх высокой скорости (1000–3000 м/с). Первые конструкции гидропушек были разработаны и исследованы Б. В. Войцеховским [16]. Теория установок развивалась в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования гидропушек показали, что пренебрежение сжимаемостью жидкости может привести к существенным ошибкам. Разные конструкции гидропушек, их математические модели, учитывающие сжимаемость жидкости, и методы расчетов подробно описаны Г. А. Атановым в монографии [9]. Для расчета параметров гидропушки Г. А. Атанов разработал метод Годунова [17].

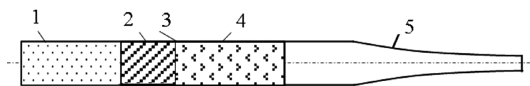


Рис. 5. Гидропушка: 1 – ресивер, 2 – поршень; 3 – вода; 4 – ствол; 5 – сопло

Схема гидропушки, в которой реализуется инерционный принцип разгона жидкости при втекании в сужающееся сопло, приведена рис. 5. Под действием давления сжатого газа 1 тяжелый поршень 2 разгоняется вместе с водой 3 в стволе 4. Вода, достигая входа в сопло 5, начинает втекать в него, ускоряясь. Ускорение воды происходит за счет перераспределения энергии между частицами нестационарно движущейся жидкости. При этом кинетическая энергия частиц воды, прилегающих к свободной поверхности, значительно превышает среднюю по объему энергию. Достигнув среза сопла, вода истекает из него импульсной высокоскоростной струей.

Хорошие результаты для расчета параметров гидропушки дает модель, в которой жидкость считается идеальной в смысле пренебрежения вязкостью и сжимаемой, течение предполагается квазиодномерным и изоэнтропическим, влияние воздуха в сопле и деформации корпуса не учитываются. В рамках этой модели движение жидкости описывается системой уравнений (1) со следующими начальными и граничными условиями:

$$u(0, x) = U_0, \quad p(0, x) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_0; \quad -L \leq x \leq 0;$$

$$u(t, x_p) = u_p, p(t, x_F) = 0.$$

Здесь x_p и u_p – координата и скорость поршня; x_F – координата свободной поверхности; L – длина водяного заряда. Начало координат помещено у входа в сопло, за начальный принят момент времени, когда передний фронт жидкости достигает входа в сопло.

Движение поршня описывалось обыкновенными дифференциальными уравнения с начальными условиями

$$\frac{du_p}{dt} = -\frac{p(t, x_p)}{m_p} F_p, \quad \frac{dx_p}{dt} = u_p,$$

$$u_p(0) = u_0, \quad x_p(0) = -L.$$

Рассчитывалась гидропушка со следующими конструктивными параметрами: длина водяного заряда $L = 140$ мм, длина сопла $L_s = 253$ мм, радиус ствола $R_c = 33$ мм, радиус выходного сечения сопла $R_s = 5$ мм, начальная скорость водяного заряда с поршнем $u_0 = 76.2$ м/с, масса поршня $m_p = 2.25$ кг. Использовалось экспоненциальное сопло, площадь поперечного сечения которого изменялась по формуле Войцеховского: $F = F_c e^{-\alpha x}$, где $\alpha = \ln(F_s/F_c)/L_s$ – параметр сопла [16]. Расчеты проводились на равномерной подвижной сетке, которая с одной стороны опиралась на поршень, а с другой – на свободную поверхность. Шаг сетки определялся по формуле $\Delta x = (x_F - x_p)/N$, где N – количество расчетных ячеек.

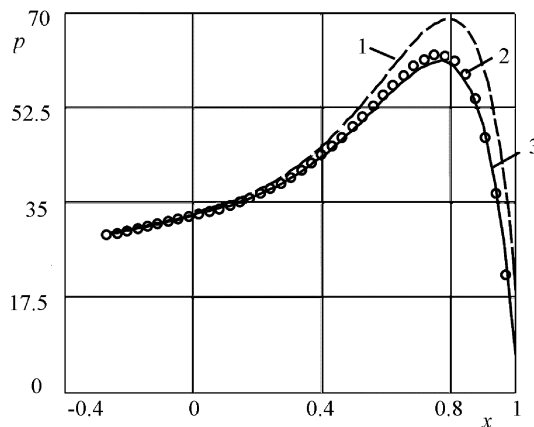


Рис. 6. Распределение давления на начало истечения воды из сопла гидропушки:

- 1 и 2 – метод Годунова (100 и 1000 ячеек);
3 – метод Родионова (100 ячеек)

На рис. 6 представлено распределение давления на момент времени, когда вода достигает среза сопла и начинается истечение струи. Кривые 1 и 2 – расчеты методом Годунова на сетках из 100 и 1000 ячеек, кривая 3 – расчет методом Родионова на сетке из 100 ячеек. Значения величин на графиках безразмерные: давление отнесено к скоростному напору $\rho_0 u_0^2/2$, а координата – к длине сопла L_s . При расчетах коэффициент запаса в условии устойчивости Куранта $k = 0.9$. Как видно из графиков, решение методом Годунова на грубой сетке из 100 ячеек сильно отличается от решения на мелкой сетке из 1000 ячеек (кривые 1 и 2). Максимальные значения давления для этих вариантов различаются на 12 %. В то же время решение методом Родионова на грубой сетке из 100 ячеек и методом Годунова на мелкой сетке хорошо совпадают (кривые 2 и 3). Здесь различие максимальных давлений около 1 %. Процессорное время, затраченное на расчет элементарной ячейки методом Родионова больше, чем методом Годунова примерно в три раза. Однако решение методом Годунова на сетке из 1000 ячеек потребовало в 30 раз больше времени, чем расчет методом Родионова на сетке из 100 ячеек, дающий примерно такую же точность.

При расчетах контролировалось выполнение балансов массы, импульса и энергии. На мелких сетках дисбаланс массы не превышал 0.01 %, а импульса и энергии – 0.05 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод Родионова развит для расчета квазиодномерных течений идеальной сжимаемой жидкости на подвижных сетках. Проведена аппроксимация граничных условий для подвижных границ разного типа (поршень, свободная поверхность, подвижная стенка) со вторым порядком точности. Тестирование метода на задачах с неподвижными и подвижными границами показало его надежность, экономичность и эффективность по сравнению с методом Годунова. Предложенным методом рассчитаны гидродинамические параметры гидроимпульсной пресс-пушки и гидропушки конкретной конструкции, движение жидкости в которых ограничено подвижными границами. Показано, что для достижения одинаковой точности расчеты методом Родионова требуют в несколько раз меньше компьютерного времени, чем метода Годунова.

1. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения

- гиперболических систем уравнений.– М.: Физматлит, 2001.– 608 с.
- Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков.– М.: Мир, 1990.– 661 с.
 - Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб.– 1959.– Том 47 (89). N 3.– С. 207-306.
 - Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных течений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ.– 1972.– Том 3. N 6.– С. 68-77.
 - Копченов В. И., Крайко А. Н. Монотонная разностная схема второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 1983.– Т. 23. N 4.– С. 848- 859.
 - Родионов А. В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // Журнал вычислительной математики и математической физики.– 1987.– Том 27. N 4.– С. 585-593.
 - Родионов А. В. Повышение порядка аппроксимации схемы Годунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 1987.– Т. 27. N 12.– С. 1853-1860.
 - Тилляева Н. И. Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Уч. зап. ЦАГИ.– 1986.– Т.17. N 2.– С. 18-26.
 - Атанов Г. А. Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород.– К.: Вища школа, 1987.– 155 с.
 - Семко А. Н. Импульсные струи жидкости высокого давления.– Донецк: Вебер (Донецкое отделение), 2007.– 149 с.
 - Семко А. Н. О влиянии сжимаемости жидкости на параметры гидропушки // Инженерно-физический журнал.– 2001.– Том 74. N 1.– С. 1-5.
 12. O. Petrenko, E.S. Geskin, G.A. Atanov, A. Semko, B. Goldenberg Numerical Modeling of High-Speed Water Slugs // Transaction of the ASME. Journal of Fluids Engineering.– 2004.– Vol. 126. No 2.– P. 206 - 209.
 - Приходько А. А Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и теплообмене.– К: Наукова думка, 2003.– 380 с.
 - Галиев Ш. У. Нелинейные волны в ограниченных сплошных средах.– К: Наукова думка, 1988.– 264 с.
 - Атанов Г.А., Семко А.Н., Украинский Ю.Д. Исследование внутренней баллистики гидропушки // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа.– 1983.– N 4.– С. 168-170.
 15. Войцеховский Б. В., Дудин Ю. А., Николаев Ю. А., Николаев В. П., Никитин В. В. Кавитационный эффект в экспоненциальном струйном насадке // Динамика сплошной среды. - Новосибирск: ИГД СО АН СССР.– 1971.– Вып. 9.– С. 7-11.
 - Атанов Г.А. Расчет выстрела гидропушки методом “распада разрыва” // Гидромеханика. - Киев: Наукова думка.– 1974.– Вып. 30.– С. 51-54.